1 2 9 0

UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Catarina Sofia Ferreira Vicente

O INÍCIO DE UMA JORNADA COMO PROFESSORA DE MATEMÁTICA

Relatório de Estágio no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário orientado pela Professora Doutora Helena Maria Mamede Albuquerque e apresentado ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Junho de 2024

O início de uma jornada como Professora de Matemática

Catarina Sofia Ferreira Vicente

Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Master in Mathematics Teaching in the 3rd Cycle of Basic and Secondary Education

Relatório de Estágio | Report of Stage

Junho 2024

Agradecimentos

Ao Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra e à Escola Secundária José Falcão, por me receberem tão bem.

À Professora Doutora Helena Albuquerque, Orientadora Científica, pela disponibilidade e por todos os conhecimentos cedidos.

À Professora Natividade Morgado, Orientadora Cooperante, por todos os ensinamentos que me transmitiu, pelo altruísmo e pela dedicação com que nos recebeu.

Ao meus colegas de estágio, David e Duarte, por me acompanharem durante esta aventura.

A todos os meus alunos, em particular à turma 7, por toda a colaboração e carinho, por tudo o que me ensinaram.

A todos os meus amigos, em especial à Mariana, pelo companheirismo e por toda a amizade.

À Inês e à Joana, por serem as melhores amigas que podia pedir para partilhar estes cinco anos, por fazerem parte de todas as memórias felizes do meu percurso académico.

Ao Francisco, por caminhar de mão dada comigo durante esta etapa, por todo o apoio, por acreditar em mim e nunca me deixar desistir.

A toda a minha família, por estar sempre lá para mim, por todo o aconchego e afeto.

Aos meus avós, por todo o suporte que me dão, por serem um exemplo de trabalho, força, determinação e resiliência.

Ao meu irmão, por ser o meu melhor amigo, por estar sempre presente.

Aos meus pais, por todo o amor, por serem o meu porto seguro, por me encorajarem sempre a alcançar os meus objetivos, sem eles isto não seria possível.

A ti Coimbra,
serei sempre grata por me acolheres, por me permitires viver experências e conhecer pessoas que ficarão para sempre na minha memória; não me vou despedir, será eternamente um até já.

Resumo

O presente relatório, foi redigido no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Reflete todo o trabalho desenvolvido pela Professora Estagiária durante o Estágio Pedagógico, na Escola Secundária José Falcão, no ano letivo 2023/2024, orientado cientificamente pela Doutora Helena Albuquerque e pedagogicamente pela Professora Natividade Morgado.

A Professora Estagiária acompanhou todas as aulas da Orientadora Cooperante nas turmas que lhe foram atribuídas, tendo realizado a prática de ensino supervisionada na turma 7 do 12º ano. A par da lecionação de aulas, a autora deste relatório desenvolveu atividades para a comunidade escolar, participou em reuniões, acompanhou o trabalho de um Diretor de Turma e integrou Estruturas de Orientação Pedagógica e Educativa.

O Estágio Pedagógico é um marco importante no percurso de um estudante estagiário, onde a dicotomia entre ensinar e aprender é constante. Este relatório pretende descrever todas as atividades desenvolvidas e competências adquiridas durante a prática pedagógica. No final, é feita uma reflexão crítica acerca deste ano de aprendizagem.

Palavras-chave: Estágio Pedagógico; Professor; Matemática; Ensino; Aluno; Escola.

Abstract

This report was written as part of the Master's degree in Mathematics Education for the 3rd Cycle of Basic Education and Secondary Education at the Department of Mathematics of the University of Coimbra. It reflects all the work developed by Student Teacher during her Teaching Internship at José Falcão Secondary School in the 2023/2024 academic year, scientifically supervised by Professor Helena Albuquerque and pedagogically supervised by Professor Natividade Morgado.

The Student Teacher attended all the classes of the Cooperating Supervisor in the assigned classes, having conducted supervised teaching practice in the 12th grade, class 7. In addition to teaching classes, the author of this report developed activities for the school community, participated in meetings, followed the work of a class director, and integrated Pedagogical and Educational Guidance Structures.

The Pedagogical Internship is an important step for the journey of a Student Teacher , where the dichotomy between teaching and learning is constant. This report aims to describe all the activities and developed skills during the teaching practice. At the end, a critical reflection on this year of learning is provided.

Keywords: Pedagogical Internship; Teacher; Math; Teaching; Student; School.

Conteúdo

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Em setembro de 2019, ingressei na Licenciatura em Matemática da Universidade de Coimbra. Foram anos de muita dedicação, de crescimento e evolução, que exigiram de mim uma grande capacidade de trabalho e de perseverança para com as dificuldades que surgiram. Com isso, adquiri competências científicas, pessoais e sociais que serão, certamente, basilares no trabalho que irei desenvolver no futuro.

Desde cedo que sei que quero ser Professora. Considero que é das profissões mais desafiantes e gratificantes que existem. Um Professor tem a oportunidade e a responsabilidade de mudar vidas, de preparar crianças para o futuro e de instruir a sociedade. Em particular, um Professor de Matemática tem a tarefa acrescida de desconstruir a ideia de que esta ciência é "um bicho de sete cabeças", de mostrar como a Matemática é interessante e faz parte, a todo o momento, do nosso dia a dia.

Estou consciente de todas as dificuldades e deveres que a carreira acarreta, mas acredito que os Professores são pilares essenciais na Educação, não apenas pela transmissão de conhecimento, mas também pelo impacto que exercem na vida dos alunos, moldando os seus valores e atitudes.

Foi com esta convicção, que me candidatei ao Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Foi aqui que, desde o primeiro ano, comecei a minha formação na área educacional. No ano letivo 2023/2024, no âmbito da unidade curricular "Estágio e Relatório", chegou o tão esperado momento de realizar a minha prática de ensino supervisionada.

Através desta experiência, que tive o privilégio de viver na Escola Secundária José Falcão, procurei desenvolver competências pedagógicas e científicas, aperfeiçoar práticas de ensino e inteirar-me sobre os desafios inerentes à profissão. Com a colaboração da Orientadora Científica, Doutora Helena Albuquerque, da Orientadora Cooperante, Professora Natividade Morgado, e dos meus dois colegas Estagiários, David Cotrim e Duarte Marques, acompanhei duas turmas de 12º ano, tendo realizado a prática de ensino supervisionada numa delas.

Neste relatório pretendo descrever o trabalho que desenvolvi durante o último ano, em cinco capítulos: Introdução, Enquadramento do Estágio Pedagógico, Prática Pedagógica, Estruturas de Orientação Pedagógica e Educativa e Atividades.

Capítulo 2

Enquadramento do Estágio Pedagógico

2.1 Escola Secundária José Falcão [12]

2.1.1 Contextualização Histórica

A História da Escola Secundária José Falcão (ESJF) começou em 1836, quando o Ministro do Reino, Passos Manuel, criou os primeiros três liceus em Portugal, nas cidades de Coimbra, Lisboa e Porto.

O Liceu de Coimbra foi instalado na Alta, no edifício do antigo Colégio das Artes (fundado em 1548 por D. João III), aproveitando os professores que já lá lecionavam. Aproximadamente 20 anos depois, é instalado na parte inferior do antigo Colégio das Artes um hospital que impulsionou a mudança do Liceu de Coimbra para o Colégio de S. Bento.

Mais tarde, depois da Implantação da República, em 1914, este Liceu passou a chamar-se Liceu José Falcão, em homenagem a um grande defensor do Republicanismo, José Joaquim Pereira Falcão, catedrático de Matemática da Universidade de Coimbra e que já havia sido aluno e professor de Alemão no Liceu de Coimbra.

Em 1928, devido ao crescimento da população escolar, foi criado o Liceu Dr. Júlio Henriques, que funcionava, tal como o Liceu José Falcão, numa ala do edifício de São Bento. Este espaço começou a ser pequeno para a procura escolar que existia.

Em 1936, é construído o edifício atual, na Avenida D. Afonso Henriques, para atender às necessidades da população. Os dois liceus unem-se, criando um só que se passa a chamar Liceu D. João III, em homenagem ao rei que fez com que Coimbra deixasse de ser uma cidade de província e passasse a ser a cidade dos estudantes.

Após 25 de Abril de 1974, o Liceu D. João III volta a ter o nome de José Falcão. No ano de 1978, com a junção, em todo o país, dos Liceus e das Escolas Industriais e Comerciais, que passaram a Escolas Secundárias, esta instituição passa a ter o nome atual: Escola Secundária José Falcão.

Em 2010, o edifício da Escola Secundária José Falcão, projetado pelo arquiteto Carlos Ramos, foi classificado pelo IGESPAR (Instituto de Gestão do Património Arquitectónico e Arqueológico) como Monumento de Interesse Público, dada a sua importância quando se fala do Modernismo em Portugal.

2.1.2 Oferta Educativa

A prioridade da Escola Secundária José Falcão é garantir uma oferta educativa abrangente, de forma a responder às necessidades educativas dos seus alunos. Apresenta-se de seguida a oferta desta escola para o ano letivo 2023/2024:

- 3º Ciclo do Ensino Básico;
- Ensino Secundário: Cursos Científico-Humanísticos (Ciências e Tecnologias; Artes Visuais; Ciências Socioeconómicas; Línguas e Humanidades);
- Ensino Profissional: Técnico de Multimédia; Técnico de Turismo; Técnico Auxiliar de Saúde; Gestão e Programação de Sistemas Informáticos.

A par desta oferta, a ESJF é uma escola de formação de professores, contando no presente ano letivo com a presença de alguns núcleos de estágio.

2.2 Núcleo de Estágio

No ano letivo 2023/2024, o Núcleo de Estágio de Matemática (NEM) que funcionou na Escola Secundária José Falcão, foi composto pela Orientadora Científica Doutora Helena Albuquerque, pela Orientadora Cooperante, Professora Natividade Morgado, e pelos Professores Estagiários, Catarina Vicente, David Cotrim e Duarte Marques.

Ainda antes do começo da atividade letiva, o NEM estabeleceu que todos os Professores Estagiários acompanhavam integralmente as turmas da Orientadora Cooperante, participando ativamente no trabalho destas, dentro e fora da sala de aula, inclusive nos assuntos do âmbito das direções de turma.

2.3 Caracterização das Turmas

No corrente ano escolar, foram atribuídas à Orientadora Cooperante duas turmas do 12º ano de Matemática A.

2.3.1 12º 5

A turma 5 do 12º ano integrou o curso de Ciências e Tecnologias e tinha a seguinte caracterização: era composta por 26 alunos, quinze rapazes e onze raparigas, em que todos estavam matriculados na disciplina de Matemática A; as idades dos discentes variavam, no início do ano letivo, entre dezasseis e dezoito anos, sendo a média das mesmas de 16,89 anos; o nível socioeconómico dos alunos era médio-alto, com apenas três alunos a usufruir de Ação Social Escolar (ASE); apenas um aluno carecia de Medidas de Suporte à Aprendizagem e à Inclusão ao abrigo do Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho [10], sendo que o mesmo, por indicação médica, nunca frequentou as aulas, tendo cancelado a matrícula no segundo período. Os alunos foram, de um modo geral, assíduos e pontuais. A par disso, o comportamento global da turma foi avaliado pelo Conselho de Turma como Muito Bom, em todos os períodos letivos.

Quanto ao aproveitamento, a média final da turma, englobando todas as disciplinas, foi superior, em todos os períodos, à média da turma considerando apenas a disciplina de Matemática A. É de notar, que nesta turma, na referida disciplina, ocorreu uma grande disparidade de notas, sendo que no final do ano letivo, a classificação mais baixa foi de 8 valores e a mais alta foi de 20 valores.

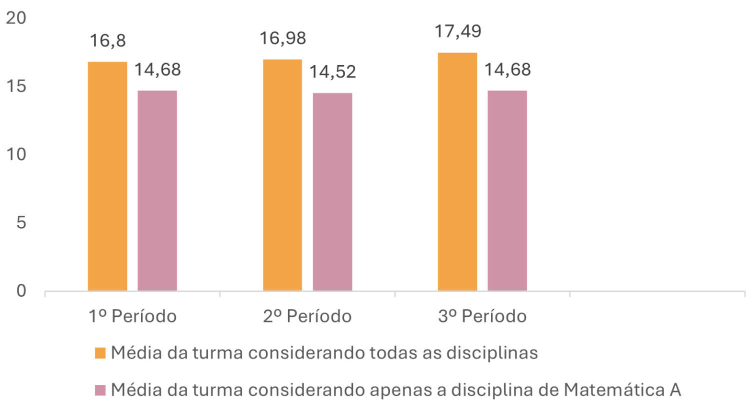


Fig. 2.1 Média global do 12º5 comparada à média considerando apenas a disciplina de Matemática A

Classificação final	Número de alunos		
	1ºPeríodo	2ºPeríodo	3ºPeríodo
$[\mathbf{0},\mathbf{5}[$	0	0	0
$[\mathbf{5},\mathbf{10}[$	2	4	3
$[\mathbf{10},\mathbf{14}[$	6	6	6
$[\mathbf{14},\mathbf{18}[$	10	9	7
$[\mathbf{18},\mathbf{20}[$	7	6	9

Fig. 2.2 Classificações do 12º5 na disciplina de Matemática A

Fig. 2.3 Turma 5 do 12º ano

2.3.2 12º 7

A turma 7 do 12º ano frequentava o curso de Ciências Socioeconómicas e tinha a seguinte caracterização: era composta por 18 alunos, dez rapazes e oito raparigas, dos quais apenas 14 estavam matriculados na disciplina de Matemática A; as idades dos alunos estavam compreendidas, no início do ano letivo, entre os dezasseis e os dezoito anos, sendo a sua média de 17,1 anos; nenhum aluno estava contemplado na Ação Social Escolar; dos catorze discentes inscritos à disciplina de Matemática, três necessitavam de Medidas de Suporte à Aprendizagem e à Inclusão (MSAI), ao abrigo do Decreto-Lei n.º 54/2018 [10], de 6 de julho, acumulando Medidas Seletivas e Adaptações ao Processo de Avaliação. Estes alunos podiam usufruir de sala à parte e de tempo suplementar nos momentos formais de avaliação. Ao longo do ano a citada turma sofreu alterações: no final do primeiro período um aluno foi transferido de escola e, no final do segundo período, uma aluna cancelou a matrícula a Matemática A, o que levou a que no final do ano letivo, à referida disciplina, houvesse apenas 12 alunos inscritos.

Na disciplina de Matemática, os alunos mostraram ter sempre um comportamento muito bom, não havendo nada de significativo a referir no respeitante à assiduidade e à pontualidade. Em relação ao aproveitamento, no 12º 7 também se verificou que a média final a todas as disciplinas foi superior à média considerando apenas a disciplina de Matemática A. Ainda assim, no final do ano letivo, não existiram classificações inferiores a 10 valores.

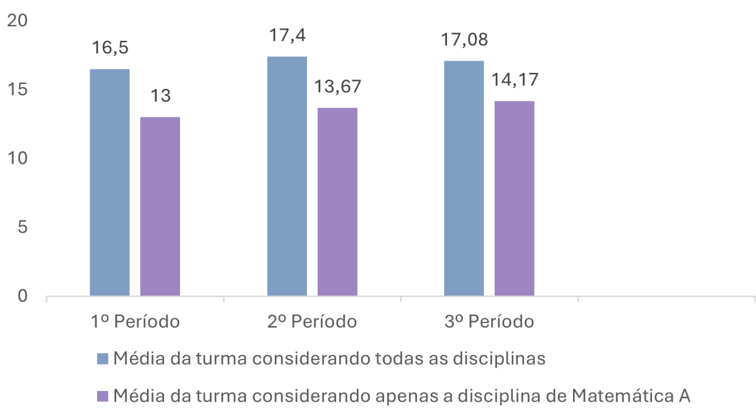


Fig. 2.4 Média global do 12º7 comparada à média considerando apenas a disciplina de Matemática A

Classificação final	Número de alunos		
	1ºPeríodo	2ºPeríodo	3ºPeríodo
$[0,5[$	0	0	0
$[5,10[$	1	2	0
$[10,14[$	5	3	5
$[14,18[$	4	5	5
$[18,20[$	2	2	2

Fig. 2.5 Classificações do 12º7 na disciplina de Matemática A

É de salientar, que a autora deste relatório realizou todas as suas aulas assistidas nesta turma e, portanto, manteve naturalmente, ao longo do ano, um maior contacto com estes discentes, acompanhando o seu progresso de uma forma individualizada. Os mesmos sempre se revelaram bastante unidos e colaborativos, com vontade de aprender e superar as exigências inerentes aos conteúdos lecionados.

Fig. 2.6 Turma 7 do 12º ano

Capítulo 3

Prática Pedagógica

3.1 Planificações

Existem ferramentas indispensáveis para otimizar o trabalho de um docente, e as planificações das aulas são uma das mais significativas: permitem fazer uma melhor gestão dos conteúdos a lecionar consoante o tempo disponível. Todas as planificações mencionadas de seguida têm como referência as Aprendizagens Essenciais (homologadas a 31 de agosto de 2018) [9] e o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória [8].

3.1.1 Planificação Anual

A Planificação Anual por disciplina pretende dar aos professores envolvidos uma perspetiva global da distribuição dos temas a abordar. Deste modo, o Grupo de Matemática da ESJF elabora todos os anos um documento orientador para cada nível de escolaridade e para as respetivas disciplinas.

A Planificação Anual do 12º ano de Matemática A, referente ao ano letivo 2023/2024, encontra-se no Anexo A.

3.1.2 Planificações por Período

Uma vez que a Planificação Anual não providencia pormenores acerca da atuação ao longo do ano, são elaboradas Planificações por Período, que fornecem mais detalhes relativamente aos conhecimentos, capacidades e atitudes a desenvolver nos discentes e, também, às possíveis estratégias a adotar pelo professor. No Anexo B, encontra-se a Planificação do 2º Período do 12º ano de Matemática A, elaborada pelos docentes da ESJF.

É de realçar, que as planificações mencionadas anteriormente são apenas uma orientação, pois cada turma apresenta uma realidade diferente, tornando-se crucial que cada professor organize e planifique as suas aulas de acordo com o contexto. Deste modo, a Professora Estagiária elaborava um plano semanal de ação onde, no decorrer dos períodos letivos, antecipava as semanas que se seguiam consoante o trabalho desenvolvido e a experiência que já detinha de cada turma. A Planificação Semanal do 2º Período da turma 7 do 12º ano encontra-se no Anexo C.

3.1.3 Planificação de Aulas

É fundamental refletir sobre cada aula, sobre quais os objetivos que queremos atingir e como os queremos alcançar, tendo sempre em consideração as particularidades dos alunos implicados e dos materiais/recursos disponíveis. Deste modo, a redação de planificações de cada aula, torna-se uma mais-valia para que se consiga ter em consideração todos estes fatores.

No decurso do ano letivo, a autora deste relatório elaborou diversos planos de aulas, que foi aprimorando com o auxílio da Orientadora Cooperante e da Orientadora Científica. Apresentam-se nos Anexos F.1 e G.1 dois dos planos concebidos. Para a sua elaboração foram consultados vários manuais escolares [5, 13, 17, 18, 20, 21] e alguns recursos científicos e pedagógicos de acordo com os conteúdos a lecionar [19, 22–24].

3.2 Aulas

3.2.1 Aulas Observadas

No decorrer do ano letivo, acompanhar a Professora Natividade Morgado na sua prática letiva foi determinante para o crescimento como Professora da autora deste relatório. A experiência que detém é notória no modo como lida com as particularidades de cada turma e, em especial, de cada aluno; além disso, o rigor científico, o brio e o sentido de responsabilidade são características que despertaram desde cedo a admiração da Professora Estagiária pela sua Orientadora Cooperante.

Durante as suas aulas, a Professora Estagiária pôde observar e refletir sobre as estratégias usadas e, dado o caráter prático da disciplina de Matemática, auxiliar os alunos a ultrapassar as suas dificuldades.

3.2.2 Aulas Lecionadas

A Professora Estagiária, ao longo do ano letivo, lecionou aulas acerca dos vários conteúdos programáticos, a saber: Cálculo Combinatório e Probabilidades [2]; Funções Reais de Variável Real [15]; Trigonometria e Funções Trigonométricas; Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas; Números Complexos [3].

No começo do ano, as aulas dadas pela autora deste relatório eram agendadas em conjunto com a Orientadora Cooperante, de forma a dar tempo para preparar os assuntos a lecionar. O planeamento antecipado das aulas permitiu que a Professora Estagiária sentisse uma maior segurança e tranquilidade nas suas primeiras experiências em frente a uma turma. Com o decorrer do tempo, deixou de ser necessário definir datas especificas, uma vez que esta passou a participar na lecionação das aulas de forma espontânea, tanto individualmente como em coadjuvância com a Professora Natividade Morgado.

9º ano

A Escola, além de uma instituição que visa instruir, deve ser um local onde impere um ambiente inclusivo e colaborativo entre todos os membros da comunidade escolar, em particular, entre professores. Por conseguinte, criam-se condições para melhorar a qualidade da educação oferecida aos discentes. Perante uma situação de baixa médica, por um mês, de uma colega que lecionava uma turma de 8º ano e três turmas de 9º ano, o NEM prontificou-se a lecionar as suas aulas, quando estas não coincidiam com o horário letivo da Orientadora Cooperante, até ser colocado um professor substituto. Depois do aval da Direção da ESJF, a Professora Estagiária ficou encarregue de dar as aulas das turmas 1 e 2 do 9º ano.

Para estas aulas a Professora Estagiária elaborou duas fichas de trabalho (o seu enunciado e a sua resolução encontram-se, respetivamente, no Anexo D.1 e no Anexo D.2) acerca dos conteúdos abordados: numa primeira fase, realizaram-se algumas revisões sobre Volumes de Sólidos Geométricos; e, numa segunda fase, abordou-se o Volume da Esfera. Para a elaboração das fichas de trabalho foi consultado um manual escolar [4].

Aula de Cidadania e Desenvolvimento

A Escola deve ter um papel ativo na consciencialização para as boas práticas de cidadania, nomeadamente, no peso de um papel ativo dos jovens na Democracia. Apesar de não integrar o programa de Matemática A, tornou-se pertinente, dadas as eleições legislativas portuguesas de 2024, que ocorreram a 10 de março, abordar o tema "Instituições e Participação Democrática" que consta nos domínios a desenvolver na componente de Cidadania e Desenvolvimento.

Assim, no dia 27 de fevereiro, a Professora Estagiária lecionou uma aula sobre o tema "Eleições Legislativas" na turma 7 do 12º ano, apoiada numa apresentação em PowerPoint (Anexo E), que incidiu no Método D'Hondt. A reação dos alunos a este tema foi muito positiva, uma vez que, para alguns deles, foram as primeiras eleições onde exerceram o direito de voto.

Aulas Assistidas

- **1º Aula Assistida**

No dia 28 de novembro de 2023, a autora deste relatório realizou a sua primeira aula assistida pela Orientadora Científica, na turma 7 do 12º ano, com a duração de dois tempos letivos. O respetivo plano de aula encontra-se no Anexo F.1.

Dado a turma em questão ter exame nacional no presente ano letivo, foi deixado ao critério da Professora Estagiária o tema sobre o qual incidiria a sua primeira aula assistida. De forma a rever conteúdos lecionados no 12º ano e em anos anteriores, a própria estabeleceu que a sua aula iria abranger vários temas, entre os quais: Funções Reais de Variável Real, Probabilidades e Cálculo Combinatório.

A estratégia definida para esta aula, o modelo de "Rotação por Estações", surgiu como uma alternativa à sala de aula tradicional. Neste modelo, o professor organiza antecipadamente a sala de aula em diferentes espaços, cada um com uma tarefa, onde pelo menos uma delas necessita de recurso à tecnologia. Os alunos são distribuídos em grupos, cada grupo começa com uma tarefa inicial diferente e, após um tempo previamente definido, os grupos trocam de estação.

Colocando em prática este modelo, ainda antes do toque de entrada, a Professora Estagiária organizou a sala em quatro estações, onde colocou os enunciados das tarefas (Anexo F.2), o material necessário à sua realização e folhas de resposta.

Logo que os discentes entraram na sala foram divididos por quatro grupos (de quatro ou cinco elementos cada) e encaminhados para aquela que iria ser a sua primeira estação. Uma vez todos a postos, o cronómetro que estava projetado no quadro começou a contar. A cada quinze minutos, o alarme disparava e os alunos paravam a tarefa que estavam a fazer e passavam à estação seguinte. Isto sucedeu quatro vezes, até todos os grupos passarem por todas as estações.

De seguida, faz-se uma breve descrição de cada estação:

1. Estação A: nesta estação estava o enunciado de uma tarefa que envolvia Funções Reais de Variável Real, mais concretamente Derivadas e Monotonia. Note-se, para facilitar a visualização da tarefa, a Professora Estagiária elaborou uma caixa em cartolina, com as mesmas características que a descrita no enunciado, que colocou à disposição dos vários grupos.

Fig. 3.1 Material 1º Aula Assistida

2. Estação B: neste posto, os discentes eram levados a resolver um mistério cuja resolução envolvia Cálculo Combinatório.

3. Estação C: neste espaço os alunos tinham disponível um computador com um *applet* (disponibilizado por uma editora [1]), que relacionava a temática de Probabilidades com Funções Reais de Variável Real.

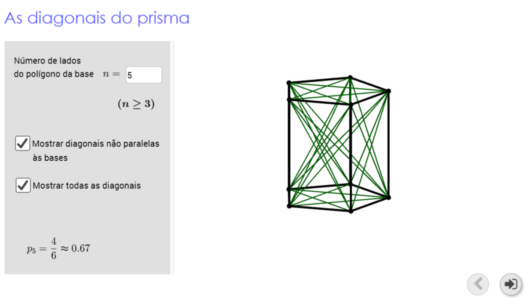


Fig. 3.2 *Applet* Estação C

4. Estação D: nesta estação, os alunos tinham dez questões de escolha múltipla para resolver, abrangendo todas as temáticas acima referidas.

No tempo restante da aula, a Professora Estagiária iniciou a correção das tarefas no quadro que posteriormente ficou disponível para os alunos no Classroom da turma (Anexo F.3).

Os alunos mostraram-se bastante interessados e focados durante o decorrer da aula. Trabalharam em grupo de forma a tentar resolver todas as tarefas no tempo que tinham disponível.

- **2º Aula Assistida**

No dia 12 de abril de 2024, a Professora Estagiária realizou a sua segunda aula assistida, durante dois tempos letivos no 12º 7. A planificação referente a esta aula encontra-se no Anexo G.1.

Esta aula coincidiu com a lecionação da unidade “Números Complexos” e foi concebida de forma a ter dois momentos distintos: um primeiro momento dedicado a apresentar aos alunos uma aplicação dos números complexos e um segundo momento reservado à prática de operações entre números complexos na forma algébrica. Para esta aula os alunos foram avisados antecipadamente da necessidade de trazerem o seu computador portátil.

Na primeira parte da aula, com a duração aproximada de 60 minutos, foi explorado o tema “Fractais” [16]. Embora este assunto não esteja previsto no programa de Matemática A, a sua simplicidade matemática permite que seja abordado com os alunos de uma forma compreensível e bastante apelativa.

Começou-se por fazer uma introdução breve ao tema, através de uma apresentação em PowerPoint (Anexo G.2), esclarecendo o conceito de “Fractal” e mostrando alguns exemplos de fractais na natureza e na matemática.

Posto isto, os alunos juntaram-se em pares e começaram a explorar no *GeoGebra* [14] a Tarefa Guiada “Fractais e Números Complexos” (Anexo G.3), elaborada pela autora deste relatório. Enquanto isso, no quadro, encontrava-se a pergunta: “Qual é a relação dos números complexos com os fractais?”. A intenção subjacente à pergunta e à tarefa era que os discentes concluíssem que era possível gerar fractais utilizando apenas sucessões definidas por recorrência no conjunto dos números complexos.

Uma vez concluídos os trabalhos em pares, a Professora Estagiária analisou em conjunto com a turma os passos por detrás da tarefa e, por fim, introduziu a noção de “Conjunto de Júlia”, mostrando as imagens dos fractais que cada grupo gerou. Repare-se que se alterou os valores dados na tarefa de cada grupo para que cada um gerasse um fractal diferente.

Para a segunda parte da aula, foi elaborado pela autora deste relatório um jogo didático designado “Bingo Complexo". Neste jogo, existia um pote com vários papéis (as "bolas") que continham operações entre complexos, e cartões com vários números, que correspondiam aos resultados das "bolas".

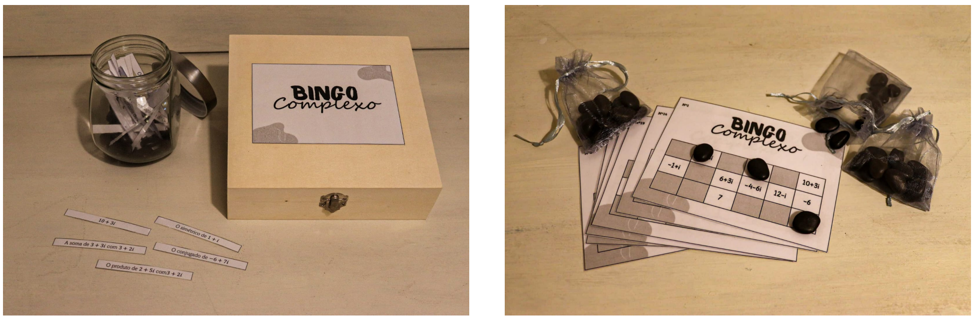


Fig. 3.3 Jogo "Bingo Complexo"

Foi distribuído um cartão por aluno e, de cada vez que era retirado um papel, os alunos tinham de realizar o cálculo e, caso tivessem no seu cartão o resultado, colocavam uma pedra sobre ele. O objetivo do jogo era que no fim de retiradas as 30 bolas todos os alunos tivessem os cartões completos, o que só não acontecia caso se enganassem nos cálculos.

Os alunos colaboraram durante toda a aula, mostrando-se interessados e curiosos em ver os resultados da execução da primeira tarefa (os fractais) e muito entusiasmados para serem os primeiros a fazer “bingo” no segundo momento da aula.

3.3 Avaliação Pedagógica

A avaliação vai muito além da atribuição de notas: desempenha um papel fundamental no contexto educativo, servindo não apenas para medir o desempenho dos alunos, mas também como uma ferramenta essencial para a melhoria constante do processo ensino-aprendizagem. Deve envolver elementos de natureza diversa, como a observação, o registo e análise de evidências de aprendizagem, proporcionando uma visão integral do progresso dos alunos. Neste sentido, é importante considerar tanto as avaliações formativas, que ocorrem de forma contínua ao longo do ano letivo e têm um caráter orientador, quanto as avaliações sumativas, que visam quantificar e qualificar a aprendizagem.

3.3.1 Projeto MAIA

No ano letivo 2023/2024, a avaliação pedagógica na Escola Secundária José Falcão regia-se segundo os critérios do Projeto MAIA (Monotorização, Acompanhamento e Investigação em Avaliação Pedagógica) [11]. Este projeto surgiu em setembro de 2019 com a intenção de transformar as práticas de avaliação nas escolas, promovendo métodos mais formativos que colocasem as aprendizagens dos alunos no centro do processo educativo. Assim, este projeto visa promover práticas de avaliação que forneçam aos alunos feedback contínuo e detalhado, permitindo-lhes compreender melhor os seus progressos e áreas a melhorar. Além disso, enfatiza a importância de avaliações diversificadas e contextualizadas, que considerem não apenas os resultados, mas também o processo de aprendizagem.

Com isto, na ESJF, na disciplina de Matemática A, a avaliação ocorreu tendo em conta quatro domínios:

D1: Saber Científico, Técnico, Tecnológico, Artístico e Ambiental
D2: Raciocínio, Resolução de Problemas
D3: Investigação e Comunicação
D4: Desenvolvimento Pessoal e Interpessoal

Os domínios citados anteriormente tiveram uma ponderação de, respetivamente, 40%, 40%, 10% e 10% na classificação final dos alunos. No Anexo H encontra-se o documento elaborado pelo grupo de Matemática da ESJF com os critérios de avaliação comuns à referida disciplina no presente ano letivo.

3.3.2 Heteroavaliação

Ao longo do ano letivo, nas turmas da Orientadora Cooperante, foram realizados onze momentos formais de avaliação: cinco provas globais e seis provas parcelares. Estas provas foram concebidas de forma a avaliar os domínios 1, 2 e 3. Por sua vez, o domínio 4 era fruto, principalmente, do trabalho de cada aluno em sala de aula, em especial da sua autonomia na realização das tarefas propostas.

Todos os momentos de avaliação foram marcados antecipadamente, em conjunto com os alunos, no início de cada período letivo.

Prova Global de Avaliação

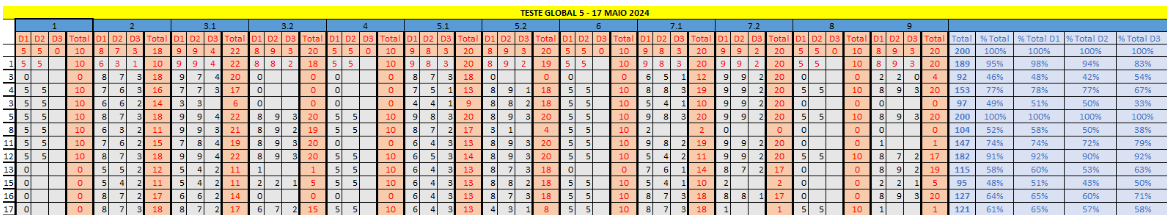
A elaboração de uma prova global de avaliação exige um planeamento criterioso e um alinhamento com os objetivos estabelecidos para a mesma.

Inicialmente, é necessário definir os conteúdos a serem avaliados e garantir que estão de acordo com os conhecimentos desenvolvidos nos discentes. Nesta perspetiva, para cada prova global foi elaborada uma matriz, disponibilizada aos discentes com, pelo menos, duas semanas de antecedência. No Anexo I.1 pode ser encontrado um exemplar de uma das matrizes elaboradas pelo NEM.

Depois de redigida a matriz, é chegado o momento de elaborar a prova. É sabido que a formulação das questões deve ser diversificada, incluindo diferentes níveis de complexidade e tipos de perguntas, como as de resposta aberta e as de escolha múltipla. Além disso, é ainda importante garantir a clareza e objetividade das perguntas, de forma a evitar ambiguidades.

Após a elaboração da prova, a mesma deve ainda ser revisada de modo a identificar possíveis erros. A Professora Estagiária participou na elaboração de todas as provas, encontrando-se no Anexo I.2 um exemplar de uma prova global e no Anexo I.3 a respetiva resolução, elaborada pela autora deste relatório.

Por último, devem ainda ser elaborados os critérios de classificação, que são essenciais para garantir uma avaliação justa e imparcial dos discentes. Os critérios que dizem respeito à prova mencionada anteriormente, elaborados pela autora deste relatório, encontram-se no Anexo I.4.



TESTE GLOBAL 5 - 17 MAIO 2024

	1				2				3.1				3.2				4			
	D1	D2	D3	Total	D1	D2	D3	Total	D1	D2	D3	Total	D1	D2	D3	Total	D1	D2	D3	Total
	5	5	0	10	8	7	3	18	9	9	4	22	8	9	3	20	5	5	0	10
1	5	5		10	6	3	1	10	9	9	4	22	8	8	2	18	5	5		10
3	0			0	8	7	3	18	9	7	4	20	0			0	0			0
4	5	5		10	7	6	3	16	7	7	3	17	0			0	0			0
3	5	5		10	6	6	2	14	3	3		6	0			0	0			0
5	5	5		10	8	7	3	18	9	9	4	22	8	9	3	20	5	5		10
8	5	5		10	6	3	2	11	9	9	3	21	8	9	2	19	5	5		10
11	5	5		10	7	6	2	15	7	8	4	19	8	9	3	20	0			0
12	5	5		10	8	7	3	18	9	9	4	22	8	9	3	20	5	5		10
13	0			0	5	5	2	12	5	4	2	11	1			1	5	5		10
15	0			0	5	4	2	11	5	4	2	11	2	2	1	5	5	5		10
16	0			0	8	7	2	17	6	6	2	14	0			0	0			0
17	0			0	8	7	3	18	8	7	2	17	6	7	2	15	5	5		10

	5.1				5.2				6				7.1				7.2			
	D1	D2	D3	Total	D1	D2	D3	Total	D1	D2	D3	Total	D1	D2	D3	Total	D1	D2	D3	Total
	9	8	3	20	8	9	3	20	5	5	0	10	9	8	3	20	9	9	2	20
1	9	8	3	20	8	9	2	19	5	5		10	9	8	3	20	9	9	2	20
3	8	7	3	18	0			0	0			0	6	5	1	12	9	9	2	20
4	7	5	1	13	8	9	1	18	5	5		10	8	8	3	19	9	9	2	20
3	4	4	1	9	8	8	2	18	5	5		10	5	4	1	10	9	9	2	20
5	9	8	3	20	8	9	3	20	5	5		10	9	8	3	20	9	9	2	20
8	8	7	2	17	3	1		4	5	5		10	2			2	0			0
11	6	4	3	13	8	9	3	20	5	5		10	9	8	2	19	9	9	2	20
12	6	5	3	14	8	9	3	20	5	5		10	5	4	2	11	9	9	2	20
13	6	4	3	13	8	7	3	18	0			0	7	6	1	14	8	7	2	17
15	6	4	3	13	8	8	2	18	5	5		10	5	4	1	10	2			2
16	6	4	3	13	8	7	3	18	5	5		10	8	7	3	18	8	8	1	17
17	6	4	3	13	4	3	1	8	5	5		10	8	7	3	18	1			1

	8				9								
	D1	D2	D3	Total	D1	D2	D3	Total	Total	% Total	% Total D1	% Total D2	% Total D3
	5	5	0	10	8	9	3	20	200	100%	100%	100%	100%
1	5	5		10	8	9	3	20	189	95%	98%	94%	83%
3	0			0	2	2	0	4	92	46%	48%	42%	54%
4	5	5		10	8	9	3	20	153	77%	78%	77%	67%
3	0			0	0			0	97	49%	51%	50%	33%
5	5	5		10	8	9	3	20	200	100%	100%	100%	100%
8	0			0	0			0	104	52%	58%	50%	38%
11	0			0	1			1	147	74%	74%	72%	79%
12	5	5		10	8	7	2	17	182	91%	92%	90%	92%
13	0			0	8	9	2	19	115	58%	60%	53%	63%
15	0			0	2	2	1	5	95	48%	51%	43%	50%
16	0			0	8	9	3	20	127	64%	65%	60%	71%
17	5	5		10	1			1	121	61%	65%	57%	58%

Fig. 3.4 Grelha de Avaliação de uma Prova Global

Prova Parcelar de Avaliação

As provas parcelares de avaliação, elaboradas segundo as mesmas normas e com o mesmo rigor das provas globais, têm uma menor ponderação na classificação final.

Estas provas, permitem ao professor identificar de forma precoce as dificuldades dos alunos, possibilitando ajustes rápidos nas estratégias em sala de aula, bem como um ensino mais adaptado às necessidades de cada turma e de cada discente. Para os alunos, as provas parcelares, ao serem aplicadas regularmente, ajudam a consolidar os conhecimentos, através do estudo contínuo dos conteúdos. Fornecem um feedback imediato, permitindo que estes reconheçam as áreas que têm de melhorar, e ainda possibilitam redução do peso das provas globais, o que se traduz numa menor ansiedade dos discentes nos momentos de avaliação.

No Anexo J.1 e no Anexo J.2 encontra-se, respetivamente, uma prova parcelar de avaliação e a sua resolução, elaborada pela Professora Estagiária.

AVALIAÇÃO 12º7 2023/2024																								
	1º PERÍODO									2ºPERÍODO							3ºPERÍODO							
Nº	MedD1	MedD2	MedD3	D4	MedPond	A.A.	10º	11º	1ºPer	MedD1	MedD2	MedD3	D4	MedPond	A.A.	2ºPer	MedD1	MedD2	MedD3	D4	MedPond	A.A.	3ºPer	NOTA FINAL DOS 3 ANOS
1	75%	71%	64%	80%	14,6	15	18	16	15	77%	74%	67%	95%	15,0	15	16	80%	77%	71%	95%	15,91	16	17	17
3	71%	68%	50%	80%	13,7	14	10	11	14	73%	68%	55%	95%	13,7	13	14	68%	62%	54%	80%	13,12	13	14	12
5	63%	58%	58%	95%	12,8	13	15	14	13	63%	61%	56%	95%	12,2	13	14	66%	65%	61%	95%	13,59	17	15	15
7	63%	50%	53%	95%	12,0	12	13	11	12	57%	45%	44%	95%	9,9	10	11	56%	45%	42%	95%	10,82	13	11	12
9	91%	86%	94%	95%	17,9	18	19	19	18	92%	89%	84%	100%	17,9	18	19	93%	91%	87%	100%	18,51	19	20	19
10	49%	48%	31%	60%	9,6	10	16	9	10	51%	43%	33%	60%	9,1	9	9	53%	44%	35%	60%	9,65	9	10	12
11	70%	67%	68%	80%	13,9	14	13	14	14	67%	61%	57%	95%	12,6	13	14	68%	62%	60%	95%	13,54	14	14	14
12	84%	84%	88%	95%	17,1	17	18	17	18	85%	81%	85%	100%	16,6	17	18	87%	83%	87%	100%	17,31	18	19	18
14	40%	27%	8%	60%	6,8	6	14	9	8	47%	35%	20%	60%	7,7	9	9	48%	37%	25%	80%	8,91	11	10	11
18	59%	56%	43%	95%	11,9	12	14	13	12	61%	56%	45%	95%	11,3	12	12	61%	54%	43%	95%	11,92	14	12	13
19	61%	52%	47%	95%	11,9	11	10	9	12	63%	56%	49%	95%	11,6	11	12	65%	58%	52%	95%	12,80	13	13	11
20	75%	71%	63%	80%	14,5	15	17	16	15	75%	73%	66%	95%	14,7	15	16	73%	70%	63%	80%	14,30	14	15	16

Fig. 3.5 Grelha de Avaliação Final

Trabalho de Grupo

Além dos instrumentos de avaliação citados anteriormente, os trabalhos de grupo também são uma prática importante, uma vez que promovem a socialização e a cooperação, que são essenciais no mundo que nos rodeia. Na turma 7 do 12º ano, houve oportunidade de realizar um trabalho de grupo no primeiro período, onde os discentes puderam desenvolver competências como a comunicação eficaz e a empatia. Além disso, nestes momentos ainda é privilegiada a aprendizagem dos conteúdos através da partilha de conhecimento entre pares.

3.4 Autoavaliação

A autoavaliação é uma ferramenta fundamental no processo de ensino e de aprendizagem, pois permite ao professor ter conhecimento da percepção do aluno sobre a qualidade do trabalho que desenvolveu e possibilita ao aluno, a reflexão sobre o seu desempenho e a sua aprendizagem. Isto traduz-se numa maior consciência de si próprio e promove a autonomia e a responsabilidade pelo seu próprio progresso. Neste contexto, o Grupo de Matemática da ESJF elaborou uma ficha de autoavaliação, que se encontra no Anexo K.

3.5 Reforço das Aprendizagens

3.5.1 Fichas de Trabalho

Os alunos devem ter um estudo contínuo e regular. Por conseguinte, considerou-se ser essencial disponibilizar fichas de trabalho ao longo do ano letivo, de forma a incentivar a prática e a consolidação dos conteúdos abordados em sala de aula. Além disso, dado o carácter formativo das fichas, estas ainda contribuíram para a promoção da autonomia dos alunos, que eram estimulados a resolver tarefas de forma independente. Os exercícios que mostravam gerar mais dúvidas eram resolvidos em conjunto com os discentes, na sala de aula ou nas aulas de apoio ao estudo. Das inúmeras fichas formativas elaboradas pelo NEM, no Anexo L.1 encontra-se a Ficha Formativa 35, que engloba exercícios de

Estatística de vários manuais e no Anexo L.2 está a resolução da mesma, elaborada pela autora deste relatório.

3.5.2 Apoio ao Estudo

No início do ano letivo a Professora Natividade Morgado disponibilizou às suas turmas horas semanais complementares, no sentido de reforçar e consolidar os conteúdos abordados. A Professora Estagiária assumiu ao longo de todo o ano a responsabilidade de acompanhar os alunos nestas aulas, que se realizavam duas vezes por semana na turma 7 (quartas e quintas-feiras das 8h30 às 9h20) e uma vez por semana na turma 5 (quintas-feiras das 12h20 às 13h10). Nestas aulas a autora deste relatório dedicou-se principalmente a esclarecer dúvidas pontuais e a orientar o estudo dos alunos.

Apesar do 12º 5 não ter mostrado grande adesão a estes apoios, os discentes do 12º 7, pelo contrário, sempre se mostraram bastante assíduos e pontuais, apresentando dúvidas continuamente, o que refletia o estudo regular dos mesmos. A Professora Estagiária considera que a sua presença nestas aulas foi uma mais-valia para estes alunos, uma vez que tiveram um acompanhamento mais individualizado e com isso conseguiram alcançar melhores resultados.

3.5.3 Preparação para o Exame Nacional

Após o término das aulas do 12º ano, no dia 4 de junho, até ao dia que antecedeu o Exame Nacional de Matemática A, 25 de junho, realizaram-se simultaneamente para as turmas 5 e 7, duas aulas semanais de dois tempos letivos cada. As mesmas foram marcadas de acordo com as salas vagas e com a disponibilidade da Orientadora Cooperante. A autora deste relatório esteve presente nestas aulas, tornando-se uma peça importante no esclarecimento das dúvidas que os alunos revelavam ter.

Dada a realização do Exame Nacional de Matemática de 9º ano no dia 12 de junho, a Professora Estagiária, sentindo-se familiarizada com os conteúdos em questão e tendo em conta a situação médica da professora titular da maior parte das turmas deste ano escolar, disponibilizou-se para coadjuvar nas aulas de preparação para este exame. A Direção da ESJF agradeceu, via e-mail, por este gesto e pelo auxílio prestado aos discentes da Escola.

Mais uma vez, considera-se que a comparência da autora deste relatório nestas aulas, tanto de 9º como de 12º ano, trouxe benefícios às aprendizagens dos alunos, que usufruíram de um maior auxílio na preparação para o exame nacional.

Capítulo 4

Estruturas de Orientação Pedagógica e Educativa

4.1 Órgãos da Escola

Os órgãos de gestão de uma escola desempenham um papel fundamental na organização e no funcionamento da mesma, garantindo a qualidade do ensino e a promoção de um ambiente educativo propício ao desenvolvimento dos alunos. Segundo os Decretos-Lei 75/2008 e 137/2012 [6, 7], estes órgãos incluem o Conselho Geral, o Diretor e o Conselho Pedagógico.

4.1.1 Conselho Geral

O Conselho Geral é um dos órgãos mais importantes da Escola, tendo um papel crucial na definição das linhas orientadoras da sua atividade. Este órgão é composto pelos vários elementos que definem a comunidade escolar, entre eles: pessoal docente e não docente, encarregados de educação, alunos e representantes do município e da comunidade local. O mandato dos membros do Conselho Geral tem a duração de quatro anos, e a sua principal função é aprovar os documentos estratégicos da Escola (Projeto Educativo, Regulamento Interno e Plano Anual de Atividades), assegurando que estes refletem as necessidades e as expectativas de toda a comunidade escolar. Além disso, o Conselho Geral é ainda responsável por eleger o Diretor e participar no processo de avaliação do mesmo.

4.1.2 Diretor

O Diretor é uma figura central na Escola, sendo responsável pela gestão pedagógica, administrativa, financeira e cultural da mesma. Cabe ao Diretor submeter ao Conselho Geral o Projeto Educativo, onde apresenta o planeamento institucional e estratégico da escola e aborda a missão e os objetivos gerais que orientam a ação educativa. A par disso, entre as suas principais funções, é responsável pela gestão dos recursos humanos e materiais, como a constituição das turmas, a elaboração dos horários e a distribuição de serviço do pessoal docente e não docente. No exercício das suas funções a Diretora da Escola Secundária José Falcão, Dr.ª Isabel Amoroso, é coadjuvada por um Subdiretor e por dois Adjuntos.

4.1.3 Conselho Pedagógico

O Conselho Pedagógico é um órgão fundamental na estrutura da Escola. É composto por dezassete membros, e responsável pela coordenação e supervisão das atividades pedagógicas. É presidido pelo diretor da escola e conta com a presença dos coordenadores dos departamentos curriculares e de pessoal das demais estruturas de coordenação, supervisão pedagógica e de orientação educativa, assegurando uma representação pluridisciplinar. Os deveres do Conselho Pedagógico passam por promover a formação contínua dos docentes, fomentar práticas de sucesso educativo e supervisionar os processos de avaliação dos alunos e do pessoal docente e não docente. Além do citado anteriormente, cabe ainda a este órgão apresentar propostas para a elaboração do Projeto Educativo, do Regulamento Interno e do Plano Anual de Atividades.

4.2 Direção de Turma

A Direção de Turma desempenha um papel muito importante na Escola, atuando como um elo de ligação entre professores, alunos e encarregados de educação. O diretor de turma é um professor designado para coordenar e acompanhar a evolução de uma turma específica, assegurando que os alunos recebem o apoio necessário para se desenvolverem pessoalmente e academicamente.

No ano letivo 2023/2024 à Professora Natividade Morgado coube o papel de diretora de turma do 12º 5, o que se revelou ter uma importância extrema na aprendizagem da Professora Estagiária, uma vez que contactou e participou em todas as tarefas que estão ao encargo de um diretor de turma. Estas tarefas passam por: reuniões regulares com encarregados de educação, de forma a informá-los sobre o progresso dos seus educandos; justificação de faltas na plataforma *iNovar*; organização de atividades extracurriculares que contribuam para a formação dos alunos; organização do dossiê da turma que contém todas as informações importantes acerca dos discentes; preparação das reuniões de conselho de turma.

4.3 Reuniões

Desde o início do ano letivo que a Direção da ESJF deu oportunidade aos Estagiários de Matemática para marcarem presença em inúmeras reuniões que se realizaram na Escola. Com isto, a autora deste relatório com a intenção de aprender mais acerca do trabalho de um professor foi assídua às reuniões que se apresentam de seguida. É de notar, que além destas, ainda esteve presente na reunião geral no começo do ano letivo e em várias reuniões com editoras de manuais escolares.

4.3.1 Reuniões do Grupo de Matemática

O Grupo 500, relativo à disciplina de Matemática, integra os professores de todos os níveis de escolaridade que lecionam esta disciplina nos vários cursos existentes na Escola. O grupo de Matemática no ano letivo 2023/2024 foi presidido pela Professora Helena Fernandes, e reunia entre uma a duas vezes por período, em geral antes das reuniões de Departamento. Nas reuniões de grupo eram sobretudo analisados os balanços dos resultados de cada turma em cada período letivo.

4.3.2 Reuniões do Departamento de Matemática e Ciências Experimentais

O Departamento de Matemática e Ciências Experimentais da ESJF é composto pelos professores das disciplinas de Matemática, Biologia e Geologia, Físico-Química e Informática e foi coordenado pela Professora Céu Correia. As reuniões de departamento eram principalmente dedicadas à transmissão de informações derivadas do Conselho Pedagógico, à análise global dos resultados de cada período nas várias disciplinas e à definição de estratégias para resolver os casos mais relevantes encontrados antecipadamente nas reuniões de grupo.

4.3.3 Reuniões de Diretores de Turma

As reuniões de Diretores de Turma (DT) foram conduzidas pela Professora Luísa Páscoa. Estes momentos eram dedicados essencialmente à análise e discussão da proposta de guião das reuniões de Conselho de Turma e dos documentos necessários para a elaboração das mesmas.

4.3.4 Reuniões de Conselho de Turma

A Professora Estagiária esteve presente em todos os Conselhos de Turma do 12º 5 e do 12º 7. Nas reuniões da turma 7, que eram dirigidas pela Professora Carla Simão, a Orientadora Cooperante assumia apenas o papel de professora de matemática e, portanto, a seu encargo apenas tinha as avaliações e a análise dos alunos relativamente à sua disciplina. Já nas reuniões da turma 5, onde a Professora Natividade Morgado tinha o papel de Diretora de Turma, a autora deste relatório experienciou o trabalho de um diretor de turma subjacente a estes momentos: como deve agir para guiar uma reunião, quais os documentos necessários à sua realização, quais as indicações a dar aos outros professores do conselho de turma, como inserir todas as informações no programa *iNovar*, entre outros.

As Reuniões Intercalares eram destinadas a analisar o comportamento e o aproveitamento dos alunos e definir, caso fosse necessário, novas estratégias para melhorar o processo de ensino-aprendizagem. Nos Conselhos de Turma de Avaliação eram ainda definidos, eventualmente, os momentos formais de avaliação do período seguinte e era feita a análise e ratificação das classificações dos discentes. Caso se justificasse o Conselho de Turma podia fazer alterações às propostas dos professores das respetivas disciplinas.

4.3.5 Reuniões do Núcleo de Estágio

No horário da Orientadora Cooperante estavam previstos três tempos letivos para as Reuniões do Núcleo de Estágio. Apesar disto, dado o grande volume de trabalho a realizar, o NEM reunia, por norma, oito tempos letivos por semana. Estes momentos eram dedicados sobretudo à realização e correção de provas de avaliação, à preparação e análise das aulas lecionadas pelos Professores Estagiários e à reflexão acerca dos resultados dos discentes.

Após o término de cada semana, era lavrada uma ata que sintetizava o trabalho realizado. A redação das mesmas foi distribuída pelos Estagiários, tendo a autora deste relatório elaborado as correspondentes ao primeiro período. No Anexo M encontra-se a ata correspondente à semana de 2 a 6 de outubro.

A Professora Natividade Morgado aproveitava ainda estas reuniões para tecer críticas construtivas ao trabalho da Professora Estagiária, enaltecendo os aspetos positivos e indicando os pontos a melhorar, o que se tornou fundamental para a evolução da autora deste relatório enquanto Professora.

Capítulo 5

Atividades

5.1 Atividades desenvolvidas pela Professora Estagiária

No âmbito da unidade curricular Projeto Educacional II, a autora deste relatório dinamizou na Escola duas atividades que se descrevem nos pontos seguintes.

5.1.1 Sistema Binário na Computação

No dia 23 de abril de 2024, a Professora Estagiária realizou nas turmas 5 e 7 do 12º ano a atividade “Sistema Binário na Computação”.

A atividade começou com uma explicação sobre o Sistema Binário e o seu papel na Computação, onde se abordou os seguintes tópicos: o que é o sistema binário; outros sistemas de numeração; conversão do sistema binário para o sistema decimal; conversão do sistema decimal para o sistema binário; sistema binário na computação (Anexo N.1).

Fig. 5.1 Professora Estagiária na atividade "Sistema Binário na Computação"

Os alunos mostraram-se muito envolvidos e interessados no tema, participando ativamente. De forma a complementar a lecionação dos conteúdos citados anteriormente, a autora deste relatório elaborou à priori um circuito elétrico.

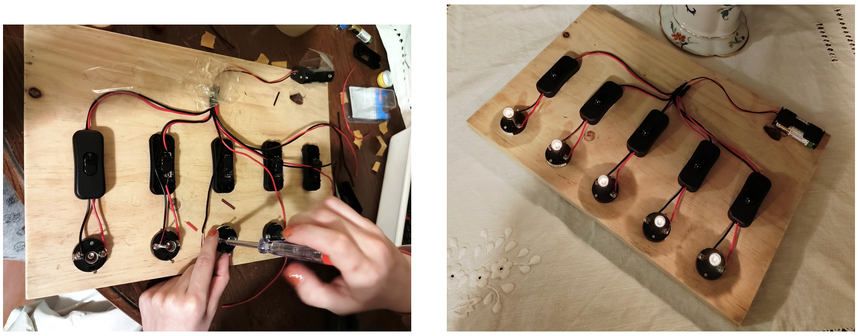


Fig. 5.2 Construção do circuito elétrico

Embora o circuito utilizado tenha sido concebido numa escala muito maior do que os que compõem o sistema elétrico do computador, a Professora Estagiária teve oportunidade de mostrar aos discentes a representação de alguns números binários através dele. Tal foi crucial para que os alunos compreendessem o papel do sistema binário na computação, onde o 1 representa a passagem de corrente (e por isso a lâmpada acendia) e o 0 traduz que não existe passagem de corrente (logo a lâmpada permanecia apagada).

Na segunda parte da atividade os alunos puderam participar no jogo do "Telefone Estragado”. Neste jogo, foi dado ao primeiro aluno da turma um número decimal. Esse discente tinha de converter o número dado para binário e representá-lo no circuito elétrico. O próximo elemento a jogar tinha de identificar o número representado no circuito elétrico e convertê-lo para decimal e assim sucessivamente. O objetivo era que o último participante chegasse ao número dado inicialmente.

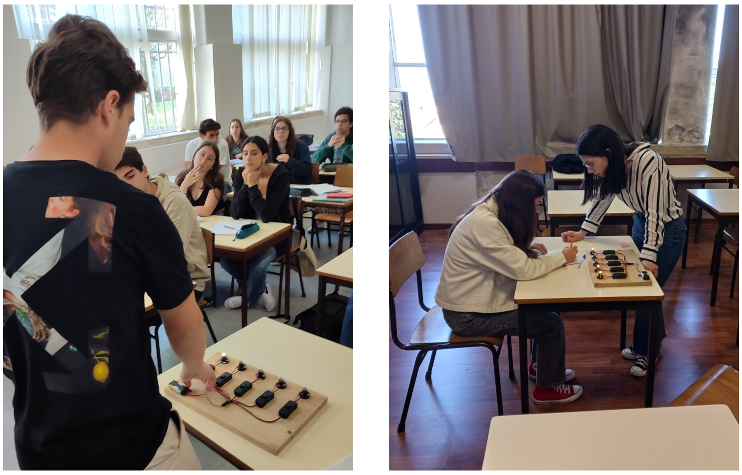


Fig. 5.3 Alunos a participar no jogo "Telefone Estragado"

A reação dos alunos no decorrer da atividade foi bastante positiva: mostraram-se interessados e muito envolvidos no tema. Para complementar, no final da atividade todos os alunos responderam a um inquérito concebido pela autora deste relatório, no sentido de a mesma receber feedback acerca da realização e dos assuntos abordados na atividade. No Anexo N.2 encontram-se as respostas dos discentes ao inquérito.

5.1.2 O Mundo dos Restos

No dia 15 de maio de 2024 a Professora Estagiária realizou no 8º 2 uma atividade sobre congruências denominada “O Mundo dos Restos”.

A atividade, que foi realizada na biblioteca da Escola, começou com uma introdução ao tema de forma natural: colocaram-se várias questões para os alunos responderem, que os levaram a constatar que em certas situações do dia a dia, os números repetem-se quando atingimos um certo valor, por exemplo: num relógio analógico, para marcar as 15h recorremos ao número 3.

Fig. 5.4 Alunos a participarem na atividade "O Mundo dos Restos"

O objetivo por detrás das perguntas iniciais foi bem sucedido, os alunos perceberam que, por exemplo, no caso mostrado no slide 7 da apresentação (Anexo O.1), não necessitam de “contar pelos dedos” 17 meses a partir de maio: basta pensar que passado um bloco de 12 meses, estaremos novamente em maio e, portanto, resta apenas contar 5 meses para a frente.

Após esta ideia estar bem consolidada, introduziu-se então o conceito de congruência e resolveram-se alguns problemas. É de realçar que a primeira parte da atividade superou as expectativas, uma vez que, apesar de serem alunos do 8º ano de escolaridade, mostraram-se muito interessados, envolvidos e empenhados em toda a apresentação, colocando perguntas bastante pertinentes.

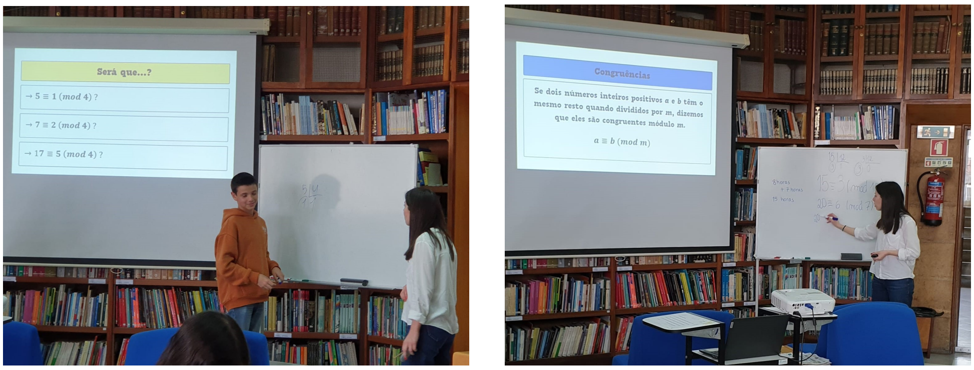


Fig. 5.5 Professora Estagiária a lecionar a aula

Em seguida, a Professora Estagiária dividiu a turma em grupos para que começasse a segunda parte da atividade: o jogo “Dominó dos Restos”. No “Dominó dos Restos” não existem números repetidos e os lados de cada peça associam-se a outro com o qual seja congruente, ou seja, que tenha o mesmo resto quando dividido pelo módulo em causa (o módulo utilizado no decorrer da atividade foi o módulo 7). A autora deste relatório construiu cinco réplicas deste jogo, uma delas em cerâmica.

Fig. 5.6 Construção e resultado do jogo "Dominó dos Restos"

Ainda antes do jogo começar, os alunos preencheram individualmente uma pequena ficha de trabalho, onde colocaram de forma organizada os números congruentes com os vários restos da divisão inteira por 7.

Esta tabela foi, sem dúvida, uma mais-valia na altura de jogarem, uma vez que perceberam que quando queriam juntar duas peças, apenas tinham de verificar se os números estavam na mesma coluna da tabela.

JOSÉ FALCÃO ESCOLA SECUNDÁRIA

Matemática - Atividade “O Mundo dos Restos”

8º2 Nome:________________________________ 15 de maio de 2024

Professora Estagiária: Catarina Vicente

1. Preencha a tabela de divisibilidade por 7.

Restos da divisão inteira por 7 ←

0	1	2	3	4	5	6
7						
	15					
		23				
			31			
				39		
					47	
						55
números congruentes com **0** **módulo 7**	números congruentes com **1** **módulo 7**	números congruentes com **2** **módulo 7**	números congruentes com **3** **módulo 7**	números congruentes com **4** **módulo 7**	números congruentes com **5** **módulo 7**	números congruentes com **6** **módulo 7**

Fig. 5.7 Ficha de trabalho disponibilizada aos discentes

O jogo relevou ser muito divertido e desafiador na medida certa para os alunos.

Fig. 5.8 Alunos a jogarem ao "Dominó dos Restos"

No final da atividade, foi distribuído a todos os participantes um certificado de participação e um questionário individual, elaborados pela Professora Estagiária. Assim foi-lhes permitido fazer de forma anónima a avaliação da atividade. Note-se, que tendo em conta a idade dos discentes não se optou pela realização de um questionário em formato digital. O feedback recebido por parte dos alunos foi bastante positivo (todos afirmaram que tinham gostado da atividade, excepto dois que justificaram não gostar de Matemática) e a professora titular da turma também elogiou toda a abordagem feita. Estes pareceres foram bastante lisonjeadores dando à autora deste relatório um sentimento de missão cumprida: os alunos aprenderam de forma leve um conteúdo matemático completamente novo. No Anexo O.2 encontram-se as respostas de alguns discentes ao questionário.

Certificado de Participação

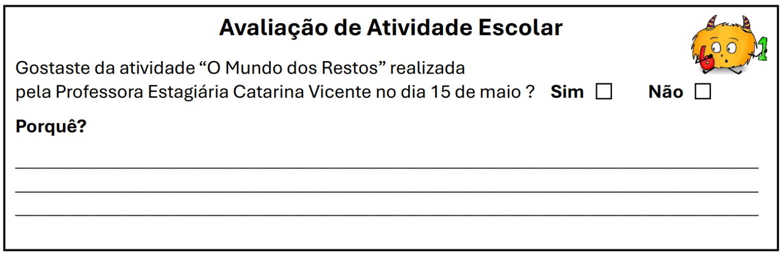
Certifica-se que ______________________________,
participou na atividade "O Mundo dos Restos", dinamizada pela Professora Estagiária Catarina Vicente, no dia 15 de maio, na Escola Secundária José Falcão, Coimbra.

O Mundo dos Restos

A Professora Estagiária, ________________

A Direção da ESJF, ________________

Fig. 5.9 Certificado de participação da atividade "O Mundo dos Restos"



Avaliação de Atividade Escolar

Gostaste da atividade "O Mundo dos Restos" realizada
pela Professora Estagiária Catarina Vicente no dia 15 de maio ? **Sim** ☐ **Não** ☐

Porquê?

____
____
____

Fig. 5.10 Questionário para avaliação da atividade

5.2 Atividades desenvolvidas pelo Núcleo de Estágio

O Núcleo de Estágio de Matemática promoveu, entre os dias 11 e 15 de março, a "Semana da Matemática", na Escola Secundária José Falcão. Neste contexto, dinamizou atividades variadas, que incluíram a realização de jogos, palestras, exposições, workshops, entre outros. O cartaz elaborado encontra-se no Anexo P.

Os meses que antecederam a citada semana foram de muito trabalho, entreajuda e persistência, porém culminaram num evento de sucesso, que foi alvo de alargados elogios por parte de toda a comunidade escolar. Foram realmente dias muito intensos que foram compensados pelo impacto positivo que tiveram na Escola.

No dia 11 de março, ainda antes da Escola abrir, os Professores Estagiários e a Orientadora Cooperante decoraram vários pontos estratégicos da Escola de forma a sensibilizar os alunos e os professores para a "Semana da Matemática".

Fig. 5.11 Decorações na Semana da Matemática

5.2.1 Exposição "Sumidades da Matemática"

A exposição "Sumidades da Matemática" teve o propósito de dar a conhecer à comunidade escolar um pouco mais acerca da história desta ciência. Estiveram aqui exibidas nove personalidades femininas e nove masculinas, abrangendo nomes desde a antiguidade, como é o exemplo de Euclides, até à atualidade, onde podemos falar de Katherine Johnson.

Fig. 5.12 Exposição "Sumidades da Matemática" no átrio da ESJF

Esta exposição foi amplamente elogiada, digna de destaque, tendo sido solicitado ao NEM que a mesma permanecesse no local por mais algum tempo após o dia 15 de março.

5.2.2 Workshop "Fractais Animados"

No dia 11 de março os discentes do 12º 5 dirigiram-se ao Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, acompanhados pelos Estagiários e pela Orientadora Cooperante, para participarem num workshop orientado pela Professora Doutora Sílvia Barbeiro.

Este workshop, denominado “Fractais Animados”, teve o intuito de mostrar uma aplicação matemática recorrendo à programação em MATLAB, software que os discentes desconheciam totalmente, mas com o qual rapidamente ficaram familiarizados. A Doutora Sílvia Barbeiro conseguiu captar a atenção da turma, que ouviu atentamente todas as suas explicações e tentou colocá-las em prática no momento de escrever o código para gerar fractais. Os alunos ficaram impressionados com o facto de conseguirem produzir imagens tão complexas e belas.

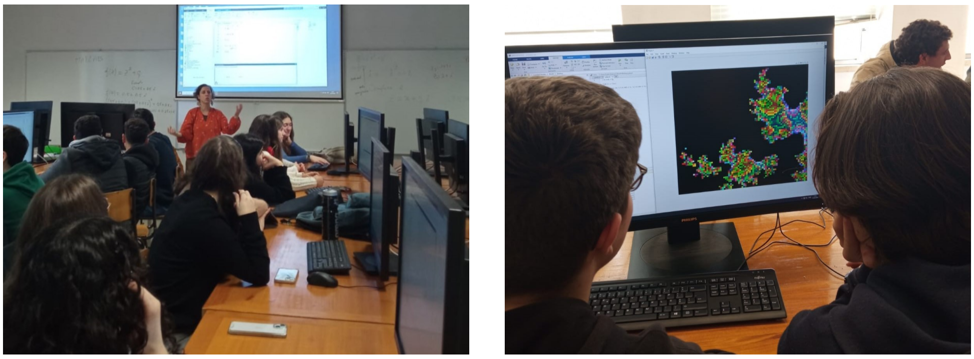


Fig. 5.13 Workshop "Fractais Animados"

5.2.3 Concurso *SuperTmatik*

Durante o decorrer da "Semana da Matemática" realizaram-se, na biblioteca da Escola, várias sessões do jogo de cartas “SuperTmatik – Cálculo Mental”, para todos os alunos do 8º ano.

Fig. 5.14 Alunos a jogarem "SuperTmatik - Cálculo Mental"

Para a Professora Estagiária esta atividade, que envolveu operações básicas com vários níveis de dificuldade, revelou que os discentes neste ano de escolaridade têm alguma relutância em relação ao cálculo mental, procurando diversas vezes recorrer ao uso da calculadora, com medo de errarem perante os colegas.

Assim sendo, este tipo de atividades que visam, de forma divertida, desenvolver e estimular a destreza de cálculo dos discentes, torna-se cada vez mais importante.

5.2.4 Palestra "É divertido resolver problemas!"

No dia 13 de março o Núcleo de Estágio de Matemática contou com a colaboração da Professora Doutora Joana Teles, que se dirigiu à Escola Secundária José Falcão, para realizar uma palestra intitulada "É divertido resolver problemas!".

Neste encontro que envolveu alunos do 3º ciclo, a Doutora Joana Teles promoveu e fomentou o gosto pela matemática, desafiando os discentes a resolverem alguns problemas comuns nas Olimpíadas de Matemática. De seguida apresentou várias técnicas usuais para a sua resolução como, por exemplo, o Princípio da Multiplicação.

Os alunos revelaram-se bastante intrigados com o facto de as respostas aos problemas não serem tão óbvias quanto eles pensavam, ouvindo de forma atenta a explicação das mesmas. É de notar que alguns discentes, apesar da tenra idade, mostraram ter um raciocínio muito desenvolvido nas questões abordadas.

Fig. 5.15 Palestra "É divertido resolver problemas!"

5.2.5 Dia Internacional da Matemática

No dia 14 de março celebra-se o Dia Internacional da Matemática (Dia do Pi) e como tal, os Estagiários de Matemática e a Professora Natividade Morgado promoveram a decoração de alguns espaços da Escola.

O NEM concebeu alguns elementos que marcaram esta semana, desde um "Pi" gigante a um vídeo educativo sobre o Pi, que foi exibido durante todo o dia no átrio da Escola. Além disso, em parceria com outros professores da Escola, foi feita uma recolha de diversos trabalhos dos alunos que se destinaram a ser incluídos nas demais decorações. Após o término da Semana da Matemática e com a presença da Diretora da Escola, foram atribuídos prémios aos três melhores trabalhos.

Com o intuito de envolver o máximo de elementos da comunidade escolar, foram distribuídos aos discentes do 3º ciclo cerca de 70 dígitos do número Pi, para que estes os decorassem. Os trabalhos dos alunos foram exibidos junto da Biblioteca e prolongaram-se por todo o corredor. Além disto, no Dia do Pi, todos discentes tiveram ainda a possibilidade de participarem num jogo de cálculo, o Jogo do 24, dinamizado durante a manhã pelos Professores Estagiários.

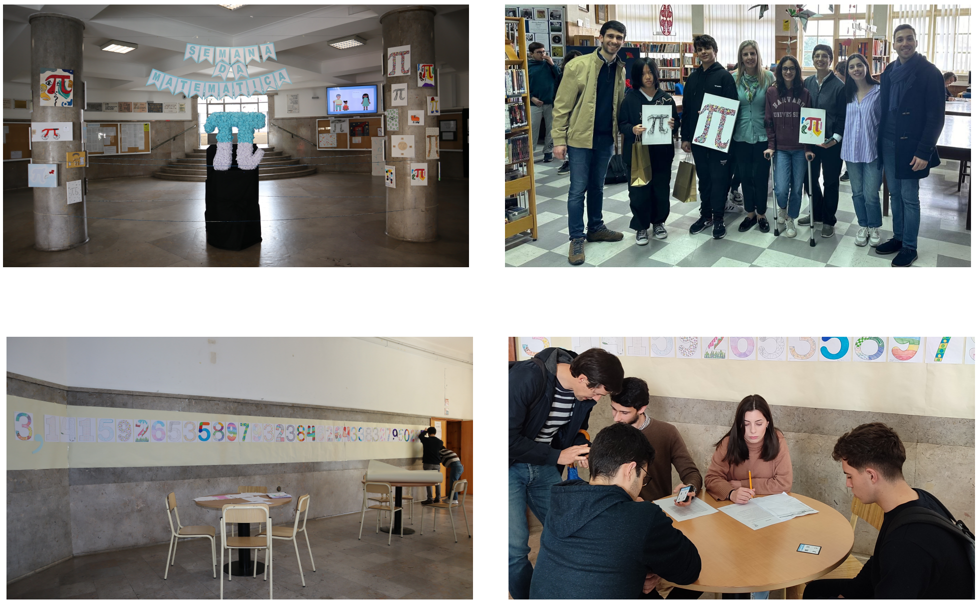


Fig. 5.16 Comemorações do Dia Internacional da Matemática na ESJF

A par do referido, na sala de professores festejou-se o “aniversário do Pi” com um bolo e vários enfeites alusivos ao tema. Contou-se com a presença da Doutora Helena Albuquerque, que se deslocou à ESJF para apreciar todo o trabalho desenvolvido.

Fig. 5.17 "Aniversário do Pi" na sala de professores

5.3 Atividade Interdisciplinar de Estágios

No sentido de promover a interdisciplinaridade foi desenvolvida uma atividade entre os diferentes núcleos de estágio da ESJF. Esta iniciativa partiu do Núcleo de Estágio de Filosofia e consistiu na criação de uma secção no jornal da Escola, destinada ao Dia Internacional da Mulher, que se comemora a 8 de março. Assim, cada núcleo escreveu um pequeno artigo que relacionasse o tema com a sua disciplina. Desde o início da iniciativa que o NEM se prontificou a participar, tendo redigido um texto sobre a primeira mulher matemática do mundo, Hipátia de Alexandria.

5.4 Outras Atividades

A cooperação e a ajuda mútua devem ser palavras que imperam numa escola. Assim, os Professores Estagiários participaram na organização, vigilância e correção das Olimpíadas Portuguesas de Matemática e do Canguru Matemático, e na preparação de várias atividades relacionadas com o Clube de Ciência Viva.

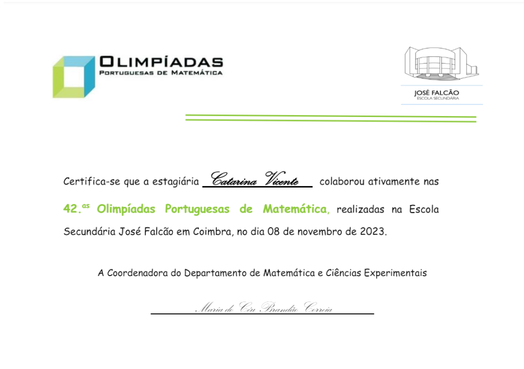


Fig. 5.18 Certificados de colaboração

Capítulo 6

Reflexão Final

Quando entrei pela primeira vez na Escola Secundária José Falcão foi com o propósito de assistir à primeira Reunião Geral de Professores, onde a Diretora deu as boas-vindas aos docentes que iriam lecionar na Escola. Recordo-me de entrar no auditório, repleto de professores, e de pensar "O que é que eu estou aqui a fazer?". Senti um turbilhão de emoções nesse momento. Se por um lado, as borboletas que trazia na barriga refletiam o desejo e a curiosidade em estar a viver algo que sempre quis, por outro lado, representavam o medo e a inquietação pelo desconhecido.

A amabilidade com que fui recebida na Escola Secundária José Falcão fez com que esse sentimento de insegurança se fosse dissipando. Todos os elementos da comunidade escolar (professores, funcionários, alunos, etc.) contribuíram para que, no decorrer do ano, me sentisse em casa.

Tive também a sorte de ser Orientada Pedagogicamente pela Professora Natividade Morgado que, desde o primeiro dia, nos tratou, a mim e aos meus colegas Estagiários, como Professores. Colocou-nos a par de todos os assuntos, partilhou connosco a sua experiência e os seus saberes, e ouviu-nos de forma empática. Estar envolvida em todo o trabalho que faz parte do dia a dia de um Professor, desde toda a burocracia inerente à profissão, até à preparação e lecionação de aulas, deu-me uma grande bagagem para o futuro. Todos os conselhos e sugestões que me foram dados no decorrer do ano contribuíram para adquirir e consolidar competências que irão, certamente, tornar-me uma profissional capaz.

Todas as experiências que vivi este ano, desde as reuniões em que estive presente, às atividades que desenvolvi, fizeram com que ganhasse ainda mais a certeza de que quero ser Professora.

De todos estes momentos, destaco a lecionação de aulas aos alunos de 3º ciclo, pois foram muito diferentes, em termos de comportamento e aproveitamento, das turmas titulares da Orientadora Cooperante. Nestes anos de escolaridade há uma multiplicidade de enquadramentos sociais e de estruturas familiares, onde existem alunos que apenas precisam de atenção e de alguém que tenha tempo para os ouvir. Além disso, nesta idade muitos discentes não querem aprender, acham que não precisam da escola e que, em particular, a Matemática não lhes acrescenta nada. Cabe à escola e ao professor, através de práticas pedagógicas adaptadas a cada turma e a cada aluno, transformar essa realidade. Foi nesse sentido que procurei desenvolver atividades inovadoras e implementar estratégias que motivassem os alunos e permitissem a adquisição de novos conhecimentos matemáticos, sem recorrer ao estilo de aprendizagem tradicional.

As turmas que acompanhei receberam-nos de uma maneira única. Mostraram-se sempre recetivas à nossa presença. Compreenderam desde o início que estávamos ali para os ajudar e para aprender com eles, colaborando em todas as aulas. Quando estamos num processo de aprendizagem, em que tudo é novo para nós, é muito importante não termos medo de errar, pois isso dá-nos a oportunidade de arriscar e de progredir. E estes alunos deram-me essa possibilidade, de aprender sem medo. Foram muito importantes para o meu crescimento profissional e pessoal, e creio que também fiz a diferença nas suas vidas.

É muito bom sentir que o culminar dos últimos cinco anos se traduziu numa experiência tão feliz e gratificante, cheia de vivências e aprendizagens novas. Foi um ano intenso, onde cada dia trouxe uma nova descoberta, onde desenvolvi competências científicas e pedagógicas para me tornar numa boa profissional.

Acabo este percurso de lágrimas nos olhos e com a certeza de que fiz a escolha certa: sinto que educar é a minha missão.

Bibliografia

[1] (2024). *Aula Digital*. Leya. URL: https://auladigital.leya.com/.

[2] Bezerra, N. (2018). *Análise Combinatória e Probabilidades*. EditAedi.

[3] Carmo, M. P. (1973). *Trigonometria e Números Complexos*. Livraria Bertrand.

[4] Conceição, A. and Almeida, M. (2024). *Matemática Sob Investigação 8*. Areal Editores.

[5] Costa, B. and Rodrigues, E. (2024). *Novo Espaço*. Porto Editora.

[6] DGE (2008). *Decreto-Lei n.º75/2008*. Diário da República.

[7] DGE (2012). *Decreto-Lei n.º137/2012*. Diário da República.

[8] DGE (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Direção-Geral da Educação. URL: https://www.dge.mec.pt/perfil-dos-alunos.

[9] DGE (2018a). *Aprendizagens Essenciais*. Direção-Geral da Educação. URL: https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-secundario.

[10] DGE (2018b). *Decreto-Lei n.º54/2018*. Diário da República.

[11] DGE (2024). *Projeto MAIA*. URL: https://afc.dge.mec.pt/projeto-maia-introducao.

[12] ESJF (2024). Site Escola Secundária José Falcão. URL: https://esjf.edu.pt/.

[13] Faria, L., Almeida, P. R., Antão, C., and Ferreira, M. (2019). *Matemática Dinâmica 9*. Porto Editora.

[14] GeoGebra (2024). *Software GeoGebra*. URL: https://www.geogebra.org/.

[15] Lima, E. L. (1997). *Análise Real Volume 1*. IMPA.

[16] Mandelbrot, B. (2000). *The Fractal Geometry of Nature*. New York : W.H.Freeman.

[17] Negra, C., Martinho, E., and Martins, H. (2015). *Dimensões*. Santillana.

[18] Neves, M. A., Guerreiro, L., and Silva, A. P. (2024). *Máximo*. Porto Editora.

[19] Professor João Gondim – Matemática. (2020). *Números complexos e sistemas dinâmicos: visualizando conjuntos de Julia no GeoGebra*. URL: https://www.youtube.com/watch?v=l2iYUXU8r_I&t=1302s.

[20] Raposo, D. and Gomes, L. (2024a). *Exame 2024 Matemática A*. ASA.

[21] Raposo, D. and Gomes, L. (2024b). *Expoente*. ASA.

[22] Santos, J., Silveira, A., and Trocado, A. (2020). *Formação de Formadores em GeoGebra para Cabo Verde, 2016-2017 - Tarefas e Resultados*. Organização de Estados Ibero-Americanos para a Educação a Ciência e a Cultura. URL: https://play.google.com/books/reader?id=-kDoDwAAQBAJ&pg=GBS.PA1&hl=pt_PT.

[23] Silva, J. C. (2003). *Fractais*. URL: https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/fractais/manual.htm.

[24] SparksMaths (2022). *Julia Sets and Orbits of Complex Iterations - Geogebra (Mandelbrot Build Part 1)*. URL: https://www.youtube.com/watch?v=ICqj7nJbiRI&t=891s.

Anexo A

Planificação Anual

JOSÉ FALCÃO
ESCOLA SECUNDÁRIA

ANO LETIVO 2023-2024
PLANIFICAÇÃO DE MATEMÁTICA A
12º ANO

Anual

Período de Planificação	TEMAS	N.º DE TEMPOS (50 MINUTOS)	
		POR TEMA	POR PERÍODO
15 de setembro 2023 a 07 de junho de 2024	▪ PROBABILIDADES E CÁLCULO COMBINATÓRIO	32	1º Período (32+10+12+2+16) **72**
	▪ TEMAS TRANSVERSAIS RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E MODELAÇÃO MATEMÁTICAS (CONSOLIDAÇÃO DE APRENDIZAGENS DO 10.º E 11.º ANOS SOBRE FUNÇÕES)	10	
	▪ FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL E APLICAÇÕES	12	
	▪ CIDADANIA E DESENVOLVIMENTO	2	
	▪ TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	20	2º Período (20 +27 + 2+ 13) **62**
	▪ FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LOGARÍTMICAS	27	
	▪ CIDADANIA E DESENVOLVIMENTO	2	
	▪ NÚMEROS COMPLEXOS	22	3º Período (22 + 11+ 2 + 8) **43**
	▪ REVISÕES DE PREPARAÇÃO PARA EXAME	11	
	▪ CIDADANIA E DESENVOLVIMENTO	2	
	TOTAL	**140**	**177**

Outras Atividades	N.º de tempos Letivos (50 minutos)			TOTAL
	1.ºP	2.ºP	3.ºP	
Apresentação. Avaliação diagnóstica.	3	0	0	3
Provas de avaliação, revisões e correção.	12	12	7	31
Auto e heteroavaliação	1	1	1	3
Total	**16**	**13**	**8**	**37**

Anexo B

Planificação por Período

ANO LETIVO 2023-2024
PLANIFICAÇÃO DE MATEMÁTICA A
12º ANO

2º Período

TEMA	APRENDIZAGENS ESSENCIAIS: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES	N.º aulas (50 min)	ESTRATÉGIAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS	DESCRITORES DO PERFIL DOS ALUNOS
FUNÇÕES **FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS**	• Resolver problemas de trigonometria que permitam recordar nomeadamente as fórmulas de “redução ao 1º quadrante” e a fórmula fundamental; as funções seno, cosseno e tangente e a resolução de equações trigonométricas. • Conhecer as fórmulas trigonométricas da soma, da diferença e da duplicação; • Conhecer e aplicar o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}$. • Conhecer e aplicar as derivadas das funções seno, cosseno e tangente; • Resolver problemas envolvendo funções trigonométricas num contexto de modelação.	5 15	• Estabelecer conexões entre diversos temas matemáticos e de outras disciplinas. • Utilizar a Lógica à medida que vai sendo precisa e em ligação com outros temas matemáticos promovendo uma abordagem integrada no tratamento de conteúdos pertencentes a outros domínios. • Tirar partido da utilização da tecnologia nomeadamente para experimentar, investigar, comunicar, programar, criar e implementar algoritmos. • Utilizar a tecnologia para fazer verificações e resolver problemas numericamente, mas também para fazer investigações, descobertas, sustentar ou refutar conjeturas. • Utilizar a tecnologia gráfica, geometria dinâmica e folhas de cálculo, no estudo de funções, de geometria e números complexos. • Apreciar o papel da matemática no desenvolvimento das outras ciências e o seu contributo para a compreensão e resolução dos problemas da humanidade através dos tempos.	Conhecedor/ sabedor/ culto/ informado (A, B, G, I, J) Criativo (A, C, D, J) Crítico/Analítico (A, B, C, D, G) Indagador/ Investigador (C, D, F, H, I) Respeitador da diferença/do outro (A, B, E, F, H) Sistematizador/ organizador (A, B, C, I)
FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS	• Estudar a sucessão de termo geral $u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, com $x \in \mathbb{R}$ e definição de número de Neper. • Conhecer as propriedades das funções reais de variável real do tipo $f(x) = a^x, (a > 1)$: monotonia, sinal, continuidade, limites, assíntotas ao gráfico e propriedades algébricas. • Caraterizar uma função logarítmica como função inversa de uma função exponencial de base a, com $a > 1$, referindo logaritmos neperiano e decimal. • Conhecer as propriedades das funções reais de variável real do tipo $f(x) = log_{a^x}$: monotonia, sinal, continuidade, limites e propriedades algébricas dos logaritmos.	27		

TEMA	APRENDIZAGENS ESSENCIAIS: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES	N.º aulas (50 min)	ESTRATÉGIAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS	DESCRITORES DO PERFIL DOS ALUNOS
	• Conhecer e aplicar os limites notáveis $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^k}$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x}$. • Conhecer e aplicar a derivada da função exponencial e da função logarítmica. • Aplicar a composição de funções e o teorema da derivada da função composta nas derivadas de funções exponenciais e de funções logarítmicas. • Resolver problemas de modelação envolvendo funções conhecidas.		• Enquadrar, do ponto de vista da História da Matemática, os conteúdos abordados que para o efeito se revelem particularmente adequados. • Resolver problemas, atividades de modelação ou desenvolver projetos que mobilizem os conhecimentos adquiridos ou fomentem novas aprendizagens, em contextos matemáticos e de outras disciplinas, nomeadamente Física e Economia. • Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões. • Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem.	Questionador (A, F, G, I) Comunicador (A, B, D, E, H) Autoavaliador (transversal às áreas) Participativo/ colaborador (B, C, D, E, F) Responsável/ autónomo (C, D, E, F, G, I, J) Cuidador de si e do outro (B, E, F, G)
	Momentos formais de avaliação, revisões e correção. Auto e Heteroavaliação. Cidadania e Desenvolvimento.	15		

TOTAL = 62 aulas

Anexo C

Planificação Semanal

Planificação Semanal: 2ºPeríodo

Professora Estagiária: Catarina Vicente 12º7

	data	tempos letivos	planificação
1ª Semana	03/01/2024	1	Juros compostos
	04/01/2024	1	Juros compostos
	05/01/2024	2	Número de Neper
2ª Semana	09/01/2024	2	Introdução à Função Exponencial
	10/01/2024	1	Função Exponencial
	11/01/2024	1	Exercícios
	12/01/2024	2	Exercícios e Questão-Aula
3ª Semana	16/01/2024	2	Entrega e correção da Questão-Aula
	17/01/2024	1	Derivada da função exponencial de base e
	18/01/2024	1	Exercícios
	19/01/2024	2	Introdução à função logarítmica
4ª Semana	23/01/2024	2	Função Logarítmica
	24/01/2024	1	Exercícios
	25/01/2024	1	Regras dos logaritmos
	26/01/2024	2	Equações e inequações com logaritmos
5ª Semana	30/01/2024	2	Limites notáveis com logaritmos
	31/01/2024	1	Exercícios
	01/02/2024	1	Derivada da função exponencial de base a
	02/01/2024	2	Derivada da função logarítmica
6ª Semana	06/02/2024	2	Exercícios
	07/02/2024	1	Exercícios
	08/02/2024	1	Exercícios
	09/02/2024	2	Momento Formal de Avaliação (M.F.A.)

	data	tempos letivos	planificação
7ª Semana	13/02/2024	2	Pausa letiva: carnaval
	14/02/2024	1	Pausa letiva: carnaval
	15/02/2024	1	Entrega e correção do M.F.A.
8ª Semana	20/02/2024	2	Exercícios
	21/02/2024	1	Exercícios
	22/02/2024	1	Exercícios
	23/02/2024	2	Questão-Aula + Correção
9ª Semana	27/02/2024	2	Método de Hondt + Entrega da Q.A.
	28/02/2024	1	Atividade
	29/02/2024	1	Fórmulas Trigonométricas
	01/03/2024	2	Fórmulas Trigonométricas
10ª Semana	05/03/2024	2	Exercícios
	06/03/2024	1	Exercícios
	07/03/2024	1	Exercícios
	08/03/2024	2	Momento Formal de Avaliação (M.F.A.)
11ª Semana	12/03/2024	2	Entrega e correção do M.F.A.
	13/03/2024	1	Limite notável + Derivada da função seno
	14/03/2024	1	Derivada das funções cosseno e tangente
	15/03/2024	2	Atividade Semana Matemática
12ª Semana	19/03/2024	2	Exercícios + Autoavaliação
	20/03/2024	1	Exercícios
	21/03/2024	1	Atividades
	22/03/2024	2	Atividades

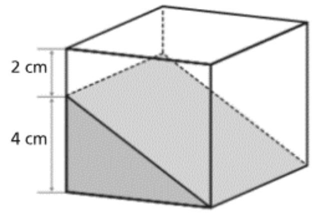
Anexo D

Fichas de Trabalho 3º ciclo

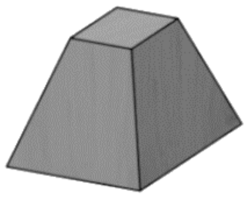
D.1 Fichas de Trabalho 3º ciclo: Enunciado

Escola Secundária José Falcão
Ficha de Revisões – Volumes de Sólidos
Professora: Natividade Morgado

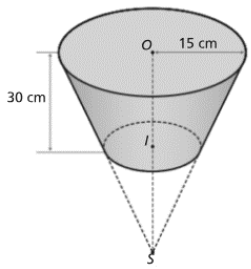
1. De um cubo de madeira de 6 cm de aresta foi cortado um prisma de base triangular, como mostra a figura. Qual o volume do sólido branco?



2. Para se construir a base de mesa, apresentada na figura ao lado, a partir de um bloco de madeira com a forma de uma pirâmide quadrangular regular, efetuou-se um corte a 75 cm da base, retirando-se a pirâmide superior. A pirâmide inicial tinha 95 cm de altura e a sua base tem 50 cm de lado. Qual o volume da base da mesa de jantar, em centímetros cúbicos? Apresenta o resultado arredondado às centésimas.



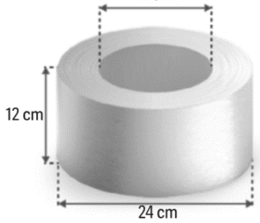
3. Um vaso de flores tem a forma de um tronco de cone. I é o ponto médio de $[SO]$. Calcula, arredondando às unidades:



   a. o volume do cone;

   b. o volume do vaso.

4. Na figura está representada uma peça que resultou de retirar um cilindro de outro cilindro.



Atendendo à informação dada, determina:

   a. Arredondado às centésimas, o volume do cilindro retirado;

   b. o volume da peça. Apresenta o resultado, em cm^3, arredondado às unidades.

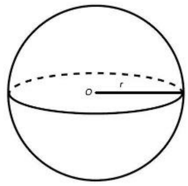
Escola Secundária José Falcão

Ficha de Trabalho 9º Ano – Volume da esfera

Professora: Natividade Morgado

Volume da esfera

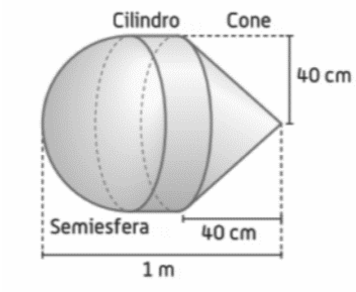
Volume da esfera = $\frac{4}{3}\pi r^3$



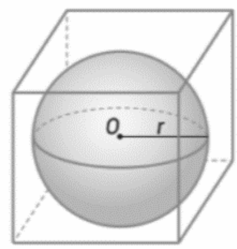
1. Calcula o volume, em centímetros cúbicos e arredondado às unidades, de uma esfera com 30 cm de diâmetro. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

2. Se considerarmos que o raio do planeta Terra mede, aproximadamente 6380 km, e que esta tem forma esférica, qual é o volume do nosso planeta, em quilómetros cúbicos?

3. Calcula o valor, em centímetros cúbicos e arredondado às unidades, do volume do sólido ao lado. Apresenta todos os cálculos que efetuares.



4. Uma esfera está inscrita num cubo com 64 000 cm^3 de volume. Calcula o volume, em centímetros cúbicos, do cubo não ocupado pela esfera. Apresenta todos os cálculos que efetuares.



D.2 Fichas de Trabalho 3º ciclo: Resolução

Resolução Ficha de Revisões - Volumes de Sólidos

1. $V_{cubo} = 6 \times 6 \times 6 = 216 \text{ cm}^3$

$V_{prisma} = A_{base} \times alt = \frac{4 \times 6}{2} \times 6 = 72 \text{ cm}^3$

Logo, $V_{sólido\ branco} = 216 - 72 = 144 \text{ cm}^3$

2. Consideremos a pirâmide inicial.

$V_{pirâmide\ inicial} = \frac{1}{3} \times A_{base} \times h =$

$= \frac{1}{3} \times 50 \times 50 \times 95 = \frac{237500}{3} \text{ cm}^3$

Seja E o centro da base da pirâmide inicial.

Consideremos agora a pirâmide que foi retirada.

Os triângulos [VEF] e [V'E'F'] são semelhantes pelo critério AA. Logo:

$$\begin{array}{ccc} 95 & \text{—} & 25 \\ 20 & \text{—} & x \end{array} \qquad x = \frac{20 \times 25}{95} = \left(\frac{500}{95}\right) \text{ cm}$$

Assim $2x = 2 \times \frac{500}{95} = \frac{1000}{95}$

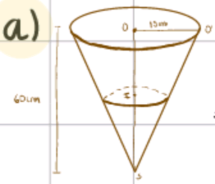
$V_{pirâmide\ retirada} = \frac{1}{3} \times A_b \times h = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1000}{95}\right)^2 \times 20 \approx 738,689 \text{ cm}^3$

$V_{base\ de\ mesa} = V_{pirâmide\ inicial} - V_{pirâmide\ retirada} \approx$

$= \frac{237500}{3} - 738,689 \approx 78427,98 \text{ cm}^3$

3. a)

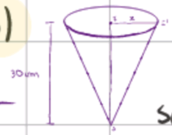
cone inicial



$V_{cone\ inicial} = \frac{1}{3} \times A_b \times h =$

$= \frac{1}{3} \times \pi \times (15)^2 \times 60 \approx 14137 \text{ cm}^3$

b)



cone retirado

Os triângulos [O'OS] e [I'IS] são semelhantes pelo critério AA de semelhança de triângulos logo

$$\begin{array}{ccc} 60 & \text{—} & 15 \\ 30 & \text{—} & x \end{array} \qquad x = \frac{30 \times 15}{60} = \frac{15}{2} \text{ cm}$$

$V_{cone\ retirado} = \frac{1}{3} \times A_b \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{15}{2}\right)^2 \times 30 = \frac{1125}{2}\pi \text{ cm}^3$

Logo, $V_{vaso} \approx 14137 - \frac{1125}{2}\pi \approx 12370 \text{ cm}^3$

4. a) $V_{cilindro\ retirado} = A_b \times h = \pi \times 7^2 \times 12 \approx 1847,26 \text{ cm}^3$

b) $V_{cilindro\ inicial} = A_b \times h = \pi \times (12)^2 \times 12 \approx 5428,67 \text{ cm}^3$

$V_{peça} = V_{cilindro\ inicial} - V_{cilindro\ retirado} \approx 5428,67 - 1847,26 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V_{peça} \approx 3581 \text{ cm}^3$

Resolução Ficha Volume da Esfera

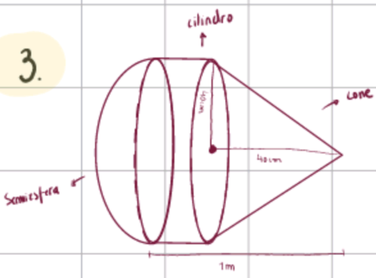
1.

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \times (15)^3 = 4500\pi \doteq 14137\ cm^3$

2.

$V_{Terra} = \frac{4}{3}\pi \times (6380)^3 \simeq 1{,}09 \times 10^{12}\ Km^3$

3.



Da figura concluímos:

- cone: raio = 40 cm e alt = 40 cm
- semiesfera: raio = 40 cm
- cilindro: raio = 40 cm e alt = $\underbrace{100}_{\text{alt. da figura}} - \overbrace{40}^{\text{alt. do cone}} - \underbrace{40}_{\text{alt. da esfera}} = 20$ cm

$V_{sólido} = V_{cone} + V_{cilindro} + V_{semiesfera} =$

$= \left[\frac{1}{3} \times \pi \times (40)^2 \times 40\right] + \left[\pi \times (40)^2 \times 40\right] + \left[\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times (40)^3\right] = 96000\pi \doteq 301593\ cm^3$

4. Seja x a aresta do cubo.

$V_{cubo} = 64000 \Leftrightarrow x^3 = 64000 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{64000} \Rightarrow x = 40$ cm

Como a esfera está inscrita no cubo, o seu diâmetro é 40 cm. Logo, r = 20 cm.

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \times (20)^3 = \frac{32000}{3}\pi$

Logo, $V_{cubo\ sem\ a\ esfera} = V_{cubo} - V_{esfera} = 64000 - \frac{32000}{3}\pi = 30489{,}68\ cm^3$

Anexo E

Aula de Cidadania e Desenvolvimento

ELEIÇÕES LEGISLATIVAS

Nas eleições legislativas, ao contrário do que acontece nas presidencias, os cidadãos votam em partidos políticos e não especificamente numa pessoa.

O processo das eleições legislativas foi definido em 1975 e é seguido até hoje. São os votos de cada círculo eleitoral que define o número de deputados e os partidos que fazem parte da Assembleia.

O QUE SÃO CÍRCULOS ELEITORAIS ?

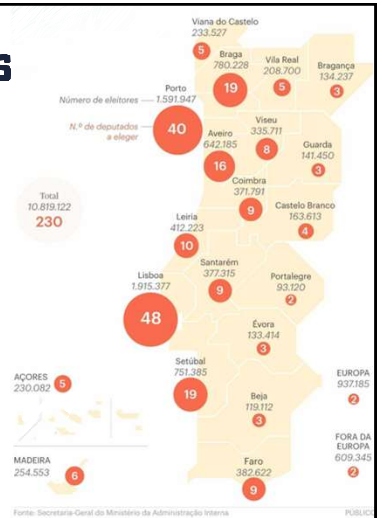
Define-se que para as eleições o país é dividido e que cada parte corresponde a um círculo eleitoral.

Portugal é composto por 22 círculos eleitorais: o território continental é composto por 18, que correspondem aos distritos. Nas ilhas, existe um círculo eleitoral na Região Autónoma da Madeira e um na Região Autónoma dos Açores. Ainda há o círculo da Europa e o círculo de fora da Europa, definidos pelos portugueses que residem no estrangeiro.

QUANTOS DEPUTADOS SÃO ELEITOS EM CADA CÍRCULO ELEITORAL ?

O número de deputados que pode ser eleito por cada círculo eleitoral é calculado em função do seu tamanho em termos geográficos, da densidade populacional e, de forma particular, do número de eleitores.

Na figura ao lado podemos ver que, por exemplo, nas eleições de 10 de março, Lisboa vai selecionar 48 deputados enquanto Coimbra seleciona apenas 9.



COMO SÃO ELEITOS OS DEPUTADOS ?

Atualmente, a Assembleia da República é composta por 230 Deputados.

Os Deputados são eleitos por listas apresentadas por partidos, ou coligações de partidos, em cada círculo eleitoral. A conversão dos votos em mandatos faz-se de acordo com o sistema de representação proporcional e o método da média mais alta de Hondt.

Os Deputados representam todo o país e não apenas os cidadãos do círculo eleitoral pelo qual foram eleitos. O seu mandato é de quatro anos, correspondendo este período a uma Legislatura.

MÉTODO D'HONDT

1º Apura-se, num determinado círculo eleitoral, o número de votos de cada partido.

2º Divide-se o número de votos de cada partido por 1, 2, 3...(se necessário até p, sendo p o número de deputados a eleger nesse círculo eleitoral) e ordena-se os quocientes por ordem decrescente

3º Seleciona-se os p maiores quocientes (cada partido elege um número de deputados igual ao número de quocientes selecionado)

4º No caso de restar apenas um deputado e os quocientes da série ordenada forem iguais, o deputado a ser eleito deve ser aquele que pertence ao partido com menor número de votos

MÉTODO D'HONDT: EXEMPLO

Para um determinado círculo eleitoral deverão ser eleitos 13 deputados. Tendo em conta a distribuição de votos, como deverão ser distribuídos os deputados?

1º

Partido	A	B	C	D
Nº de Votos	242	300	500	420

2º

Partido / Divisor	A	B	C	D
1	242	300	500	420
2	121	150	250	210
3	80,67	100	166,67	140
4	60,5	75	125	105
5	48,4	60	100	84
6	40,33	50	83,33	70
7	34,57	42,86	71,43	60
8	30,25	37,5	63,5	52,5

3º

Partido / Divisor	A	B	C	D
1	242	300	500	420
2	121	150	250	210
3	80,67	100	166,67	140
4	60,5	75	125	105
5	48,4	60	100	84
6	40,33	50	83,33	70
7	34,57	42,86	71,43	60
8	30,25	37,5	63,5	52,5

4º

Partido / Divisor	A	B	C	D
1	242	300	500	420
2	121	150	250	210
3	80,67	100	166,67	140
4	60,5	75	125	105
5	48,4	60	100	84
6	40,33	50	83,33	70
7	34,57	42,86	71,43	60
8	30,25	37,5	63,5	52,5

MÉTODO D'HONDT: EXERCÍCIO

Num círculo eleitoral deverão ser eleitos 7 deputados. Tendo em conta o número de votos apresentados de seguida, quantos deputados serão eleitos em cada partido?

Partido	A	B	C	D
Nº de Votos	750	1200	300	450

MÉTODO D'HONDT: EXERCÍCIO

Num círculo eleitoral deverão ser eleitos 7 deputados. Tendo em conta o número de votos apresentados de seguida, quantos deputados serão eleitos em cada partido?

Partido	A	B	C	D
Nº de Votos	750	1200	300	450

Neste círculo eleitoral serão eleitos: 2 deputados do partido A; 3 deputados do partido B; 1 deputado do partido C e 1 deputado do partido D.

COMO SE FORMA O GOVERNO ?

O Primeiro-Ministro é nomeado pelo Presidente da República, ouvindo os partidos representados na Assembleia da República e tendo em conta os resultados eleitorais.

Deste modo, o Primeiro-Ministro será, à partida, o dirigente indicado pelo partido que tiver ganho as eleições legislativas. O "tiver ganho" não significa necessariamente o maior número de votos, em termos absolutos. Significa eleger o maior número de deputados.

Nomeado o Primeiro-Ministro, este forma o governo, escolhendo ministros da sua confiança.

O programa do governo é submetido à apreciação da Assembleia da República. Se, porventura, o partido mais votado tiver apenas uma maioria relativa e não uma maioria absoluta, e não tenha conseguido estabelecer um acordo com outro partido, o programa poderá ser rejeitado.

Se o governo não conseguir a aprovação do programa do governo, não chega a iniciar funções efetivas.

Nessa altura, o Presidente da República terá de escolher outra solução. Poderá, tendo em conta as circunstâncias, nomear como Primeiro-Ministro o dirigente indicado pelo partido que ficou em segundo lugar, se houver indícios de que este conseguirá a aprovação do seu programa de governo, por ter conseguido estabelecer um acordo com outro partido.

Não é desejável, mas é uma possibilidade...

NÃO DEIXES QUE OS OUTROS DECIDAM POR TI!
VOTAR É UM DIREITO E UM DEVER!

Anexo F

Aula Assistida 1

F.1 Aula Assistida 1: Plano de Aula

PLANO DE AULA: Aula Assistida 1

Escola Secundária José Falcão
Ano Letivo: 2023/2024

Professora Estagiária: Catarina Vicente		**Orientadora Científica:** Helena Albuquerque	
Disciplina: Matemática A		**Orientadora Cooperante:** Natividade Correia	
Ano: 12º	**Turma:** 7	28-11-2023	9h25 – 11h15 (100 minutos)

JOSÉ FALCÃO
ESCOLA SECUNDÁRIA

Domínios	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
• Funções: ▪ Funções Reais de variável real ▪ Limites e derivadas de funções polinomiais e racionais • Probabilidades E Cálculo Combinatório	• B (Informação e comunicação); • C (Raciocínio e resolução de problemas); • D (Pensamentos crítico e pensamento criativo); • E (Relação interpessoal); • I (Saber científico, técnico e tecnológico).

Conhecimentos, Capacidades e Atitudes

- Os alunos devem ser capazes de:
  - Operar com limites e casos indeterminados em funções;
  - Calcular limites recorrendo ao levantamento algébrico de indeterminações;
  - Calcular, interpretar geometricamente e resolver problemas envolvendo a taxa média de variação de uma função e a derivada de uma função num ponto;
  - Determinar equações de retas tangentes ao gráfico de uma função;
  - Conhecer e aplicar na resolução de problemas: operações entre conjuntos, factos elementares da combinatória, o Triângulo de Pascal e o Binómio de Newton
  - Identificar acontecimentos impossível, certo, elementar, composto, incompatíveis, contrários e equiprováveis;
  - Conhecer as propriedades das probabilidades e calculá-las utilizando a regra de Laplace;
  - Conhecer a probabilidade condicionada e identificar acontecimentos independentes;
  - Conhecer e aplicar na resolução de problemas: arranjos com e sem repetição; permutações e fatorial de um número inteiro não negativo; combinações.

Sumário

- Realização de uma atividade guiada: Rotação por Estações;
- Correção das tarefas propostas.

Objetivos:	Termos e Conceitos	
• Aplicar/ relacionar conteúdos lecionados na resolução de problemas; • Desenvolver a capacidade de trabalhar em grupo.	• Função; • Limite; • Derivada;	• Probabilidade; • Regra de Laplace; • Triângulo de Pascal.

Estratégias	
• O Modelo de "Rotação por Estações" segundo a taxonomia de Christensen et al. (2013) aparece como uma alternativa em relação à sala de aula tradicional. Neste modelo, o professor organiza previamente a sala de aula, criando diferentes espaços, em que pelo menos um deles necessita de recurso à tecnologia. Os alunos são divididos por grupos, cada um com uma tarefa inicial e, após um tempo pré-definido, trocam de estação e de atividade de aprendizagem. O professor deve intervir como um mediador de forma a incentivar tanto o pensamento crítico individual como o trabalho colaborativo. Esta estratégia é uma mais-valia para manter os alunos envolvidos, motivados e focados na realização das diferentes tarefas.	
Avaliação	**Recursos**
• Avaliação formativa com base na observação direta do desempenho dos alunos e do seu trabalho colaborativo.	• Quadro; • Giz; • Cartolina; • Computador; • Internet; • Geogebra; • Materiais necessários à realização das tarefas.

Estrutura da Aula			
Introdução (10 minutos)			
Apresentação da atividade a desenvolver, divulgação dos grupos de trabalho e distribuição dos alunos por estação.			
Desenvolvimento (60 minutos)			
Estação A (15 minutos) Na tarefa da estação A é dado aos alunos um enunciado com um problema cuja resolução envolve conteúdos relacionados com a derivada de uma função.	**Estação B (15 minutos)** Na estação B, os discentes têm de resolver um problema acerca da temática das probabilidades com recurso às técnicas de contagem.	**Estação C (15 minutos)** Na estação C, a tarefa relaciona probabilidades com funções. Os alunos têm ao seu dispor uma aplicação no *GeoGebra* necessária à realização do problema.	**Estação D (15 minutos)** Na tarefa da estação D, os grupos têm de responder a um conjunto de escolhas múltiplas a respeito dos conteúdos programados para a aula.
Conclusão (30 minutos)			
Correção das tarefas propostas. Nota: No caso de não haver tempo para terminar a correção de todas as tarefas, a mesma ficará disponível para os alunos consultarem na Classroom da turma.			

Referências:

- Costa, B., Rodrigues, E. (2023). *Novo Espaço 12*. Porto Editora
- Faria, L., Almeida, R.P., Antão, C., Ferreira, H. (2019). *Matemática Dinâmica 9*. Porto Editora
- Raposo, D., Gomes, L. (2023). *Exame 2024 Matemática* A. ASA
- Raposo, D., Gomes, L. (2017). *Expoente 12*. ASA
- Raposo, D., Gomes, L. (2016). *Expoente 11*. ASA
- Moreira, A. S., Horta, M. J. (2020). Educação e Ambientes Híbridos de Aprendizagem. Um Processo de Inovação Sustentada. *Revista UFG*, 20, 12-14. doi: 10.5216/REUFG.V20.66027
- Lima, E. L. (1997). *Análise Real Volume 1.* IMPA

F.2 Aula Assistida 1: Enunciado das Tarefas Propostas

TAREFAS

ESTAÇÃO A: volume de uma caixa

Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, a partir de um pedaço de cartolina de 6 cm por 6 cm, cortando quadrados nos cantos e dobrando os lados para cima.
Seja x o lado dos quadrados recortados.

a) Escreve uma expressão para o volume da caixa, em função de x. Define um intervalo para os possíveis valores de x.

b) Determina o valor de x que maximiza o volume da caixa e calcula o volume máximo.

ESTAÇÃO B: a soma dos dados

Os primeiros estudos sobre probabilidades surgiram apenas a partir do século XVI com os jogos de azar. No século XVI, na corte do grão-duque de Toscana, havia o hábito de jogar aos dados.

O jogo mais popular consistia em lançar três dados cúbicos consecutivamente e registar o total dos pontos obtidos. O grão-duque, grande entusiasta deste jogo, começou a observar que obtinha com maior frequência a soma 10 do que a soma 9.

Intrigado com o facto, começou a investigar por que razão tal acontecia, uma vez que a soma 10 e a soma 9 podiam acontecer ambas de seis composições diferentes.

Encontra uma justificação para esta ocorrência!

ESTAÇÃO C: as diagonais do prisma

Dado um prisma cuja base é um polígono com n lados, considera todas as diagonais (faciais e espaciais) desse prisma.
Escolhida, ao acaso, uma diagonal desse prisma designa por $p_n (n \geq 3)$ a probabilidade de ela não ser paralela às bases do prisma.

Recorrendo à aplicação "As diagonais do prisma", altera o valor de n e escreve uma expressão para o valor de p_n.

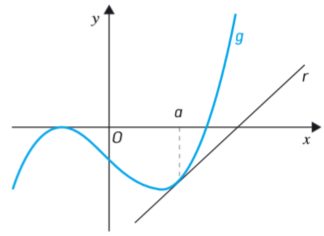
Qual é o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$?

<u>ESTAÇÃO D:</u> escolhas múltiplas

1. Numa certa linha do triângulo de Pascal, o penúltimo elemento é 41.
Escolhendo, ao acaso, dois elementos dessa linha, a probabilidade de serem dois elementos iguais é:

(A) $\frac{^{21}C_2}{^{42}C_2}$ **(B)** $\frac{1}{^{41}C_2}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{21}{^{42}C_2}$

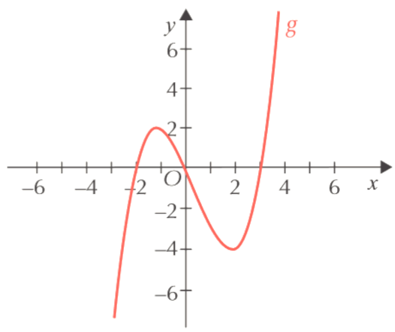
2. Na figura encontram-se representadas graficamente uma função g definida por $g(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x - \frac{5}{2}$ e a reta r tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa a.
Sabe-se ainda que a inclinação da reta r é $45°$.



Qual é o valor de a?

(A) 2 **(B)** $\sqrt{2}$ **(C)** $\sqrt{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

3. Na figura seguinte encontra-se representada graficamente a função g.



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $g'(-2) \times g'(1) = 0$

(B) $\frac{g'(-2)}{g'(3)} > 0$

(C) $\frac{g'(1)}{g'(-2)} > 0$

(D) $g'(-3) \times g'(2) < 0$

4. De uma função h, definida em $\mathbb{R}$, sabe-se que é par e que a reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 3 tem declive igual a 2.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $h(3) = 2$ **(B)** $h'(-3) = 2$ **(C)** $h'(-3) = -2$ **(D)** $h'(3) = -2$

5. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = 3x + 3 + \frac{2}{x}$. Sabe-se que a reta tangente ao gráfico de f num determinado ponto A é paralela à reta de equação $x - y = 1$.

Qual a abcissa do ponto A?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

6. Lançou-se uma bola de baixo para cima. A altura S, em metros, a que a bola se encontrava do solo, t segundos após ter sido lançada, é dada pela expressão $S(t) = -6t^2 + 24t$.

a) A velocidade média, nos primeiros três segundos após o lançamento da bola, é:

(A) $4\ m/s$ **(B)** $6\ m/s$ **(C)** $9\ m/s$ **(D)** $18\ m/s$

b) A velocidade da bola ao fim de um segundo é:

(A) $0\ m/s$ **(B)** $6\ m/s$ **(C)** $12\ m/s$ **(D)** $24\ m/s$

7. Num conjunto de seis pessoas, qual é a probabilidade de pelo menos duas delas pertencerem ao mesmo signo de Zodíaco? (**Nota**: Os signos do Zodíaco são 12.)

(A) $\frac{3071}{3456}$ **(B)** $\frac{792}{3456}$ **(C)** $\frac{1343}{1728}$ **(D)** $\frac{385}{1728}$

8. Considera um octaedro regular. Escolhendo ao acaso dois vértices do octaedro, qual é a probabilidade de esses vértices serem extremos da mesma aresta?

(A) $\frac{2}{5}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{4}{5}$ **(D)** $\frac{8}{15}$

9. Numa linha de metro viajam 200 passageiros, sendo que $\frac{1}{8}$ desses passageiros não validou o seu bilhete. Entra um revisor e escolhe aleatoriamente oito pessoas para fazer a verificação.
Qual é a probabilidade de ele encontrar exatamente um passageiro sem bilhete?

(A) $\frac{C_7^{175}}{C_8^{200}}$ **(B)** $\frac{25 \times C_7^{175}}{C_8^{200}}$ **(C)** $\frac{1}{25}$ **(D)** $\frac{25}{C_8^{200}}$

10. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3$.
Indica qual das seguintes afirmações é falsa.

(A) f é contínua em $x = 1$.

(B) $f'(1) = 3$

(C) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3$

(D) Não existe qualquer reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 1$.

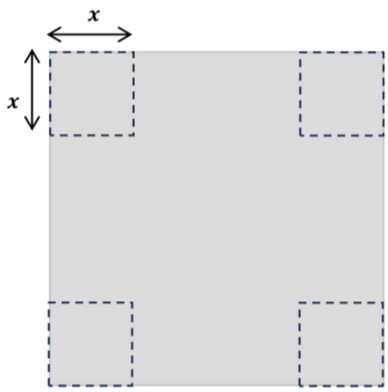
Catarina Vicente

F.3 Aula Assistida 1: Resolução das Tarefas Propostas

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DAS TAREFAS

ESTAÇÃO A: volume de uma caixa

Consideremos, como é dito no enunciado, uma caixa feita a partir de um pedaço de cartolina, 6 cm por 6 cm, cortando quadrados (de lado x) nos cantos e dobrando os lados para cima, como ilustra a figura abaixo:



Uma caixa construída deste modo, vai ter $6-2x$ cm de comprimento, $6-2x$ cm de largura e x cm de altura.

a) O volume da caixa vai ser então dado, em função de x, pela seguinte expressão:

$$V(x)=x\cdot(6-2x)^2=x\cdot(36-24x+4x^2)=4x^3-24x^2+36x$$

Uma vez que o pedaço de cartolina tinha 6 cm de lado, o lado da caixa, dado pela expressão $6-2x$, tem de variar entre 0 cm e 6 cm. Assim:

$$0<6-2x<6\ \Leftrightarrow 0<x<3$$

Donde concluímos que $x\in\,]0;3[$.

b) Vamos estudar a variação da função V. Para isso, começamos por calcular $V'(x)$.

Usando as regras de derivação,

$$V'(x)=12x^2-48x+36$$

Calculamos agora os zeros de $V'(x)$, de forma a encontrar os extremos de V.

$$V'(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-48x+36=0\Leftrightarrow x=\frac{48\pm\sqrt{(-48)^2-4\cdot 12\cdot 36}}{2\cdot 12}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{48\pm\sqrt{2304-1728}}{24}\Leftrightarrow x=\frac{48\pm\sqrt{576}}{24}\Leftrightarrow x=\frac{48\pm 24}{24}\Leftrightarrow x=\frac{72}{24}\vee\ x=\frac{24}{24}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=3\ \vee x=1$$

Quadro de sinais:

x	0		1		3
Sinal de $V'(x)$	N.D.	$+$	0	$-$	N.D.
Variação de $V(x)$	N.D.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	N.D.

Pela observação do quadro de sinais, no intervalo $]0;3[$ a função V atinge um máximo absoluto em $x = 1$.

$$V(1) = 4 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 = 16\ cm^3$$

<u>ESTAÇÃO B:</u> a soma dos dados

Ao lançarmos três dados consecutivamente e registarmos o total de pontos obtidos, de facto, a soma 9 e a soma 10 podem ocorrer ambas de seis composições diferentes:

Soma 9	1 + 2 + 6	1 + 3 + 5	1 + 4 + 4	2 + 2 + 5	2 + 3 + 4	3 + 3 + 3
Soma 10	1 + 3 + 6	1 + 4 + 5	2 + 2 + 6	2 + 3 + 5	2 + 4 + 4	3 + 3 + 4

Vejamos os seguintes exemplos:

- Considerando que sai 1, 2 e 6, a soma 9 pode ser obtida de seis maneiras diferentes:
  1 + 2 + 6; 1 + 6 + 2; 2 + 6 + 1; 2 + 1 + 6; 6 + 1 + 2; 6 + 2 + 1

Assim, para três parcelas diferentes temos $3! = 6$ possibilidades.

- Considerando que sai 1, 4 e 4, a soma 9 pode ser obtida de três maneiras diferentes:
  1 + 4 + 4; 4 + 1 + 4; 4 + 4 + 1

Portanto, para duas parcelas diferentes temos 3 possibilidades.

Elaborando tabelas para as duas somas, confirmamos que, de facto, é mais provável obter a soma 10 do que a soma 9:

Soma 9	1 + 2 + 6	1 + 3 + 5	1 + 4 + 4	2 + 2 + 5	2 + 3 + 4	3 + 3 + 3	**TOTAL**
Possibilidades	6	6	3	3	6	1	**25**

Soma 10	1 + 3 + 6	1 + 4 + 5	2 + 2 + 6	2 + 3 + 5	2 + 4 + 4	3 + 3 + 4	**TOTAL**
Possibilidades	6	6	3	6	3	3	**27**

ESTAÇÃO C: **as diagonais do prisma**

Seja, tal como enunciado, p_n a probabilidade de, escolhida ao acaso uma diagonal do prisma, esta não ser paralela às bases do mesmo.

Com recurso à aplicação "As diagonais do prisma", observamos o seguinte:

$\boldsymbol{n}$	**número de diagonais do prisma não paralelas à base**	**número total de diagonais do prisma**	$\boldsymbol{p_n}$
3	3×2	$3 \times 2 + 0 = 3 \times 2 + 3 \times 0$	$p_3 = \dfrac{3 \times 2}{3 \times 2 + 3 \times 0} = 1$
4	4×3	$4 \times 3 + 2 \times \dfrac{4 \times 1}{2} = 4 \times 3 + 4 \times 1$	$p_4 = \dfrac{4 \times 3}{4 \times 3 + 4 \times 1} = \dfrac{3}{4}$
5	5×4	$5 \times 4 + 2 \times \dfrac{5 \times 2}{2} = 5 \times 4 + 5 \times 2$	$p_5 = \dfrac{5 \times 4}{5 \times 4 + 5 \times 2} = \dfrac{2}{3}$
6	6×5	$6 \times 5 + 2 \times \dfrac{6 \times 3}{2} = 6 \times 5 + 6 \times 3$	$p_6 = \dfrac{6 \times 5}{6 \times 5 + 6 \times 3} = \dfrac{5}{8}$
7	7×6	$7 \times 6 + 2 \times \dfrac{7 \times 4}{2} = 7 \times 6 + 7 \times 4$	$p_7 = \dfrac{7 \times 6}{7 \times 6 + 7 \times 4} = \dfrac{3}{5}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$n \times (n-1)$	$n \times (n-1) + 2 \times \dfrac{n \times (n-3)}{2} =$ $n \times (n-1) + n \times (n-3)$	$p_n = \dfrac{n \times (n-1)}{n \times (n-1) + n \times (n-3)}$ $\Leftrightarrow$ $p_n = \dfrac{n-1}{2n-4}$

Daqui temos

$$p_n = \frac{n-1}{2n-4}$$

Logo,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n-1}{2n-4}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n \times \left(2 - \frac{4}{n}\right)}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{2 - \frac{4}{n}}\right) = \frac{1}{2}.$$

<u>ESTAÇÃO D:</u> escolhas múltiplas

1. Sabemos que o penúltimo elemento de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 41. Ora, no Triângulo de Pascal, o penúltimo elemento é igual ao segundo elemento, ou seja:

$$C_1^n = C_{n-1}^n = 41$$

Daqui vem que $n = 41$ e, portanto, estamos na linha 41. Ora, na linha 41 existem 42 elementos, iguais dois a dois. Donde concluímos que escolhendo, ao acaso, dois elementos dessa linha, a probabilidade de serem dois elementos iguais é

$$\frac{1 \times C_1^{21}}{C_2^{42}} = \frac{21}{C_2^{42}}.$$

Resposta: (C)

2. Temos que a reta r é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa a, logo $g'(a)$ é igual ao declive da reta r.

Além disso, sabemos que a inclinação da reta r é $45°$ logo o declive da reta r é igual a $\text{tg}(45°)$.

Assim:

$$g'(a) = \text{tg}(45°) \Leftrightarrow 2a^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

Como $a > 0$, concluímos que $a = \sqrt{2}$.

Resposta: (B)

3. Através da representação gráfica da função g, conseguimos garantir que g é crescente nos intervalos $]-\infty; -1[$ e $]2; +\infty[$ e decrescente no intervalo $]1; 2[$. Existe ainda um máximo relativo para $x = -1$ e um mínimo relativo para $x = 2$.

Dado isto, concluímos que:

- $g'(-3) > 0$;
- $g'(-2) > 0$;
- $g'(1) < 0$;
- $g'(2) = 0$;
- $g'(3) > 0$.

Assim:

- $g'(-2) \times g'(1) < 0$ logo não pode ser a opção (A);
- $\frac{g'(1)}{g'(-2)} < 0$ logo não pode ser a opção (C);
- $g'(-3) \times g'(2) = 0$ logo não pode ser a opção (D).

Resta apenas a opção (B) e, de facto, $\frac{g'(-2)}{g'(3)} > 0$.

Resposta: (B)

4. Sabemos que uma função h é par, ou seja, o seu gráfico é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas.
Além disso, é nos dito que a reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 3 tem declive 2, ou seja, tem declive positivo.
Destas duas informações podemos concluir que a reta tangente ao gráfico de h em $x = -3$ tem de ter declive negativo, neste caso, -2. Ou seja, $h'(-3) = -2$.

Resposta: (C)

5. Temos que a reta tangente ao gráfico de f num ponto A é paralela à reta de equação $x - y = 1$ e, portanto, têm o mesmo declive, 1 (pois $x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$). Sendo a, a abcissa do ponto A podemos concluir que $f'(a) = 1$.

Assim:

$$f'(a) = 1 \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{-2}{a^2} = -2 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Como f tem domínio $\mathbb{R}^+$, $a = 1$.

Resposta: (C)

6.

a) Na física, quando a variável depende é a distância percorrida por um determinado objeto e a variável independente é o tempo, a taxa média de variação num intervalo corresponde à velocidade média nesse intervalo. Assim para calcularmos a velocidade média da bola nos primeiros três segundos após o seu lançamento temos de determinar $t.m.v._{[0;3]}$.

$$t.m.v._{[0;3]} = \frac{S(3) - S(0)}{3 - 0} = \frac{-6 \times 9 + 24 \times 3}{3} = \frac{18}{3} = 6\ m/s\ .$$

Resposta: (B)

b) Quando se trata de um movimento linear e a variável dependente é o espaço percorrido e a variável independente é o tempo, a velocidade instantânea num instante x_0 é igual à derivada da função no ponto x_0. Assim, para calcular a velocidade da bola no instante $x = 1$, temos de calcular $S'(1)$.

$$S'(t) = -12t + 24$$

Logo,

$$S'(1) = -12 + 24 = 12\ m/s\ .$$

Resposta: (C)

7. Consideremos um conjunto de seis pessoas e o seguinte acontecimento:
A:"Pelo menos duas pessoas pertencem ao mesmo signo de Zodíaco", então $\bar{A}$: "Todas as pessoas pertencerem a signos diferentes do Zodíaco".

Calcular $P(A)$ é o mesmo que calcular $1 - P(\bar{A})$.

Para calcular $P(\bar{A})$ temos que:

- O número de casos favoráveis é $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7$, uma vez que todas as pessoas têm de pertencer a signos do Zodíaco diferentes, ou seja, não pode haver repetição de signos do Zodíaco;
- O número de casos possíveis é 12^6 uma vez que pode haver várias pessoas com o mesmo signo do Zodíaco.

Logo,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{12^6} = 1 - \frac{385}{1728} = \frac{1343}{1728}.$$

Resposta: (C)

8. Um octaedro regular tem, como se pode observar na figura dada no enunciado, 6 vértices e 12 arestas. Consideremos o seguinte acontecimento:
A: "Dois vértices serem extremos da mesma aresta".

Queremos calcular $P(A)$. Ora:

- O número de casos favoráveis é 12 uma vez que se dois vértices são extremos da mesma aresta, então formam uma aresta.
- O número de casos possíveis é escolher dois vértices ao acaso, dos 6 existentes, ou seja C_2^6.

Assim: $P(A) = \frac{12}{C_2^6} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Resposta: (C)

9. Sabemos que dos 200 passageiros que viajam numa linha de metro, $\frac{1}{8}$ não validaram o bilhete, ou seja, 25 pessoas não validaram o bilhete e 175 têm o seu bilhete validado. Consideremos que entra um revisor no metro e escolhe aleatoriamente 8 pessoas. Seja A o acontecimento "Exatamente um passageiro não tem o bilhete validado".

Queremos calcular $P(A)$:

- O número de casos favoráveis é $C_1^{25} \times C_7^{175}$ pois, como queremos exatamente um passageiro sem o bilhete validado, vamos às pessoas que não validaram o bilhete e escolhemos uma e vamos aos passageiros que validaram e escolhemos sete;

- O número de casos possíveis é C_8^{200} uma vez que não temos restrições, vamos ao total das pessoas e escolhemos oito.

Assim:

$$P(A) = \frac{C_1^{25} \times C_7^{175}}{C_8^{200}} = \frac{25 \times C_7^{175}}{C_8^{200}}.$$

Resposta: (B)

10. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 3$. Logo a função f tem derivada em $x = 1$ e, portanto, é contínua em $x = 1$. Além disso, a derivada em $x = 1$ é igual a 3 logo $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 3$, ou seja, existe reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 1$ e o seu declive é igual a 3.

Resposta: (D)

Catarina Vicente

Anexo G

Aula Assistida 2

G.1 Aula Assistida 2: Plano de Aula

PLANO DE AULA: 2ª Aula Assistida

Escola Secundária José Falcão
Ano Letivo: 2023/2024

Professora Estagiária: Catarina Vicente
Orientadora Científica: Helena Albuquerque
Disciplina: Matemática A
Orientadora Cooperante: Natividade Correia
Ano: 12º **Turma:** 7 12-04-2024 8h30 – 10h15 (100 minutos)

Domínios

- Sucessões;
- Números Complexos.

Áreas de Competência do Perfil dos Alunos

- B (Informação e comunicação);
- C (Raciocínio e resolução de problemas);
- D (Pensamento crítico e pensamento criativo);
- E (Relação interpessoal);
- I (Saber científico, técnico e tecnológico).

Conhecimentos, Capacidades e Atitudes

- Os alunos devem ser capazes de
  - Conhecer o conceito de limite de uma sucessão (casos de convergência e de limites infinitos);
  - Representar geometricamente e operar com números complexos na forma algébrica.
  - Utilizar a tecnologia gráfica, geometria dinâmica e folhas de cálculo, no estudo de sucessões e números complexos.

Sumário

- Fractais;
- Tarefa guiada com recurso ao GeoGebra – “Fractais e Números Complexos”;
- Atividade “Bingo Complexo”.

Objetivos

- Conhecer sucessões definidas por recorrência no conjunto dos números complexos;
- Reconhecer a importância do trabalho em grupo.

Termos e Conceitos

- Fractal;
- Número Complexo;
- Conjunto de Júlia;
- GeoGebra.

Estratégias

- Tarefa guiada: “Fractais e Números Complexos” com recurso ao software *GeoGebra*, com vista a promover o pensamento computacional.
- Atividade: “Bingo Complexo”, onde os alunos realizam operações com números complexos na forma algébrica de forma lúdica.

Avaliação	Recursos
• Avaliação formativa com base na observação direta do desempenho dos alunos e do seu trabalho colaborativo.	• Quadro; • Computador; • Giz; • Projetor; • *GeoGebra*; • Internet; • Tarefa “Fractais e Números Complexos”; • Materiais necessários à realização da atividade “Bingo Complexo”.

Estrutura da Aula
Fractais e Números Complexos (≈ 60 minutos)
Introdução (≈ 10 minutos)
Breve abordagem ao conceito de “Fractal”.
Desenvolvimento (≈ 40 minutos)
Exploração da tarefa “Fractais e Números Complexos”, com recurso ao *GeoGebra*.
Conclusão (≈ 10 minutos)
Clarificação dos conceitos matemáticos subjacentes ao tema abordado.
Bingo Complexo (≈ 40 minutos)
Atividade “Bingo Complexo”.

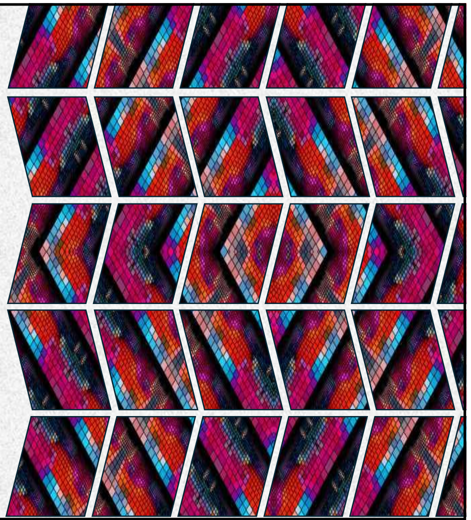
Referências:

- Costa, B., & Rodrigues, E. (2023). *Novo Espaço 12*. Porto Editora-
- Dos Santos, J., & Silveira, A., & Trocado, A. (2020). *Formação de Formadores em GeoGebra para Cabo Verde, 2016-2017 – Tarefas e Resultados.* Organização de Estados Ibero-Americanos para a Educação a Ciência e a Cultura (OEI) – Escritório de Lisboa; José Manuel Dos Santos Dos Santos. https://play.google.com/books/reader?id=-kDoDwAAQBAJ&pg=GBS.PA1&hl=pt_PT
- Professor João Gondim – Matemática, *Números complexos e sistemas dinâmicos: visualizando conjuntos de Julia no GeoGebra*, disponível em https://www.youtube.com/watch?v=l2iYUXU8r_I&t=1302s
- SparksMaths*, Julia Sets and Orbits of Complex Iterations - Geogebra (Mandelbrot Build Part 1)*, disponível em https://www.youtube.com/watch?v=ICqj7nJbiRI&t=891s
- Silva, J. (2003). *Jaime Carvalho e Silva. https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/fractais/manual.htm*
- Mandelbrot, B. (2000). *The Fractal Geometry of Nature.* New York: W.H.Freeman
- Carmo, M. P. (1973). *Trigonometria e Números Complexos*. Livraria Bertrand

G.2 Aula Assistida 2: Apresentação

Fractais

Uma aplicação dos números complexos



Professora Estagiária: Catarina Vicente

O que são Fractais?

São figuras geométricas cujo padrão se repete em diferentes escalas, num ciclo quase infinito. Duas das suas principais características são:

- Auto-semelhança
- Dimensão fractal

Fractais na Natureza

Fig.1: Brócolis Romanesco

Fig.2: Samambaia

Fractais na Matemática

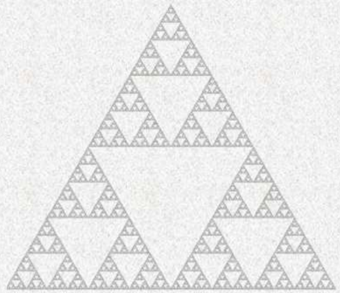


Fig.3: Triângulo de Sierpinski

Fractais na Matemática

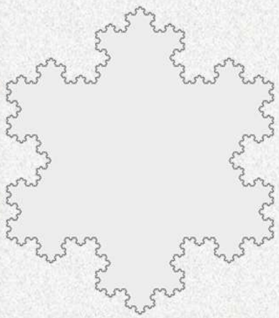


Fig.5: Floco de Neve de Koch

Fractais na Matemática

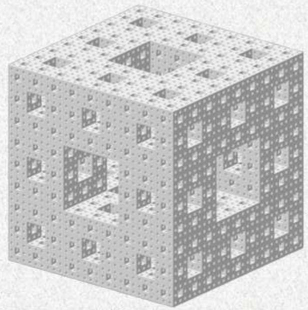


Fig.7: Esponja de Menger

Torna-se pertinente a pergunta:

Qual é a relação dos números complexos com os fractais?

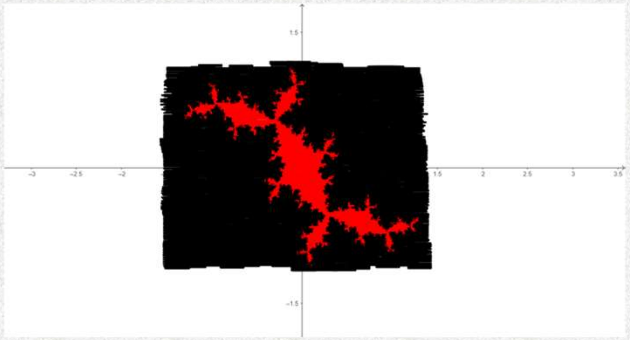
Tarefa

Conjunto de Júlia

Considere a fórmula iterativa (sucessão definida por recorrência) $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$ no plano dos complexos (plano de Argand), com $c = a + bi$ uma constante complexa, $a, b \in \mathbb{R}$. Designa-se por Conjunto de Júlia, o conjuntos dos pontos z_0 para os quais a sucessão não diverge.

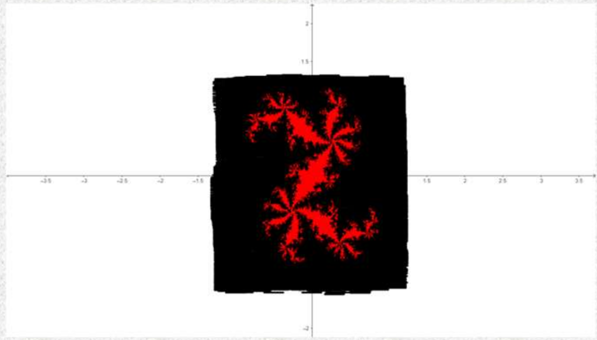
Note-se que existe um Conjunto de Júlia diferente para cada valor c, embora apenas alguns tenham interesse para a geometria fractal.

Conjunto de Júlia – Fractais



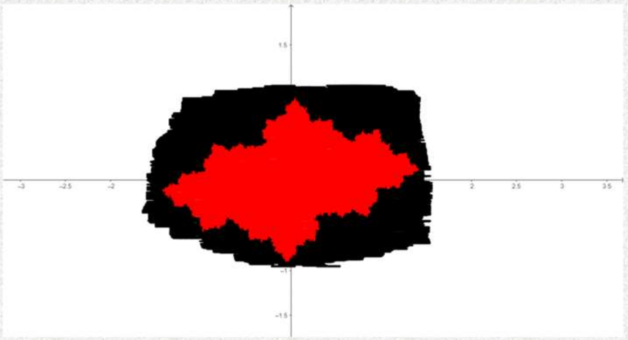
$c = -0.1 + 0.83i$

Conjunto de Júlia – Fractais



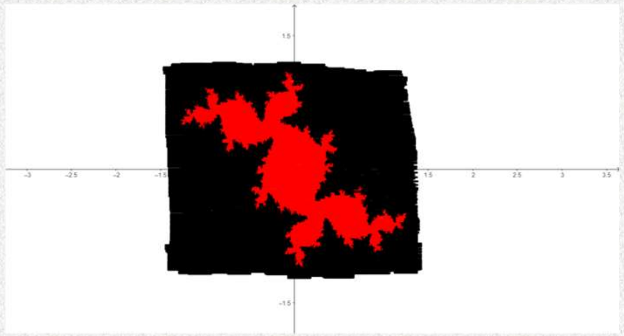
$c = 0.4 + 0.21i$

Conjunto de Júlia – Fractais



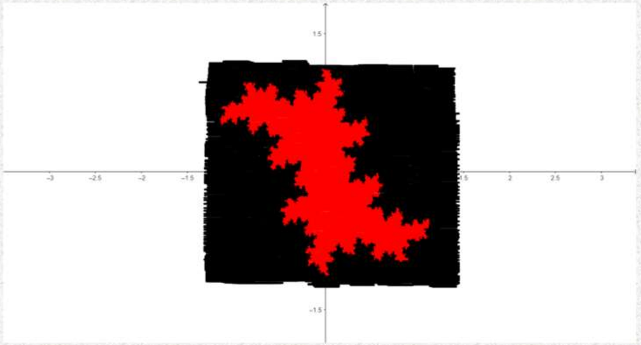
$c = -0.6 - 0.2i$

Conjunto de Júlia – Fractais



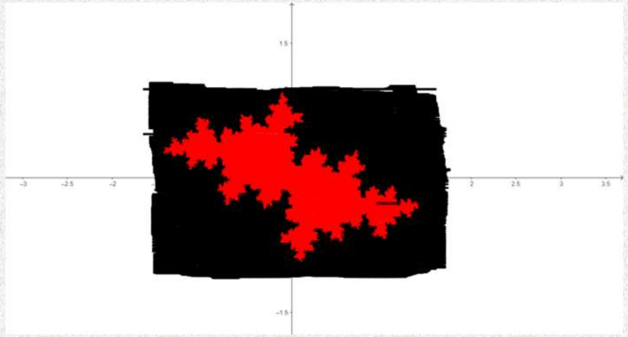
$c = -0.08 + 0.72i$

Conjunto de Júlia – Fractais



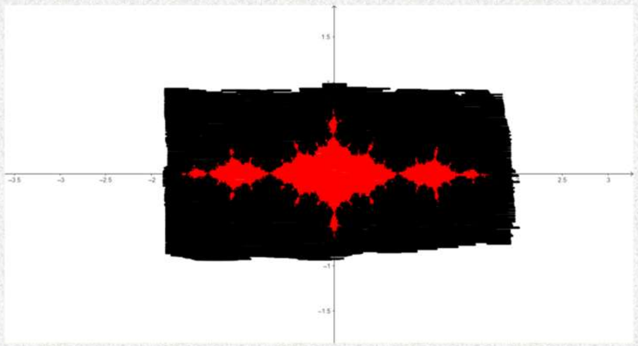
$c = 0.12 + 0.6i$

Conjunto de Júlia – Fractais



$c = 0.54 + 0.5i$

Conjunto de Júlia – Fractais



$c = -1.2 - 0.01i$

"A Arte é uma mentira que nos permite reconhecer a verdade"

- Pablo Picasso

G.3 Aula Assistida 2: Enunciado da Tarefa Guiada em *GeoGebra*

Escola Secundária José Falcão **Ano Letivo 2023/2024**

Professora Estagiária: Catarina Vicente

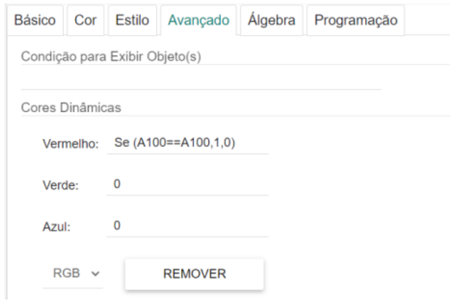
Disciplina: Matemática A **Ano:** 12º **Turma:** 7 **Data:** 12-04-2024

Tarefa Guiada – Fractais e Números Complexos

Objetivo: Explorar sucessões definidas por recorrência no conjunto dos números complexos, com recurso à folha de cálculo do *GeoGebra*.

1. Aceda a https://www.geogebra.org/classic, no menu *Vista* ative a ***Folha Algébrica*** e a ***Folha 2D***.
2. Para se assegurar que faz a marcação dos objetos na *Folha 2D*, por exemplo, clique com a ferramenta mover, , sobre a *Folha 2D*.
3. Com a ferramenta número complexo, , marque aleatoriamente um ponto[1] na ***Folha 2D***. Este ponto será designado, automaticamente, por z_1. Clique com o botão direito do rato sobre o ponto e através da opção ***Renomear***, altere o nome para $\boldsymbol{z\_0}$.
4. De seguida, escreva no campo de ***Entrada*** $c = -0.6 - 0.2i$ de forma a criar o número complexo $\boldsymbol{c}$.
5. Com o botão direito do rato sobre o afixo do número complexo $\boldsymbol{c}$, clique em ***Mostrar Objeto***, de forma a ocultá-lo do plano complexo.
6. Agora, com o botão direito do rato sobre o afixo $\boldsymbol{z_0}$ selecione ***Mostrar Rótulo***, de forma a ocultar o rótulo.
7. No menu vista, ative a ***Folha de Cálculo***.
8. Na célula ***A1*** insira o número complexo representado por z_0, usando o comando =z_0 .
9. De seguida, na célula ***A2***, defina outro número complexo através do comando =A1^2+c .
10. Selecione a célula ***A2*** e arraste o quadrado do canto inferior direito até à célula ***A100.***
11. Selecione todos as células da coluna *A*, clique no botão direito do rato e selecione ***Propriedades dos Objetos – Básico – Mostrar Objeto,*** de forma a ocultar os afixos do plano de Argand. Nesta altura, no plano complexo apenas deve ter a representação geométrica do número complexo z_0.
    <u>Note que:</u> se mover o afixo do número complexo z_0 na *Folha 2D*, os valores da *Folha de Cálculo* alteram.
12. De seguida, com o botão direito do rato sobre o ponto $\boldsymbol{z_0}$ selecione ***Configurações – Avançado – Cores Dinâmicas*** e defina as condições que se encontram na imagem abaixo:

[1]Note-se que no *Plano de Argand* (*Plano Complexo*), dado um número complexo $w = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, a sua representação geométrica é o ponto $P(a, b)$ e designa-se afixo do número complexo w.



13. Na ***Folha de Cálculo***, insira o comando =A1 + 0.01 na célula ***B1*** e, de seguida, insira =B1^2+c na célula ***B2***.

14. Com o botão direito do rato sobre a célula ***B1***, escolha ***Mostrar Rótulo.***

15. Novamente com o botão direito do rato sobre a célula ***B1***, ***Propriedades dos Objetos – Avançado – Cores Dinâmicas*** e defina as condições que se encontram na imagem abaixo:

16. Selecione a célula ***B2*** e arraste o quadrado do canto inferior direito até à célula ***B100.***

17. Selecione todos os elementos da coluna *B* **exceto o primeiro** (*B1*), clique no botão direito do rato e selecione ***Propriedades dos Objetos – Básico – Mostrar Objetos,*** de forma a ocultar os afixos correspondentes do plano complexo.

18. Com o botão direito do rato sobre as representações geométricas dos números complexos que se encontram na ***Folha 2D,*** clique em ***Mostrar Traço***.

19. Em seguida, na ***Folha de Cálculo*** selecione todos os elementos da coluna *B* e arraste o quadrado do canto inferior direito da última célula até à coluna ***Z***.

20. Na ***Folha 2D***, pressionando o botão direito do rato, selecione os todos os pontos de uma só vez.

21. Sem soltar o rato, mova este conjunto de pontos de forma a "pintar" o Plano de Argand e observe o que acontece.
Note que: se mover os pontos lentamente, o processo torna-se mais eficaz.

Anexo H

Critérios de Avaliação

JOSÉ FALCÃO
ESCOLA SECUNDÁRIA

Critérios de avaliação - Matemática

Critérios transversais	Domínios de Avaliação	Ponderação	Tarefas*	Processo de recolha de informação	PASEO	Avaliação
Saber Científico, Técnico, Tecnológico, Artístico e Ambiental	• Conhecimento e compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos; • Interpretação e representação de informação, ideias e conceitos representados em diferentes suportes incluindo textos, tabelas e gráficos;	40	• Fichas de trabalho; • Trabalho de pesquisa ou projeto; • Atividades em sala de aula; • Portefólio; • Caderno diário; • Atividades do PAA ou de Cidadania e Desenvolvimento; • Provas de avaliação escrita globais; • Provas de avaliação escrita parciais (questões aula, testes diagnósticos ou formativos, composições matemáticas).	• Grelhas de observação direta; • Listas de verificação; • Autoavaliação dos alunos; • Grelhas de classificação de tarefas.	Conhecedor/Sabedor/Culto/Informado: A, B, E, G, I, J Indagador/Investigador: A, C, D, E, F, H, I Sistematizador/Organizador: A, B, C, E, F, I Criativo: A, C, D, J Crítico/Analítico: A, B, C, D, E, G, H Comunicador: A, B, D, E, H, I Questionador: A, B, D, F, G, I Respeitador da diferença/do outro: A, B, E, F, H Cuidador de si/do outro B, E, F, G Participativo/Colaborador: B, C, D, E, F Responsável/Autónomo: C, D, E, F, G, I, J	Formativa Sumativa
Raciocínio, Resolução de Problemas	• Elaboração de conexões entre diversos assuntos ou temas matemáticos e de outras disciplinas; • Modelação e resolução de problemas utilizando raciocínio matemático;	40				
Investigação e Comunicação	• Comunicação em linguagem matemática, oral e escrita, na descrição, na justificação, no estabelecimento de raciocínios, procedimentos e conclusões; • Organização da informação utilizando uma linguagem lógica;	10				
Desenvolvimento Pessoal e Interpessoal	• Eficácia em tempo útil; • Realização autónoma de tarefas; • Análise, seleção e interpretação crítica de informação.	10				

* *As tarefas previstas serão definidas/adaptadas pelo professor de acordo com as caraterísticas e o nível de escolaridade da turma.*

Anexo I

Prova Global de Avaliação

I.1 Prova Global de Avaliação: Matriz

ANO LETIVO 2023-2024

MATRIZ DO MOMENTO FORMAL DE AVALIAÇÃO DE
MATEMÁTICA A

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

12º ANO – TURMA 5 E 7

PROFESSORA: NATIVIDADE CORREIA

Data de realização: 17 de maio de 2024

<table>
<tr><th>Temas / Aprendizagens Essenciais</th><th>Caraterização da prova</th></tr>
<tr><td>
TEMAS TRANSVERSAIS:
Lógica.
Resolução de problemas.
Modelação Matemática.
PROBABILIDADES E CÁLCULO COMBINATÓRIO

Conhecer e aplicar na resolução de problemas: arranjos com e sem repetição; permutações e fatorial de um número inteiro não negativo; combinações;
Conhecer a probabilidade no conjunto das partes de um espaço amostral finito;
Identificar acontecimentos: impossível, certo, elementar, composto, incompatíveis, contrários e equiprováveis;
Calcular probabilidades utilizando a regra de Laplace;
Conhecer e usar propriedades das probabilidades: probabilidade do acontecimento contrário; probabilidade da diferença de acontecimentos; probabilidade da união de acontecimentos;
Conhecer a probabilidade condicionada e identificar acontecimentos independentes;
Resolver problemas envolvendo o Triângulo de Pascal e as propriedades das combinações e o desenvolvimento do Binómio de Newton.

FUNÇÕES

Resolver problemas variados, ligados a situações concretas que permitam recordar: as operações com limites de funções e casos indeterminados, a continuidade de funções e as assíntotas ao gráfico de uma função;
Conhecer e aplicar o Teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy);
Conhecer e aplicar as regras de derivação estudadas até ao momento a funções diferenciáveis;
Caracterizar a função derivada de uma função e interpretá-la graficamente;
Relacionar o sinal e os zeros da função derivada com a monotonia e extremos da função e interpretar graficamente;
Relacionar o sinal e os zeros da função derivada de segunda ordem com o sentido das concavidades e pontos de inflexão do seu gráfico;
Resolver problemas de otimização envolvendo funções diferenciáveis.

</td><td>
A prova inclui:

4 itens de seleção (escolha múltipla) cuja cotação é de 10 pontos cada.
itens de construção (resposta aberta) cuja cotação é de 160 pontos.

A sequência dos itens pode não corresponder à sequência dos domínios lecionados.

A prova inclui formulário e tem a duração de 100 minutos.

Material a Utilizar:
O aluno deve ser portador, para além da calculadora gráfica (em modo de exame), de material de escrita (caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta indelével), folhas de prova (timbradas pela escola) e material de desenho (régua, compasso, esquadro e transferidor).

Observações:
A prova tem por referência as Aprendizagens Essenciais de Matemática A do Ensino Secundário.

Não é permitido o uso de corretor.
</td></tr>
</table>

FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA • Reconhecer e aplicar a sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, com $x \in \mathbb{R}$ à resolução de problemas; • Conhecer as propriedades da família de funções $f(x) = a^x, (a > 1)$, nomeadamente, monotonia, sinal, continuidade, limites, assíntotas ao gráfico e propriedades algébricas; • Caracterizar uma função logarítmica como função inversa de uma função exponencial de base a, com $a > 1$; • Conhecer as propriedades das funções reais de variável real da família de funções $f(x) = \log_a x$, $a > 1$, nomeadamente, monotonia, sinal, continuidade, limites e propriedades algébricas dos logaritmos; • Conhecer e aplicar os limites notáveis estudados e que constam do formulário; • Conhecer e aplicar a derivada da função exponencial e da função logarítmica; • Resolver problemas envolvendo as funções exponencial e logarítmica. **FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS** • Aplicar conhecimentos de trigonometria lecionados no 11º ano; • Reconhecer e aplicar as fórmulas trigonométricas do seno e do cosseno da soma de dois ângulos; • Reconhecer e aplicar as fórmulas trigonométricas do seno e do cosseno da duplicação. • Conhecer e aplicar o limite notável estudado e que consta do formulário; • Conhecer e aplicar as derivadas das funções trigonométricas; • Resolver problemas envolvendo as funções trigonométricas. **CORPO DOS COMPLEXOS** • Saber operar com números complexos; • Reconhecer a importância do conjugado de um número complexo e conhecer as propriedades subjacentes às operações entre números complexos; • Conhecer a forma trigonométrica de um complexo e saber operar com complexos nesta forma; • Saber representar números complexos e condições em $\mathbb{C}$, no Plano d'Argand; • Reconhecer e aplicar as Fórmulas de Moivre na resolução de problemas; • Resolver problemas envolvendo números complexos, quer na forma algébrica, quer na forma trigonométrica e as respetivas propriedades algébricas; • Resolver problemas envolvendo a representação, por números complexos, de isometrias do plano (translações, reflexões e rotações) ou outras transformações do plano, como as homotetias; • Resolver problemas envolvendo a representação de conjuntos de pontos definidos por condições sobre números complexos; • Resolver problemas envolvendo equações da forma $z^n = w, \quad n \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{C}$ e vértices de polígonos regulares enquanto afixos de números complexos.	Deve riscar o que não pretender que seja classificado. Não são corrigidas as questões escritas a lápis.

I.2 Prova Global de Avaliação: Enunciado

ANO LETIVO 2023-2024

PROVA GLOBAL DE AVALIAÇÃO – MATEMÁTICA A

12º ANO – TURMA 7

PROFESSORA: Natividade Correia Data: 17- 05 - 2024

Duração: 100 minutos.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

É permitido o uso de calculadora gráfica (**em modo de exame**).

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente as suas respostas de forma legível.

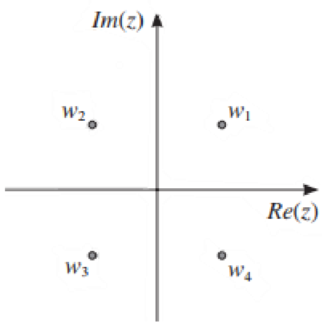
Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

Na resposta apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura estão representados, no plano complexo, os afixos de quatro números: w_1, w_2, w_3 e w_4.

Qual é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $\frac{i^{8n}}{i^{4n+1}} - \frac{1}{i^2}$?



(A) w_1 **(B)** w_2 **(C)** w_3 **(D)** w_4

2. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que verificam a condição

$$e^{-x}(4 + e^{2x}) \geq 5 \ \wedge \ -2 \leq x \leq 2.$$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

3. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

3.1. Considere os complexos: $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$ e $z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - isen\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Determine o menor valor natural n para o qual $(z_1 \times z_2)^n$ é um número real positivo.

3.2. Prove que: $|z + i|^2 - |z - i|^2 = 4\,\mathrm{Im(z)}$.

4. Um dado cúbico equilibrado tem quatro faces numeradas com números reais não nulos e as restantes faces com números imaginários puros. Lança-se o dado duas vezes e regista-se o produto dos números saídos nos dois lançamentos. Qual é a probabilidade de o produto obtido ser um número real?

(A) $\frac{4}{9}$ **(B)** $\frac{5}{9}$ **(C)** $\frac{13}{36}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

5. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por: $g(x) = \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{e^{2x}-1} & se\ x < 0 \\ \frac{1}{2} & se\ x = 0 \\ \frac{1}{2} + x\ln(x) & se\ x > 0 \end{cases}$.

Resolva as alíneas seguintes sem recorrer à calculadora gráfica.

5.1. Averigue se a função g é contínua em $x = 0$.

5.2. Estude a função g quanto à monotonia, em $]0; +\infty[$, e determine, caso exista(m), o(s) extremo(s) relativo(s).

6. Sabendo que $\log_p(a) = 3$, então o valor de $\log_p\left(\frac{a^2 \times p}{\sqrt[3]{a}}\right)$ é:

(A) 6 **(B)** 0 **(C)** 4 **(D)** $6a$

7. Seja j uma função derivável, de domínio $]-\infty; \pi[\setminus\{0\}$, cuja derivada, j', é dada por

$$j'(x) = \begin{cases} 3\,e^{\,2x} - 7e^x & se \quad x < 0 \\ x + 2\,cos^2(x) & se\ 0 < x < \pi \end{cases}.$$

Recorra apenas a métodos analíticos para responder às questões seguintes:

7.1. Estude a função j quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $]0; \pi[$.

7.2. Considere, em referencial o.n. Oxy, o gráfico da função j. Determine, no intervalo $]-\infty; 0[$, a abcissa do ponto do gráfico da função j em que a reta tangente ao gráfico da função é paralela à reta de equação $y = -2x$.

8. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = cos^2(2x) - 2$ e um número real a pertencente ao intervalo $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to a} \frac{x-a}{h(a)-h(x)}$?

(A) $\frac{1}{2\,sen\,(2a)}$ **(B)** $\frac{1}{2\,sen\,(4a)}$ **(C)** $-\frac{1}{2\,sen\,(2a)}$ **(D)** $-\frac{1}{2\,sen\,(4a)}$

9. Considere as funções g e h, de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

- a reta de equação $y = 2x - 1$ é assíntota do gráfico da função g;
- a função h é definida por $h(x) = \frac{1-(g(x))^2}{x^2}$.

Mostre que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal.

FIM

Questão	**1.**	**2.**	**3.1**	**3.2**	**4.**	**5.1**	**5.2**	**6.**	**7.1**	**7.2**	**8.**	**9.**	**Total**
Cotação	10	18	22	20	10	20	20	10	20	20	10	20	**200**

I.3 Prova Global de Avaliação: Resolução

Resolução Prova Global 12º7, 17/05/2024

1. $$\frac{i^{8n}}{i^{4n+1}} - \frac{1}{i^2} = \frac{(i^4)^{2n}}{(i^4)^n \times i} - \frac{1}{-1} = \frac{1}{1\times i} + 1 = \frac{1+i}{i} = \frac{i+i^2}{i^2} = \frac{i-1}{-1} = 1-i = w$$

Veja-se que $Re(w) > 0 \wedge Im(w) < 0$.

R: (D)

2. $$e^{-x}(4+e^{2x}) \geq 5 \wedge -2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^x}(4+e^{2x}) - 5 \geq 0 \wedge -2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4+e^{2x}-5e^x}{e^x} \geq 0 \wedge -2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x + 4 \geq 0 \wedge -2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow$$

$(e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow (x \leq 0 \vee x \geq 2\ln(2)) \wedge -2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0 \vee 2\ln(2) \leq x \leq 2 \Leftrightarrow$$

C.S. $= [-2;0] \cup [2\ln(2);2]$

C.A.

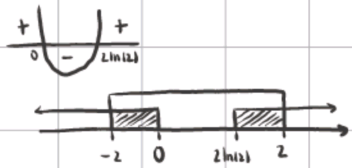
$$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{5 \pm \sqrt{25-4\times1\times4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \vee e^x = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln(4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2\ln(2)$$



3. $z_1 = -1-\sqrt{3}i$; $z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$

3.1. Seja $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{tg}\,\theta_1 = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \wedge \theta_1 \in 3^\circ Q \Rightarrow \theta_1 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto, $z_1 = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

Seja $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$

$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$

$-\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(-\alpha)$ $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

Portanto, $z_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$

Daqui vem que:

$z_1 \times z_2 = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} \times e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)} = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{5}\right)} = 2e^{i\left(\frac{17\pi}{15}\right)}$ logo $(z_1 \times z_2)^n = \left[2e^{i\left(\frac{17\pi}{15}\right)}\right]^n = 2^n e^{i\left(\frac{17\pi}{15}\right)n}$

Para que $(z_1 \times z_2)^n$ seja um nº real positivo, então $\frac{17\pi}{15} \cdot n = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ logo $17\pi \cdot n = 30k\pi \Leftrightarrow n = \frac{30}{17}k$. Concluímos então que o menor valor n que satisfaz a condição é $n = 30$ (obtido para $k = 17$).

3.2. Consideremos $z = x + yi$.

$|z+i|^2 - |z-i|^2 = |x+yi+i|^2 - |x+yi-i|^2 = |x+i(y+1)|^2 - |x+i(y-1)|^2 =$

$= \sqrt{x^2+(y+1)^2}^{\,2} - \sqrt{x^2+(y-1)^2}^{\,2}$

$= \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2y + \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} + 2y - \cancel{1} = 4y = 4\,\text{Im}(z).$

4.

6 faces — 4 com nº reais; 2 com nº imaginários puros

nº real × nº real nº imaginário puro × nº imaginário puro

$P = \frac{4\times 4 + 2\times 2}{6\times 6} = \frac{16+4}{36} = \frac{20}{36} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$

R: (B)

5.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{e^{2x}-1} & \text{se } x<0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x=0 \\ \dfrac{1}{2}+x\ln(x) & \text{se } x>0 \end{cases}$$

5.1. A função g é contínua em $x=0$ se:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0).$$

- $$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\times\frac{x}{e^{2x}-1}\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{(2x)\to 0^-}\frac{2x}{2(e^{2x}-1)} = 1\times\frac{1}{2}\lim_{(2x)\to 0^-}\frac{2x}{e^{2x}-1} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\underbrace{\lim_{(2x)\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}}_{\text{limite notável}}} = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}.$$

- $$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}+x\ln(x)\right) = \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0^+}(x\ln(x)) = \frac{1}{2}+\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}+\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y^{-1})}{y} = \frac{1}{2}-\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}}_{\text{limite notável}} = \frac{1}{2}-0 = \frac{1}{2}.$$

Mudança de Variável:

$x=\frac{1}{y} \Leftrightarrow y=\frac{1}{x}$

Como $x\to 0^+$ então $y\to+\infty$

- $g(0)=\frac{1}{2}$.

Donde concluímos que a função g é contínua em $x=0$.

5.2. Em $]0;+\infty[$, $g(x)=\frac{1}{2}+x\ln(x)$

1) $g'(x) = x'\ln(x) + (\ln(x))'x = \ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln(x)+1,\ \forall x\in\mathbb{R}^+$

2) $g'(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)+1=0 \Leftrightarrow \ln(x)=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
Sinal de g'	N.D.	$-$	0	$+$	
Monotonia de g	N.D.	$\searrow$	Min.	$\nearrow$	

$$g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}\ln(e^{-1})=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}=\frac{e-2}{2e}$$

No intervalo $]0;+\infty[$, a função g tem um minímo relativo em $x=\frac{1}{e}$, que é $g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{e-2}{2e}$.

6. Sabemos que $\log_p(a)=3$. Logo:

- $\log_p\left(\frac{a^2\times p}{\sqrt[3]{a}}\right)=\log_p(a^2\times p)-\log_p(a^{1/3})=\log_p(a^2)+\log_p(p)-\frac{1}{3}\log_p(a)=$

$=2\log_p(a)+1-\frac{1}{3}\log_p(a)=2\times3+1-\frac{1}{3}\times3=6+1-1=6.$

R: (A)

7.

$$j'(x)=\begin{cases}3e^{2x}-7e^{x} & \text{se } x<0\\ x+2\cos^2(x) & \text{se } 0<x<\pi\end{cases}$$

7.1.

Em $]0;\pi[$, $j'(x)=x+2\cos^2(x)$

1) $j''(x)=(x)'+(2\cos^2(x))'=1+2\times2\cos(x)(\cos(x))'=$

$=1+4\cos(x)(-\operatorname{sen}(x))=1-2\times2\operatorname{sen}(x)\cos(x)=$

$=1-2\operatorname{sen}(2x),\ \forall x\in\,]0;\pi[$

2) $j''(x)=0 \Leftrightarrow 1-2\operatorname{sen}(2x)=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \vee\ 2x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi \ \vee\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

No intervalo $]0;\pi[$:

- Se $k=0$: $x=\frac{\pi}{12} \vee x=\frac{5\pi}{12}$

- Se $k=1$: $x=\cancel{\frac{\pi}{12}+\pi} \vee x=\cancel{\frac{5\pi}{12}}+\pi$

- Se $k=-1$: $x=\cancel{\frac{\pi}{12}}-\pi \vee x=\cancel{\frac{5\pi}{12}}-\pi$

estas soluções não pertencem ao intervalo que estamos a considerar

	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π
Sinal de j''	N. D.	+	0	−	0	+	N. D.
concavidades do gráfico de j	N. D.	$\cup$	P. I.	$\cap$	P. I.	$\cup$	N. D.

O gráfico de j tem a concavidade voltada para cima em $]0;\frac{\pi}{12}[$ e em $]\frac{5\pi}{12};\pi[$; a concavidade voltada para baixo em $]\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}[$ e tem dois pontos de inflexão de abcissas $x=\frac{\pi}{12}$ e $x=\frac{5\pi}{12}$.

7.2. O ponto do gráfico de j em que as retas tangentes ao gráfico são paralelas à reta de equação $y=-2x$, no intervalo $]-\infty,0[$, obtêm-se resolvendo a condição $j'(x)=-2$, com $j'(x)=3e^{2x}-7e^{x}$.

- $j'(x)=-2 \Leftrightarrow 3e^{2x}-7e^{x}=-2 \Leftrightarrow 3e^{2x}-7e^{x}+2=0 \Leftrightarrow 3(e^{x})^2-7e^{x}+2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x}=\frac{7\pm\sqrt{49-4\times3\times2}}{2\times3} \Leftrightarrow e^{x}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{6} \Leftrightarrow e^{x}=2 \vee e^{x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\ln(2) \vee x=\ln\left(\frac{1}{3}\right) \underset{(x\in]-\infty,0[)}{\Leftrightarrow} x=\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

8. Seja $h(x) = \cos^2(2x) - 2$, com $x \in \mathbb{R}$

- $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x-a}{h(a)-h(x)} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{-(h(x)-h(a))} = -\lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{h(x)-h(a)}{x-a}} = \frac{-1}{h'(a)} \overset{\circledast}{=} \frac{-1}{-2\,\text{sen}(4a)} = \frac{1}{2\,\text{sen}(4a)}$.

<u>C.A.</u>

$\circledast$ $h'(x) = 2\cos(2x)\,(\cos(2x))' = 2\cos(2x)\cdot(-2\,\text{sen}(2x)) = -2\times 2\cos(2x)\,\text{sen}(2x) = -2\,\text{sen}(4x)$

<u>R: (B)</u>

9. $D_g = D_h = \mathbb{R}^+$

- $y = 2x - 1$ é assíntota ao gráfico de g logo

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (g(x) - 2x) = -1$

Para mostrar que a função h tem uma assíntota horizontal, calculemos $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-(g(x))^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{g(x)}{x}\cdot\frac{g(x)}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{+\infty} - \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\right) = 0 - 2\times 2 = -4.$$

Logo o gráfico de h tem uma assíntota horizontal de equação $y = -4$.

I.4 Prova Global de Avaliação: Critérios de Correção

Critérios Gerais de Classificação

A classificação a dar a cada resposta é o resultado da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados neste documento para cada item.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta esta deve ser classificada, caso seja possível identificar o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, a resposta classificada é aquela que surgir em primeiro lugar.

A prova é constituída por itens de escolha múltipla e itens de construção.

- Nos itens de escolha múltipla é atribuída toda a pontuação às respostas que apresentem de forma clara a opção correta. Caso contrário, a resposta é cotada com zero.

- Nos itens de construção, a classificação é atribuída de acordo com os critérios de classificação específicos, que estão organizados por etapas, atribuindo-se a cada uma delas, uma pontuação.
  Caso o aluno apresente apenas a resposta final, sem apresentar quaisquer justificações ou cálculos, quando estes são pedidos, é atribuída a classificação de zero.
  Se na resolução ocorrerem erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou propriedades, a cotação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
  Desde que a dificuldade de resolução do item não diminua, deve-se descontar um ponto às pontuações estabelecidas para a respetiva etapa, nas situações apresentadas em seguida:

  - Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar;
  - Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa;
  - Ocorrência de um erro ocasional de cálculo;
  - Apresentação de cálculos intermédios ou do resultado final com um número de casas decimais diferentes do solicitado ou com um arredondamento incorreto;
  - Apresentação do resultado final que não respeita a forma pedida;
  - Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso a resolução apresentada não esteja prevista nos critérios de correção específicos, cabe ao professor corretor adequar a distribuição da cotação atribuída.

Critérios Específicos de Classificação

Número total de pontos: (NºPontos D_1, NºPontos D_2, NºPontos D_3)

1. ....10 pontos: (5, 5, 0)

Opção (D)

2. ....18 pontos: (8, 7, 3)

Escrever $e^{-x}(4+e^{2x}) \geq 5 \Leftrightarrow 4e^{-x}+e^{x}-5 \geq 0$....................2 pontos: (1, 0, 1)

Obter $4e^{-x}+e^{x}-5 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x}-5e^{x}+4 \geq 0$....................4 pontos: (2, 2, 0)

Escrever $e^{2x}-5e^{x}+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq \ln 4$....................8 pontos: (4, 4, 0)

Apresentar o conjunto pedido ($[-2,0] \cup [\ln 4, 2]$)....................4 pontos: (1, 1, 2)

3. ....42 pontos: (17, 18, 7)

3.1. ....22 pontos: (9, 9, 4)

Obter $z_1 = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$ (ou equivalente)....................7 pontos: (3, 3, 1)

Determinar $|z_1|$....................3 pontos: (2, 1, 0)

Determinar um argumento de z_1....................4 pontos: (1, 2, 1)

Obter $z_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$ (ou equivalente)....................5 pontos: (2, 2, 1)

Referir que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - isen\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - isen\left(\frac{\pi}{5}\right)$....................3 pontos: (1, 2, 0)

Escrever $z_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$ (ou equivalente)....................2 pontos: (1, 0, 1)

Obter $z_1 \times z_2 = 2e^{i\left(\frac{17\pi}{15}\right)}$ (ou equivalente)....................2 pontos: (2, 0, 0)

Referir que $(z_1 \times z_2)^n$ é um número real positivo se e só se $Arg((z_1 \times z_2)^n) = 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ ....4 pontos: (1, 2, 1)

Obter $n = \frac{30k}{17}$ com $k \in \mathbb{Z}$....................2 pontos: (0, 1, 1)

Obter o valor de n (30)....................2 pontos: (1, 1, 0)

3.2. ....20 pontos: (8, 9, 3)

Considerar $z = x + yi$

Substituir z por $x + yi$ na expressão $|z+i|^2 - |z-i|^2$....................4 pontos: (2, 2, 0)

Escrever $|x+yi+i|^2 - |x+yi-i|^2 = |x+(y+1)i|^2 - |x+(y-1)i|^2$....................4 pontos: (2, 1, 1)

Escrever $|x+(y+1)i|^2 - |x+(y-1)i|^2 = \sqrt{x^2+(y+1)^2}^2 + \sqrt{x^2+(y-1)^2}^2$ ....6 pontos: (2, 3, 1)

Obter $\sqrt{x^2+(y+1)^2}^2 + \sqrt{x^2+(y-1)^2}^2 = 4y$....................4 pontos: (2, 2, 0)

Concluir que $4y = 4\mathrm{Im}(z)$....................2 pontos: (0, 1, 1)

4. ....10 pontos: (5, 5, 0)

Opção (B)

5. ....40 pontos: (17, 17, 6)

5.1. ....**20 pontos: (9, 8, 3)**

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$..7 pontos: (4, 3, 0)

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{e^{2x}-1}\right)$..1 ponto: (1, 0, 0)

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{e^{2x}-1}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\text{sen}\,(x)}{e^{2x}-1}$..1 ponto: (1, 0, 0)

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\text{sen}\,(x)}{e^{2x}-1} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\text{sen}(x)}{x}\times\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{2x}-1}$..............................2 pontos: (1, 1, 0)

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\text{sen}(x)}{x}\times\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{2x}-1} = 1\times\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{2x}-1}$.........................1 ponto: (0, 1, 0)

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{2x}-1} = \frac{1}{2}\times\lim\limits_{2x\to 0^-}\frac{1}{\frac{e^{2x}-1}{2x}}$..1 ponto: (0, 1, 0)

Obter $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \frac{1}{2}$...1 ponto: (1, 0, 0)

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$..7 pontos: (3, 4, 0)

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}+x\ln x\right)$...1 ponto: (1, 0, 0)

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}+x\ln x\right) = \frac{1}{2}+\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right)$ ....3 pontos: (1, 2, 0)

Escrever $\frac{1}{2}+\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}+\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{-\ln y}{y}$ ....1 ponto: (0, 1, 0)

Escrever $\frac{1}{2}+\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{-\ln y}{y} = \frac{1}{2}-\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}$ ....1 ponto: (0, 1, 0)

Obter $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \frac{1}{2}$...1 ponto: (1, 0, 0)

Referir que $g(0) = \frac{1}{2}$..3 pontos: (1, 0, 2)

Concluir que a função g é contínua no ponto 0 ....3 pontos: (1, 1, 1)

5.2. ....**20 pontos: (8, 9, 3)**

Determinar $g'(x)$ em $]0;+\infty[$ ....5 pontos: (2, 2, 1)

Escrever $g'(x) = 0$..1 ponto: (0, 1, 0)

Obter os zeros de g' em $]0;+\infty[$...5 pontos: (3, 2, 0)

Estudar o sinal de g' e relacioná-lo com a monotonia de g em $]0;+\infty[$..................5 pontos: (2, 2, 1)

Determinar $g\left(\frac{1}{e}\right)$ $\left(\frac{e-2}{2e}\right)$...4 pontos: (1, 2, 1)

6. ....**10 pontos: (5, 5, 0)**

Opção (A)

7. ....40 pontos: (18, 17, 5)

7.1. ....**20 pontos: (9, 8, 3)**

Determinar $j''(x)$ em $]0, \pi[$..4 pontos: (2, 2, 0)

Escrever $j''(x) = 0$..2 pontos: (0, 1, 1)

Determinar os zeros de $j''(x)$ em $]0, \pi[$..4 pontos: (3, 1, 0)

Estudar o sinal de j'' e relacioná-lo com o sentido das concavidades do gráfico de j em $]0, \pi[$ (ou equivalente)...6 pontos: (2, 3, 1)

Apresentar os intervalos em que a concavidade do gráfico da função é voltada para cima e em que é voltada para baixo, em $]0, \pi[$...............................2 pontos: (2, 0, 0)

Indicar as abcissas dos pontos de inflexão ($\frac{\pi}{12}$ e $\frac{5\pi}{12}$)..2 pontos: (0, 1, 1)

7.2. ....**20 pontos: (9, 9, 2)**

Reconhecer que o declive da reta tangente é igual a -2..3 pontos: (0, 3, 0)

Escrever $j'(x) = -2$..2 pontos: (2, 0, 0)

Escrever $3e^{2x} - 7e^{x} = -2$...1 ponto: (0, 0, 1)

Escrever $3e^{2x} - 7e^{x} + 2 = 0$...1 ponto: (0, 0, 1)

Obter $e^{x} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6}$...5 pontos: (2, 3, 0)

Obter $e^{x} = \frac{1}{3} \vee e^{x} = 2$..4 pontos: (2, 2, 0)

Obter $x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \vee x = \ln 2$..2 pontos: (1, 1, 0)

Apresentar o valor pedido $\left(\ln\left(\frac{1}{3}\right) \text{ ou} - \ln 3\right)$.................................2 pontos: (2, 0, 0)

8. ....**10 pontos: (5, 5, 0)**

Opção (B)

9. ....**20 pontos: (8, 9, 3)**

Concluir que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$ (ou equivalente)..4 pontos: (2, 2, 0)

Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$..14 pontos: (6, 6, 2)

- Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 - \left(g(x)\right)^2}{x^2}$..2 pontos: (1, 0, 1)
- Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{(g(x))^2}{x^2}\right)$..4 pontos: (1, 2, 1)
- Obter o valor $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$ ....4 pontos: (2, 2, 0)
- Obter o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(g(x)\right)^2}{x^2}$...4 pontos: (2, 2, 0)

Concluir o pedido..2 pontos: (0, 1, 1)

Anexo J

Prova Parcelar de Avaliação

J.1 Prova Parcelar de Avaliação: Enunciado

ANO LETIVO 2023-2024

QUESTÃO DE AULA – MATEMÁTICA A

12º ANO – TURMA 7

PROFESSORA: Natividade Correia Data: 09-05-2024

Duração: 50 minutos.
Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
É permitido o uso de calculadora gráfica (**em modo de exame**).
Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
Apresente as suas respostas de forma legível.
Apresente apenas uma resposta para cada item.
As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

Na resposta apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere a função real de variável real definida por: $f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x + 2}$.

1.1. Averigue a existência de assíntotas ao gráfico de f.

1.2. Escreva sob a forma de intervalo o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}: f(x) > 0\}$.

1.3. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de ordenada (-1).

2. O Gonçalo adora tirar fotografias às planícies quando anda de avião. Num determinado dia decidiu experimentar fazê-lo a partir de um parapente e, às 9 horas, saltou de um penhasco na serra da Lousã. Durante 38 minutos manteve-se no ar. A altura do parapente, em metros, t minutos após ter iniciado o salto, é dada por: $A(t) = 5 - 2t + 15\ln(3t + 5)$, $0 \leq t \leq 38$.
Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, resolva as alíneas seguintes:

2.1. Mostre que houve um instante entre as $9h\ 15\ min$ e as $9h\ 30\ min$ em que o parapente do Gonçalo esteve a uma altura de 25 metros.

2.2. Determine a altura máxima atingida pelo parapente. Quanto tempo após o início do salto foi atingida a altura máxima?

3. Considere no conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$, os seguintes números, onde i é a unidade imaginária:

$w_1 = \left(i^7 + \frac{1}{1-i}\right)^5$, $\quad w_2 = 2\, e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ e $\quad w_3 = 32\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$.

3.1. Simplifique o número complexo w_1e apresente o resultado na forma algébrica.

3.2. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação: $z^5 - w_3 = 0$.

F I M

Questão	1. 1	1.2	1.3	2.1	2.2	3.1	3.2	Total
Cotação	14	14	15	14	14	15	14	**100**

J.2 Prova Parcelar de Avaliação: Resolução

Resolução Prova Parcelar 12º7, 09/05/2024

1. $f(x) = \dfrac{e^x - 3}{e^x + 2}, \ x \in \mathbb{R}$

1.1. Como a função f é contínua em $\mathbb{R}$ (porque resulta de operações entre funções contínuas) não existem assíntotas verticais ao gráfico de f.

Vejamos se existem assíntotas não verticais ao gráfico de f:

$\boxed{x \to +\infty}$

$$m: \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 3}{x(e^x + 2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(1 - \frac{3}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)} = \frac{1 - 0}{+\infty(1+0)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b: \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 3}{e^x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(1 - \frac{3}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

Logo, a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

$\boxed{x \to -\infty}$

$$m: \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 3}{x(e^x + 2)} = \frac{0 - 3}{-\infty(0+2)} = \frac{-3}{-\infty} = 0$$

$$b: \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 3}{e^x + 2} = \frac{0 - 3}{0 + 2} = \frac{-3}{2}$$

Logo, a reta de equação $y = \frac{-3}{2}$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

1.2. $A=\{x\in\mathbb{R}: f(x)>0\}$

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{e^x-3}{e^x+2}>0 \Leftrightarrow e^x-3>0 \Leftrightarrow e^x>3 \Leftrightarrow x>\ln(3)$$

$e^x+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$

Logo $A=]\ln(3);+\infty[$.

1.3. Seja $y=mx+b$ a reta tangente ao gráfico no ponto de ordenada -1. Vejamos qual é a abcissa desse ponto.

- $$f(x)=-1 \Leftrightarrow \frac{e^x-3}{e^x+2}=-1 \Leftrightarrow \frac{e^x-3}{e^x+2}+\frac{e^x+2}{e^x+2}=0 \Leftrightarrow \frac{2e^x-1}{e^x+2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^x-1=0 \wedge \underbrace{e^x+2\neq 0}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\ln(2), \text{ logo } m=f'(-\ln(2)).$$

- $$f'(x)=\frac{(e^x-3)'(e^x+2)-(e^x+2)'(e^x-3)}{(e^x+2)^2}=\frac{e^x(e^x+2)-e^x(e^x-3)}{(e^x+2)^2}=\frac{e^x(e^x+2-e^x+3)}{(e^x+2)^2}=\frac{5e^x}{(e^x+2)^2}$$

- De onde vem que: $f'(-\ln(2))=\dfrac{5e^{-\ln(2)}}{(e^{-\ln(2)}+2)^2}=\dfrac{5\times 2^{-1}}{(2^{-1}+2)^2}=\dfrac{2}{5}=m$

Usando o ponto de coordenadas $(-\ln(2);-1)$ temos

$$-1=\frac{2}{5}\times(-\ln(2))+b \Leftrightarrow -1=\frac{-2\ln(2)}{5}+b \Leftrightarrow b=-1+\frac{\ln(4)}{5}.$$

Portanto a reta tangente ao gráfico no ponto de ordenada -1 é $y=\frac{2}{5}x+\left(-1+\frac{\ln(4)}{5}\right)$.

2. $A(t)=5-2t+15\ln(3t+5)$, $0\le t\le 38$, t minutos

2.1. A função A é contínua no intervalo fechado $[0;38]$ (resulta de operações contínuas nesse intervalo).

Como $[15;30]\subset[0;38]$, a função A é contínua em $[15;30]$.

- $A(15)=5-2\times 15+15\ln(3\times 15+5)\simeq 33,68$
- $A(30)=5-2\times 30+15\ln(3\times 30+5)\simeq 13,31$

Como $A(15)\le 25\le A(30)$ e A é contínua em $[15;30]$ pelo Teorema Bolzano, $\exists c\in\,]15;30[\,: A(c)=25$.

No contexto do problema isto prova que houve um instante entre as 9h15 min e as 9h30 min que o parapente do Gonçalo esteve a uma altura de 25 metros.

2.2. 1) $A'(t)=5'-(2t)'+15(\ln(3t+5))'=-2+15\times\frac{(3t+5)'}{3t+5}=$

$=-2+\frac{15\times 3}{3t+5}=-2+\frac{45}{3t+5}=\frac{-6t+35}{3t+5}$, $t\in[0;38]$

2) $A'(t)=0 \Leftrightarrow \frac{-6t+35}{3t+5}=0 \Leftrightarrow -6t+35=0 \wedge 3t+5\neq 0 \wedge 0\le t\le 38 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\frac{-35}{-6} \wedge t\neq\frac{-5}{3} \wedge 0\le t\le 38 \Leftrightarrow t=\frac{35}{6}$.

	0		$\frac{35}{6}$		38
Sinal de A'		$+$	0	$-$	
Monotonia de A	min.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	min.

C.A.

$\frac{35}{6}\simeq 5,83(3)$

1 min — 60 seg

0,83 — x

$x=60\times 0,83\simeq 50$ seg

3

$$A\left(\frac{35}{6}\right) = 5 - 2 \times \frac{35}{6} + 15\ln\left(3 \times \frac{35}{6} + 5\right) \simeq 40{,}036$$

A altura máxima atingida foi aproximadamente 40 metros após aproximadamente 5 minutos e 50 segundos.

3.

3.1.

$$W_1 = \left(i^7 + \frac{1}{1-i}\right)^5 = \left(i^3 \times i^4 + \frac{(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^5 = \left(-i + \frac{1+i}{2}\right)^5 = \left(\frac{-2i+1+i}{2}\right)^5 =$$

$$= \left(\frac{1-i}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)^5.$$ Seja $j = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = |j|e^{i\theta_1}$

$$|j| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \wedge \quad tg\,\theta_1 = \frac{-1/2}{1/2} = -1 \quad \wedge \quad \theta_1 \in 4^o Q \quad \text{logo} \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{4}$$

Assim $j = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\left(-\frac{\pi}{4}\right)i}$. Como $w_1 = j^5$ vem $w_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 e^{5 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right)i} = \frac{\sqrt{2}}{8} e^{-\frac{5\pi}{4}i} =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i\,sen\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}i$$

3.2.

Consideremos $z = re^{i\theta}$, então

$$z^5 - W_3 = 0 \Leftrightarrow z^5 = 32e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow (re^{i\theta})^5 = 32e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow r^5 e^{i(5\theta)} = 32e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = 32 \\ 5\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[5]{32} \\ \theta = \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

As soluções da equação que se obtêm para $k \in \{0,1,2,3,4\}$ são:

$$z_0 = 2e^{\frac{\pi}{20}i}\ ;\ z_1 = 2e^{\frac{9\pi}{20}i}\ ;\ z_2 = 2e^{\frac{17\pi}{20}i}\ ;\ z_3 = 2e^{\frac{25\pi}{20}i}\ ;\ z_4 = 2e^{\frac{33\pi}{20}i}$$

Anexo K

Ficha de Autoavaliação

JOSÉ FALCÃO
ESCOLA SECUNDÁRIA

FICHA DE AUTOAVALIAÇÃO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA

Ano Letivo 2023/2024

Nome ______________________________ N.º ______ Ano ______ Turma ______

1º Período		2º Período		3º Período	
Saber Científico, Técnico, Tecnológico, Artístico e Ambiental $P_1 = \frac{soma\ D_1 = \_\_\_\_}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_} \times 2 = \_\_\_\_$	$S_1 = P_1 \times 0{,}4 = \_\_\_\_\_\_$	**Saber Científico, Técnico, Tecnológico, Artístico e Ambiental** $P_1 = \frac{soma\ D_1 = \_\_\_\_}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_} \times 2 = \_\_\_\_$	$S_1 = P_1 \times 0{,}4 = \_\_\_\_\_\_$	**Saber Científico, Técnico, Tecnológico, Artístico e Ambiental** $P_1 = \frac{soma\ D_1 = \_\_\_\_}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_} \times 2 = \_\_\_\_$	$S_1 = P_1 \times 0{,}4 = \_\_\_\_\_\_$
Raciocínio e Resolução de Problemas $P_2 = \frac{soma\ D_2 = \_\_\_\_}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_} \times 2 = \_\_\_\_$	$S_2 = P_2 \times 0{,}4 = \_\_\_\_\_\_$	**Raciocínio e Resolução de Problemas** $P_2 = \frac{soma\ D_2 = \_\_\_\_}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_} \times 2 = \_\_\_\_$	$S_2 = P_2 \times 0{,}4 = \_\_\_\_\_\_$	**Raciocínio e Resolução de Problemas** $P_2 = \frac{soma\ D_2 = \_\_\_\_}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_} \times 2 = \_\_\_\_$	$S_2 = P_2 \times 0{,}4 = \_\_\_\_\_\_$
Investigação e Comunicação $P_3 = \frac{soma\ D_3 = \_\_\_\_}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_} \times 2 = \_\_\_\_$	$S_3 = P_3 \times 0{,}1 = \_\_\_\_\_\_$	**Investigação e Comunicação** $P_3 = \frac{soma\ D_3 = \_\_\_\_}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_} \times 2 = \_\_\_\_$	$S_3 = P_3 \times 0{,}1 = \_\_\_\_\_\_$	**Investigação e Comunicação** $P_3 = \frac{soma\ D_3 = \_\_\_\_}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_} \times 2 = \_\_\_\_$	$S_3 = P_3 \times 0{,}1 = \_\_\_\_\_\_$
Desenvolvimento Pessoal e Interpessoal (Respeito, Autonomia, Cooperação, Espírito crítico e Autoavaliação) $D_4 = \_\_\_\_$ $P_4 = D_4 \times 2 = \_\_\_\_$ D_4: Muito Bom 95%; Bom 80%; Suficiente 60%; Insuficiente 40%; Muito insuficiente 20%	$S_4 = P_4 \times 0{,}1 = \_\_\_\_\_\_$	**Desenvolvimento Pessoal e Interpessoal** (Respeito, Autonomia, Cooperação, Espírito crítico e Autoavaliação) $D_4 = \_\_\_\_$ $P_4 = D_4 \times 2 = \_\_\_\_$ D_4: Muito Bom 95%; Bom 80%; Suficiente 60%; Insuficiente 40%; Muito insuficiente 20%	$S_4 = P_4 \times 0{,}1 = \_\_\_\_\_\_$	**Desenvolvimento Pessoal e Interpessoal** (Respeito, Autonomia, Cooperação, Espírito crítico e Autoavaliação) $D_4 = \_\_\_\_$ $P_4 = D_4 \times 2 = \_\_\_\_$ D_4: Muito Bom 95%; Bom 80%; Suficiente 60%; Insuficiente 40%; Muito insuficiente 20%	$S_4 = P_4 \times 0{,}1 = \_\_\_\_\_\_$
SOMA: $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =$		**SOMA:** $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =$		**SOMA:** $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =$	
A minha classificação:		**A minha classificação:**		**A minha classificação:**	

REFLEXÃO CRÍTICA SOBRE O TRABALHO REALIZADO (Pontos fortes e Pontos fracos)		
1.º PERÍODO		
	Data	**Assinatura:**
2.º PERÍODO		
	Data	**Assinatura:**
3.º PERÍODO		
	Data	**Assinatura:**

D_i em percentagem P_i de 0 a 200 pontos

Anexo L

Ficha Formativa 12º ano

L.1 Ficha Formativa 12º ano: Enunciado

Ficha Formativa nº35: Estatística

Professora: Natividade Morgado   Maio 2024

1. Em determinado ano, os valores, em euros, dos impostos pagos por oito famílias foram os seguintes:

$$5300 \quad 2700 \quad 6000 \quad 9200 \quad 21000 \quad 8500 \quad 7100 \quad 8200$$

1.1. Mostre que a média é de 8500 euros e determine a percentagem de famílias que pagaram valores de impostos superiores à média.

1.2. No ano seguinte, a média dos valores pagos em impostos pelas mesmas oito famílias foi de 8925 euros.

1.2.1. No total, em relação ao ano anterior, quanto arrecadou a mais o Estado com os impostos pagos por estas oito famílias?

1.2.2. Qual foi o aumento percentual médio dos impostos para estas oito famílias?

1.3. Determine a mediano deste conjunto de dados.

2. Os elementos de duas equipas de basquetebol têm, em centímetros, as seguintes alturas:

Equipa A: $187; 190; 186; 195; 186; 192; 202; 205; 196; 191$

Equipa B:$190; 186; 198; 193; 203; 190; 195; 203; 188; 186$

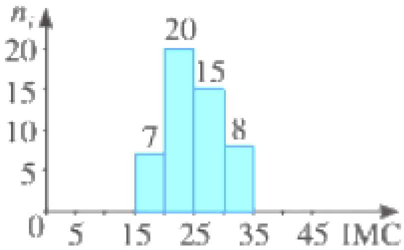
2.1. Mostre que a média das alturas é igual nas duas equipas e determine, para cada equipa, o desvio-padrão das alturas. Diga, justificando, em qual das equipas as alturas são mais homogéneas.

2.2. Considere a amostra que se obtém pela junção das duas equipas.

2.2.1. Construa um histograma de frequências absolutas de amplitude 4 cm, tal que o limite inferior da primeira classe seja de 186 cm.

2.2.2. Determine o percentil de ordem 90.

3. Determinou-se o Índice de Massa Corporal (IMC) em 50 indivíduos maiores de 20 anos. Os dados obtidos encontram-se resumidos no histograma da figura.



3.1. Determine o percentil de ordem 50 e interprete o valor obtido no contexto apresentado.

3.2. Se o IMC de um indivíduo, com mais de 20 anos pertence ao intervalo $[25, 30[$, este encontra-se em estado pré-obesidade. Indique a percentagem de pessoas desta amostra que são pré-obesas.

4. Perguntou-se a 10 alunos quantos irmãos tinham e os resultados obtidos constam da amostra

$$\underset{\sim}{y} = (1, 2, 0, 0, 1, 4, 2, 1, 3, 1)$$

Determine o valor do percentil de ordem 80.

5. Dos 200 alunos que responderam a uma prova com doze questões, 10% responderam corretamente a três questões; 50% responderam corretamente a sete questões; 30% a dez questões e os restantes acertaram a totalidade das questões.

5.1. Calcule a média e a mediana e indique a moda da distribuição.

5.2. Determine o número de alunos que acertaram num número de questões pertencente ao intervalo $]\bar{x} - S_x, \bar{x} + S_x[$, em que $\bar{x}$ é a média da distribuição e S_x, o seu desvio-padrão.

6. O Luís, a Rita e a Sílvia realizaram um estudo sobre a altura dos alunos da escola, tendo escolhido, de forma aleatória, 26 alunos. Para efetuarem a medição utilizaram dois aparelhos, A e B.

O Luís e a Rita utilizaram o aparelho A.

O Luís fez o registo em metros e obteve a amostra $\underset{\sim}{x}$.

A Rita fez o registo em centímetros e obteve a amostra $\underset{\sim}{y}$.

A Sílvia utilizou o aparelho B, fez o registo em centímetros, obtendo a amostra $\underset{\sim}{z}$, tendo-se verificado que $\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{y} + 1$.

Em relação à amostra x sabe-se que: $\bar{x} = 1{,}62$ e $SS_x = 0{,}36$.

6.1. O Gustavo foi um dos alunos escolhidos e o valor registado para a altura do Gustavo pela Sílvia foi 167. Qual foi o valor registado para a altura do Gustavo pela Rita? E pelo Luís?

6.2. Determina:

6.2.1. $\bar{y}$ e SS_y

6.2.2. $\bar{z}$ e SS_z

6.3. Determina a variância e o desvio-padrão para cada uma das amostras.

7. Um professor de Matemática perguntou a 10 alunos quanto tempo estudaram para um determinado teste e estabeleceu uma correspondência entre o número de horas de estudo e as classificações, em percentagem, obtidas no referido teste.

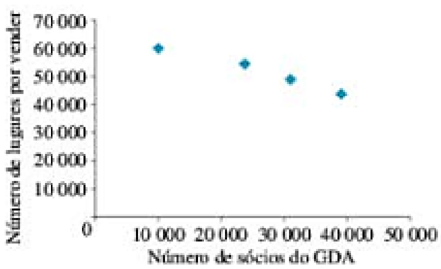
Os dados encontram-se resumidos na tabela apresentada.

Nº de horas de estudo	Classificação (%)
6	45,3
7	52,0
7	48,1
8	56,6
9	64,9
10	59,8
10	80,3
12	75,3
12	60,5
15	92,6

7.1. Determine, sem recorrer à calculadora, exceto para eventuais cálculos numéricos, a equação reduzida da reta de mínimos quadrados para esta amostra e o coeficiente de correlação linear. Utilize valores aproximados às milésimas.

7.2. Qual deverá ser a classificação esperada para um aluno que tenha estudado 13 horas?

8. O diagrama da figura seguinte mostra uma forte associação negativa entre o número de sócios do Grupo Desportivo de Altivo (GDA) no final de alguns anos e o número de lugares por vender nos jogos de futebol.



Relativamente à figura, apenas uma das opções seguintes está correta.

Opção I	Opção II	Opção III
$r = -0{,}987$ $a = 1{,}744$ $b = 10\,354{,}123$	$r = -0{,}987$ $a = -0{,}558$ $b = 65\,346{,}152$	$r = -0{,}087$ $a = -1{,}744$ $b = 65\,346{,}152$

Em cada uma das opções, r representa o coeficiente de correlação de linear e a e b representam os parâmetros da reta de regressão linear $y = ax + b$.

8.1. Identifique a opção correta e apresente uma razão para rejeitar cada uma das restantes opções.

8.2. Estime o número de lugares para vender nos jogos de futebol quando o número de sócios atingiu os $50\ 000$.

9. O Sr. Silva aquece a sua casa com gás natural. A quantidade de gás utilizada depende da temperatura exterior e o Sr. Silva pretende fazer um estudo dos gastos durante os 9 meses em que se observam menores temperaturas e estabelecer, assim, uma previsão para os gastos em função da temperatura exterior. Na tabela seguinte estão registadas as temperaturas médias observadas em cada um dos meses (em graus Celsius) e o respetivo volume de gás dependido pelo Sr. Silva (em metros cúbicos).

Mês	Out.	Nov.	Dez.	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Maio	Jun.
Temperatura ($°C$)	16,1	12,4	10,3	8,9	10,1	12,8	13,2	15,9	16,4
Volume do gás (m^3)	0,01	0,10	0,24	0,26	0,19	0,09	0,05	0,03	0,01

9.1. Qual deve ser a variável explicativa e a variável resposta?

9.2. Utilize a calculadora gráfica para responder às seguintes questões:

9.2.1. Represente os dados num referencial ortonormado e diga se é razoável a existência de uma relação linear entre estas duas variáveis.

9.2.2. Determine a média dos valores de cada uma das amostras representadas. Apresente os resultados com arredondamento às centésimas.

9.2.3. Determine o declive da reta dos mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos. Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

9.2.4. Determine a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados, arredondando os parâmetros às centésimas.

9.2.5. Utilizando a equação obtida na alínea anterior, determine qual o consumo esperado para um mês em que a temperatura média seja de $10°C$.

10. De uma amostra bivariada de dados $\underset{\sim}{(x,y)}$ de dimensão 30, sabemos que:

- $\bar{x} = 100$;
- $\bar{y} = 150$;
- a soma dos desvios verticais dos pontos $P_i(x_i, y_i)$, com $1 \leq i \leq 30$, em relação a uma reta t é nula.

Qual das seguintes opções é necessariamente verdadeira?

(A) As variáveis x e y estão linearmente associadas.

(B) Aos maiores valores de x correspondem os menores valores de y.

(C) A reta t é a reta dos mínimos quadrados desta amostra.

(D) O ponto $P(100,150)$ pertence à reta t.

11. De uma amostra bivariada de dados $\underset{\sim}{(x,y)}$, de dimensão 35, sabemos que:

- $S_x^2 = 10$;
- $SS_y = 450$;
- a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = x + 14$.

Determina o valor do coeficiente de correlação linear, apresentando o resultado arredondado às centésimas.

12. De uma amostra bivariada de dados $\underset{\sim}{(x,y)}$, sabemos que:

- $\bar{x} = 10$;
- $\bar{y} = 60$.
- o coeficiente de correlação linear é positivo.

Considera as retas:

t_1: $y = x + 50$ $\quad$ t_2: $y = -x + 70$ $\quad$ t_3: $y = 10x + 30$

Indica, justificando, qual delas poderá ser a reta dos mínimos quadrados.

13. Dada uma amostra bivariada de dados $\underset{\sim}{(x,y)}$, de dimensão 4, e sabendo que o desvio vertical dos pontos $P_1(1,8)$ e $P_2(2,6)$ relativamente à reta t é $e_1 = 0{,}5$ e $e_2 = -0{,}3$, determina:

13.1. a equação reduzida da reta t;

13.2. o desvio vertical dos pontos $P_3(3,5)$ e $P_4(4,4)$ relativamente à reta t.

14. De uma amostra bivariada de dados $\underset{\sim}{(x,y)}$, sabemos que:

- $\bar{x} = 10$;
- $\bar{y} = 15$
- o desvio vertical do ponto $P(5; 12{,}5)$ relativamente à reta dos mínimos quadrados é $0{,}5$.

Podemos, então, afirmar que a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados tem a expressão:

(A) $y = \frac{2}{3}x + 12$ $\quad$ **(B)** $y = \frac{3}{2}x + 15$ $\quad$ **(C)** $y = \frac{3}{5}x + 9$ $\quad$ **(D)** $y = \frac{3}{5}x + 12{,}5$

Soluções

1.
   1.1. 25%
   1.2.
      1.2.1. 3400 euros
      1.2.2. 5%
   1.3. $Q_2 = 7650$
2.
   2.1. $S_x \approx 6{,}549$; $S_y = 6{,}412$; Na equipa B
   2.2.
      2.2.1.
      2.2.2. $P_{90} = 204$
3.
   3.1. $P_{50} = 24{,}5$; Pelo menos 50% dos indivíduos analisados têm o IMC inferior a 24,5.
   3.2. 30%
4. 2,5
5.
   5.1. $\bar{x} = 8; Q_2 = 7; Moda = 7$
   5.2. 160 alunos
6.
   6.1. Rita: $166\ cm$; Luís: $1{,}66\ m$
   6.2.
      6.2.1. $\bar{y} = 162\ cm$ e $SS_y = 3600\ cm^2$
      6.2.2. $\bar{z} = 163\ cm$ e $SS_z = 3600\ cm^2$
   6.3. $S_x^2 = 0{,}0144\ m^2; S_x = 0{,}12\ m$; $S_y^2 = 144\ cm^2$; $S_y = 12\ cm$; $S_z^2 = 144\ cm^2; S_z = 12\ cm$
7.
   7.1. $y = 4{,}67x + 18{,}654$; $r \approx 0{,}868$
   7.2. $\approx 79{,}4\ \%$
8.
   8.1. A opção correta é a II
   8.2. Aproximadamente 37446 lugares
9.
   9.1. A variável explicativa é a temperatura e a variável resposta é o volume do gás
   9.2.
      9.2.1. As duas variáveis parecem ter relação linear negativa
      9.2.2. Seja x a variável temperatura e y a variável volume do gás: $\bar{x} = 12{,}9$ e $\bar{y} \approx 0{,}11$
      9.2.3. $a = -0{,}03$
      9.2.4. $y = -0{,}03x + 0{,}54$
      9.2.5. $0{,}24\ m^3$
10. (D)
11. $r \approx 0{,}87$
12. A reta t_1
13.
   13.1. $y = -1{,}2x + 8{,}7$
   13.2. $e_3 = -0{,}1$ e $e_4 = 0{,}1$
14. (C)

L.2 Ficha Formativa 12º ano: Resolução

Resolução Ficha Formativa nº 35: Estatística

1. Seja $\underset{\sim}{x}$ a amostra:

$\underset{\sim}{x} = (5300; 2700; 6000; 9200; 21000; 8500; 7100; 8200)$

1.1.

$$\bar{x} = \frac{5300 + 2700 + 6000 + 9200 + 21000 + 8500 + 7100 + 8200}{8} = 8500 €$$

Valores pagos pelas famílias superiores a 8500€: 9200€ e 21000€

$8 — 100\%$

$2 — y$

$$y = \frac{2 \times 100}{8} = 25\%$$

R: 25% das famílias pagam um valor superior à média.

1.2.

1.2.1. A média no ano seguinte passou a ser $\bar{x}_2 = 8925€$.

Logo, em média, cada família pagou mais 425€.

Assim o estado arrecadou mais $8 \times 425 = 3400$ euros.

1.2.2.

$8500€ — 100\%$

$8925€ — K$

$$K = \frac{8925 \times 100}{8500} = 105\%$$

R: Existiu um aumento percentual médio de 5%.

1.3. Valores ordenados:

$2700; 5300; 6000; \underbrace{7100; 8200}; 8500; 9200; 21000$

$$\text{Mediana} = \frac{7100 + 8200}{2} = 7650€$$

2. Equipa A: $\underset{\sim}{x} = (187; 190; 186; 195; 186; 192; 202; 205; 196; 191)$

Equipa B: $\underset{\sim}{y} = (190; 186; 198; 193; 203; 190; 195; 203; 188; 186)$

2.1. $$\bar{x} = \frac{187+190+186+195+186+192+202+205+196+191}{10} = 193$$

$$\bar{y} = \frac{190+186+198+193+203+190+195+203+188+186}{10} = 193$$

$$SS_x = (187-193)^2+(190-193)^2+(186-193)^2+(195-193)^2+(186-193)^2+(192-193)^2+$$
$$+(202-193)^2+(205-193)^2+(196-193)^2+(205-193)^2 = 386$$

$$S_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{\frac{386}{9}} \simeq 6{,}55$$

$$SS_y = (190-193)^2+(186-193)^2+(198-193)^2+(193-193)^2+(203-193)^2+(190-193)^2+$$
$$+(195-193)^2+(203-193)^2+(188-193)^2+(186-193)^2 = 370$$

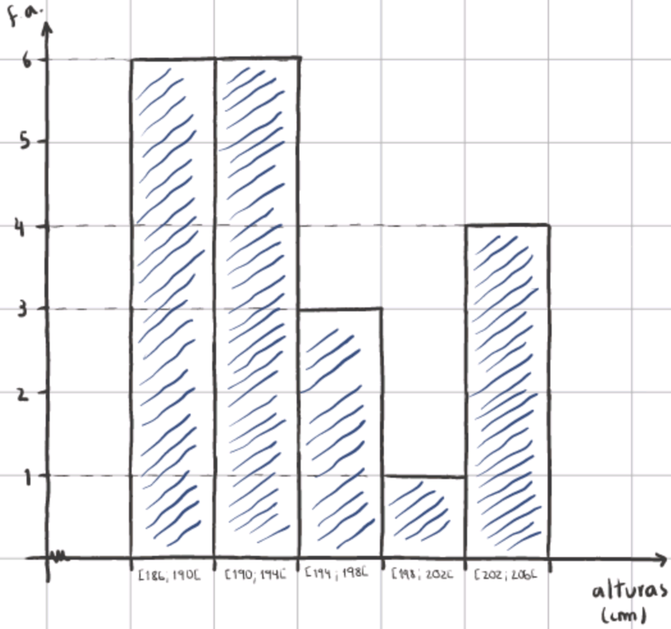
$$S_y = \sqrt{\frac{370}{9}} \simeq 6{,}41$$

R: As alturas são mais homogeneas na equipa B pois o desvio-padrão é menor.

2.2.

2.2.1.

Classes	f
[186;190[	6
[190;194[	6
[194;198[	3
[198;202[	1
[202;206[	4
TOTAL	20



2.2.2. A área total do histograma é $4\times 20 = 80$ e 90% de 80 é 72, logo o percentil de ordem 90 pertence à classe [202; 206[. Assim

$$72 = \underbrace{6\times4+6\times4+3\times4+1\times4}_{\text{Área total até à classe [202;206[}} + (P_{90}-202)\times 4 \Leftrightarrow P_{90} = 204.$$

3.

3.1. A área total do histograma é $50\times 5 = 250$ e 50% de 250 é 125 logo o percentil de ordem 50 pertence à classe [15; 20[. Assim

$$5\times 7 + (P_{50}-20)\times 20 = 125 \Leftrightarrow P_{50} = 24{,}5.$$

Podemos concluir que pelo menos 50% dos indivíduos têm um IMC inferior ou a igual a 24,5.

3.2. 50 indivíduos — 100%

15 indivíduos — x

$$x = \frac{15\times 100}{50} = 30\%$$

R: 30% dos indivíduos encontram-se em pré-obesidade.

4. Veja-se a amostra ordenada: $\tilde{y} = (0;0;1;1;1;1;2;2;3;4)$

$$P_{80} = \frac{y_{\left(\frac{80\times10}{100}\right)} + y_{\left(\frac{80\times10}{100}+1\right)}}{2} = \frac{y_{(8)}+y_{(9)}}{2} = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$$

5.

nº de questões corretas	f.a.
3	20
7	100
10	60
12	20
TOTAL	200

5.1. $$\bar{x} = \frac{3\times20+7\times100+10\times60+12\times20}{200} = 8$$

mediana $= Q_2 = 7$; moda $= 7$

5.2. $SS_x = (3-8)^2 \times 20 + (7-8)^2 \times 100 + (10-8)^2 \times 60 + (12-8)^2 \times 20 = 1160$

$$S_x = \sqrt{\frac{166}{199}} = 2,41$$

Logo, $]\bar{x} - S_x, \bar{x} + S_x[=]8 - 2,41 ; 8 + 2,41[=]5,59 ; 10,41[$

R: Houve um total de $\underbrace{100}_{7 \text{ Questões}} + \underbrace{60}_{10 \text{ Questões}} = 160$ alunos.

6. Aparelho A: Luís (metros) - $\underset{\sim}{x}$; Rita (centímetros) - $\underset{\sim}{y}$

Aparelho B: Silvía (centímetros) - $\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{y} + 1$

6.1. Se a Silvia registou 167 cm então a Rita registou $167 - 1 = 166$ cm e o Luís registou 1,66 m.

6.2. Se $\bar{x} = 1,62$ m então $\bar{y} = 162$ cm e $\bar{z} = \bar{y} + 1 = 163$ cm $(*)_1$

Se $SS_x = 0,36$ então $SS_y = 3600 \text{ cm}^2$ e $SS_z = 3600 \text{ cm}^2$ $(*)_2$

PROPRIEDADES

$(*)_1$: Sendo $\underset{\sim}{y}$ a amostra $\underset{\sim}{y} = a\underset{\sim}{x} + h$ então $\bar{y} = a\bar{x} + h$, $a, h \in \mathbb{R}$

$(*)_2$: Se $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} + h$ então $SS_y = SS_x$.

6.3.

$\tilde{x}$	$\tilde{y}$	$\tilde{z}$
$S_x^2 = \frac{0,36}{25} = 0,0144 \text{ m}^2$	$S_y^2 = \frac{3600}{25} = 144 \text{ cm}^2$	$S_z^2 = \frac{3600}{25} = 144 \text{ cm}^2$
$S_x = \sqrt{\frac{0,36}{25}} = 0,12$ m	$S_y = \sqrt{\frac{3600}{25}} = 12$ cm	$S_z = \sqrt{\frac{3600}{25}} = 12$ cm

7. Seja $\underset{\sim}{x}$ a amostra que representa o nº de horas de estudo e $\underset{\sim}{y}$ a amostra que representa as classificações obtidas.

Temos que: $\bar{x} = 9,6$ e $\bar{y} = 63,54$

7.1. Temos $\bar{x} = 9{,}6$ e $\bar{y} = 63{,}54$

$$SS_x = (6-9{,}6)^2 + (7-9{,}6)^2 \times 2 + (8-9{,}6)^2 + (9-9{,}6)^2 + (10-9{,}6)^2 \times 2 + (12-9{,}6) \times 2 +$$
$$+ (15-9{,}6)^2 = 70{,}4$$

$$SS_y = 2041{,}184$$

- Seja $y = ax+b$ a reta dos mínimos quadrados.

$$a = \frac{(6 \times 45{,}3 + 7 \times 52 + 7 \times 48{,}1 + \ldots + 15 \times 92{,}6) - 9{,}6 \times 63{,}54 \times 10}{70{,}4} \simeq 4{,}676$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 63{,}54 - 4{,}676 \times 9{,}6 \simeq 18{,}654$$

E portanto $y = 4{,}676x + 18{,}654$

$$r = a\sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} = 4{,}76\sqrt{\frac{70{,}4}{2041{,}184}} \simeq 0{,}868$$

7.2. $y = 4{,}676 \times 13 + 18{,}654 \simeq 79{,}4\ \%$

8.

8.1. A opção correta é a II.

A opção I não é correta pois o coeficiente de correlação não têm o mesmo sinal, e a opção III não está correta pois $r = -0{,}087$ representa uma correlação fraca e a que se tem na figura é forte.

8.2. $y = -0{,}558x + 65346{,}152$

Se $x = 50000$ então $y = -0{,}558 \times 50000 + 65346{,}152 \Leftrightarrow y \doteq 37446$

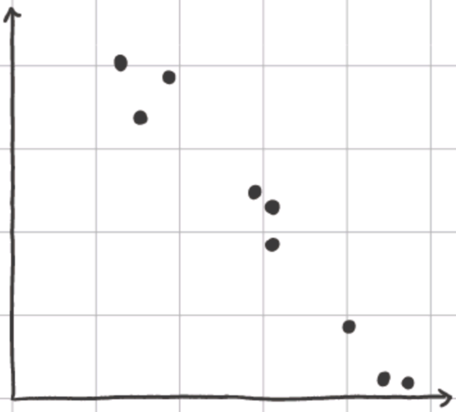
R: Ficarão por vender, aproximadamente, 37446 lugares.

9.

9.1. A variável explicativa (x) é a temperatura exterior e a variável resposta (y) é o volume do gás utilizado, uma vez que se pretende estudar o volume do gás gasto em função da temperatura.

9.2. Recorrendo à calculadora gráfica temos que:

9.2.1.



As duas variáveis parecem ter uma correlação linear negativa.

9.2.2. $\bar{x} = 12,9$ e $\bar{y} \simeq 0,11$

9.2.3. $a \simeq -0,03$

9.2.4. $y = -0,03x + 0,54$

9.2.5. $y = -0,03 \times 10 + 0,54 = 0,24$

O consumo do gás esperado será de $0,24\ m^3$.

10. (D) pois quando a soma dos desvios verticais em relação a uma reta t é nula, o ponto $P(\bar{x};\bar{y})$ pertence à reta (Propriedade)

11. • Como a reta dos mínimos quadrados é $y = x + 14$ temos que $a = 1$;

• $S_x^2 = 10 \Leftrightarrow \frac{SS_x}{n-1} = 10 \Leftrightarrow SS_x = 10 \times 34 \Leftrightarrow SS_x = 340$

Logo $r = a\sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} \Leftrightarrow r = 1 \times \sqrt{\frac{340}{350}} \Leftrightarrow r \simeq 0,87$.

12. Como $r>0$, o declive da reta dos mínimos quadrados também é positivo.

Logo excluímos a reta t_2.

Sabemos que $\bar{y} = a\bar{x} + b$. Na reta t_3: $60 = 10 \times 10 + 30$ é uma proposição falsa.

Na reta t_1: $60 = 10 + 50$ é uma proposição verdadeira. R: t_1

13. Sabemos que o desvio vertical do ponto $P_i(x_i ; y_i)$ à reta $t: y = ax+b$ é $e_i = y_i - ax_i - b$.

13.1. $\begin{cases} 8-a-b=0{,}5 \\ 6-2a-b=-0{,}3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a-b=-7{,}5 \\ -2a-b=-6{,}3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7{,}5-b \\ -2(7{,}5-b)-b=-6{,}3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7{,}5-8{,}7=-1{,}2 \\ b=-6{,}3+15=8{,}7 \end{cases}$

Logo $y = -1{,}2x + 8{,}7$.

13.2. $P_3(3,5)$ logo $e_3 = 5 - 3 \times (-1{,}2) - 8{,}7 = -0{,}1$

$P_4(4,4)$ logo $e_4 = 4 - 4 \times (-1{,}2) - 8{,}7 = 0{,}1$

14. $\bar{x} = 10$; $\bar{y} = 15$

$12{,}5 - 5a - b = 0{,}5 \Leftrightarrow -5a - b = -12 \Leftrightarrow -b = -12 + 5a \Leftrightarrow \boxed{b = -5a + 12}$

Em (A): $12 = -5 \times \frac{2}{3} + 12$ → Falso

Em (B): $15 = -5 \times \frac{3}{2} + 12$ → Falso

Em (C): $9 = -5 \times \frac{3}{5} + 12$ → Verdadeiro

Além disso: $\bar{y} = \frac{3}{5}\bar{x} + 9 \Leftrightarrow 15 = \frac{3}{5} \times 10 + 9$ → Verdadeiro

R: (C)

Anexo M

Ata Reunião de Núcleo de Estágio

SÍNTESE Nº3 DAS REUNIÕES SEMANAIS

NÚCLEO DE ESTÁGIO DE MATEMÁTICA

ESCOLA SECUNDÁRIA JOSÉ FALCÃO

Na semana de 2 a 6 de outubro do ano letivo 2023/2024, na Escola Secundária José Falcão, reuniu o Núcleo de Estágio de Matemática, com a seguinte Ordem de Trabalhos:

1. Orientações relativas a aulas lecionadas pelos professores estagiários;
2. Preparação de aulas;
3. Redação de material de apoio.

Na realização do ponto 1, foram dadas orientações aos estagiários no âmbito das aulas que estes vão lecionar, sendo que os estagiários David Cotrim e Duarte Marques lecionam na turma 12º5 e a estagiária Catarina Vicente leciona na turma 12º7.

Relativamente ao ponto 2, prepararam-se os conteúdos para as aulas da semana seguinte.

Por último, redigiu-se uma ficha de trabalho destinada aos alunos e uma grelha de presenças nas aulas de apoio com vista a uma melhor perceção da assiduidade dos alunos a essas aulas.

Nada mais havendo a tratar, procedeu-se à leitura e aprovação da presente ata, dando-se por encerrada a reunião.

A Orientadora Cooperante,

Natividade Correia

Os estagiários,

Catarina Vicente

David Cotrim

Duarte Marques

Anexo N

Atividade: Sistema Binário na Computação

N.1 Sistema Binário na Computação: Apresentação

JOSÉ FALCÃO
ESCOLA SECUNDÁRIA

SISTEMA BINÁRIO

NA COMPUTAÇÃO

PROFESSORA ESTAGIÁRIA: CATARINA VICENTE

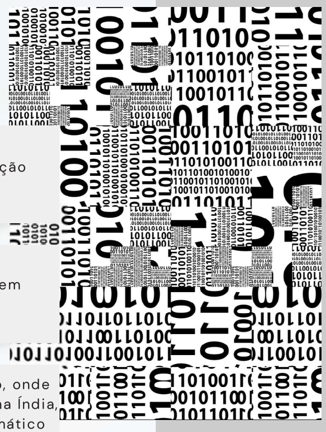
SUMÁRIO

O QUE É O SISTEMA BINÁRIO?

O sistema binário é um sistema de numeração que utiliza apenas dois símbolos, 0 e 1.

Nos sistemas computacionais esses dois símbolos, 0 e 1, são usados para processarem informações, ou seja, entenderem e representarem dados.

Apesar da longa história do sistema binário, onde serviu a vários povos no Egito, na China e na Índia, ele só foi formalizado pelo filósofo e matemático Gottfried Wilhelm Leibniz no século XVII.



OUTROS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Decimal

O sistema decimal é o sistema que usamos correntemente para indicar quantidades, tem base 10 e, como tal, é composto por 10 algarismos (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)

Octal

O sistema octal é um sistema de numeração de base 8, ou seja, usa 8 símbolos (0,1,2,3,4,5,6,7)

Hexadecimal

O sistema hexadecimal, como o próprio nome indica, utiliza dezasseis símbolos, aproveitando os símbolos já usados nos outros sistemas de numeração e acrescentado as seis primeiras letras do alfabeto (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F)

CONVERSÃO **BINÁRIO PARA DECIMAL**

Um número M_2 representado num sistema de numeração posicional de base 2 pode ser retratado na forma decimal de modo único por $N_{10} = (a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0)_2 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0$, onde $a_n, \cdots, a_0 \in \{0,1\}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Número na base binária	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
Valor da Posição	2^n	2^{n-1}	$\cdots$	2^2	2^1	2^0
Cálculo	$a_n \cdot 2^n$	$a_{n-1} \cdot 2^{n-1}$	$\cdots$	$a_2 \cdot 2^2$	$a_1 \cdot 2^1$	$a_0 \cdot 2^0$
Valor decimal	$a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0$					

EXEMPLO

Qual a representação decimal de $11010_{(2)}$?

Número na base binária	1	1	0	1	0
Valor da Posição	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Cálculo	$1 \cdot 2^4$	$1 \cdot 2^3$	$0 \cdot 2^2$	$1 \cdot 2^1$	$0 \cdot 2^0$
Valor decimal	$16 + 8 + 2 = 26_{(10)}$				

CONVERSÃO **DECIMAL PARA BINÁRIO**

Um número N_{10} de base 10, pode ser convertido para um número M_2 de base 2 através de sucessivas divisões por 2 até que o último quociente seja menor que 2. O número será $M_2 = q_{n-1} a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$, onde q_{n-1} é o valor do quociente da última divisão e $a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0$ são os restos das divisões, da última divisão para a primeira.

N_{10} | 2
a_0 q_0 | 2
a_1 q_1 | 2
a_2 q_2 $\cdots$

q_{n-2} | 2
a_{n-1} q_{n-1}

EXEMPLO

Qual a representação binária de $42_{(10)}$?

42 | 2
0 21 | 2
1 10 | 2
0 5 | 2
1 2 | 2
0 1

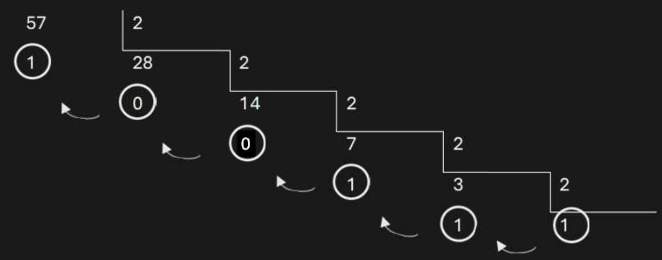
Logo $42_{(10)} = 101010_{(2)}$.

EXERCÍCIO

Escreve $57_{(10)}$ na base 2.

EXERCÍCIO

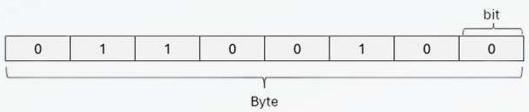
Escreve $57_{(10)}$ na base 2.



Logo $57_{(10)}=111001_{(2)}$.

SISTEMA BINÁRIO NA COMPUTAÇÃO

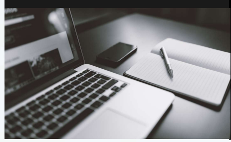
O sistema binário assume assim uma grande importância no mundo da computação. O "bit", acrónimo de "binary digit", representa o elemento de memória básico (menor unidade de informação que pode ser armazenada ou transmitida) que assume dois estados que se associam aos dígitos 0 e 1.



Como um único bit não é capaz de representar todos os números que são necessários processar através de m computador, os bits são agrupados. Um agrupamento de 8 bits denomina-se byte e permite 256 combinações diferentes.

COMO É QUE O COMPUTADOR LÊ 0'S E 1'S ?

Eficiêcia



- Os computadores são compostos por circuitos elétricos que têm componentes que podem estar em dois estados: ligado (representado pelo número 1) ou deligado (representado pelo número 0).
- O sistema binário é eficiente para representar esses dois estados e por isso é a base da computação digital.

COMO É QUE O COMPUTADOR LÊ 0'S E 1'S ?

Os computadores utilizam circuitos elétricos, especialmente transistores para armazenar e manipular dados na forma de 0's e 1's. Os transistores são componentes eletrônicos que atuam como interruptores.

Números

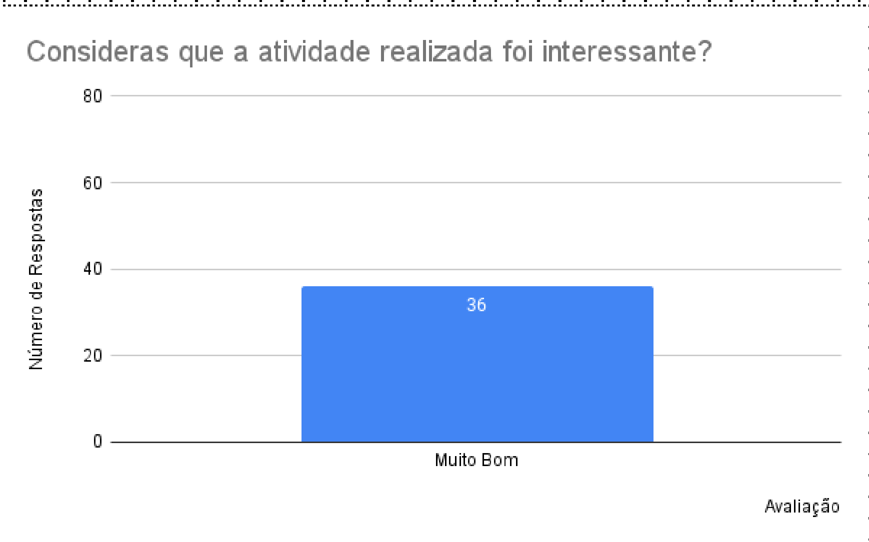
Caracteres de texto

Imagens

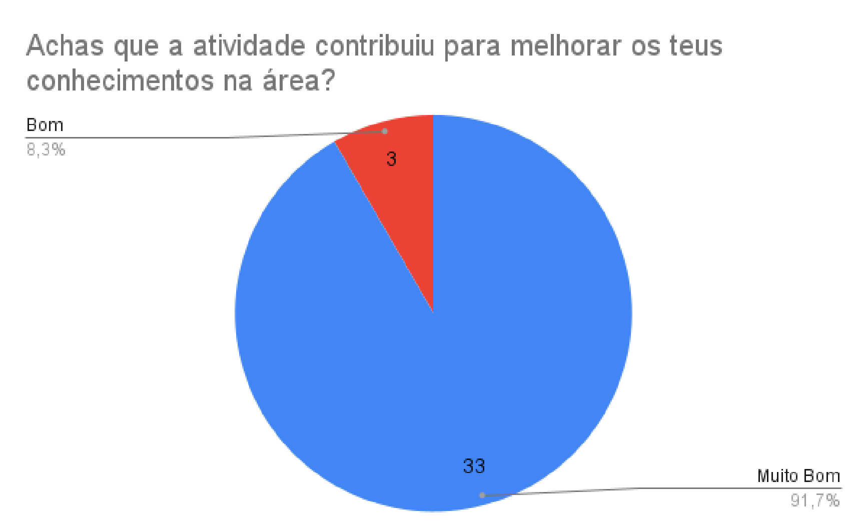
"Sem a matemática, não há nada que possa fazer. Tudo à sua volta é matemática. Tudo à sua volta são números"

-Shakuntala Devi

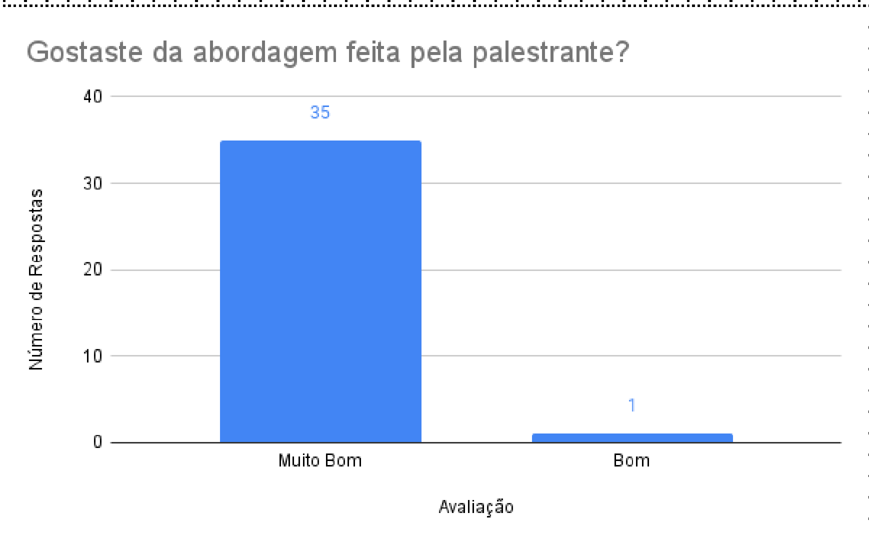
N.2 Sistema Binário na Computação: Avaliação



Consideras que a atividade realizada foi interessante?
80
60
40
20
0
Número de Respostas
36
Muito Bom
Avaliação



Achas que a atividade contribuiu para melhorar os teus conhecimentos na área?
Bom
8,3%
3
33
Muito Bom
91,7%



Gostaste da abordagem feita pela palestrante?
40
30
20
10
0
Número de Respostas
35
1
Muito Bom
Bom
Avaliação

Comentários

36 respostas

Gostei bastante.

Gostei muito da atividade

Penso que a apresentação foi realizada com sucesso.

Atividade útil e interessante.

Muito informativa e educativa esta atividade

bom para alargar conhecimentos de forma dinâmica e diferente

A apresentação permitiu na desenvolver conhecimentos sobre números binários de forma muito eficiente

Gostei bastante e penso que abriu horizontes em relação à matemática aplicada à informática.

Gostei muito. Aprendi coisas que nao sabia e fiquei com uma ideia de como os computadores funcionam.

Foi uma boa apresentação do sistema binário, pois não conhecia.

A aula foi bastante interativa e esclarecedora.

Boa explicação sobre o tema, e boa interação pelo palestrante

Penso que foi bastante positivo termos tido a oportunidade de abordar este tema

Gostei muito da atividade, uma vez que foi muito interessante e me ensinou como funciona o sistema binário

Achei um trabalho interessante, abordado de um modo cativante e interativo

palestra interessante e útil

Gostei muito desta atividade e achei muito interessante

Achei muito interessante

Atividade interessante desenvolvida de forma dinâmica e criativa.

Achei a atividade bastante útil e cativante.

Achei a atividade interessante e contribuiu para a minha aprendizagem na área da computação. Gostei bastante da atividade pois teve parte teórica e parte prática

Foi uma atividade interessante

Matéria bem explicada de forma interessante

Achei a atividade bastante interessante e giro

Gostei

Muito bom

Adorei ter participado nesta atividade

Muito bom!! Achei a matéria interessante e a dinâmica também.

Acho uma atividade bastante interessante e que nos promove mais conhecimentos acerca do mundo da matemática <3

A professora conseguiu transmitir os conhecimentos de uma forma muito cativante e diferente!

Foi uma atividade interessante sobre um tema não muito comum

Foi bastante interessante o facto de existir um momento de prático da atividade

Foi uma atividade muito interessante com um tema que não é normalmente muito abordado na escola.

Gostei muito da iniciativa.Foi uma ótima forma de aprender.

Foi bastante interessante, abrindo nos espaço para um novo tipo de conhecimento

Gostei muito, foi uma atividade interessante para a iniciar uma nova matéria

Anexo O

Atividade: O Mundo dos Restos

O.1 O Mundo dos Restos: Apresentação

JOSÉ FALCÃO
ESCOLA SECUNDÁRIA

Matemática - 8ºano

O Mundo dos Restos

Professora Estagiária: Catarina Vicente

Responda às seguintes questões:

1) O João começou a trabalhar às oito horas da manhã e vai trabalhar sete horas seguidas. A que horas o João termina o seu trabalho?

2) Numa terça-feira os avós da Maria ofereceram-lhe 5 euros e garantiram-lhe que o iam fazer sempre de 20 em 20 dias. Qual será o dia da semana em que a Maria voltará a receber essa quantia?

3) Estamos em Maio. Em que mês estaremos daqui a 17 meses?

RESPOSTA

1) O João começou a trabalhar às oito horas da manhã e vai trabalhar sete horas seguidas. A que horas o João termina o seu trabalho?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

RESPOSTA

2) Numa terça-feira os avós da Maria ofereceram-lhe 5 euros e garantiram-lhe que o iam fazer sempre de 20 em 20 dias. Qual será o dia da semana que a Maria voltará a receber essa quantia?

Domingo Segunda Terça Quarta Quinta Sexta Sábado

Domingo Segunda Terça Quarta Quinta Sexta Sábado

Domingo Segunda Terça Quarta Quinta Sexta Sábado

Domingo Segunda Terça Quarta Quinta Sexta Sábado

RESPOSTA

3) Estamos em Maio. Em que mês estaremos daqui a 17 meses?

jan. fev. mar. abr. maio jun. jul. ago. set. out. nov. dez.

jan. fev. mar. abr. maio jun. jul. ago. set. out. nov. dez.

Congruências

Se dois números inteiros positivos a e b têm o mesmo resto quando divididos por m, dizemos que eles são congruentes módulo m.

$$a \equiv b \; (mod\ m)$$

No exercício 1:

$$\begin{array}{r|l} 15 & 12 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$

$$15 = 12 \times 1 + 3$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 12 \\ \hline 3 & 0 \end{array}$$

$$3 = 12 \times 0 + 3$$

Logo: $15 \equiv 3 \ (mod\ 12)$

No exercício 2:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 7 \\ \hline 6 & 2 \end{array}$$

$$20 = 7 \times 2 + 6$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 7 \\ \hline 6 & 0 \end{array}$$

$$6 = 7 \times 0 + 6$$

Logo: $20 \equiv 6 \ (mod\ 7)$

No exercício 3:

$$\begin{array}{r|l} 17 & 12 \\ \hline 5 & 1 \end{array}$$

$$17 = 12 \times 1 + 5$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 12 \\ \hline 5 & 0 \end{array}$$

$$5 = 12 \times 0 + 5$$

Logo: $17 \equiv 5 \ (mod\ 12)$

Será que...?

→ $5 \equiv 1 \ (mod\ 4)$?

→ $7 \equiv 2 \ (mod\ 4)$?

→ $17 \equiv 5 \ (mod\ 4)$?

Será que...?

→ $5 \equiv 1 \ (mod\ 4)$? **VERDADEIRO**

→ $7 \equiv 2 \ (mod\ 4)$? **FALSO**

→ $17 \equiv 5 \ (mod\ 4)$? **VERDADEIRO**

Restos da divisão inteira

Quais são os restos que podemos obter quando dividimos um número inteiro positivo por 4?

Restos da divisão inteira

Preenche a tabela seguinte com números até 19.

Restos da divisão inteira por 4 ←

0	1	2	3
números congruentes com **0** **módulo 4**	números congruentes com **1** **módulo 4**	números congruentes com **2** **módulo 4**	números congruentes com **3** **módulo 4**

Restos da divisão inteira

Preenche a tabela seguinte com números até 19.

Restos da divisão inteira por 4 ←

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
?	?	?	?
números congruentes com **0** **módulo 4**	números congruentes com **1** **módulo 4**	números congruentes com **2** **módulo 4**	números congruentes com **3** **módulo 4**

Restos da divisão inteira

Preenche a tabela seguinte com números até 19.

Restos da divisão inteira por 4 ←

0	1	2	3

4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
números congruentes com **0** **módulo 4**	números congruentes com **1** **módulo 4**	números congruentes com **2** **módulo 4**	números congruentes com **3** **módulo 4**

Restos da divisão inteira

Quais são os restos que podemos obter quando dividimos um número inteiro positivo por 5?

Restos da divisão inteira

Restos da divisão inteira por 5 ←

0	1	2	3	4

números congruentes com **0** **módulo 5**	números congruentes com **1** **módulo 5**	números congruentes com **2** **módulo 5**	números congruentes com **3** **módulo 5**	números congruentes com **4** **módulo 5**

Preenche a tabela com números até 24.

Restos da divisão inteira

Restos da divisão inteira por 5 ←

0	1	2	3	4

5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
números congruentes com **0** **módulo 5**	números congruentes com **1** **módulo 5**	números congruentes com **2** **módulo 5**	números congruentes com **3** **módulo 5**	números congruentes com **4** **módulo 5**

Preenche a tabela com números até 24.

O.2 O Mundo dos Restos: Avaliação

Avaliação de Atividade Escolar

Gostaste da atividade "O Mundo dos Restos" realizada
pela Professora Estagiária Catarina Vicente no dia 15 de maio ? **Sim** ☒ **Não** ☐

Porquê?

a atividade foi muito interetiva e divertida

Avaliação de Atividade Escolar

Gostaste da atividade "O Mundo dos Restos" realizada
pela Professora Estagiária Catarina Vicente no dia 15 de maio ? **Sim** ☒ **Não** ☐

Porquê?

Porque aprendi o que são números congruentes

Avaliação de Atividade Escolar

Gostaste da atividade "O Mundo dos Restos" realizada
pela Professora Estagiária Catarina Vicente no dia 15 de maio ? **Sim** ☒ **Não** ☐

Porquê?

A professora é muito querida e sabe explicar
a ~~matemática~~ matemática de uma forma
mais simples

Avaliação de Atividade Escolar

Gostaste da atividade "O Mundo dos Restos" realizada
pela Professora Estagiária Catarina Vicente no dia 15 de maio ? **Sim** ☒ **Não** ☐

Porquê?

porque foi importante, desafiador e aprende-
mos coisas novas

Avaliação de Atividade Escolar

Gostaste da atividade "O Mundo dos Restos" realizada
pela Professora Estagiária Catarina Vicente no dia 15 de maio ? **Sim** ☑ **Não** ☐

Porquê?

Foi uma forma divertida de ~~q~~ iniciarmos uma nova matéria na disciplina de matemática

Avaliação de Atividade Escolar

Gostaste da atividade "O Mundo dos Restos" realizada
pela Professora Estagiária Catarina Vicente no dia 15 de maio ? **Sim** ☒ **Não** ☐

Porquê?

Achei a atividade interessante, mas não gostei da parte do domino.
Mateus Costa

Avaliação de Atividade Escolar

Gostaste da atividade "O Mundo dos Restos" realizada
pela Professora Estagiária Catarina Vicente no dia 15 de maio ? **Sim** ☒ **Não** ☐

Porquê?

Pois foi produtivo e uma divertida maneira de jogar dominó

Avaliação de Atividade Escolar

Gostaste da atividade "O Mundo dos Restos" realizada
pela Professora Estagiária Catarina Vicente no dia 15 de maio ? **Sim** ☒ **Não** ☐

Porquê?

Sim, porque foi interactivo e divertido, e também desenvolvi mais inteligência com esta matéria

Anexo P

Cartaz "Semana da Matemática"

JOSÉ FALCÃO
ESCOLA SECUNDÁRIA

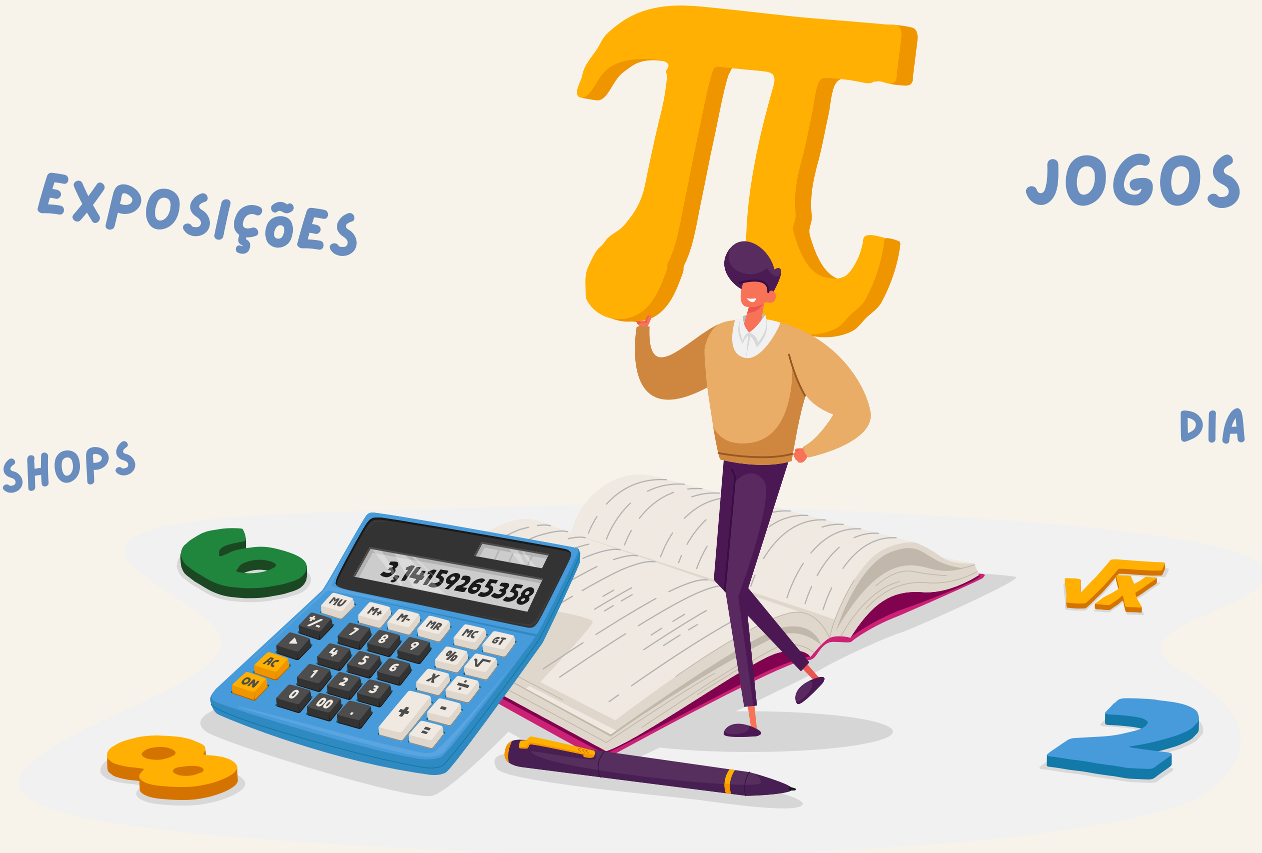
PALESTRAS

WORKSHOPS

JOGOS

DIA DO PI

EXPOSIÇÕES



EXPOSIÇÕES

JOGOS

DIA DO PI

WORKSHOPS

EXPOSIÇÕES

DIA DO PI

SEMANA DA MATEMÁTICA

11 A 15 DE MARÇO

PALESTRAS

PALESTRAS

JOGOS

WORKSHOPS

Organizado pelo Núcleo de Estágio de Matemática, 2023/2024