

1 2 9 0



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

João Pedrosa Marcelino

**CENTROIDE, ÁREA E INVÓLUCRO CONVEXO DE
UM POLÍGONO**

Dissertação no âmbito do Mestrado em Matemática, Ramo Estatística, Otimização e Matemática Financeira orientada pelo Professor Doutor João Luís Soares e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia.

junho de 2023

Centroide, área e invólucro convexo de um polígono

João Pedrosa Marcelino



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mestrado em Matemática

Master in Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

junho 2023

Agradecimentos

A realização de todo o meu percurso académico só foi possível devido ao apoio de diversas pessoas, desde professores, que me inspiram e me marcaram de diferentes formas até aos meus colegas, amigos e familiares mais próximos.

Começo por agradecer ao Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra e a todos os professores, pelo conhecimento, experiências e valores que me proporcionaram ao longo dos últimos anos. Agradeço ao professor João Luís Soares que durante este ano me ajudou e me permitiu perceber que a exigência, perfeccionismo, espírito crítico e disciplina são dois pilares essenciais para quem quer aprender e desenvolver Matemática.

Agradeço ao Centro de Desenvolvimento Rápido e Sustentável do Produto, do Instituto Politécnico de Leiria por me ter permitido desenvolver enquanto pessoa e profissional na área de investigação científica. Agradeço em especial à professora Paula Faria, ao professor Rui Pinto e ao professor Artur Mateus pela confiança depositada em mim e no meu trabalho.

Agradeço a toda a equipa da Fravizel pela oportunidade de trabalhar em equipa, desenvolver a minha comunicação matemática e confiarem nas minhas ideias. Um obrigado ao senhor Eliseu Frazão e à Doutora Joana Frazão pelo apoio demonstrado. Obrigado também a toda a equipa de programação e desenvolvimento do produto, em especial ao Rafael Dias e ao Daniel Cordeiro.

Agradeço a todos os meus amigos, aos da Guia e aos de Coimbra. Um obrigado a todos eles que mesmo apesar dos encontros pouco recorrentes em épocas de exame e em tempo de escrita afincada da dissertação sempre me apoiaram e estiveram lá para mim.

Um obrigado especial a toda a minha família que são a razão de tudo, sem eles nada do que alcancei até agora seria possível. Obrigado ao meu avô e à minha avó. Obrigado à minha irmã pelo apoio, força e companhia que me deu em todos os momentos, obrigado ao meu pai e à minha mãe por tudo o que fazem por mim.

Resumo

O trabalho desenvolvido tem como objetivo otimizar todo o processo de britagem de pedra através do desenvolvimento de uma máquina pneumática. Para isso, será tirada uma fotografia ao campo de ação do martelo. Essa imagem será posteriormente processada de modo a identificar os polígonos delimitadores de cada um dos fragmentos localizados no campo de ação do martelo pneumático.

Inicialmente, vamos abordar o conceito de invólucro convexo e abordar alguns conceitos básicos que nos vão permitir compreender e aprofundar melhor diversos métodos para determinar o invólucro convexo de um polígono.

Posteriormente iremos focar-nos em desenvolver metodologias para determinar pontos candidatos a ponto de impacto. Deste modo, foi abordado o centroide geométrico de um polígono e o centro de Chebyshev de um polígono convexo. Depois desenvolveu-se uma heurística para implementar o centro de Chebyshev em polígonos convexos que satisfaçam determinadas condições. Uma vez que estas metodologias podem ter como resultado um ponto no exterior do polígono foi necessário abordar metodologias que garantam que os pontos se localizam no interior do polígono. Assim, foi abordado o eixo medial e o esqueleto reto de um polígono. Para além disso, foi abordado um método designado Garcia-Castellanos & Lombardo que para um conjunto de pontos determina o ponto no interior do polígono mais distante da fronteira do polígono.

Por último, as metodologias desenvolvidas serão aplicadas a um cenário real e concreto.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
2 Invólucro convexo de um polígono	3
2.1 Invólucro convexo e pontos extremos	3
2.2 Método para determinar o invólucro convexo de um conjunto finito de pontos no plano	8
2.2.1 Varrimento de Graham	8
2.2.2 Gift Wrapping	16
2.2.3 Método Incremental	17
2.2.4 Divide-and-Conquer	18
3 Área de um polígono	19
3.1 Axiomática de área	19
3.1.1 Independência entre função área e triangulações	21
3.2 Cálculo da área de um polígono	27
4 Centro de um polígono	31
4.1 Centróide geométrico	31
4.1.1 Cálculo do centroide geométrico de um polígono	33
4.2 Centro de Chebyshev	35
4.2.1 Limitações no caso não convexo	38
4.3 Implementação prática do centroide geométrico e do centro de Chebyshev	38
5 Eixo Medial e Esqueleto Retilíneo	41
5.1 Diagrama de Voronoi de um conjunto finito de pontos	42
5.1.1 Método incremental para determinar o diagrama de Voronoi	46
5.2 Eixo Medial	48
5.2.1 Eixo Medial de um polígono convexo	49
5.2.2 Eixo medial de um polígono não convexo	52
5.3 Esqueleto retilíneo	53
5.4 Método Garcia-Castellanos & Lombardo	57

5.4.1	Classificação de um ponto como interior ou exterior a um polígono	57
5.4.2	Distância de um ponto interior ao polígono à sua fronteira	57
5.5	Implementação prática do Esqueleto Retilíneo e do Método Garcia-Castelanos & Lombardo	60
6	Cálculo de pontos candidatos num caso prático	63
7	Conclusão e trabalho futuro	65
	Bibliografia	67
	Apêndice A Identificação poligonal de objetos de uma imagem	69
A.1	Binarização de imagem	69
A.2	Representação poligonal de objetos de uma imagem	74
	Apêndice B Função <i>im2poly.m</i>	79
	Apêndice C Função <i>GS_fase1.m</i>	81
	Apêndice D Função <i>GS_fase2.m</i>	83
	Apêndice E Função <i>area.m</i>	85
	Apêndice F Função <i>computeAC.m</i>	87
	Apêndice G Função <i>centchebyshev.m</i>	89
	Apêndice H Script <i>voronoidiag.m</i>	91
	Apêndice I Script <i>testarSS.m</i>	93
	Apêndice J Função <i>garcastlomb.m</i>	95

Lista de Figuras

2.1	Polígono P .	4
2.2	Invólucro convexo de P .	4
2.3	Cone gerador.	6
2.4	Ordenação de pontos não colineares	9
2.5	Ordenação de pontos colineares.	9
2.6	Fase 1 do Varrimento de Graham.	10
2.7	Curva à esquerda.	11
2.8	Curva à direita.	11
2.9	Exemplo de aplicação do Varrimento de Graham.	13
2.10	Exemplos em que não podemos aplicar apenas a fase 2 do Graham-Scan.	14
2.11	Fases do Varrimento de Graham num conjunto aleatório de pontos.	14
2.12	Invólucro convexo de Portugal.	15
2.13	Invólucro convexo da Espanha.	15
2.14	Invólucro convexo da Croácia.	15
2.15	Invólucro convexo do Brasil.	15
2.16	Invólucro convexo da Alemanha.	15
2.17	Invólucro convexo da França.	15
2.18	Exemplo de aplicação do método Gift-Wrapping.	16
2.19	Conjunto conv (S_k) e ponto P .	17
2.20	conv (S_k) e P após transformações.	17
3.1	Triângulo T .	20
3.2	Triangulação da região R .	21
3.3	Faixa complexa de um trapézio.	22
3.4	Faixa complexa de um triângulo.	22
3.5	Exemplo de uma faixa complexa.	22
3.6	Exemplos de faixas de decomposição.	23
3.7	Divisão de trapézios de uma faixa de decomposição em triângulos.	23
3.8	Triângulo ABC .	24
3.9	Decomposições paralelas de regiões triangulares.	25
3.10	Decomposição paralela e partes primárias de um triângulo de K_1 .	26
3.11	Partes secundárias.	26
3.12	Cálculo da área de um polígono usando trapézios.	27

3.13	Representação gráfica de P_1 .	28
3.14	Forma matricial de P_1 .	28
3.15	Representação gráfica de P_2 .	29
3.16	Forma matricial de P_2 .	29
4.1	Polígono P .	34
4.2	Restrição associada à aresta P_iP_{i+1} .	35
4.3	Representação gráfica de P .	37
4.4	Forma matricial de P .	37
4.5	Output para Portugal.	39
4.6	Output para Espanha.	39
4.7	Output para Croácia.	39
4.8	Output para Brasil.	39
4.9	Output para Alemanha.	39
4.10	Output para França.	39
5.1	Exemplo de um diagrama de Voronoi.	42
5.2	Grafo conexo associado a $Vor(\mathbf{S})$.	45
5.3	Cálculo do diagrama de Voronoi de $\mathbf{S}_k \cup P$.	47
5.4	Diagrama de Voronoi do conjunto gerador \mathbf{S} .	48
5.5	Eixo medial de um polígono convexo.	48
5.6	Polígono P .	50
5.7	Segunda interseção de bissetrizes.	50
5.8	Terceira interseção de bissetrizes.	51
5.9	Eixo medial do polígono P .	51
5.10	Eixo medial do polígono não convexo P .	52
5.11	Arco parabólico.	53
5.12	Exemplo de Eixo medial de um polígono não convexo.	53
5.13	Processo de encolhimento.	54
5.14	Esqueleto retilíneo de P_1 .	56
5.15	Esqueleto retilíneo de P_2 .	56
5.16	Esqueleto retilíneo de P_3 .	56
5.17	Esqueleto retilíneo de P_4 .	56
5.18	Esqueleto retilíneo de P_5 .	56
5.19	Esqueleto retilíneo de P_6 .	56
5.20	Determinar se P é ponto interior ou exterior a um polígono.	58
5.21	Projeção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} .	58
5.22	Caso $\lambda < 1$.	59
5.23	Caso $\lambda \in [0, 1]$.	59
5.24	Caso $\lambda > 0$.	59
5.25	Output para Portugal.	61
5.26	Output para Espanha.	61
5.27	Output para Croácia.	61

5.28	Output para Brasil.	61
5.29	Output para Alemanha.	61
5.30	Output para França.	61
6.1	Pontos candidatos a impacto.	63
A.1	Imagem de fragmentos.	70
A.2	Imagem em escala de cinza.	70
A.3	Imagem binária.	73
A.4	Representação poligonal dos fragmentos.	76
A.5	Portugal continental.	77
A.6	Polígono delimitador de Portugal continental.	77
A.7	Espanha continental.	77
A.8	Polígono delimitador de Espanha.	77
A.9	Croácia continental.	77
A.10	Polígono delimitador da Croácia.	77
A.11	Brasil continental.	78
A.12	Polígono delimitador do Brasil continental.	78
A.13	Alemanha continental.	78
A.14	Polígono delimitador de Alemanha continental.	78
A.15	França continental.	78
A.16	Polígono delimitador de França continental.	78

Lista de Tabelas

5.1	Comparação método Garcia-Castellanos & Lombardo e Esqueleto Retilíneo.	60
-----	--	----

Capítulo 1

Introdução

A matemática tem desempenhado regularmente um papel fundamental no avanço de diversas áreas científicas e tecnológicas. Através de teorias e métodos, a matemática tem sido capaz de fornecer soluções inovadoras para desafios complexos em campos tão diversos como física, engenharia, economia e ciência da computação. Neste contexto, esta tese de mestrado visa contribuir para o progresso do conhecimento matemático bem como para o desenvolvimento da indústria da pedra.

Os trabalhos foram realizados no âmbito da atividade A13, denominada StoneWave- Processamento de resíduos e impressão 3D, do projeto InovMineral 4.0 em parceria com o Centro de Desenvolvimento Rápido e Sustentável do Produto e com a empresa Fravizel. Esta atividade tem como objetivo o desenvolvimento de uma máquina de britagem cuja finalidade é fragmentar uma pedra de modo a satisfazer condições pré-definidas pelo utilizador, condições essas relativas à área dos fragmentos que se pretendem obter.

O objetivo do problema é otimizar o tempo necessário para fragmentar um determinado bloco de pedra e aumentar ao máximo a eficiência da máquina ao longo de todo o processo de fragmentação. Podemos enunciar o problema do seguinte modo:

"Um bloco de pedra natural é conduzido a uma máquina de britagem pneumática equipada com um martelo pneumático móvel que tem o objetivo de fragmentar o bloco de pedra natural em pedaços mais pequenos. Após cada impacto do martelo na pedra a área dos fragmentos resultantes é analisada. Se um fragmento tiver uma área maior que um valor pré-estabelecido, o martelo deve mover-se no sentido de acertar novamente na pedra para a partir em fragmentos mais pequenos. O processo de britagem é dado como concluído quando a área de todos os fragmentos for inferior ao parâmetro pré-definido pelo utilizador. O desafio proposto é o de otimizar o processo de britagem, minimizando o tempo necessário para o concluir."

Do ponto de vista matemático, assumindo as condições ideais de aquisição de imagem, trata-se de um problema com duas vertentes, uma de Álgebra Linear/ Processamento de Imagem e outra de Geometria Analítica. Relativamente à formulação algébrica, o problema resume-se a determinar em cada matriz, que representa uma imagem, os extremos locais que correspondem às extremidades dos fragmentos. Trata-se, portanto, de determinar o polígono que identifica a fronteira de cada um dos fragmentos, estudo incluído no apêndice A. Relativamente ao problema geométrico, trata-se de determinar um ponto no interior do polígono onde deverá ocorrer o impacto do martelo pneumático.

Este trabalho está organizado do seguinte modo: no capítulo 2 serão abordados métodos para determinar o invólucro convexo de um polígono; no capítulo 3 será abordada a axiomática de área com o objetivo de desenvolver com rigor uma função área, provar a sua existência e inspirar-nos para o capítulo 4; o capítulo 4 consiste na apresentação de uma conjectura para a axiomática de "centroide geométrico", que nos vai levar a desenvolver um método para a sua determinação bem como para o cálculo do centro de Chebyshev de um polígono convexo, o que nos vai levar a uma heurística para que possamos aplicar o centro de Chebyshev em alguns polígonos não convexos. Dada a possibilidade de estes métodos terem como output um ponto no exterior do polígono surge a necessidade de, no capítulo 5, abordarmos metodologias para determinar um ponto no interior do polígono o mais distante possível da sua fronteira, o que nos vai levar ao estudo do eixo medial e do esqueleto reto de um polígono.

Espera-se que esta pesquisa contribua para o avanço e desenvolvimento da indústria da pedra, bem como para o desenvolvimento de soluções mais eficientes e seguras neste campo. No final, esperamos fornecer uma análise aprofundada dos métodos e técnicas utilizadas, além de possíveis direções para pesquisas futuras nesta área e diversas soluções com viabilidade de serem implementadas na indústria e, em especial, no desenvolvimento da máquina de britagem.

Capítulo 2

Invólucro convexo de um polígono

Iniciaremos o capítulo com a introdução de alguns conceitos básicos e alguns resultados, que nos irão auxiliar ao longo do mesmo, [4, Secção 3.3.1]. Neste capítulo vão ser abordados métodos para determinar o invólucro convexo de um conjunto finito de pontos [10, Capítulo 2].

Na secção 2.1 vamos abordar a definição de polígono e abordar conceitos da teoria dos poliedros, tais como conjunto convexo, ponto extremo e invólucro convexo [4, Secção 3.3.1]. Será igualmente enunciado um resultado que permite a identificação dos pontos extremos de um invólucro convexo.

Na secção 2.2 vamos dar resposta ao problema de determinar o invólucro convexo de um conjunto finito de pontos no plano, serão abordados os métodos Graham-Scan, Gift-Wrapping, método incremental e divide-and-conquer. Iremos abordar o método Graham-Scan com alguma profundidade uma vez que foi desenvolvido computacionalmente [4], [10], [15]. Relativamente aos restantes métodos mencionados será abordada uma breve descrição dos respetivos algoritmos [10].

2.1 Invólucro convexo e pontos extremos

Chama-se cadeia poligonal a uma sequência ordenada de n pontos distintos no plano P_1, P_2, \dots, P_n designados de vértices, ligados por segmentos de reta $[P_1, P_2], [P_2, P_3], \dots, [P_{n-1}, P_n]$. Caso não haja interseção entre arestas estamos perante uma cadeia poligonal simples. Uma cadeia poligonal diz-se fechada se o vértice inicial coincidir com o vértice final. Um polígono simples P é o conjunto de pontos de \mathbb{R}^2 limitados por uma cadeia poligonal simples fechada reunidos com os pontos da cadeia poligonal simples fechada. Convencionamos, que um polígono é definido por uma sequência ordenada de pontos nas condições enunciadas [4, pág. 29-30]. Por exemplo,

$$P \equiv \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -11 & -14 \\ 0 & 11 & 8 & 12 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

caracteriza o polígono da Figura 2.1.

Se S denota um conjunto finito e não vazio de pontos do plano, *i.e.*, de \mathbb{R}^2 , cada um dos seus elementos é um par ordenado constituído pelas coordenadas do respetivo ponto num referencial fixado *a priori*. O invólucro convexo de S é a interseção de todos os conjuntos convexos em \mathbb{R}^2 que contêm S . Portanto, o invólucro convexo de S , denotado por $\text{conv}(S)$, é o “menor” conjunto convexo que contém S . Em geral, o invólucro convexo de um conjunto S , finito e não vazio, é um *polígono*, *i.e.*, um conjunto poliedral limitado.

Pode mostrar-se que $\text{conv}(S)$ é um *polígono*, *i.e.*, um conjunto poliedral limitado. Visualmente, é relativamente simples de identificar o invólucro convexo no plano. Se imaginarmos um prego em cada posição do plano identificada por um elemento de S , o invólucro convexo de S é a região delimitada por um elástico que os envolve a todos. Na Figura 2.2. podemos observar o invólucro convexo do conjunto de pontos formado pelos vértices do polígono P , representado na Figura 2.1, que coincide com o invólucro convexo de P .

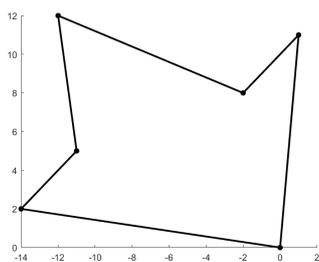


Figura 2.1 Polígono P .

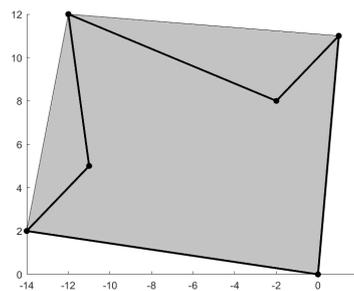


Figura 2.2 Invólucro convexo de P .

Em termos algébricos, $\text{conv}(S)$ é o conjunto de todas as combinações lineares convexas com elementos de S , *i.e.*, se $S \equiv \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ então $\mathbf{p} \in \text{conv}(S)$ se e só se existe $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n) \geq (0, 0, \dots, 0) \equiv \mathbf{0}$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Na Figura 2.2 observamos que existem alguns pontos cuja existência não interfere na definição do invólucro convexo e que existem outros que, se removidos, fazem com que o invólucro convexo fique um conjunto mais pequeno. Chamamos a estes últimos, pontos extremos. Formalmente, um ponto P_k de S é um ponto extremo de $\text{conv}(S)$ se $P_k \notin \text{conv}(S \setminus P_k)$, de modo que o conjunto dos pontos extremos de S é um subconjunto de S , denotado H , tal que $\text{conv}(H) = \text{conv}(S)$.

A propriedade ser ponto extremo de $\text{conv}(S)$ é invariante relativamente a transformações afins $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $T(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, com A invertível. Em particular, ser ponto extremo é invariante relativamente a translações, rotações, reescalamentos, cisalhamentos, reflexões e composições entre elas.

Teorema 1 *Seja A um matriz $n \times n$ de números reais invertível e seja \mathbf{b} um vetor n -dimensional. Então, H é o conjunto dos pontos extremos de $\text{conv}(S)$, com S um conjunto finito, não vazio, em \mathbb{R}^n se e só se*

$$AH + \mathbf{b}\mathbf{e}^T \equiv \{\mathbf{A}\mathbf{h} + \mathbf{b} : \mathbf{h} \in H\}$$

é o conjunto dos pontos extremos de $\text{conv}(AS + \mathbf{b}\mathbf{e}^T)$.

Prova:

Suponhamos que \mathbf{h}_j , a j -ésima coluna de H , é ponto extremo de $\text{conv}(S)$ e, por absurdo, $\mathbf{A}\mathbf{h}_j + \mathbf{b}$ não é ponto extremo de $\text{conv}(AS + \mathbf{b}\mathbf{e}^T)$. Então, existe $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ satisfazendo $\mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1$ e $x_k = 0$ nas colunas de S , indexadas por k , que coincidam com \mathbf{h}_j tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{h} + \mathbf{b} = (AS + \mathbf{b}\mathbf{e}^T)\mathbf{x} \equiv AS\mathbf{x} + \mathbf{b}(\mathbf{e}^T \mathbf{x}) \equiv AS\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Portanto, $\mathbf{A}\mathbf{h} = AS\mathbf{x}$ de modo que, como A é invertível, $\mathbf{h} = S\mathbf{x}$, contrariando o facto de \mathbf{h} ser ponto extremo de $\text{conv}(S)$. A demonstração do recíproco é análoga. ■

Seja $H \equiv \{Q_0, Q_1, \dots, Q_m\}$ um subconjunto de um dado conjunto de pontos do plano $S \equiv \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, finito, não vazio, e com elementos todos distintos. Como validar, em termos algébricos, que Q é o conjunto de pontos extremos de $\text{conv}(S)$?

Suponhamos, sem perda de generalidade, que: (i) $Q_0 \equiv P_0 \equiv (0, 0)$ e (ii) sabemos antecipadamente que $\{Q_0, Q_1, Q_m\}$ são três pontos extremos consecutivos com Q_1, Q_m ambos adjacentes a Q_0 . Veja-se a figura 2.3,

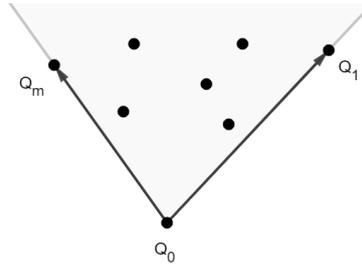


Figura 2.3 Cone gerador.

Sob estas duas hipóteses, todo o elemento de S é uma combinação linear cônica de $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ e $\overrightarrow{Q_0Q_m}$. Para validar que H é, de facto, o conjunto dos pontos extremos de $\text{conv}(S)$ precisamos: **(i)** verificar que nenhum elemento Q_k de H é combinação linear convexa dos restantes elementos de H ; **(ii)** verificar que todo o elemento P_j de $S \setminus H$ é combinação linear convexa dos elementos de H . Para verificar **(i)**, resolvemos o seguinte problema linear, para cada $Q_k \in H \setminus \{Q_0, Q_1, Q_m\}$,

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_k \equiv \text{mín } \mathbf{e}\lambda \\ \text{s.a } H\lambda = Q_k, \\ \lambda \geq \mathbf{0}, \lambda_k = 0 \end{array} \right\} \quad (2.1.2)$$

que é admissível e possui valor ótimo $\sigma_k > 0$, porque Q_k é um elemento de S . Agora, se $\sigma_k > 1$ então Q_k não é combinação linear convexa de $H \setminus Q_k$; se $\sigma_k \leq 1$ e $\hat{\lambda} \equiv (\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m)$ é a solução ótima então

$$Q_k \equiv \sum_{i=0}^m \hat{\lambda}_i Q_i \equiv \left(1 - \sum_{i=0}^m \hat{\lambda}_i\right) P_0 + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i Q_i,$$

que é uma combinação linear convexa dos elementos de $H \setminus Q_k$ porque $\hat{\lambda}_k \equiv 0$. Para verificar **(ii)**, resolvemos o seguinte problema linear, para cada $P_j \in S \setminus H$,

$$\left. \begin{array}{l} \mu_j \equiv \text{mín } \mathbf{e}\lambda \\ \text{s.a } H\lambda = P_j, \\ \lambda \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (2.1.3)$$

que é admissível e possui valor ótimo $\mu_j > 0$. Agora, se $\mu_j > 1$ então P_j não é combinação linear convexa de H ; se $\mu_j \leq 1$ e $\hat{\lambda} \equiv (\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m)$ é solução ótima então

$$P_j \equiv \sum_{i=0}^m \hat{\lambda}_i Q_i \equiv (1 - \mu_j) P_0 + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i Q_i,$$

que é uma combinação linear convexa de H . Em suma, podemos usar programação linear para verificar que um dado subconjunto H de S é o conjunto dos pontos extremos de $\text{conv}(S)$. Claro que a

solução de todos estes problemas lineares está relacionada e, portanto, devem ser utilizadas técnicas de reotimização (como o dual-simplex e outros) para que todos estes problemas possam ser resolvidos de forma eficiente.

Note-se que assegurar que n pontos de S no plano são todos distintos envolve a execução de um algoritmo de ordenação e, portanto, requer $\mathcal{O}(n \log n)$ operações. Mas, encontrar três pontos de S que sejam três pontos extremos consecutivos de $\text{conv}(S)$ requer $\mathcal{O}(n)$ operações e pode ser efetuado do seguinte modo. Primeiro, identificamos o ponto de ordenada mais baixa e, se houver empates, no conjunto destes, identificar o que tiver maior abcissa. Esse ponto designa-se por Q_0 .

Exemplo de aplicação:

Vamos verificar que o seguinte conjunto H é o conjunto dos pontos extremos de $\text{conv}(S)$, onde S é o conjunto dos vértices do polígono P da figura 2.1, e seja

$$H \equiv \begin{array}{cccc} Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ 0 & 1 & -12 & -14 \\ 0 & 11 & 12 & 2 \\ P_0 & P_1 & P_3 & P_5 \end{array} \quad (2.1.4)$$

Primeiro, observamos que $Q_0 \equiv P_0 \equiv (0,0)$ é o ponto de S com ordenada menor. Não há qualquer outro ponto de S com a mesma ordenada. Seguidamente, calculamos as cotangentes dos ângulos que cada um dos vértices $P_j \in S \setminus P_0$ faz com o semi-eixo positivo das abcissas:

$$P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \\ 1/11, \quad -1/4, \quad -1, \quad -11/5, \quad -7,$$

definindo por ordem decrescente e sem empates: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 . Portanto, $Q_3 \equiv P_5$, $Q_0 \equiv P_0$ e $Q_1 \equiv P_1$ são três pontos extremos consecutivos de $\text{conv}(S)$, por esta ordem.

Agora, através da resolução dos respetivos problemas lineares usando MATLAB podemos obter os valores das tabelas seguintes

Q_k	σ_k	$\hat{\lambda}$	P_j	μ_j	$\hat{\lambda}$
P_3	1.84	(0,0.92, -1,0.92)	P_2	0.70	(0,0.50,0.20,0)
			P_4	0.83	(0,0,0.33,0.50)

Podemos, então, concluir que H é o conjunto dos pontos extremos de $\text{conv}(S)$.

2.2 Método para determinar o invólucro convexo de um conjunto finito de pontos no plano

Identificar o invólucro convexo de um conjunto finito de pontos no plano consiste em identificar os pontos extremos do invólucro convexo. Para um determinado conjunto finito de pontos no plano, designado por S , podemos afirmar imediatamente que os pontos com maior abcissa, menor abcissa, maior ordenada e menor ordenada são pontos extremos de $\text{conv}(S)$. É mais complicado identificar os restantes pontos extremos do invólucro convexo de S . Para conjuntos de pequenas dimensões podemos fazê-lo visualmente, mas em conjuntos com algumas centenas de pontos não é possível fazê-lo. Por isso, nesta secção, serão estudados quatro métodos que permitem determinar o invólucro convexo de um conjunto finito de pontos, são eles o Varrimento de Graham, o Gift Wrapping, o método incremental e o método divide-and-conquer.

2.2.1 Varrimento de Graham

Nesta secção vamos descrever e implementar computacionalmente no software MATLAB o método Varrimento de Graham, [10, pág. 42-46], [4, pág. 69-74], [15].

Seja P uma matriz $2 \times (n + 1)$ caracterizando um polígono. O Varrimento de Graham (*Graham Scan*, em inglês) [15] é um procedimento que objetiva a identificação dos pontos extremos de $\text{conv}(P)$ usando argumentos geométricos. A generalização do procedimento para pontos do espaço (\mathbb{R}^3) não é óbvia.

Com o propósito de simplificar a descrição do algoritmo assumimos, sem perda de generalidade, que o conjunto de pontos P satisfaz as seguintes propriedades: **(i)** os pontos em S são todos distintos; **(ii)** um dos pontos de P , $P_0 \equiv (0, 0)$, é a origem. Assegurar que n pontos do plano são todos distintos envolve a execução de um algoritmo de ordenação que requer $\mathcal{O}(n \log n)$ operações. Se $P_0 \neq (0, 0)$ podemos aplicar uma operação de translação a todos os pontos de modo que P_0 seja posicionado na origem. Como vimos antes, no Teorema 1, esta operação não tem interferência na posição estrutural dos pontos extremos.

O Varrimento de Graham decorre em duas fases. A versão que aqui descrevemos é uma adaptação nossa do algoritmo proposto em [15] e [10, pág. 42-46]. Numa primeira fase, define-se um polígono Q cujo conjunto de colunas coincide com o conjunto das colunas de P mas estas estão distribuídas de modo a haver uma relação de ordem cíclica entre os ângulos que os vetores (colunas) Q_j , para $j \neq 0$, fazem com o semi-eixo positivo das abcissas - vejam-se as figuras seguintes:

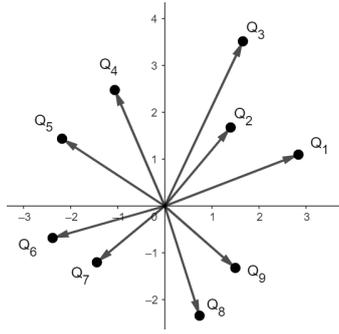


Figura 2.4 Ordenação de pontos não colineares

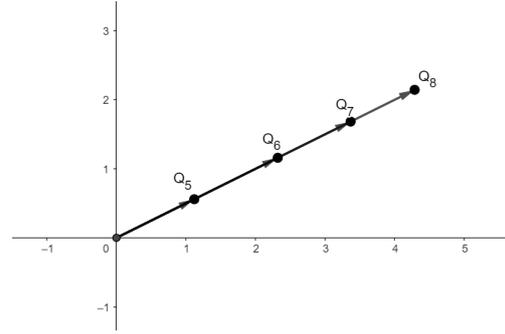


Figura 2.5 Ordenação de pontos colineares.

Nos casos de empate, o segundo critério é o da distância a $Q_0 \equiv P_0$. com a exceção do conjunto de vetores (distintos de P_0) que fazem um ângulo nulo com o semi-eixo positivo das abcissas. Para estes, a ordem é invertida. Assim, para concretizar a construção de Q começamos por particionar as colunas de P em cinco grupos:

$$\begin{aligned}
 G_1 &\equiv \{j: P_j \equiv (x,y), y > 0\} & G_2 &\equiv \{j: P_j \equiv (x,y), y = 0, x < 0\} \\
 G_3 &\equiv \{j: P_j \equiv (x,y), y < 0\} & G_4 &\equiv \{j: P_j \equiv (x,y), y = 0, x > 0\},
 \end{aligned}$$

e, finalmente, G_5 que é constituído por um único ponto, $P_0 \equiv (0,0)$. Então, a matriz Q é definida do seguinte modo:

$$Q \equiv \begin{bmatrix} & \overset{j \in G_1}{P_j} & \overset{j \in G_2}{P_j} & \overset{j \in G_3}{P_j} & \overset{j \in G_4}{P_j} \\ P_0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

e em cada grupo os vetores são ordenados do modo que antes se explicou. Assim, no grupo G_2 os vetores são ordenados por ordem crescente da sua distância a P_0 , enquanto que no grupo G_4 , os vetores são ordenados por ordem decrescente da sua distância a P_0 . Por outro lado, as colunas Q_j relativas aos vetores de P no grupo G_1 refletem a seguinte ordenação. Denote-se, genericamente, por α_j o ângulo que a coluna Q_j faz com o semi-eixo positivo das abcissas, o vetor $\mathbf{e}_1 \equiv (1,0)$. Então,

$$\begin{aligned}
 i < j &\Leftrightarrow \alpha_i \equiv \angle(Q_i, \mathbf{e}_1) < \alpha_j \equiv \angle(Q_j, \mathbf{e}_1) & (2.2.1) \\
 &\Leftrightarrow \cot \alpha_i \equiv \frac{q_{1i}}{q_{2i}} > \cot \alpha_j \equiv \frac{q_{1j}}{q_{2j}} \\
 &\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \overset{Q_i}{q_{1i}} & \overset{Q_j}{q_{1j}} \\ q_{2i} & q_{2j} \end{bmatrix} \equiv q_{1i} q_{2j} - q_{1j} q_{2i} > 0,
 \end{aligned}$$

onde se usa o facto de que a função cotangente ser estritamente decrescente no intervalo aberto $(0, \pi)$. Nos casos em que houver igualdade, o índice menor corresponde ao vetor mais próximo da origem. As colunas do grupo G_3 são ordenadas de modo análogo. Especial cuidado deve ocorrer na implementação desta fase do Varrimento de Graham para a eventualidade de algum destes conjuntos G_i ser vazio. Por simplicidade, omitimos a explicação do que fazer nesses casos.

Exemplo de aplicação:

Consideremos o conjunto de pontos S , tal que:

$$S = \{P_0(0,0), P_1(-4,0), P_2(-2,3), P_3(5,0), P_4(3,-2), P_5(2,0), P_6(-2,-2)\}$$

Observando a disposição dos pontos no plano temos que $G_1 \leftarrow (P_2)$, $G_2 \leftarrow (P_1)$, $G_3 \leftarrow (P_6, P_4)$ e $G_4 \leftarrow (P_3, P_5)$. Portanto, vem que:

$$Q = \begin{bmatrix} P_0 & P_2 & P_1 & P_6 & P_4 & P_3 & P_5 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

Na figura 2.6 podemos observar a representação dos elementos de S no plano, bem como o polígono resultante da primeira fase do Varrimento de Graham.

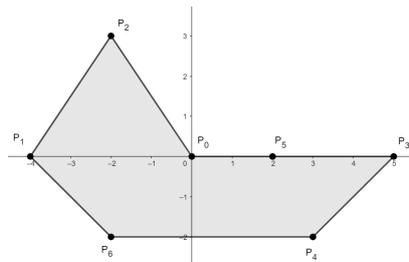


Figura 2.6 Fase 1 do Varrimento de Graham.

A segunda fase do Varrimento de Graham é um procedimento iterativo que consiste na atualização dinâmica de uma matriz H , que no final conterá nas suas colunas os pontos extremos de $\text{conv}(P)$ na ordem adequada de modo que o polígono definido por H , e toda a sua região interior, coincida com $\text{conv}(P)$.

Assumimos que a ordem das colunas em P foi estabelecida pela primeira fase e, por simplicidade, as duas primeiras colunas de P são pontos extremos já conhecidos de $\text{conv}(P)$ e que a primeira é $P_0 \equiv (0,0)$. Isso pode ser assegurado se na primeira fase tivéssemos escolhido P_0 adequadamente.

Por exemplo, identificar o ponto de P de menor ordenada e, nos casos de empate, o de maior abcissa, seguida de uma translação que identifique uma tal coluna que coincida com a origem.

A primeira matriz H é definida pelas primeiras três colunas de P , *i.e.*,

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3 \\ P_0 & P_1 & P_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{h}_{k-1} & \mathbf{h}_k & \mathbf{h}_{k+1} \end{bmatrix},$$

para $k \equiv 2$. Durante todo o algoritmo subjacente à segunda fase do Varrimento de Graham, \mathbf{h}_{k-1} , \mathbf{h}_k e \mathbf{h}_{k+1} serão as três últimas colunas de H , por essa ordem. Então, identificamos os vetores

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{h}_k - \mathbf{h}_{k-1} \equiv (u_1, u_2), \quad \mathbf{v} \equiv \mathbf{h}_{k+1} - \mathbf{h}_k \equiv (v_1, v_2).$$

Se os dois vetores não forem colineares, a sua posição relativa é uma das seguintes,

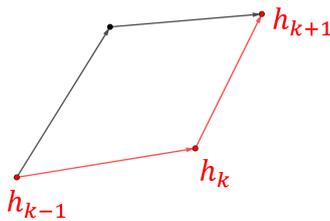


Figura 2.7 Curva à esquerda.

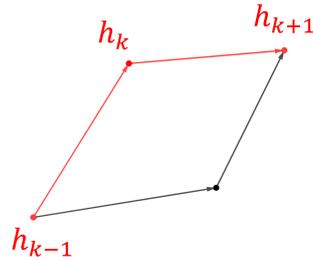


Figura 2.8 Curva à direita.

que identificaremos por *viragem à esquerda* e *viragem à direita*, respetivamente [4, pág.59-60]. No primeiro caso (*i.e.*, se $u_1v_2 - u_2v_1 \equiv \det[\mathbf{u} \ \mathbf{v}] > 0$), devemos incrementar k em uma unidade e considerar como \mathbf{h}_{k+1} a próxima coluna de P ; no segundo caso (*i.e.*, se $u_1v_2 - u_2v_1 \equiv \det[\mathbf{u} \ \mathbf{v}] < 0$), e também nos casos em que houver colinearidade, deve haver um retrocesso, \mathbf{h}_k passa a ser \mathbf{h}_{k+1} e k é decrementado uma unidade. O algoritmo termina quando todas as colunas de P tiverem sido consideradas.

Vejamos quantas iterações são necessárias na segunda fase do Varrimento de Graham, no pior dos cenários. Em cada iteração é desconsiderada uma coluna de P ou uma coluna de H . Como cada uma destas matrizes tem no máximo n elementos, o esforço computacional deste algoritmo é $\mathcal{O}(n)$. Portanto, na globalidade, o maior esforço computacional da Varredura de Graham está na primeira fase, na construção de Q , que consiste essencialmente na ordenação de um conjunto com n vetores. Portanto, o esforço computacional global no Varrimento de Graham é $\mathcal{O}(n \log n)$.

Exemplo de aplicação:

Com o propósito de ilustrar o Varrimento de Graham, consideremos o conjunto de seis pontos, representados por S , que são os vértices do polígono da figura 2.1 .

$$S \equiv \begin{bmatrix} -14 & -12 & -11 & -2 & 1 \\ 2 & 12 & 5 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

acrescido de $P_0 \equiv (0,0)$. Verificamos visualmente que os pontos são todos distintos e não há um par que esteja alinhado com P_0 . Calculamos as cotangentes dos ângulos que cada uma dessas colunas faz com o semi-eixo positivo das abcissas,

$$\mathbf{c} \equiv \begin{bmatrix} -7 & -1 & -11/5 & -1/4 & 1/11 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$Q \equiv \begin{bmatrix} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & -2 & -12 & -11 & -14 \\ 11 & 8 & 12 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

e começamos o Varrimento de Graham:

Iteração 1: $H \equiv [P_0 \ P_1 \ P_2]$, $k = 2$ e $j = 2$. Como $\mathbf{u} \equiv P_1 \equiv (1, 11)$ e $\mathbf{v} \equiv P_2 - P_1 \equiv (-3, -3)$ então $u_1v_2 - u_2v_1 = (1) \times (-3) - (11) \times (-3) > 0$.

Iteração 2: $H \equiv [P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3]$, $k = 3$ e $j = 3$. Como $\mathbf{u} \equiv P_2 - P_1 \equiv (-3, -3)$ e $\mathbf{v} \equiv P_3 - P_2 \equiv (-10, 4)$ então $u_1v_2 - u_2v_1 = (-3) \times (4) - (-3) \times (-10) = -34 < 0$.

Iteração 3: $H \equiv [P_0 \ P_1 \ P_3]$, $k = 2$ e $j = 3$. Como $\mathbf{u} \equiv P_1 \equiv (1, 11)$ e $\mathbf{v} \equiv P_3 - P_1 \equiv (-13, 1)$ então $u_1v_2 - u_2v_1 = (1) \times (1) - (11) \times (-13) > 0$.

Iteração 4: $H \equiv [P_0 \ P_1 \ P_3 \ P_4]$, $k = 3$ e $j = 4$. Como $\mathbf{u} \equiv P_3 - P_1 \equiv (-13, 1)$ e $\mathbf{v} \equiv P_4 - P_3 \equiv (1, -7)$ então $u_1v_2 - u_2v_1 = (-13) \times (-7) - (1) \times (1) > 0$.

Iteração 5: $H \equiv [P_0 \ P_1 \ P_3 \ P_4 \ P_5]$, $k = 4$ e $j = 5$. Como $\mathbf{u} \equiv P_4 - P_3 \equiv (1, -7)$ e $\mathbf{v} \equiv P_5 - P_4 \equiv (-3, -3)$ então $u_1v_2 - u_2v_1 = (1) \times (-3) - (-7) \times (-3) < 0$.

Iteração 6: $H \equiv [P_0 \ P_1 \ P_3 \ P_5]$, $k = 3$ e $j = 5$. Como $\mathbf{u} \equiv P_3 - P_1 \equiv (-13, 1)$ e $\mathbf{v} \equiv P_5 - P_3 \equiv (-2, -10)$ então $u_1v_2 - u_2v_1 = (-13) \times (-10) - (1) \times (-2) > 0$.

Concluimos que o conjunto dos pontos extremos de $\text{conv}(S)$ é

$$H \equiv \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_3 & P_5 \\ 0 & 1 & -12 & -14 \\ 0 & 11 & 12 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 17 & 4 & 2 \\ 4 & 15 & 16 & 6 \end{bmatrix}$$

Compare com uma figura anterior.

A figura 2.9, retirada de [10], ilustra geometricamente o Varrimento de Graham num outro conjunto de pontos.

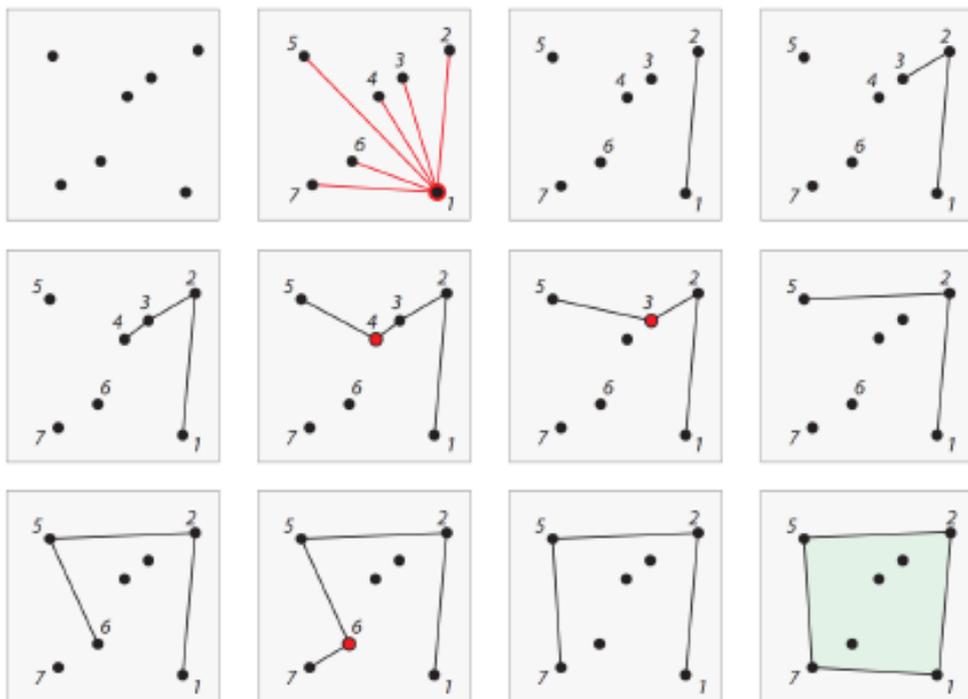


Figura 2.9 Exemplo de aplicação do Varrimento de Graham.

Poder-se-á pensar que a primeira fase do Varrimento de Graham é desnecessária quando o propósito único é o de identificar os pontos extremos do invólucro convexo do conjunto de vértices de um polígono. Sendo isso certamente possível para certas classes de polígonos, não é verdade, em geral, que se consiga esse objetivo implementando apenas a segunda fase. Os dois exemplos da figura 2.10 são contra-exemplos para apenas o emprego da segunda fase.

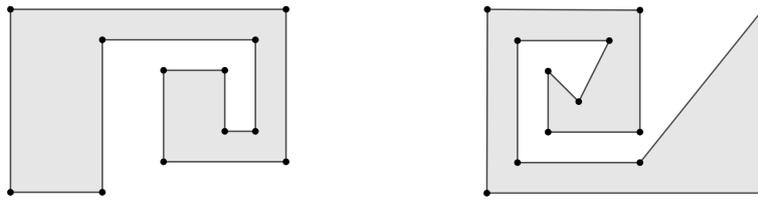


Figura 2.10 Exemplos em que não podemos aplicar apenas a fase 2 do Graham-Scan.

Implementação prática do Varrimento de Graham

Nesta secção vamos implementar o método Graham-Scan, desenvolvido usando o software MATLAB. Implementando as duas fases do Varrimento de Graham, desenvolvidas em *GS_fase1.m* e em *GS_fase2.m*, podemos observar na figura 2.11 todo o processo do método de Varrimento de Graham para um conjunto de pontos gerados aleatoriamente num quadrado de dimensões 20×20 .

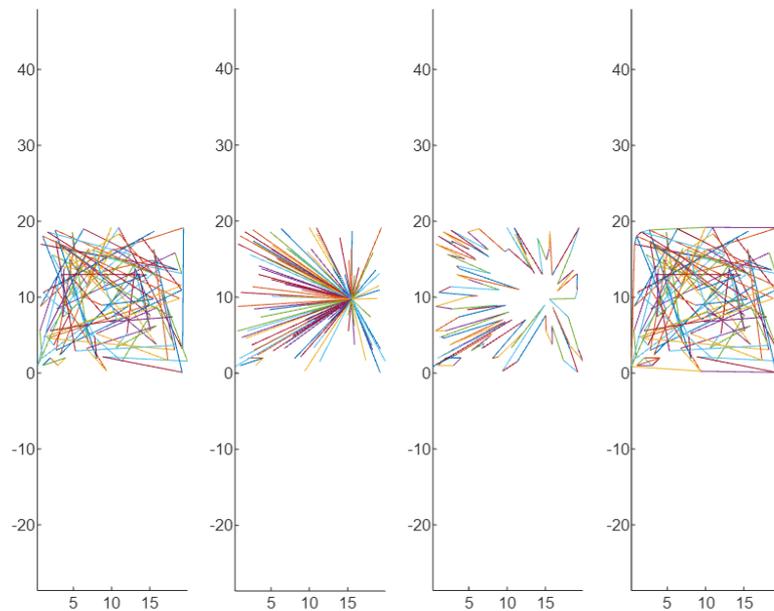


Figura 2.11 Fases do Varrimento de Graham num conjunto aleatório de pontos

Para determinar o invólucro convexo dos polígonos delimitadores da região continental dos países identificados no anexo A, vamos implementar o Varrimento de Graham, utilizando as funções *GS_fase1.m* e *GS_fase2.m*, com instruções nos apêndices C e D, aos polígonos obtidos através da função *im2poly.m*, descrita na secção A.2.

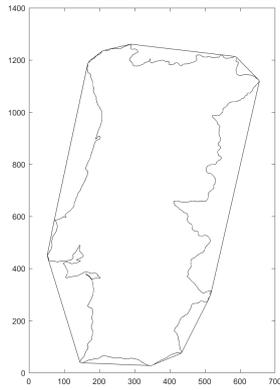


Figura 2.12 Invólucro convexo de Portugal.

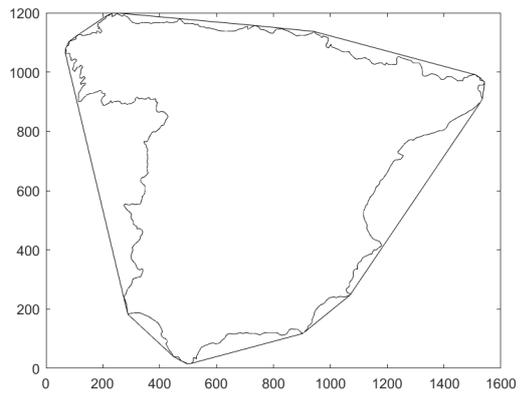


Figura 2.13 Invólucro convexo da Espanha.

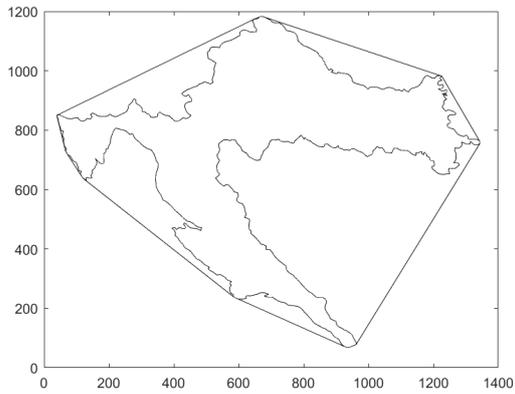


Figura 2.14 Invólucro convexo da Croácia.

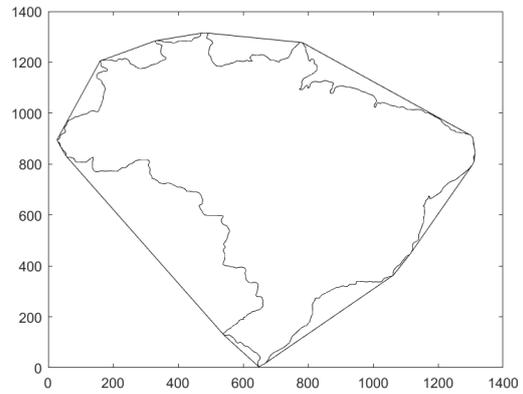


Figura 2.15 Invólucro convexo do Brasil.

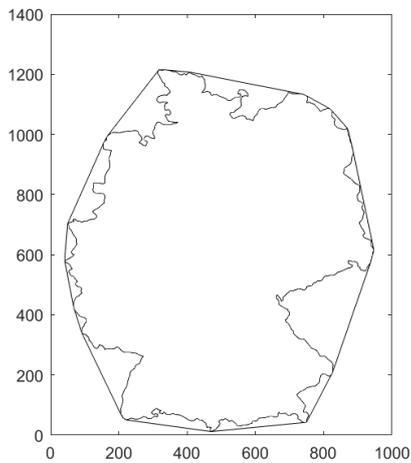


Figura 2.16 Invólucro convexo da Alemanha.

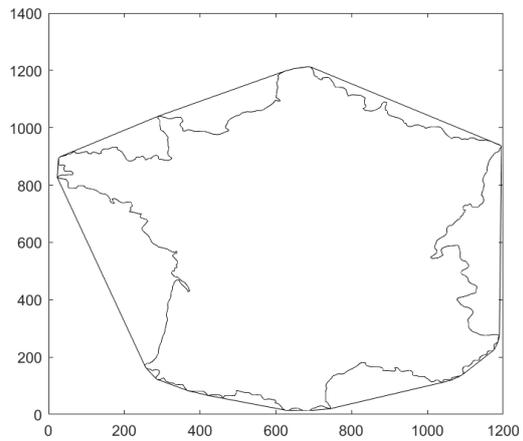


Figura 2.17 Invólucro convexo da França.

2.2.2 Gift Wrapping

Uma alternativa às duas fases do Varrimento de Graham, denominada Gift Wrapping [10, pág.42-44], para identificar os pontos extremos do invólucro convexo de um conjunto de pontos do plano é, em geral, preferível quando o conjunto S de $n + 1$ pontos é muito elevado. Descrevemos a ideia de forma sucinta pois o método não é mais do que o emprego sucessivo da primeira fase do Varrimento de Graham para sucessivos pontos P_0 , escolhidos adequadamente.

Começamos por escolher para $Q_0 \equiv P_0$ um dos pontos de S que seja garantidamente um ponto extremo, por exemplo, o ponto de ordenada menor e, nos casos de empate, o de abcissa maior. Então, efetuamos uma translação e uma rotação de modo a identificar P_0 a origem do referencial e todos os restantes pontos de S estejam acima (estritamente) do eixo das abcissas. Então, identificam-se Q_1 e Q_m os pontos extremos adjacentes a Q_0 usando (2.2.1) - que pode ser efetuado em $\mathcal{O}(n)$ operações. A ideia é recursivamente repetida com Q_0 substituída por Q_1 , o ponto extremo adjacente que se segue no sentido anti-horário. O processo termina quando o próximo Q_0 coincidir com o Q_0 inicial.

Na figura 2.18, retirada de [10], podemos observar um exemplo de aplicação do algoritmo Gift Wrapping.

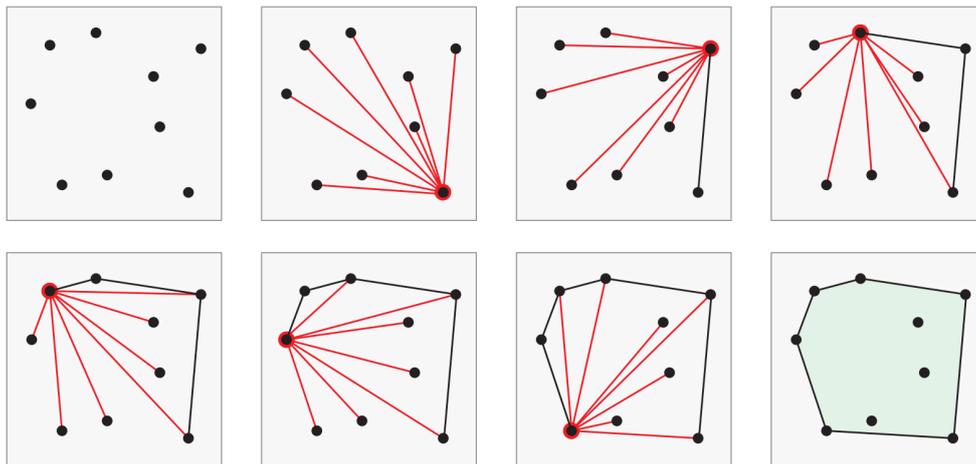


Figura 2.18 Exemplo de aplicação do método Gift-Wrapping.

Seja S um conjunto finito de pontos de cardinalidade n , no algoritmo Gift-Wrapping cada vez que se conclui que um ponto de S é ponto extremo de $\text{conv}(S)$ tem de ser calculada a amplitude de $n - k$ ângulos, onde k é o número de pontos que já classificados como pontos extremos.

Este cálculo tem de ser feito tantas vezes quantos pontos extremos haja no invólucro convexo de S . Seja h o número de pontos extremos do invólucro convexo de S , então o número de iterações necessárias para determinar $\text{conv}(S)$ é dado por:

$$\sum_{i=0}^{h-1} (n-i) = \sum_{i=0}^{h-1} n - \sum_{i=0}^{h-1} i = nh - \frac{(h-1)h}{2} \tag{2.2.3}$$

Uma vez que o termo mais significativo de (2.2.3) é nh , podemos concluir que a complexidade do algoritmo Gift-Wrapping é $\mathcal{O}(nh)$. Uma vez que no pior cenário h pode ser n , podemos concluir que o algoritmo Gift-Wrapping tem, no pior cenário possível, uma complexidade $\mathcal{O}(n^2)$.

2.2.3 Método Incremental

Uma alternativa ao Varrimento de Graham e ao Gift Wrapping é o método incremental, [10, pág.36-42], que quando o invólucro convexo de um conjunto finito de pontos S_k é conhecido, consiste em determinar o invólucro convexo do conjunto $S_k \cup P$, onde P é um ponto no plano com coordenadas $P(x_P, y_P)$ e exterior a $\text{conv}(S_k)$. Este método consiste na aplicação sucessiva de parte da fase 1 do Varrimento de Graham.

Começamos por ordenar os pontos do conjunto por ordem crescente da abcissa. Seja $\text{conv}(S_k)$ o invólucro convexo dos primeiros k pontos. De seguida, determina-se o invólucro convexo do conjunto $S_k \cup P$, onde P é um ponto no plano com coordenadas $P(x_P, y_P)$. Para isso, começamos por escolher a aresta de $\text{conv}(S_k)$ que está mais próxima de P , seja essa aresta a aresta e . Aplicamos uma rotação de centro P de tal modo que a aresta e passe a ser um segmento de uma reta paralela ao eixo Ox . De seguida, aplica-se uma translação de vetor $\vec{u}(-x_P, -y_P)$ a todos os pontos do conjunto $S_k \cup P$.

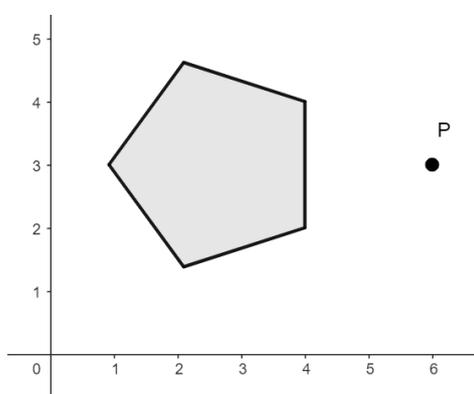


Figura 2.19 Conjunto $\text{conv}(S_k)$ e ponto P .

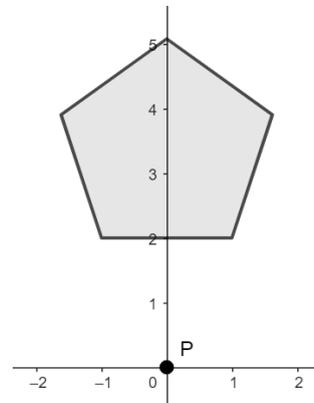


Figura 2.20 $\text{conv}(S_k)$ e P após transformações.

De seguida, aplicando a fase 1 do Varrimento de Graham identificam-se os dois pontos adjacentes a P , os pontos que estão entre eles, na sequência ordenada de pontos que define $\text{conv}(S_k)$, são ignorados. Fazendo a translação e rotação inversa da realizada obtemos $\text{conv}(S_k \cup P)$.

Num conjunto de pontos com cardinalidade n , o número de operações a realizar para determinar a aresta mais próxima é:

$$3 + 4 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - (1+2) = \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 3 \quad (2.2.4)$$

Uma vez que o termo mais significativo de (2.2.4) é n^2 podemos concluir que a complexidade do método incremental é $\mathcal{O}(n^2)$.

2.2.4 Divide-and-Conquer

Nesta secção vamos descrever sucintamente o método divide-and-conquer, que é uma outra alternativa para o cálculo do invólucro convexo de um conjunto finito de pontos S , [10, pág. 48-51].

Suponhamos, sem perda de generalidade, que não existem dois pontos no conjunto S com a mesma abcissa. Começamos por ordenar os pontos de S por ordem crescente da abcissa. De seguida, agrupamos o ponto na posição k com o ponto na posição seguinte, designemos esse conjunto por S_k . Começamos com $k = 1$. Caso o conjunto tenha cardinalidade ímpar consideremos um dos conjuntos com 3 elementos de S . Portanto, $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_j$ para um $j \in \mathbb{N}$.

Defina-se, por convenção, que o invólucro convexo de dois pontos no plano é o segmento de reta que os une. Por outro lado, o invólucro convexo de um conjunto com cardinalidade 3 é o triângulo de vértices nesses pontos. No caso de j ser um número par, uma vez conhecidos os invólucros convexos dos conjuntos S_1, S_2, \dots, S_j vamos determinar os invólucros convexos dos conjuntos $S_1 \cup S_2, S_3 \cup S_4, \dots, S_{j-1} \cup S_j$. No caso de j ser ímpar determinamos os invólucros convexos dos conjuntos $S_1 \cup S_2, \dots, S_{j-2} \cup S_{j-1}, S_j$. Repetindo recursivamente este raciocínio caso de j ser um número par vamos obter o invólucro convexo do conjunto finito de pontos S .

A complexidade do método divide-and-conquer é $\mathcal{O}(n \log n)$, [10, pág.51].

Capítulo 3

Área de um polígono

Antecipando o estudo axiomático do centroide geométrico que iremos realizar no capítulo seguinte, vamos abordar neste capítulo a axiomática de área.

Na secção 3.1 vamos abordar os axiomas que definem a função área e vamos estudar a existência de uma função área que satisfaça todos os axiomas enunciados [13], [16].

Na secção 3.2 será deduzida uma fórmula para determinar a área de qualquer polígono simples e desenvolvida em MATLAB uma função para determinar a área de qualquer polígono simples [6], [9].

3.1 Axiomática de área

Nesta secção vamos introduzir a axiomática da área de uma região poligonal e abordar o desenvolvimento de uma função área [13, pág. 649- 694], [16, pag. 184-211].

Uma região triangular é uma figura formada pela reunião de um triângulo e o seu interior. As fronteiras de um triângulo são designadas por lados do triângulo e os vértices são designados de vértices do triângulo. Uma região poligonal é uma figura no plano que pode ser expressa pela união de um número finito de regiões triangulares.

Seja \mathfrak{R} o conjunto de todas as regiões poligonais e f a função área tal que $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para desenvolver a função área teremos como por base uma série de postulados:

A1 - A função área verifica $f(R) > 0, \forall R \in \mathfrak{R}$.

A2 - Postulado da congruência: Se duas regiões triangulares são congruentes então têm a mesma área.

A3 - Postulado da aditividade: Se duas regiões poligonais se intersejam somente numa aresta, num vértice ou não se intersejam, então a área da reunião das regiões poligonais é a soma das respetivas áreas. Isto é, para $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}$ nas condições enunciadas, temos $f(R_1 \cup R_2) = f(R_1) + f(R_2)$.

Numa função área em que se verifiquem os três postulados enunciados, se multiplicarmos todas as áreas por um valor $k \in \mathbb{R}^+$ iremos obter uma outra função que satisfaz todos os postulados enunciados até ao momento. Portanto, precisamos de considerar um outro postulado que defina uma unidade de medida, de modo a estabelecer uma relação recíproca entre a área e a distância.

A4 - Se uma região poligonal quadrada $R \in \mathfrak{R}$ tem arestas de comprimento a , então $f(R) = a^2$.

A questão que agora se coloca é se podemos definir uma função área para regiões poligonais satisfazendo todos os postulados enunciados. A resposta a esta questão é afirmativa.

Baseando-nos em [17, pág.299-300], fixado um referencial, a área de um polígono P é dada por:

$$\int \int_P dx dy$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que T é um triângulo arbitrário com um vértice na origem do referencial e com uma aresta paralela ao eixo Oy , tal como se verifica na figura 3.1:

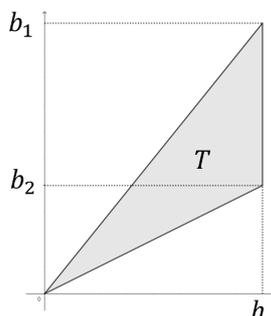


Figura 3.1 Triângulo T .

Seja $b = b_1 - b_2$. Assim vem que:

$$f(T) = \int \int_T dx dy = \int_{\frac{b_2 x}{h}}^{\frac{b_1 x}{h}} \int_0^h dx dy = \frac{1}{2} bh$$

Onde b é a base e h a altura do triângulo.

Dada uma região poligonal, podemos dividi-la num número finito de triângulos que se intersejam apenas em lados e vértices. Isto sugere-nos definir a área de uma região poligonal como a soma da área de cada um dos triângulos, pois estamos nas condições do postulado da aditividade.

Contudo, surge uma complicação, toda a região poligonal pode ser dividida em triângulos de infinitas formas diferentes. Assim, para provar a existência da função área é necessário verificar que

esta é independente do modo em que a região poligonal foi dividida. Na secção seguinte iremos demonstrar que a área de uma região poligonal é independente da triangulação considerada.

3.1.1 Independência entre função área e triangulações

Nesta secção iremos demonstrar que a área de uma região poligonal é independente da triangulação, o que nos irá permitir concluir a existência da função área [6, pág. 326-337], [9, pág. 166-167].

Toda a região poligonal R pode ser expressa como a união de um número finito de regiões triangulares, em que a intersecção de duas regiões triangulares ou é um lado, um vértice, ou um conjunto vazio. Seja K o conjunto dessas regiões triangulares, a que designamos por complexo. A disposição dos elementos de K no plano, cuja reunião é a região poligonal R , designa-se por triangulação de R .

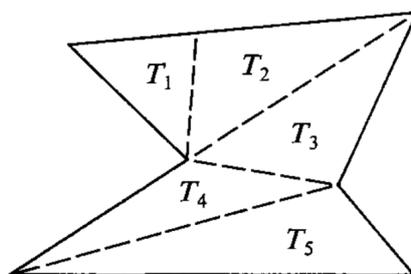


Figura 3.2 Triangulação da região R .

O complexo da triangulação representada na figura 3.2 é o conjunto:

$$K = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$$

Note que K e R são objetos distintos, R é um conjunto infinito de pontos no plano, por outro lado, K é um conjunto finito de regiões triangulares. Para distinguir o cálculo da área de uma triangulação da função área de uma região poligonal, vamos designar a área de uma triangulação por fórmula da área.

Definition 1 *A fórmula da área de uma região triangular é metade do produto entre uma base e a correspondente altura.*

Definition 2 *A fórmula da área de um complexo é a soma da fórmula da área de cada um dos elementos do complexo.*

Um complexo K designa-se por faixa complexa de um trapézio, se todos os vértices de K estão localizados na base superior ou na base inferior do trapézio, tal como se verifica na figura 3.3. Um complexo K designa-se por faixa complexa de um triângulo se todos os vértices de K estão localizados numa base ou no vértice oposto à respetiva base, tal como se verifica na figura 3.4.

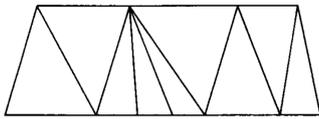


Figura 3.3 Faixa complexa de um trapézio.

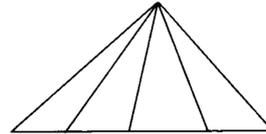


Figura 3.4 Faixa complexa de um triângulo.

As figuras 3.3 e 3.4 podem ser abordadas em simultâneo se considerarmos que um triângulo é um trapézio com base superior de comprimento zero. É desta forma que devemos interpretar o seguinte teorema.

Teorema 2 A fórmula da área da faixa complexa de um trapézio é dada por $\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$, onde b_1 e b_2 são as bases e h a altura do trapézio.

Prova:

Consideremos a faixa complexa da figura 3.5.

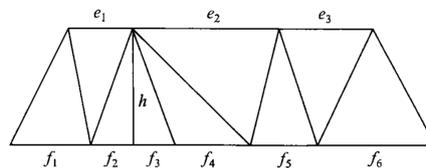


Figura 3.5 Exemplo de uma faixa complexa

Suponhamos que existem n triângulos com dois vértices na base superior do trapézio. Assim, a soma da fórmula da área dos triângulos, com dois vértices na base superior do trapézio, é dada por:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i h$$

Onde e_1, e_2, \dots, e_n são os comprimentos dos segmentos de reta nos quais a base superior do trapézio foi dividida. Por outro lado, a soma da fórmula da área dos restantes triângulos, que formam a faixa complexa, é dada por:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m f_j h$$

Onde f_1, f_2, \dots, f_m são os comprimentos dos segmentos de reta nos quais a base inferior do trapézio foi dividida. Portanto, a fórmula da área de uma faixa complexa é dada por:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i h + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m f_j h = \frac{1}{2} (b_1 + b_2) h$$

■

A decomposição de um triângulo ou de um trapézio em triângulos ou trapézios designa-se por faixa de decomposição.

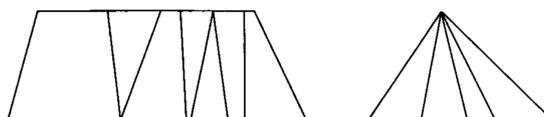


Figura 3.6 Exemplos de faixas de decomposição.

Os triângulos e trapézios de uma faixa de decomposição designam-se por partes da faixa de decomposição.

Teorema 3 *A fórmula da área de uma faixa de decomposição é a soma da fórmula da área das suas partes.*

Prova:

Se todas as partes da faixa de decomposição forem triângulos, pelo teorema 2, podemos concluir imediatamente o resultado enunciado. Caso contrário, podemos dividir cada um dos trapézios em triângulos através de uma diagonal, tal como está representado a tracejado na figura 3.7.

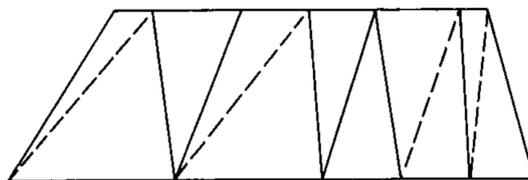


Figura 3.7 Divisão de trapézios de uma faixa de decomposição em triângulos.

Aplicando o teorema 2 vem que a fórmula da área dos trapézios que pertencem à faixa de decomposição é dada pela soma dos triângulos nos quais estes foram divididos. Assim, podemos concluir que a fórmula da área de uma faixa de decomposição é dada pela soma da fórmula da área das suas partes.



Teorema 4 Se os pontos A, D, C e os pontos A, E, B são colineares, e a reta \overline{DE} é paralela à reta \overline{BC} , então a fórmula da área do triângulo ABC é a soma da fórmula da área do triângulo ADE e do trapézio $DEBC$.

Prova:

Seja b_1 e b_2 o comprimento dos segmentos \overline{BC} e \overline{DE} , respectivamente. Seja ainda h_1 e h_2 a altura do trapézio $DEBC$ e do triângulo AED , respectivamente.

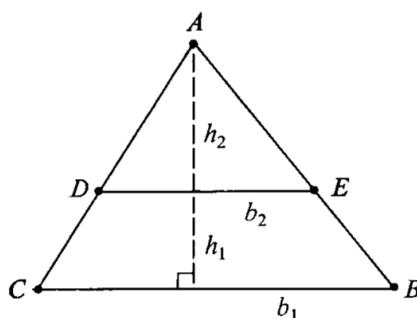


Figura 3.8 Triângulo ABC .

Uma vez que os triângulos AED e ABC são semelhantes, vem que :

$$\frac{h_1 + h_2}{h_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\Leftrightarrow b_2 h_1 + b_2 h_2 + b_1 h_1 = b_1 h_2 + b_1 h_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} b_2 h_2 + \frac{1}{2} (b_1 + b_2) h_1 = \frac{1}{2} b_1 (h_1 + h_2)$$

Portanto, podemos concluir que a fórmula da área do triângulo ABC é a soma da fórmula da área do triângulo ADE e do trapézio $DEBC$.



Designa-se por decomposição paralela de uma região triangular a decomposição de uma região triangular ou dois triângulos e num número finito de trapézios. Consideremos os exemplos de decomposições paralelas da figura 3.11.

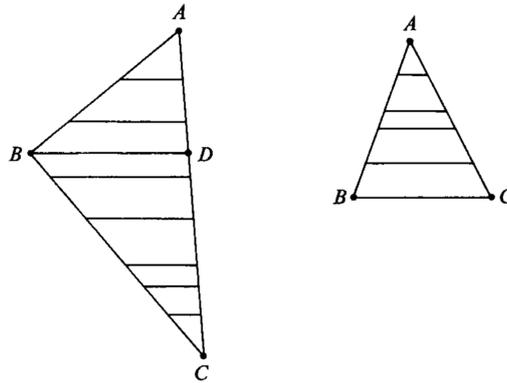


Figura 3.9 Decomposições paralelas de regiões triangulares.

Teorema 5 *A fórmula da área da decomposição paralela de um triângulo é a soma das fórmulas das áreas dos trapézios e triângulos que constituem a respectiva decomposição paralela.*

Prova:

No caso de a decomposição da região triangular ser constituída apenas por um triângulo, basta aplicar repetidamente o teorema 4.

No caso de a decomposição da região triangular ser constituída por dois triângulos, observamos que aplicando o teorema 2, a fórmula da área de ABC é a soma da fórmula da área dos triângulos ABD e BCD . Aplicando o teorema 4 ao triângulo ABD e ao triângulo BDC podemos concluir o pretendido. ■

Estão reunidas as condições para enunciar o principal resultado deste capítulo. Isto é, a independência entre a fórmula da área de uma região poligonal e a triangulação considerada.

Teorema 6 *A fórmula da área de uma região poligonal é independente da triangulação efetuada.*

Prova:

Seja R uma região poligonal no plano e sejam K_1 e K_2 duas triangulações de R distintas. Consideremos um conjunto de retas paralelas em que cada uma delas passa num vértice de K_1 , num vértice de K_2 ou num dos pontos de interseção das duas triangulações, e que para cada um destes pontos existe uma e uma só reta que os contém.

As retas irão decompor cada triângulo de K_1 numa decomposição paralela. Os triângulos e trapézios, que constituem cada um dos triângulos da decomposição paralela de K_1 , designam-se por partes primárias de K_1 .

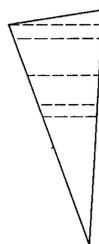


Figura 3.10 Decomposição paralela e partes primárias de um triângulo de K_1 .

Por definição, a fórmula da área da triangulação K_1 é a soma da fórmula da área dos triângulos que constituem essa triangulação. Portanto, aplicando o teorema 4, vem que:

(1) A fórmula da área de K_1 é a soma da fórmula da área das suas partes primárias.

Por outro lado, as arestas da triangulação K_2 originam faixas de decomposição das partes primárias de K_1 . Os triângulos e trapézios que constituem a faixa de decomposição das partes primárias de K_1 designam-se por partes secundárias de K_1 .

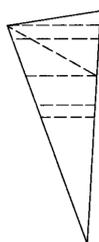


Figura 3.11 Partes secundárias.

Pelo teorema 3 vem que:

(2) A fórmula da área das partes primárias de K_1 é a soma da área das suas partes secundárias.

Ora, de (1) e (2) podemos concluir que:

(3) A fórmula da área de K_1 é igual à soma da fórmula da área das partes secundárias de K_1

Seguindo o mesmo raciocínio para K_2 podemos afirmar:

(4) A fórmula da área de K_2 é igual à soma da fórmula da área das partes secundárias de K_2 .

Uma vez que as partes secundárias de K_1 coincidem com as partes secundárias de K_2 , de (3) e (4), conclui-se que quaisquer duas triangulações distintas têm a mesma fórmula da área.

Conclui-se assim que dada uma região poligonal, qualquer que seja a triangulação considerada, a soma da área dos triângulos da triangulação depende única e exclusivamente da própria região poligonal e não da triangulação. ■

3.2 Cálculo da área de um polígono

Nesta secção vamos deduzir uma fórmula explícita para determinar a área de um polígono [6, pág.326-337] e [9, pág.166-167]. Seja P um polígono definido por:

$$P \equiv \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_k & \dots & P_{n-1} & P_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots & x_{n-1} & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_k & \dots & y_{n-1} & y_n \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

Onde os pontos estão ordenados no sentido anti-horário, P_1 é o vértice do polígono com maior abcissa e P_k o vértice do polígono com menor abcissa. Consideremos sem perda de generalidade que não existem dois vértice de P com a mesma abcissa.

Seja $T_{i,i+1}$ o trapézio formado pelos vértices $P_i(x_i, y_i)$, $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ e as respectivas projeções ortogonais sobre o eixo Ox . Para simplificar a notação consideremos $A_{i,i+1} = f(T_{i,i+1})$. Isto é, $A_{i,i+1}$ é a área do trapézio $T_{i,i+1}$. Aplicando o teorema 2, vem que :

$$A_{i,i+1} = \frac{1}{2} (y_{i+1} + y_i) (x_{i+1} - x_i)$$

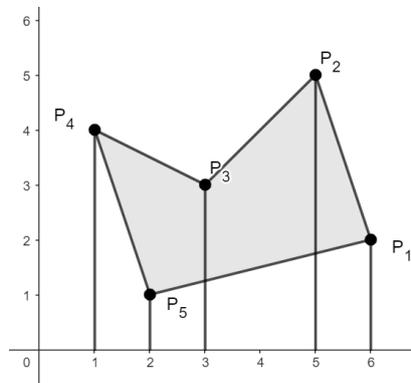


Figura 3.12 Cálculo da área de um polígono usando trapézios.

É possível observar no exemplo da figura 3.12, em que $P_k \equiv P_4$, que a área de um polígono P , dada por $f(P) = A$, é tal que:

$$A = \sum_{i=0}^{k-1} A_{i,i+1} - \sum_{i=k}^n A_{i,i+1}$$

$$\Leftrightarrow A = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2} (y_{i+1} + y_i) (x_i - x_{i+1}) - \sum_{i=k}^n \frac{1}{2} (y_{i+1} + y_i) (x_{i+1} - x_i)$$

Portanto, a área do polígono P é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (y_{i+1} + y_i) (x_i - x_{i+1}) \quad (3.2.2)$$

Designamos (3.2.2) por fórmula trapezoidal para a área de um polígono. Desenvolvendo (3.2.2) obtemos (3.2.3), designada por fórmula triangular para a área de um polígono:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n (x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j) \quad (3.2.3)$$

Podemos escrever (3.2.3) usando uma mnemônica, designada por fórmula de Shoelace:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [x_0 y_1 + x_1 y_2 + x_{n-1} y_n - y_0 x_1 - y_1 x_2 - y_{n-1} x_n] \quad (3.2.4)$$

As fórmulas (3.2.2) e (3.2.3) são válidas para qualquer polígono simples. Isto é, podem ser aplicadas quer em polígonos convexos quer em polígonos não convexos.

O cálculo computacional da área de um polígono simples pode ser feito utilizando a função *area.m*, desenvolvida no software MATLAB e com instruções no apêndice E, em que foi implementada a fórmula de Shoelace (3.2.4). Existem funções alternativas incluídas no MATLAB, como por exemplo a função *polyarea.m*.

Cálculo da área de um polígono convexo

Seja P_1 o polígono representado graficamente na figura 3.13 e definido por (3.2.5).

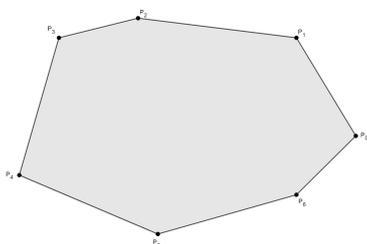


Figura 3.13 Representação gráfica de P_1 .

$$P_1 \equiv \begin{bmatrix} 20 & 17 & 9 & 5 & 3 & 10 & 17 \\ 9 & 14 & 15 & 14 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

Figura 3.14 Forma matricial de P_1 .

Aplicando a fórmula de Shoelace (3.2.4) obtemos:

$$f(P_1) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 20 & 17 & 9 & 5 & 3 & 10 & 17 \\ 9 & 14 & 15 & 14 & 7 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 133.5$$

Cálculo da área de um polígono não convexo

Seja P_2 o polígono representado graficamente na figura 3.15 e definido por (3.2.6) :

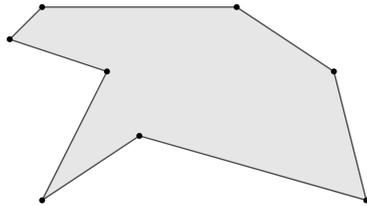


Figura 3.15 Representação gráfica de P_2 .

$$P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 14 & 13 & 10 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 8 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

Figura 3.16 Forma matricial de P_2 .

Aplicando a fórmula de Shoelace (3.2.4), obtemos:

$$f(P_2) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 7 & 14 & 13 & 10 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 8 & 8 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 39$$

Capítulo 4

Centro de um polígono

Neste capítulo vamos abordar o conceito de "centro" de um polígono. Podemos interpretar o conceito de centro de um polígono de diversas formas. Neste capítulo vamos estudar o centroide geométrico de um polígono e o centro de Chebyshev de um polígono convexo.

Na secção 4.1 iremos abordar o conceito de centroide geométrico de um polígono [5], [20] e desenvolver um método para determinar o centro geométrico de um polígono baseando-nos numa proposta de axiomática de centroide inspirada na axiomática de área, abordada no capítulo 3.

Na secção 4.2 iremos deduzir o problema linear que permite determinar o centro de Chebyshev de um polígono convexo. Como pretendemos um método possível de aplicar quer em polígonos convexos quer em polígonos não convexos iremos verificar em que condições é viável aproximar o centro de um polígono não convexo pelo centro de Chebyshev do respetivo invólucro convexo. [22], [25].

4.1 Centróide geométrico

O centroide geométrico de um polígono é a esperança matemática de um vetor aleatório real bidimensional, com suporte no polígono e distribuição uniforme, com função densidade $h((x,y)) = \frac{1}{f(P)}$, em f é a função área estudada em 3.1. Desta interpretação e das referências [5, Cap. 7.7] e [20, pág. 7-12], decorre imediatamente que o centroide, $C(x_c, y_c)$ do polígono P , é dado por:

$$x_c = \int \int_P \frac{x}{f(P)} dx dy = \frac{\int \int_P x dx dy}{\int \int_P dx dy} \quad (4.1.1)$$

$$y_c = \int \int_P \frac{y}{f(P)} dx dy = \frac{\int \int_P y dx dy}{\int \int_P dx dy} \quad (4.1.2)$$

Para além disso, esta interpretação conduz-nos a afirmar que o centroide de um polígono formado pela união de n polígonos disjuntos, P_i para $i = 1, \dots, n$, é a média dos centroides, dos polígonos P_i , com coordenadas (\bar{x}_i, \bar{y}_i) , para $i = 1, \dots, n$, ponderada pela área [5, Cap. 7.4].

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i f(P_i)}{\sum_{i=1}^n f(P_i)} \quad y = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i f(P_i)}{\sum_{i=1}^n f(P_i)} \quad (4.1.3)$$

Tal como fizemos para a área, gostaríamos de ter uma axiomática para o centroide geométrico de um polígono. Contudo, não foi encontrada nenhuma abordagem axiomática para o conceito de centroide geométrico. Portanto, vamos conjecturar uma axiomática para centroide geométrico.

Seja \mathfrak{R} o conjunto de todas as regiões poligonais e g a função centroide tal que $g : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Para desenvolver a função centroide teremos por base uma série de postulados. Antes de os enunciar é de destacar que o trabalho realizado nesta secção é apenas uma abordagem intuitiva para a axiomática de centroide.

A1 - O centroide de uma região triangular com vértices $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$ é dado por:

$$g(P_1P_2P_3) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

A2 - Seja R_2 uma região poligonal obtida por translação, de vetor \vec{u} , da região poligonal R_1 , então $g(R_2)$ pode ser obtido de $g(R_1)$ por uma translação de vetor \vec{u} .

A3 - Se uma região poligonal R é a reunião das regiões poligonais R_1 e R_2 , que se interseam apenas em vértices ou arestas, então $g(R)$ é a média dos centroides das regiões R_1 e R_2 ponderada pela área. Isto é, para $R = R_1 \cup R_2$ com R_1 e R_2 nas condições enunciadas, temos que:

$$g(R) = \frac{g(R_1)f(R_1) + g(R_2)f(R_2)}{f(R_1) + f(R_2)}$$

Este postulado é consequência imediata de (4.1.3).

A4 - Toda a região poligonal está localizada num referencial cartesiano ortonormado.

Dada uma região poligonal, podemos dividi-la num número finito de regiões triangulares disjuntas. Para cada triângulo as coordenadas do centroide são definidas como a média das coordenadas dos respetivos vértices. Uma vez que estamos nas condições do postulado A3 podemos definir o centroide

de uma região poligonal como a média dos centroides de cada triângulo da triangulação ponderada pelas áreas.

4.1.1 Cálculo do centroide geométrico de um polígono

De seguida vamos descrever um método recursivo para determinar o centroide geométrico de qualquer polígono, tendo como base a axiomática de centroide proposta na secção 4.1.

Algoritmo 1: Método de determinação do centroide geométrico de um polígono simples

INPUT: Polígono P .

OUTPUT: Centróide geométrico $g(P)$.

- 1: Classificar vértices do polígono P como pontos extremos ou não pontos extremos do invólucro convexo de P .
- 2: Se todos os vértices de P forem pontos extremos do respetivo invólucro convexo, basta definir uma triangulação $\{T_1, \dots, T_n\}$ tal que $P = \cup_{i=1}^n T_i$ e determinar o centroide geométrico de cada triângulo para posteriormente fazer a média ponderada pela área. Isto é:

$$g(P) = \frac{\sum_{i=1}^n f(T_i)g(T_i)}{\sum_{i=1}^n f(T_i)} \quad (4.1.4)$$

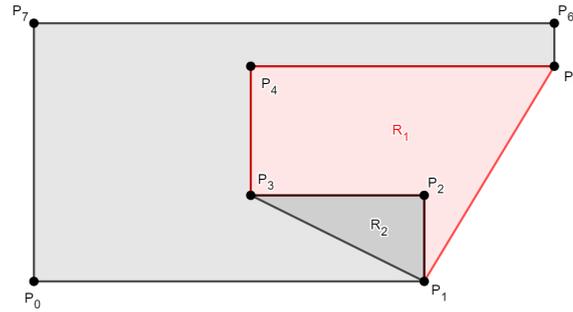
- 3: Caso contrário, podemos escrever o invólucro convexo de P como a reunião de P com as regiões exteriores a P mas interiores a $\text{conv}(P)$ designadas por R_i . Aplicando o algoritmo de modo recursivo a cada uma dessas regiões R_i iremos eventualmente chegar a uma região convexa.

Vamos analisar um exemplo de aplicação do método descrito para determinar o centroide geométrico de um polígono, que tem como base a axiomática descrita na secção 4.1.

Exemplo de aplicação:

Seja P o polígono definido por (4.1.5) e representado graficamente na figura 4.1.

$$P \equiv \begin{bmatrix} & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \\ 1 & 10 & 10 & 6 & 6 & 13 & 13 & 1 & \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 6 & 6 & 7 & 7 & \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

Figura 4.1 Polígono P .

Seja ext_P um vetor 1×8 que identifica se o ponto do polígono P da correspondente coluna é ou não ponto extremo de $\text{conv}(P)$. Partindo do vetor ext_P é possível identificar o polígono que delimita o conjunto de pontos exteriores ao polígono P e interiores a $\text{conv}(P)$, a que designamos de polígono R_1 . Neste exemplo, o polígono R_1 é definido por (4.1.6) e representado graficamente na figura 4.1.

$$ext_P \equiv \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1 \equiv \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 10 & 10 & 6 & 6 & 13 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

Deste modo, podemos escrever o centroide do polígono P em função dos centroides e áreas dos polígonos $\text{conv}(P)$ e R_1 :

$$g(P) = \frac{f(\text{conv}(P))g(\text{conv}(P)) - f(R_1)g(R_1)}{f(P)} \quad (4.1.7)$$

Identificando agora os vértices de R_1 que são pontos extremos de $\text{conv}(R_1)$, vamos obter o vetor ext_{P_1} . Analogamente, partindo do vetor ext_{P_1} é possível identificar o polígono que delimita o conjunto de pontos exteriores ao polígono R_1 e interiores a $\text{conv}(R_1)$, a que designamos de polígono R_2 . Este polígono é definido por (4.1.8) e representado graficamente na figura 4.1.

$$ext_{P_1} \equiv \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 \equiv \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 10 & 10 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.1.8)$$

Deste modo, podemos escrever o centroide do polígono R_1 em função dos centroides e áreas dos polígonos $\text{conv}(R_1)$ e R_2 :

$$g(R_1) = \frac{f(\text{conv}(R_1))g(\text{conv}(R_1)) - f(R_2)g(R_2)}{f(R_1)} \quad (4.1.9)$$

Pelo que, usando (4.1.9) e (4.1.7), vem que:

$$g(P) = \frac{f(\text{conv}(P))g(\text{conv}(P)) - [f(\text{conv}(R_1))g(\text{conv}(R_1)) - f(R_2)g(R_2)]}{f(P)} = (5.2333, 4.0333)$$

4.2 Centro de Chebyshev

Nesta secção vamos estudar de que modo podemos determinar o Centro de Chebyshev de um polígono convexo através da resolução de um problema linear [25, pág. 269 - 288], [22, pág. 45].

Seja P um polígono convexo definido por (4.2.1).

$$P \equiv \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_{n-1} & P_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_{n-1} & y_n \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

Pretendemos definir o polígono P por um conjunto de n restrições lineares, em que cada restrição está associada a uma das arestas do polígono.

Seja $\vec{u}_i = \overrightarrow{P_i P_{i+1}}$, isto é $\vec{u}_i(x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i)$ e seja $\vec{v}_i(y_{i+1} - y_i, x_i - x_{i+1})$. Portanto, $\vec{u}_i \perp \vec{v}_i$.

Seja $P_*(x, y)$ um ponto arbitrário no plano que satisfaz a restrição associada à aresta $[P_i P_{i+1}]$.

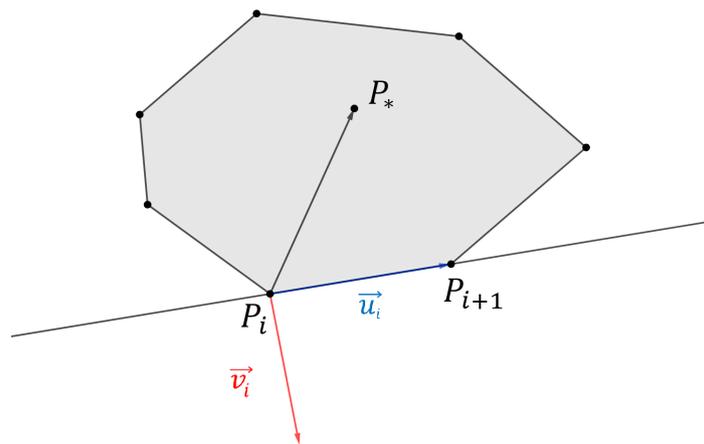


Figura 4.2 Restrição associada à aresta $P_i P_{i+1}$.

A restrição associada à aresta $[P_i P_{i+1}]$ é definida por:

$$\vec{v}_i \cdot \overrightarrow{P_i P_{i+1}} \leq 0 \Leftrightarrow v_i^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq v_i^T \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

Portanto, podemos definir o polígono P pelo seguinte conjunto de restrições lineares:

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : v_i^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq v_i^T \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, n \right\} \quad (4.2.2)$$

Note que, uma vez que $[P_n P_1]$ é uma aresta do polígono, estabelecemos por convenção que $P_{n+1} \equiv P_1$.

O centro de Chebyshev de um polígono convexo é definido como o ponto que admite a bola de maior raio inscrita no polígono. Uma bola de centro $P_C(x_c, y_c)$ e raio r é definida por:

$$B = \{P_C + \varepsilon : \|\varepsilon\|_2 \leq r\}$$

Portanto, todo o ponto da bola maximal inscrita no polígono tem de verificar (4.2.2):

$$v_i^T \left(\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} + \varepsilon \right) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Onde $b_i = v_i^T \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$. Assim, vem que:

$$\sup_{\|\varepsilon\|_2 \leq r} \left\{ v_i^T \left(\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} + \varepsilon \right) \right\} \leq b_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow v_i^T \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} + r \|v_i\|_2 \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Portanto, determinar o centro de Chebyshev de um polígono convexo definido por (4.2.1) consiste em resolver o problema linear (4.2.3).

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -r \\ \text{s.a} \quad & v_i^T \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} + r \|v_i\|_2 \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Exemplo de aplicação:

Seja P o polígono convexo definido por (4.2.4) e representado graficamente na figura 4.3.

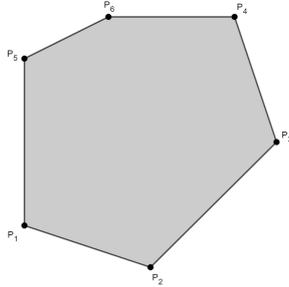


Figura 4.3 Representação gráfica de P .

$$P \equiv \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \\ 2 & 5 & 8 & 7 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 7 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

Figura 4.4 Forma matricial de P .

O problema linear (4.2.5) permite determinar o centro de Chebyshev do polígono P .

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -r \\ \text{s.a} & \begin{bmatrix} 3.16 & -1.0 & -3.0 \\ 4.24 & 3.00 & -3.0 \\ 3.16 & 3.00 & 1.00 \\ 3.00 & 0.00 & 3.00 \\ 2.23 & -1.0 & 2.00 \\ 4.00 & -4.00 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \\ 28 \\ 21 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix} \end{array} \quad (4.2.5)$$

Usando a função *centchebyshev.m*, desenvolvida utilizando o software MATLAB e com instruções em **G**, dado como input o polígono P obtemos a solução do problema linear (4.2.5):

$$\begin{cases} r = 2.636 \\ x_c = 4.636 \\ y_c = 4.364 \end{cases}$$

Isto é, a bola maximal inscrita no polígono P tem centro $(4.636, 4.364)$ e raio 2.636. Portanto, $(4.636, 4.364)$ é o centro de Chebyshev do polígono P .

4.2.1 Limitações no caso não convexo

Para um polígono não convexo não é possível fazer a descrição do polígono através de restrições lineares. Assim, torna-se impraticável a determinação do centro de Chebyshev de um polígono não convexo através da resolução de um problema linear nos moldes apresentados na secção 4.2.

Em alguns casos particulares um polígono não convexo pode ser relativamente bem aproximado pelo invólucro convexo. Deste modo, surge a questão se é possível aproximar o centro de um polígono não convexo através do cálculo do centro de Chebyshev do invólucro convexo. A resposta a esta questão é afirmativa se for possível aproximar, relativamente bem, o polígono pelo invólucro convexo. Uma forma de verificar se um polígono pode ser relativamente bem aproximado pelo invólucro convexo consiste em comparar a área do polígono com a área do seu invólucro convexo.

Seja $R = \frac{f(P)}{f(\text{CONV}(P))}$, onde f é a função área. Para $R \approx 1$ podemos utilizar esta heurística e aproximar o centro do polígono através do cálculo do centro de Chebyshev do invólucro convexo do polígono. Para valores de R muito inferiores a 1, a proximidade do centro de Chebyshev com o centro de um polígono P depende da geometria do polígono.

Algoritmo 2: Método de determinação do centro de Chebyshev do invólucro convexo

- 1: Calcular área do polígono P , $f(P)$.
 - 2: Calcular área do invólucro convexo do polígono P , $f(\text{conv}(P))$.
 - 3: Calcular $R = \frac{f(P)}{f(\text{CONV}(P))}$.
 - 4: Se $R \approx 1$, podemos aproximar, relativamente bem, o centro do polígono P pelo centro de Chebyshev de $\text{conv}(P)$.
-

4.3 Implementação prática do centroide geométrico e do centro de Chebyshev

Para cada um dos polígonos obtidos no anexo A vamos determinar computacionalmente, utilizando o software MATLAB, o centroide geométrico (●) bem como o centro de Chebyshev dos respetivos invólucros convexos (▲). Para determinar o centroide geométrico utilizou-se a função *computeAC.m*, com instruções no anexo F, onde foi implementado o algoritmo 1. Para determinar o centro de Chebyshev do invólucro convexo dos polígonos implementou-se a função *centchebyshev.m*, com instruções no apêndice G ao invólucro convexo do polígono, que foi obtido pelo Varrimento de Graham, descrito na secção 2.2.1.

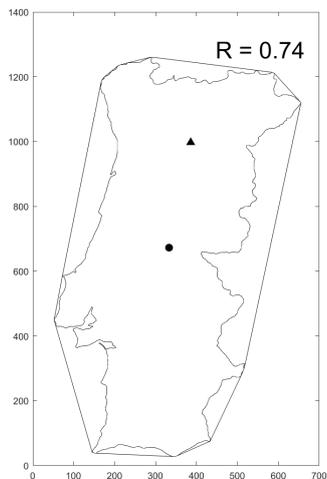


Figura 4.5 Output para Portugal.

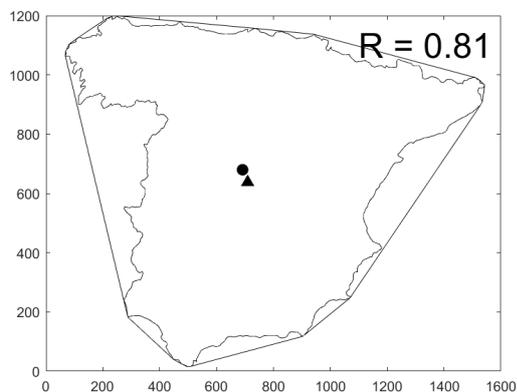


Figura 4.6 Output para Espanha.

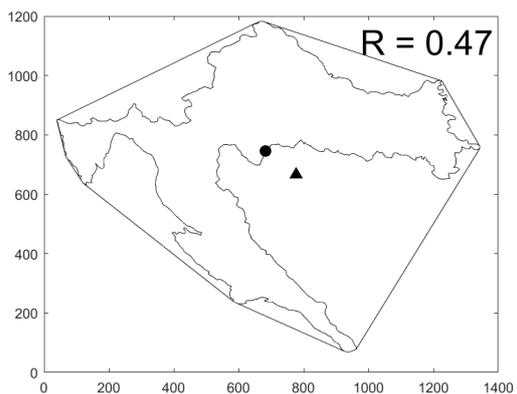


Figura 4.7 Output para Croácia.

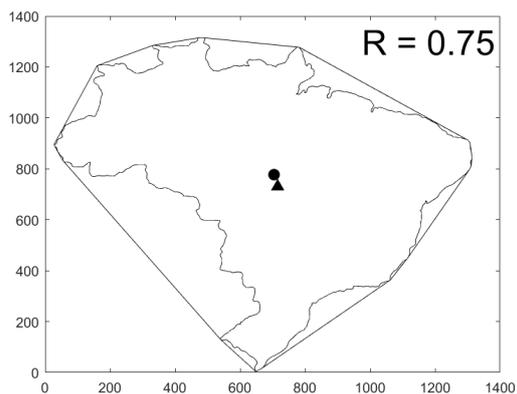


Figura 4.8 Output para Brasil.

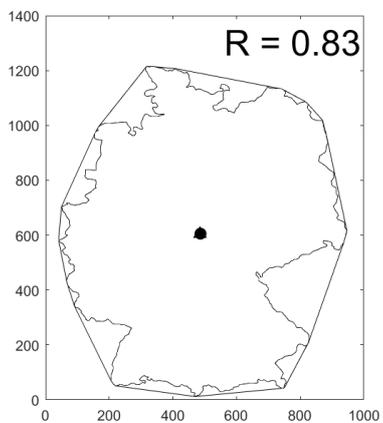


Figura 4.9 Output para Alemanha.

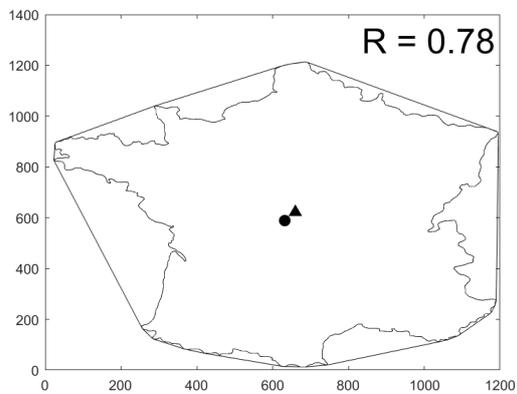


Figura 4.10 Output para França.

Podemos observar que nos exemplos com valores de R mais próximos de 1 o centroide geométrico (●) se encontra relativamente próximo do centro de Chebyshev do invólucro convexo do polígono (▲). Contudo, é geometricamente possível para um R próximo de 1 obter o centro de Chebyshev do invólucro convexo no exterior do polígono.

Podemos também observar na figura 4.7 que o centro de chebyshev do invólucro convexo do polígono delimitador da Croácia continental se localiza no exterior do polígono, e para além disso, o centroide geométrico do polígono encontra-se bastante próximo da fronteira do polígono. Desta forma surge a necessidade de estudar uma alternativa aos métodos abordados nesta secção.

Capítulo 5

Eixo Medial e Esqueleto Retilíneo

No capítulo anterior foram estudados métodos para determinar o centroide geométrico e o centro de Chebyshev. Tal como vimos na secção 4.3, para certos polígonos não convexos, estes pontos podem localizar-se no exterior do polígono. Deste modo, surge a necessidade de abordar estruturas e métodos alternativos com viabilidade de aplicação em qualquer polígono, independentemente da sua geometria. Portanto, neste capítulo iremos estudar as estruturas eixo Medial e esqueleto retilíneo, bem como descrever e implementar um método alternativo designado por método Garcia-Castellanos & Lombardo.

Na secção 5.1 será estudado o Diagrama de Voronoi que nos vai permitir compreender melhor o conceito de eixo medial. Serão abordadas algumas das suas propriedades mais relevantes e será descrito um algoritmo incremental para determinar o Diagrama de Voronoi de um conjunto finito de pontos no plano [8], [10].

Na secção 5.2 será introduzido o conceito de eixo medial de um polígono simples partindo do conceito de diagrama de Voronoi. Serão analisadas as diferenças e semelhanças entre os conceitos de eixo medial de um polígono convexo e de um polígono não convexo [8]. Para além disso, será descrito um método para determinar o eixo medial de um polígono convexo. Para além disso, será descrito um método para determinar o eixo medial de um polígono convexo [10].

Na secção 5.3 será introduzido o conceito de esqueleto reto de um polígono e será analisado de que forma este se relaciona com o eixo medial de um polígono [19],[23]. De seguida, será enunciado um método para determinar o esqueleto reto de um polígono [1], [10].

Na secção 5.4 será abordado o método de Garcia-Castellanos & Lombardo que consiste em determinar o ponto no interior do polígono mais distante da sua fronteira de entre uma seleção de pontos numa malha pré-definida [12].

5.1 Diagrama de Voronoi de um conjunto finito de pontos

Nesta secção vamos abordar o conceito de diagrama de Voronoi de um conjunto finito de pontos, bem como enunciar algumas propriedades e resultados [8, pág. 147-151], [10, pág. 98-104].

O diagrama de Voronoi divide o plano em regiões com base na localização de pontos específicos no plano. Esses pontos são designados por pontos geradores e permitem determinar o conjunto de pontos no plano que estão mais próximos de um determinado ponto gerador do que de todos os restantes.

Seja $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto de pontos geradores no plano com cardinalidade n . O diagrama de Voronoi do conjunto gerador \mathbf{S} denota-se por $Vor(\mathbf{S})$ e é constituído pelo conjunto de pontos no plano que está à mesma distância de dois ou mais pontos geradores, dividindo o plano em n regiões, designadas por regiões de Voronoi. A região de Voronoi de um ponto gerador $P_k \in \mathbf{S}$ denota-se por $\vartheta(P_k)$ e é definida por:

$$\vartheta(P_k) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - P_k\|_2 \leq \|x - P_i\|_2, \forall P_i \in \mathbf{S}\}$$

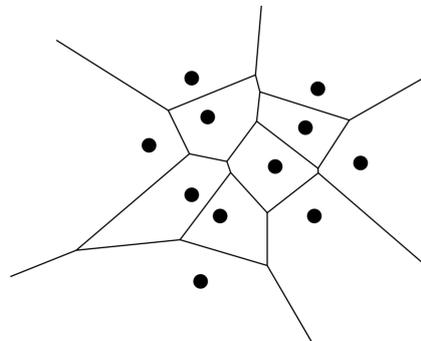


Figura 5.1 Exemplo de um diagrama de Voronoi.

Seja $\mathbf{S} = \{P_1, P_2\}$, o diagrama de Voronoi do conjunto gerador \mathbf{S} é formado pela mediatriz do segmento de reta $[P_1P_2]$, que divide o plano em dois semi-planos. Denotemos o semi-plano que contém o ponto P_1 por $h(P_1, P_2)$, e o semi-plano que contém o ponto P_2 por $h(P_2, P_1)$. Portanto, podemos definir os semi-planos $h(P_1, P_2)$ e $h(P_2, P_1)$ por:

$$h(P_1, P_2) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - P_1\| \leq \|x - P_2\|\}$$

$$h(P_2, P_1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - P_2\| \leq \|x - P_1\|\}$$

Note que um ponto $Q \in \mathbb{R}^2$ pertence ao semi-plano $h(P_1, P_2)$ se e só se a distância de Q a P_1 for inferior à distância de Q a P_2 . Aplicando um raciocínio análogo, para um conjunto de pontos geradores com cardinalidade n , vem que:

$$\vartheta(P_k) = \bigcap_{j=1 \wedge j \neq k}^n h(P_k, P_j)$$

Isto é, $\vartheta(P_k)$ é a interseção de todos os semi-planos $h(P_k, P_i)$ para $i = 1, \dots, n$ e $i \neq k$. Uma vez que $\vartheta(P_k)$ é a interseção de $n - 1$ semi-planos, $\vartheta(P_k)$ terá no máximo $n - 1$ vértices e $n - 1$ arestas. Para além disso, uma vez que a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo, podemos afirmar que todas as regiões de Voronoi são conjuntos convexos. De seguida, vamos tentar compreender melhor a estrutura do Diagrama de Voronoi de um conjunto finito de pontos no plano.

Para $\mathbf{S} = \{P_1, P_2, P_3\}$, com P_1, P_2 e P_3 não colineares, o diagrama de Voronoi do conjunto gerador \mathbf{S} é formado por três semi-retas das mediatrizes dos segmentos $[P_1P_2]$, $[P_1P_3]$ e $[P_2P_3]$, pois as mediatrizes de cada um dos lados de um triângulo se interseçam num único ponto (Elementos, Book IV, Proposição 5). De facto, um vértice do diagrama de Voronoi é o centro de um círculo que passa em pelo menos três pontos geradores.

Teorema 7 *Seja \mathbf{S} um conjunto finito de pontos e $Vor(\mathbf{S})$ o respetivo Diagrama de Voronoi. O ponto P é um vértice de $Vor(\mathbf{S})$ se e só se existe um círculo, de centro P , que passe em pelo menos 3 pontos geradores e não contém nenhum ponto gerador no seu interior.*

Prova:

(\Rightarrow) Seja P um vértice de $Vor(\mathbf{S})$. Então P pertence a pelo menos três regiões de Voronoi. Sejam essas regiões $Vor(P_1)$, $Vor(P_2)$ e $Vor(P_3)$. O que significa que P está à mesma distância dos pontos geradores P_1 , P_2 e P_3 . Se existisse um gerador no interior do círculo as regiões $Vor(P_1)$, $Vor(P_2)$ e $Vor(P_3)$ não se interseariam em P .

(\Leftarrow) Suponhamos agora que existe um círculo centrado em P que passa nos pontos geradores $P_1, P_2, P_3 \in \mathbf{S}$ e que não existe nenhum gerador no interior do círculo. Então, P está à mesma distância de P_1, P_2 e P_3 , pelo que pertence à fronteira das regiões de Voronoi $Vor(P_1)$, $Vor(P_2)$ e $Vor(P_3)$. Portanto, P é um vértice de $Vor(\mathbf{S})$. ■

A menos que todos os pontos geradores sejam colineares, um Diagrama de Voronoi é formado por segmentos de reta e semi-retas. Caso o conjunto gerador seja formado por n pontos colineares então o diagrama de Voronoi é formado por $n - 1$ retas paralelas.

Teorema 8 *Seja \mathbf{S} um conjunto finito de pontos geradores no plano. Se todos os pontos geradores são colineares então $Vor(\mathbf{S})$ é formado por $n - 1$ retas paralelas. Caso contrário, $Vor(\mathbf{S})$ é conexo e é formado por segmentos de reta e semi-retas.*

Prova:

É trivial mostrar que o diagrama de Voronoi de um conjunto de n pontos todos colineares é formado por $n - 1$ retas paralelas.

Provemos que caso contrário, $Vor(\mathbf{S})$ é formado por segmentos de reta e semi-retas, que são partes das mediatrizes dos pares de pontos do conjunto gerador \mathbf{S} . Suponhamos por absurdo que $Vor(\mathbf{S})$ é constituído por uma reta e . Seja e a fronteira das regiões de Voronoi $\vartheta(P_i)$ e $\vartheta(P_j)$. Seja $P_k \in \mathbf{S}$ um ponto que não é colinear com P_i e P_j . A mediatriz do segmento $[P_j P_k]$ não é paralela a e e, por isso, intersesta e . Então, a parte da reta e no interior do semi-plano $h(P_k, P_j)$ não pode ser fronteira da região de Voronoi $\vartheta(P_j)$, porque está mais próxima de P_k do que de P_j . O que entra em contradição com a suposição inicial.

Resta-nos provar que $Vor(\mathbf{S})$ é conexo. Suponhamos por absurdo que $Vor(\mathbf{S})$ não é conexo. Então existe uma região de Voronoi $\vartheta(P_i)$ que divide o plano em dois semi-planos. Uma vez que as regiões de Voronoi são convexas, têm de existir duas retas paralelas. O que nos leva a uma contradição, pois provámos anteriormente que o Diagrama de Voronoi para um conjunto de pontos geradores que não sejam todos colineares não é constituído por retas.

Portanto, podemos concluir que para um conjunto de pontos geradores não colineares $Vor(\mathbf{S})$ é conexo. ■

Agora que compreendemos melhor a estrutura de um Diagrama de Voronoi vamos analisar a sua complexidade, isto é, vamos analisar o número máximo de vértices e de arestas do Diagrama de Voronoi de um conjunto gerador de pontos com cardinalidade n .

Teorema 9 *Seja $n \geq 3$, o número de vértices do diagrama de Voronoi de um conjunto de pontos com cardinalidade n tem no máximo $2n - 5$ vértices e $3n - 6$ arestas.*

Prova:

Se todos os pontos geradores forem colineares, pelo teorema 8 verifica-se o resultado enunciado. Por isso, vamos assumir que o conjunto gerador \mathbf{S} não é formado apenas por pontos colineares.

Seja $Vor(\mathbf{S})$ formado por n_v vértices e n_a arestas. Para provar o resultado enunciado vamos usar a fórmula de Euler, [7, pag. 20-24], que para um grafo planar conexo, com v vértices, a arestas e f faces, estabelece a seguinte relação:

$$v - a + f = 2 \quad (5.1.1)$$

Uma vez que $Vor(\mathbf{S})$ é formado por um número finito de semi-retas não podemos interpretar o diagrama de Voronoi de \mathbf{S} como um grafo. Para contornar isso, vamos adicionar um vértice P_∞ que será a interseção das semi-retas de $Vor(\mathbf{S})$, tal como ilustra a figura 5.2.

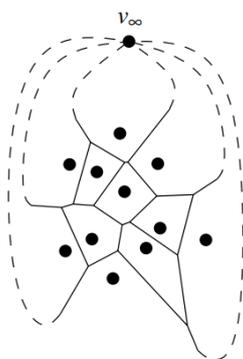


Figura 5.2 Grafo conexo associado a $Vor(\mathbf{S})$.

Agora podemos aplicar a fórmula de Euler (5.1.1) ao grafo representado na figura 5.2:

$$(n_v + 1) - n_a + n = 2 \quad (5.1.2)$$

Ao somar os graus dos vértices do grafo estamos a contar cada aresta duas vezes, e uma vez que cada vértice tem no mínimo grau 3, vem que:

$$\frac{3(n_v + 1)}{2} \leq n_a \quad (5.1.3)$$

De (5.1.2) obtemos $n_v + 1 = 2 + n_a - n$, pelo que usando (5.1.3) vem que:

$$n_a \leq 3n - 6 \quad (5.1.4)$$

Usando (5.1.3) e (5.1.4) vem que:

$$n_v \leq 2n - 5$$

■

Surge agora a questão de como caracterizar os vértices e as arestas do Diagrama de Voronoi de um conjunto finito de pontos. O ponto P é um vértice de $Vor(\mathbf{S})$ se e só se se existe uma circunferência de centro P que passe em pelo menos três pontos de \mathbf{S} e não contém nenhum elemento de \mathbf{S} no seu interior. Já um ponto Q pertence a uma aresta de $Vor(\mathbf{S})$ se e só se existe uma circunferência de centro Q que passe em dois pontos de \mathbf{S} e não contém nenhum elemento de \mathbf{S} no seu interior.

5.1.1 Método incremental para determinar o diagrama de Voronoi

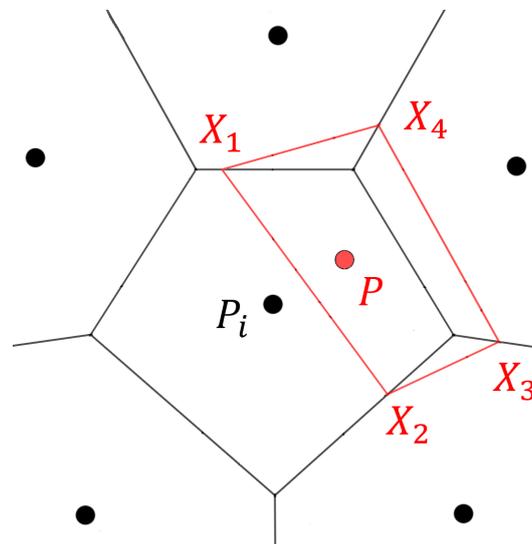
Agora que conhecemos algumas propriedades do Diagrama de Voronoi, vamos descrever um algoritmo incremental que permite determinar o Diagrama de Voronoi de um conjunto gerador formado por um número finito de pontos [10, pag. 104-107].

Suponhamos que é conhecido o Diagrama de Voronoi de um conjunto gerador com cardinalidade k . Isto é, conhecemos o Diagrama de Voronoi do conjunto gerador $S_k = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$. Pretendemos determinar o diagrama de Voronoi do conjunto $S_k \cup P$. Para isso, apenas é necessário determinar $\vartheta(P)$ e realizar as devidas alterações em $Vor(S_k)$.

Na figura 5.3 podemos observar graficamente a aplicação do método num exemplo particular.

Algoritmo 3: Método incremental para determinar o Diagrama de Voronoi

- 1: Determinar a região de Voronoi de $Vor(S_k)$ em que está contido o ponto P . Assuma-se, sem perda de generalidade, que P não pertence a uma aresta nem é vértice de $Vor(S_k)$. Seja $\vartheta(P_i)$ a região de Voronoi que contém o ponto P .
- 2: Determinar a mediatriz do segmento $[P_iP]$. Uma vez que as regiões de Voronoi são convexas, a mediatriz do segmento P_iP intersesta as arestas delimitadoras de $\vartheta(P_i)$ em exatamente dois pontos. Sejam esses pontos X_1 e X_2 , tal que o triângulo PX_1X_2 está definido por ordem anti-horária. O segmento de reta $[X_1X_2]$ divide a região de Voronoi $\vartheta(P_i)$ em duas regiões, sendo que uma delas está contida na região $\vartheta(P)$ de $Vor(S_k \cup P)$. O ponto X_2 localiza-se na aresta que separa a região de Voronoi $\vartheta(P)$ da região de Voronoi adjacente. Designe-se essa região de Voronoi por $\vartheta(P_j)$.
- 3: Determinar a mediatriz do segmento $[P_jP]$. A mediatriz do segmento $[P_jP]$ intersesta a fronteira de $\vartheta(P_j)$ em dois pontos, em X_2 e noutro ponto a que designamos X_3 . O segmento de reta $[X_2X_3]$ divide a região de Voronoi $\vartheta(P_j)$ em duas regiões, em que uma delas pertence a $\vartheta(P)$. Repetindo este procedimento, iremos determinar uma sequência de segmentos de reta que define $\vartheta(P)$.
- 4: Por último, descartamos o subdiagrama $Vor(S_k)$ no interior de $\vartheta(P)$ de modo a obter o diagrama de Voronoi do conjunto gerador de pontos $S_k \cup P$.

Figura 5.3 Cálculo do diagrama de Voronoi de $S_k \cup P$.

Uma vez que é possível determinar o diagrama de Voronoi de um conjunto gerador formado por dois pontos, aplicando recursivamente este método, podemos determinar o diagrama de Voronoi de qualquer conjunto gerador de pontos no plano.

Implementação prática do Diagrama de Voronoi

Seja $S = \{(1, 1), (2, 4), (5, 2), (7, 5), (9, 4), (5, 5), (11, 4), (10, 6), (6, 7), (4, 9), (8, 8)\}$. O Diagrama de Voronoi do conjunto gerador S , designado por $Vor(S)$, foi determinado usando o software MATLAB através do código *voronoidiag.m*, com instruções no anexo H, que é uma aplicação da função *voronoi.m* incorporada neste software. Na figura 5.4 é possível observar o Diagrama de Voronoi do conjunto gerador de pontos S .

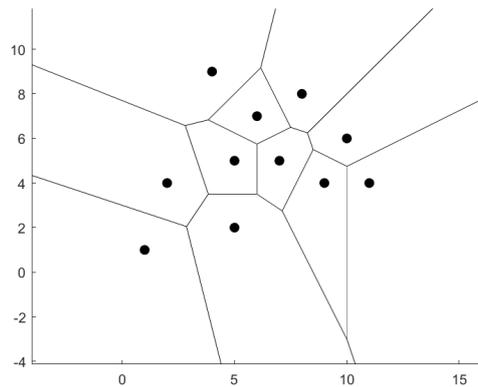


Figura 5.4 Diagrama de Voronoi do conjunto gerador S .

5.2 Eixo Medial

Nesta secção vamos abordar o conceito de eixo medial de um polígono convexo e de um polígono não convexo, descrevendo-o utilizando o conceito de diagrama de Voronoi. [10, Cap. 5], [8, pág.170].

O eixo medial de um polígono P é o conjunto de pontos, no interior de P , que são centros de circunferências maximais tangentes às arestas de P em pelo menos dois pontos e inscritas no polígono P .

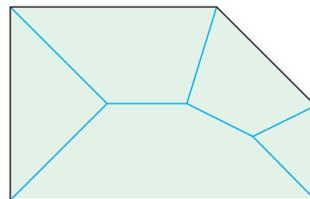


Figura 5.5 Eixo medial de um polígono convexo.

Da definição de eixo medial vem como consequência as seguintes propriedades.

Propriedades:

- Os vértices do eixo medial de um polígono P são a interseção de k segmentos de reta e são designados por vértices de grau k . Os vértices de grau k , do eixo medial de um polígono P , são centros de circunferências maximais tangentes à fronteira de P em k pontos distintos.
- Os segmentos de reta, do eixo medial de um polígono P , são formados pelo conjunto de pontos que são centros de circunferências maximais tangentes à fronteira de P em dois e dois só pontos distintos.

O eixo medial de um polígono convexo pode ser descrito usando o conceito de Diagrama de Voronoi estudado na secção 5.1. Essa descrição apresenta algumas diferenças dependendo se o polígono é côncavo ou convexo.

5.2.1 Eixo Medial de um polígono convexo

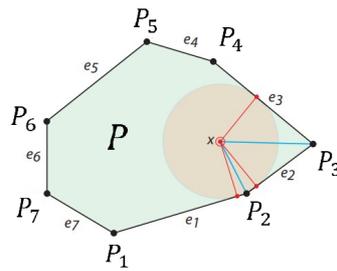
O eixo medial de um polígono convexo P pode ser descrito como o Diagrama de Voronoi, no interior do polígono, do conjunto gerador formado pelas arestas de P . Deste modo, o eixo medial de um polígono convexo P divide o interior do polígono em regiões de tal modo que dois pontos distintos que pertençam à mesma região têm como aresta de P mais próxima a mesma aresta. Tal propriedade verifica-se para qualquer polígono convexo e é consequência imediata da definição do diagrama de Voronoi.

O eixo medial de um polígono convexo é formado por segmentos de reta, onde cada vértice do polígono é extremidade de um e um só segmento de reta do respetivo eixo medial.

Método para determinar o eixo medial de um polígono convexo

Nesta secção vamos descrever um método incremental para determinar o eixo medial de um polígono convexo [10, pág. 122 -124].

Seja P o polígono definido pela sequência ordenada de pontos P_1, \dots, P_n e representado graficamente na figura 5.6.

Figura 5.6 Polígono P .

O segmento do eixo medial de P incidente no vértice P_i é a bissetriz do ângulo $P_{i-1}\hat{P}_iP_{i+1}$. Isto é, é o conjunto de pontos que admitem uma circunferência maximal tangente às arestas $e_{i-1} = [P_{i-1}P_i]$ e $e_i = [P_iP_{i+1}]$. Suponhamos que as bissetrizes de cada ângulo incidente nos vértices do polígono se prolongam para o interior do mesmo à mesma velocidade. Num determinado instante t o primeiro par de bissetrizes interseeta-se. Como seria de esperar o par que se interseeta corresponde à interseção de bissetrizes de ângulos adjacentes. No polígono P , tal como se verifica na figura 5.6, as bissetrizes que se interseeta primeiro são as bissetrizes dos ângulos incidentes nos vértices P_2 e P_3 .

Seja X o ponto de interseção dessas mesmas bissetrizes. Geralmente, o ponto de interseção X constitui um vértice de grau 3, onde existe uma circunferência maximal de centro X que é tangente a três arestas do polígono. No exemplo considerado, essas arestas são e_1, e_2 e e_3 .

O segmento incidente em X , que se irá propagar posteriormente, será a bissetriz do ângulo incidente no ponto de interseção das retas que contêm as arestas e_2 e e_3 . Designemos esse ponto por $P_{1,3}$.

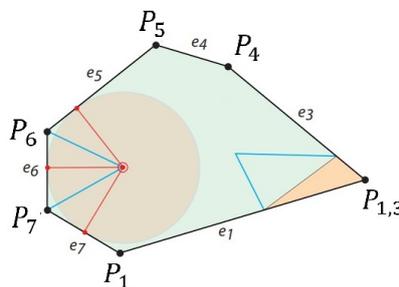


Figura 5.7 Segunda interseção de bissetrizes.

Consideramos agora, o polígono Q definido pela sequência de pontos: $P_1, P_{1,3}, P_4, P_5, P_6, P_7$. Este polígono foi obtido removendo os vértices P_2 e P_3 , adicionando o vértice $P_{1,3}$.

De seguida, aplicamos recursivamente o raciocínio descrito ao polígono Q . Na figura 5.7 é possível observar que as bissetrizes que primeiro se interseitam são as bissetrizes dos ângulos incidentes nos vértices P_6 e P_7 .

Prolongando as arestas e_5 e e_7 obtém-se o vértice $P_{5,7}$, aplicando um raciocínio análogo ao anterior, passamos a considerar o polígono definido pela sequência ordenada de pontos $P_1, P_{1,3}, P_4, P_5, P_{5,7}$, representado graficamente na figura 5.8.

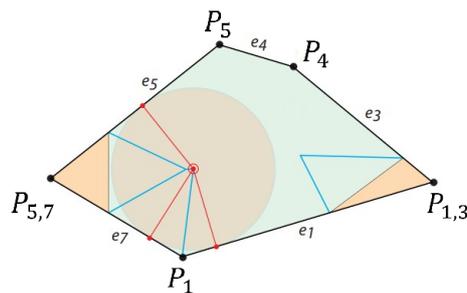


Figura 5.8 Terceira interseção de bissetrizes.

Repetindo este processo recursivamente vamos obter o eixo medial de P , figura 5.9, que é constituído apenas por estruturas lineares.

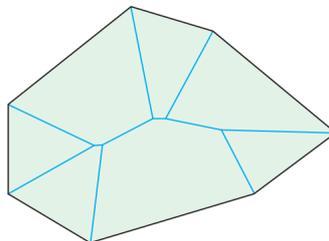


Figura 5.9 Eixo medial do polígono P .

5.2.2 Eixo medial de um polígono não convexo

Antes de abordarmos a definição de eixo medial de um polígono não convexo usando o conceito de Diagrama de Voronoi, vamos primeiro introduzir os conceitos de vértice convexo e vértice reflexo. [4, pág.60]. Um vértice de um polígono simples diz-se convexo se a amplitude do ângulo interno, formado pelas arestas nele incidentes, for menor ou igual a π . Caso contrário, o vértice diz-se reflexo ou côncavo. Um polígono não convexo tem pelo menos um vértice reflexo e todos os vértices de um polígono convexo são vértices convexos.

O eixo medial de um polígono não convexo é o Diagrama de Voronoi, no interior do polígono, do conjunto gerador constituído por subconjuntos formados por vértices reflexos e as respectivas arestas adjacentes e por subconjuntos formados pelas restantes arestas do polígono. O eixo medial de um polígono não convexo pode conter arcos parabólicos, tal como se verifica no exemplo da figura 5.10, retirada de [10].

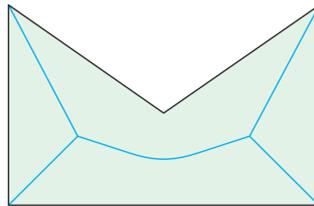


Figura 5.10 Eixo medial do polígono não convexo P .

Ao contrário do que se verifica para o eixo medial de um polígono convexo, num polígono não convexo dois pontos que pertençam à mesma região do interior do polígono podem ter como aresta mais próxima duas arestas distintas. Isto acontece porque ao contrário do eixo medial de um polígono convexo, o eixo medial de um polígono não convexo não é o diagrama de Voronoi do conjunto gerador formado pelas arestas do polígono.

Recordemos que uma parábola é o conjunto de pontos equidistantes de um ponto e de uma reta. Assim, o eixo medial de um polígono não convexo pode ter arcos parabólicos, onde cada arco parabólico está associado a um vértice reflexo. Consideremos o polígono P não convexo, representado graficamente na figura 5.10, retirada de [10]. Seja X o vértice reflexo de P , e seja e a base inferior deste polígono.

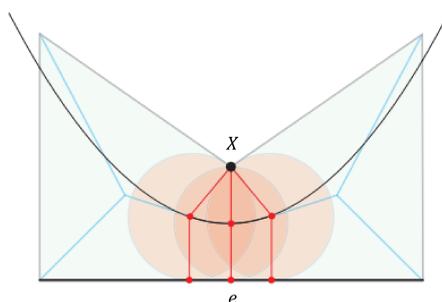


Figura 5.11 Arco parabólico.

Tal como é possível observar na figura 5.11, o arco parabólico é uma restrição do conjunto de pontos que se encontram à mesma distância do vértice X e da aresta e . Diz-se, portanto, que o arco parabólico está associado ao vértice X e à aresta e . Contudo, um polígono não convexo pode não conter arcos parabólicos tal como se verifica no exemplo da figura 5.12.

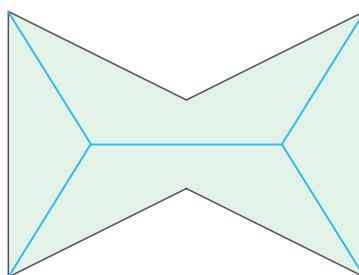


Figura 5.12 Exemplo de Eixo medial de um polígono não convexo.

Apesar das diversas aplicações do eixo medial, os arcos parabólicos acabam por complicar a sua utilização prática e dificultar o seu cálculo computacional. Surge, assim, uma estrutura, designada por esqueleto retilíneo.

5.3 Esqueleto retilíneo

Nesta secção iremos estudar o conceito de esqueleto retilíneo de um polígono [23, pág. 809 - 820]. Vamos também abordar um método para determinar o esqueleto retilíneo de um polígono tanto convexo como não convexo [1], [19, pág. 1-5], [10, pág. 124-128].

Uma onda de propagação uniforme é o conjunto de pontos no interior do polígono que estão a uma distância d da fronteira. As ondas de propagação de um polígono são estruturas lineares e obtidas através da translação das arestas do polígono, preservando a geometria dos ângulos incidentes

nos vértices do polígono. Podemos observar várias ondas de propagação no exemplo da figura 5.13, retirada de [10].

O esqueleto retilíneo é definido pelos segmentos de reta que ligam os vértices correspondentes das ondas de propagação. Ao contrário do que acontece com o eixo medial, o esqueleto retilíneo contém segmentos com origem em vértices reflexos.

Os vértices das ondas de propagação movem-se ao longo das bissetrizes dos ângulos incidentes nos vértices do polígono. Ao processo de determinação de sucessivas ondas de propagação dá-se o nome de processo de encolhimento. Este processo permite determinar o esqueleto reto de um polígono. Por outras palavras, durante o processo de encolhimento a fronteira de P é contraída no interior do polígono, de forma a que as arestas da onda de propagação sejam paralelas às arestas do polígono P e de modo a que cada ponto da aresta da onda de propagação obtida esteja à mesma distância do ponto sobre o qual foi obtido.

Para determinar o esqueleto retilíneo de um determinado polígono o processo de encolhimento deve continuar recursivamente enquanto a estrutura das ondas de propagação não se altera topologicamente. Existem dois tipos de alterações topológicas:

- **Evento aresta:** Uma aresta encolhe, ficando com comprimento nulo. Neste caso o processo continua, com os vértices a seguirem a orientação da bissetriz do ângulo formado pelo prolongamento das arestas vizinhas.
- **Evento de divisão:** Um vértice colide com uma aresta. Neste caso, o polígono original é subdividido em dois novos polígonos. O processo de encolhimento continua nos dois polígonos de forma independente, sendo que o processo é dado como terminado quando a área dos polígonos for nula.

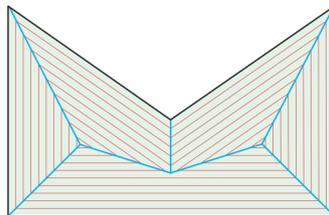


Figura 5.13 Processo de encolhimento.

Na figura 5.13 podemos observar o processo de encolhimento realizado para determinar o esqueleto retilíneo do polígono P .

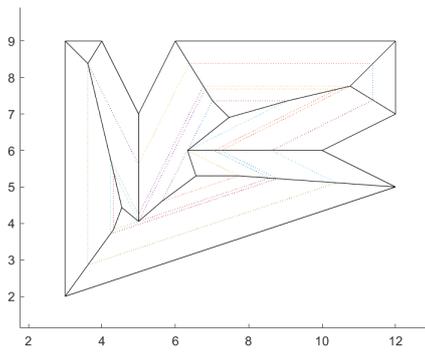
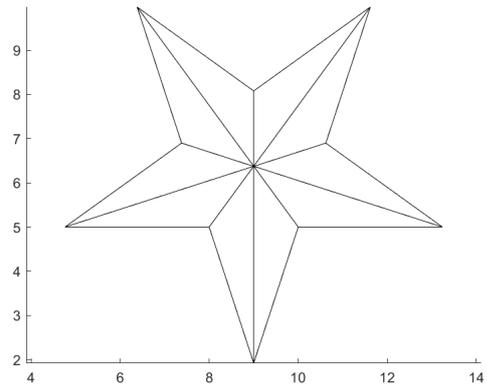
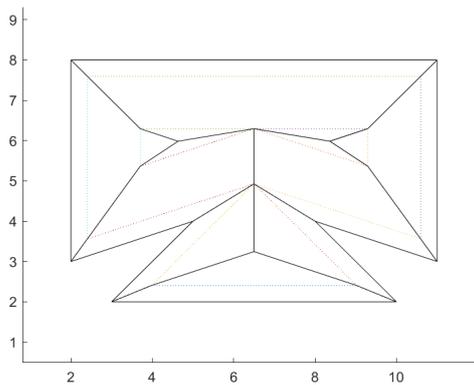
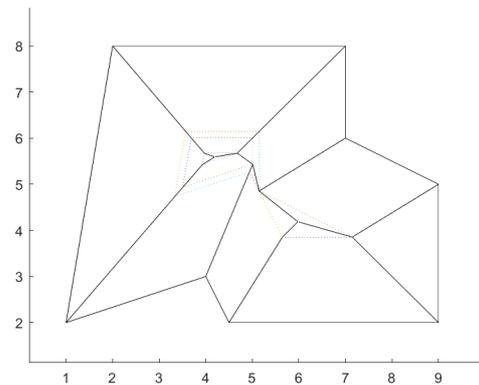
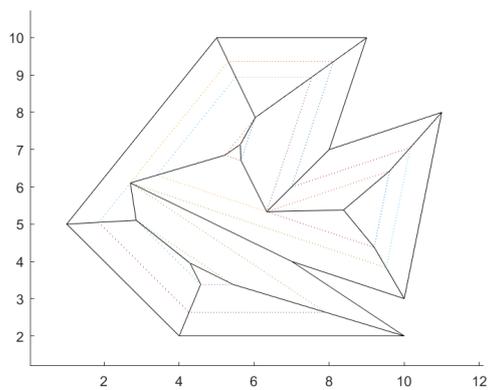
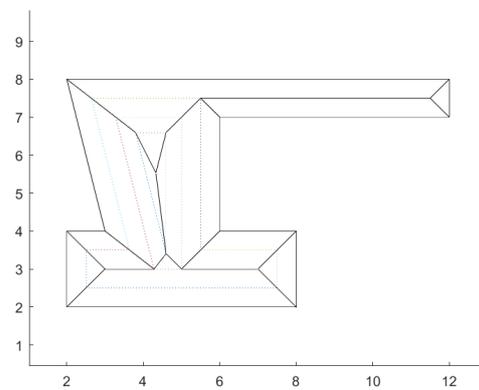
O esqueleto retilíneo de polígonos convexos é equivalente ao eixo medial. Contudo, para polígonos não convexos tal resultado não é válido. O esqueleto retilíneo, ao contrário do eixo medial de alguns polígonos não convexos, não contém estruturas parabólicas. Isto é, o esqueleto retilíneo de um polígono, convexo ou não convexo, é apenas constituído por estruturas lineares. A estrutura linear do esqueleto retilíneo facilita quer a implementação do algoritmo para a sua determinação quer a aplicação prática deste conceito.

Para além disso, podemos observar que o esqueleto retilíneo do polígono P , representado na figura 5.13, tem na sua constituição um segmento com origem no vértice reflexo, estrutura essa que não se encontra presente no eixo medial do polígono P , representado na figura 5.10.

Após a determinação do esqueleto retilíneo do polígono, pretendemos determinar o ponto do esqueleto retilíneo mais distante da fronteira do polígono.

Implementação prática do esqueleto retilíneo

Nesta secção vamos implementar o algoritmo desenvolvido usando o software MATLAB, para determinar o esqueleto retilíneo de alguns exemplos de polígonos relevantes para a validação da eficácia do mesmo. Consideremos como exemplo seis polígonos, parte deles retirados de [19] e Wikipédia, sobre os quais vamos implementar o código *testarSS.m*, com instruções no anexo I, e assim determinar os respetivos esqueletos retilíneos dos polígonos para posteriormente verificar que corresponde ao que foi obtido nas referências bibliográficas mencionadas.

Figura 5.14 Esqueleto retilíneo de P_1 .Figura 5.15 Esqueleto retilíneo de P_2 .Figura 5.16 Esqueleto retilíneo de P_3 .Figura 5.17 Esqueleto retilíneo de P_4 .Figura 5.18 Esqueleto retilíneo de P_5 .Figura 5.19 Esqueleto retilíneo de P_6 .

5.4 Método Garcia-Castellanos & Lombardo

Nesta secção vamos abordar uma alternativa ao cálculo do esqueleto reto e vamos estudar uma heurística para aproximar o ponto no interior do polígono mais distante da sua fronteira. Esta alternativa designa-se por Método Garcia-Castellanos & Lombardo [12, pág. 227 - 233].

Algoritmo 4: Método Garcia-Castellanos & Lombardo

- 1: Definir uma malha de pontos sobre o polígono.
 - 2: Descartar pontos localizados no exterior do polígono.
 - 3: Calcular distância de cada um dos pontos da malha, que estão localizados no interior do polígono, à fronteira do polígono.
 - 4: Selecionar o ponto da malha mais distante da fronteira do polígono.
-

É de salientar que para obter um resultado próximo do ponto interior ao polígono mais distante da fronteira do mesmo, será necessário considerar uma malha com espaçamento pequeno. Contudo, a diminuição do espaçamento dos pontos que constituem a malha irá ter como consequência o aumento do número de pontos que a define, o que origina um aumento do tempo de execução do algoritmo. A implementação deste método exige a resolução de dois problemas. O primeiro consiste em classificar um ponto como ponto interior ou exterior a um polígono. O segundo problema consiste em determinar a distância, de um ponto interior a um polígono, à fronteira do mesmo.

5.4.1 Classificação de um ponto como interior ou exterior a um polígono

A questão a que agora pretendemos dar resposta é de que forma podemos determinar se um ponto P pertence ou não ao interior de um polígono. Para classificar P como ponto interior ou ponto exterior a um determinado polígono precisamos de considerar uma semi-reta com origem em P . Se a semi-reta interseccionar as arestas do polígono um número par de vezes então P é um ponto exterior ao polígono. Por outro lado, se a semi-reta com origem em P interseccionar as arestas do polígono um número ímpar de vezes P é um ponto interior ao polígono.

5.4.2 Distância de um ponto interior ao polígono à sua fronteira

Nesta secção vamos utilizar resultados de álgebra linear e geometria analítica, [21, pág. 111- 114], para determinar a distância de um ponto arbitrário P_* , localizado no interior do polígono P , à sua fronteira. Seja P o polígono definido por (5.4.1).

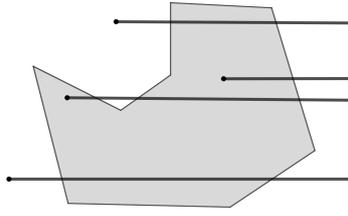


Figura 5.20 Determinar se P é ponto interior ou exterior a um polígono.

$$P \equiv \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & \dots & P_{n-1} & P_n \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & y_n \end{bmatrix} \quad (5.4.1)$$

Seja $\vec{v} = \overrightarrow{P_k P_{k+1}}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{P_k P}$. Onde P_k e P_{k+1} são dois vértices consecutivos do polígono P .

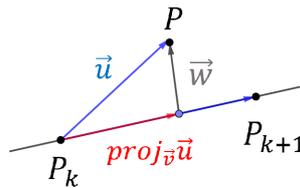


Figura 5.21 Projeção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} .

Seja $proj_{\vec{v}}\vec{u}$ a projeção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} . Deste modo, temos que:

$$proj_{\vec{v}}\vec{u} = \lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}$$

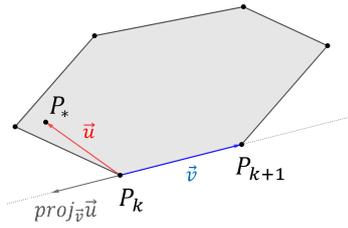
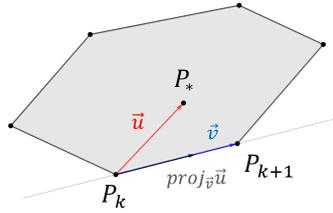
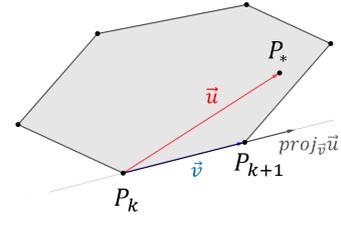
Assim, tal como a figura 5.21 sugere, para $\vec{w} = \vec{u} - proj_{\vec{v}}\vec{u}$, vem que:

$$\lambda \vec{v} + \vec{w} = \vec{u} \Leftrightarrow \lambda \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Uma vez que os vetores \vec{v} e \vec{w} são ortogonais, $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$, pelo que vem :

$$\lambda \|\vec{v}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$$

Dependendo do valor λ é possível identificar o ponto da aresta $[P_k P_{k+1}]$ mais próximo de P .

Figura 5.22 Caso $\lambda < 1$.Figura 5.23 Caso $\lambda \in [0, 1]$.Figura 5.24 Caso $\lambda > 0$.

Seja P_k^+ o ponto da aresta $[P_k P_{k+1}]$ mais próximo de P_* . Então P_k^+ é dado por:

$$P_k^+ = \begin{cases} P_k, & \text{se } \lambda < 0 \\ P_k + \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}, & \lambda \in [0, 1] \\ P_{k+1}, & \text{se } \lambda > 1 \end{cases}$$

Deste modo, para cada uma das n arestas do polígono P podemos determinar a distância de P_* a essa mesma aresta. Portanto, podemos determinar qual o ponto da fronteira do polígono P mais próximo de P_* , designemos esse ponto por P_{min} .

$$P_{min} = \min\{|P_* - P_0^+|, |P_* - P_1^+|, \dots, |P_* - P_n^+|\}$$

5.5 Implementação prática do Esqueleto Retilíneo e do Método Garcia-Castellanos & Lombardo

Para cada um dos polígonos delimitadores das regiões continentais dos países obtidos no apêndice A vamos determinar o ponto do esqueleto reto mais distante da fronteira do polígono (■). Para além disso, vamos implementar o método Garcia-Castellanos & Lombardo (*), através da função desenvolvida em MATLAB denominada *garcastlomb.m*, com instruções no apêndice J, para realizarmos uma comparação entre o output de cada uma das abordagens e comparar o tempo computacional de cada um dos algoritmos (tabela 5.1). Note que nesta secção cada um dos polígonos foi definido por um número de pontos inferior ao que se definiu nas implementações práticas realizadas anteriormente.

País	Garcia-Castellanos & Lombardo		Esqueleto Retilíneo	
	Coordenadas	Tempo	Coordenadas	Tempo
Portugal	(366.82;864.52)	5.65 s	(366.79;881.75)	1.98 s
Espanha	(783.84;744.629)	4.92 s	(775.78;734.00)	3.18 s
Croácia	(690.50;928.95)	3.36 s	(696.09;936.57)	1.70 s
Brasil	(834.66;726.90)	4.79 s	(478.579;726.32)	2.87 s
Alemanha	(482.63;726.91)	6.20 s	(701.67;735.98)	2.88 s
França	(679.74;708.106)	3.75 s	(701.67;735.98)	2.06

Tabela 5.1 Comparação método Garcia-Castellanos & Lombardo e Esqueleto Retilíneo.

Através da observação da tabela 5.1 e das figuras 5.25, 5.26, 5.27, 5.28, 5.29 e 5.30 podemos observar que a distância entre o ponto do esqueleto retilíneo mais distante da fronteira de P e o ponto obtido através do método Garcia-Castellanos & Lombardo são relativamente próximos. Para além disso, o tempo computacional no algoritmo desenvolvido para determinar o ponto do esqueleto retilíneo mais distante da fronteira do polígono é substancialmente inferior ao tempo computacional do algoritmo Garcia-Castellanos & Lombardo. Contudo, é de salientar que para malhas de pontos de diferente densidade o tempo computacional sofrerá naturalmente alterações.

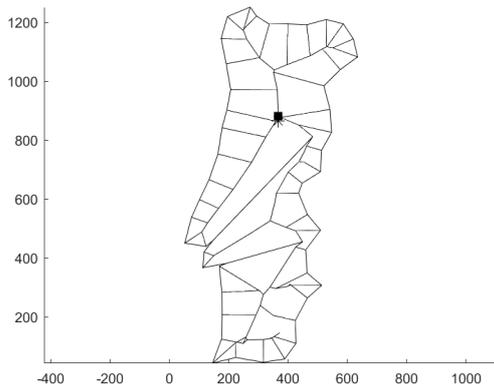


Figura 5.25 Output para Portugal.

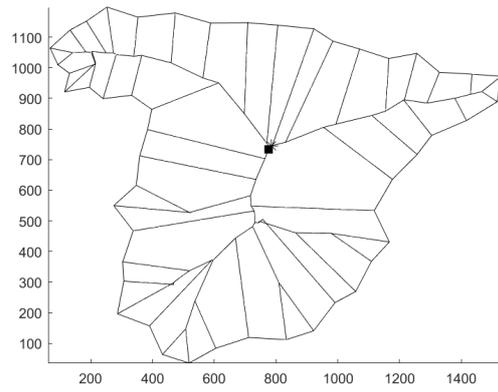


Figura 5.26 Output para Espanha.

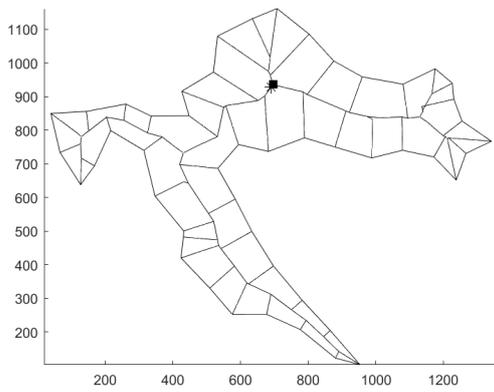


Figura 5.27 Output para Croácia.

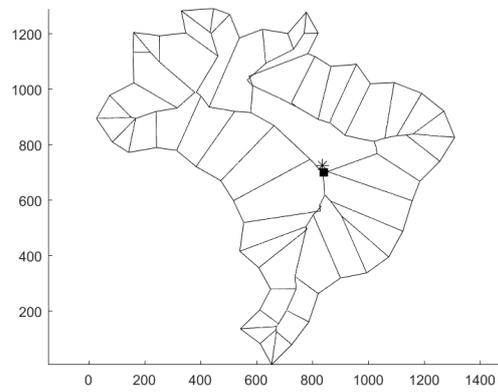


Figura 5.28 Output para Brasil.

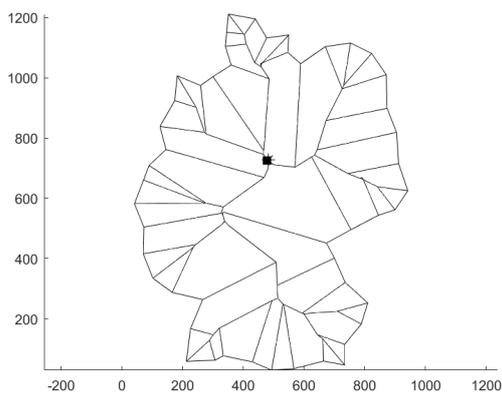


Figura 5.29 Output para Alemanha.

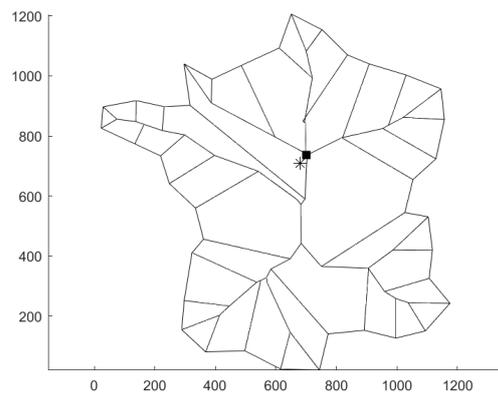


Figura 5.30 Output para França.

Capítulo 6

Cálculo de pontos candidatos num caso prático

Neste capítulo vamos demonstrar a aplicação dos métodos, descritos nas secções 4.1.1, 4.2 e 5.4, num contexto real. Para o cenário apresentado na figura A.1 podemos determinar para cada polígono, que satisfaz as condições pré-estabelecidas de área, os pontos candidatos segundo cada um dos métodos mencionados.

Consideremos o ponto correspondente ao centroide geométrico dos polígonos representados por (●), os pontos correspondentes aos centros de Chebyshev dos invólucros convexos dos polígonos representados por (○) e os pontos correspondentes ao output do método Garcia-Castellanos & Lombardo representados por (▲).

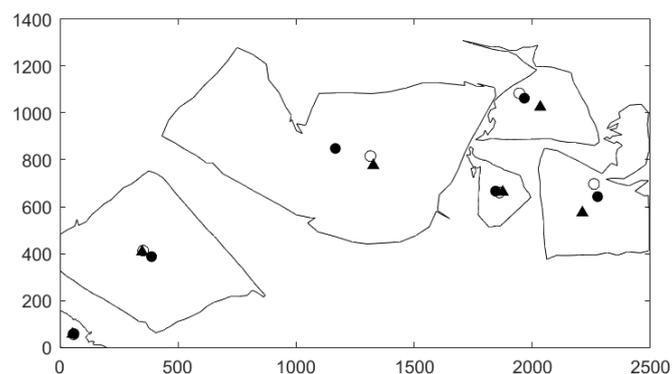


Figura 6.1 Pontos candidatos a impacto.

Capítulo 7

Conclusão e trabalho futuro

Ao longo do ano estudámos o centroide geométrico, o centro de Chebyshev de um polígono convexo, o esqueleto reto e o método Garcia-Castellanos & Lombardo. O esqueleto reto e o método Garcia-Castellanos & Lombardo garantem que o ponto obtido está localizado no interior do polígono. Observámos que o tempo computacional do cálculo do esqueleto reto é substancialmente inferior à implementação do método Garcia-Castellanos & Lombardo, isto deve-se porque a malha considerada é demasiado densa. O algoritmo desenvolvido para determinar o esqueleto reto de um polígono permite obter um ponto relativamente próximo do output do método Garcia-Castellanos & Lombardo para uma malha de pontos bastante densa, o que retrata o sucesso do algoritmo para a finalidade pretendida.

Uma das limitação do trabalho desenvolvido é a robustez do algoritmo para determinar o esqueleto reto de um polígono definido por um conjunto de pontos de grandes dimensões. A proximidade de colinearidade entre os pontos afeta a eficiência do algoritmo. Relativamente ao contexto prático do problema, foi adotado que o próximo ponto de impacto do martelo pneumático seria o centro do polígono mais próximo da posição do martelo. Adotou-se esta heurística devido ao facto de a posição dos fragmentos se alterar após cada impacto do martelo. No entanto, a otimização do movimento do martelo fica em aberto e pode ser possível aplicar uma adaptação do problema do caminho mais curto tendo em conta a possibilidade de alteração da posição dos fragmentos.

Para além da aplicação na indústria da pedra, os trabalhos desenvolvidos podem ser aplicados por exemplo no posicionamento de legendas em mapas de país, na robótica e navegação autónoma para determinar a posição central ou ponto de referência de um objeto detetado pelo robot e no design e arquitetura para garantir a simetria, estabilidade visual e distribuição geométrica de uma elemento decorativo.

Bibliografia

- [1] Aichholzer, O. and Aurenhammer, F. (1997). Straight skeletons for general polygonal figures in the plane. *Lecture Notes in Computer Science*, 1090.
- [2] Akima, H. (1970). A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures. *Journal of the ACM (JACM)*, 17(4):589–602.
- [3] Akima, H. (1974). A method of bivariate interpolation and smooth surface fitting based on local procedures. *Communications of the ACM*, 17(1):18–20.
- [4] Azevedo, S. P. N. N. (2007). *Conjuntos Convexos e Algoritmos para construir invólucros convexos*. PhD thesis, Universidade de Aveiro.
- [5] Baker, D. W. and Haynes, W. (2020). *Engineering Statics: Open and Interactive*.
- [6] Braden, B. (1986). The surveyor’s area formula. *The College Mathematics Journal*, 17(4):326–337.
- [7] Brito, A. P. d. (2014). Grafos, a fórmula de Euler e os poliedros regulares. Master’s thesis, Universidade de Pernambuco.
- [8] de Berg, M., Cheong, O., van Kreveld, M., and Overmars, M. (2013). *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer.
- [9] Deakin, R. E., Bird, S. C., and Grenfell, R. I. (2002). The centroid? where would you like it to be? *Cartography*, 31(2):153–167.
- [10] Devadoss, S. L. and O’Rourke, J. (2011). *Discrete and Computational Geometry*. Princeton University Press.
- [11] Fukunage, K. (1990). *Introduction to Statistical Pattern Recognition*. Academic Press, 2 edition.
- [12] Garcia-Castellanos, D. and Lombardo, U. (2007). Poles of inaccessibility: A calculation algorithm for the remotest places on earth. *Scottish Geographical Journal*, 123(3):227–233.
- [13] Giovanni, E. N. (2021). David Hilbert and the foundations of the theory of plane area. *Springer*, pages 649–694.
- [14] Gonzalez, R. C., Woods, R. E., and Eddins, S. L. (2004). *Digital Image Processing Using MATLAB*. Pearson Prentice Hall, New Jersey, EUA.
- [15] Graham, R. L. (1972). An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set. *Inf. Process. Lett.*, 1(4):132–133.
- [16] Moise, E. E. (1990). *Elementary Geometry*. Addison-Wesley, Reading, MA, 2nd edition.
- [17] Oliveira, M. P. S. d. (2017). *Análise Infinitesimal em R^n* . Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra.

-
- [18] Otsu, N. (1979). IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, vol. smc-9, no. 1, january 1979. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-9(1).
- [19] Patil, S. (2002). *Computation of Straight Skeleton of Simple Polygon*. PhD thesis, Indian Statistical Institute.
- [20] Queiró, J. F. (2009). A demanda do centro de Portugal. *Gazeta da Matemática*, pages 7–12.
- [21] Santana, A. P. and Queiró, J. F. (2018). *Introdução à Álgebra Linear*. IST Press, Lisboa, Portugal.
- [22] Soares, J. L. (2023). *Otimização Linear - Textos de apoio*. Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra.
- [23] Tânase, M. and Veltkamp, R. C. (2004). A straight skeleton approximating the medial axis. *Computational Geometry*.
- [24] Weszka, J., Nagel, R., and Rosenfeld, A. (1974). A threshold selection technique. *IEEE Transactions on Computers*, C-23(12):1322–1326.
- [25] Zhao, L. and Lu, W.-S. (2020). Chebyshev centre of a polyhedron. *Mathematical Programming*, 185(1-2):269–288.

Apêndice A

Identificação poligonal de objetos de uma imagem

Neste apêndice vamos abordar a questão do tratamento de imagem. Para determinar a localização dos fragmentos da pedra será necessário tirar uma fotografia e, posteriormente, tratá-la de modo a obter os diversos polígonos representativos de cada fragmento presente no campo de ação do martelo. Assim, dada uma imagem pretendemos tratá-la de modo adequado com o intuito de obter a representação poligonal dos fragmentos. O trabalho desenvolvido foi baseado nos artigos [11, pag. 260-267] e [24].

Na secção A.1 será descrito todo o processo de binarização de uma imagem, desde os conceitos básicos relativamente a uma imagem em código RGB até à estratégia de binarização da imagem propriamente dita.

Na secção A.2 será descrita a metodologia utilizada para obter a representação poligonal de fragmentos partindo de uma imagem binária, utilizando funções MATLAB [14].

A.1 Binarização de imagem

Uma imagem, em código, RGB é definida por um conjunto de três matrizes em que cada elemento da matriz representa um pixel da imagem. Deste modo, a cor de um pixel de uma imagem em RGB é definida por três valores, cada um para as cores vermelho, verde e azul. Com estas três cores podemos obter qualquer outra, e portanto, os três valores referentes a cada uma das cores permitem identificar a cor do respetivo pixel. Deste modo, consideremos a imagem da figura A.1, de um cenário real.



Figura A.1 Imagem de fragmentos.

Pretendemos fazer a distinção das regiões da imagem que correspondem a fragmentos da pedra das regiões que correspondem à mesa, isto é, o fundo preto. Seja $x_{ij} \in [0, M] \times [0, N]$ o conjunto dos pixels que definem a imagem I de dimensão $M \times N$. Uma imagem em código RGB é definida por três matrizes $M \times N$, em que cada posição (i, j) das matrizes irá codificar a cor do pixel x_{ij} . Assim, o pixel x_{ij} é totalmente definido por três valores, $R(i, j)$ referente ao vermelho, $G(i, j)$ referente ao verde e $B(i, j)$ referente ao azul. Para obter a respetiva imagem em escala de cinza, que será identificada pela matriz C , também ela de dimensão $N \times M$, basta aplicar uma média ponderada.

$$C(i, j) = 0.299 \times R(i, j) + 0.587 \times G(i, j) + 0.114 \times B(i, j), \quad \forall (i, j) \in [0, M] \times [0, N]$$

Obtemos assim, uma imagem em escala de cinza, que é totalmente identificada pela matriz C , em que $0 \leq C(i, j) \leq 255, \forall (i, j) \in [0, M] \times [0, N]$. A respetiva imagem em escala de cinza da imagem da figura A.1 está representada na figura A.2:



Figura A.2 Imagem em escala de cinza.

Ora, cada elemento $C(i, j)$ indica quão escuro é o respetivo pixel x_{ij} , sendo mais escuro quanto menor for o respetivo valor do elemento da matriz C . Pretendemos, agora, binarizar a imagem. Por outras palavras, vamos associar cada pixel da imagem apenas às cores branca e preta, para isso iremos basear-nos na imagem em escala de cinza.

Seja Bin a matriz de dimensão $M \times N$ que irá identificar a imagem binária de uma determinada imagem de dimensão $M \times N$.

Para proceder à binarização de uma imagem vamos definir um valor k , tal que $0 \leq k \leq 255$, de modo a que quando $C(i, j) \leq k$, o respetivo pixel será classificado como preto, isto é, teremos $Bin(i, j) = 0$. Por outro lado, quando $C(i, j) > k$, o pixel será classificado como branco, isto é, teremos que $Bin(i, j) = 255$.

Podemos então esquematizar o processo de binarização, partindo de uma imagem em escala de cinza definida pela matriz C , do seguinte modo:

$$\begin{cases} C(i, j) \leq k \Rightarrow Bin(i, j) = 0 \\ C(i, j) > k \Rightarrow Bin(i, j) = 1 \end{cases}, \forall (i, j) \in [0, M] \times [0, N]$$

Para binarizar a imagem da figura A.2 é necessário escolher adequadamente o nível k . Esse valor k irá variar conforme a imagem que se pretende binarizar. O valor k será determinado através do método de Otsu que vamos descrever de seguida.

A técnica de binarização que vamos utilizar é designada por método de Otsu que consiste em determinar um valor k para realizar a binarização de uma imagem [14, Cap.10], [11, pag.260-267], [18, pag. 62-66], [24].

Dada uma imagem em escala de cinza, definida pela matriz C de dimensão $M \times N$, vamos dividir os pixels da imagem, representados por $x_{ij} \in [0, M] \times [0, N]$, em L níveis de diferente intensidade cinza. Seja $l \in \{1, 2, \dots, L\}$ um nível representativo de um intervalo de intensidade cinza.

Na prática, o método de Otsu permite-nos determinar um intervalo $K \in \{1, 2, \dots, L\}$ para depois se realizar a binarização da imagem. Contudo, o valor de k que nos permite binarizar a imagem pode ser obtido a partir do nível K obtido através do método de Otsu. Deste modo, temos que:

$$k = K \times \frac{255}{L}$$

Seja n_l é o número de pixels com intensidade cinza de nível l . Isto é, temos que:

$$n_l = \sum_{i=0}^M \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{\{x_{ij} \in l\}}$$

Seja N_p o número total de pixels da imagem, isto é:

$$N_p = N \times M = \sum_{l=1}^L n_l$$

Daqui em diante consideremos $x_{ij} \in [0, M] \times [0, N]$ um pixel escolhido aleatoriamente. Vamos, agora, pensar no nível de intensidade cinza como uma distribuição de probabilidade, em que convencionamos que $P(x_{ij} \in l) = p_l$, tal que:

$$p_l = \frac{n_l}{N_p}, \quad p_l \geq 0 \text{ e } \sum_{l=1}^L p_l = 1$$

Agora, pretendemos dividir os pixels em duas classes distintas. Sejam essas classes a classe C_0 , formada pelos pixels com nível de intensidade cinza em $\{1, \dots, K\}$, e a classe C_1 , formada pelos pixels com nível de intensidade cinza em $\{K+1, \dots, L\}$.

Deste modo, as probabilidades de cada uma das classes são dadas por:

$$w_0 = P(x_{ij} \in C_0) = \sum_{l=1}^K p_l = w(k)$$

$$w_1 = P(x_{ij} \in C_1) = \sum_{l=K+1}^L p_l = 1 - w(k)$$

Desta forma, podemos calcular o nível de intensidade cinza médio de cada uma das classes:

$$\mu_0 = \sum_{l=1}^K l \times P(x_{ij} \in l | x_{ij} \in C_0) = \sum_{l=1}^K l \times \frac{P(x_{ij} \in l \cap x_{ij} \in C_0)}{P(x_{ij} \in C_0)} = \sum_{l=1}^K l \times \frac{p_l}{w_0} = \frac{\mu(K)}{w(k)}$$

$$\mu_1 = \sum_{l=K+1}^L P(x_{ij} \in l | x_{ij} \in C_1) = \sum_{l=K+1}^L l \times \frac{P(x_{ij} \in l \cap x_{ij} \in C_1)}{P(x_{ij} \in C_1)} = \sum_{l=K+1}^L l \times \frac{p_l}{w_1} = \frac{\mu_T - \mu(K)}{1 - w(k)}$$

Onde $\mu(K) = \sum_{l=1}^K l p_l$ e $\mu_T = \mu(L) = \sum_{l=1}^L l p_l$ é o nível médio de intensidade cinza de toda a imagem. Para cada valor de K , podemos facilmente confirmar que se verificam as seguintes igualdades:

$$w_0 \mu_0 + w_1 \mu_1 = \mu_T \text{ e } w_0 + w_1 = 1$$

Calculemos agora a variância das classes C_0 e C_1 .

$$\sigma_0^2 = \sum_{l=1}^K (l - \mu_0)^2 P(x_{ij} \in l | x_{ij} \in C_0) = \sum_{l=1}^K \frac{(l - \mu_0)^2 p_l}{w_0}$$

$$\sigma_1^2 = \sum_{l=1}^K (l - \mu_1)^2 P(x_{ij} \in l | x_{ij} \in C_1) = \sum_{l=k+1}^K \frac{(l - \mu_1)^2 p_l}{w_1}$$

Pretendemos descobrir um intervalo K^* de modo a binarizar a imagem da forma mais adequada possível. Para isso, vamos utilizar a variância entre classes, dada por:

$$\sigma_B^2 = w_0 (\mu_0 - \mu_T)^2 + w_1 (\mu_1 - \mu_T)^2$$

Ora, iremos escolher o valor K^* que maximiza a variância entre classes. Assim, escrevendo σ_B^2 em função de K obtemos:

$$\sigma_B^2(K) = \frac{[\mu_T w(K) - \mu(k)]^2}{w(K) [1 - w(K)]}$$

Portanto, o valor ótimo K^* , para proceder à binarização da imagem, é tal que:

$$\sigma_B^2(K^*) = \max_{1 \leq K < L} \sigma_B^2(K)$$

Notemos que existem outras medidas, passíveis de serem utilizadas, para realizar a separação das classes como alternativa à variância entre classes. Contudo, utilizou-se a medida mais simples e intuitiva.

Portanto, aplicando o método de Otsu à imagem em escala de cinza, da figura A.2, iremos obter um intervalo K^* que nos permite determinar o valor $k^* = K^* \times \frac{255}{L}$, reunindo, assim, as condições necessárias para proceder à binarização da imagem. Assim, para a imagem da figura A.1 obtemos a respetiva imagem binária presente na figura A.3.



Figura A.3 Imagem binária.

A.2 Representação poligonal de objetos de uma imagem

Após o processo de binarização da imagem, utilizando o método de Otsu, pretende-se obter a representação poligonal dos objetos presentes na imagem, usando m pontos, que satisfaçam uma determinada condição de área. O objetivo de utilizar m pontos para aproximar a fronteira de cada um dos polígonos é evitar que os polígonos sejam definidos por sequências de pontos excessivamente grandes. Para isso serão utilizadas funções existentes no MATLAB [14, Cap. 12]. Seja BW a imagem binária obtida pelo método descrito na secção A.1. Implementando a função `bwboundaries.m` obtemos o conjunto B , que é o conjunto de polígonos presentes na imagem binária BW .

$$B = \begin{bmatrix} Pol_1 \\ Pol_2 \\ \vdots \\ Pol_n \end{bmatrix}$$

Por sua vez, cada um dos polígonos Pol_i , para $i = 1, \dots, n$ são definidos por uma sequência ordenada de N_i pontos que define a fronteira do polígono, isto é:

$$Pol_i \equiv \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{N_i} \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{N_i} \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_{N_i} \end{bmatrix} \quad (A.2.1)$$

Pretendemos seleccionar os polígonos do conjunto B com área entre A_{min} e A_{max} . Assim, para cada polígono Pol_i do conjunto B calcula-se a respetiva área denotada por $f(Pol_i)$, descartando o polígono Pol_i caso $A_{min} \leq f(Pol_i) \leq A_{max}$.

Seja Pol_ϵ um polígono a verificar $A_{min} \leq f(Pol_\epsilon) \leq A_{max}$. Consideremos a sequência ordenada de pontos, na forma complexa, que define o polígono Pol_ϵ , isto é:

$$Pol_\epsilon = \begin{bmatrix} x_0 + iy_0 \\ x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_{N_\epsilon} + iy_{N_\epsilon} \end{bmatrix}$$

Para identificar o polígono Pol_ϵ por uma sequência ordenada de m pontos começamos por designar $d^\epsilon = [d_1^\epsilon d_2^\epsilon \dots d_{N_\epsilon}^\epsilon]^T$ o vetor distância entre vértices. Onde d_i^ϵ é a distância entre o i -ésimo e o $i - 1$ -ésimo vértice da sequência que define o polígono Pol_ϵ . Assim, vem que:

$$d_k^\epsilon = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N_\epsilon$$

Obtemos, assim, as variáveis $d_1^\epsilon, d_2^\epsilon, \dots, d_{N_\epsilon}^\epsilon$, o que permite identificar o vetor d^ϵ .

Seja agora $D^\epsilon = [0 \ D_1^\epsilon \ D_2^\epsilon \ \dots \ D_{N_\epsilon}^\epsilon]^T$ tal que :

$$D_k^\epsilon = \frac{\sum_{j=1}^k d_j^\epsilon}{M}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N_\epsilon$$

onde $M = \sum_{j=1}^{N_\epsilon} d_j^\epsilon$.

Deste modo, o vetor D^ϵ é uma partição do intervalo $[0, 1]$. Uma vez que queremos aproximar cada polígono por m pontos, vamos refinar o intervalo $[0, 1]$ em m intervalos. Pelo que obtemos:

$$I = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ \frac{2}{m} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Agora estamos nas condições de aplicar um método de interpolação linear [2] e [3]. Utilizando a função *interp1.m*, obtemos uma sequência ordenada de *num* pontos que permite aproximar o polígono Pol_ϵ .

Após aplicar o processo a cada um dos polígonos do conjunto B estamos nas condições necessárias para representar graficamente cada um dos objetos presentes na imagem que satisfaçam as condições de área pré-estabelecidas. Apliquemos este algoritmo, desenvolvido na função *im2poly.m*, à imagem da figura A.3. Obtém-se como output a figura A.4.

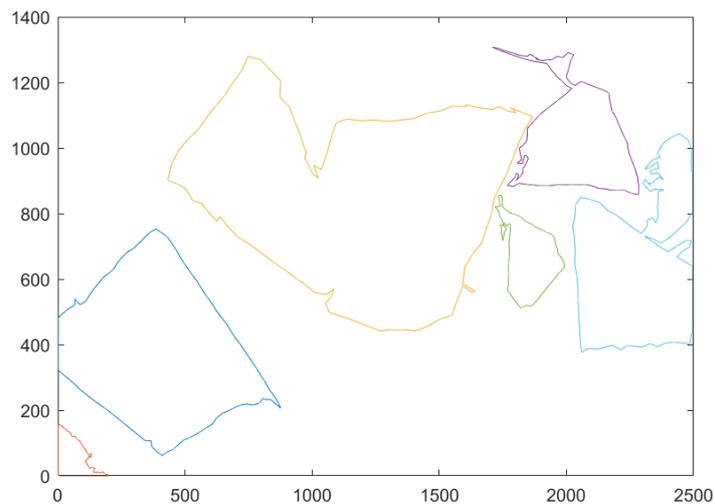


Figura A.4 Representação poligonal dos fragmentos.

Consideremos outros exemplos de implementação para a função *im2poly.m*. Consideremos os polígonos delimitadores das regiões continentais de Portugal, Espanha, Croácia, Brasil, Alemanha e França. Dada uma imagem binária, basta aplicar a função *im2poly.m* para obter o polígono que delimita cada um dos países obtidos em d-maps.com.



Figura A.5 Portugal continental.

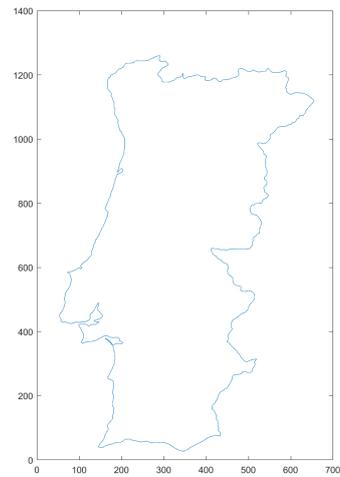


Figura A.6 Polígono delimitador de Portugal continental.



Figura A.7 Espanha continental.

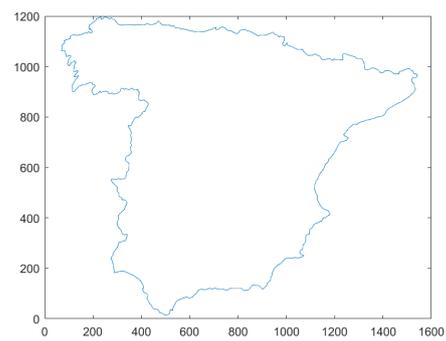


Figura A.8 Polígono delimitador de Espanha.



Figura A.9 Croácia continental.

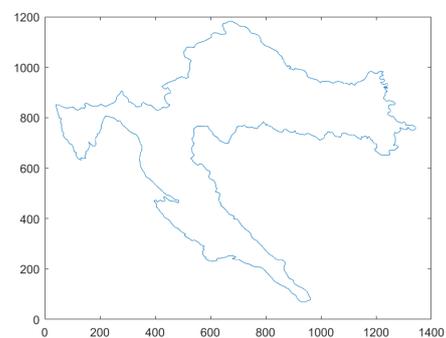


Figura A.10 Polígono delimitador da Croácia.



Figura A.11 Brasil continental.



Figura A.12 Polígono delimitador do Brasil continental.



Figura A.13 Alemanha continental.

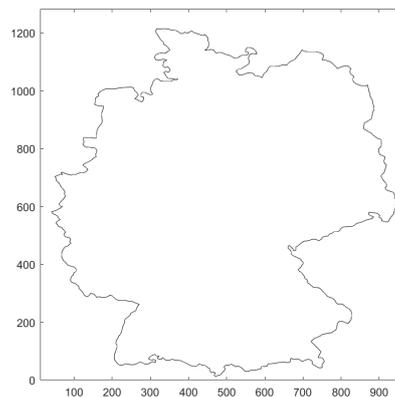


Figura A.14 Polígono delimitador de Alemanha continental.



Figura A.15 França continental.

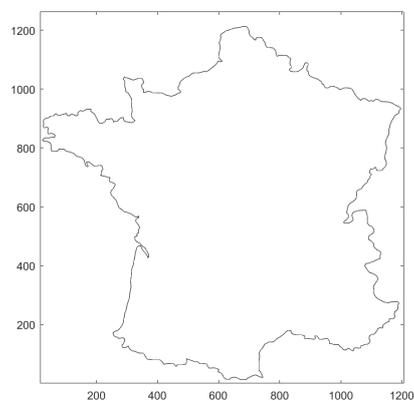


Figura A.16 Polígono delimitador de França continental.

Apêndice B

Função *im2poly.m*

Dada um imagem em escala *RGB* esta função faz o tratamento de imagem e a identificação polígono (Anexo A), devolvendo os polígonos presentes na imagem que satisfazem as condições de área pré-definidas.

```
1 function C=im2poly(th1,th2,N)
2 %
3 %INPUT: imagem
4         % th1: area minima para selecionar os poligonos
5         % th2: area maxima para selecionar os poligonos
6         % N: numero de pontos para identificar cada um dos
           poligonos
7
8 %OUTPUT: matriz em que cada coluna define um poligono no formato
           de numeros
9 %complexos aproximando o poligono por N pontos
10 %
```


Apêndice C

Função *GS_fase1.m*

Implementa a primeira fase do Varrimento de Graham, devolvendo um polígono.

```
1 function [n2,pos] = GS_fase1( P, a, k0 )
2 %
3 %
4 % define um poligono ordenando os pontos conforme explicado na
   seccao 2.2.1
5 %
6 % INPUT: P: 2xn (=> 4) (pontos)
7 %       a: vetor 2x1 (direcao)
8 %       k0 para identificar P0=P[:,k0]
9 %
10 % OUTPUT: pos: 1xn
11 %   for j=1,2,...,n2,
12 %       P[:,pos(j)] define o j-esimo vertice do poligono (
   sentido horario)
13 %   for j=n2+1,...,n,
14 %       P[:,pos(j)] elementos removidos
15 %
```


Apêndice D

Função *GS_fase2.m*

```
1 function [n2,n3,pos,bef,aft] = GS_fase2( P )
2
3 %
4 % determina os pontos extremos do involucro convexo de um
   poligono P
5 % e informacao extra para calcular a area e o centroide
6 %
7 % INPUT: P: 2xn (=> 4)
8 %         vertices do poligono ordenados no sentido horario
9 %
10 % OUTPUT: pos: 1xn
11 %         for i=1,2,...,n2,
12 %             P[:,pos(i)] tem o i-esimo ponto extremo (sentido
   horario)
13 %         for i=n2+1,...,n3,
14 %             P[:,pos(i)] tem pontos que nao sao extremos
15 %         for i=n2+1,...,n3,
16 %             P[:,bef(i)], P[:,pos(i)], P[:,aft(i)] define
   triangulos cuja
17 %             reuniao corresponde ao exterior do poligono
18 %         for i=n3+1,...,n,
19 %             P[:,pos(i)] pertence ao segmento definido por P[:,bef(
   i)] e P[:,aft(i)]
20 %
```


Apêndice E

Função *area.m*

Dado um polígono P definido na forma (2.1.1) determina a área do polígono aplicando a fórmula de (3.2.4).

```
1 function A= area(P2)
2 %Determinar area de um poligono
3 %
4 % INPUT: P2 - conjunto de vertices do poligono ordenados pelo
   sentido contrario
5 % ao dos ponteiros do relógio 2xn
6 %
7 % OUTPUT: A - area do poligono
8 %
```


Apêndice F

Função *computeAC.m*

Dado um polígono P determina o centroide geométrico utilizando o método descrito na secção 4.1.1.

```
1 function [ A, C, sucesso ] = computeAC ( P, level )
2
3 %
4 % Determinar centroide geometrico de um poligono
5 %
6 % INPUT: P: matrix 2 by n (=> 3)
7 %         vertices oredenados no sentido anti-horario
8 %
9 % OUTPUT: A: area do poligono
10 %         C: centroide geometrico
11 %         suc: se suc=0: P define um segmento
12 %              caso contrario define um poligono
13 %
```


Apêndice G

Função *centchebyshev.m*

Determina o centro de Chebyshev de um polígono convexo P através da resolução de um problema linear.

```
1 function [x]=centchebyshev(P)
2 %Determinar centro de chebyshev de um poligono convexo
3 %INPUT: P -> poligono
4 %OUTPUT: x: x(1)-> raio da circunferencia maximal
5           % x(2)-> abcissa do centro de chebyshev
6           % x(3)-> ordenada do centro de chebyshev
```


Apêndice H

Script *voronoidiag.m*

Implementação da função *voronoi.m* disponível no MATLAB para determinar o diagram de Voronoi de um conjunto finito de pontos no plano.

```
1 % Definir um conjunto de pontos
2 pontos = [1 1; 2 4; 5 2; 7 5; 9 4; 5 5; 11 4; 10 6; 6 7; 4 9; 8
           8];
3
4 % Calcular o diagrama de Voronoi dos pontos
5 [vx,vy] = voronoi(pontos(:,1), pontos(:,2));
6
7 % Plot
8 scatter(pontos(:,1),pontos(:,2),50, 'filled', 'k')
9 hold on
10 plot(vx,vy,'k')
11 axis equal
12 hold on
```


Apêndice I

Script *testarSS.m*

Implementação do algoritmo para determinar o ponto do esqueleto retilíneo mais distante da fronteira do polígono. Basta definir o polígono P , sobre o qual se pretende implementar o algoritmo, no início do script.

Apêndice J

Função *garcastlomb.m*

Determina o ponto, de uma dada malha, interior ao polígono P com a maior distância à fronteira do polígono.

```
1 function [Cent]= garcastlomb(P,n)
2 %
3 %INPUT: P-Pol gono
4 %      n- permite definir a particao r(r1,r2):
5 %      r1 e r2 que queremos considerar: r1 = (xmax-xmin)/n
6 %
7 %
8 %OUTPUT: Cent - ponto no interior do poligono mais distante da
9 %      sua fronteiraa Cent= [Cx Cy]
```