

1 2 9 0



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Jasmine Yin

**PROCESSOS BILINEARES NA MODELAÇÃO DE
SÉRIES TEMPORAIS**

**Dissertação no âmbito do Mestrado em Matemática, Ramo de Estatística,
Otimização e Matemática Financeira orientada pela Professora Doutora Maria da
Graça Temido e pela Professora Doutora Cristina Martins e apresentada ao
Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia.**

junho de 2023

Processos Bilineares na Modelação de Séries Temporais

Jasmine Yin



UNIVERSIDADE DE
COIMBRA

Mestrado em Matemática

Master in Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

junho 2023

Agradecimentos

A realização desta dissertação de mestrado contou com importantes apoios e incentivos sem os quais não se tornaria possível e aos quais expresso a minha imensa gratidão.

À Professora Cristina Martins e à Professora Maria da Graça Temido, as minhas orientadoras, por todas as sugestões que enriqueceram este trabalho, pelos conhecimentos e competências, pelo rigor e críticas, pelo apoio e paciência.

Às minhas amigas de faculdade Eva, Laura, Lúcia e Sara, que me acompanharam desde início, por todos os momentos, sejam eles bons ou difíceis, pela força e persistência.

À colega de casa e amiga, Mariana Morais, por todos os anos de amizade, pela disponibilidade, incentivo e carinho em todas as ocasiões.

Aos meus irmãos, Mike e Paul, que fingem não se importar, embora os seus atos digam o contrário.

À minha mãe, à minha avó:

谢谢妈妈，阿婆，感谢这么多年来无怨无悔的付出，支持和鼓励，永不停歇的照顾，让我得以全身心投入学业，而不必面对生存的压力，我最大的心愿就是你们永远平安健康。

Resumo

Durante décadas o estudo das séries temporais foi dedicado aos modelos lineares, mas estes podem não ser suficientemente ricos e flexíveis para descrever de modo adequado muitos fenómenos reais com evolução no tempo. De modo a ter em conta diversos aspetos de não linearidade, têm sido propostas na literatura várias classes de modelos. Uma dessas classes é a dos *Modelos Bilineares de ordens p, q, P, Q* , denotados por $BL(p, q, P, Q)$, que se mostrou útil em muitas áreas, como por exemplo, Sismologia, Ciências Biológicas, Ecologia e Engenharia. Tais modelos foram introduzidos por Granger e Andersen, em 1978, e generalizam os modelos ARMA clássicos através da introdução de termos que envolvem produtos de variáveis do processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ e de variáveis do correspondente processo de erro $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$.

Neste trabalho estudam-se propriedades probabilísticas de alguns modelos bilineares, nomeadamente o modelo $BL(1, 0, 1, 1)$ e casos particulares de modelos $BL(0, 0, k, l)$.

No primeiro caso, apresentam-se condições de estacionaridade, estuda-se a estrutura de segunda ordem e é feita uma comparação entre as autocorrelações do modelo $BL(1, 0, 1, 1)$ e as do modelo $AR(1)$, que se obtém do primeiro retirando a parte bilinear.

No segundo caso, também são apresentadas condições de estacionaridade e é estudada a estrutura de segunda ordem. Constata-se que a função de autocorrelação dos modelos estudados coincide com a de um modelo média móvel ou com a de um ruído branco, pelo que é também estudada a estrutura de segunda ordem do processo $(X_t^2, t \in \mathbb{Z})$.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
1.1 Estacionaridade	2
1.2 Outros conceitos e resultados teóricos	3
2 O modelo $BL(1, 0, 1, 1)$	5
2.1 Definição e hipóteses gerais	5
2.2 Estacionaridade	5
2.3 Estrutura de segunda ordem	17
2.4 Comparação das autocorrelações dos modelos $BL(1, 0, 1, 1)$ e $AR(1)$	20
3 Modelos Bilineares Simples	23
3.1 Definição e hipóteses gerais	23
3.2 Estacionaridade forte	23
3.3 Estrutura de segunda ordem	29
3.3.1 Modelo Diagonal	29
3.3.2 Modelo Superdiagonal	31
3.4 Função de autocorrelação de $(X_t^2, t \in \mathbb{Z})$	32
3.4.1 Modelo Diagonal	34
3.4.2 Modelo Superdiagonal	37
Bibliografia	45
Anexo A Código R	47
Anexo B Código Matlab	49

Lista de Figuras

2.1	Trajétória do modelo BL(1,0,1,1) com $a = 0.5$ e $b = 0.1$	13
2.2	Trajétória do modelo BL(1,0,1,1) com $a = 0.8$ e $b = 0.5$	14
2.3	Trajétória do modelo BL(1,0,1,1) com $a = 0.8$ e $b = -0.5$	14
2.4	Trajétória do modelo BL(1,0,1,1) com $a = 0.5$ e $b = 0.8$	14
2.5	Trajétória do modelo BL(1,0,1,1) com $a = 0.5$ e $b = -0.8$	15
2.6	Trajétória do modelo BL(1,0,1,1) com $a = -0.5$ e $b = -0.8$	15
2.7	Trajétória do modelo BL(1,0,1,1) com $a = 0.99$ e $b = 0.2$	16
2.8	Trajétória do modelo BL(1,0,1,1) com $a = 0.99$ e $b = 1.3$	16
2.9	Gráfico de $F(a, 0.5, 1)$, com $-0.866 \leq a \leq 0.866$ e $a \neq 0$	22
3.1	Trajétória do modelo diagonal $b = 0.5$	28
3.2	Trajétória do modelo diagonal $b = 0.99$	28
3.3	Trajétória do modelo superdiagonal $b = 0.5$	28
3.4	Trajétória do modelo superdiagonal $b = 0.99$	29

Capítulo 1

Introdução

Uma série temporal é uma sequência de observações feitas em pontos ou períodos sucessivos de tempo. A análise de uma série temporal é realizada com o intuito de encontrar um modelo matemático que se adapte aos valores observados e a partir do qual se possa descrever, explicar, prever e controlar o fenómeno em causa. Como exemplos destes valores tem-se, em Economia, o Produto Interno Bruto (PIB), o Índice de Preços ao Consumidor, o Índice S&P 500 e as taxas de desemprego; em Meteorologia e Geofísica, o registo da temperatura e da precipitação atmosférica; nas Ciências Sociais, a taxa de natalidade e os dados de migração.

Durante décadas o estudo das séries temporais foi dedicado aos modelos lineares, os quais têm sido amplamente usados com sucesso em muitos campos. Isto acontece porque estes modelos podem ser facilmente analisados e fornecem aproximações razoavelmente boas para o comportamento de numerosas séries temporais da vida real. No entanto, estes modelos podem não ser suficientemente ricos e flexíveis para descrever de modo adequado muitos dos fenómenos reais com evolução do tempo. De modo a ter em conta diversos aspetos de não linearidade, têm sido propostas na literatura várias classes de modelos.

Uma dessas classes é a dos modelos bilineares, que se mostrou útil em muitas áreas, como por exemplo, Sismologia, Ciências Biológicas, Ecologia e Engenharia. Tais modelos foram introduzidos por Granger e Andersen, em 1978 [5].

Na sua forma geral, de acordo com Granger e Andersen, um processo estocástico $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ verifica um modelo bilinear se

$$X_t = \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q c_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{k=1}^P \sum_{\ell=1}^Q b_{k\ell} X_{t-k} \varepsilon_{t-\ell},$$

onde $a_i, c_j, b_{k\ell}$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, $k = 1, \dots, P$, $\ell = 1, \dots, Q$, são constantes reais e o ruído $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ é uma sucessão de variáveis aleatórias reais (v.a.r), independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), com média zero e variância σ^2 , $\sigma > 0$, e tal que ε_t é independente de X_s , $s < t$.

Este modelo bilinear geral é denotado $BL(p, q, P, Q)$ e é uma generalização do modelo linear $ARMA(p, q)$, uma vez que este se obtém do anterior considerando $b_{k\ell} = 0$, $k = 1, \dots, P$, $\ell = 1, \dots, Q$.

Neste trabalho vamos estudar casos particulares do modelo anterior, nomeadamente, o modelo $BL(1, 0, 1, 1)$ definido por

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}X_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

e modelos bilineares simples de ordens k e l , denotado $BLS(k, l)$, definidos por

$$X_t = bX_{t-k}\varepsilon_{t-l} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad k > 0, \quad l > 0,$$

onde a e b são parâmetros reais. O modelo bilinear simples diz-se superdiagonal se $k > l$, diagonal se $k = l$ e subdiagonal se $k < l$.

Esta dissertação está dividida em três capítulos. O primeiro corresponde a esta Introdução, na qual ainda vamos relembrar alguns conceitos e resultados fundamentais para os capítulos seguintes.

O Capítulo 2, baseado em [8], é dedicado à análise probabilística do modelo $BL(1, 0, 1, 1)$. Apresentamos condições de estacionaridade, estudamos a estrutura de segunda ordem e é feita uma comparação entre as autocorrelações do modelo $BL(1, 0, 1, 1)$ e as do modelo $AR(1)$, que se obtém do primeiro considerando $b = 0$.

No Capítulo 3, seguindo [3] e [6], estudamos o modelo $BLS(k, l)$, com destaque para os casos diagonal e superdiagonal (o caso subdiagonal pode ser encontrado em [6]). Este capítulo segue a mesma estrutura do anterior no que diz respeito ao estudo da estacionaridade e à determinação da função de autocorrelação do processo. Verifica-se que a estrutura de segunda ordem de um modelo diagonal coincide com a de um modelo média móvel e que a estrutura de segunda ordem de um modelo superdiagonal coincide com a de um ruído branco. Para obter uma caracterização diferente para os modelos bilineares simples, Granger e Andersen ([5]), sugeriram o estudo de momentos de ordens superiores a 2, em particular o estudo das autocorrelações do processo $(X_t^2, t \in \mathbb{Z})$. Neste sentido, apresentamos condições de estacionaridade deste processo e obtemos a sua função de autocorrelação.

1.1 Estacionaridade

Um dos aspetos a considerar no estudo das séries temporais é a estacionaridade forte que diz respeito à invariância das propriedades probabilísticas ao longo do tempo.

Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ um processo estocástico real.

Definição 1.1.1. *O processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ diz-se fortemente estacionário (ou estritamente estacionário) se*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_k, h \in \mathbb{Z}, (X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \text{ e } (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})$$

têm a mesma lei.

Exemplo. Um processo $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ constituído por variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas é fortemente estacionário.

A estacionaridade forte do processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ implica a estacionaridade forte do processo $(Z_t, t \in \mathbb{Z})$ com $Z_t = f(\dots, X_{t-2}, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, \dots)$, para toda a função mensurável f definida em $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ e com valores em \mathbb{R} (Azencott e Dacunha-Castelle 1984, [1], p.30).

Outra noção importante é a de estacionaridade de segunda ordem também designada estacionaridade fraca.

Definição 1.1.2. Diz-se que o processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ é de segunda ordem se $E(X_t^2) < +\infty, t \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.1.3. Um processo de segunda ordem $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ diz-se fracamente estacionário se

- $E(X_t) = m, t \in \mathbb{Z}$,
- $Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h), h \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}$.

Note-se que, se $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ é fracamente estacionário então, $E(X_t^2)$ e $Var(X_t) = \gamma(0)$ são independentes de $t, t \in \mathbb{Z}$.

As funções $\gamma(h)$ e $\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}, h \in \mathbb{Z}$, designam-se, respetivamente, função de autocovariância e função de autocorrelação do processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ e são funções pares.

Salienta-se que um processo fortemente estacionário de segunda ordem é fracamente estacionário.

1.2 Outros conceitos e resultados teóricos

Definição 1.2.1. Diz-se que a sucessão de variáveis aleatórias reais $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para a variável aleatória real X quase certamente se

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Usamos a notação $X_n \xrightarrow{q.c.} X, n \rightarrow +\infty$.

Definição 1.2.2. Diz-se que sucessão $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em probabilidade para a variável aleatória real X se

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Usamos a notação $X_n \xrightarrow{P} X, n \rightarrow +\infty$.

Definição 1.2.3. Seja $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de variáveis aleatórias reais de quadrado integrável. Diz-se que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para a variável aleatória real X em L^2 (ou em média quadrática) se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[(X_n - X)^2] = 0.$$

Usamos a notação $X_n \xrightarrow{L^2} X, n \rightarrow +\infty$.

Teorema 1.2.1 (Kolmogorov). *Seja $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de variáveis aleatórias reais independentes e identicamente distribuídas com uma variável aleatória real X . Então existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{q.c.} \mu, \quad n \rightarrow +\infty,$$

se e só se $E(|X|) < +\infty$. Neste caso, $\mu = E(X)$.

Teorema 1.2.2 ([2], Teo.16.6 e pg.273). *Seja $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de variáveis aleatórias reais não negativas. Então*

$$E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} E(X_n).$$

Nota Os membros desta igualdade podem ser iguais a $+\infty$.

Teorema 1.2.3 ([4], Prop.3.14). *Se X e Y são variáveis aleatórias reais admitindo momento de segunda ordem, então $[E(|XY|)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$.*

Teorema 1.2.4 (Desigualdade de Jensen). *Seja Z uma variável aleatória real tomando valores num intervalo real I e tal que $E(Z)$ existe. Seja $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então,*

$$\varphi[E(Z)] \leq E[\varphi(Z)]. \quad (1.1)$$

Nota 1 Se φ é estritamente convexa, então tem-se igualdade em (1.1) se e só se Z é quase certamente constante ([7], p.45).

Nota 2 (Consequência do Corolário 1.3.10 de [7]). *Se a função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, com I intervalo aberto de \mathbb{R} , tem derivada de segunda ordem estritamente positiva, então φ é estritamente convexa.*

Capítulo 2

O modelo $BL(1, 0, 1, 1)$

2.1 Definição e hipóteses gerais

Consideremos o processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ tal que X_t obedece ao modelo bilinear, $BL(1, 0, 1, 1)$, ou seja,

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}X_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

onde a, b são parâmetros reais e $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ é um processo constituído por variáveis aleatórias reais independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância σ^2 , $\sigma > 0$. Assumimos ainda que ε_t é independente de X_s , $s < t$ e que se verificam as duas hipóteses seguintes:

- \mathcal{H}_1 : ε_t^2 não é, quase certamente, uma função linear de $\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}$.
- \mathcal{H}_2 : $E(|\ln |a + b\varepsilon_t||) < +\infty$.

Notemos que a hipótese \mathcal{H}_1 não é muito restritiva, uma vez que é equivalente a dizer que a v.a.r. ε_t não é discreta com suporte formado apenas por um ou dois pontos.

Salientamos que, nas condições indicadas, o processo $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ é fortemente e fracamente estacionário.

2.2 Estacionaridade

No estudo do modelo bilinear vamos começar por garantir a existência e unicidade de uma solução fortemente estacionária para a equação (2.1).

Teorema 2.2.1. *Se $|a| < 1$ e $a^2 + b^2\sigma^2 \leq 1$, então existe uma solução fortemente estacionário que satisfaz (2.1) dada por*

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^j (a + b\varepsilon_{t-k}) \right) \varepsilon_{t-j}, \quad (2.2)$$

sendo esta série quase certamente convergente. Além disso, o processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ definido por (2.2) é a única solução de (2.1) no sentido da convergência em probabilidade.

Demonstração. Usando recursivamente a relação (2.1), temos

$$\begin{aligned}
X_t &= \varepsilon_t + (a + b\varepsilon_{t-1})X_{t-1} \\
&= \varepsilon_t + (a + b\varepsilon_{t-1})[\varepsilon_{t-1} + (a + b\varepsilon_{t-2})X_{t-2}] \\
&= \varepsilon_t + a\varepsilon_{t-1} + a^2X_{t-2} + ab\varepsilon_{t-2}X_{t-2} + b\varepsilon_{t-1}^2 + ab\varepsilon_{t-1}X_{t-2} + b^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}X_{t-2} \\
&= \varepsilon_t + (a + b\varepsilon_{t-1})\varepsilon_{t-1} + (a^2 + ab\varepsilon_{t-2} + ab\varepsilon_{t-1} + b^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})X_{t-2} \\
&= \varepsilon_t + (a + b\varepsilon_{t-1})\varepsilon_{t-1} + (a + b\varepsilon_{t-1})(a + b\varepsilon_{t-2})X_{t-2} \\
&= \dots \\
&= \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{n-1} M(t, j)\varepsilon_{t-j} + M(t, n)X_{t-n}, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $M(t, j) = \prod_{k=1}^j (a + b\varepsilon_{t-k})$, $j = 1, \dots, n$, para cada $t \in \mathbb{Z}$, convencionando $\sum_{j=1}^0 M(t, j)\varepsilon_{t-j} = 0$.

Vamos provar que:

- (1) a série $\sum_{n=1}^{+\infty} M(t, n)\varepsilon_{t-n}$ converge quase certamente,
- (2) o processo $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ dado por $Y_t = \varepsilon_t + \sum_{n=1}^{+\infty} M(t, n)\varepsilon_{t-n}$ verifica (2.1) e é fortemente estacionário,
- (3) a solução $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ é a única solução fortemente estacionária de (2.1) no sentido da convergência em probabilidade.

Comecemos por provar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} M(t, n)\varepsilon_{t-n}$ é quase certamente convergente.

Temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \ln |M(t, n)| &= \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{k=1}^n (a + b\varepsilon_{t-k}) \right| \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |a + b\varepsilon_{t-k}| \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \ln |a + b\varepsilon_{t-k}|^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \ln (a + b\varepsilon_{t-k})^2.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Pelo teorema de Kolmogorov, vem

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \ln (a + b\varepsilon_{t-k})^2 \xrightarrow{q.c.} E \left[\frac{1}{2} \ln (a + b\varepsilon_t)^2 \right] = \frac{1}{2} E[\ln(a + b\varepsilon_t)^2], \quad n \rightarrow +\infty, \tag{2.5}$$

uma vez que, pela hipótese \mathcal{H}_2 , existe $E(\ln(a + b\varepsilon_t)^2)$.

Considere-se a função $\varphi(x) = -\ln x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Esta função é estritamente convexa, uma vez que $\varphi''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Então, para $b \neq 0$, a desigualdade de Jensen aplicada à v.a.r. $(a + b\varepsilon_t)^2$ resulta em

$$E[\ln(a + b\varepsilon_t)^2] < \ln E[(a + b\varepsilon_t)^2], \quad (2.6)$$

tendo em conta que $(a + b\varepsilon_t)^2$ não é quase certamente constante, pela hipótese \mathcal{H}_1 .

Como $E(\varepsilon_t) = 0$ e $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$, tem-se

$$\ln E[(a + b\varepsilon_t)^2] = \ln E(a^2 + 2ab\varepsilon_t + b^2\varepsilon_t^2) = \ln(a^2 + b^2\sigma^2) \leq 0, \quad (2.7)$$

pois $a^2 + b^2\sigma^2 \leq 1$.

De (2.6) e (2.7), resulta

$$E[\ln(a + b\varepsilon_t)^2] < 0.$$

Por outro lado, se $b = 0$, também se tem $E[\ln(a + b\varepsilon_t)^2] < 0$, pois $\ln a^2 = 2\ln|a| < 0$, devido à hipótese $|a| < 1$. Desde modo, de (2.4) e (2.5), resulta

$$\frac{1}{n} \ln |M(t, n)| \xrightarrow{q.c.} \beta < 0, \quad (2.8)$$

com $\beta = \frac{1}{2} E[\ln(a + b\varepsilon_t)^2]$. Então

$$|M(t, n)|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{q.c.} e^\beta < 1, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Relativamente a ε_{t-n} , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \varepsilon_{t-n} &= \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_{t-j} - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_{t-j} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{t-j} - \frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_{t-j} \xrightarrow{q.c.} 0, \quad n \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2.9)$$

uma vez que, pelo teorema de Kolmogorov e pelo fato de existir $E(\varepsilon_t)$, $t \in \mathbb{Z}$, temos

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{t-j} \xrightarrow{q.c.} E(\varepsilon_t), \quad n \rightarrow +\infty$$

Então, $\varepsilon_{t-n} \leq n$, *q.c.*, para n suficientemente grande, o que implica,

$$|M(t, n)\varepsilon_{t-n}| = \left(|M(t, n)|^{\frac{1}{n}} \right)^n |\varepsilon_{t-n}| \leq \rho^n n,$$

para qualquer ρ tal que $e^\beta < \rho < 1$ e para n suficientemente grande.

Como a série numérica de termo geral $\rho^n n$ é convergente, podemos afirmar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} M(t, n)\varepsilon_{t-n}$ converge quase certamente, definindo assim um processo fortemente estacionário, por ser função

mensurável de ε_{t-s} , $s \in \mathbb{N}$, e o processo $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ é fortemente estacionário. Consequentemente, o processo $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ tal que

$$Y_t = \varepsilon_t + \sum_{n=1}^{+\infty} M(t, n) \varepsilon_{t-n}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

é também fortemente estacionário.

De seguida vamos provar que este processo satisfaz a equação de recorrência (2.1). De facto,

$$\begin{aligned} & (a + b\varepsilon_{t-1})Y_{t-1} + \varepsilon_t = \\ &= aY_{t-1} + b\varepsilon_{t-1}Y_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= a \left(\varepsilon_{t-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_{t-1-n} \prod_{k=1}^n (a + b\varepsilon_{t-1-k}) \right) + b\varepsilon_{t-1} \left(\varepsilon_{t-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_{t-1-n} \prod_{k=1}^n (a + b\varepsilon_{t-1-k}) \right) + \varepsilon_t \\ &= a\varepsilon_{t-1} + a \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_{t-1-n} \prod_{k=1}^n (a + b\varepsilon_{t-1-k}) + b\varepsilon_{t-1}^2 + b \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_{t-1-n} \varepsilon_{t-1} \prod_{k=1}^n (a + b\varepsilon_{t-1-k}) + \varepsilon_t \\ &= (a + b\varepsilon_{t-1})\varepsilon_{t-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \varepsilon_{t-1-n} \left[\prod_{k=1}^n (a + b\varepsilon_{t-1-k}) \right] (a + b\varepsilon_{t-1}) \right\} + \varepsilon_t \\ &= (a + b\varepsilon_{t-1})\varepsilon_{t-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_{t-1-n} \prod_{k=0}^n (a + b\varepsilon_{t-1-k}) + \varepsilon_t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_{t-1-n} \prod_{k=0}^n (a + b\varepsilon_{t-1-k}) + \varepsilon_t \\ &= \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon_{t-s} \prod_{k=0}^{s-1} (a + b\varepsilon_{t-1-k}) + \varepsilon_t \\ &= \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon_{t-s} \prod_{k=1}^s (a + b\varepsilon_{t-k}) + \varepsilon_t = Y_t. \end{aligned}$$

Finalmente, vamos verificar que a solução encontrada é a única solução fortemente estacionária da equação (2.1), no sentido da convergência em probabilidade.

Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ um processo fortemente estacionário que é solução da equação (2.1). Então, como se provou em (2.3),

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{n-1} M(t, j) \varepsilon_{t-j} + M(t, n) X_{t-n}.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} M(t, n) \varepsilon_{t-n}$ é quase certamente convergente, também é convergente em probabilidade.

Por outro lado, tem-se $M(t, n) X_{t-n} \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow +\infty$.

Com efeito, uma vez que $\frac{1}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$, e o limite em (2.8) é finito e estritamente negativo, tem-se necessariamente,

$$\ln |M(t, n)| \xrightarrow{q.c.} -\infty, \quad n \rightarrow +\infty,$$

e portanto $|M(t, n)| \xrightarrow{q.c.} 0, n \rightarrow +\infty$.

Então também se tem $|M(t, n)| \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow +\infty$.

Assim, como $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ é fortemente estacionário, X_{t-n} e X_t têm a mesma distribuição, pelo que

$$M(t, n)X_{t-n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

Logo

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{n=1}^{+\infty} M(t, n)\varepsilon_{t-n},$$

no sentido da convergência em probabilidade. □

Apresentamos a seguir uma representação do processo (2.1) que será útil no que se segue.

Seja $(Z_t, t \in \mathbb{Z})$ o processo definido por

$$Z_t = aX_t + b\varepsilon_t X_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (2.10)$$

O modelo bilinear (2.1) admite então a representação

$$X_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.11)$$

$$Z_t = (a + b\varepsilon_t)Z_{t-1} + (a + b\varepsilon_t)\varepsilon_t. \quad (2.12)$$

O teorema seguinte estabelece uma condição necessária para a existência de um processo estacionário de segunda ordem, $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, que satisfaz o modelo (2.1).

Teorema 2.2.2. *Suponhamos que existe um processo estacionário de segunda ordem, $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, que satisfaz a equação (2.1) e que $\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}$, admite momento de quarta ordem. Então $a^2 + b^2\sigma^2 < 1$.*

Demonstração. De (2.11) e tendo em conta que X_t e ε_t são de quadrado integrável, deduzimos que Z_t é de quadrado integrável. Além disso, $E(Z_t)$ e $E(Z_t^2)$ são independentes de $t, t \in \mathbb{Z}$. De facto, como $Z_t = X_{t+1} - \varepsilon_{t+1}$ e $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ é estacionário de segunda ordem, temos $E(Z_t) = E(X_t)$, que é independente de t .

Por outro lado, temos $Z_t^2 = X_{t+1}^2 + \varepsilon_{t+1}^2 - 2X_{t+1}\varepsilon_{t+1}$ e, de (2.10), concluímos que $E(X_t\varepsilon_t)$ existe e é independente de t , logo $E(Z_t^2)$ é independente de t .

Começemos por calcular $E(Z_t)$ a partir de (2.12). Tendo em conta que ε_t é independente de Z_{t-1} e que ε_t tem média zero e variância σ^2 , obtemos

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= E[(a + b\varepsilon_t)Z_{t-1} + (a + b\varepsilon_t)\varepsilon_t] \\ &= E(aZ_{t-1} + b\varepsilon_t Z_{t-1} + a\varepsilon_t + b\varepsilon_t^2) \\ &= E(aZ_{t-1}) + E(b\varepsilon_t Z_{t-1}) + E(a\varepsilon_t) + E(b\varepsilon_t^2) \\ &= aE(Z_{t-1}) + b\sigma^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Se nesta igualdade tivermos $a = 1$, então $b = 0$. No entanto, neste caso teríamos, de (2.1), $Var(X_t) = Var(X_{t-1}) + \sigma^2$, o que implicaria $\sigma = 0$. Desde modo, consideramos $a \neq 1$.

De (2.13) temos então

$$E(Z_t) = aE(Z_{t-1}) + b\sigma^2 \iff E(Z_t) = aE(Z_t) + b\sigma^2 \iff E(Z_t) = \frac{b\sigma^2}{1-a}. \quad (2.14)$$

Usando as igualdades (2.12) e (2.13), obtemos

$$\begin{aligned} Z_t - E(Z_t) &= (a + b\varepsilon_t)Z_{t-1} + (a + b\varepsilon_t)\varepsilon_t - aE(Z_{t-1}) - b\sigma^2 \\ &= aZ_{t-1} + b\varepsilon_t Z_{t-1} + a\varepsilon_t + b\varepsilon_t^2 - aE(Z_{t-1}) - b\sigma^2 + b\varepsilon_t E(Z_{t-1}) - b\varepsilon_t E(Z_{t-1}) \\ &= (a + b\varepsilon_t)[Z_{t-1} - E(Z_{t-1})] + [a + bE(Z_{t-1})]\varepsilon_t + b(\varepsilon_t^2 - \sigma^2). \end{aligned}$$

De seguida vamos calcular a variância de Z_t , $t \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} Var(Z_t) &= E\left[(Z_t - E(Z_t))^2\right] \\ &= E\left[\left((a + b\varepsilon_t)[Z_{t-1} - E(Z_{t-1})]\right)^2\right] + E\left[\left([a + bE(Z_{t-1})]\varepsilon_t + b(\varepsilon_t^2 - \sigma^2)\right)^2\right] \\ &\quad + 2E\left[(a + b\varepsilon_t)[Z_{t-1} - E(Z_{t-1})]\left([a + bE(Z_{t-1})]\varepsilon_t + b(\varepsilon_t^2 - \sigma^2)\right)\right]. \end{aligned}$$

Para a primeira parcela desta soma temos

$$\begin{aligned} E\left[\left((a + b\varepsilon_t)[Z_{t-1} - E(Z_{t-1})]\right)^2\right] &= E\left[\left((a + b\varepsilon_t)\right)^2\right]E\left[\left(Z_{t-1} - E(Z_{t-1})\right)^2\right] \\ &= (a^2 + b^2\sigma^2)Var(Z_t), \end{aligned}$$

pois Z_{t-1} e ε_t são independentes.

Relativamente à segunda parcela, atendendo a que

$$E\left[\left(a + \frac{b^2\sigma^2}{1-a}\right)\varepsilon_t + b(\varepsilon_t^2 - \sigma^2)\right] = \left(a + \frac{b^2\sigma^2}{1-a}\right)E(\varepsilon_t) + b[E(\varepsilon_t^2) - \sigma^2] = 0,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} E\left[\left([a + bE(Z_{t-1})]\varepsilon_t + b(\varepsilon_t^2 - b\sigma^2)\right)^2\right] &= E\left[\left(\left(a + \frac{b^2\sigma^2}{1-a}\right)\varepsilon_t + b(\varepsilon_t^2 - \sigma^2)\right)^2\right] \\ &= Var\left[\left(a + \frac{b^2\sigma^2}{1-a}\right)\varepsilon_t + b(\varepsilon_t^2 - \sigma^2)\right] \\ &= Var\left[\left(a + \frac{b^2\sigma^2}{1-a}\right)\varepsilon_t + b\varepsilon_t^2 - b\sigma^2\right] \\ &= Var\left[\left(a + \frac{b^2\sigma^2}{1-a}\right)\varepsilon_t + b\varepsilon_t^2\right]. \end{aligned}$$

Finalmente, conclui-se que a terceira parcela é nula, tendo em conta a independência entre Z_{t-1} e ε_t . Com efeito,

$$\begin{aligned}
& E \left[(a + b\varepsilon_t) [Z_{t-1} - E(Z_{t-1})] \left(\left(a + \frac{b^2\sigma^2}{1-a} \right) \varepsilon_t + b(\varepsilon_t^2 - \sigma^2) \right) \right] \\
&= E \left\{ \left[(a + b\varepsilon_t) \left(\left(a + \frac{b^2\sigma^2}{1-a} \right) \varepsilon_t + b(\varepsilon_t^2 - \sigma^2) \right) \right] [Z_{t-1} - E(Z_{t-1})] \right\} \\
&= E \left[(a + b\varepsilon_t) \left(\left(a + \frac{b^2\sigma^2}{1-a} \right) \varepsilon_t + b(\varepsilon_t^2 - \sigma^2) \right) \right] E [Z_{t-1} - E(Z_{t-1})] \\
&= E \left[(a + b\varepsilon_t) \left(\left(a + \frac{b^2\sigma^2}{1-a} \right) \varepsilon_t + b(\varepsilon_t^2 - \sigma^2) \right) \right] [E(Z_{t-1}) - E(Z_{t-1})] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$Var(Z_t) = (a^2 + b^2\sigma^2)Var(Z_t) + Var \left[\left(a + \frac{b^2\sigma^2}{1-a} \right) \varepsilon_t + b\varepsilon_t^2 \right]. \quad (2.15)$$

Note-se que a última parcela de (2.15) é estritamente positiva, atendendo à hipótese \mathcal{H}_1 . Consequentemente,

$$(1 - a^2 - b^2\sigma^2)Var(Z_t) > 0$$

pelo que $a^2 + b^2\sigma^2 < 1$, uma vez que $Var(Z_t) > 0$. \square

O teorema seguinte estabelece uma condição suficiente para a convergência quase certa e em L^2 do processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ definido por (2.2).

Teorema 2.2.3. *Suponhamos que $\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}$, admite momento de quarta ordem e que $a^2 + b^2\sigma^2 < 1$. Então o processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ com X_t definido por (2.2) converge quase certamente e em L^2 .*

Demonstração. Em primeiro lugar, note-se que a condição $a^2 + b^2\sigma^2 < 1$ implica $|a| < 1$, logo, pelo teorema 2.2.1 fica concluída a convergência quase certa.

Para provar a convergência em L^2 , vamos verificar que a sucessão de v.a.r. $(S_{t,n})_{n \in \mathbb{N}}, t \in \mathbb{Z}$, definida por

$$S_{t,n} = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^n M(t, j)\varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

é uma sucessão de Cauchy em L^2 , isto é, $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|S_{t,n} - S_{t,m}\| = 0$, onde $\|\cdot\|$ representa a norma em L^2 .

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$, sem perda de generalidade. Tem-se

$$\begin{aligned}
\|S_{t,n} - S_{t,m}\| &= \left\| \varepsilon_t + \sum_{j=1}^n M(t, j)\varepsilon_{t-j} - \varepsilon_t - \sum_{j=1}^m M(t, j)\varepsilon_{t-j} \right\| = \left\| \sum_{j=m+1}^n M(t, j)\varepsilon_{t-j} \right\| \\
&\leq \sum_{j=m+1}^n \|M(t, j)\varepsilon_{t-j}\|.
\end{aligned} \quad (2.16)$$

Tendo em conta que as v.a.r. ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, são i.i.d. com média zero e variância σ^2 , temos

$$\begin{aligned} \|M(t, j)\varepsilon_{t-j}\| &= \sqrt{E \left[(M(t, j)\varepsilon_{t-j})^2 \right]} \\ &= \sqrt{E \left[(a + b\varepsilon_{t-1})^2 (a + b\varepsilon_{t-2})^2 \dots (a + b\varepsilon_{t-(j-1)})^2 (a + b\varepsilon_{t-j})^2 \varepsilon_{t-j}^2 \right]} \\ &= \sqrt{E \left[(a + b\varepsilon_{t-1})^2 \right] E \left[(a + b\varepsilon_{t-2})^2 \right] \dots E \left[(a + b\varepsilon_{t-(j-1)})^2 \right] E \left[(a + b\varepsilon_{t-j})^2 \varepsilon_{t-j}^2 \right]} \\ &= \sqrt{\left[E \left[(a + b\varepsilon_t)^2 \right] \right]^{j-1} E \left[(a + b\varepsilon_t)^2 \varepsilon_t^2 \right]} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2\sigma^2)^{j-1} E \left[(a + b\varepsilon_t)^2 \varepsilon_t^2 \right]}. \end{aligned}$$

Note-se que a existência de $E(\varepsilon_t^4)$ implica a existência de $E \left[(a + b\varepsilon_t)^2 \varepsilon_t^2 \right]$.

Denotando $C = E \left[(a + b\varepsilon_t)^2 \varepsilon_t^2 \right]$, vem

$$\sum_{j=m+1}^n \|M(t, j)\varepsilon_{t-j}\| = \sum_{j=m+1}^n \sqrt{(a^2 + b^2\sigma^2)^{j-1}} \times C = C^{\frac{1}{2}} \times \sum_{j=m+1}^n \left[\sqrt{a^2 + b^2\sigma^2} \right]^{j-1}.$$

Aqui temos a soma de $n - m$ termos de uma progressão geométrica com razão $r = \sqrt{a^2 + b^2\sigma^2} < 1$, pelo que

$$\begin{aligned} \sum_{j=m+1}^n \|M(t, j)\varepsilon_{t-j}\| &= C^{\frac{1}{2}} \times r^m \frac{1 - r^{n-m}}{1 - r} \\ &= C^{\frac{1}{2}} \times \frac{r^m - r^n}{1 - r} \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Deste modo, atendendo à desigualdade (2.16), temos $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|S_{t, n} - S_{t, m}\| = 0$, $t \in \mathbb{Z}$, logo $S_{t, n} \xrightarrow{L^2} X_t$, $n \rightarrow +\infty$.

Como o espaço L^2 é completo, concluímos que $X_t \in L^2$. □

Como consequência dos resultados anteriores temos o seguinte:

Corolário 2.2.1. *Suponhamos que ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, admite momento de quarta ordem. Então existe um processo fortemente estacionário de quadrado integrável, $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, satisfazendo (2.1) se e só se $a^2 + b^2\sigma^2 < 1$.*

Verificamos que

$$a^2 + b^2\sigma^2 < 1 \iff a^2 + \frac{b^2}{(1/\sigma)^2} < 1,$$

pelo que os pontos (a, b) para os quais o modelo $BL(1, 0, 1, 1)$ é fortemente e fracamente estacionário situam-se no interior da elipse de centro $(0, 0)$ e com semieixos horizontal e vertical iguais a 1 e $\frac{1}{\sigma}$.

Nas Figuras 2.1 a 2.5 apresentam-se trajetórias dos seguintes modelos $BL(1,0,1,1)$ estacionários:

- $X_t = 0.5X_{t-1} + 0.1X_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
- $X_t = 0.8X_{t-1} + 0.5X_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
- $X_t = 0.8X_{t-1} - 0.5X_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
- $X_t = 0.5X_{t-1} + 0.8X_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
- $X_t = -0.5X_{t-1} + 0.8X_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
- $X_t = 0.5X_{t-1} - 0.8X_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Em todos os casos considerou-se ε_t com distribuição $N(0,1)$ e todas as trajetórias foram obtidas com base na mesma série de 1000 valores simulados desta distribuição.

Na Figura 2.1, que corresponde a um caso em que o coeficiente do termo bilinear, b , é substancialmente menor do que o coeficiente do termo autorregressivo, a , constatamos que a trajetória é semelhante à de uma série linear.

Quanto à Figura 2.2, embora b seja menor que a , a série apresenta picos repentinos (note-se que $0.8^2 + 0.5^2 = 0.89$ é um valor próximo de 1, ou seja, o par $(0.8, 0.5)$ está próximo da fronteira da região de estacionaridade).

Na Figura 2.3 observamos picos repentinos negativos. Note-se que, neste caso, temos um valor negativo do coeficiente do termo bilinear.

Comparando a Figura 2.4 com a Figura 2.2, observamos que os picos são mais repentinos no primeiro caso. Note-se que, neste caso, coeficiente do termo bilinear é maior.

Na Figura 2.3 e na Figura 2.5, construídas com coeficientes negativos do termo bilinear e coeficientes positivos do termo autorregressivo, os picos de maior amplitude correspondem negativos da série.

Finalmente, na Figura 2.6, na qual são negativos os dois coeficientes do modelo, as amplitudes dos picos positivos e negativos são semelhantes.

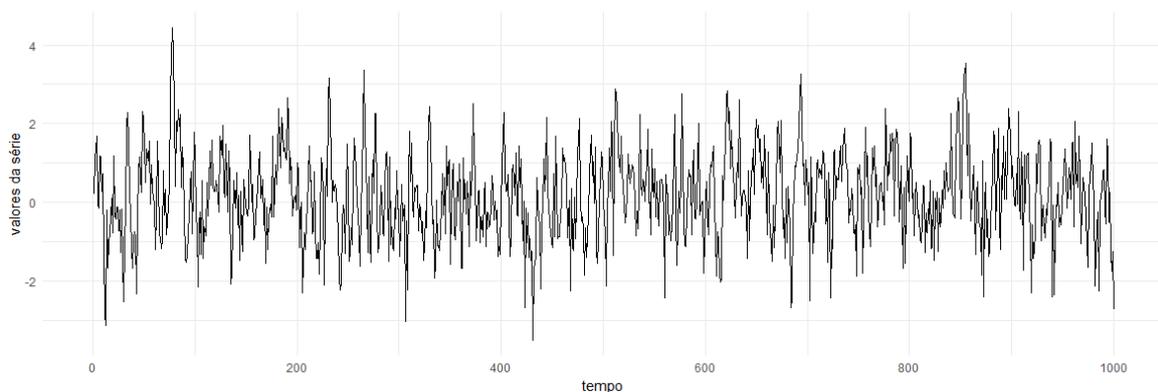


Fig. 2.1 Trajetória do modelo $BL(1,0,1,1)$ com $a = 0.5$ e $b = 0.1$.

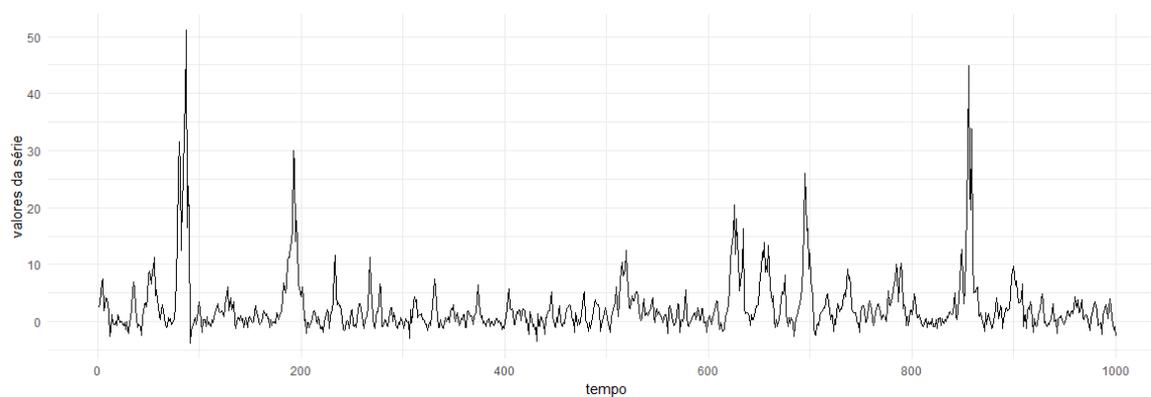


Fig. 2.2 Trajetória do modelo $BL(1,0,1,1)$ com $a = 0.8$ e $b = 0.5$.

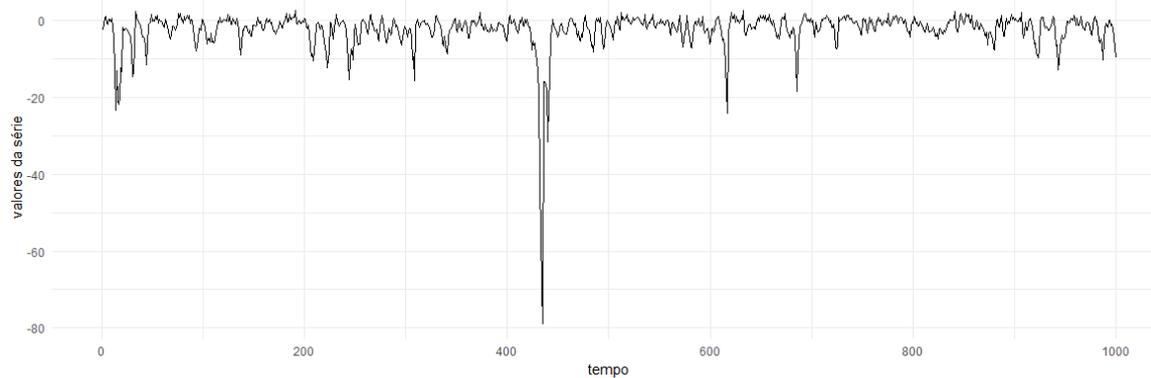


Fig. 2.3 Trajetória do modelo $BL(1,0,1,1)$ com $a = 0.8$ e $b = -0.5$.

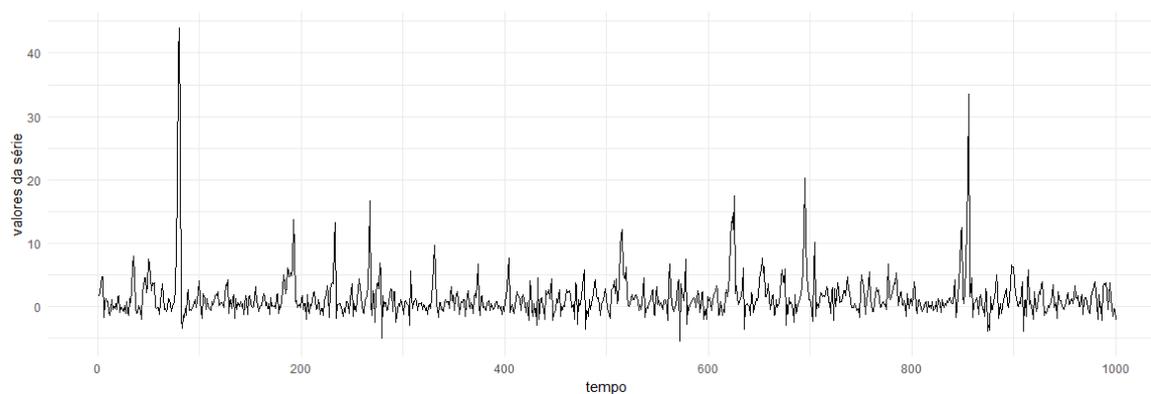


Fig. 2.4 Trajetória do modelo $BL(1,0,1,1)$ com $a = 0.5$ e $b = 0.8$.

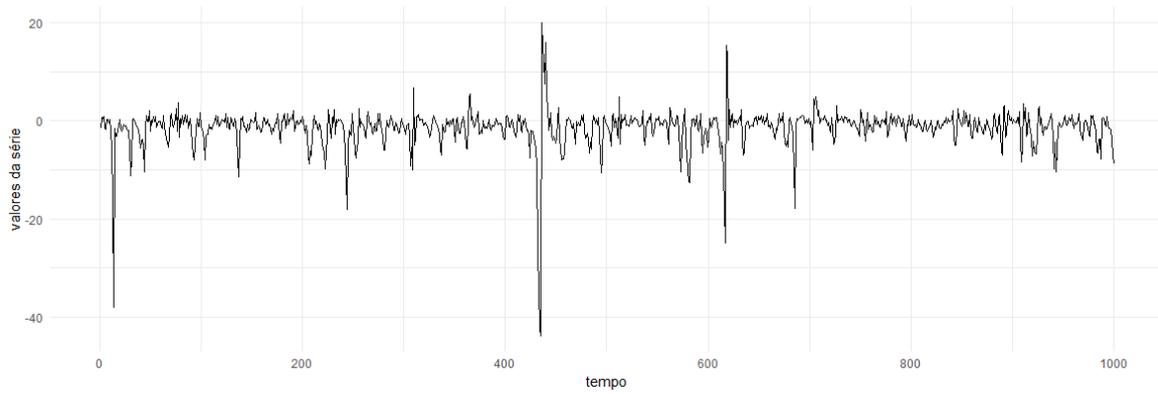


Fig. 2.5 Trajetória do modelo BL(1,0,1,1) com $a = 0.5$ e $b = -0.8$.

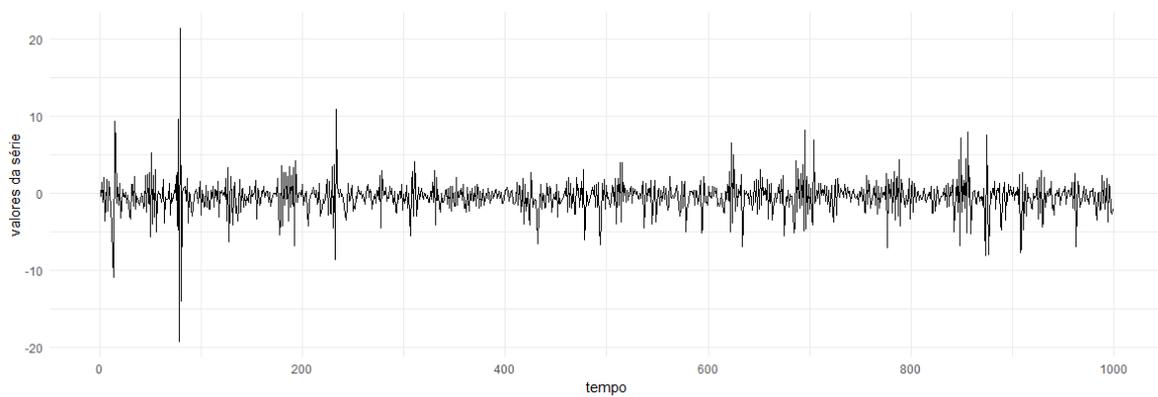


Fig. 2.6 Trajetória do modelo BL(1,0,1,1) com $a = -0.5$ e $b = -0.8$.

Nas Figuras 2.7 e 2.8 apresentam-se trajetórias dos modelos $BL(1,0,1,1)$ não estacionários

- $X_t = 0.99X_{t-1} + 0.2X_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
- $X_t = 0.99X_{t-1} + 1.3X_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Apesar de ambos os modelos serem não estacionários ($0.99^2 + 0.2^2 = 1.02$ e $0.99^2 + 1.3^2 = 2.67$), notamos que a amplitude dos picos da trajetória da Figura 2.7 é muito reduzida quando comparada com a amplitude dos picos da trajetória da Figura 2.8 (na Figura 2.7 o maior valor da série é aproximadamente 80, enquanto na Figura 2.8 é superior a 2×10^6). Mais, os picos que se observam na Figura 2.8 são de tal amplitude que não são visíveis as flutuações da série para os índices do tempo que se afastam da zona onde os picos se encontram. Note-se que, neste caso, o par (a, b) está mais afastado da fronteira da região de estacionaridade do que no primeiro modelo.

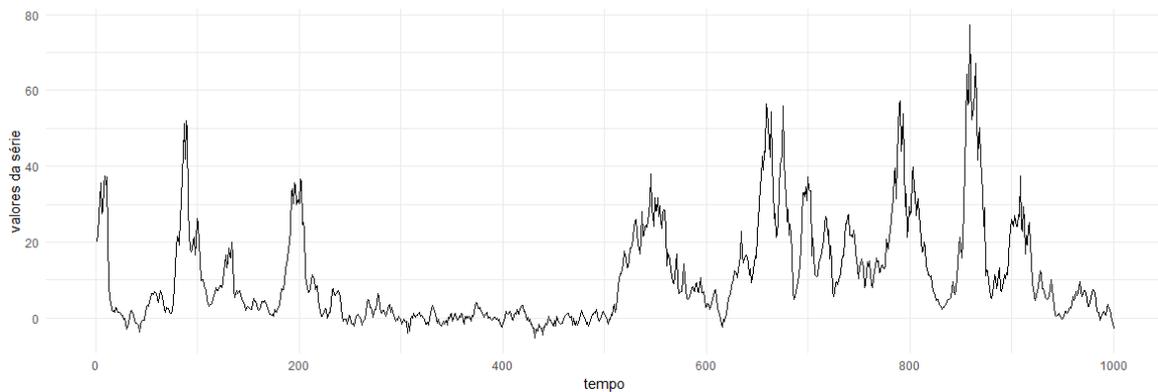


Fig. 2.7 Trajetória do modelo $BL(1,0,1,1)$ com $a = 0.99$ e $b = 0.2$.

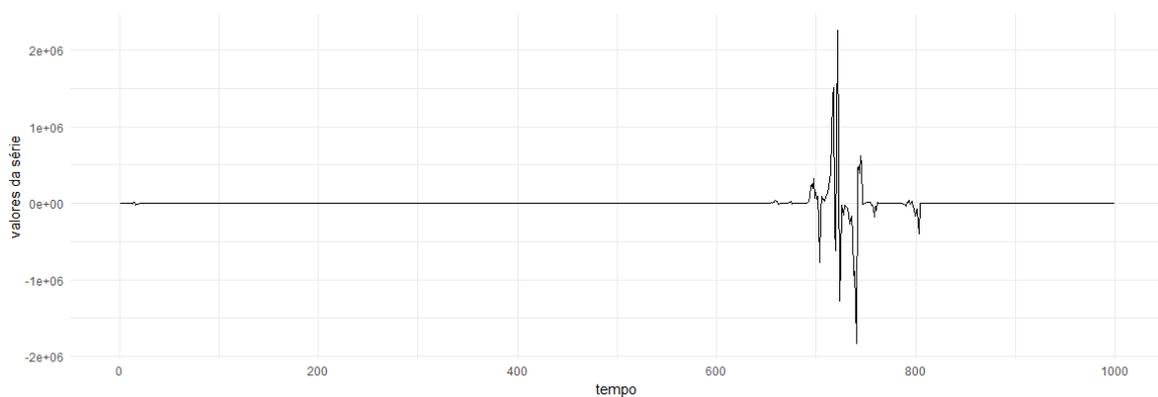


Fig. 2.8 Trajetória do modelo $BL(1,0,1,1)$ com $a = 0.99$ e $b = 1.3$.

Todas as trajetórias foram obtidas com recurso ao software *Rstudio* (versão 4.2.0).

2.3 Estrutura de segunda ordem

Vamos agora estudar a estrutura de segunda ordem do modelo bilinear, isto é, determinar as funções média, de autocovariância e de autocorrelação.

Teorema 2.3.1. *Suponhamos que ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, admite momento de quarta ordem e que $a^2 + b^2\sigma^2 < 1$. Então, o processo definido por (2.1) verifica*

$$(1) E(X_t) = \frac{b\sigma^2}{1-a},$$

$$(2) E(X_t^2) = \frac{-b^2\sigma^4 + 2b^2E(X_t)\mu_3 + b^2\mu_4 + \sigma^2 + 4abE(X_t)\sigma^2 + 2ab\mu_3}{1-a^2-b^2\sigma^2},$$

$$(3) \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = a^{h-1} \left(aE(X_t^2) + b\mu_3 + b^2\sigma^4 \frac{(1-2a)}{(1-a)^2} \right), \quad h \in \mathbb{N},$$

onde $\mu_k = E(\varepsilon_t^k)$, $k = 3, 4$, $t \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Em primeiro lugar, note-se que, pelo Corolário 2.2.1, o processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ é fortemente e fracamente estacionário e, conseqüentemente, o processo $(Z_t, t \in \mathbb{Z})$ também é fortemente e fracamente estacionário.

Começemos por calcular a esperança de X_t , $t \in \mathbb{Z}$. Tendo em conta que $Z_{t-1} = X_t - \varepsilon_t$ e $E(\varepsilon_t) = 0$, $t \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$E(X_t) = E(Z_t) = \frac{b\sigma^2}{1-a}. \quad (2.17)$$

De seguida, vamos calcular o momento de segunda ordem de X_t , $t \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} E(X_t^2) &= E\left[(aX_{t-1} + b\varepsilon_{t-1}X_{t-1} + \varepsilon_t)^2\right] \\ &= a^2E(X_{t-1}^2) + b^2E(X_{t-1}^2\varepsilon_{t-1}^2) + \sigma^2 + 2abE(X_{t-1}^2\varepsilon_{t-1}). \end{aligned}$$

Como os processos envolvidos são fortemente estacionários, podemos escrever

$$E(X_t^2) = a^2E(X_{t-1}^2) + b^2E(X_{t-1}^2\varepsilon_t^2) + \sigma^2 + 2abE(X_{t-1}^2\varepsilon_t). \quad (2.18)$$

Vamos calcular separadamente $E(X_{t-1}^2\varepsilon_t)$ e $E(X_{t-1}^2\varepsilon_t^2)$. Temos

$$\begin{aligned} E(X_{t-1}^2\varepsilon_t) &= E\left[(Z_{t-1} + \varepsilon_t)^2\varepsilon_t\right] = E(Z_{t-1}^2\varepsilon_t) + 2E(Z_{t-1}\varepsilon_t^2) + E(\varepsilon_t^3) \\ &= 2E(Z_t)\sigma^2 + \mu_3, \end{aligned} \quad (2.19)$$

pois $(Z_t, t \in \mathbb{Z})$ é estacionário e Z_{t-1} é independente de ε_t . Quanto a $E(X_{t-1}^2\varepsilon_t^2)$, temos

$$E(X_{t-1}^2\varepsilon_t^2) = E\left[(Z_{t-1} + \varepsilon_t)^2\varepsilon_t^2\right] = E(Z_{t-1}^2\varepsilon_t^2) + 2E(Z_{t-1}\varepsilon_t^3) + E(\varepsilon_t^4) = \sigma^2E(Z_{t-1}^2) + 2E(Z_t)\mu_3 + \mu_4.$$

De (2.10), vem $E(Z_{t-1}^2) = E(X_t^2) + \sigma^2 - 2E(X_t\varepsilon_t) = E(X_t^2) - \sigma^2$, porque

$$E(X_t\varepsilon_t) = E(aX_{t-1}\varepsilon_t + bX_{t-1}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t + \varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_t^2), \quad (2.20)$$

pois ε_t é independente de X_{t-1} e de ε_{t-1} , $t \in \mathbb{Z}$, então

$$E(X_t^2 \varepsilon_t^2) = \sigma^2 E(X_t^2) - \sigma^4 + 2E(Z_t)\mu_3 + \mu_4. \quad (2.21)$$

Assim,

$$E(X_t^2) = a^2 E(X_{t-1}^2) + b^2 [\sigma^2 E(X_t^2) - \sigma^4 + 2E(Z_t)\mu_3 + \mu_4] + \sigma^2 + 2ab[2E(Z_t)\sigma^2 + \mu_3], \quad (2.22)$$

o que é equivalente a

$$(1 - a^2 - b^2 \sigma^2) E(X_t^2) = -b^2 \sigma^4 + 2b^2 E(Z_t)\mu_3 + b^2 \mu_4 + \sigma^2 + 4ab E(Z_t)\sigma^2 + 2ab \mu_3,$$

obtendo-se

$$E(X_t^2) = \frac{-b^2 \sigma^4 + 2b^2 E(Z_t)\mu_3 + b^2 \mu_4 + \sigma^2 + 4ab E(Z_t)\sigma^2 + 2ab \mu_3}{1 - a^2 - b^2 \sigma^2}, \quad (2.23)$$

uma vez que $E(Z_t) = E(X_t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

Por fim, vamos calcular a função de autocovariância de X_t , $t \in \mathbb{Z}$. Como $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ é fracamente estacionário temos que $E(X_t) = E(X_{t-h})$, $h \in \mathbb{N}$, logo

$$\text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = E(X_t X_{t-h}) - [E(X_t)]^2, \quad h \in \mathbb{N}.$$

Passemos agora ao cálculo de $E(X_t X_{t-h})$, $h \in \mathbb{N}$.

Para $h = 1$, temos

$$E(X_t X_{t-1}) = E[(Z_{t-1} + \varepsilon_t) X_{t-1}] = E(Z_{t-1} X_{t-1}) = E(Z_t X_t).$$

Tendo em conta que $Z_t = aX_t + bX_t \varepsilon_t$, vem

$$\begin{aligned} E(X_t X_{t-1}) &= E[(aX_t + bX_t \varepsilon_t) X_t] = aE(X_t^2) + bE(X_t^2 \varepsilon_t) \\ &= aE(X_t^2) + 2b\sigma^2 E(X_t) + b\mu_3, \end{aligned} \quad (2.24)$$

uma vez que $E(X_t^2 \varepsilon_t) = 2E(Z_t)\sigma^2 + \mu_3$.

Então

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t, X_{t-1}) &= aE(X_t^2) + 2b\sigma^2 E(X_t) + b\mu_3 - [E(X_t)]^2 \\ &= aE(X_t^2) + 2b\sigma^2 \frac{b\sigma^2}{1-a} + b\mu_3 - \left(\frac{b\sigma^2}{1-a} \right)^2 \\ &= aE(X_t^2) + b\mu_3 + b^2 \sigma^4 \frac{(1-2a)}{(1-a)^2}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para $h \geq 2$, temos

$$\begin{aligned} E(X_t X_{t-h}) &= E[(Z_{t-1} + \varepsilon_t) X_{t-h}] = E(Z_{t-1} X_{t-h}) \\ &= E(Z_t X_{t-(h-1)}) = E[(aX_t + bX_t \varepsilon_t) X_{t-(h-1)}] \\ &= aE(X_t X_{t-(h-1)}) + bE(X_t \varepsilon_t X_{t-(h-1)}). \end{aligned}$$

Tendo em conta que $X_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t$, vem

$$\begin{aligned} E(X_t X_{t-h}) &= aE(X_t X_{t-(h-1)}) + bE[(Z_{t-1} + \varepsilon_t) \varepsilon_t X_{t-(h-1)}] \\ &= aE(X_t X_{t-(h-1)}) + bE(Z_{t-1} X_{t-(h-1)} \varepsilon_t) + bE(X_{t-(h-1)} \varepsilon_t^2) \\ &= aE(X_t X_{t-(h-1)}) + b\sigma^2 E(X_t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Repetindo o procedimento anterior $h-1$ vezes, obtemos

$$E(X_t X_{t-h}) = a^{h-1} E(X_t X_{t-1}) + b\sigma^2 E(X_t) \sum_{k=0}^{h-2} a^k. \quad (2.27)$$

Substituindo $E(X_t X_{t-1})$ pela expressão obtida em (2.24), vem

$$\begin{aligned} E(X_t X_{t-h}) &= a^{h-1} (aE(X_t^2) + 2b\sigma^2 E(X_t) + b\mu_3) + b\sigma^2 E(X_t) \sum_{k=0}^{h-2} a^k \\ &= a^h E(X_t^2) + 2a^{h-1} b\sigma^2 E(X_t) + a^{h-1} b\mu_3 + b\sigma^2 E(X_t) \sum_{k=0}^{h-2} a^k \\ &= a^h E(X_t^2) + a^{h-1} b\sigma^2 E(X_t) + a^{h-1} b\mu_3 + b\sigma^2 E(X_t) \sum_{k=0}^{h-1} a^k. \end{aligned}$$

Ora, $\sum_{k=0}^{h-1} a^k$ é a soma de h termos de uma progressão geométrica de razão a , com $|a| < 1$, pelo que

$$\begin{aligned} E(X_t X_{t-h}) &= a^h E(X_t^2) + a^{h-1} b\sigma^2 E(X_t) + a^{h-1} b\mu_3 + b\sigma^2 E(X_t) \frac{1-a^h}{1-a} \\ &= a^h E(X_t^2) + a^{h-1} b\sigma^2 \frac{b\sigma^2}{1-a} + a^{h-1} b\mu_3 + b\sigma^2 \frac{b\sigma^2}{1-a} \frac{1-a^h}{1-a} \\ &= a^h E(X_t^2) + a^{h-1} b \left(\frac{b\sigma^4}{1-a} + \mu_3 \right) + b^2 \sigma^4 \frac{(1-a^h)}{(1-a)^2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Então, para $h \geq 2$,

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t-h}) &= a^h E(X_t^2) + a^{h-1} b \left(\frac{b\sigma^4}{1-a} + \mu_3 \right) + b^2 \sigma^4 \frac{(1-a^h)}{(1-a)^2} - [E(X_t)]^2 \\ &= a^h E(X_t^2) + a^{h-1} b \left(\frac{b\sigma^4}{1-a} + \mu_3 \right) + b^2 \sigma^4 \frac{(1-a^h)}{(1-a)^2} - \left(\frac{b\sigma^2}{1-a} \right)^2 \\ &= a^h E(X_t^2) + a^{h-1} \left(b\mu_3 + b^2 \sigma^4 \frac{(1-2a)}{(1-a)^2} \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Portanto a função de autocovariância do processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, é dada por

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) &= \begin{cases} aE(X_t^2) + b\mu_3 + b^2\sigma^4 \frac{(1-2a)}{(1-a)^2}, & h = 1 \\ a^h E(X_t^2) + a^{h-1} \left(b\mu_3 + b^2\sigma^4 \frac{(1-2a)}{(1-a)^2} \right), & h > 1 \end{cases} \quad (2.30) \\ &= a^{h-1} \left(aE(X_t^2) + b\mu_3 + b^2\sigma^4 \frac{(1-2a)}{(1-a)^2} \right), \quad h \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

□

De (2.30), observamos que a função de autocorrelação do processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ é dada por

$$\rho_{X_t}(h) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ \frac{a^{|h|-1} [aE(X_t^2)(1-a)^2 + b\mu_3(1-a)^2 + b^2\sigma^4(1-2a)]}{E(X_t^2)(1-a)^2 - b^2\sigma^4}, & h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

No caso particular em que $\mu_3 = 0$, o que acontece, por exemplo, se a lei de $\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}$, é simétrica, relativamente a $x = 0$, temos

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \frac{b\sigma^2}{1-a}, \\ E(X_t^2) &= \frac{-b^2\sigma^4 + b^2\mu_4 + \sigma^2 + 4abE(X_t)\sigma^2}{1-a^2 - b^2\sigma^2}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) &= a^{h-1} \left(aE(X_t^2) + b^2\sigma^4 \frac{(1-2a)}{(1-a)^2} \right), \quad h \in \mathbb{N}, \\ \rho_{X_t}(h) &= \frac{a^{|h|-1} [aE(X_t^2)(1-a)^2 + b^2\sigma^4(1-2a)]}{E(X_t^2)(1-a)^2 - b^2\sigma^4}, \quad h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Observamos que o valor de $\rho_{X_t}(h)$ não depende do sinal de b , pois a expressão de $E(X_t^2)$ só tem potências pares de b .

2.4 Comparação das autocorrelações dos modelos $BL(1, 0, 1, 1)$ e $AR(1)$

Consideremos o modelo $AR(1)$ definido por

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.33)$$

que corresponde ao modelo $BL(1, 0, 1, 1)$ com $b = 0$.

Admitimos que são verificadas as condições do Teorema 2.3.1, que a lei de ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, é simétrica relativamente a $x = 0$ e que $a \neq 0$.

Sejam $\rho_{AR(1)}(h)$ e $\rho_{BL(1,0,1,1)}(h)$, $h \in \mathbb{Z}$, as funções de autocorrelação dos processos $AR(1)$, definido por (2.33), e $BL(1, 0, 1, 1)$, definido por (2.1), respetivamente. Tem-se

$$\begin{aligned} \rho_{AR(1)}(h) &= a^h, \quad h \in \mathbb{N}, \\ &\text{e} \\ \rho_{BL(1,0,1,1)}(h) &= a^h \left(1 + \frac{1-a}{a} \frac{[E(X_t)]^2}{\text{Var}(X_t)} \right), \quad h \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

De facto, de (2.32), tem-se, para $h \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \rho_{BL(1,0,1,1)}(h) &= a^h \frac{aE(X_t^2)(1-a)^2 + b^2\sigma^4(1-2a)}{aE(X_t^2)(1-a)^2 - ab^2\sigma^4} \\ &= a^h \frac{aE(X_t^2)(1-a)^2 + b^2\sigma^4 - 2ab^2\sigma^4}{aE(X_t^2)(1-a)^2 - ab^2\sigma^4} \\ &= a^h \left(1 + \frac{b^2\sigma^4(1-a)}{aE(X_t^2)(1-a)^2 - ab^2\sigma^4} \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Como $E(X_t) = \frac{b\sigma^2}{1-a} \iff E(X_t)(1-a) = b\sigma^2$, temos

$$\begin{aligned} \rho_{BL(1,0,1,1)}(h) &= a^h \left(1 + \frac{[E(X_t)]^2(1-a)^3}{aE(X_t^2)(1-a)^2 - a[E(X_t)]^2(1-a)^2} \right) \\ &= a^h \left(1 + \frac{[E(X_t)]^2(1-a)^3}{a(1-a)^2[E(X_t^2) - [E(X_t)]^2]} \right) \\ &= a^h \left(1 + \frac{1-a}{a} \frac{[E(X_t)]^2}{\text{Var}(X_t)} \right) \\ &= \rho_{AR(1)}(h) F(a, b, \sigma), \end{aligned} \quad (2.35)$$

com

$$F(a, b, \sigma) = 1 + \frac{1-a}{a} \frac{[E(X_t)]^2}{\text{Var}(X_t)}. \quad (2.36)$$

Deste modo, verificamos que, se $0 < a < 1$, então $F(a, b, \sigma) > 1$, logo, de (2.35),

$$\rho_{BL(1,0,1,1)}(h) > \rho_{AR(1)}(h) > 0, \quad h \in \mathbb{N}.$$

Suponhamos agora que $-1 < a < 0$. Neste caso, temos $F(a, b, \sigma) < 1$, para quaisquer valores de a, b e σ tais que $-1 < a < 0$ e $a^2 + b^2\sigma^2 < 1$.

Observamos ainda que

- se $|F(a, b, \sigma)| < 1$, então, de (2.35),

$$|\rho_{BL(1,0,1,1)}(h)| = |\rho_{AR(1)}(h)| |F(a, b, \sigma)| < |\rho_{AR(1)}(h)|,$$

- se $F(a, b, \sigma) = -1$, então

$$|\rho_{BL(1,0,1,1)}(h)| = |\rho_{AR(1)}(h)|,$$

- se $F(a, b, \sigma) < -1$, então

$$|\rho_{BL(1,0,1,1)}(h)| > |\rho_{AR(1)}(h)|.$$

Deste modo, concluímos que $|\rho_{BL(1,0,1,1)}(h)| < |\rho_{AR(1)}(h)|$, apenas no caso em que $|F(a, b, \sigma)| < 1$.

Em particular, no caso $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, usando a expressão de $E(X_t^2)$ em (2.34), tem-se

$$F(a, b, \sigma) = 1 + \left(\frac{1}{a} - 1\right) \frac{b^2 \sigma^2 (1 - a^2 - b^2 \sigma^2)}{1 - 2a + b^2 \sigma^2 + b^4 \sigma^4 + a^2 (1 - b^2 \sigma^2)},$$

pelo que

$$\lim_{a \rightarrow 0^-} F(a, b, \sigma) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} F(a, b, \sigma) = +\infty.$$

Para ilustrar a forma da função $F(a, b, \sigma)$ no caso em que ε_t tem distribuição normal, com $\sigma = 1$, apresentamos, na Figura 2.9, o gráfico de $F(a, 0.5, 1)$.

Neste caso, a condição $a^2 + b^2 \sigma^2 < 1$ é equivalente a $|a| < \sqrt{0.75} \simeq 0.86603$ e verifica-se $|F(a, 0.5, 1)| < 1$ para $-\sqrt{0.75} \leq a < -0.685$, ou seja, temos $|\rho_{BL(1,0,1,1)}(h)| < |\rho_{AR(1)}(h)|$ para $-\sqrt{0.75} \leq a < -0.685$, (este valor corresponde ao arredondamento por defeito da única solução real da equação $F(a, 0.5, 1) = -1$).

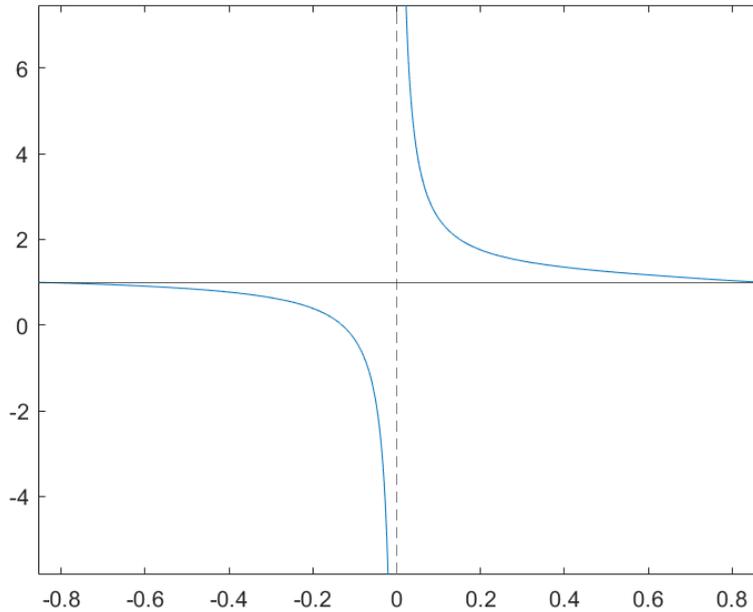


Fig. 2.9 Gráfico de $F(a, 0.5, 1)$, com $-0.866 \leq a \leq 0.866$ e $a \neq 0$.

Capítulo 3

Modelos Bilineares Simples

3.1 Definição e hipóteses gerais

Consideremos o processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ tal que X_t obedece a um modelo bilinear da forma

$$X_t = bX_{t-k}\varepsilon_{t-l} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad k \geq l, \quad (3.1)$$

onde b é um parâmetro real e $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ é um processo constituído por variáveis aleatórias reais independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância σ^2 , $\sigma > 0$. Assumimos ainda que ε_t é independente de X_s , $s < t$, e que $E(|\ln|\varepsilon_t||) < +\infty$.

Este modelo designa-se bilinear simples de ordens k e l e é denotado $BLS(k, l)$. Dizemos que se trata de um modelo diagonal se $k = l$ e de um modelo superdiagonal se $k > l$. É um caso particular do modelo $BL(0, 0, k, l)$.

3.2 Estacionaridade forte

Começamos por assegurar a existência e unicidade de uma solução fortemente estacionária para a equação (3.1).

Teorema 3.2.1. *Se $\ln|b| + E(\ln|\varepsilon|) < 0$, então existe uma solução fortemente estacionária para o modelo (3.1) dada por*

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{n=1}^{+\infty} b^n \varepsilon_{t-nk} \prod_{j=1}^n \varepsilon_{t-l-(j-1)k}, \quad (3.2)$$

sendo esta série quase certamente convergente. Além disso, o processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ definido por (3.2) é a única solução de (3.1) no sentido da convergência em probabilidade.

Demonstração. Usando recursivamente a relação (3.1), temos

$$\begin{aligned}
X_t &= bX_{t-k}\varepsilon_{t-l} + \varepsilon_t \\
&= b^2X_{t-2k}\varepsilon_{t-k-l}\varepsilon_{t-l} + b\varepsilon_{t-k}\varepsilon_{t-l} + \varepsilon_t \\
&= b^3X_{t-3k}\varepsilon_{t-2k-l}\varepsilon_{t-k-l}\varepsilon_{t-l} + b^2\varepsilon_{t-2k}\varepsilon_{t-k-l}\varepsilon_{t-l} + b\varepsilon_{t-k}\varepsilon_{t-l} + \varepsilon_t \\
&= \dots \\
&= \varepsilon_t + \sum_{i=1}^n N(t, i) + b^{n+1}X_{t-(n+1)k} \prod_{j=1}^{n+1} \varepsilon_{t-l-(j-1)k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde

$$N(t, i) = b^i \varepsilon_{t-ik} \prod_{j=1}^i \varepsilon_{t-l-(j-1)k}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{3.4}$$

convencionando $\sum_{i=1}^0 N(t, i) = 0$.

Comecemos por provar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} N(t, n)$ é quase certamente convergente, para cada $t \in \mathbb{Z}$.

Temos

$$\frac{1}{n} \ln |N(t, n)| = \frac{1}{n} \ln |b^n| + \frac{1}{n} \ln |\varepsilon_{t-nk}| + \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{j=1}^n \varepsilon_{t-l-(j-1)k} \right|. \tag{3.5}$$

Para a última parcela de (3.5), temos, pelo teorema de Kolmogorov

$$\frac{1}{n} \ln \left| \prod_{j=1}^n \varepsilon_{t-l-(j-1)k} \right| = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln |\varepsilon_{t-l-(j-1)k}| \xrightarrow{q.c.} E(\ln |\varepsilon_t|), \quad n \rightarrow +\infty, \tag{3.6}$$

uma vez que existe $E(\ln |\varepsilon_t|)$.

Analogamente a (2.9) da demonstração do Teorema 2.2.1, temos $\frac{1}{n} \ln |\varepsilon_{t-nk}| \xrightarrow{q.c.} 0$.

Então, retomando (3.5),

$$\frac{1}{n} \ln |N(t, n)| \xrightarrow{q.c.} \ln |b| + E(\ln |\varepsilon_t|) = \delta < 0, \quad n \rightarrow +\infty, \tag{3.7}$$

pelo que

$$|N(t, n)|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{q.c.} e^{\delta} < 1, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Pelo critério de Cauchy para séries numéricas de termos positivos podemos afirmar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} N(t, n)$, $t \in \mathbb{Z}$, converge quase certamente, definindo assim um processo fortemente estacionário, uma vez que é função mensurável de $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-n}$.

Analogamente à demonstração do Teorema 2.2.1, prova-se que o processo estacionário

$$Y_t = \varepsilon_t + \sum_{n=1}^{+\infty} N(t, n), \quad t \in \mathbb{Z},$$

satisfaz a relação (3.2).

Finalmente, vamos verificar que a solução encontrada é a única solução fortemente estacionária da equação (3.2) no sentido de convergência em probabilidade.

Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ um processo fortemente estacionário que é solução da equação (3.2). Então, como se provou em (3.3),

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^n N(t, i) + X_{t-(n+1)k} R(t, n+1),$$

com $R(t, n) = b^n \prod_{j=1}^n \varepsilon_{t-(j-1)k}$.

Analogamente a (3.6) temos

$$\frac{1}{n} \ln |R(t, n)| \xrightarrow{q.c} \ln |b| + E(\ln |\varepsilon_t|) = \delta < 0, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (3.8)$$

A resto da demonstração é análoga à demonstração do Teorema 2.2.1. \square

Observamos que o teorema anterior também é válido no caso $k < l$.

Apresentamos a seguir três exemplos para ilustrar a verificação da condição $\ln |b| + E(\ln |\varepsilon_t|) < 0$ ([9]).

- Suponhamos que $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. Então

$$\ln |b| + E(\ln |\varepsilon_t|) = \ln |b| + \ln \frac{\sigma\sqrt{2}}{2} - \frac{\gamma}{2} = \ln |b\sigma| - \frac{1}{2}(\gamma + \ln(2)),$$

onde γ é constante de Euler¹. Assim, existe uma solução fortemente estacionária do modelo $BLS(k, l)$ se $\sigma|b| < \sqrt{2} \exp \gamma/2 \simeq 1.8874$.

- Se ε_t segue a lei Uniforme no intervalo $[-\alpha/2, \alpha/2]$, $\alpha > 0$, tem-se

$$\ln |b| + E(\ln |\varepsilon_t|) = \ln |\alpha b| - \ln(2) - 1 < 0 \iff \alpha|b| < 2e.$$

- Se ε_t segue uma lei de Cauchy com densidade $f(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, então

$$\ln |b| + E(\ln |\varepsilon_t|) = \ln |b| + \ln(\alpha) = \ln(\alpha|b|) < 0 \iff |b| < 1/\alpha.$$

O teorema seguinte estabelece uma condição necessária para a existência de um processo estacionário de segunda ordem, $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, que satisfaz o modelo (3.1).

Teorema 3.2.2. *Suponhamos que existe um processo fortemente e fracamente estacionário, $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, que satisfaz a equação (3.1) e que $\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}$, admite momento de quarta ordem positivo e $E(\varepsilon_t^3) = 0$. Então $b^2 \sigma^2 < 1$.*

¹Constante de Euler: $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln(n) \right) \simeq 0.5772$

Demonstração. Como $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ é um processo fortemente e fracamente estacionário, então existe $E(X_t^2)$ e é independente de t .

- Para $k = l$, temos

$$\begin{aligned} E(X_t^2) &= E(b^2 X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2 + \varepsilon_t^2 + b X_{t-k} \varepsilon_{t-k} \varepsilon_t) \\ &= b^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2) + b E(X_{t-k} \varepsilon_{t-k}) E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t^2) \\ &= b^2 E(X_t^2 \varepsilon_t^2) + \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

pois os processos envolvidos são fortemente estacionários e ε_t é independente de X_{t-s} , $s \geq 1$, e de ε_{t-r} , $r \neq 0$.

Quanto a $E(X_t^2 \varepsilon_t^2)$ temos

$$\begin{aligned} E(X_t^2 \varepsilon_t^2) &= b^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2 \varepsilon_t^2) + E(\varepsilon_t^4) + 2b E(X_{t-k} \varepsilon_{t-k} \varepsilon_t^3) \\ &= b^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2) \sigma^2 + E(\varepsilon_t^4) + 2b E(X_{t-k} \varepsilon_{t-k}) E(\varepsilon_t^3) \\ &= b^2 E(X_t^2 \varepsilon_t^2) \sigma^2 + E(\varepsilon_t^4). \end{aligned}$$

Esta igualdade é equivalente a

$$(1 - b^2 \sigma^2) E(X_t^2 \varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_t^4), \quad (3.10)$$

pois que $b^2 \sigma^2 < 1$, uma vez que $E(X_t^2 \varepsilon_t^2) < +\infty$ e $E(\varepsilon_t^4) > 0$.

- Para $k > l$, temos

$$\begin{aligned} E(X_t^2) &= b^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-l}^2) + E(\varepsilon_t^2) + 2b E(X_{t-k} \varepsilon_{t-l} \varepsilon_t) \\ &= b^2 E(X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_t^2) + \sigma^2 \\ &= b^2 \sigma^2 E(X_t^2) + \sigma^2, \end{aligned}$$

logo

$$(1 - b^2 \sigma^2) E(X_t^2) = \sigma^2. \quad (3.11)$$

Como $E(X_t^2) < +\infty$ e $\sigma^2 > 0$, desta igualdade vem $b^2 \sigma^2 < 1$.

Obtemos, assim, o resultado pretendido. □

O teorema seguinte estabelece uma condição suficiente para a convergência quase certa e em L^2 do processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ que verifica (3.2).

Teorema 3.2.3. *Suponhamos que ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, admite momento de quarta ordem e que $b^2 \sigma^2 < 1$. Então o processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ com X_t definido por (3.1) converge quase certamente e em L^2 .*

Demonstração. Suponhamos que $b^2 \sigma^2 < 1$, o que implica

$$2 \ln |b| < -\ln(E(\varepsilon_t^2)). \quad (3.12)$$

Como a função $\varphi(x) = -\ln x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ é estritamente convexa e $E(\ln|\varepsilon_t|) < +\infty$ podemos aplicar a desigualdade de Jensen à v.a.r. ε_t^2 . Obtemos a desigualdade

$$-\ln(E(\varepsilon_t^2)) < -E(\ln \varepsilon_t^2) = -2E(|\ln \varepsilon_t|). \quad (3.13)$$

De (3.12) e (3.13) temos $\ln|b| + E(|\ln \varepsilon_t|) < 0$. Então, pelo Teorema 3.2.1, fica concluída a convergência quase certa.

A prova de convergência em L^2 é análoga a do Teorema 2.2.3, considerando-se agora a sucessão de v.a.r. $(S_{t,n})_{n \in \mathbb{N}}$, $t \in \mathbb{Z}$, definida por $S_{t,n} = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^n N(t,i)$, $n \in \mathbb{N}$, com $N(t,i)$ dado por (3.4). Tem-se

$$\|N(t,i)\|^2 = b^{2i} E \left(\varepsilon_{t-ik}^2 \prod_{j=1}^i \varepsilon_{t-l-(j-1)k}^2 \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Tendo em conta que a v.a.r. ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, são i.i.d. com variância σ^2 , obtemos

- para $k = l$: $\|N(t,i)\|^2 = b^{2i} E(\varepsilon_{t-ik}^4 \varepsilon_{t-k}^2 \varepsilon_{t-2k}^2 \dots \varepsilon_{t-(i-1)k}^2) = b^{2i} \mu_4 (b^2 \sigma^2)^{i-1}$,
- para $k > l$: $\|N(t,i)\|^2 = b^{2i} E(\varepsilon_{t-ik}^2 \varepsilon_{t-l}^2 \varepsilon_{t-l-k}^2 \varepsilon_{t-l-2k}^2 \dots \varepsilon_{t-l-(i-1)k}^2) = b^{2i} (b^2 \sigma^2)^i$.

Como $(b^2 \sigma^2)^{\frac{1}{2}} < 1$, conclui-se que $X_t \in L^2$, como na demonstração do Teorema 2.2.3. □

Como consequência dos dois teoremas anteriores temos o resultado seguinte.

Corolário 3.2.1. *Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ um processo definido por (3.1), tal que ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, admite momento de quarta ordem e $E(\varepsilon_t^3) = 0$. Então o processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ é fortemente e fracamente estacionário se e só se $b^2 \sigma^2 < 1$.*

Nas Figuras 3.1 a 3.4 apresentam-se trajetórias dos seguintes modelos bilineares simples estacionários:

- $X_t = 0.5X_{t-2}\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
- $X_t = 0.99X_{t-2}\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$
- $X_t = 0.5X_{t-2}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
- $X_t = 0.99X_{t-2}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Em todos os casos considerou-se ε_t com distribuição $N(0,1)$ e todas as trajetórias foram obtidas com base na mesma série de 1000 valores simulados desta distribuição. Esta série é a mesma que foi usada nas simulações apresentadas no Capítulo 2.

Salienta-se que a condição $b^2 \sigma^2 < 1$ é equivalente a $|b| < 1$.

Comparando as trajetórias dos processos diagonais representadas nas Figuras 3.1 e 3.2, observamos picos repentinos apenas no segundo caso. Observamos ainda que a amplitude dos valores da série representada na Figura 3.1 é muito reduzida quando comparada com a amplitude dos picos da trajetória da Figura 3.2. Note-se que, neste caso, o coeficiente do modelo está muito próximo de 1.

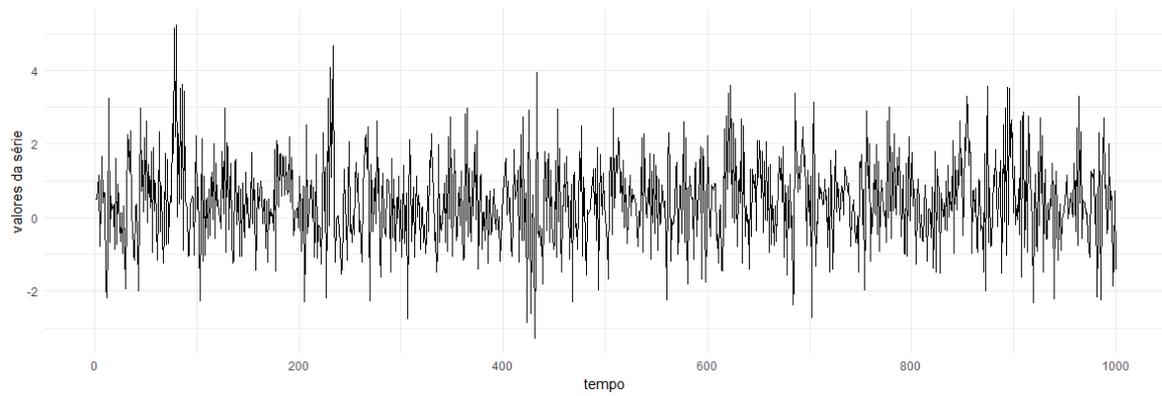


Fig. 3.1 Trajetória do modelo diagonal $b = 0.5$.

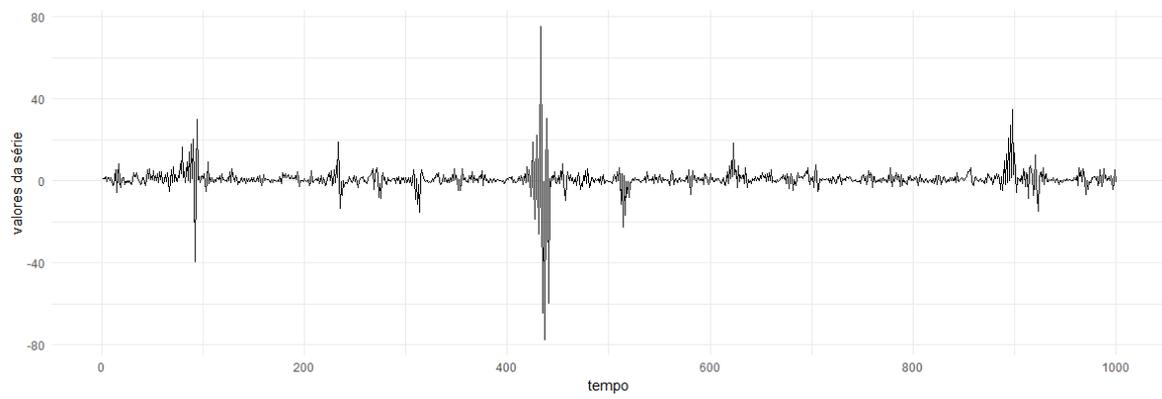


Fig. 3.2 Trajetória do modelo diagonal $b = 0.99$.

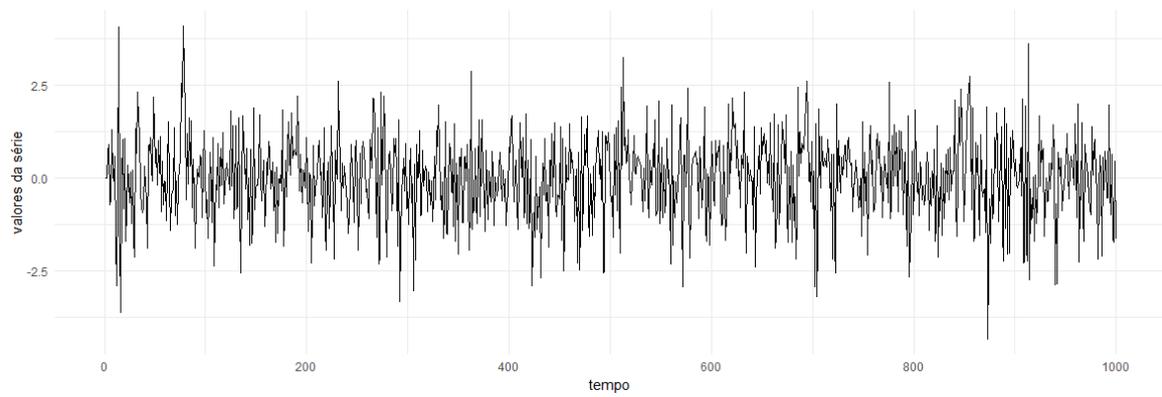


Fig. 3.3 Trajetória do modelo superdiagonal $b = 0.5$.

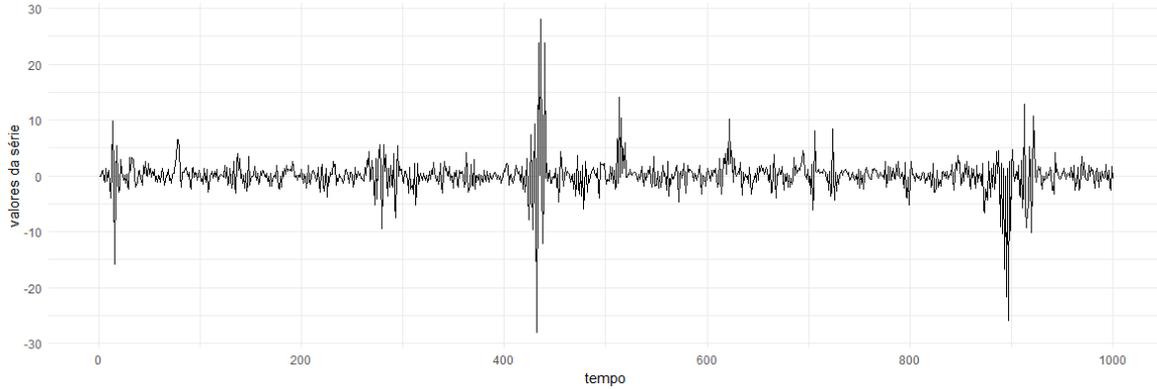


Fig. 3.4 Trajetória do modelo superdiagonal $b = 0.99$.

Os mesmos comentários valem para as trajetórias superdiagonais representadas nas Figuras 3.3 e 3.4.

Ao comparar as trajetórias dos processos diagonais com as dos superdiagonais, verificamos que a amplitude dos valores nos casos diagonais é maior do que nos casos superdiagonais. Por exemplo, na Figura 3.2 o maior valor da série, em termos absolutos, é aproximadamente 80, enquanto na Figura 3.4 é aproximadamente 30.

3.3 Estrutura de segunda ordem

Vamos agora estudar a estrutura de segunda ordem dos modelos diagonal e superdiagonal, isto é, determinar as funções média, de autocovariância e de autocorrelação.

3.3.1 Modelo Diagonal

Consideremos o modelo bilinear simples diagonal definido por

$$X_t = bX_{t-k}\varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (3.14)$$

Para além das hipóteses gerais, admite-se que existe $E(\varepsilon_t^4)$ e que $E(\varepsilon_t^4) = \mu_4 > 0$ e $E(\varepsilon_t^3) = 0$.

Teorema 3.3.1. *Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ o processo definido por (3.14) com $b^2\sigma^2 < 1$. Tem-se*

$$(1) \quad E(X_t) = b\sigma^2,$$

$$(2) \quad E(X_t^2) = \frac{b^2\mu_4}{1 - b^2\sigma^2} + \sigma^2,$$

$$(3) \quad \text{Var}(X_t) = \frac{b^2\mu_4}{1 - b^2\sigma^2} + \sigma^2(1 - b^2\sigma^2),$$

$$(4) \quad \text{Cov}(X_t, X_{t-k}) = b^2\sigma^4 \quad \text{e} \quad \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = 0, \quad h \in \mathbb{N} \setminus \{k\},$$

$$(5) \quad \rho_{X_t}(k) = \frac{b^2\sigma^4}{\text{Var}(X_t)} \quad \text{e} \quad \rho_{X_t}(h) = 0, \quad h \in \mathbb{N} \setminus \{k\}.$$

Demonstração.

Começemos por calcular a esperança de X_t .

$$\begin{aligned} E(X_t) &= bE(X_{t-k}\varepsilon_{t-k}) + E(\varepsilon_t) = bE(X_t\varepsilon_t) \\ &= bE(b\varepsilon_{t-k}\varepsilon_{t-k}\varepsilon_t) + bE(\varepsilon_t^2) \\ &= b\sigma^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Na demonstração do Teorema 3.2.2 deduzimos

$$E(X_t^2) = b^2E(X_t^2\varepsilon_t^2) + \sigma^2 \text{ e } E(X_t^2\varepsilon_t^2) = b^2E(X_t^2\varepsilon_t^2) + \mu_4.$$

Consequentemente

$$E(X_t^2\varepsilon_t^2) = \frac{\mu_4}{1-b^2\sigma^2}, \quad (3.16)$$

pelo que

$$E(X_t^2) = \frac{b^2\mu_4}{1-b^2\sigma^2} + \sigma^2. \quad (3.17)$$

De (3.16) e de (3.17), obtém-se

$$\text{Var}(X_t) = \frac{b^2\mu_4}{1-b^2\sigma^2} + \sigma^2(1-b^2\sigma^2).$$

Por fim, vamos calcular a função de autocovariância do processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$. Temos

$$\text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = E(X_t X_{t-h}) - [E(X_t)]^2, \quad h \in \mathbb{N}.$$

Quando $h = k$ temos,

$$\begin{aligned} E(X_t X_{t-k}) &= bE(X_t^2 \varepsilon_t) \\ &= b^3E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2 \varepsilon_t) + bE(\varepsilon_t^3) + 2b^2E(X_{t-k} \varepsilon_{t-k} \varepsilon_t^2) \\ &= 2b^2E(X_{t-k} \varepsilon_{t-k})E(\varepsilon_t^2) = 2b^2E(X_t \varepsilon_t)\sigma^2 \\ &= 2b^2\sigma^4. \end{aligned}$$

Assim $\text{Cov}(X_t, X_{t-k}) = 2b^2\sigma^4 - (b\sigma^2)^2 = b^2\sigma^4$.

Para $h < k$ temos,

$$\begin{aligned} E(X_t X_{t-h}) &= bE(X_{t-k} \varepsilon_{t-k} X_{t-h}) = bE(X_{t-(k-h)} \varepsilon_{t-(k-h)} X_t) \\ &= b^2E(X_{t-(k-h)} \varepsilon_{t-(k-h)} X_{t-k} \varepsilon_{t-k}) = b^2E(X_t \varepsilon_t X_{t-h} \varepsilon_{t-h}) \\ &= b^3E(bX_{t-k} \varepsilon_{t-k} \varepsilon_t X_{t-h} \varepsilon_{t-h}) + b^2E(\varepsilon_t^2 X_{t-h} \varepsilon_{t-h}) \\ &= b^2E(X_t \varepsilon_t)\sigma^2 \\ &= b^2\sigma^4. \end{aligned}$$

Para $h > k$ temos,

$$\begin{aligned}
 E(X_t X_{t-h}) &= bE(X_{t-k} \varepsilon_{t-k} X_{t-h}) = bE(X_t \varepsilon_t X_{t-(h-k)}) \\
 &= b^2 E(X_{t-k} \varepsilon_{t-k} \varepsilon_t X_{t-(h-k)}) + bE(\varepsilon_t^2 X_{t-(h-k)}) \\
 &= b\sigma^2 E(X_{t-(h-k)}) \\
 &= b^2 \sigma^4.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Então $Cov(X_t, X_{t-h}) = 0$, para todo $h \in \mathbb{N} \setminus \{k\}$.

Portanto a função de autocovariância de $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, no caso diagonal, é tal que

$$Cov(X_t, X_{t-h}) = \begin{cases} b^2 \sigma^4, & h = k \\ 0, & h \in \mathbb{N} \setminus \{k\} \end{cases} \tag{3.19}$$

e a função de autocorrelação é dada por

$$\rho_{X_t}(h) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ \frac{b^2 \sigma^4}{Var(X_t)}, & h = -k, k \\ 0, & h \in \mathbb{Z} \setminus \{-k, 0, k\}. \end{cases} \tag{3.20}$$

com $Var(X_t) = \frac{b\mu_4}{1 - b^2 \sigma^2} + \sigma^2(1 - b^2 \sigma^2)$. □

Observamos que a função de autocorrelação (3.20) é também a função de autocorrelação de um modelo $MA(k)$.

3.3.2 Modelo Superdiagonal

Consideremos o modelo bilinear simples superdiagonal definido por

$$X_t = bX_{t-k} \varepsilon_{t-l} + \varepsilon_t, \quad k > l > 0. \tag{3.21}$$

Teorema 3.3.2. *Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ o processo definido por (3.21), com $b^2 \sigma^2 < 1$. Então,*

- (1) $E(X_t) = 0$,
- (2) $E(X_t^2) = \frac{\sigma^2}{1 - b^2 \sigma^2}$,
- (3) $Cov(X_t, X_{t-h}) = 0, h \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

Comecemos por calcular a esperança de X_t .

$$E(X_t) = bE(X_{t-k} \varepsilon_{t-l}) + E(\varepsilon_t) = bE(X_{t-k})E(\varepsilon_{t-l}) = 0, \tag{3.22}$$

pois $t - l > t - k$.

Da demonstração do Teorema 3.2.2 deduzimos que

$$E(X_t^2) = \frac{\sigma^2}{1 - b^2\sigma^2}. \quad (3.23)$$

Passemos agora ao cálculo de $Cov(X_t, X_{t-h}) = E(X_t X_{t-h})$, $h \in \mathbb{N}$.

Quando $h = l$ temos,

$$\begin{aligned} E(X_t X_{t-l}) &= bE(X_{t-k}\varepsilon_{t-l}X_{t-l}) = bE(X_{t-(k-l)}\varepsilon_t X_t) \\ &= b^2E(X_{t-(k-l)}X_{t-k}\varepsilon_{t-l}\varepsilon_t) + bE(X_{t-(k-l)}\varepsilon_t^2) \\ &= b^2E(X_{t-(k-l)}X_{t-k}\varepsilon_{t-l})E(\varepsilon_t) + b\sigma^2E(X_t) = 0. \end{aligned}$$

Se $h < l$, o que implica $h < k$, temos

$$\begin{aligned} E(X_t X_{t-h}) &= bE(X_{t-k}\varepsilon_{t-l}X_{t-h}) = bE(X_{t-(k-l)}\varepsilon_{t-(l-h)}X_t) \\ &= b^2E(X_{t-(k-h)}\varepsilon_{t-(l-h)}X_{t-k}\varepsilon_{t-l}) + bE(X_{t-(k-h)}\varepsilon_{t-(l-h)}\varepsilon_t) \\ &= b^2E(X_{t-(k-l)}\varepsilon_t X_{t-(k-l+h)}\varepsilon_{t-h}) = 0, \end{aligned}$$

somando $l - h$ a todos os índices.

Para $h > l$ temos,

$$E(X_t X_{t-h}) = bE(X_{t-k}\varepsilon_{t-l}X_{t-h}) = bE(X_{t-(k-l)}\varepsilon_t X_{t-(h-l)}) = 0.$$

Então $Cov(X_t, X_{t-h}) = 0$, para todo $h \in \mathbb{Z}$. □

Notamos que a estrutura de segunda ordem do modelo superdiagonal é a de um ruído branco de variância $\frac{\sigma^2}{1 - b^2\sigma^2}$.

3.4 Função de autocorrelação de $(X_t^2, t \in \mathbb{Z})$

Como vimos na secção anterior, a estrutura de segunda ordem de um modelo diagonal coincide com a de um modelo média móvel e a estrutura de segunda ordem de um modelo superdiagonal coincide com a de um ruído branco.

Para obter uma caracterização diferente para os modelos bilineares simples, Granger e Andersen ([5]) sugeriram o estudo de momentos de ordens superiores a 2, em particular o estudo das autocorrelações do processo $(X_t^2, t \in \mathbb{Z})$.

Além das hipóteses gerais sobre o modelo (3.1), nesta secção admitimos que

- no caso diagonal, existe $E(\varepsilon_t^8)$ e tem-se $E(\varepsilon_t^{2i}) = \mu_{2i} > 0$ e $E(\varepsilon_t^{2i-1}) = 0$, $i = 2, 3, 4$,
- no caso superdiagonal, existe $E(\varepsilon_t^4)$ e tem-se $E(\varepsilon_t^4) = \mu_4 > 0$ e $E(\varepsilon_t^3) = 0$.

Teorema 3.4.1. *Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ o processo definido por (3.1). Então $(X_t^2, t \in \mathbb{Z})$ é fortemente e fracamente estacionário se e só se $b^4\mu_4 < 1$.*

Demonstração.

Suponhamos que $b^4\mu_4 < 1$. Então $b^2\sigma^2 = E(b^2\varepsilon_t^2) \leq \sqrt{b^4E(\varepsilon_t^4)} = \sqrt{b^4\mu_4} < 1$, pelo que, pelo Corolário 3.2.1, o processo $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ é fortemente estacionário, e consequentemente, $(X_t^2, t \in \mathbb{Z})$ também é fortemente estacionário, uma vez que X_t^2 é função mensurável de X_t .

Quanto à estacionaridade fraca, vamos provar que existe $E(X_t^4)$.

Do Teorema 3.2.3, temos $X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{+\infty} N(t, i) \in L^2$, com $N(t, i)$ dado por (3.4).

Apenas é preciso provar que existe

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{+\infty} N(t, i) \right)^4 \right].$$

Ora

$$\begin{aligned} E \left[\left(\sum_{i=1}^{+\infty} N(t, i) \right)^4 \right] &\leq E \left[\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |N(t, i)| \right)^4 \right] \\ &= E \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^{+\infty} |N(t, i)N(t, j)N(t, s)N(t, r)| \right) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^{+\infty} E(|N(t, i)N(t, j)N(t, s)N(t, r)|), \end{aligned} \quad (3.24)$$

uma vez que $|N(t, i)N(t, j)N(t, s)N(t, r)|$ é uma sucessão de v.a. positivas (Teorema 1.2.2). Usando o Teorema 1.2.3, vem

$$\begin{aligned} E(|N(t, i)N(t, j)N(t, s)N(t, r)|) &= E(|N(t, i)N(t, j)||N(t, s)N(t, r)|) \\ &\leq [E(N(t, i)^2N(t, j)^2)E(N(t, s)^2N(t, r)^2)]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq [E(N(t, i)^4)E(N(t, j)^4)E(N(t, s)^4)E(N(t, r)^4)]^{\frac{1}{4}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Quando $X_t, t \in \mathbb{Z}$, satisfaz o modelo superdiagonal, tem-se $N(t, i) = b^i \varepsilon_{t-ik} \prod_{j=1}^i \varepsilon_{t-l-(j-1)k}$, logo

$$E(N(t, i)^4) = b^{4i} E(\varepsilon_{t-ik}^4 \varepsilon_{t-l}^4 \varepsilon_{t-l-k}^4 \varepsilon_{t-l-2k}^4 \dots \varepsilon_{t-l-(i-1)k}^4) = \mu_4 (b^4 \mu_4)^i.$$

Então, de (3.25), temos

$$E(|N(t, i)N(t, j)N(t, s)N(t, r)|) \leq \mu_4 [(b^4 \mu_4)^{\frac{1}{4}}]^{i+j+r+s}.$$

Como $(b^4 \mu_4)^{\frac{1}{4}} < 1$, a série (3.24) é convergente, logo existe $E(X_t^4)$.

Como $(X_t^2, t \in \mathbb{Z})$ é fortemente estacionário e $E(X_t^4) < +\infty$, concluímos que este processo é fracamente estacionário.

Suponhamos agora que $(X_t^2, t \in \mathbb{Z})$ é fortemente e fracamente estacionário. Ora

$$\begin{aligned} E(X_t^4) &= b^4 E(X_{t-k}^4 \varepsilon_{t-l}^4) + E(\varepsilon_t^4) + 4b^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-l}^2 \varepsilon_t^2) + 2b^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-l}^2 \varepsilon_t^2) \\ &= b^4 E(X_{t-(k-l)}^4 \varepsilon_t^4) + \mu_4 + 6b^2 \sigma^2 E(X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_t^2) \\ &= b^4 \mu_4 E(X_t^4) + \mu_4 + 6b^2 \sigma^4 E(X_t^2) \end{aligned}$$

pelo que

$$(1 - b^4 \mu_4) E(X_t^4) = \mu_4 + 6b^2 \sigma^4 E(X_t^2).$$

Como $\mu_4 > 0$ e $E(X_t^4) < +\infty$, concluímos que $b^4 \mu_4 < 1$, como pretendido.

De modo análogo, prova-se para o caso diagonal. \square

Vamos agora determinar as funções média, de autocovariância e de autocorrelação de $(X_t^2, t \in \mathbb{Z})$.

3.4.1 Modelo Diagonal

Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ um processo que verifica a relação de recorrência (3.14)

$$X_t = bX_{t-k} \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N},$$

com $b^4 \mu_4 < 1$.

Começamos por calcular $E(X_t^4)$. Temos

$$\begin{aligned} E(X_t^4) &= b^4 E(X_{t-k}^4 \varepsilon_{t-k}^4) + E(\varepsilon_t^4) + 4b^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2 \varepsilon_t^2) + 2b^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2 \varepsilon_t^2) + \\ &\quad + 4b^3 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2 X_{t-k} \varepsilon_{t-k} \varepsilon_t) + 4b E(\varepsilon_t^2 X_{t-k} \varepsilon_{t-k} \varepsilon_t) \\ &= b^4 E(X_{t-k}^4 \varepsilon_{t-k}^4) + \mu_4 + 6b^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2) E(\varepsilon_t^2) \\ &= b^4 E(X_t^4 \varepsilon_t^4) + \mu_4 + 6b^2 \sigma^2 E(X_t^2 \varepsilon_t^2) \end{aligned} \tag{3.26}$$

e

$$\begin{aligned} E(X_t^4 \varepsilon_t^4) &= b^4 E(X_{t-k}^4 \varepsilon_{t-k}^4) E(\varepsilon_t^4) + E(\varepsilon_t^8) + 4b^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2) E(\varepsilon_t^6) + 2b^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2) E(\varepsilon_t^6) + \\ &\quad + 4b^3 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2 X_{t-k} \varepsilon_{t-k} \varepsilon_t) E(\varepsilon_t^5) + 4b E(\varepsilon_t^2 X_{t-k} \varepsilon_{t-k} \varepsilon_t) E(\varepsilon_t^5) \\ &= b^4 E(X_t^4 \varepsilon_t^4) \mu_4 + \mu_8 + 6b^2 E(X_t^2 \varepsilon_t^2) \mu_6. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Então

$$E(X_t^4 \varepsilon_t^4) = \frac{1}{1 - b^4 \mu_4} \left(\mu_8 + \frac{6b^2 \mu_4 \mu_6}{1 - b^2 \sigma^2} \right), \tag{3.28}$$

tendo em conta o valor de $E(X_t^2 \varepsilon_t^2)$ dado por (3.16). De (3.26) obtém-se então

$$E(X_t^4) = \frac{b^4}{1 - b^4 \mu_4} \left(\mu_8 + \frac{6b^2 \mu_4 \mu_6}{1 - b^2 \sigma^2} \right) + \mu_4 + \frac{6b^2 \sigma^2 \mu_4}{1 - b^2 \sigma^2}.$$

Teorema 3.4.2. *Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ o modelo diagonal definido por (3.14). Então a função de autocorrelação de $(X_t^2, t \in \mathbb{Z})$ verifica*

$$\rho_{X_t^2}(h) = b^2 \sigma^2 \rho_{X_t^2}(h-k), \quad h > k.$$

Demonstração. Para $h \geq 1$ temos

$$E(X_t^2 X_{t-h}^2) = b^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2 X_{t-h}^2) + \sigma^2 E(X_t^2). \quad (3.29)$$

Para $h > k$ esta igualdade é equivalente a

$$\begin{aligned} E(X_t^2 X_{t-h}^2) &= b^2 E(X_t^2 \varepsilon_{t-(h-k)}^2 X_{t-(h-k)}^2) + \sigma^2 E(X_t^2) \\ &= b^4 \sigma^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2 X_{t-(h-k)}^2) + b^2 \mu_4 E(X_t^2) + b \sigma^2 E(X_t^2). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Substituindo h por $h-k$ em (3.29) obtemos

$$E(X_t^2 X_{t-(h-k)}^2) = b^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2 X_{t-(h-k)}^2) + \sigma^2 E(X_t^2)$$

que é equivalente a

$$b^4 \sigma^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2 X_{t-(h-k)}^2) = b^2 \sigma^2 E(X_t^2 X_{t-(h-k)}^2) - b^2 \sigma^4 E(X_t^2).$$

Deste modo, a igualdade (3.30) é equivalente a

$$\begin{aligned} E(X_t^2 X_{t-h}^2) &= b^2 \sigma^2 E(X_t^2 X_{t-(h-k)}^2) - b^2 \sigma^4 E(X_t^2) + b^2 \mu_4 E(X_t^2) + b \sigma^2 E(X_t^2) \\ &= b^2 \sigma^2 E(X_t^2 X_{t-(h-k)}^2) + (b^2 \mu_4 - b^2 \sigma^4 + \sigma^2) E(X_t^2). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Por outro lado, temos $E(X_t^2) = \frac{b^2 \mu_4}{1 - b^2 \sigma^2} + \sigma^2 \iff (1 - b^2 \sigma^2) E(X_t^2) = b^2 \mu_4 - b^2 \sigma^4 + \sigma^2$, pelo que, de (3.31), podemos escrever

$$E(X_t^2 X_{t-h}^2) = b^2 \sigma^2 E(X_t^2 X_{t-(h-k)}^2) + (1 - b^2 \sigma^2) [E(X_t^2)]^2.$$

Então, para $h > k$,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t^2, X_{t-h}^2) &= E(X_t^2 X_{t-h}^2) - E[(X_t^2)]^2 \\ &= b^2 \sigma^2 E(X_t^2 X_{t-(h-k)}^2) + (1 - b^2 \sigma^2) [E(X_t^2)]^2 - E[(X_t^2)]^2 \\ &= b^2 \sigma^2 \text{Cov}(X_t^2, X_{t-(h-k)}^2). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.4.3. *Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ o modelo diagonal definido por (3.14). Tem-se*

$$\text{Cov}(X_t^2, X_{t-h}^2) = \begin{cases} b^2 \left(E(X_t^4 \varepsilon_t^2) - \frac{\mu_4 E(X_t^2)}{1 - b^2 \sigma^2} \right), & h = k \\ 0, & h \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{onde } E(X_t^4 \varepsilon_t^2) = \frac{b^2 \sigma^2}{1 - b^4 \mu_4} \left(\mu_8 + \frac{6b^2 \mu_4 \mu_6}{1 - b^2 \sigma^2} \right) + \mu_6 + \frac{6b^2 \mu_4^2}{1 - b^2 \sigma^2}.$$

Demonstração.

Tem-se

$$\text{Cov}(X_t^2, X_{t-h}^2) = E(X_t^2 X_{t-h}^2) - [E(X_t^2)]^2, \quad h \in \mathbb{N}.$$

Vamos calcular $E(X_t^2 X_{t-h}^2)$, $h \in \mathbb{N}$, considerando três casos: $h = k$, $h < k$, $h > k$.

1) Para $h = k$ temos,

$$\begin{aligned} E(X_t^2 X_{t-k}^2) &= b^2 E(X_{t-k}^4 \varepsilon_{t-k}^2) + E(X_{t-k}^2) E(\varepsilon_t^2) + 2b E(X_{t-k}^3 \varepsilon_{t-k}) E(\varepsilon_t) \\ &= b^2 E(X_t^4 \varepsilon_t^2) + \sigma^2 E(X_t^2). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Assim

$$\text{Cov}(X_t^2, X_{t-k}^2) = b^2 \left(E(X_t^4 \varepsilon_t^2) - \frac{\mu_4 E(X_t^2)}{1 - b^2 \sigma^2} \right).$$

2) Para $h < k$ tem-se,

$$\begin{aligned} E(X_t^2 X_{t-h}^2) &= b^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2 X_{t-h}^2) + E(X_{t-h}^2) E(\varepsilon_t^2) + 2b E(X_{t-k} \varepsilon_{t-k} X_{t-h}^2) E(\varepsilon_t) \\ &= b^2 E(X_{t-(k-h)}^2 \varepsilon_{t-(k-h)}^2 X_t^2) + \sigma^2 E(X_t^2) \\ &= b^2 [b^2 E(X_t^2 \varepsilon_t^2 X_{t-h}^2 \varepsilon_{t-h}^2) + \sigma^2 E(X_t^2 \varepsilon_t^2)] + \sigma^2 E(X_t^2). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Desenvolvendo X_t^2 , obtemos

$$\begin{aligned} E(X_t^2 \varepsilon_t^2 X_{t-h}^2 \varepsilon_{t-h}^2) &= b^2 \sigma^2 E(X_{t-h}^2 \varepsilon_{t-h}^2 X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2) + \mu_4 E(X_t^2 \varepsilon_t^2) \\ &= b^2 \sigma^2 E(X_t^2 \varepsilon_t^2 X_{t-(k-h)}^2 \varepsilon_{t-(k-h)}^2) + \mu_4 E(X_t^2 \varepsilon_t^2) \\ &= b^4 \sigma^4 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-k}^2 X_{t-(k-h)}^2 \varepsilon_{t-(k-h)}^2) + b^2 \sigma^2 \mu_4 E(X_t^2 \varepsilon_t^2) + \mu_4 E(X_t^2 \varepsilon_t^2) \\ &= b^4 \sigma^4 E(X_{t-h}^2 \varepsilon_{t-h}^2 X_t^2 \varepsilon_t^2) + (1 + b^2 \sigma^2) \mu_4 E(X_t^2 \varepsilon_t^2), \end{aligned}$$

pelo que

$$E(X_t^2 \varepsilon_t^2 X_{t-h}^2 \varepsilon_{t-h}^2) = \frac{\mu_4^2}{(1 - b^2 \sigma^2)^2}.$$

Deste modo,

$$E(X_{t-(k-h)}^2 \varepsilon_{t-(k-h)}^2 X_t^2) = \frac{b^2 \mu_4^2}{(1 - b^2 \sigma^2)^2} + \frac{\sigma^2 \mu_4^2}{(1 - b^2 \sigma^2)^2}$$

e

$$E(X_t^2 X_{t-h}^2) = \frac{b^4 \mu_4^2}{(1 - b^2 \sigma^2)^2} + \frac{\sigma^2 \mu_4^2}{(1 - b^2 \sigma^2)^2} + \sigma^2 E(X_t^2) = [E(X_t^2)]^2.$$

Assim $\text{Cov}(X_t^2, X_{t-k}^2) = 0$, para $h < k$.

Analogamente, mostra-se que $\text{Cov}(X_t^2, X_{t-k}^2) = 0$, para $h > k$.

Portanto

$$\text{Cov}(X_t^2, X_{t-h}^2) = \begin{cases} b^2 \left(E(X_t^4 \varepsilon_t^2) - \frac{\mu_4 E(X_t^2)}{1 - b^2 \sigma^2} \right), & h = k \\ 0, & h \in \mathbb{N} \setminus \{k\} \end{cases} \quad (3.34)$$

onde $E(X_t^4 \varepsilon_t^2) = \frac{b^2 \sigma^2}{1 - b^4 \mu_4} \left(\mu_8 + \frac{6b^2 \mu_4 \mu_6}{1 - b^2 \sigma^2} \right) + \mu_6 + \frac{6b^2 \mu_4^2}{1 - b^2 \sigma^2}$. □

Dos Teoremas (3.4.2) e (3.4.3) deduz-se o resultado seguinte:

Corolário 3.4.1. *Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, o modelo diagonal definido por (3.14). Então para $h = mk$, $m \in \mathbb{N}$, os valores de $\rho_{X_t^2}(h)$, $h \in \mathbb{N}$, são não nulos. Mais precisamente,*

$$\rho_{X_t^2}(mk) = (b^2 \sigma^2)^{m-1} \rho_{X_t^2}(k).$$

Demonstração. Vamos verificar esta igualdade por indução matemática.

Para $m = 1$, a igualdade é verdadeira de modo trivial.

Suponhamos que $\rho_{X_t^2}(mk) = (b^2 \sigma^2)^{m-1} \rho_{X_t^2}(k)$ e provemos que $\rho_{X_t^2}((m+1)k) = (b^2 \sigma^2)^m \rho_{X_t^2}(k)$.

Pelo Teorema 3.4.2, temos

$$\rho_{X_t^2}((m+1)k) = b^2 \sigma^2 \rho_{X_t^2}((m+1)k - k) = b^2 \sigma^2 \rho_{X_t^2}(mk) = (b^2 \sigma^2)^m \rho_{X_t^2}(k).$$

□

3.4.2 Modelo Superdiagonal

Suponhamos que $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ verifica a relação de recorrência (3.21), isto é,

$$X_t = bX_{t-k} \varepsilon_{t-l} + \varepsilon_t, \quad k > l > 0,$$

com $b^4 \mu_4 < 1$.

Começemos por calcular $E(X_t^4)$. Da demonstração do Teorema 3.4.1, temos

$$(1 - b^4 \mu_4) E(X_t^4) = \mu_4 + 6b^2 \sigma^4 E(X_t^2)$$

e, tendo em conta que $E(X_t^2) = \frac{b^2 \mu_4}{1 - b^2 \sigma^2} + \sigma^2$, vem

$$E(X_t^4) = \frac{b^4}{1 - b^4 \mu_4} (\mu_4 + 6b^2 \sigma^4 E(X_t^2)). \quad (3.35)$$

Teorema 3.4.4. *Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ o modelo superdiagonal definido por (3.21). Então*

$$\rho_{X_t^2}(h) = b^2 \sigma^2 \rho_{X_t^2}(h - k), \quad h > k.$$

Demonstração. A prova é análoga à demonstração do teorema 3.4.2.

Para todo $h \geq 1$ temos

$$E(X_t^2 X_{t-h}^2) = b^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-l}^2 X_{t-h}^2) + \sigma^2 E(X_t^2). \quad (3.36)$$

Quando $h > k$ esta igualdade é equivalente a

$$\begin{aligned} E(X_t^2 X_{t-h}^2) &= b^2 E(X_t^2 \varepsilon_{t-l}^2 X_{t-(h-k)}^2) + \sigma^2 E(X_t^2) \\ &= b^4 \sigma^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-l}^2 X_{t-(h-k)}^2) + b^2 \mu_4 E(X_t^2) + b \sigma^2 E(X_t^2). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Substituindo h por $h - k$ em (3.36) obtemos

$$E(X_t^2 X_{t-(h-k)}^2) = b^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-l}^2 X_{t-(h-k)}^2) + \sigma^2 E(X_t^2)$$

pelo que

$$b^4 \sigma^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-l}^2 X_{t-(h-k)}^2) = b^2 \sigma^2 E(X_t^2 X_{t-(h-k)}^2) - b^2 \sigma^4 E(X_t^2).$$

Deste modo, a igualdade (3.37) é equivalente a

$$E(X_t^2 X_{t-h}^2) = b^2 \sigma^2 E(X_t^2 X_{t-(h-k)}^2) + (b^2 \mu_4 - b^2 \sigma^4 + \sigma^2) E(X_t^2). \quad (3.38)$$

Por outro lado, temos $(1 - b^2 \sigma^2) E(X_t^2) = b^2 \mu_4 - b^2 \sigma^4 + \sigma^2$, pelo que, de (3.38), podemos escrever

$$E(X_t^2 X_{t-h}^2) = b^2 \sigma^2 E(X_t^2 X_{t-(h-k)}^2) + (1 - b^2 \sigma^2) [E(X_t^2)]^2.$$

Então, para $h > k$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t^2, X_{t-h}^2) &= b^2 \sigma^2 E(X_t^2 X_{t-(h-k)}^2) + (1 - b^2 \sigma^2) [E(X_t^2)]^2 - E(X_t^2)]^2 \\ &= b^2 \sigma^2 \text{Cov}(X_t^2, X_{t-(h-k)}^2). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.4.5. *Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ o modelo superdiagonal definido por (3.21). Então para $1 \leq h \leq k$, temos*

$$\text{Cov}(X_t^2, X_{t-h}^2) = \begin{cases} b^2 \sigma^2 \text{Var}(X_t^2), & h = k \\ \frac{b^2 (\mu_4 - \sigma^4)}{1 - b^4 \sigma^4} E(X_t^2), & h = l, k \neq 2l \\ \frac{b^2 (\mu_4 - \sigma^4)}{1 - b^2 \sigma^2} E(X_t^2), & h = l, k = 2l \\ \frac{b^2 \sigma^2 (\mu_4 - \sigma^4)}{1 - b^4 \sigma^4} E(X_t^2), & h = k - l \neq l \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Demonstração.

Como $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ é fortemente estacionário temos que

$$\text{Cov}(X_t^2, X_{t-h}^2) = E(X_t^2 X_{t-h}^2) - [E(X_t^2)]^2, \quad h \in \mathbb{N}.$$

Passemos agora ao cálculo de $E(X_t X_{t-h})$, $h \in \mathbb{N}$.

1) Para $h = k$ temos,

$$\begin{aligned} E(X_t^2 X_{t-k}^2) &= b^2 E(X_{t-k}^4 \varepsilon_{t-l}^2) + E(\varepsilon_t^2 X_{t-k}^2) + 2b E(X_{t-k} \varepsilon_{t-l} \varepsilon_t) \\ &= b^2 E(X_{t-(k-l)}^4 \varepsilon_t^2) + \sigma^2 E(X_t^2) \\ &= b^2 \sigma^2 E(X_t^4) + \sigma^2 E(X_t^2). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t^2, X_{t-h}^2) &= b^2 \sigma^2 E(X_t^4) + \sigma^2 E(X_t^2) - [E(X_t^2)]^2 \\ &= b^2 \sigma^2 E(X_t^4) + \sigma^2 E(X_t^2) - [E(X_t^2)]^2 + b^2 \sigma^2 [E(X_t^2)]^2 - b^2 \sigma^2 [E(X_t^2)]^2 \\ &= b^2 \sigma^2 \text{Var}(X_t^2). \end{aligned}$$

2) Para $h = l$:

a) Se $k \neq 2l$, temos

$$E(X_t^2 X_{t-l}^2) = b^2 E(X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_t^2 X_t^2) + \sigma^2 E(X_t^2). \quad (3.39)$$

Desenvolvendo X_t^2 obtemos

$$E(X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_t^2 X_t^2) = b^2 \sigma^2 E(X_{t-(k-l)}^2 X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-l}^2) + \mu_4 E(X_t^2). \quad (3.40)$$

Quando $k < 2l$,

$$E(X_{t-(k-l)}^2 X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-l}^2) = E(X_{t-k}^2 X_t^2 \varepsilon_{t-l+k}^2) = b^2 \sigma^2 E(X_{t-(k-l)}^2 X_{t-k}^2) + \sigma^2 E(X_t^4)$$

e para $k > 2l$,

$$E(X_{t-(k-l)}^2 X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-l}^2) = E(X_{t-l}^2 X_t^2) = b^2 \sigma^2 E(X_{t-(k-l)}^2 X_{t-k}^2) + \sigma^2 E(X_t^4).$$

Assim (3.40) é igual a

$$E(X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_t^2 X_t^2) = \frac{b^2 \sigma^6 - \mu_4}{1 - b^4 \sigma^4} E(X_t^2)$$

consequentemente (3.39) é igual a

$$E(X_t^2 X_{t-l}^2) = b^2 \left(\frac{b^2 \sigma^6 - \mu_4}{1 - b^4 \sigma^4} E(X_t^2) \right) + \sigma^2 E(X_t^2).$$

Então

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t^2, X_{t-h}^2) &= b^2 \left(\frac{b^2 \sigma^6 - \mu_4}{1 - b^4 \sigma^4} E(X_t^2) \right) + \sigma^2 E(X_t^2) - [E(X_t^2)]^2 \\ &= \frac{b^2(\mu_4 - \sigma^4)}{1 - b^4 \sigma^4} E(X_t^2). \end{aligned}$$

b) Se $k = 2l$, temos

$$E(X_t^2 X_{t-l}^2) = b^2 E(X_{t-l}^2 \varepsilon_t^2 X_t^2) + \sigma^2 E(X_t^2). \quad (3.41)$$

Desenvolvendo X_t^2 , obtemos

$$E(X_{t-l}^2 \varepsilon_t^2 X_t^2) = b^2 \sigma^2 E(X_{t-l}^2 \varepsilon_t^2 X_t^2) + \mu_4 E(X_t^2)$$

pelo que

$$E(X_{t-l}^2 \varepsilon_t^2 X_t^2) = \frac{\mu_4}{1 - b^2 \sigma^2} E(X_t^2).$$

Assim (3.41) é equivalente a

$$E(X_t^2 X_{t-l}^2) = \frac{b^2 \mu_4}{1 - b^2 \sigma^2} E(X_t^2) + \sigma^2 E(X_t^2).$$

Então

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t^2, X_{t-h}^2) &= \frac{b^2 \mu_4}{1 - b^2 \sigma^2} E(X_t^2) + \sigma^2 E(X_t^2) - [E(X_t^2)]^2 \\ &= \frac{b^2(\mu_4 - \sigma^4)}{1 - b^2 \sigma^2} E(X_t^2). \end{aligned}$$

3) Para $h = k - l \neq l$:

a) Se $k > 2l$

$$E(X_t^2 X_{t-(k-l)}^2) = b^2 \sigma^2 E(X_{t-l}^2 X_t^2) + \sigma^2 E(X_t^2). \quad (3.42)$$

Desenvolvendo X_t^2 obtemos

$$\begin{aligned} E(X_{t-l}^2 X_t^2) &= b^2 E(X_{t-l}^2 X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-l}^2) + \sigma^2 E(X_t^2) \\ &= b^2 E(X_t^2 X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_t^2) + \sigma^2 E(X_t^2) \\ &= b^4 \sigma^2 E(X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_t^2 X_{t-(k-2l)}^2) + b^4 \mu_4 E(X_t^2) + \sigma^2 E(X_t^2) \\ &= b^4 \sigma^4 E(X_{t-l}^2 X_t^2) + (b^4 \mu_4 + \sigma^2) E(X_t^2), \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$E(X_{t-l}^2 X_t^2) = \frac{b^4 \mu_4 + \sigma^2}{1 - b^4 \sigma^4} E(X_t^2).$$

Retomando (3.42), temos

$$E(X_t^2 X_{t-(k-l)}^2) = \left(\frac{b^2 \sigma^2 (b^4 \mu_4 + \sigma^2)}{1 - b^4 \sigma^4} + \sigma^2 \right) E(X_t^2).$$

b) Se $k < 2l$, tem-se que

$$E(X_t^2 X_{t-(k-l)}^2) = b^2 E(X_{t-l}^2 \varepsilon_{t-(2l-k)}^2 X_t^2) + \sigma^2 E(X_t^2), \quad (3.43)$$

e desenvolvendo X_t^2 vem

$$\begin{aligned} E(X_{t-l}^2 \varepsilon_{t-(2l-k)}^2 X_t^2) &= b^2 E(X_{t-l}^2 \varepsilon_{t-(2l-k)}^2 X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-l}^2) + \sigma^2 E(X_{t-l}^2 \varepsilon_{t-(2l-k)}^2) \\ &= b^2 E(X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_{t-2(k-l)}^2 X_{t-2(k-l)}^2 \varepsilon_{t-(k-l)}^2) + \sigma^2 E(X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_t^2) \\ &= b^2 \sigma^2 E(X_t^2 X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_t^2) + \sigma^4 E(X_t^2). \end{aligned}$$

Substituindo este resultado em (3.43), obtemos

$$E(X_t^2 X_{t-(k-l)}^2) = b^4 E(X_t^2 X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_t^2) + \sigma^2 (1 + b^2 \sigma^2) E(X_t^2). \quad (3.44)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} E(X_t^2 X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_t^2) &= b^2 \sigma^2 E(X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-l}^2 X_{t-(k-l)}^2) + E(X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_t^4) \\ &= b^2 \sigma^2 E(X_{t-l}^2 \varepsilon_{t-(2l-k)}^2 X_t^2) + \mu_4 E(X_t^2) \\ &= b^2 \sigma^2 [b^2 E(X_{t-2(k-l)}^2 \varepsilon_{t-(k-l)}^2 X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_t^2) + \sigma^2 E(X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_t^2)] + \mu_4 E(X_t^2) \\ &= b^4 \sigma^4 E(X_t^2 X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_t^2) + (b^2 \sigma^6 + \mu_4) E(X_t^2), \end{aligned}$$

pelo que

$$E(X_t^2 X_{t-(k-l)}^2 \varepsilon_t^2) = \frac{b^2 \sigma^6 + \mu_4}{1 - b^4 \sigma^4} E(X_t^2).$$

Então, de (3.44), obtemos

$$E(X_t^2 X_{t-(k-l)}^2) = \left(\frac{b^2 \sigma^2 (b^4 \mu_4 + \sigma^2)}{1 - b^4 \sigma^4} + \sigma^2 \right) E(X_t^2).$$

Assim, para $h = k - l \neq l$, tem-se

$$\text{Cov}(X_t^2, X_{t-h}^2) = \frac{b^4 \sigma^2 (\mu_4 + \sigma^4)}{1 - b^4 \sigma^4} E(X_t^2).$$

4) Finalmente, falta verificar que $\text{Cov}(X_t^2, X_{t-h}^2) = 0$ para $h \in \{1, \dots, l-1, l+1, \dots, k-1\}$, com $h \neq k-l$. Temos

$$E(X_t^2 X_{t-h}^2) = b^2 E(X_{t-k}^2 X_{t-h}^2 \varepsilon_{t-l}^2) + \sigma^2 E(X_t^2).$$

(a) Se $h < l$,

$$E(X_t^2 X_{t-h}^2) = b^2 E(X_{t-(k-h)}^2 X_t^2 \varepsilon_{t-(l-h)}^2) + \sigma^2 E(X_t^2)$$

e desenvolvendo X_t^2 vem

$$\begin{aligned} E(X_t^2 X_{t-h}^2) &= b^4 E(X_{t-(k-h)}^2 \varepsilon_{t-(l-h)}^2 X_{t-k}^2 \varepsilon_{t-l}^2) + b^2 \sigma^2 E(X_{t-(k-h)}^2 \varepsilon_{t-(l-h)}^2) + \sigma^2 E(X_t^2) \\ &= b^4 \sigma^2 E(X_{t-(k-l)}^2 X_{t-(k-l-h)}^2 \varepsilon_{t-h}^2) + (b^2 \sigma^4 + \sigma^2) E(X_t^2). \end{aligned}$$

Quando $h < k - l$ temos

$$E(X_t^2 X_{t-h}^2) = b^4 \sigma^4 E(X_t^2 X_{t-h}^2) + (b^2 \sigma^4 + \sigma^2) E(X_t^2).$$

pelo que $E(X_t^2 X_{t-h}^2) = \frac{b^2 \sigma^4 + \sigma^2}{1 - b^4 \sigma^4} E(X_t^2) = [E(X_t^2)]^2$.

No caso $h > k - l$ temos

$$\begin{aligned} E(X_{t-(k-h)}^2 X_t^2 \varepsilon_{t-(l-h)}^2) &= b^2 \sigma^2 E(X_t^2 X_{t-h}^2 \varepsilon_{t-(h-k+l)}^2) + \sigma^4 E(X_t^2) \\ &= b^4 \sigma^4 E(X_{t-(k-h)}^2 X_t^2 \varepsilon_{t-(l-h)}^2) + (b^2 \sigma^6 + \sigma^4) E(X_t^2) \end{aligned}$$

pelo que

$$E(X_{t-(k-h)}^2 X_t^2 \varepsilon_{t-(l-h)}^2) = \frac{(b^2 \sigma^6 + \sigma^4)}{1 - b^4 \sigma^4} E(X_t^2).$$

Então

$$E(X_t^2 X_{t-h}^2) = \frac{b^2 (b^2 \sigma^6 + \sigma^2)}{1 - b^4 \sigma^4} E(X_t^2) = [E(X_t^2)]^2.$$

Portanto $Cov(X_t^2, X_{t-h}^2) = 0$ para $h < l$.

(b) Se $l < h < k$, tem-se que

$$\begin{aligned} E(X_t^2 X_{t-h}^2) &= b^2 \sigma^2 E(X_{t-k}^2 X_{t-h}^2) + \sigma^2 E(X_t^2) \\ &= b^2 \sigma^2 [b^2 \sigma^2 E(X_{t-(k-l)}^2 X_{t-(k-h-l)}^2) + \sigma^2 E(X_t^2)] + \sigma^2 E(X_t^2) \\ &= b^4 \sigma^4 E(X_t^2 X_{t-h}^2) + (b^2 \sigma^4 + \sigma^2) E(X_t^2), \end{aligned}$$

pelo que $E(X_t^2 X_{t-h}^2) = \frac{b^2 \sigma^4 + \sigma^2}{1 - b^4 \sigma^4} E(X_t^2) = [E(X_t^2)]^2$.

Obtemos, assim, a covariância pretendida. □

Dos Teoremas (3.4.4) e (3.4.5) obtivemos o seguinte resultado:

Corolário 3.4.2. *Seja $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, o modelo diagonal definido por (3.21). Então os valores de $\rho_{X_t^2}(mk)$, $\rho_{X_t^2}((m-1)k+l)$, $\rho_{X_t^2}(mk-l)$, $h \in \mathbb{N}$, são não nulos, mais precisamente,*

$$\begin{aligned} \rho_{X_t^2}(mk) &= (b^2 \sigma^2)^{m-1} \rho_{X_t^2}(k) = (b^2 \sigma^2)^m, \\ \rho_{X_t^2}((m-1)k+l) &= (b^2 \sigma^2)^{m-1} \rho_{X_t^2}(l), \\ \rho_{X_t^2}(mk-l) &= (b^2 \sigma^2)^{m-1} \rho_{X_t^2}(k-l). \end{aligned}$$

Demonstração. Por indução matemática vamos provar que, para $1 < h \leq k$, temos $Cov(X_t^2, X_{t-h}^2) \neq 0$, nos casos $h = k$, $h = l$, $h = k - l$.

- No caso da primeira igualdade, a prova é análoga à demonstração do Corolário 3.4.1.

- para $m = 1$, a segunda igualdade é trivialmente verdadeira.

Suponhamos que $\rho_{X_t^2}(mk - l) = (b^2 \sigma^2)^{m-1} \rho_{X_t^2}(k - l)$. Então

$$\rho_{X_t^2}((m+1)k - l) = b^2 \sigma^2 \rho_{X_t^2}(k - l) = (b^2 \sigma^2)^m \rho_{X_t^2}(k - l).$$

- A terceira igualdade prova-se de modo análogo.

□

Bibliografia

- [1] Azencott, R. and Dacunha-Castelle, D. (1984). *Série d'Observations Irrégulières, Modélisation et Prévision*. Masson, Paris.
- [2] Billingsley, P. (1995). *Measure and Probability (3a Edição)*. John Wiley & Sons, Inc.
- [3] Gonçalves, E. and Mendes-Lopes, N. (2008). *Séries Temporais. Modelações lineares e não lineares (2a Edição)*. Sociedade Portuguesa de Estatística.
- [4] Gonçalves, E. and Mendes-Lopes, N. (2013). *Probabilidades - Princípios Teóricos (2a Edição)*. Escolar Editora.
- [5] Granger, C.W.J., and Andersen, A. (1978). *An Introduction to Bilinear Time Series Models*. Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.
- [6] Martins, C. M. T. (2000). *Modelos bilineares em séries temporais: propriedades probabilistas e decisão estatística*. PhD thesis, Departamento de Matemática, FCTUC.
- [7] Niculescu, C. and Persson, L.-E. (2006). *Convex functions and their applications*. Springer.
- [8] Pham, T. D. and Tran, L. T. (1981). On the first-order bilinear time series model. *Journal of Applied Probability*, 18(3):617–627.
- [9] Quinn, B. (1982). Stationarity and invertibility of simple bilinear models. *Stochastic Processes and their Applications*, 12:225–230.

Anexo A

Código R

Modelo bilinear BL(1,0,1,1)

```
library(forecast)
set.seed(2308)
e <- rnorm(1000, mean=0, sd=1)

a <- 0.5
b <- 0.5

m_1 <- b/(1-a)
for(i in 2:length(e)){
  m_1[i] <- a*m_1[i-1]+b*m_1[i-1]*e[i-1]+e[i]}
m_1

m_1ts=ts(m_1, start=1, frequency=1)

p<-autoplot(m_1ts, col="black", xlab="tempo", ylab="valores_da_serie")
p + theme_minimal()
```

Modelo diagonal (k=L=2)

```
library(forecast)
set.seed(2308)
e <- rnorm(1000, mean=0, sd=1)

b <- 0.5

x<-numeric(1000)
x[1] <- b
```

```
x[2] <- b

for(t in 3:length(e)){
  x[t] <- b*x[t-2]*e[t-2]+e[t]
}
x
x_st = ts(x, start = 1, freq = 1)

p <- autoplot(x_st ,col="black", xlab="tempo", ylab="valores_da_serie")
p + theme_minimal()
```

Modelo superdiagonal (k=2, l=1)

```
library(forecast)
set.seed(2308)
e <- rnorm(1000,mean=0,sd=1)

b <- -0.5

# inicializar com X(0) e X(1)
x<-numeric(1000)
x[1] <- 0
x[2] <- 0

for(t in 3:length(e)){
  x[t] <- b*x[t-2]*e[t-1]+e[t]
}

x_st = ts(x, start = 1, freq = 1)
p <- autoplot(x_st ,col="black", xlab="tempo", ylab="valores_da_serie")
p + theme_minimal()
```

Anexo B

Código Matlab

```
1 %acf_BL = acf_AR*F
2
3 syms F(a,b,sigma)
4 F(a,b,sigma) = 1-((a-1)*b^2*sigma^2*(a^2+b^2*sigma^2-1))/(a
      *(-1+2*a-b^2*sigma^2-b^4*sigma^4+a^2*(b^2*sigma^2-1)));
5
6 F(a,0.5,1)
7
8 fplot(F(a,0.5,1),[-0.866 0.866])
9 yline(1);
10 ylim([-1.5 2])
11
12 legend({'F(a,0.5,1)'})
```