

1 2 9 0



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Constança de Alves Cardoso e André Fragoso

**MODELOS AUTORREGRESSIVOS DE VALORES
INTEIROS MULTIVARIADOS**

**Dissertação no âmbito do Mestrado em Matemática, Ramo de Estatística,
Otimização e Matemática Financeira, orientada pelas Professoras Doutoradas
Cristina Martins e Maria da Graça Temido e apresentada ao Departamento de
Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia.**

junho de 2023

Modelos Autorregressivos de Valores Inteiros Multivariados

Constança de Alves Cardoso e André Fragoso



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mestrado em Matemática

Master in Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

junho 2023

Agradecimentos

Às minhas Professoras e Orientadoras, Doutora Maria da Graça Temido e Doutora Cristina Martins, que acreditaram e confiaram em mim e foram incansáveis com toda a sua disponibilidade e ajuda. Grata por ter tido a oportunidade de experienciar este trabalho conjunto.

Aos meus pais, que se esforçaram para me darem a oportunidade de sucesso nos estudos e me têm proporcionado o melhor da vida: amor incondicional.

Ao JP – o meu cúmplice de aventuras –, que está sempre disposto a ajudar-me, em qualquer situação. Ao Marco – o amigo sempre presente –, que me ouve durante horas infinitas. À Beatriz – a minha borboleta –, que me mostrou o arco-íris da vida.

Resumo

Este trabalho enquadra-se na área de Séries Temporais e é dedicado ao estudo do modelo $MGINAR(1)$ (*Multivariate Generalized Integer Autoregressive of order 1*) e de um caso particular do mesmo – um modelo $BINAR(1)$ (*Bivariate Integer-valued Autoregressive of order 1*). Trata-se de processos cujas margens são vetores aleatórios de componentes inteiras não negativas.

A formulação do processo $MGINAR(1)$ é feita à custa da introdução de um operador aleatório matricial, cujas propriedades mais relevantes são demonstradas.

Segue-se a definição do processo $MGINAR(p)$ e a prova de que este se pode obter como subvetor de um processo $MGINAR(1)$ de maior dimensão, considerando, para tal, uma matriz de coeficientes adequada. São, ainda, estabelecidos e demonstrados resultados que permitem concluir que o processo $MGINAR(1)$ admite momentos de primeira e de segunda ordens e que é fortemente e fracamente estacionário.

No caso do modelo $BINAR(1)$, é apresentada a sua definição e as suas propriedades mais relevantes. Seguidamente, aprofunda-se o seu estudo, considerando-se, em particular, que o processo de inovações segue uma lei bivariada de Poisson ou Binomial Negativa.

Posteriormente, efetua-se a estimação pontual dos parâmetros do modelo para cada caso de inovações através de três métodos: Yule Walker, Mínimos Quadrados Condicionais e Máxima Verossimilhança.

Por fim, são realizadas duas simulações do modelo $BINAR(1)$, através da utilização do *software R*, bem como uma aplicação com dados reais relativos a manchas solares registadas em dois observatórios, onde se ilustra o que foi referido em teoria e se estima os parâmetros desconhecidos de acordo com os métodos de Yule Walker e dos Mínimos Quadrados Condicionais.

Palavras-Chave: Séries Temporais de Contagem Multivariadas, Operadores Aleatórios, Modelos Autorregressivos.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 INTRODUÇÃO	1
2 OPERADORES ALEATÓRIOS	5
2.1 Função Geradora de Probabilidades	5
2.2 Operador Aleatório Univariado Generalizado	6
2.3 Operador Aleatório Matricial Generalizado	9
3 MODELO <i>MGINAR</i>(1)	13
3.1 Definição do modelo <i>MGINAR</i> (p)	13
3.2 Definição e propriedades do modelo <i>MGINAR</i> (1)	15
4 O MODELO <i>BINAR</i>(1)	27
4.1 Definição e propriedades do modelo <i>BINAR</i> (1)	27
4.2 Casos paramétricos	31
4.2.1 Inovações com lei de Poisson	31
4.2.2 Inovações com lei Binomiais Negativas	34
4.3 Estimação Pontual	36
4.3.1 Inovações com lei de Poisson	37
4.3.2 Inovações com lei Binomiais Negativas	40
5 SIMULAÇÕES E APLICAÇÃO	43
5.1 Simulações	43
5.1.1 Inovações com lei de Poisson	43
5.1.2 Inovações com lei Binomiais Negativas	44
5.2 Aplicação	45
Bibliografia	51
Anexo A CÓDIGO EM R	53

Lista de Figuras

5.1	Trajatórias de um processo bivariado simulado que segue um modelo $BINAR(1)$ com inovações $PB(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$	43
5.2	Trajatórias de um processo bivariado simulado que segue um modelo $BINAR(1)$ com inovações de $BNB(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$	44
5.3	Trajatórias relativas ao número de grupos de manchas solares nas respectivas regiões .	46
5.4	Correlogramas e correlogramas parciais de cada uma das séries	47
5.5	Correlogramas dos resíduos das margens	49

Lista de Tabelas

5.1	Estimativas dos parâmetros do modelo $BINAR(1)$ com inovações de Poisson	44
5.2	Estimativas dos parâmetros do modelo $BINAR(1)$ com inovações Binomiais Negativas	45
5.3	Estatísticas principais das duas séries	45
5.4	Estimativas dos parâmetros do modelo	47
5.5	Estatísticas dos resíduos marginais	48

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Muitas são as áreas científicas em que surge a necessidade de descrever, explicar e prever fenómenos aleatórios que evoluem ao longo do tempo. A observação destes fenómenos permite gerar dados univariados ou multivariados, os quais são registados, de maneira sequencial, ao longo do tempo, a que chamamos série temporal ou série cronológica.

Por meio da análise destes registos numéricos, é possível fazer previsões e projetar possibilidades sobre o futuro acerca do comportamento de uma determinada variável real ou vetorial. Neste contexto, e a título de exemplo, a análise de séries temporais é um alicerce fundamental no entendimento do mercado e na formulação de planos de ação e de estratégias, principalmente no que toca a tomadas de decisões.

Do ponto de vista probabilista, é fundamental a escolha de modelos estocásticos que permitam descrever e interpretar a evolução temporal dos fenómenos em apreciação.

Existe um leque muito alargado de famílias de modelos que foram surgindo na literatura para a análise de uma série temporal, entre os quais destacamos os clássicos modelos *ARMA* (*Autoregressive Moving Average*). Contudo, muitas das séries temporais são, pela sua natureza, constituídas por valores inteiros não negativos. Neste domínio de dados de contagem, nem estes modelos reais *ARMA* nem qualquer uma das suas vastas generalizações se mostram profícuos, uma vez que a simples operação de multiplicação de um número real por um número inteiro tem, quase sempre, como resultado, um número real não inteiro.

A análise de séries temporais de valores inteiros tem atraído o interesse de muitos autores, o que gerou uma vasta gama dos chamados modelos de contagem, sendo muitos deles versões discretas dos referidos modelos *ARMA*. Com efeito, o conhecimento e a natureza das propriedades destes modelos clássicos motivou a sua adaptação ao contexto das variáveis inteiras. Na génese desta adaptação, está a introdução de operadores aleatórios que pudessem substituir a referida operação multiplicação escalar de um número real por uma variável aleatória real, por uma outra operação entre um escalar real e uma variável aleatória inteira não negativa, cujo resultado ainda fosse um número inteiro não negativo. O primeiro operador a ser introduzido na literatura deve-se a Steutel e a van Harn ([14]) e é, usualmente, designado operador *thinning* ou operador aleatório binomial. A saber, dado um número real $\alpha \in [0, 1]$ e uma variável aleatória inteira não negativa, X , a variável operada $\alpha \circ X$ é igual a $\sum_{i=1}^X Y_i$, onde $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.)

com lei de Bernoulli de parâmetro α e independentes de X . A esta sucessão chamamos sucessão de contagem do operador.

O surgimento deste operador e das suas subsequentes generalizações permitiu a construção e o estudo de modelos *INARMA* (*Integer-ARMA*). O modelo *INAR*(1) (*Integer Autoregressive of order 1*), pioneiro na literatura e devido a McKenzie ([8]), foi posteriormente estudado em a Al-Osh e Alzaid ([1]). Dizemos que um processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ segue um modelo *INAR*(1) se admite a representação $X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \varepsilon_t$, onde o processo das inovações, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, é constituído por variáveis aleatórias i.i.d., com valores em \mathbb{N}_0 .

É neste contexto que, entre as múltiplas extensões do modelo *INAR*(1) univariado, surge, em [6], um modelo mais geral, designado modelo *MGINAR*(p) (*Multivariate Generalized Integer Autoregressive of order p*). Em [4], foi estudado um caso particular deste modelo, um modelo *BINAR*(1) (*Bivariate Integer Autoregressive of order 1*), no qual se consideram leis bivariadas concretas para o processo das inovações. A leitura cuidada dos artigos [6] e [4] foi a motivação para a escrita desta Dissertação.

Esta vertente multivariada do modelo *INAR*(1) é baseada na definição de um operador aleatório generalizado matricial. Dada uma matriz quadrada $A = [\alpha_{i,j}]_{r \times r}$ e um vetor aleatório $X = (X_1, \dots, X_r)^T$ de componentes inteiras não negativas, este operador aleatório generalizado matricial associa ao par (A, X) o vetor $A \odot X$ de componentes $\sum_{j=1}^r \alpha_{i,j} \circ X_j$, $i = 1, 2, \dots, r$, onde \circ denota o operador aleatório generalizado univariado, no qual as margens das sucessões de contagem não seguem, necessariamente, leis de Bernoulli.

Este trabalho está dividido em cinco partes fundamentais. Para além desta introdução que encerra o Capítulo 1, o Capítulo 2 é dedicado à introdução e ao estudo das propriedades mais relevantes destes dois operadores generalizados.

O Capítulo 3 inicia-se com a definição do modelo *MGINAR*(p), ao que se segue a prova de que este modelo pode ser escrito como subvetor de um modelo *MGINAR*(1), considerando, neste último, uma matriz de coeficientes adequada. Assim, o resto do capítulo é dedicado ao modelo *MGINAR*(1), escrito na forma $X_t = A \odot X_{t-1} + \varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$, onde se assume que $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma sucessão de vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos, de valores inteiros não negativos, com vetor média μ_ε e matriz de covariâncias Σ_ε . Por fim, assumindo que a matriz A tem raio espectral estritamente inferior a 1, prova-se que o processo *MGINAR*(1) é fortemente e fracamente estacionário. São, também, obtidos os momentos de primeira e de segunda ordens, bem como a função de autocovariância.

O Capítulo 4 é reservado ao estudo do modelo *BINAR*(1) – caso particular do que foi exposto no Capítulo 3. Este capítulo é dividido em três secções. Primeiramente, é introduzida a definição de um modelo *BINAR*(1), isto é, $X_t = A \odot X_{t-1} + R_t$, onde A é uma matriz diagonal de ordem 2 e $\{R_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ representa o processo bivariado das inovações. De seguida, estudam-se, separadamente, as propriedades do modelo nos casos em que as inovações seguem uma lei de Poisson bivariada e uma lei Binomial Negativa bivariada. Este capítulo é encerrado com a apresentação de estimadores, segundo três métodos diferentes, de forma a obter estimativas dos parâmetros envolvidos, consoante estamos perante inovações de Poisson ou Binomiais Negativas.

Finalmente, o Capítulo 5 é destinado a uma visão mais prática daquilo que foi estudado anteriormente. Através do *software R*, faz-se simulações de um modelo *BINAR*(1) e estima-se os parâmetros referidos. Esta Dissertação fica concluída com uma aplicação a uma série temporal bivariada em que as margens representam o número semanal de grupos de manchas presentes no Sol, registadas nos observatórios de Boulder e de Palehua, nos EUA.

Capítulo 2

OPERADORES ALEATÓRIOS

Este capítulo destina-se à introdução dos operadores aleatórios anteriormente referidos, bem como ao estudo de algumas das suas propriedades. A secção inicial é dedicada ao conceito de função geradora de probabilidades, o qual será útil em várias demonstrações.

2.1 Função Geradora de Probabilidades

Começemos com a definição de função geradora de probabilidades de uma variável aleatória real (v.a.r.).

Definição 2.1. Seja X uma v.a.r. Designa-se por função geradora de probabilidades (f.g.p.) de X a função $\psi_X(t) = E(t^X)$, definida para os valores de $t \in \mathbb{R}$ tais que esta esperança matemática exista.

Em particular, a função geradora de probabilidades de uma v.a. discreta, X , com suporte S_X , é dada por

$$\psi_X(t) = \sum_{k \in S_X} P(X = k)t^k,$$

para valores de t tais que esta série seja convergente. No que se segue denotamos o conjunto de tais valores t por \mathcal{C}_X

Pela seguinte proposição, concluímos que a f.g.p. caracteriza a lei de uma v.a.

Proposição 2.1. *Sejam X e Y duas v.a.r.'s. Então, $\psi_X(t) = \psi_Y(t)$ se e só se X e Y têm a mesma distribuição.* □

A f.g.p. permite uma fácil caracterização da distribuição de somas de v.a.'s independentes, conforme se descreve no resultado seguinte.

Proposição 2.2. *Sejam X_1, \dots, X_r v.a.'s independentes. Então,*

$$\psi_{X_1 + \dots + X_r}(t) = \prod_{j=1}^r \psi_{X_j}(t)$$

para os valores de t tais que $\psi_{X_1}(t), \dots, \psi_{X_r}(t)$ são convergentes.

Exemplo 2.1. Assuma-se que X tem distribuição Binomial com parâmetro (r, p) , isto é, $X \sim \mathcal{B}(r, p)$, com $r \in \mathbb{N}$ e $p \in]0, 1[$. Desta forma, $P(X = k) = \binom{r}{k} p^k (1-p)^{r-k}$, $k = 0, 1, \dots, r$, pelo que

$$\psi_X(t) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} t^k p^k (1-p)^{r-k} = (pt + (1-p))^r.$$

Exemplo 2.2. Seja Y uma v.a. com distribuição de Poisson de parâmetro λ , $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Neste caso, $P(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Assim,

$$\psi_Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda(t-1)}.$$

Exemplo 2.3. Admita-se uma v.a., Z , com distribuição Geométrica de parâmetro p . Então, $P(Z = k) = (1-p)^{k-1} p$, $k \in \mathbb{N}_0$ e a sua f.g.p. é dada por

$$\psi_Z(t) = \frac{1-p}{1-pt}, \quad |t| < \frac{1}{p}.$$

2.2 Operador Aleatório Univariado Generalizado

Após uma breve introdução, passamos a apresentar a definição e as propriedades do operador aleatório que é uma generalização do operador binominal introduzido por Steutel e a van Harn (1979), ([14]).

Definição 2.2. (Operador de Steutel e van Harn Generalizado). Seja X uma v.a. com suporte $S_X = \mathbb{N}_0$ e $\alpha \geq 0$. O operador $\alpha \circ$ é definido como

$$\alpha \circ X = \begin{cases} \sum_{i=1}^X Y_i, & X > 0 \\ 0, & X = 0, \end{cases}$$

onde $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de v.a.'s inteiras, independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), não negativas, com $\{0\} \subset S_{Y_1}$, com média α e variância β , e independentes de X . A sucessão $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é designada por sucessão de contagem.

No caso particular em que as margens da sucessão $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ têm lei de Bernoulli de parâmetro α , estamos na presença do operador aleatório binominal ou operador *thinning*, introduzido por Steutel e van Harn (1979). Se, por outro lado, as margens da sucessão $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ têm lei Geométrica de parâmetro β , estamos na presença de um operador binomial negativo, introduzido em [10].

Proposição 2.3. Sejam X , W e Z v.a.'s que assumem valores inteiros não negativos com X e Z independentes. Consideremos as sucessões de contagem $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{\hat{Y}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ independentes entre si e independentes de X e de Z . Então, o operador apresentado na Definição 2.2. conta com as seguintes propriedades:

1. $0 \circ X = 0$, q.c.
2. $\Psi_{\alpha \circ X}(t) = \Psi_X[\Psi_{Y_1}(t)]$, $t \in \mathcal{C}_{\alpha \circ X}$
3. $\alpha \circ (X + Z) \stackrel{d}{=} \alpha \circ X + \alpha \circ Z$
4. $E(\alpha \circ X) = \alpha E(X)$
5. $E[(\alpha \circ X)^2] = \beta E(X) + \alpha^2 E(X^2)$
6. $E((\alpha \circ X)W) = \alpha E(XW)$
7. $\text{Var}(\alpha \circ X) = \alpha^2 \text{Var}(X) + \beta E(X)$
8. $\text{Cov}(\alpha \circ X, Z) = \alpha \text{Cov}(X, Z)$.

Prova. 1. Pretende-se de demonstrar que $P(0 \circ X = 0) = 1$. Uma vez que, para $i \geq 1$, $S_{Y_i} \in \mathbb{N}_0$ e $E(Y_i) = 0$, então $Y_i = 0$, q.c.

$$\begin{aligned}
 P(0 \circ X = 0) &= P(0 \circ X = 0, X \in \mathbb{N}_0) = P(0 \circ X = 0, X \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \{k\}) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} P(0 \circ X = 0, X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} P\left(\sum_{i=1}^X Y_i = 0 / X = k\right) P(X = k) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} P\left(\sum_{i=1}^k Y_i = 0\right) P(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \prod_{i=1}^k P(Y_i = 0) P(X = k) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} P(X = k) = 1.
 \end{aligned}$$

2. Uma vez que $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de v.a.'s i.i.d., e independentes de X , temos

$$\begin{aligned}
 \Psi_{\alpha \circ X}(t) &= E(t^{\alpha \circ X}) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} E(t^{\alpha \circ k}) P(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} E(t^{Y_1 + \dots + Y_k}) P(X = k) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \prod_{j=1}^k E(t^{Y_j}) P(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} [\Psi_{Y_1}(t)]^k P(X = k) = \Psi_X[\Psi_{Y_1}(t)].
 \end{aligned}$$

3. Uma vez que X e Z são independentes, atendendo ao resultado da Proposição 2.2. e à propriedade anterior, vem

$$\Psi_{\alpha \circ (X+Z)}(t) = \Psi_{X+Z}[\Psi_{Y_1}(t)] = \Psi_X[\Psi_{Y_1}(t)] \Psi_Z[\Psi_{Y_1}(t)] = \Psi_{\alpha \circ X}(t) \Psi_{\alpha \circ Z}(t).$$

4. Como $\{Y_i\}$ é uma sucessão de v.a.'s i.i.d, com média α , e independentes de X , então

$$\begin{aligned}
 E(\alpha \circ X) &= E\left(\sum_{i=1}^X Y_i\right) = E\left[E\left(\sum_{i=1}^X Y_i \middle| X\right)\right] = E\left[\sum_{i=1}^X E(Y_i | X)\right] \\
 &= E\left[\sum_{i=1}^X E(Y_i)\right] = E\left(X E(Y_1)\right) = E(X\alpha) = \alpha E(X).
 \end{aligned}$$

5. Uma vez que $\{Y_i\}$ é uma sucessão de v.a.'s i.i.d., com média α e variância β , e independentes de X , sabendo pela prova da alínea anterior que $E(\alpha \circ X|X) = \alpha X$, tem-se

$$\begin{aligned} E[(\alpha \circ X)^2] &= E\left[E\left((\alpha \circ X)^2|X\right)\right] = E\left[\text{Var}(\alpha \circ X|X) + (E(\alpha \circ X|X))^2\right] \\ &= E\left[\text{Var}\left(\sum_{i=1}^X Y_i|X\right) + (\alpha X)^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^X \text{Var}(Y_i) + (\alpha X)^2\right] \\ &= E\left(X\beta + (\alpha X)^2\right) = \beta E(X) + \alpha^2 E(X^2). \end{aligned}$$

6. De facto,

$$E((\alpha \circ X)W) = E(E((\alpha \circ X)W|X, W)) = E(E(W \sum_{i=1}^X Y_i|X, W)) = E(\alpha XY).$$

7. Utilizando resultados das propriedades anteriores e a fórmula de Koenig, demonstramos o pretendido. Com efeito,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\alpha \circ X) &= E((\alpha \circ X)^2) - (E(\alpha \circ X))^2 = \beta E(X) + \alpha^2 E(X^2) - \alpha^2 E(X)^2 \\ &= \alpha^2 \text{Var}(X) + \beta E(X). \end{aligned}$$

8. Utilizando os resultados das propriedades 4 e 6, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\alpha \circ X, Z) &= E((\alpha \circ X)Z) - E(\alpha \circ X)E(Z) = \alpha E(XZ) - \alpha E(X)E(Z) \\ &= \alpha \text{Cov}(X, Z). \end{aligned}$$

□

Para finalizar este capítulo apresentamos mais dois resultados importantes dados nas próximas proposições.

Proposição 2.4. *Sejam X_1, \dots, X_r v.a.'s inteiras não negativas e $\alpha_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, r$. Seja $\{Y_j^{(i)}\}_{j \geq 1}$ a sucessão de contagem associada a $\alpha_i \circ X_i$, $i = 1, \dots, r$. Se $\{Y_j^{(i)}\}_{j \geq 1}$ são mutuamente independentes e independentes de todas as v.a.'s X_i , $i = 1, \dots, r$, então*

$$E\left(\prod_{i=1}^r (\alpha_i \circ X_i)\right) = \left(\prod_{i=1}^r \alpha_i\right) E\left(\prod_{i=1}^r X_i\right), \quad r \geq 1,$$

caso $E\left(\prod_{i=1}^r X_i\right)$ exista.

Prova. Atendendo às independências assumidas, tem-se

$$E\left(\prod_{i=1}^r (\alpha_i \circ X_i)\right) = E\left[E\left(\prod_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^{X_i} Y_j^{(i)}\right) \middle| (X_1, \dots, X_r)\right)\right] = E\left[\prod_{i=1}^r \sum_{j=1}^{X_i} E\left(Y_j^{(i)} \middle| (X_1, \dots, X_r)\right)\right]$$

$$= E\left(\prod_{i=1}^r \sum_{j=1}^{X_i} E(Y_1^{(i)})\right) = E\left(\prod_{i=1}^r \sum_{j=1}^{X_i} \alpha_i\right) = E\left(\prod_{i=1}^r X_i \alpha_i\right) = \left(\prod_{i=1}^r \alpha_i\right) E\left(\prod_{i=1}^r X_i\right).$$

□

A propriedade $1 \circ X = X$ não é, em geral, verdadeira. Quando estamos na presença do operador *thinning*, esta igualdade é válida, como se prova na proposição seguinte.

Proposição 2.5. *Dada uma v.a. discreta, X , de suporte \mathbb{N}_0 , se " \circ " representa o operador binomial, então $1 \circ X = X$, q.c.*

Prova. Para esta demonstração precisamos de provar que $P(1 \circ X = X) = 1$. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} P(1 \circ X = X) &= P\left(\sum_{i=1}^X Y_i = X\right) = P\left(\sum_{i=1}^X Y_i = X, \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \{X = k\}\right) \\ &= \sum_{k \in S_X} P\left(\sum_{i=1}^k Y_i, X = k\right) = \sum_{k \in S_X} P\left(\sum_{i=1}^X Y_i = k | X = k\right) \\ &= \sum_{k \in S_X} P\left(\sum_{i=1}^X Y_i = k\right) P(X = k) = \sum_{k \in S_X} P(Y_1 = 1, Y_2 = 1, \dots, Y_k = 1) P(X = k) \\ &= \sum_{k \in S_X} P(Y_1 = 1)^k P(X = k) = \sum_{k \in S_X} P(X = k) = 1. \end{aligned}$$

□

2.3 Operador Aleatório Matricial Generalizado

O modelo *MGINAR*(1) é baseado num "operador matricial aleatório" designado operador matricial generalizado, introduzido e estudado em [6], cuja definição apresentamos de seguida.

Definição 2.3. Seja $A = [\alpha_{i,j}]_{r \times r}$ uma matriz quadrada de ordem r e $X = (X_1, \dots, X_r)^T$ um vetor aleatório de dimensão r , não negativo, de valores inteiros. O operador $A \odot X$ é definido por

$$A \odot X = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,r} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{r,1} & \alpha_{r,2} & \dots & \alpha_{r,r} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^r \alpha_{1,j} \circ X_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^r \alpha_{r,j} \circ X_j \end{bmatrix}$$

onde, para cada (i, j) , $\{Y_k^{(i,j)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ é a sucessão de contagem associada a $\alpha_{i,j} \circ X_j$, a qual, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ tem média $E(Y_k^{(i,j)}) = \alpha_{i,j}$ e variância $Var(Y_k^{(i,j)}) = \beta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, r$. Além disso, as $r \times r$ sucessões $\{Y_k^{(i,j)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ são independentes.

No contexto da definição anterior, denotamos por B a matriz tal que $B = [\beta_{i,j}]_{r \times r}$. No que se segue, dado um vetor $x = (x_1, \dots, x_k)^T$, denotamos por $d(x)$ a matriz diagonal cujos elementos da diagonal são x_1, \dots, x_k .

Proposição 2.6. *Sejam $A = [\alpha_{ij}]_{r \times r}$ e $C = [\gamma_{ij}]_{r \times r}$ matrizes e X, W e Z vetores aleatórios de dimensão r , de valores inteiros não negativos. Então,*

1. $E(A \odot X) = AE(X)$
2. $E[(A \odot X)(A \odot X)^T] = d(BE(X)) + AE(XX^T)A^T$
3. $E[(A \odot X)^T(A \odot X)] = (1 \dots 1)^T BE(X) + tr(AE(XX^T)A^T)$
4. $E[(A \odot X)(C \odot Z)^T] = AE(XZ^T)C^T$, se as sucessões de contagem envolvidas em $A \odot X$ e $C \odot Z$ forem independentes
5. $E[(A \odot X)W^T] = AE(XW^T)$.

Prova. Usamos a notação $[M]_{i,j}$ para representar o elemento da matriz M , de dimensão $l \times c$, situado na linha i e na coluna j , para $i = 1, \dots, l$ e $j = 1, \dots, c$.

1. Tem-se $[A \odot X]_{i,j} = \sum_{j=1}^r \alpha_{i,j} \circ X_j$. Então, pelo ponto 4. da Proposição 2.3.,

$$\left[E(A \odot X) \right]_{i,j} = E\left(\sum_{j=1}^r \alpha_{i,j} \circ X_j \right) = \sum_{j=1}^r E(\alpha_{i,j} \circ X_j) = \sum_{j=1}^r \alpha_{i,j} E(X_j),$$

que é o elemento genérico de $AE(X)$.

2. O elemento (i, j) de $(A \odot X)(A \odot X)^T$, $i, j = 1, 2, \dots, r$, é dado por

$$\left[(A \odot X)(A \odot X)^T \right]_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^r \alpha_{i,k} \circ X_k \right) \left(\sum_{l=1}^r \alpha_{j,l} \circ X_l \right) = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r (\alpha_{i,k} \circ X_k)(\alpha_{j,l} \circ X_l).$$

Logo, o elemento genérico da sua esperança matemática é da forma

$$\begin{aligned} \left[E[(A \odot X)(A \odot X)^T] \right]_{i,j} &= E\left(\sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r (\alpha_{i,k} \circ X_k)(\alpha_{j,l} \circ X_l) \right) \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r E[(\alpha_{i,k} \circ X_k)(\alpha_{j,l} \circ X_l)]. \end{aligned}$$

Temos, agora, duas possibilidades: $i = j$ e $i \neq j$.

Começemos por estudar o caso $i = j$. Atendendo aos pontos 4. e 5. da Proposição 2.3. e à Proposição 2.4., deduzimos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \left[E[(A \odot X)(A \odot X)^T] \right]_{i,i} &= \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r E[(\alpha_{i,k} \circ X_k)(\alpha_{i,l} \circ X_l)] \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^r E[(\alpha_{i,k} \circ X_k)(\alpha_{i,l} \circ X_l)] + \sum_{k=1}^r E[(\alpha_{i,k} \circ X_k)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^r \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^r \alpha_{i,k} \alpha_{i,l} E(X_k X_l) + \sum_{k=1}^r \left(\beta_{i,k} E(X_k) + \alpha_{i,k}^2 E(X_k^2) \right) \\
&= \sum_{k=1}^r \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^r \alpha_{i,k} \alpha_{i,l} E(X_k X_l) + \sum_{k=1}^r \alpha_{i,k}^2 E(X_k^2) + \sum_{k=1}^r \beta_{i,k} E(X_k) \\
&= \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_{i,k} \alpha_{i,l} E(X_k X_l) + \sum_{k=1}^r \beta_{i,k} E(X_k).
\end{aligned}$$

O caso $i \neq j$ é conseguido, também, através do resultado da Proposição 2.4., ou seja,

$$\left[E[(A \odot X)(A \odot X)^T] \right]_{i,j} = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r E[(\alpha_{i,k} \circ X_k)(\alpha_{j,l} \circ X_l)] = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_{i,k} \alpha_{j,l} E(X_k X_l).$$

Então,

$$\sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r E[(\alpha_{i,k} \circ X_k)(\alpha_{j,l} \circ X_l)] = \begin{cases} \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_{i,k} \alpha_{i,l} E(X_k X_l) + \sum_{k=1}^r \beta_{i,k} E(X_k), & i = j \\ \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_{i,k} \alpha_{j,l} E(X_k X_l), & i \neq j \end{cases}$$

Uma vez que o termo genérico de ordem (i, j) da matriz XX^T é $[XX^T]_{i,j} = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r X_k X_l$, então

$AE(XX^T)A^T$ é uma matriz $r \times r$ de termo geral $\sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_{i,k} \alpha_{i,l} E(X_k X_l)$.

Desta forma, $E[(A \odot X)(A \odot X)^T] = d(BE(X)) + AE(XX^T)A^T$, onde $d(BE(X))$ é a matriz diagonal cujos elementos diagonais são as componentes do vetor $BE(X)$, ou seja, são os elementos da forma $\beta_{i,i} = \sum_{k=1}^r \beta_{i,k} E(X_k)$, para $i \in \{1, \dots, r\}$.

3. O traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos da sua diagonal principal. Dado um vetor V , do tipo $r \times 1$, tem-se a seguinte propriedade

$$tr(V^T V) = tr(VV^T). \tag{2.1}$$

Uma vez que $(A \odot X)^T$ é um vetor $1 \times r$ e $(A \odot X)$ é um vetor $r \times 1$, então $(A \odot X)^T(A \odot X)$ é uma v.a.r., isto é, uma matriz 1×1 . Logo, atendendo a (2.1) e à linearidade da esperança matemática, obtemos

$$\begin{aligned}
E[(A \odot X)^T(A \odot X)] &= tr \left(E[(A \odot X)^T(A \odot X)] \right) = E \left(tr[(A \odot X)^T(A \odot X)] \right) \\
&= E \left(tr[(A \odot X)(A \odot X)^T] \right) = tr \left(E[(A \odot X)(A \odot X)^T] \right).
\end{aligned}$$

Ora, pela propriedade anterior, sabemos que $E[(A \odot X)(A \odot X)^T] = d(BE(X)) + AE(XX^T)A^T$, donde

$$\text{tr}\left(E[(A \odot X)(A \odot X)^T]\right) = \text{tr}[d(BE(X))] + \text{tr}[AE(XX^T)A^T].$$

Por outro lado, sabemos que $d(BE(X))$ é uma matriz diagonal cujos elementos são as componentes do vetor $BE(X)$. Este vetor tem dimensão $r \times 1$, uma vez que B é uma matriz da forma $r \times r$ e $E(X)$ é um vetor da forma $r \times 1$. Portanto, concluímos que

$$\text{tr}[d(BE(X))] = (1 \dots 1)^T BE(X)$$

e a propriedade fica provada.

4. O elemento genérico de $(A \odot X)(C \odot Z)^T$ é dado por

$$\left[(A \odot X)(C \odot Z)^T\right]_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^r \alpha_{i,k} \circ X_k\right) \left(\sum_{l=1}^r \gamma_{j,l} \circ Z_l\right) = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r (\alpha_{i,k} \circ X_k)(\gamma_{j,l} \circ Z_l).$$

Assim, aplicando, novamente, o ponto 4. da Proposição 2.3., o elemento genérico da sua esperança matemática é dado por

$$\begin{aligned} \left[E[(A \odot X)(C \odot Z)^T]\right]_{i,j} &= E\left(\sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r (\alpha_{i,k} \circ X_k)(\gamma_{j,l} \circ Z_l)\right) \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_{i,k} \gamma_{j,l} E(X_k Z_l) = \left[AE(XX^T)C^T\right]_{i,j}, \end{aligned}$$

que é o elemento genérico de $AE(XX^T)C^T$.

5. Analogamente ao que foi feito na demonstração anterior, prova-se que é

$$\left[E((A \odot X)W^T)\right]_{i,j} = E\left(\sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r (\alpha_{i,k} \circ X_k)W_l\right) = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \alpha_{i,k} E(X_k W_l) = [AE(XW^T)]_{i,j}.$$

A demonstração fica concluída. □

Capítulo 3

MODELO *MGINAR*(1)

O objetivo deste capítulo é estudar o modelo *MGINAR*(1), o qual é construído a partir do operador matricial introduzido no capítulo anterior. Antes, mostramos que qualquer modelo *MGINAR*(p) de dimensão r , pode ser entendido como um subvetor de um modelo *MGINAR*(1) de dimensão rp .

3.1 Definição do modelo *MGINAR*(p)

Sejam A_1, \dots, A_p matrizes quadradas de ordem r tais que $\det(I_r - A_1z - A_2z^2 - \dots - A_pz^p) \neq 0$, com $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$. Seja $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de vetores aleatórios i.i.d. de valores inteiros não negativos, do tipo $r \times 1$, com vetor média finito, μ_ε , e matriz de covariâncias finita, Σ_ε .

Definição 3.1. Um processo de vetores aleatórios reais de dimensão r , $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, segue um modelo *MGINAR*(p) se admite a representação

$$X_t = \sum_{l=1}^p A_l \odot X_{t-l} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

na qual se assume que, para cada t , as $r \times r \times p$ sucessões de contagem $\{Y_k^{(i,j,t)}\}_{k \in \mathbb{N}}^{(1)}, \dots, \{Y_k^{(i,j,t)}\}_{k \in \mathbb{N}}^{(p)}$ associadas a $A_l \odot X_{t-l}$, para $l \in \{1, \dots, p\}$, são todas independentes.

Mostramos, de seguida, que basta estudar o processo *MGINAR*(1), uma vez que o processo de ordem p pode ser considerado como um subvetor de um processo de ordem 1 de maior dimensão.

Com efeito, seja

$$Y_t = (X_t^T, X_{t-1}^T, \dots, X_{t-p+1}^T)^T \quad \text{e} \quad \tilde{\varepsilon}_t = (\varepsilon_t^T, 0^T, \dots, 0^T)^T, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Consideremos a seguinte matriz quadrada de ordem rp

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{p-1} & A_p \\ I_r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_r & 0 \end{bmatrix}$$

e a representação matricial

$$A^{\odot} = \begin{bmatrix} A_1^{\odot} & A_2^{\odot} & \dots & A_{p-1}^{\odot} & A_p^{\odot} \\ I_r^{\odot} & 0^{\odot} & \dots & 0^{\odot} & 0^{\odot} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0^{\odot} & 0^{\odot} & \dots & I_r^{\odot} & 0^{\odot} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

onde I_r representa a matriz identidade de ordem r e 0 é a matriz nula de ordem r . Pela Proposição 2.3., conclui-se que $0^{\odot} X = 0$. Além disso, apenas para este propósito, convencionou-se $I^{\odot} X = X$. Nestas condições, obtemos o processo *MGINAR*(1) escrito como

$$Y_t = A^{\odot} Y_{t-1} + \tilde{\varepsilon}_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Mais concretamente,

$$\begin{bmatrix} X_t \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-p+1} \end{bmatrix}_{rp \times 1} = \begin{bmatrix} A_1^{\odot} X_{t-1} + \dots + A_p^{\odot} X_{t-p} \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-p+1} \end{bmatrix}_{rp \times 1} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{rp \times 1}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

De acordo com a Proposição 2.1. em [6], os polinômios $\det(I_{rp} - Az) = 0$ e $\det(I_r - A_1 z - A_2 z^2 - \dots - A_p z^p) = 0$, possuem a mesma solução.

Exemplo 3.1. Consideremos um processo bivariado de valores inteiros seguindo um modelo *BINAR*(2), escrito na forma

$$\begin{cases} X_{1,t} = \alpha_1 \circ X_{1,t-1} + \beta_1 \circ X_{1,t-2} + \varepsilon_{1,t} \\ X_{2,t} = \alpha_2 \circ X_{2,t-1} + \beta_2 \circ X_{2,t-2} + \varepsilon_{2,t} \end{cases} \quad (3.2)$$

Neste caso, o processo admite a representação matricial *MGINAR*(1) dada por

$$\begin{bmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \\ X_{1,t-2} \\ X_{2,t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde, sendo $A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}$, se assume que

$$\det(I_2 - A_1 z - A_2 z^2) \neq 0, \quad (3.3)$$

para $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$.

De acordo com [6], a condição (3.3), para $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$ é equivalente a $\det(I_4 - Az) \neq 0$, para $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$. Por outro lado, $\det(I_4 - Az) = 0$ é equivalente a $(-z)^4 \det(A - \frac{1}{z}I_4) = 0$, para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1$.

Uma vez que os valores próprios da matriz A , $\lambda = \frac{1}{z}$, são dados por

$$\lambda = \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 + 4\beta_1}}{2} \quad \vee \quad \lambda = \frac{\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 + 4\beta_2}}{2}, \quad (3.4)$$

concluimos que uma condição necessária e suficiente para que se tenha $\det(I_4 - Az) = 0$, para $|z| > 1$, é $\alpha_j + \beta_j < 1$, para $j = 1, 2$.

3.2 Definição e propriedades do modelo $MGINAR(1)$

Nesta secção, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é construído como limite quase certo de uma sucessão de processos $\{X_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Entre outras propriedades, provar-se-á que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o processo $\{X_t^{(n)}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é fortemente e fracamente estacionário.

Seja $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ uma sucessão de vetores aleatórios i.i.d, inteiros não negativos, com vetor média μ_ε e matriz de covariâncias Σ_ε . Seja $A = [\alpha_{i,j}]_{r \times r}$ uma matriz quadrada de ordem r , tal que $\det(I_r - Az) \neq 0$, para $z \leq 1$, $|z| \in \mathbb{C}$, ou seja, tal que o polinómio $\det(I_r - Az) = 0$ tenha todas as raízes fora do círculo unitário.

Introduzimos uma sucessão de vetores aleatórios $\{X_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dada por

$$X_t^{(n)} = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \varepsilon_t & n = 0, \\ A \odot X_{t-1}^{(n-1)} + \varepsilon_t & n > 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

onde, para $1 \leq i, j \leq r$, a sucessão de contagem $\{Y_k^{(i,j,t)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ usada para o operador $\alpha_{i,j \circ}$, é fixada para cada valor de $t \in \mathbb{Z}$. Assume-se que $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é independente de todas as sucessões de contagem envolvidas em $A \odot$.

À semelhança do que foi definido no capítulo anterior, B representa a matriz de elemento genérico $\beta_{i,j}$ igual à variância de $Y_1^{(i,j,t)}$, a qual é independente de t .

Mais adiante, provaremos que, para todo o t , fixado previamente, a sucessão $X_t^{(n)}$ converge quase certamente para um vetor aleatório X_t e, ainda, que a sucessão $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é tal que ε_t é independente de X_s , $s < t$, e satisfaz a igualdade

$$X_t = A \odot X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Notamos que, de acordo com Latour (1997) – trabalho que fundamenta este capítulo –, a monotonia e a convergência de sucessões de matrizes são entendidas termo a termo. A este respeito, veja-se, também, [7] e [2].

Começamos por apresentar alguns lemas sobre a sucessão $\{X_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Lema 3.1. Para todo o $t \in \mathbb{Z}$, a sucessão $\{X_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é não decrescente.

Prova. Vamos provar que, $X_t^{(n)} \geq X_t^{(n-1)}$, para todo o $t \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 1$. Para tal, utilizamos o princípio de indução matemática.

Para o caso de $n = 1$, a prova é trivial. Com efeito,

$$X_t^{(1)} = A \odot X_{t-1}^{(0)} + \varepsilon_t = A \odot \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \geq \varepsilon_t = X_t^{(0)}.$$

Provemos, agora, a desigualdade para $n > 1$. Suponhamos que, para todo o $t \in \mathbb{Z}$, $X_t^{(n)} \geq X_t^{(n-1)}$. Resta-nos demonstrar que $X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \geq 0$. Para tal, consideremos a i -ésima componente do vetor resultante da diferença, ou seja,

$$\begin{aligned} [X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}]_i &= [A \odot X_{t-1}^{(n)} + \varepsilon_t - A \odot X_{t-1}^{(n-1)} - \varepsilon_t]_i \\ &= \sum_{j=1}^r (\alpha_{i,j}^{(t)} \circ X_{t-1,j}^{(n)} - \alpha_{i,j}^{(t)} \circ X_{t-1,j}^{(n-1)}) \\ &= \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^{X_{t-1,j}^{(n)}} Y_k^{(i,j,t-1)} - \sum_{k=1}^{X_{t-1,j}^{(n-1)}} Y_k^{(i,j,t-1)} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando a nossa hipótese de indução, nomeadamente, $X_{t-1,j}^{(n)} \geq X_{t-1,j}^{(n-1)}$, para $j = 1, 2, \dots, r$, resulta

$$\sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^{X_{t-1,j}^{(n)}} Y_k^{(i,j,t-1)} - \sum_{k=1}^{X_{t-1,j}^{(n-1)}} Y_k^{(i,j,t-1)} \right) = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1+X_{t-1,j}^{(n-1)}}^{X_{t-1,j}^{(n)}} Y_k^{(i,j,t-1)} \right) \geq 0,$$

concluindo-se que a sucessão é não decrescente. \square

A caracterização dos dois primeiros momentos da sucessão $\{X_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é feita de seguida.

Lema 3.2. *Os primeiros dois momentos de $X_t^{(n)}$, isto é, $\mu^{(n)} = E(X_t^{(n)})$ e $\Upsilon^{(n)} = E(X_t^{(n)}(X_t^{(n)})^T)$ são finitos e não dependem de t . Além disso, as sucessões $\{\mu^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\Upsilon^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ são limitadas.*

Prova. Começemos pela esperança matemática do vetor $X_t^{(n)}$. De facto,

$$\begin{aligned} E(X_t^{(n)}) &= E(A \odot X_{t-1}^{(n-1)} + \varepsilon_t) = AE(X_{t-1}^{(n-1)}) + \mu_\varepsilon \\ &= AE(A \odot X_{t-2}^{(n-2)} + \varepsilon_{t-1}) + \mu_\varepsilon = A^2 E(X_{t-2}^{(n-2)}) + A\mu_\varepsilon + \mu_\varepsilon \\ &\quad \vdots \\ &= A^n E(X_{t-n}^{(0)}) + \dots + A\mu_\varepsilon + \mu_\varepsilon = A^n E(X_t^{(0)}) + \dots + A\mu_\varepsilon + \mu_\varepsilon \\ &= \sum_{k=0}^n A^k \mu_\varepsilon := \mu^{(n)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Vejamos, agora, que a sucessão $\{\mu^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Como o polinómio $\det(I - Az) = 0$, $z \in \mathbb{C}$, tem todas as raízes fora do círculo unitário, isto é, $|z| > 1$, da igualdade

$$0 = \det(I - Az) = \det\left[(-z)\left(A - \frac{1}{z}I\right)\right] = (-z)^r \det\left(A - \frac{1}{z}I\right),$$

decorre que os valores próprios de A , dados por $\frac{1}{z}$, verificam $|\frac{1}{z}| < 1$, ou seja, os valores próprios da matriz A encontram-se dentro do círculo unitário. Consequentemente, a matriz $I - A$ é invertível. Mais, o raio espectral, $\rho(A)$, de uma matriz A verifica $\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. Como temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A^n\| < 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \|A^n\| = -\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\| = 0,$$

concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$, ([2]). Assim, de

$$\sum_{k=0}^{n-1} A^k = (I - A)^{-1}(I - A)(I + \dots + A^{n-1}),$$

deduzimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} A^k = (I - A)^{-1}$. Logo, $\mu^{(n)}$ é limitada.

Para o momento de ordem 2, aplicando a propriedade 2 da Proposição 2.5., tem-se

$$\begin{aligned} E(X_t^{(n)}(X_t^{(n)})^T) &= E[(A \odot X_{t-1}^{(n-1)} + \varepsilon_t)(A \odot X_{t-1}^{(n-1)} + \varepsilon_t)^T] \\ &= E[(A \odot X_{t-1}^{(n-1)})(A \odot X_{t-1}^{(n-1)})^T] + E[\varepsilon_t(A \odot X_{t-1}^{(n-1)})^T] + \\ &\quad + E[(A \odot X_{t-1}^{(n-1)})\varepsilon_t^T] + E(\varepsilon_t \varepsilon_t^T) \\ &= d(BE(X_{t-1}^{(n-1)})) + AE[(X_{t-1}^{(n-1)})(X_{t-1}^{(n-1)})^T]A^T + \mu_\varepsilon E((X_{t-1}^{(n-1)})^T)A^T + \\ &\quad + AE(X_{t-1}^{(n-1)})\mu_\varepsilon^T + E(\varepsilon_t \varepsilon_t^T) \\ &= d(B\mu^{(n-1)}) + AE[(X_{t-1}^{(n-1)})(X_{t-1}^{(n-1)})^T]A^T + \mu_\varepsilon(\mu^{(n-1)})^T A^T + \\ &\quad + A\mu^{(n-1)}\mu_\varepsilon^T + \tilde{\Sigma}_\varepsilon, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $\tilde{\Sigma}_\varepsilon = E(\varepsilon_t \varepsilon_t^T)$.

De forma semelhante ao que foi feito em (3.5), aplicando n sucessivas substituições, até obter uma função envolvendo $E(X_t^{(0)}(X_t^{(0)})^T)$ e uma sequência de termos não dependentes de t , provamos que $E(X_t^{(n)}(X_t^{(n)})^T) = \Upsilon^{(n)}$ não depende de t .

Vamos, agora, provar que, para cada $t \in \mathbb{Z}$, a sucessão $\{\Upsilon^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Pelo Lema 3.1, $\{X_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma sucessão não decrescente e vimos já que

$$\mu^{(n)} \leq (I - A)^{-1}\mu_\varepsilon.$$

Para além disso, seja

$$M = d(B(I - A)^{-1}\mu_\varepsilon) + \mu_\varepsilon \mu_\varepsilon^T ((I - A)^{-1})^T A^T + A(I - A)^{-1}\mu_\varepsilon \mu_\varepsilon^T + \tilde{\Sigma}_\varepsilon,$$

que é uma matriz simétrica.

Então,

$$\begin{aligned} E(X_t^{(n)}(X_t^{(n)})^T) &= \Upsilon^{(n)} \\ &= A\Upsilon^{(n-1)}A^T + d(B\mu^{(n-1)} + \mu_\varepsilon(\mu^{(n-1)})^T A^T + A\mu^{(n-1)}\mu_\varepsilon^T + \tilde{\Sigma}_\varepsilon) \\ &\leq A\Upsilon^{(n-1)}A^T + d(B(I-A)^{-1}\mu_\varepsilon + \mu_\varepsilon\mu_\varepsilon^T((I-A)^{-1})^T A^T + A(I-A)^{-1}\mu_\varepsilon\mu_\varepsilon^T + \tilde{\Sigma}_\varepsilon) \\ &= A\Upsilon^{(n-1)}A^T + M, \end{aligned}$$

ou seja, $E(X_t^{(n)}(X_t^{(n)})^T) \leq A\Upsilon^{(n-1)}A^T + M$.

Observemos que, para $n = 1$ e $n = 2$ tem-se, respetivamente,

$$\Upsilon^{(1)} \leq A\Upsilon^{(0)}A^T + M = AE(X_t^{(0)}(X_t^{(0)})^T)A^T + M = AE(\varepsilon_t\varepsilon_t^T)A^T + M = A\tilde{\Sigma}_\varepsilon A^T + M$$

e

$$\Upsilon^{(2)} \leq A\Upsilon^{(1)}A^T + M = A\left(A\tilde{\Sigma}_\varepsilon A^T + M\right)A^T + M = A^2\tilde{\Sigma}_\varepsilon(A^T)^2 + AMA^T + M.$$

Para $n > 2$, obtém-se

$$\begin{aligned} \Upsilon^{(n)} &\leq A\Upsilon^{(n-1)}A^T + M \leq A^n\tilde{\Sigma}_\varepsilon(A^T)^n + A^{n-1}M(A^T)^{n-1} + \dots + AMA^T + M \\ &= A^n\tilde{\Sigma}_\varepsilon(A^T)^n + \sum_{k=0}^{n-1} A^k M(A^T)^k. \end{aligned}$$

Concluimos a demonstração, uma vez que o termo $A^n\tilde{\Sigma}_\varepsilon(A^T)^n$ tende para a matriz nula, quando $n \rightarrow \infty$, e a série $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k M(A^T)^k$ é convergente, pois M é uma matriz hermitica por ser real simétrica. ¹

□

Lema 3.3. Para todo o $n \geq 0$, o processo $\{X_t^{(n)}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estritamente estacionário.

Prova. Para demonstrarmos esta proposição, é suficiente demonstrarmos que, para quaisquer $h \in \mathbb{Z}$ e $k \geq 1$, os vetores

$$\begin{bmatrix} X_1^{(n)} \\ \vdots \\ X_k^{(n)} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} X_{1+h}^{(n)} \\ \vdots \\ X_{k+h}^{(n)} \end{bmatrix}$$

têm a mesma distribuição.

Façamos a prova por indução. Notemos que os vetores

¹Se $\rho(A) < 1$, a equação matricial de Lyapunov, $AXA^T = X - M$, com M hermitica, tem solução única dada por $\sum_{i=0}^{+\infty} A^i M(A^T)^i$, ([13], p.402).

$$\begin{bmatrix} X_1^{(0)} \\ \vdots \\ X_k^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} X_{1+h}^{(0)} \\ \vdots \\ X_{k+h}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1+h} \\ \vdots \\ \varepsilon_{k+h} \end{bmatrix}$$

são identicamente distribuídos, uma vez que os vetores $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)^T$ e $(\varepsilon_{1+h}, \dots, \varepsilon_{k+h})^T$ são identicamente distribuídos, pois $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma sucessão de vetores aleatórios i.i.d.. Portanto, $\{X_t^{(0)}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é fortemente estacionário.

Admitamos, agora, que $(X_0^{(n)}, \dots, X_{k-1}^{(n)})^T$ e $(X_h^{(n)}, \dots, X_{k+h-1}^{(n)})^T$ têm a mesma distribuição. Tem-se

$$\begin{bmatrix} X_1^{(n+1)} \\ \vdots \\ X_k^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \odot & \dots & 0 \odot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \odot & \dots & A \odot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0^{(n)} \\ \vdots \\ X_{k-1}^{(n)} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} X_{1+h}^{(n+1)} \\ \vdots \\ X_{k+h}^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1+h} \\ \vdots \\ \varepsilon_{k+h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \odot & \dots & 0 \odot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \odot & \dots & A \odot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_h^{(n)} \\ \vdots \\ X_{k+h-1}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Uma vez que a distribuição conjunta das variáveis do segundo membro de ambas as igualdades é igual e cada uma das parcelas envolve vetores independentes, então os vetores $(X_1^{(n+1)}, \dots, X_k^{(n+1)})^T$ e $(X_{1+h}^{(n+1)}, \dots, X_{k+h}^{(n+1)})^T$ também são identicamente distribuídos. \square

Recordamos o Lema de Borel-Cantelli que será usado na demonstração do teorema seguinte.

Lema 3.4. (Borel-Cantelli). *Seja E_n uma sucessão de acontecimentos num espaço de probabilidade. Se $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) < \infty$, então $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) = 0$, onde $\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$.*

A existência de um processo $INAR(1)$ multivariado como limite quase certo da sucessão de processos $\{X_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é estabelecida no teorema seguinte.

Teorema 3.1. *De acordo com as condições definidas anteriormente, existe, quase certamente, um único processo estacionário, não negativo e inteiro tal que*

$$X_t = A \odot X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

com ε_t independente de X_s , para $s < t$.

Prova. Para estabelecermos a veracidade da proposição, precisamos de demonstrar

- i) a convergência quase certa de $X_t^{(n)}$;
- ii) a estacionaridade estrita e de segunda ordem de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$;

- iii) o valor inteiro e não negativo de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$;
- iv) a unicidade de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$;
- v) a independência de ε_t e X_s , para $s < t$.

Convergência quase certa de $X_t^{(n)}$. Seja (Ω, \mathcal{F}, P) o espaço de probabilidade onde os vetores aleatórios estão definidos. Uma vez que, para cada $t \in \mathbb{Z}$, $\{X_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão não decrescente de valores inteiros não negativos, para todo o $\omega \in \Omega$, existe $X_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_t^{(n)}$, podendo ser ∞ . No entanto, vamos mostrar que o conjunto onde tal ocorre, isto é,

$$\mathcal{A}_\infty = \{\omega : \exists i, 1 \leq i \leq r, X_{t,i}(\omega) = \infty\} = \bigcup_{i=1}^r \{\omega : X_{t,i}(\omega) = \infty\} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{A}_{\infty,i}$$

tem probabilidade zero. Para isso, demonstramos que $P(\mathcal{A}_{\infty,i}) = 0$, $i = 1, \dots, r$. Seja

$$\mathcal{A}_{n,i} = \{\omega : X_{t,i}^{(n)}(\omega) - X_{t,i}^{(n-1)}(\omega) > 0\}, \quad 1 \leq i \leq r, n \geq 1.$$

Por um lado, temos

$$\begin{aligned} E(X_{t,i}^{(n)} - X_{t,i}^{(n-1)}) &= \sum_{k=1}^{\infty} k P\{\omega : X_{t,i}^{(n)}(\omega) - X_{t,i}^{(n-1)}(\omega) = k\} \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} P\{\omega : X_{t,i}^{(n)}(\omega) - X_{t,i}^{(n-1)}(\omega) = k\} \\ &= P\{\omega : X_{t,i}^{(n)}(\omega) - X_{t,i}^{(n-1)}(\omega) > 0\} \\ &= P(\mathcal{A}_{n,i}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Devido a (3.5), temos

$$E(X_t^{(n)} - X_t^{(n-1)}) = E(X_t^{(n)}) - E(X_t^{(n-1)}) = \sum_{i=0}^n A^i \mu_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n-1} A^i \mu_\varepsilon = A^n \mu_\varepsilon. \quad (3.8)$$

Consequentemente, sendo $e_i = (0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0)$ o vetor $1 \times r$, com 1 na i -ésima componente e 0 nas restantes, de acordo com (3.7) e (3.8), podemos escrever $P(\mathcal{A}_{n,i}) \leq e_i E(X_t^{(n)} - X_t^{(n-1)}) = e_i A^n \mu_\varepsilon$. Aplicando o somatório a ambos os membros e usando, novamente, o facto de que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A^k = (I - A)^{-1}$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\mathcal{A}_{n,i}) \leq e_i \sum_{n=1}^{\infty} A^n \mu_\varepsilon \leq e_i (I - A)^{-1} \mu_\varepsilon < \infty. \quad (3.9)$$

Então, usando o Lema de Borel-Cantelli, obtemos $P(\mathcal{A}_{\infty,i}) = 0$, onde $\mathcal{A}_{\infty,i} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \mathcal{A}_{k,i}$. Assim, $P(\mathcal{A}_\infty) \leq \sum_{i=1}^r P(\mathcal{A}_{\infty,i}) = 0$. Desta forma, concluímos que $X_t^{(n)}$ é quase certamente convergente para X_t .

Mais, sendo $\{X_t^{(n-1)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de vetores de valores inteiros, então ter-se-á $X_t^{(n-1)} = X_t$, a partir de uma certa ordem n_0 . Assim, para cada $j = 1, 2, \dots, r$, temos

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{X_{t,j}^{(n-1)}} Y_i - \sum_{i=1}^{X_{t,j}} Y_i \neq 0\right) = 0,$$

ou seja, $\alpha \circ X_{t,j}^{(n-1)} \rightarrow \alpha \circ X_{t,j}$, q.c., $n \rightarrow +\infty$. Daqui decorre que

$$A \circ X_t^{(n-1)} \rightarrow A \circ X_{t-1}, \quad q.c., \quad n \rightarrow +\infty.$$

Consequentemente, tomando limites em $X_t^{(n)} = A \circ X_{t-1}^{(n-1)} + \varepsilon_t$, obtemos $X_t = A \circ X_{t-1} + \varepsilon_t$.

Estacionaridade estrita e de segunda ordem de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Provámos, no Lema 3.3., que o processo $\{X_t^{(n)}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estritamente estacionário. Por outro lado, vimos que $X_t^{(n)}$ converge, quase certamente, para X_t . Uma vez que a convergência quase certa de um vetor é equivalente à convergência quase certa das suas margens, temos

$$\forall t, l \in \mathbb{Z}, \quad (X_t^{(n)}, X_{t+1}^{(n)}, \dots, X_{t+l}^{(n)}) \xrightarrow[q.c.]{} (X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+l}), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Analogamente, obtém-se

$$\forall t, l, k \in \mathbb{Z}, \quad (X_{t+k}^{(n)}, X_{t+1+k}^{(n)}, \dots, X_{t+l+k}^{(n)}) \xrightarrow[q.c.]{} (X_{t+k}, X_{t+1+k}, \dots, X_{t+l+k}), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Destas convergências decorrem as correspondentes convergências em distribuição, ou seja,

$$F_{X_t^{(n)}, \dots, X_{t+l}^{(n)}}(x_t, \dots, x_{t+l}) \longrightarrow F_{X_t, \dots, X_{t+l}}(x_t, \dots, x_{t+l}), \quad n \rightarrow +\infty,$$

e

$$F_{X_{t+k}^{(n)}, \dots, X_{t+l+k}^{(n)}}(x_t, \dots, x_{t+l}) \longrightarrow F_{X_{t+k}, \dots, X_{t+l+k}}(x_t, \dots, x_{t+l}), \quad n \rightarrow +\infty,$$

para qualquer $(x_t, \dots, x_{t+l})^T$.

Uma vez que $\{X_t^{(n)}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estritamente estacionário, os vetores $(X_t^{(n)}, \dots, X_{t+l}^{(n)})$ e $(X_{t+k}^{(n)}, \dots, X_{t+l+k}^{(n)})$ são identicamente distribuídos. Como o limite é único, quaisquer que sejam t, l, k , os vetores (X_t, \dots, X_{t+l}) e $(X_{t+k}, \dots, X_{t+l+k})$ são também identicamente distribuídos. Assim, concluímos que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é, também, estritamente estacionário.

Para além disso, vimos que os dois primeiros momentos de $X_t^{(n)}$, com $t \in \mathbb{Z}$, existem. Assim, como $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é o limite quase certo da sucessão, então é, também, um processo de segunda ordem. A estacionaridade forte garante que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário de segunda ordem.

Valor inteiro e não negativo de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Sabemos que a sucessão $\{X_t^{(n)}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência de vetores inteiros não negativos. Além disso, provámos que é não decrescente e que é quase certamente convergente.

Assim, a partir de determinada ordem, $X_t^{(n)} - X_t^{(n-1)} = 0$. Portanto, como X_t é o limite quase certo da sucessão, temos que $X_t^{(n)} = X_t$, onde X_t é um vetor de valores inteiros não negativos.

Unicidade de $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Para demonstrarmos a unicidade da solução, suponhamos que existe um outro processo estacionário, $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfazendo as condições definidas para a sucessão $\{X_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Assim, temos

$$X_t - Z_t = A \odot X_{t-1} + \varepsilon_t - A \odot Z_{t-1} - \varepsilon_t = A \odot X_{t-1} - A \odot Z_{t-1}.$$

Precisamos de demonstrar que o conjunto

$$\mathcal{B}_\infty = \{\omega : \exists i, 1 \leq i \leq r, |X_{t,i}(\omega) - Z_{t,i}(\omega)| > 0\}$$

tem probabilidade igual a zero. De forma análoga à demonstração da convergência quase certa de $X_t^{(n)}$, notemos que, com $\mathcal{B}_{\infty,i} = \{\omega : |X_{t,i}(\omega) - Z_{t,i}(\omega)| > 0\}$, temos

$$\mathcal{B}_\infty = \bigcup_{i=1}^r \{\omega : |X_{t,i}(\omega) - Z_{t,i}(\omega)| > 0\} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{B}_{\infty,i}.$$

Com efeito, como $E(Z_{t-1}) = E(X_{t-1})$, percorrendo os passos similares a (3.7), (3.8) e (3.9) e usando o Lema de Borel-Cantelli, prova-se que $P(\mathcal{B}_\infty) = 0$

Sejam

$$\mathcal{B}_{n,i} = \{\omega : |X_{t,i}^{(n)}(\omega) - Z_{t,i}(\omega)|\}, \quad 1 \leq i \leq r, n \geq 1.$$

Para o resto da prova, para $n \geq 1$, iremos usar a seguinte notação:

$$U^{(0)}(t) = \varepsilon_t, U_i^{(n)}(t) = (|X_{t,i}^{(n)}(\omega) - Z_{t,i}(\omega)|)^T, U^{(n)}(t) = (U_1^{(n)}(t), \dots, U_r^{(n)}(t))^T$$

$$L^{(0)}(t) = 0, L_i^{(n)}(t) = (\min\{X_{t,i}^{(n)}, Z_{t,i}\})^T, L^{(n)}(t) = (L_1^{(n)}(t), \dots, L_r^{(n)}(t))^T$$

$$M^{(0)}(t) = 0, M_i^{(n)}(t) = (\max\{X_{t,i}^{(n)}, Z_{t,i}\})^T, M^{(n)}(t) = (M_1^{(n)}(t), \dots, M_r^{(n)}(t))^T.$$

Por um lado,

$$\begin{aligned} U_i^{(n)}(t) &= \left| \sum_{j=1}^r \alpha_{i,j}^{(t)} \circ X_{t-1,j}^{(n-1)} - \alpha_{i,j}^{(t)} \circ Z_{t-1,j} \right| \leq \sum_{j=1}^r |\alpha_{i,j}^{(t)} \circ X_{t-1,j}^{(n-1)} - \alpha_{i,j}^{(t)} \circ Z_{t-1,j}| \\ &= \sum_{j=1}^r \left| \sum_{k=1}^{X_{t-1,j}^{(n-1)}} Y_k^{(i,j,t)} - \sum_{k=1}^{Z_{t-1,j}} Y_k^{(i,j,t)} \right| = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1+L_j^{(n-1)}(t-1)}^{M_j^{(n-1)}(t-1)} Y_k^{(i,j,t)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^{U_j^{(n-1)}(t-1)} Y_{k+L_j^{(n-1)}(t-1)}^{(i,j,t)} \right) \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^{U_j^{(n-1)}(t-1)} Y_k^{(i,j,t)} \right) \\ &\stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^r \alpha_{i,j}^{(t)} \circ U_j^{(n-1)}(t-1). \end{aligned}$$

Desta forma, pelo Lema 3.2., temos que

$$E[U^{(n)}(t)] \leq E[A \odot U^{(n-1)}(t-1)] = AE[U^{(n-1)}(t-1)] = \dots = A^n E[U^{(0)}(t-n)] = A^n \mu_\varepsilon.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} E(|X_{t,i}^{(n)} - Z_{t,i}|) &= \sum_{k=1}^{\infty} k P\{\omega : |X_{t,i}^{(n)}(\omega) - Z_{t,i}(\omega)| = k\} \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} P\{\omega : |X_{t,i}^{(n)}(\omega) - Z_{t,i}(\omega)| = k\} \\ &\geq P\{\omega : |X_{t,i}^{(n)}(\omega) - Z_{t,i}(\omega)| = k\} = P(\mathcal{B}_{n,i}). \end{aligned}$$

Assim, $P(\mathcal{B}_{n,i}) \leq e_i E[U^{(n)}(t)] = e_i A^n \mu_\varepsilon$ e, portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\mathcal{B}_{n,i}\} \leq e_i \sum_{n=1}^{\infty} A^n \mu_\varepsilon \leq e_i (I - A)^{-1} \mu_\varepsilon < \infty.$$

Pelo Lema de Borel-Cantelli, temos que $Pr(\mathcal{B}_{\infty,i}) = 0$, onde $\mathcal{B}_{\infty,i} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \mathcal{B}_{k,i}$ e

$$P(\mathcal{B}_{\infty,i}) = P\{\omega : \exists i, 1 \leq i \leq r, \lim_{n \rightarrow \infty} |X_{t,i}^{(n)}(\omega) - Z_{t,i}| > 0\} = 0,$$

pelo que concluímos que a probabilidade de X_t e Z_t serem diferentes é nula e, por isso, X_t é, quase certamente, único.

Independência de ε_t e X_s . A matriz A é de ordem $r \times r$. A cada tempo, t , existem r^2 sucessões de contagem envolvidas no operador $A \odot$, as quais se assumem todas independentes entre si e também independentes dos processos $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Por outro lado, uma vez que $X_s = A \odot X_{s-1} + \varepsilon_s$, concluímos que o vetor X_s depende apenas de X_{s-1}, X_{s-2}, \dots e de $\varepsilon_s, \varepsilon_{s-1}, \dots$, pelo que deduzimos a independência de ε_t e X_s , para $s < t$. \square

Passamos a apresentar o cálculo da média $E(X_t)$ e da função de autocovariância definida por

$$\Gamma(h) = E(X_{t+h} X_t^T) - E(X_{t+h}) E(X_t^T), \quad h \geq 0,$$

ou seja, a matriz de elemento genérico

$$\left[\Gamma(h) \right]_{i,j} = Cov(X_{i,t+h}, X_{j,t}), \quad i, j \in \{1, \dots, r\}, h \geq 0.$$

Proposição 3.1. *Seja $\{X_t\}_{t \geq 1}$ um processo multivariado seguindo um modelo $MGINAR(1)$. Então,*

1. $E(X_t) = (I - A)^{-1} E(\varepsilon_t)$

$$2. \Gamma(0) = d(BE(X_{t-1}) + A\Gamma(0)A^T + \Sigma_\varepsilon$$

$$3. \Gamma(h) = A^h\Gamma(0), h \geq 1.$$

Prova. **1.** Temos

$$E(X_t) = E(A \odot X_{t-1} + \varepsilon_t) = AE(X_{t-1}) + E(\varepsilon_t). \quad (3.10)$$

Como todos os valores próprios da matriz A estão dentro do círculo unitário, nenhum deles será a identidade. Então, $\det(I - A) \neq 0$, pelo que $I - A$ é nao singular, ou seja, admite inversa. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} E(X_t) &= AE(X_{t-1}) + E(\varepsilon_t) \\ \iff (I - A)E(X_t) &= E(\varepsilon_t) \\ \iff E(X_t) &= (I - A)^{-1}E(\varepsilon_t). \end{aligned}$$

2. Similarmente ao que foi provado em (3.2),

$$\begin{aligned} V(X_t) = \Gamma(0) &= E(X_t X_t^T) - E(X_t)E(X_t)^T \\ &= E((A \odot X_{t-1})(A \odot X_{t-1})^T) + E((A \odot X_{t-1})\varepsilon_t^T) + E(\varepsilon_t(A \odot X_{t-1})^T) + \\ &\quad + E(\varepsilon_t \varepsilon_t^T) - E(A \odot X_{t-1})E(A \odot X_{t-1})^T - E(A \odot X_{t-1})E(\varepsilon_t)^T - \\ &\quad - E(\varepsilon_t)E(A \odot X_{t-1})^T - E(\varepsilon_t)E(\varepsilon_t)^T \\ &= d(BE(X_{t-1})) + AE(X_{t-1}(X_{t-1}^T))A^T - AE(X_{t-1})E(X_{t-1})^T A^T + \Sigma_\varepsilon \\ &= d(BE(X_{t-1})) + A \left(E(X_{t-1}(X_{t-1}^T)) - E(X_{t-1})E(X_{t-1})^T \right) A^T + \Sigma_\varepsilon \\ &= d(BE(X_{t-1})) + A\Gamma(0)A^T + \Sigma_\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.11)$$

3. Relativamente à função de autocovariância e aplicando a propriedade 5 da Proposição 2.5., obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma(h) &= E(X_{t+h} X_t^T) - E(X_{t+h})E(X_t^T) \\ &= E((A \odot X_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h})X_t^T) - E(A \odot X_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h})E(X_t^T) \\ &= E((A \odot X_{t+h-1})X_t^T) + E(\varepsilon_{t+h}X_t^T) - E(A \odot X_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h})E(X_t^T) \\ &= AE(X_{t+h-1}X_t^T) + E(\varepsilon_{t+h})E(X_t^T) - AE(X_{t+h-1})E(X_t^T) - E(\varepsilon_{t+h})E(X_t^T) \\ &= AE(X_{t+h-1}X_t^T) - AE(X_{t+h-1})E(X_t^T) \\ &= A \left(E(X_{t+h-1}X_t^T) - E(X_{t+h-1})E(X_t^T) \right) \\ &= A\Gamma(h-1) = AA^{h-1}\Gamma(0) = A^h\Gamma(0). \end{aligned} \quad (3.12)$$

□

Segue-se um exemplo dos resultados expressos acima.

Exemplo 3.2. Retomemos o processo bivariado introduzido no Exemplo 3.1. Considerando que o operador univariado é o operador aleatório binomial, a matriz B é da forma

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1(1 - \alpha_1) & 0 & \beta_1(1 - \beta_1) & 0 \\ 0 & \alpha_2(1 - \alpha_2) & 0 & \beta_2(1 - \beta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\begin{bmatrix} \Gamma(0) \end{bmatrix}_{4 \times 4}$ é da forma

$$\Gamma(0) = \begin{bmatrix} \gamma_{X_{1,t}}(0) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) & \gamma_{X_{1,t}}(1) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t-1}}(1) \\ \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) & \gamma_{X_{2,t}}(0) & \tilde{\gamma}_{X_{2,t-1}}(1) & \gamma_{X_{2,t}}(1) \\ \gamma_{X_{1,t}}(1) & \tilde{\gamma}_{X_{2,t-1}}(1) & \gamma_{X_{1,t}}(0) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) \\ \tilde{\gamma}_{X_{1,t-1}}(1) & \gamma_{X_{2,t}}(1) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) & \gamma_{X_{2,t}}(0) \end{bmatrix},$$

onde $\gamma_{X_{j,t}}(h) = \text{Cov}(X_{j,t}, X_{j,t+h})$ e $\tilde{\gamma}_{X_{j,t}}(h) = \text{Cov}(X_{j,t+h}, X_{i,t})$, para $j = 1, 2$, $h \in \mathbb{Z}$.

Observamos que $\tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) = \tilde{\gamma}_{X_{2,t}}(0)$, $\tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(-1) = \tilde{\gamma}_{X_{2,t-1}}(1)$ e $\tilde{\gamma}_{X_{1,t-1}}(2) = \tilde{\gamma}_{X_{2,t+1}}(-2)$. A igualdade $\Gamma(1) = A\Gamma(0)$ dá lugar a

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \begin{bmatrix} \gamma_{X_{1,t}}(1) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(1) & \gamma_{X_{1,t}}(2) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t-1}}(2) \\ \tilde{\gamma}_{X_{2,t}}(1) & \gamma_{X_{2,t}}(1) & \tilde{\gamma}_{X_{2,t-1}}(2) & \gamma_{X_{2,t}}(2) \\ \gamma_{X_{1,t}}(0) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) & \gamma_{X_{1,t}}(1) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t-1}}(1) \\ \tilde{\gamma}_{X_{2,t}}(0) & \gamma_{X_{2,t}}(0) & \tilde{\gamma}_{X_{2,t-1}}(1) & \gamma_{X_{2,t}}(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{X_{1,t}}(0) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) & \gamma_{X_{1,t}}(1) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t-1}}(1) \\ \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) & \gamma_{X_{2,t}}(0) & \tilde{\gamma}_{X_{2,t-1}}(1) & \gamma_{X_{2,t}}(1) \\ \gamma_{X_{1,t}}(1) & \tilde{\gamma}_{X_{2,t-1}}(1) & \gamma_{X_{1,t}}(0) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) \\ \tilde{\gamma}_{X_{1,t-1}}(1) & \gamma_{X_{2,t}}(1) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) & \gamma_{X_{2,t}}(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \gamma_{X_{1,t}}(0) + \beta_1 \gamma_{X_{1,t}}(1) & \alpha_1 \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) + \beta_1 \tilde{\gamma}_{X_{2,t-1}}(1) & \alpha_1 \gamma_{X_{1,t}}(1) + \beta_1 \gamma_{X_{1,t}}(0) & \alpha_1 \tilde{\gamma}_{X_{1,t-1}}(1) + \beta_1 \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) \\ \alpha_2 \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) + \beta_2 \tilde{\gamma}_{X_{1,t-1}}(1) & \alpha_2 \gamma_{X_{2,t}}(0) + \beta_2 \gamma_{X_{2,t}}(1) & \alpha_2 \tilde{\gamma}_{X_{2,t-1}}(1) + \beta_2 \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) & \alpha_2 \tilde{\gamma}_{X_{2,t}}(1) + \beta_2 \gamma_{X_{2,t}}(0) \\ \gamma_{X_{1,t}}(0) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) & \gamma_{X_{1,t}}(1) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t-1}}(1) \\ \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) & \gamma_{X_{2,t}}(0) & \tilde{\gamma}_{X_{2,t-1}}(1) & \gamma_{X_{2,t}}(1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por outro lado, a igualdade matricial

$$\begin{aligned}\Gamma(0) &= d(BE(X_{t-1})) + A\Gamma(0)A^T + \Sigma_\varepsilon \\ &= d(BE(X_{t-1})) + \Gamma(1)A^T + \Sigma_\varepsilon\end{aligned}$$

toma a forma

$$\begin{aligned}\Gamma(0) &= \begin{bmatrix} (\alpha_1(1-\alpha_1) + \beta_1(1-\beta_1))\mu_{X_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2(1-\beta_2)\mu_{X_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \gamma_{X_{1,t}}(1) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(1) & \gamma_{X_{1,t}}(2) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t-1}}(2) \\ \tilde{\gamma}_{X_{2,t}}(1) & \gamma_{X_{2,t}}(1) & \tilde{\gamma}_{X_{2,t-1}}(2) & \gamma_{X_{2,t}}(2) \\ \gamma_{X_{1,t}}(0) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t}}(0) & \gamma_{X_{1,t}}(1) & \tilde{\gamma}_{X_{1,t-1}}(1) \\ \tilde{\gamma}_{X_{2,t}}(0) & \gamma_{X_{2,t}}(0) & \tilde{\gamma}_{X_{2,t-1}}(1) & \gamma_{X_{2,t}}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon_{1,t}}^2 & Cov(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}) & 0 & 0 \\ Cov(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}) & \sigma_{\varepsilon_{2,t}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Capítulo 4

O MODELO *BINAR*(1)

Ao longo do Capítulo 3, foi introduzido e estudado um modelo multivariado de séries temporais de valores inteiros não negativos, designado modelo *MGINAR*(1). Este novo capítulo servirá para particularizar este modelo, estudando um modelo bivariado, denotado por modelo *BINAR*(1) (*Bivariate Integer-valued Autoregressive of order 1*), introduzido e estudado em [4]. Mais adiante, iremos detalhar as leis das inovações.

4.1 Definição e propriedades do modelo *BINAR*(1)

Começemos com a definição do modelo.

Definição 4.1. Sejam $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{R_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ processos bivariados de valores inteiros e não negativos e A uma matriz diagonal de ordem 2 de elementos $\{\alpha_j\}_{j=1,2}$. Dizemos que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ verifica o modelo *BINAR*(1) se

$$\begin{aligned} X_t = A \odot X_{t-1} + R_t &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{1,t} \\ R_{2,t} \end{bmatrix}, & t \in \mathbb{Z} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \circ X_{1,t-1} \\ \alpha_2 \circ X_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{1,t} \\ R_{2,t} \end{bmatrix}, & t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

onde \odot representa o operador matricial definido na secção 2.3, para o qual o operador \circ é o caso particular do operador de Steutel e van Harn (Definição 2.2.), designado por operador *thinning*, cuja sucessão de contagem $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de v.a.'s i.i.d., com lei de Bernoulli de parâmetro α , com $\alpha \in [0, 1]$. Assume-se a independência entre os operadores *thinning* envolvidos e a sucessão das inovações.

Recordemos que, como foi provado anteriormente, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ seguindo um modelo *BINAR*(1) é fortemente e fracamente estacionário, uma vez que a matriz A tem raio espectral inferior a 1.

Para estabelecer os momentos de primeira e de segunda ordens do modelo, utilizamos as propriedades expressas na Proposição 3.2., com

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \alpha_1(1 - \alpha_1) & 0 \\ 0 & \alpha_2(1 - \alpha_2) \end{bmatrix}.$$

Uma vez que, para $h \geq 1$, se tem

$$A^h = \begin{bmatrix} \alpha_1^h & 0 \\ 0 & \alpha_2^h \end{bmatrix},$$

a função de autocovariância matricial

$$\Gamma(h) = \begin{bmatrix} \text{Cov}(X_{1,t+h}, X_{1,t}) & \text{Cov}(X_{1,t+h}, X_{2,t}) \\ \text{Cov}(X_{2,t+h}, X_{1,t}) & \text{Cov}(X_{2,t+h}, X_{2,t}) \end{bmatrix}$$

escreve-se na forma

$$\begin{aligned} \Gamma(h) &= \begin{bmatrix} \alpha_1^h & 0 \\ 0 & \alpha_2^h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Var}(X_{1,t}) & \text{Cov}(X_{1,t}, X_{2,t}) \\ \text{Cov}(X_{2,t}, X_{1,t}) & \text{Var}(X_{2,t}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1^h \text{Var}(X_{1,t}) & \alpha_1^h \text{Cov}(X_{1,t}, X_{2,t}) \\ \alpha_2^h \text{Cov}(X_{2,t}, X_{1,t}) & \alpha_2^h \text{Var}(X_{2,t}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Mais,

$$\begin{aligned} d(BE(X_t)) &= d\left(\begin{bmatrix} \alpha_1(1 - \alpha_1) & 0 \\ 0 & \alpha_2(1 - \alpha_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(X_{1,t}) \\ E(X_{2,t}) \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1(1 - \alpha_1)E(X_{1,t}) & 0 \\ 0 & \alpha_2(1 - \alpha_2)E(X_{2,t}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e, assim, devido a (3.11), vem

$$\begin{aligned} \Gamma(0) &= \begin{bmatrix} \text{Cov}(X_{1,t}, X_{1,t}) & \text{Cov}(X_{1,t}, X_{2,t}) \\ \text{Cov}(X_{2,t}, X_{1,t}) & \text{Cov}(X_{2,t}, X_{2,t}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1(1 - \alpha_1)E(X_{1,t}) & 0 \\ 0 & \alpha_2(1 - \alpha_2)E(X_{2,t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Var}(X_{1,t}) & \text{Cov}(X_{1,t}, X_{2,t}) \\ \text{Cov}(X_{2,t}, X_{1,t}) & \text{Var}(X_{2,t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \text{Var}(R_{1,t}) & \text{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t}) \\ \text{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t}) & \text{Var}(R_{2,t}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \alpha_1(1-\alpha_1)E(X_{1,t}) & 0 \\ 0 & \alpha_2(1-\alpha_2)E(X_{2,t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1^2 \text{Var}(X_{1,t}) & \alpha_1 \alpha_2 \text{Cov}(X_{1,t}, X_{2,t}) \\ \alpha_1 \alpha_2 \text{Cov}(X_{1,t}, X_{2,t}) & \alpha_2^2 \text{Var}(X_{2,t}) \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} \text{Var}(R_{1,t}) & \text{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t}) \\ \text{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t}) & \text{Var}(R_{2,t}) \end{bmatrix}. \quad (4.2)
\end{aligned}$$

De seguida, apresentamos um proposição que estabelece os momentos de primeira e de segunda ordens do modelo.

No que se segue, sempre que tal seja útil, usamos as notações

$$\begin{aligned}
\mu_{X_j} &:= E(X_{j,t}) & \text{e} & & \sigma_{X_j}^2 &:= \text{Var}(X_{j,t}), \\
\gamma_{X_j}(h) &:= \text{Cov}(X_{j,t}, X_{j,t+h}) & \text{e} & & \rho_{X_j}(h) &:= \text{Corr}(X_{j,t}, X_{j,t+h}), \\
\tilde{\gamma}_{X_j}(h) &:= \text{Cov}(X_{j,t+h}, X_{i,t}) & \text{e} & & \tilde{\rho}_{X_j}(h) &:= \text{Corr}(X_{j,t+h}, X_{i,t}).
\end{aligned}$$

Proposição 4.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo seguindo um modelo $BINAR(1)$. Assumindo que as variáveis da sucessão i.i.d. $\{R_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ têm média λ_j e variância $\sigma_j^2 = v_j \lambda_j$, com $v_j > 0$, para $j = 1, 2$, os momentos de primeira e de segunda ordens de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ são dados por*

1. $E(X_{j,t}) = \frac{\lambda_j}{1-\alpha_j}$
2. $\text{Var}(X_{j,t}) = \frac{(\alpha_j + v_j)\lambda_j}{1-\alpha_j^2}$
3. $\text{Cov}(X_{j,t}, X_{j,t+h}) = \alpha_j^h \sigma_{X_j}^2$, $h = 1, 2, \dots$
4. $\text{Corr}(X_{j,t}, X_{j,t+h}) = \alpha_j^h$, $h = 1, 2, \dots$

Prova. 1. Utilizando a igualdade (3.10), temos

$$\begin{aligned}
E(X_{j,t}) &= \alpha_j E(X_{j,t-1}) + E(R_{j,t}) = \alpha_j E(X_{j,t}) + E(R_{j,t}) \\
\iff (1-\alpha_j)E(X_{j,t}) &= \lambda_j \iff E(X_{j,t}) = \frac{\lambda_j}{1-\alpha_j}, \quad j = 1, 2.
\end{aligned}$$

2. Tendo em conta a igualdade matricial (4.2) e o resultado anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X_{j,t}) &= \alpha_j^2 \text{Var}(X_{j,t-1}) + \alpha_j(1-\alpha_j)E(X_{j,t-1}) + \text{Var}(R_{j,t}) \\
&= \alpha_j^2 \text{Var}(X_{j,t-1}) + \alpha_j(1-\alpha_j)\frac{\lambda_j}{1-\alpha_j} + v_j \lambda_j \\
&\implies (1-\alpha_j^2)\text{Var}(X_{j,t}) = \alpha_j \lambda_j + v_j \lambda_j \\
&\iff \text{Var}(X_{j,t}) = \frac{(\alpha_j + v_j)\lambda_j}{1-\alpha_j^2}, \quad j = 1, 2.
\end{aligned}$$

3. Novamente, devido a (3.12), tem-se, para $j = 1, 2$,

$$\text{Cov}(X_{j,t}, X_{j,t+h}) = \alpha_j \left[\Gamma(h-1) \right]_{j,j} = \alpha_j^h \left[\Gamma(0) \right]_{j,j} = \alpha_j^h \sigma_{X_j}^2, \quad h = 1, 2, \dots$$

4. A função de autocorrelação obtém-se de maneira direta, através da divisão entre a função de autocovariância no ponto h e a função de autocovariância no ponto 0, ou seja,

$$\text{Corr}(X_{j,t}, X_{j,t+h}) = \frac{\gamma_{X_j}(h)}{\gamma_{X_j}(0)} = \frac{\alpha_j^h \sigma_{X_j}^2}{\sigma_{X_j}^2} = \alpha_j^h, \quad h = 1, 2, \dots$$

o que conclui a demonstração. \square

A seguinte proposição estabelece mais duas propriedades deste modelo, que dizem respeito às covariâncias cruzadas $\text{Cov}(X_{1,t+h}, X_{2,t})$ e $\text{Cov}(X_{1,t}, X_{2,t+h})$ e às consequentes correlações.

Proposição 4.2. *Seja $\{X\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo bivariado que segue um modelo BINAR(1). Então, para $h = 0, 1, \dots$, são verificadas as seguintes igualdades*

1. $\text{Cov}(X_{1,t+h}, X_{2,t}) = \frac{\alpha_1^h}{1 - \alpha_1 \alpha_2} \text{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t})$
2. $\text{Corr}(X_{1,t+h}, X_{2,t}) = \frac{\alpha_1^h \sqrt{(1 - \alpha_1^2)(1 - \alpha_2^2)}}{(1 - \alpha_1 \alpha_2) \sqrt{(\alpha_1 + \nu_1)(\alpha_2 + \nu_2) \lambda_1 \lambda_2}} \text{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t})$
3. $\text{Cov}(X_{1,t}, X_{2,t+h}) = \frac{\alpha_2^h}{1 - \alpha_1 \alpha_2} \text{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t})$
4. $\text{Corr}(X_{1,t}, X_{2,t+h}) = \frac{\alpha_2^h \sqrt{(1 - \alpha_1^2)(1 - \alpha_2^2)}}{(1 - \alpha_1 \alpha_2) \sqrt{(\alpha_1 + \nu_1)(\alpha_2 + \nu_2) \lambda_1 \lambda_2}} \text{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t})$.

Prova. 1. Por um lado, utilizando a igualdade matricial (4.1), obtemos

$$\text{Cov}(X_{1,t+h}, X_{2,t}) = \alpha_1^h \text{Cov}(X_{1,t}, X_{2,t}), \quad h \geq 0. \quad (4.3)$$

Por outro lado, recorrendo à igualdade matricial (4.2) que define $\Gamma(0)$, temos

$$\text{Cov}(X_{1,t}, X_{2,t}) = \alpha_1 \alpha_2 \text{Cov}(X_{1,t}, X_{2,t}) + \text{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t}), \quad (4.4)$$

do que se obtém

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_1 \alpha_2) \text{Cov}(X_{1,t}, X_{2,t}) &= \text{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t}) \\ \iff \text{Cov}(X_{1,t}, X_{2,t}) &= \frac{1}{1 - \alpha_1 \alpha_2} \text{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t}). \end{aligned}$$

Consequentemente, juntando as equações (4.3) e (4.4), obtemos

$$\text{Cov}(X_{1,t+h}, X_{2,t}) = \frac{\alpha_1^h}{1 - \alpha_1 \alpha_2} \text{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t}), \quad h = 0, 1, \dots$$

2. A correlação entre as variáveis $X_{1,t+h}$ e $X_{2,t}$ é obtida através da divisão entre a covariância entre essas variáveis e os respectivos desvios padrões. Assim, utilizando a propriedade 2 da Proposição 4.1. e o resultado anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Corr}(X_{1,t+h}, X_{2,t}) &= \frac{\text{Cov}(X_{1,t+h}, X_{2,t})}{\sqrt{\text{Var}(X_{1,t+h})} \sqrt{\text{Var}(X_{2,t})}} = \frac{\frac{\alpha_1^h}{1-\alpha_1\alpha_2} \text{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t})}{\sqrt{\frac{(\alpha_1+v_1)\lambda_1}{1-\alpha_1^2}} \sqrt{\frac{(\alpha_2+v_2)\lambda_2}{1-\alpha_2^2}}} \\ &= \frac{\alpha_1^h \sqrt{(1-\alpha_1^2)(1-\alpha_2^2)}}{(1-\alpha_1\alpha_2) \sqrt{(\alpha_1+v_1)(\alpha_2+v_2)\lambda_1\lambda_2}} \text{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t}), \quad h = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

As propriedades 3 e 4 provam-se de forma idêntica.

A demonstração fica concluída. \square

4.2 Casos paramétricos

Esta secção destina-se ao estudo de dois modelos *BINAR*(1) que se distinguem apenas na lei do processo das inovações. Primeiramente, apresentaremos o caso em que as inovações das duas séries seguem a lei de Poisson bivariada. De seguida, estudaremos o caso em que as inovações seguem uma lei Binomial Negativa bivariada.

4.2.1 Inovações com lei de Poisson

Assumimos que o processo bivariado das inovações, $\{R_{1,t}, R_{2,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$, segue uma lei de Poisson bivariada cuja função de probabilidade é tal que

$$\begin{aligned} P(R_{1,t} = x, R_{2,t} = y) &= \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 - \phi)} \frac{(\lambda_1 - \phi)^x}{x!} \frac{(\lambda_2 - \phi)^y}{y!} \sum_{i=0}^s \binom{x}{i} \binom{y}{i} i! \left(\frac{\phi}{(\lambda_1 - \phi)(\lambda_2 - \phi)} \right)^i, \end{aligned}$$

com $x, y \in \mathbb{N}_0$ e onde $s = \min(x, y)$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e $\phi \in [0, \min(\lambda_1, \lambda_2)]$.

Esta distribuição é denotada por $PB(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$. As margens deste processo seguem leis de Poisson de parâmetros λ_1 e λ_2 , respetivamente, ou seja, $R_{1,t} \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $R_{2,t} \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ e o parâmetro ϕ corresponde à covariância entre as duas variáveis, isto é, $\phi = \text{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t})$. Se $\phi = 0$, a função de probabilidade conjunta corresponde ao produto das duas funções de Poisson para cada processo, isto é, existe independência entre $\{R_{1,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{R_{2,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

A distribuição acima conduz-nos ao caso de equidispersão, ou seja, $v_j = 1$, onde, para cada $j = 1, 2$, se deduz que as sucessões $R_{j,t}$ são i.i.d. e seguem a lei de Poisson com $\sigma_j^2 = \lambda_j$.

A proposição seguinte caracteriza o modelo *BINAR*(1) com inovações de Poisson, no que diz respeito aos primeiros momentos, à função de autocovariância $\gamma_{X_{j,t}}(h)$ e à função de covariância cruzada $\tilde{\gamma}_{X_{j,t}}(h)$.

Proposição 4.3. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo bivariado que segue um modelo BINAR(1), cujas inovações seguem leis de Poisson de parâmetros λ_1 e λ_2 . Os momentos de primeira e de segunda ordens do processo, para $j = 1, 2$, são dados por*

1. $E(X_{j,t}) = \frac{\lambda_j}{1-\alpha_j}$
2. $Cov(X_{j,t}, X_{j,t+h}) = \frac{\alpha_j^h \lambda_j}{1-\alpha_j}, \quad h = 0, 1, \dots$
3. $Corr(X_{j,t}, X_{j,t+h}) = \alpha_j^h, \quad h = 0, 1, \dots$
4. $Cov(X_{i,t}, X_{j,t+h}) = \frac{\alpha_j^h \phi}{1-\alpha_1 \alpha_2}, \quad j \neq i, \quad h = 0, 1, \dots$
5. $Corr(X_{j,t+h}, X_{i,t}) = \frac{\alpha_j^h \sqrt{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} \phi}{(1-\alpha_1 \alpha_2) \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}, \quad j \neq i, \quad h = 0, 1, \dots$

Prova. 1. Uma vez que as margens de cada inovação seguem leis de Poisson de parâmetro λ_j , para $j = 1, 2$, a média do processo $\{R_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é igual a esse parâmetro, pelo que a demonstração desta propriedade é equivalente à demonstração da Propriedade 1 da Proposição 4.1.

2. De acordo com as propriedades 2 e 3 da Proposição 4.1. e devido ao facto de $v_j = 1$, obtemos

$$Cov(X_{j,t}, X_{j,t+h}) = \alpha_j^h \sigma_{X_j}^2 = \alpha_j^h \frac{(\alpha_j + 1) \lambda_j}{1 - \alpha_j^2} = \alpha_j^h \frac{(\alpha_j + 1) \lambda_j}{(1 - \alpha_j)(1 + \alpha_j)} = \frac{\alpha_j^h \lambda_j}{1 - \alpha_j}, \quad h = 0, 1, \dots$$

3. Trata-se da propriedade 4 da Proposição 4.1.

4. Para $j \neq i$, utilizamos a propriedade 1 da Proposição 4.2., com $Cov(R_{1,t}, R_{2,t}) = \phi$. Desta forma, juntando os resultados (4.3) e (4.4), obtemos, para este modelo, o pretendido, ou seja,

$$Cov(X_{1,t+h}, X_{2,t}) = \frac{\alpha_j^h}{1 - \alpha_1 \alpha_2} Cov(R_{1,t}, R_{2,t}) = \frac{\alpha_j^h \phi}{1 - \alpha_1 \alpha_2}, \quad j \neq i, \quad h = 0, 1, \dots$$

5. À semelhança do resultado 2 da Proposição 4.2. e sabendo que $v_j = 1$ e $Cov(R_{1,t}, R_{2,t}) = \phi$, obtém-se o seguinte

$$Corr(X_{j,t+h}, X_{i,t}) = \frac{\frac{\alpha_j^h \phi}{1 - \alpha_1 \alpha_2}}{\sqrt{\frac{(\alpha_1 + 1) \lambda_1}{(1 - \alpha_1^2)}} \sqrt{\frac{(\alpha_2 + 1) \lambda_2}{(1 - \alpha_2^2)}}} = \frac{\alpha_j^h \sqrt{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)} \phi}{(1 - \alpha_1 \alpha_2) \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}, \quad j \neq i, \quad h = 0, 1, \dots$$

A demonstração fica concluída. □

Observamos que, quando se consideram inovações com lei de $PB(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$, tem-se $E(X_{j,t}) = Var(X_{j,t})$, uma vez que

$$E(X_{j,t}) = \frac{\lambda_j}{1 - \alpha_j} \quad \text{e} \quad Var(X_{j,t}) = Cov(X_{j,t}, X_{j,t}) = \frac{\lambda_j}{1 - \alpha_j}, \quad j = 1, 2,$$

o que reflete a equidispersão das margens do modelo.

A proposição seguinte estabelece os momentos condicionais que serão usados na secção da estimação pontual.

Proposição 4.4. *Seja $\{X_{1,t}, X_{2,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo bivariado, que obedece a um modelo BINAR(1) com inovações seguindo a lei $PB(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$. Então, para $j = 1, 2$, tem-se*

1. $E(X_{j,t}|X_{j,t-1}) = \alpha_j X_{j,t-1} + \lambda_j$
2. $Cov(X_{j,t}, X_{j,t}|X_{j,t-1}) = \alpha_j(1 - \alpha_j)X_{j,t-1} + \lambda_j$
3. $Cov(X_{j,t}, X_{i,t}|X_{j,t-1}, X_{i,t-1}) = \phi$.

Prova. **1.** Aplicando a propriedade 4 da Proposição 2.3., temos, para $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned} E(X_{j,t}|X_{j,t-1}) &= E(\alpha_j \circ X_{j,t-1} + R_{j,t}|X_{j,t-1}) \\ &= E(\alpha_j \circ X_{j,t-1}|X_{j,t-1}) + E(R_{j,t}|X_{j,t-1}) \\ &= \alpha_j X_{j,t-1} + \lambda_j, \end{aligned}$$

uma vez que, dado $X_{j,t-1}$, a v.a. $\alpha \circ X_{j,t-1}$ segue uma lei $\mathcal{B}(X_{j,t-1}, \alpha)$.

2. Por outro lado, para $h = 0$, e usando a demonstração da propriedade 5 da Proposição 2.3., a matriz de variâncias-covariâncias condicional, tem elementos diagonais dados por

$$\begin{aligned} Cov(X_{j,t}, X_{j,t}|X_{j,t-1}) &= Cov(X_{j,t}, X_{j,t}|X_{j,t-1}) = Var(X_{j,t}|X_{j,t-1}) \\ &= Var(\alpha_j \circ X_{j,t-1} + R_{j,t}|X_{j,t-1}) = Var(\alpha_j \circ X_{j,t-1}|X_{j,t-1}) + Var(R_{j,t}) \\ &= \alpha_j(1 - \alpha_j)X_{j,t-1} + \lambda_j. \end{aligned}$$

3. Quanto à covariância condicional tem-se

$$\begin{aligned} Cov(X_{1,t}, X_{2,t}|X_{1,t-1}, X_{2,t-1}) &= Cov(\alpha_1 \circ X_{1,t-1} + R_{1,t}, \alpha_2 \circ X_{2,t-1} + R_{2,t}|X_{1,t-1}, X_{2,t-1}) \\ &= \alpha_1 \alpha_2 X_{1,t-1} X_{2,t-1} + E(R_{1,t}) \alpha_2 X_{2,t} + E(R_{2,t}) \alpha_1 X_{1,t} + E(R_{1,t} R_{2,t}) \\ &\quad - (\alpha_1 X_{1,t-1} + E(R_{1,t})) (\alpha_2 X_{2,t-1} + E(R_{2,t})) \\ &= E(R_{1,t} R_{2,t}) - E(R_{1,t}) E(R_{2,t}) \\ &= Cov(R_{1,t}, R_{2,t}) \\ &= \phi. \end{aligned}$$

A demonstração fica concluída. □

4.2.2 Inovações com lei Binomiais Negativas

Suponha-se que o processo de inovações $\{R_{1,t}, R_{2,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ segue uma lei Binomial Negativa bivariada com função de probabilidade conjunta tal que

$$P(R_{1,t} = x, R_{2,t} = y) = \frac{\Gamma(\beta^{-1} + x + y)}{\Gamma(\beta^{-1})\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)} \frac{\lambda_1^x \lambda_2^y \beta^{-\beta^{-1}}}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \beta^{-1})^{x+y+\beta^{-1}}}$$

com $x, y \in \mathbb{N}_0$ e $\lambda_1, \lambda_2, \beta > 0$. Esta distribuição é denotada por $BNB(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$.

Note-se que, à semelhança da distribuição de Poisson, as margens do processo de inovação, $\{R_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$, seguem leis Binomiais Negativas univariadas de parâmetros β^{-1} e $p_j = \beta^{-1}/(\lambda_j + \beta^{-1})$, para $j = 1, 2$.

A função de probabilidade de uma variável X , discreta, com lei binomial negativa (BN) de parâmetros (n, p) , com $n \in \mathbb{N}$ e $p \in]0, 1[$, é dada por $Q(x) = \binom{n+x-1}{n-1} p^n (1-p)^x$, $x \in \mathbb{N}_0$. Assim, a distribuição univariada de $R_{j,t}$ é dada por

$$\begin{aligned} P(R_{j,t} = x) &= \binom{\beta^{-1} + x - 1}{\beta^{-1} - 1} \left(\frac{\beta^{-1}}{\lambda_j + \beta^{-1}} \right)^{\beta^{-1}} \left(1 - \frac{\beta^{-1}}{\lambda_j + \beta^{-1}} \right)^x \\ &= \frac{(\beta^{-1} + x - 1)!}{(\beta^{-1} - 1)! x!} \frac{(\beta^{-1})^{\beta^{-1}}}{(\lambda_j + \beta^{-1})^{\beta^{-1}}} \frac{\lambda_j^x}{(\lambda_j + \beta^{-1})^x} \\ &= \frac{\Gamma(\beta^{-1} + x)}{\Gamma(\beta^{-1})\Gamma(x+1)} \frac{\beta^{-\beta^{-1}} \lambda_j^x}{(\lambda_j + \beta^{-1})^{x+\beta^{-1}}}, \quad j = 1, 2, x \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Além disso, se $X \sim BN(n, p)$, a sua média é dada por $E(X) = \frac{n(1-p)}{p}$ e a sua variância é dada por $Var(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}$. Desta forma,

$$E(R_{j,t}) = \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_j \beta + 1} \right) / \left(\frac{1}{\lambda_j \beta + 1} \right) = \lambda_j, \quad j = 1, 2$$

e

$$Var(R_{j,t}) = \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_j \beta + 1} \right) / \left(\frac{1}{(\lambda_j \beta + 1)^2} \right) = \lambda_j(\lambda_j \beta + 1), \quad j = 1, 2.$$

Relembrando que, na Secção 4.1., a variância das inovações era dada por $\sigma_j^2 = \nu_j \lambda_j$, para $j = 1, 2$, e, agora, é dada por $\sigma_j^2 = \lambda_j(\lambda_j \beta + 1)$, isto implica que $\nu_j = 1 + \beta \lambda_j$ e $\lambda_j, \beta > 0$, para $j = 1, 2$. Consequentemente, $\nu_j > 1$ e, por isso, estamos perante um caso de sobredispersão.

A correlação entre as variáveis $R_{1,t}$ e $R_{2,t}$ é dada por

$$Corr(R_{1,t}, R_{2,t}) = \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta^2}{(1 + \lambda_1 \beta)(1 + \lambda_2 \beta)}}. \quad (4.5)$$

Note-se que, em particular, para $\beta^{-1} = 1$, estamos perante uma distribuição Geométrica bivariada. Concretamente, as distribuições marginais são tais que $P(R_{j,t} = x) = \left(\frac{\lambda_j}{1 + \lambda_j} \right)^x \frac{1}{\lambda_j}$, $x \in \mathbb{N}_0$.

A próxima proposição resume a média e a estrutura de segunda ordem deste modelo.

Proposição 4.5. *Seja $\{X_{1,t}, X_{2,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo bivariado seguindo um modelo BINAR(1) tal que a lei das inovações é uma lei BNB de parâmetros $(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$. Tem-se, para $j = 1, 2$,*

1. $E(X_{j,t}) = \frac{\lambda_j}{1-\alpha_j}$
2. $Cov(X_{j,t}, X_{j,t+h}) = \frac{\alpha_j^h \lambda_j (1+\beta\lambda_j+\alpha_j)}{1-\alpha_j^2}$, $h = 0, 1, \dots$
3. $Corr(X_{j,t}, X_{j,t+h}) = \alpha_j^h$, $h = 0, 1, \dots$
4. $Cov(X_{j,t+h}, X_{i,t}) = \frac{\alpha_j^h \beta \lambda_1 \lambda_2}{1-\alpha_1 \alpha_2}$, $j \neq i$, $h = 0, 1, \dots$
5. $Corr(X_{j,t+h}, X_{i,t}) = \frac{\alpha_j^h \beta}{(1-\alpha_1 \alpha_2)} \sqrt{\frac{(1-\alpha_1^2)(1-\alpha_2^2)\lambda_1 \lambda_2}{(1+\beta\lambda_1+\alpha_1)(1+\beta\lambda_2+\alpha_2)}}$, $j \neq i$, $h = 0, 1, \dots$

Prova. 1. A demonstração desta propriedade é análoga à demonstração da propriedade 1 da Proposição 4.3.

2. Utilizando as propriedades 2 e 3 da Proposição 4.1. e o facto de $v_j = 1 + \beta\lambda_j$, obtemos o pretendido.

3. Esta demonstração é semelhante à demonstração da propriedade 4 da Proposição 4.1.

4. De acordo com o resultado (4.5) e tendo em conta que $Var(R_{j,t}) = (\lambda_j\beta + 1)$, para $j = 1, 2$, temos

$$\begin{aligned}
 Corr(R_{1,t}, R_{2,t}) &= \frac{Cov(R_{1,t}, R_{2,t})}{\sqrt{Var(R_{1,t})}\sqrt{Var(R_{2,t})}} \\
 &\iff \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta^2}{(1 + \lambda_1 \beta)(1 + \lambda_2 \beta)}} = \frac{Cov(R_{1,t}, R_{2,t})}{\sqrt{\lambda_2(\lambda_1 \beta + 1)}\sqrt{\lambda_2(\lambda_2 \beta + 1)}} \\
 &\iff Cov(R_{1,t}, R_{2,t}) = \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta^2}{(1 + \lambda_1 \beta)(1 + \lambda_2 \beta)}} \sqrt{\lambda_1(\lambda_1 \beta + 1)} \sqrt{\lambda_2(\lambda_2 \beta + 1)} \\
 &\iff Cov(R_{1,t}, R_{2,t}) = \beta \lambda_1 \lambda_2.
 \end{aligned}$$

Assim, substituindo esta covariância no resultado da propriedade 1 da Proposição 4.2., obtemos o pretendido.

5. Para esta propriedade utilizamos, novamente, o resultado 2 da Proposição 4.2., atendendo a que, para este modelo, o valor de v_j é dado por $v_j = 1 + \beta\lambda_j$, com $j = 1, 2$. Assim,

$$Corr(X_{j,t+h}, X_{i,t}) = \frac{\alpha_j^h \sqrt{(1-\alpha_1^2)(1-\alpha_2^2)}}{(1-\alpha_1 \alpha_2) \sqrt{(\alpha_1 + 1 + \beta\lambda_1)(\alpha_2 + 1 + \beta\lambda_2)}} \beta \lambda_1 \lambda_2$$

$$= \frac{\alpha_j^h \beta}{(1 - \alpha_1 \alpha_2)} \sqrt{\frac{(1 - \alpha_1^2)(1 - \alpha_2^2)\lambda_1 \lambda_2}{(1 + \beta \lambda_1 + \alpha_1)(1 + \beta \lambda_2 + \alpha_2)}}, \quad h = 0, 1, \dots$$

A demonstração fica concluída. □

Neste caso, obtemos a sobredispersão das margens do modelo, uma vez que

$$\text{Var}(X_{j,t}) = E(X_{j,t}) \left(1 + \frac{\beta \lambda_j}{1 + \alpha_j}\right) > E(X_{j,t}).$$

À semelhança do modelo anterior, os momentos condicionais, que serão usados posteriormente, são expressos na seguinte proposição.

Proposição 4.6. *Se $\{X_{1,t}, X_{2,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo bivariado, seguindo um modelo BINAR(1) com inovações com lei BNB($\lambda_1, \lambda_2, \beta$), então, para $j = 1, 2$ e $h = 0$, tem-se*

1. $E(X_{j,t} | X_{j,t-1}) = \alpha_j X_{j,t-1} + \lambda_j$
2. $\text{Cov}(X_{j,t}, X_{j,t} | X_{j,t-1}) = \alpha_j (1 - \alpha_j) X_{j,t-1} + \lambda_j (1 + \beta \lambda_j)$
3. $\text{Cov}(X_{j,t}, X_{i,t} | X_{j,t-1}, X_{i,t-1}) = \beta \lambda_1 \lambda_2$.

Prova. 1. Esta demonstração é idêntica à demonstração da propriedade 1 da Proposição 4.4.

2. Esta demonstração é semelhante à demonstração da propriedade 2 da Proposição 4.4., à exceção da variância do processo $\{R_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Concretamente,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_{j,t}, X_{j,t} | X_{j,t-1}) &= \text{Var}(X_{j,t} | X_{j,t-1}) \\ &= \text{Var}(\alpha_j \circ X_{j,t-1} + R_{j,t} | X_{j,t-1}) = \text{Var}(\alpha_j \circ X_{j,t-1} | X_{j,t-1}) + \text{Var}(R_{j,t}) \\ &= \alpha_j (1 - \alpha_j) X_{j,t-1} + \lambda_j (1 + \lambda_j \beta), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

3. Analogamente às propriedades anteriores, esta também é resultado da demonstração da propriedade 3 da mesma proposição. Desta forma, aplicando, ainda, parte da demonstração da propriedade 4 da Proposição 4.5, temos

$$\text{Cov}(X_{j,t}, X_{i,t} | X_{j,t-1}, X_{i,t-1}) = \text{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t}) = \beta \lambda_1 \lambda_2.$$

A demonstração fica, assim, concluída. □

4.3 Estimação Pontual

Nesta secção, iremos aprofundar o estudo do modelo BINAR(1), analisando e estimando, os parâmetros que levam à otimização da série. Desta forma, para cada caso de inovações apresentadas no Capítulo 4, iremos proceder à estimação dos parâmetros através de três métodos, sendo eles os

métodos de Yule Walker, Mínimos Quadrados Condicionais e Máxima Verosimilhança, com base numa amostra $((X_{1,1}, X_{2,1}), \dots, (X_{1,N}, X_{2,N}))$ do processo $BINAR(1)$.

4.3.1 Inovações com lei de Poisson

Começemos por estudar os diferentes métodos de estimação dos parâmetros desconhecidos do processo $BINAR(1)$ quando as inovações seguem uma lei $PB(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$, com $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e $\phi \in [0, \min(\lambda_1, \lambda_2)]$. Assim, temos cinco parâmetros a estimar: $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ e ϕ .

Método de Yule Walker

Para este método, iremos estimar os parâmetros referidos acima através das funções de autocovariância, que nos permitirão obter os valores de α_i , $i = 1, 2$, e de ϕ , e através da função média, retirando os valores de λ_i , $i = 1, 2$.

De acordo com a Proposição 4.3, temos, para $h = 1$,

$$\text{Corr}(X_{j,t+1}, X_{j,t}) = \rho_{X_j}(1) = \alpha_j, \quad j = 1, 2,$$

e, assim, obtemos

$$\widehat{\alpha}_1 = \widehat{\rho}_{X_1}(1) \quad \text{e} \quad \widehat{\alpha}_2 = \widehat{\rho}_{X_2}(1).$$

Por outro lado, através da igualdade

$$E(X_{j,t}) = \frac{\lambda_j}{1 - \alpha_j}, \quad j = 1, 2,$$

podemos concluir que

$$\widehat{\lambda}_1 = (1 - \widehat{\alpha}_1)\overline{X}_{1,N} \quad \text{e} \quad \widehat{\lambda}_2 = (1 - \widehat{\alpha}_2)\overline{X}_{2,N}.$$

com $\overline{X}_{i,N} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_{i,t}$, $i = 1, 2$.

O estimador do parâmetro ϕ obtém-se através da propriedade 4 da Proposição 4.3, para $h = 0$, ou seja,

$$\gamma_{X_2}(0) \equiv \gamma_{X_1}(0) := \text{Cov}(X_{1,t}, X_{2,t}) = \frac{\phi}{1 - \alpha_1 \alpha_2}.$$

Então, como

$$\widehat{\gamma}_{X_1}(0) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (X_{1,t} - \overline{X}_{1,N})(X_{2,t} - \overline{X}_{2,N}), \quad (4.6)$$

obtemos

$$\widehat{\phi} = \frac{1 - \widehat{\alpha}_1 \widehat{\alpha}_2}{N} \sum_{t=1}^N (X_{1,t} - \overline{X}_{1,N})(X_{2,t} - \overline{X}_{2,N}).$$

Método dos Mínimos Quadrados Condicionais

Dado um conjunto de dados, este método consiste em encontrar o melhor ajuste de forma a minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados.

No caso do modelo *BINAR*(1) em estudo, como proposto em [9], há que minimizar a função

$$\begin{aligned} Q(\theta) &= \sum_{t=2}^N (X_t - E(X_t|X_{t-1}))(X_t - E(X_t|X_{t-1}))^T \\ &= \sum_{j=1}^2 \sum_{t=2}^N (X_{j,t} - E(X_{j,t}|X_{j,t-1}))^2 \\ &= \sum_{j=1}^2 \sum_{t=2}^N (X_{j,t} - \alpha_j X_{j,t-1} - \lambda_j)^2, \end{aligned}$$

onde $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2)$.

Os estimadores $\widehat{\alpha}_j$ e $\widehat{\lambda}_j$, para $j = 1, 2$, obtêm-se ao minimizar, separadamente, as funções

$$Q(\alpha_1, \lambda_1) = \sum_{t=2}^N (X_{1,t} - \alpha_1 X_{1,t-1} - \lambda_1)^2$$

e

$$Q(\alpha_2, \lambda_2) = \sum_{t=2}^N (X_{2,t} - \alpha_2 X_{2,t-1} - \lambda_2)^2.$$

De acordo com o método dos mínimos quadrados, tem-se

$$\begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_j \\ \widehat{\lambda}_j \end{bmatrix} = (A_j^T A_j)^{-1} A_j^T Y_j, \quad \text{com } A_j = \begin{bmatrix} 1 & X_{j,1} \\ 1 & X_{j,2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_{j,N-1} \end{bmatrix} \text{ e } Y_j = \begin{bmatrix} X_{j,2} \\ \vdots \\ X_{j,N} \end{bmatrix}.$$

Mais concretamente (veja-se, por exemplo, [5]), obtemos, para $j = 1, 2$,

$$\widehat{\alpha}_j = \frac{\sum_{t=2}^N X_{j,t} X_{j,t-1} - \frac{1}{N-1} \sum_{t=2}^N X_{j,t-1} \sum_{t=2}^N X_{j,t}}{\sum_{t=2}^N X_{j,t-1}^2 - \frac{1}{N-1} \left(\sum_{t=2}^N X_{j,t-1} \right)^2}$$

e

$$\widehat{\lambda}_j = \frac{1}{N-1} \sum_{t=2}^N X_{j,t} - \widehat{\alpha}_j \frac{1}{N-1} \sum_{t=2}^N X_{j,t-1}.$$

Por outro lado, pela propriedade 3 da Proposição 4.4., temos que

$$\text{Cov}(X_{1,t}, X_{2,t} | X_{1,t-1}, X_{2,t-1}) = \phi. \quad (4.7)$$

Tendo como motivação o trabalho [5], o estimador do parâmetro ϕ é obtido ao minimizar

$$\begin{aligned} Q(\phi) &= \sum_{t=2}^N \left((X_{1,t} - E(X_{1,t} | X_{1,t-1})) (X_{2,t} - E(X_{2,t} | X_{2,t-1})) - \text{Cov}(X_{1,t}, X_{2,t} | X_{1,t-1}, X_{2,t-1}) \right)^2 \\ &= \sum_{t=2}^N \left((X_{1,t} - \alpha_1 X_{1,t-1} - \lambda_1) (X_{2,t} - \alpha_2 X_{2,t-1} - \lambda_2) - \phi \right)^2 \\ &= \sum_{t=2}^N (C_t - \phi)^2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

com $C_t = (X_{1,t} - \alpha_1 X_{1,t-1} - \lambda_1) (X_{2,t} - \alpha_2 X_{2,t-1} - \lambda_2)$.

Desta forma, calculando a derivada de Q e igualando a zero, temos

$$\frac{dQ}{d\phi}(\phi) = 0 \iff -2 \sum_{t=2}^N (C_t - \phi) = 0 \iff -\sum_{t=2}^N C_t + (N-2+1)\phi = 0 \iff \phi = \frac{1}{N-1} \sum_{t=2}^N C_t.$$

Consequentemente, como $\frac{d^2Q}{d\phi^2}(\phi) = 2$, o valor de ϕ é um minimizante de $Q(\phi)$, obtendo-se o estimador de ϕ dado por

$$\hat{\phi} = \frac{1}{N-1} \sum_{t=2}^N (X_{1,t} - \hat{\alpha}_1 X_{1,t-1} - \hat{\lambda}_1) (X_{2,t} - \hat{\alpha}_2 X_{2,t-1} - \hat{\lambda}_2).$$

Método da Máxima Verossimilhança

De uma forma geral, dados um conjunto de observações e um modelo estatístico, o método da máxima verossimilhança tem como objetivo estimar os valores dos diferentes parâmetros do modelo de maneira a maximizar a probabilidade de obter, efetivamente, os dados observados.

A função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} L_1(\theta | \mathbf{x}_{j,t}) &= P(X_{1,1} = x_{1,1}, X_{1,2} = x_{1,2}, \dots, X_{1,N} = x_{1,N}, X_{2,1} = x_{2,1}, X_{2,2} = x_{2,2}, \dots, X_{2,N} = x_{2,N}) \\ &= P(X_{1,1} = x_{1,1}, X_{2,1} = x_{2,1}) P(X_{1,2} = x_{1,2}, X_{2,2} = x_{2,2} | X_{1,1} = x_{1,1}, X_{2,1} = x_{2,1}) \dots \\ &\quad \dots P(X_{1,N} = x_{1,N}, X_{2,N} = x_{2,N} | X_{1,N-1} = x_{1,N-1}, X_{2,N-1} = x_{2,N-1}) \\ &= P(X_{1,1} = x_{1,1}, X_{2,1} = x_{2,1}) \prod_{t=2}^N P(X_{1,t} = x_{1,t}, X_{2,t} = x_{2,t} | X_{1,t-1} = x_{1,t-1}, X_{2,t-1} = x_{2,t-1}), \end{aligned}$$

onde $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \phi)$ e $\mathbf{x}_{j,t} = (x_{j,1}, \dots, x_{j,N})$.

A dificuldade em especificar $P(X_{1,1} = x_{1,1}, X_{2,1} = x_{2,1})$ leva a que muitos autores optem por maximizar a função

$$L_2(\theta, \mathbf{x}_{j,t}) = \prod_{t=2}^N P(X_{1,t} = x_{1,t}, X_{2,t} = x_{2,t} | X_{1,t-1} = x_{1,t-1}, X_{2,t-1} = x_{2,t-1}),$$

designada, por alguns autores, por função de verosimilhança condicional, ou o seu logaritmo

$$L_3(\theta, \mathbf{x}_{j,t}) = \sum_{t=2}^N \ln(P(X_{1,t} = x_{1,t}, X_{2,t} = x_{2,t} | X_{1,t-1} = x_{1,t-1}, X_{2,t-1} = x_{2,t-1})).$$

Para o caso em que as inovações seguem uma lei de Poisson bivariada de parâmetros λ_1, λ_2 e ϕ , tem-se

$$P(R_{1,t} = k, R_{2,t} = s) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 - \phi)} \sum_{m=0}^{\min(k,s)} \frac{(\lambda_1 - \phi)^{k-m} (\lambda_2 - \phi)^{s-m} \phi^m}{(k-m)!(s-m)!m!}.$$

Por outro lado, uma vez que, dado $X_{j,t-1} = x_{j,t-1}$ a v.a. $\alpha_j \circ X_{j,t-1}$ segue uma lei $\mathcal{B}(x_{j,t-1}, \alpha_j)$, obtemos

$$\begin{aligned} P(X_{1,t} = x_{1,t}, X_{2,t} = x_{2,t} | X_{1,t-1} = x_{1,t-1}, X_{2,t-1} = x_{2,t-1}) = \\ e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 - \phi)} \sum_{k=0}^{g_1} \sum_{s=0}^{g_2} \sum_{m=0}^{\min(k,s)} \frac{(\lambda_1 - \phi)^{k-m} (\lambda_2 - \phi)^{s-m} \phi^m}{(k-m)!(s-m)!m!} \times \\ \times \binom{x_{1,t-1}}{x_{1,t} - k} \alpha_1^{x_{1,t} - k} (1 - \alpha_1)^{x_{1,t-1} - x_{1,t} + k} \binom{x_{2,t-1}}{x_{2,t} - s} \alpha_2^{x_{2,t} - s} (1 - \alpha_2)^{x_{2,t-1} - x_{2,t} + s}, \end{aligned}$$

onde $g_1 = \min(x_{1,t}, x_{1,t-1})$ e $g_2 = \min(x_{2,t}, x_{2,t-1})$.

4.3.2 Inovações com lei Binomiais Negativas

À semelhança do que foi feito na subsecção 4.3.1., vamos, agora, estudar os três métodos referidos no caso em que as inovações do processo $BINAR(1)$ seguem uma lei $BNB(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$. Neste caso, os parâmetros a estimar serão $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ e β .

Método de Yule Walker

De acordo com a propriedade 3 da Proposição 4.5., para $h = 1$, temos

$$\text{Corr}(X_{j,t+1}, X_{j,t}) = \rho_{X_j}(1) = \alpha_j, \quad j = 1, 2,$$

conseguindo, desta forma, estimar os parâmetros α_1 e α_2 por

$$\widehat{\alpha}_1 = \widehat{\rho}_{X_1}(1) \quad \text{e} \quad \widehat{\alpha}_2 = \widehat{\rho}_{X_2}(1).$$

Por outro lado, através da função média, dada na propriedade 1 da mesma proposição, obtemos os valores de λ_1 e λ_2 estimados, ou seja,

$$\widehat{\lambda}_1 = (1 - \widehat{\alpha}_1) \bar{X}_{1,N} \quad \text{e} \quad \widehat{\lambda}_2 = (1 - \widehat{\alpha}_2) \bar{X}_{2,N}.$$

De forma semelhante ao que foi feito no caso da Poisson bivariada e, de acordo com a propriedade 4 da Proposição 4.5., temos, para $h = 0$,

$$\gamma_{X_1}(0) := Cov(X_{1,t}, X_{2,t}) = \frac{\beta \lambda_1 \lambda_2}{1 - \alpha_1 \alpha_2}.$$

Como $\widehat{\gamma}_{X_1}(0)$ é dado por (4.6), concluímos que o estimador do parâmetro β é

$$\widehat{\beta} = \frac{1 - \widehat{\alpha}_1 \widehat{\alpha}_2}{N \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2} \sum_{t=1}^N (X_{1,t} - \bar{X}_{1,N})(X_{2,t} - \bar{X}_{2,N}).$$

Método dos Mínimos Quadrados Condicionais

De forma semelhante ao que foi feito para o caso em que as inovações seguem uma lei $PB(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$, os estimadores α_1 e α_2 obtêm-se da mesma forma, isto é, através do cálculo, de forma separada, para $j = 1, 2$, das funções

$$\begin{aligned} Q(\alpha_j, \lambda_j) &= \sum_{t=2}^T (X_{j,t} - E(X_{j,t}|X_{j,t-1}))^2 \\ &= \sum_{t=2}^T (X_{j,t} - \alpha_j X_{j,t-1} - \lambda_j)^2 \end{aligned}$$

e, portanto, os respectivos estimadores terão o mesmo valor que no modelo anterior, ou seja, para $j = 1, 2$, temos

$$\widehat{\alpha}_j = \frac{\sum_{t=2}^T X_{j,t} X_{j,t-1} - \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T X_{j,t-1} \sum_{t=2}^T X_{j,t}}{\sum_{t=2}^T X_{j,t-1}^2 - \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=2}^T X_{j,t-1} \right)^2}$$

e

$$\widehat{\lambda}_j = \frac{1}{N-1} \sum_{t=2}^N X_{j,t} - \widehat{\alpha}_j \frac{1}{N-1} \sum_{t=2}^N X_{j,t-1}.$$

Para obter o estimador $\widehat{\beta}$, utilizamos o mesmo raciocínio das equações (4.7) e (4.8), ou seja, começamos por minimizar a função $Q(\beta)$ para, de seguida, calcularmos a sua derivada e igualarmos a zero. Para além disso, sabemos que $Cov(R_{1,t}, R_{2,t}) = \beta \lambda_1 \lambda_2$, pelo que obtemos

$$\begin{aligned} Q(\beta) &= \sum_{t=2}^N \left((X_{1,t} - E(X_{1,t}|X_{1,t-1}))(X_{2,t} - E(X_{2,t}|X_{2,t-1})) - Cov(X_{1,t}, X_{2,t}|X_{1,t-1}, X_{2,t-1}) \right)^2 \\ &= \sum_{t=2}^N \left((X_{1,t} - \alpha_1 X_{1,t-1} - \lambda_1)(X_{2,t} - \alpha_2 X_{2,t-1} - \lambda_2) - \beta \lambda_1 \lambda_2 \right)^2 \\ &= \sum_{t=2}^N (H_t - \beta \lambda_1 \lambda_2)^2, \end{aligned}$$

onde $H_t = (X_{1,t} - \alpha_1 X_{1,t-1} - \lambda_1)(X_{2,t} - \alpha_2 X_{2,t-1} - \lambda_2)$.

Assim, como

$$\frac{dQ}{d\beta}(\beta) = 0 \iff \beta = \frac{1}{(N-1)\lambda_1\lambda_2} \sum_{t=2}^N H_t,$$

o estimador de β será

$$\hat{\beta} = \frac{1}{(N-1)\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2} \sum_{t=2}^N (X_{1,t} - \hat{\alpha}_1 X_{1,t-1} - \hat{\lambda}_1)(X_{2,t} - \hat{\alpha}_2 X_{2,t-1} - \hat{\lambda}_2).$$

Método da Máxima Verossimilhança

Para o caso em que as inovações seguem uma lei *BNB* de parâmetros λ_1, λ_2 e β , sabe-se que a sua função de probabilidade é da forma

$$P(R_{1,t} = k, R_{2,t} = s) = \frac{\Gamma(\beta^{-1} + k + s)}{\Gamma(\beta^{-1})k!s!} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^s \beta^{-\beta^{-1}}}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \beta^{-1})^{k+s+\beta^{-1}}}, \quad k, s \in \mathbb{N}_0.$$

Desta forma, obtemos

$$P(X_{1,t} = x_{1,t}, X_{2,t} = x_{2,t} | X_{1,t-1} = x_{1,t-1}, X_{2,t-1} = x_{2,t-1}) = \sum_{k=0}^{g_1} \sum_{s=0}^{g_2} \frac{\Gamma(\beta^{-1} + k + s)}{\Gamma(\beta^{-1})k!s!} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^s \beta^{-\beta^{-1}}}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \beta^{-1})^{k+s+\beta^{-1}}} \\ \times \binom{x_{1,t-1}}{x_{1,t} - k} \alpha_1^{x_{1,t} - k} (1 - \alpha_1)^{x_{1,t-1} - x_{2,t} + k} \binom{x_{2,t-1}}{x_{2,t} - s} \alpha_2^{x_{2,t} - s} (1 - \alpha_2)^{x_{2,t-1} - x_{2,t} + s},$$

onde $g_1 = \min(x_{1,t}, x_{1,t-1})$ e $g_2 = \min(x_{2,t}, x_{2,t-1})$.

Assim, a função a maximizar é

$$L(\theta, \mathbf{x}_{j,t}) = \sum_{t=2}^N \ln(P(X_{1,t} = x_{1,t}, X_{2,t} = x_{2,t} | X_{1,t-1} = x_{1,t-1}, X_{2,t-1} = x_{2,t-1})),$$

com $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \beta)$.

Capítulo 5

SIMULAÇÕES E APLICAÇÃO

Neste capítulo, o primeiro objetivo passa por simular, através do *software R*, dois processos que verificam um modelo $BINAR(1)$, nos casos em que as inovações seguem uma lei $PB(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$ ou uma lei $BNB(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$. Estimaremos os parâmetros necessários de acordo com cada método referido anteriormente. Seguidamente, será abordada a modelação de um conjunto de dados bivariados, respeitantes ao número de manchas solares registadas nos observatórios de Boulder e de Palehua.

5.1 Simulações

5.1.1 Inovações com lei de Poisson

Começámos pela simulação de um processo obedecendo a um modelo $BINAR(1)$, onde as inovações seguem uma lei $PB(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$. Esta função já está implementada no *R* como $rbvpois(n, a, b, c)$, onde N é o tamanho da amostra, $a = \lambda_1 - \phi$, $b = \lambda_2 - \phi$ e $c = \phi$. Simulámos uma Poisson bivariada, com $N = 100$ e $(\lambda_1, \lambda_2, \phi) = (2, 1.2, 0.8)$. De seguida, construímos as séries $X_{1,t}$ e $X_{2,t}$, aqui denotadas por X e Y . Para tal, para cada $j = 1, 2$ e para cada t , simulámos a variável operada $\alpha_j \circ x_{j,t}$, usando o comando $rbinom(n, size, prob)$, ao que se soma a margem correspondente do processo das inovações já simulado. Neste caso concreto, tomando $\alpha_1 = 0.6$ e $\alpha_2 = 0.4$, para as séries X e Y usámos as funções $rbinom(1, x_{i-1}, 0.4)$ e $rbinom(1, y_{i-1}, 0.6)$, respetivamente. Na Figura 5.1 são apresentadas as duas trajetórias destas séries, onde a linha lilás representa a série X e a linha laranja a série Y .

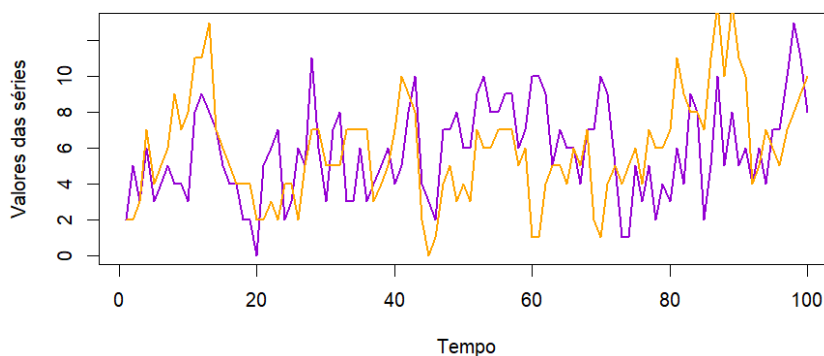


Fig. 5.1 Trajetórias de um processo bivariado simulado que segue um modelo $BINAR(1)$ com inovações $PB(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$

Posteriormente, calculámos as autocorrelações de cada série, para $h = 1$, de modo a obtermos as estimativas $\widehat{\alpha}_1$ e $\widehat{\alpha}_2$ que serão utilizadas no cálculo das estimativas $\widehat{\lambda}_1$ e $\widehat{\lambda}_2$. Por fim, determinámos a autocovariância cruzada das séries $X_{1,t}$ e $X_{2,t}$, em $h = 0$, para determinarmos o valor de $\widehat{\phi}$. As estimativas obtidas são apresentadas na Tabela 5.1.

	ESTIMATIVAS				
	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_2$	$\widehat{\lambda}_1$	$\widehat{\lambda}_2$	$\widehat{\phi}$
Yule Walker	0.465	0.698	3.100	1.821	1.067
M.Q.Cond.	0.460	0.700	3.184	1.829	1.364

Tabela 5.1 Estimativas dos parâmetros do modelo $BINAR(1)$ com inovações de Poisson

5.1.2 Inovações com lei Binomiais Negativas

Nesta secção, o objetivo é semelhante ao da secção anterior, mas usando simulações correspondentes a um processo $BINAR(1)$ onde as inovações seguem uma lei $BNB(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$.

Assim, começámos por simular uma Binomial Negativa bivariada, através da função `trawl :: Bivariate_NBsim(n, k, p1, p2)`, implementada já no *software R*, onde os dois primeiros parâmetros correspondem, respetivamente, ao tamanho da amostra e ao valor de β^{-1} . Quanto a p_1 e p_2 , tem-se $p_i = \beta^{-1}/(\lambda_i + \beta^{-1})$, $i = 1, 2$. Destes valores podemos obter λ_1 e λ_2 . A simulação foi feita para uma amostra de tamanho 150 e para $\beta^{-1} = 2$, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4.67$.

De seguida, construímos as séries $X_{1,t}$ e $X_{2,t}$ da mesma maneira que na subsecção anterior. Na Figura 5.2 apresentam-se as trajetórias obtidas, onde a linha azul representa a série X e a linha rosa a série Y .

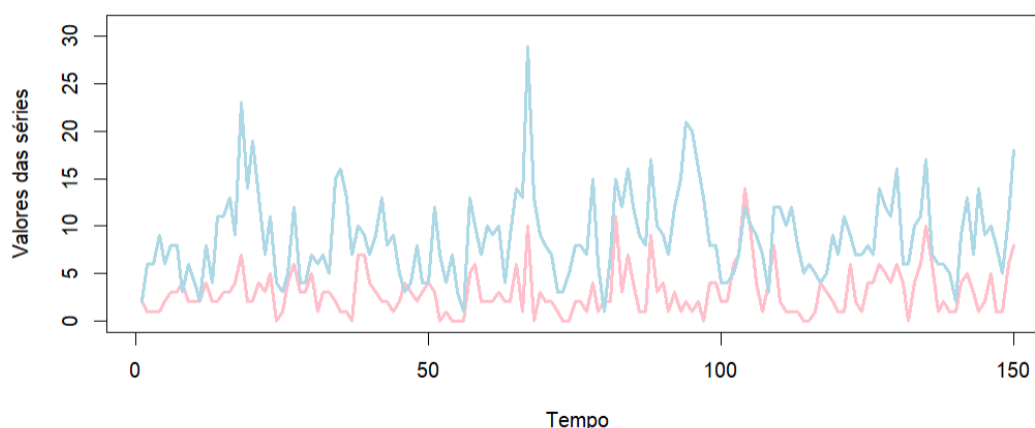


Fig. 5.2 Trajetórias de um processo bivariado simulado que segue um modelo $BINAR(1)$ com inovações de $BNB(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$

Posteriormente, calculámos as estimativas $\widehat{\alpha}_1$, $\widehat{\alpha}_2$, $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ e $\widehat{\beta}$, consoante o que foi referido na parte teórica. Desta forma, as autocorrelações de cada série, para $h = 1$, dão-nos estimativas para $\widehat{\alpha}_i$,

$i = 1, 2$, que farão parte do cálculo de $\hat{\lambda}_i$, $i = 1, 2$. Por outro lado, o valor de $\hat{\beta}$ é resultado do cálculo da autocovariância cruzada e das estimativas $\hat{\lambda}_1$ e $\hat{\lambda}_2$ obtidas anteriormente.

As estimativas obtidas, para cada método, encontram-se na tabela seguinte.

	ESTIMATIVAS				
	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\beta}$
Yule Walker	0.276	0.426	2.183	5.095	0.453
M.Q.Cond.	0.280	0.435	2.192	5.092	0.439

Tabela 5.2 Estimativas dos parâmetros do modelo $BINAR(1)$ com inovações Binomiais Negativas

5.2 Aplicação

Nesta secção, o objetivo passa por fazer uma aplicação para um conjunto de dados reais relativos às manchas solares. Estas manchas solares são regiões na superfície do Sol com temperatura menor do que a média local e, por isso, em comparação com a superfície da nossa estrela, parecem mais escuras. Além disso, as manchas estão em constante mudança de tamanho, forma e/ou posição, devido à rotação e ao campo magnético solares. Quando há uma concentração de manchas solares estamos perante um grupo de manchas solares.

O National Solar Observatory é um programa de pesquisa científica líder em astronomia solar, nos Estados Unidos, tendo, como missão, providenciar um conhecimento avançado do Sol, enquanto objeto astronómico e, também, como a fonte que mais influencia e condiciona a vida terrestre. Com sede na universidade do Colorado, em Boulder, possui dois centros de pesquisa, localizados em Sacramento Peak, no Novo México, e em Kitt Peak, no estado do Arizona. A Rede de Rádio Telescópio Solar é formada por quatro observatórios que estão situados em Palehua, no Hawaii (EUA).

Assim, de acordo com o estudo teórico feito, teremos duas margens dependentes: o número de manchas solares na região de Boulder e o número de manchas solares na região de Palehua. Cada série contém 104 observações, onde, cada valor é resultado da soma do número de observações ao longo de sete dias. Estes dados foram cedidos pela autora de [11] e encontram-se *online* no sítio do *National Geophysical Data Center* (<https://ngdc.noaa.gov/>). Na Figura 5.3 estão representadas as trajetórias relativas a cada margem.

As estatísticas relevantes de cada uma das séries, assim como a correlação cruzada, encontram-se na tabela seguinte.

Estatísticas	Boulder	Palehua
Média	14.837	17.731
Variância	19.769	26.005
$\rho(1)$	0.331	0.334
$\tilde{\rho}(0)$	0.502	

Tabela 5.3 Estatísticas principais das duas séries

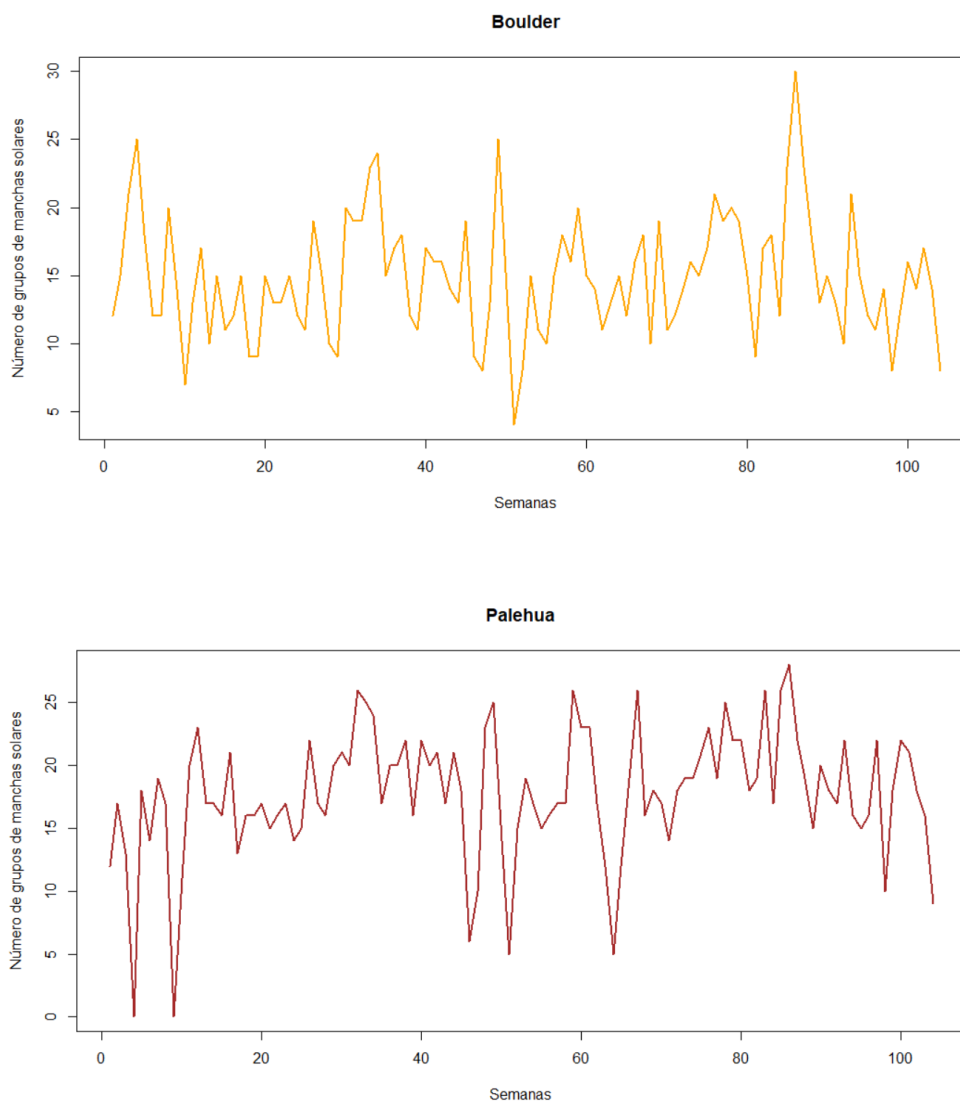


Fig. 5.3 Trajetórias relativas ao número de grupos de manchas solares nas respectivas regiões

Recorrendo ao *software R*, foi testada a estacionaridade de cada uma das séries marginais, usando o teste *KPSS* (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin). Em ambos os casos, o p-valor, superior a 0.1, indica a compatibilidade dos dados com esta hipótese.

Salientamos que, para cada modelo de séries temporais estacionário, as autocorrelações e as autocorrelações parciais se determinam mutuamente ([3], p. 73). Tendo em conta que as autocorrelações do modelo *INAR(1)* são iguais às do modelo *AR(1)* real, o mesmo sucede com as autocorrelações parciais, isto é, anulam-se a partir da ordem 2 ([3], p. 120).

Assim, para estes dados, calculámos as funções de autocorrelação (ACF) e de autocorrelação parcial (PACF) de cada série, de modo a identificar o número de coeficientes de autoregressão presentes em cada margem. Os correlogramas encontram-se na Figura 5.4. Em [11], prova-se que, apesar de as primeiras três autocorrelações parciais da série relativa a Boulder serem significativas, a formulação

$INAR(1)$ é preferível à $INAR(3)$. Quanto à série respeitante a Palehua, os correlogramas sustentam uma modelação autorregressiva de ordem 1.

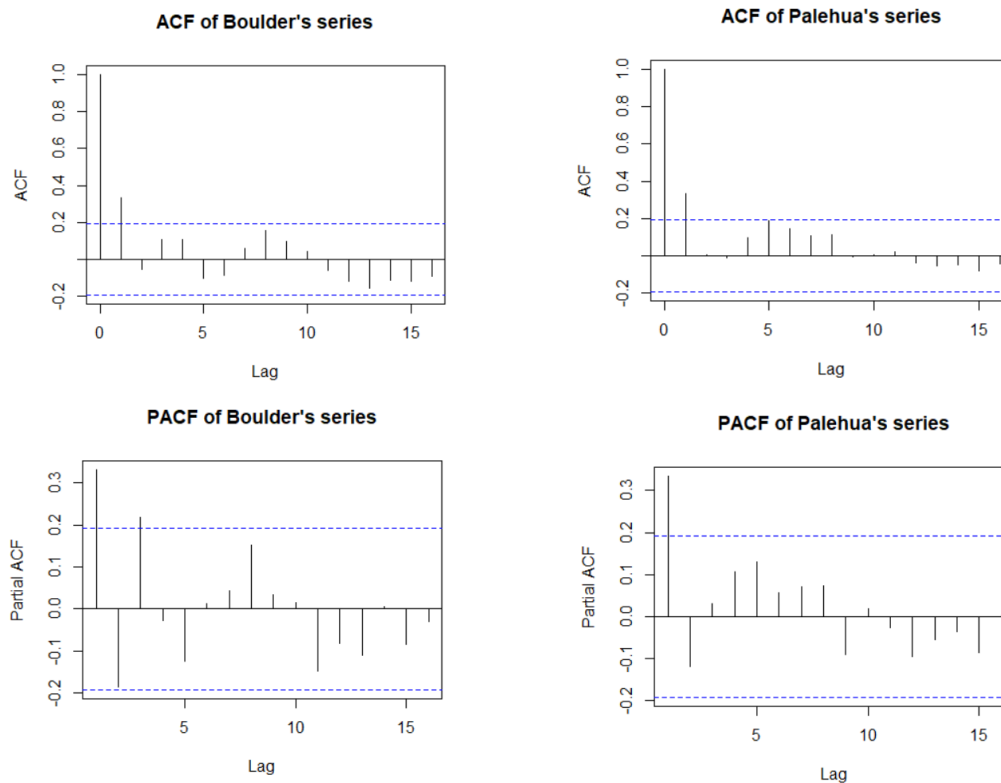


Fig. 5.4 Correlogramas e correlogramas parciais de cada uma das séries

Na Tabela 5.4 estão apresentadas as estimativas obtidas pelos dois métodos de estimação estudados para uma série cujas inovações seguem uma lei $PB(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$.

	ESTIMATIVAS				
	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\phi}$
Yule Walker	0.331	0.334	9.920	11.810	10.034
M.Q.Cond.	0.249	0.261	11.266	13.245	9.730

Tabela 5.4 Estimativas dos parâmetros do modelo

De seguida, foi feito um estudo semelhante, mas com a hipótese de as inovações da série seguirem uma lei BNB de parâmetros λ_1, λ_2 e β . Os resultados obtidos para as estimativas dos parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1$ e λ_2 foram iguais, uma vez que, como visto na Secção 4.3., a forma de se obter essas estimativas é a mesma, independentemente do facto de as inovações seguirem uma lei $PB(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$ ou $BNB(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$.

Quanto ao parâmetro β , as estimativas são dadas, segundo cada método, por

$$\hat{\beta}_{YW} = 0.086 \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_{MQC} = 0.065$$

Por outro lado, sabemos que, para uma lei $PB(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$, temos $Cov(R_{1,t}, R_{2,t}) = \phi$ e para uma $BNB(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$ temos $Cov(R_{1,t}, R_{2,t}) = \beta\lambda_1\lambda_2$. Assim,

$$\widehat{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t})_{YW} = \hat{\beta}_{YW}\hat{\lambda}_{1YW}\hat{\lambda}_{2YW} = 10.075 \approx \hat{\phi}_{YW} = 10.034$$

e

$$\widehat{Cov}(R_{1,t}, R_{2,t})_{MQC} = \hat{\beta}_{MQC}\hat{\lambda}_{1MQC}\hat{\lambda}_{2MQC} = 9.699 \approx \hat{\phi}_{MQC} = 9.730,$$

pelo que a diferença entre as estimativas das duas leis não é significativa.

Apesar de não procedermos à validação do modelo $BINAR(1)$, analisámos as séries dos resíduos de Pearson marginais dadas por

$$r_{j,t} = \frac{x_{j,t} - E(X_{j,t}|x_{j,t-1})}{\sqrt{Var(X_{j,t}|x_{j,t-1})}}, \quad j = 1, 2, t \in \{2, \dots, N\}.$$

Nos casos em que se considera que as inovações seguem leis $PB(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$ e $BNB(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$, temos, respetivamente,

$$r_{j,t} = \frac{x_{j,t} - \alpha_j x_{j,t-1} - \lambda_j}{\alpha_j(1 - \alpha_j)x_{j,t-1} + \lambda_j}$$

e

$$r_{j,t} = \frac{x_{j,t} - \alpha_j x_{j,t-1} - \lambda_j}{\alpha_j(1 - \alpha_j)x_{j,t-1} + \lambda_j(1 + \lambda_j\beta)}.$$

Se o modelo estiver bem ajustado aos dados, então os resíduos de Pearson devem comportar-se como observações provenientes de um ruído branco reduzido ([12]). Na tabela 5.5 encontram-se os valores da média e da variância correspondentes aos dois métodos de estimação usados.

	Métodos	Local	Média	Variância	Nulidade em média
POISSON	Yule Walker	Boulder	0.013	1.325	p-valor = 0.910
		Palehua	0.016	1.474	p-valor = 0.893
	M.Q.Cond.	Boulder	-0.033	1.248	p-valor = 0.767
		Palehua	-0.029	1.388	p-valor = 0.801
BIN.NEG.	Yule Walker	Boulder	0.119	0.812	p-valor = 0.893
		Palehua	0.014	0.834	p-valor = 0.873
	M.Q.Cond.	Boulder	-0.025	0.787	p-valor = 0.774
		Palehua	-0.022	0.821	p-valor = 0.808

Tabela 5.5 Estatísticas dos resíduos marginais

Além disso, na Figura 5.5 apresentamos os correlogramas da série dos resíduos correspondentes a cada caso.

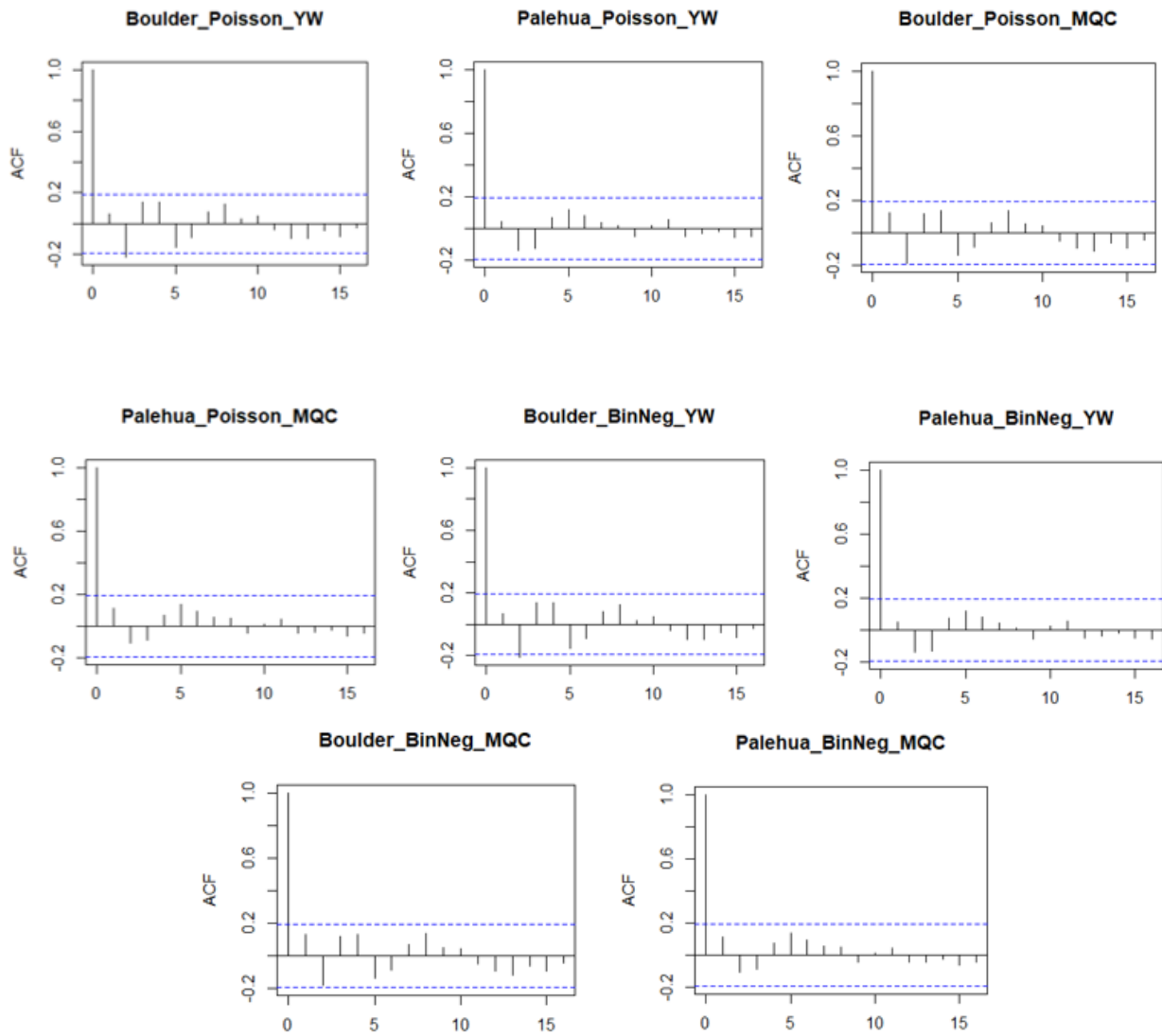


Fig. 5.5 Correlogramas dos resíduos das margens

Apesar de não ter sido validado, completamente, o modelo $BINAR(1)$, os resultados obtidos relativamente às margens do processo sustentam a possibilidade de este se poder ajustar a esta série bivariada de grupos de manchas solares.

Bibliografia

- [1] Al-Osh, M. e Alzaid, A. A. (1987). First-order integer-valued autoregressive (INAR(1)). *J. Time Series Anal.*, 8:261–275.
- [2] Gaspar Teixeira, J., da Silva Paulo, J., and Morgado, J. (1956). Sequências e séries de matrizes. *Gazeta de Matemática*, (65).
- [3] Gonçalves, E. and Lopes, N. M. (2008). *Séries Temporais. Modelações lineares e não lineares*, SPE.
- [4] Karlis, Dimitris e Pedeli, X. (2011). A bivariate INAR(1) process with application. *Statistical Modelling*, 11(4):325–349.
- [5] Karlis, Dimitris e Pedeli, X. (2013). On estimation of the bivariate poisson INAR process. *Communications in Statistics*, pages 514–533.
- [6] Latour, A. (1997). The multivariate GINAR(p) process. *Journal of Applied Probability Trust*, 29(1):228–248.
- [7] Lütkepohl, H. (1991). *Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer-Verlag.
- [8] McKenzie, E. (1985). Some simple models for discrete variate time series. *Water Res. Bullet.*, 21:645–650.
- [9] Miroslav M., A. S., Jayakumar, K., and S., H. (2012). A bivariate INAR(1) time series model with geometric marginals. *Applied Mathematics Letters*, pages 481–485.
- [10] Ristic, M., Bakouch, H., and Nastić, A. (2009). A new geometric first-order integer-valued autoregressive NGINAR(1) process. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139:2218–2226.
- [11] Silva, I. (2005). Contributions to the analysis of discrete-valued time series. *Universidade do Porto*.
- [12] Silva, I., Silva, M., and Torres, C. (2020). Inference for bivariate integer-valued moving average models based on binomial thinning operation. *Journal of Applied Statistics*, 47:2546–2564.
- [13] Simoncini, V. (2016). Computational methods for linear matrix equations. *SIAM Review*, 58:337–441.
- [14] Steutel, F. W. e van Harn, K. (1979). Discrete analogues of self-decomposability and stability. *Ann. Prob.*, 7:893–899.

Anexo A

CÓDIGO EM R

Simulação da Poisson bivariada

```
u <- rbvpois(100, 2.8, 2, 0.8)
table(u[,1], u[,2])
prop.table(table(u[,1], u[,2]))
colMeans(u)
R1 <- u[,1]
R2 <- u[,2]
```

Simulação do processo INAR(1)

```
x <- 2
for (i in 2:100) {
  x[i] <- rbinom(1, x[i-1], 0.4) + R1[i]
  meanx <- (1/100) * sum(x) }

x1 <- 0
for (i in 2:100) {
  x1[i] <- x[i-1]
  meanx1 <- (1/99) * sum(x1) }
```

```
y <- 2
for (i in 2:100) {
  y[i] <- rbinom(1, y[i-1], 0.6) + R2[i]
  meany <- (1/100) * sum(y) }
```

```
y1 <- 0
for (i in 2:100) {
  y1[i] <- y[i-1]
  meany1 <- (1/99) * sum(y1) }
```

Definição das séries temporais

```
xts = ts(x, start = 1, frequency = 1)
yts = ts(y, start = 1, frequency = 1)
```

Gráficos

```
plot(xts, col = "darkviolet", xlab = "Tempo", ylab = "Valores das
      series", lwd = 2) //serie x
lines(yts, col = "orange", lwd = 2) //serie y
```

MÉTODO DE YULE WALKER

```
rho1x <- acf(xts, lag.max = 1)
rho1y <- acf(yts, lag.max = 1)

alpha1 <- rho1x$acf[2]
alpha2 <- rho1y$acf[2]

lambda1 <- (1 - alpha1)*meanx
lambda2 <- (1 - alpha2)*meany

cov_cruzada <- ccf(xts,yts, lag.max = 1, type=c("covariance"))
cov <- cov_cruzada$acf[2]

phi <- cov * ((1 - alpha1*alpha2) * sqrt(lambda1*lambda2)) / sqrt((1
  - alpha1)*(1 - alpha2))
```

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS CONDICIONAIS

```
//para a serie x
z1<-1, z21<-1, z31<-1, z41<-1, z51<-1, z61<-1, z71<-1
for(i in 2:100) {
  z1[i] <- x[i]*x1[i]
  a = sum(z1)

  z21[i] <- x1[i]
  b = sum(z21)

  z31[i] <- x[i]
  c = sum(z31)

  z61[i] <- x1[i]*x1[i]
  d = sum(z61)
}

z41 <- (1/99)*b*c

numerador <- a - z41

e=b^2
denominador <- d - (1/99)*e
```

```

alpha11 <- numerador / denominador

//para a serie y
z2<-1, z22<-1, z32<-1, z42<-1, z52<-1, z62<-1, z72<-1
for(i in 2:100) {
  z2[i] <- y[i]*y1[i]
  a2 = sum(z2)

  z22[i] <- y1[i]
  b2 = sum(z22)

  z32[i] <- y[i]
  c2 = sum(z32)

  z62[i] <- y1[i]*y1[i]
  d2 = sum(z62)
}
z42 <- (1/99)*b2*c2

numerador2 <- a2 - z42

e2=b2^2
denominador2 <- d2 - (1/99)*e2

alpha22<- numerador2 / denominador2

lambda11 <- (1/99)*c - alpha11*(1/99)*b
lambda22 <- (1/99)*c2 - alpha22*(1/99)*b2

ct = 1
for(i in 2:100) {
  ct[i] <- (x[i] - alpha11*x1[i] - lambda11) * (y[i] - alpha22*y1[i]
    - lambda22)
  phii <- sum(ct)/99
}

```

Simulação da Binomial Negativa bivariada

```

v <- trawl::Bivariate_NBsim(100,3,0.3,0.45)
table(v[,1], v[,2])
prop.table(table(v[,1], v[,2]))
colMeans(v)
R1 <- v[,1]
R2 <- v[,2]

```

MÉTODO DE YULE WALKER

```
rho1x <- acf(xts, lag.max = 1)
rho1y <- acf(yts, lag.max = 1)

alpha1 <- rho1x$acf[2]
alpha2 <- rho1y$acf[2]

lambda1 <- (1 - alpha1)*meanx
lambda2 <- (1 - alpha2)*meany

t <- ccf(xts, yts, lag.max = 1, type = c("covariance"))
cov2 <- t$acf[2]
beta <- (1 - alpha1*alpha2)*cov2 / (lambda1*lambda2)
```

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS CONDICIONAIS

O código é idêntico ao caso de uma Poisson Bivariada, à exceção da última parte. Neste caso, não temos a variável "phii", mas sim "beta2". Assim, a obtenção do valor de $\hat{\beta}$ é dada por

```
ht = 1
for(i in 2:100) {
  ht[i] <- (x[i] - alpha11*x1[i]-lambda11)*(y[i]-alpha22*y1[i]-
    lambda22)
  beta2 <- sum(ht)/(99*lambda11*lambda22)
}
```

APLICAÇÃO - MANCHAS SOLARES

```
n = 104

valores_boulder <- BOLPAL[, "Boulder"]
valores_palehua <- BOLPAL[, "Palehua"]

mean_boulder = sum(valores_boulder)/n
mean_palehua = sum(valores_palehua)/n

//serie do numero de grupos de manchas solares com menos um valor na
  regio de Boulder
x1_boulder <- 0
for(i in 2:n){
  x1_boulder[i] <- valores_boulder[i-1]
}

//serie do numero de manchas solares com menos um valor na regio de
  Palehua
y1_palehua <- 0
for(i in 2:n) {
```

```

  y1_palehua[i] <- valores_palehua[i-1]
}

```

Definição das séries temporais

```

x_boulder = ts(valores_boulder, start = 1, frequency = 1)
y_palehua = ts(valores_palehua, start = 1, frequency = 1)

```

Estacionaridade

```

kpss.test(x_boulder, null="Trend")
kpss.test(y_palehua, null="Trend")

```

Gráficos

```

plot(x_boulder, col = "orange", main = "Boulder", xlab = "Semanas",
     ylab = "Numero de grupos de manchas solares", lwd = 2)
plot(y_palehua, col = "brown", main = "Palehua", xlab = "Semanas",
     ylab = "Numero de grupos de manchas solares", lwd = 2)

```

MÉTODO YULE WALKER

```

rho1_boulder <- acf(x_boulder, lag.max = 16)
rho1_palehua <- acf(y_palehua, lag.max = 16)

rho2_boulder <- pacf(x_boulder, main="Funcao de Autocorrelacao
  Parcial da regio de Boulder", lag.max = 16)
rho2_palehua <- pacf(y_palehua, main="Funcao de Autocorrelacao Parcial
  da regio de Palehua", lag.max = 16)

alpha1 <- rho1_boulder$acf[2]
alpha2 <- rho1_palehua$acf[2]

lambda1 <- (1 - alpha1)*mean_boulder
lambda2 <- (1 - alpha2)*mean_palehua

covariancia <- ccf(valores_boulder, valores_palehua, type = c("
  covariance"), lag.max = 1)
cov <- covariancia$acf[2]

phi <- cov * (1-alpha1*alpha2)

```

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS CONDICIONAIS

```

//para a regio de Boulder
z1<-1, z21<-1, z31<-1, z41<-1, z51<-1, z61<-1, z71<-1
for(i in 1:n) {
  z1[i] <- valores_boulder[i]*x1_boulder[i]
  a = sum(z1)
}

```

```
z21[i] <- x1_boulder[i]
b = sum(z21)

z31[i] <- valores_boulder[i]
c = sum(z31)

z61[i] <- x1_boulder[i]*x1_boulder[i]
d = sum(z61)
}
z41 <- (1/(n-1))*b*c

numerador <- a - z41

e=b^2
denominador <- d - (1/(n-1))*e

alpha1<- numerador / denominador

//para a regioa de Palehua
z2<-1, z22<-1, z32<-1, z42<-1, z52<-1, z62<-1, z72<-1
for(i in 1:n) {
  z2[i] <- valores_palehua[i]*y1_palehua[i]
  a2 = sum(z2)

  z22[i] <- y1_palehua[i]
  b2 = sum(z22)

  z32[i] <- valores_palehua[i]
  c2 = sum(z32)

  z62[i] <- y1_palehua[i]*y1_palehua[i]
  d2 = sum(z62)
}
z42 <- (1/(n-1))*b2*c2

numerador2 <- a2 - z42

e2=b2^2
denominador2 <- d2 - (1/91)*e2

alpha22<- numerador2 / denominador2

lambda11 <- (1/(n-1))*c-alpha11*(1/(n-1))*b
lambda22 <- (1/(n-1))*c2-alpha22*(1/(n-1))*b2

ct = 1
for(i in 1:n) {
```



```

    ct[i] <- (valores_boulder[i] - alpha11*x1_boulder[i]-lambda11)*(
      valores_palehua[i]-alpha22*y1_palehua[i]-lambda22)
  phii <- sum(ct)/(n-1)
}

```

Análise da série dos resíduos de Pearson

```

x <- Sol[, "Boulder"]
y <- Sol[, "Palehua"]

//Residuos Poisson
resxyw <- 1
var_condxyw <- 1
for(i in 2:104) {
  var_condxyw[i] <- 0.331*(1-0.331)*x[i-1]+9.920
  resxyw[i] <- (x[i]-0.331*x[i-1]-9.920)/(sqrt(var_condxyw[i])) }

resxyw
mean(resxyw)
sd(resxyw)

resyyw <- 1
var_condyyw <- 1
for(i in 2:104) {
  var_condyyw[i] <- 0.334*(1-0.334)*y[i-1]+11.810
  resyyw[i] <- (y[i]-0.334*y[i-1]-11.810)/(sqrt(var_condyyw[i])) }

resyyw
mean(resyyw)
sd(resyyw)

resxcls <- 0
var_condxcls <- 1
for(i in 2:104) {
  var_condxcls[i] <- 0.249*(1-0.249)*x[i-1]+11.266
  resxcls[i] <- (x[i]-0.249*x[i-1]-11.266)/(sqrt(var_condxcls[i])) }

resxcls
mean(resxcls)
sd(resxcls)

resycls <- 0
var_condycls <- 1
for(i in 2:104) {
  var_condycls[i] <- 0.261*(1-0.261)*y[i-1]+13.245
  resycls[i] <- (y[i]-0.261*y[i-1]-13.245)/(sqrt(var_condycls[i])) }

resycls

```

```

mean(resycls)
sd(resycls)

resxywts = ts(resxyw, start = 1, frequency = 1)
acf(resxywts, plot = TRUE)
rhores1<-acf(resxywts, main = "Boulder_Poisson_YW", lag.max = 16)

resyywts = ts(resyyw, start = 1, frequency = 1)
acf(resxywts, plot = TRUE)
rhores2 <- acf(resyywts, main = "Palehua_Poisson_YW", lag.max = 16)

resxclsts = ts(resxcls, start = 1, frequency = 1)
acf(resxclsts, plot = TRUE)
rhores3 <- acf(resxclsts, main = "Boulder_Poisson_MQC",lag.max = 16)

resyclsts = ts(resycls, start = 1, frequency = 1)
acf(resyclsts, plot = TRUE)
rhores4 <- acf(resyclsts, main = "Palehua_Poisson_MQC", lag.max = 16)

//Residuos Binomais Negativos
resxyw <- 1
var_condxyw <- 1
for(i in 2:104) {
  var_condxyw[i] <- 0.331*(1-0.331)*x[i-1]+9.920*(1+9.920*0.086)
  resxyw[i] <- (x[i]-0.331*x[i-1]-9.920)/(sqrt(var_condxyw[i])) }
resxyw
mean(resxyw)
sd(resxyw)

resyyw <- 1
var_condyyw <- 1
for(i in 2:104) {
  var_condyyw[i] <- 0.334*(1-0.334)*y[i-1]+11.810*(1+11.810*0.086)
  resyyw[i] <- (y[i]-0.334*y[i-1]-11.810)/(sqrt(var_condyyw[i])) }
resyyw
mean(resyyw)
sd(resyyw)

resxcls <- 0
var_condxcls <- 1
for(i in 2:104) {
  var_condxcls[i] <- 0.249*(1-0.249)*x[i-1]+11.266*(1+11.266*0.065)
  resxcls[i] <- (x[i]-0.249*x[i-1]-11.266)/(sqrt(var_condxcls[i])) }
resxcls
mean(resxcls)
sd(resxcls)

resycls <- 0

```

```
var_condycls <- 1
for(i in 2:104) {
  var_condycls[i] <- 0.261*(1-0.261)*y[i-1]+13.245*(1+13.245*0.065)
  resycls[i] <- (y[i]-0.261*y[i-1]-13.245)/(sqrt(var_condycls[i])) }
resycls
mean(resycls)
sd(resycls)

resxywts = ts(resxyw, start = 1, frequency = 1)
acf(resxywts, plot = TRUE)
rhores1 <- acf(resxywts, main = "Boulder_BinNeg_YW",lag.max = 16)

resyywts = ts(resyyw, start = 1,frequency = 1)
acf(resxywts, plot = TRUE)
rhores2 <- acf(resyywts, main = "Palehua_BinNeg_YW",lag.max = 16)

resxclsts = ts(resxcls, start = 1, frequency = 1)
acf(resxclsts, plot = TRUE)
rhores3 <- acf(resxclsts, main = "Boulder_BinNeg_MQC", lag.max = 16)

resyclsts = ts(resycls, start=1, frequency = 1)
acf(resyclsts, plot = TRUE)
rhores4<-acf(resyclsts, main = "Palehua_BinNeg_MQC", lag.max = 16)
```