



FCTUC DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Análise do comportamento elástico de colunas planas com contraventamentos discretos

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil na Especialidade de Estruturas

Autor

Marta Daniela Fonseca Alves

Orientadores

Doutor Anísio Alberto Martinho de Andrade

Doutor Paulo Manuel Mendes Pinheiro da Providência e Costa

Esta dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor, não tendo sofrido correções após a defesa em provas públicas. O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer responsabilidade pelo uso da informação apresentada

Coimbra, Julho, 2016

AGRADECIMENTOS

A presente dissertação pretende encerrar um percurso académico muito ambicionado. Extenso e intenso por todas as situações adversas ocorridas, bem ou mal ultrapassadas. Mas efectivamente completo. Assim, quero deixar um especial agradecimento:

Aos orientadores, Professor Doutor Anísio Andrade e Professor Doutor Paulo Providência, por tornarem este momento possível. Em particular ao Professor Doutor Anísio Andrade, a quem exprimo a minha mais viva e cordial gratidão pelo incansável apoio, dedicação e inteira disponibilidade demonstrada ao longo de todo o desenvolvimento deste trabalho. E, fundamentalmente, pelos conhecimentos transmitidos, quer nesta fase em particular, quer anteriormente em disciplinas do plano de estudos.

Aos meus colegas, todos sem excepção. Quer os que participaram e contribuíram positivamente, quer negativamente (de um outro ponto de vista positivamente, pois “o que não nos mata, torna-nos mais fortes”) neste percurso, por todos os momentos partilhados.

Ao Gonçalo – o colega, o amigo, o namorado – pelo apoio, paciência e carinho diário. Pela constante transmissão de força e confiança em todos os momentos.

À minha mãe, Helena, pelo apoio, esforço e enorme confiança que sempre depositou em mim.

Ao meu pai, António, onde quer que esteja, pela força transmitida nos momentos certos. Pelos valores transmitidos nos anos de vida possíveis. E, sobretudo, por ter sido a minha fonte de força, inspiração e motivação no decorrer deste percurso.

RESUMO

Nesta dissertação estuda-se o comportamento elástico de colunas planas com contraventamento discretos. Consideram-se colunas perfeitas e colunas com uma configuração indeformada não rectilínea. Os contraventamentos são modelados por intermédio de molas elásticas lineares, de translação ou de rotação (com uma rigidez eventualmente infinita, o que significa que o deslocamento generalizado correspondente está impedido). Desprezam-se as deformações por esforço transversal na coluna e adopta-se uma relação linearizada deslocamento transversal-curvatura, válida para pequenas rotações. Os problemas, perfeito e imperfeito, são primeiro formulados matematicamente em termos gerais. Com o objectivo de ilustrar a influência da posição e rigidez dos contraventamentos de translação, realiza-se depois um estudo analítico detalhado de dois casos particulares – colunas prismáticas em compressão uniforme, simplesmente apoiadas nas extremidades (podendo o apoio simples ser rígido ou flexível) e com um contraventamento translacional intermédio, igualmente rígido ou flexível, localizado numa posição arbitrária do vão. Para as colunas perfeitas, determinam-se as cargas críticas e os correspondentes modos críticos de instabilidade. Estabelecem-se as condições necessárias para um contraventamento total, situação em que o modo crítico de instabilidade tem um ponto nodal na secção contraventada. Para as colunas imperfeitas, avaliam-se os deslocamentos transversais e as forças no contraventamento e apoio flexíveis em função do nível de compressão aplicado. Para este efeito, consideram-se dois tipos de configuração indeformada, uma com a forma do modo crítico de instabilidade da coluna perfeita correspondente e outra com uma forma simétrica em relação à secção de meio vão, descrita por uma função quadrática.

ABSTRACT

An investigation on the elastic behaviour of discretely braced planar columns

This dissertation addresses the elastic behaviour of discretely braced planar columns. Both perfect columns and columns with an initial out-of-straightness are investigated. The braces are modelled as linearly elastic springs, either translational or rotational (possibly with an infinitely large stiffness, in which case the corresponding generalized displacement is prevented). Shear deformations in the column are neglected and a linearized transverse displacement-curvature relation, valid for small rotations, is adopted. The perfect and imperfect problems are first formulated mathematically in general terms. To examine the influence of the position and stiffness of translational braces, a detailed analytical study of two particular cases is then carried out. These particular cases concern prismatic columns in uniform compression, simply supported at the ends (with flexible or perfectly rigid simple support), and provided with a translational brace, also flexible or perfectly rigid, located at an arbitrary position of the span. For perfect columns, critical loads and the corresponding critical buckling modes are determined; necessary conditions for full bracing are derived. For imperfect columns, the transverse displacements and forces in the flexible brace and flexible support are evaluated as a function of the level of applied compressive load. To this end, two types of initial out-of-straightness are assumed, one with the shape of the critical buckling mode of the corresponding perfect column and the other with a symmetrical shape with respect to the middle section, described by a quadratic function.

ÍNDICE

| | |
|--|-----|
| AGRADECIMENTOS | i |
| RESUMO | ii |
| ABSTRACT | iii |
| ÍNDICE..... | iv |
| SIMBOLOGIA | v |
| Letras latinas minúsculas..... | v |
| Letras latinas maiúsculas | vi |
| Letras gregas..... | vii |
| 1 INTRODUÇÃO..... | 1 |
| 1.1 Enquadramento geral | 1 |
| 1.2 Objectivos e âmbito da dissertação..... | 3 |
| 1.3 Organização da dissertação..... | 4 |
| 2 COLUNAS PERFEITAS | 5 |
| 2.1 Problema geral e sua formulação matemática | 5 |
| 2.2 Exemplos ilustrativos..... | 9 |
| 2.2.1 Exemplo 1..... | 10 |
| 2.2.2 Exemplo 2..... | 18 |
| 3 COLUNAS IMPERFEITAS | 26 |
| 3.1 Problema geral e sua formulação matemática | 26 |
| 3.2 Exemplos ilustrativos..... | 29 |
| 3.2.1 Exemplo 1..... | 29 |
| 3.2.2 Exemplo 2..... | 36 |
| 4 CONCLUSÃO..... | 42 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 45 |

SIMBOLOGIA

Letras latinas minúsculas

c – Rigidez de um contraventamento rotacional

c_i – Rigidez do contraventamento rotacional número i

\tilde{c} – Rigidez adimensional de um contraventamento rotacional

\tilde{c}_i – Rigidez adimensional do contraventamento rotacional número i

e_0 – Amplitude da imperfeição geométrica

k – Rigidez de um contraventamento translacional

k_i – Rigidez do contraventamento translacional número i

\tilde{k} – Rigidez adimensional de um contraventamento translacional

\tilde{k}_i – Rigidez adimensional do contraventamento translacional número i

n – Número de contraventamentos intermédios

r – Menor raiz positiva da equação $\tan(u) - u = 0$

w – Deslocamento transversal

w_i – Deslocamento transversal no tramo i

\tilde{w} – Deslocamento transversal adimensional

\tilde{w}_i – Deslocamento transversal adimensional no tramo i

w_0 – Imperfeição geométrica

\tilde{w}_0 – Imperfeição geométrica adimensional

$w_{0,i}$ – Imperfeição geométrica no tramo i

$\tilde{w}_{0,i}$ – Imperfeição geométrica adimensional no tramo i

x, z – Sistema de eixos Cartesiano

Letras latinas maiúsculas

A_1, A_2, A_3 e A_4 – Constantes

B_1, B_2, B_3 e B_4 – Constantes

EI_i – Rigidez de flexão da secção transversal do tramo i

F_s – Força num contraventamento intermédio

$F_{s,i}$ – Força no contraventamento intermédio i

F_z – Força segundo z

L – Comprimento total de uma coluna

M_b – Momento em relação a um ponto b

M_i – Distribuição de momentos flectores no tramo i

P – Carga axial de compressão numa coluna

P_i – Carga axial de compressão aplicada na extremidade direita do tramo i

\tilde{P} – Carga axial de compressão adimensional numa coluna

\tilde{P}_i – Carga axial de compressão adimensional na extremidade direita do tramo i

$P_b^{(m)}$ – Cargas de bifurcação de uma coluna

$\tilde{P}_b^{(m)}$ – Cargas de bifurcação adimensionais de uma coluna

P_{cr} – Menor carga de bifurcação de uma coluna; carga crítica

\tilde{P}_{cr} – Carga crítica adimensional de uma coluna

$\tilde{P}_{cr}^{(i)}$ – Carga crítica adimensional da coluna representada na Figura 2.15, num modo com ($i = 1$) ou sem ($i = 2$) deslocamento transversal relativo das extremidades

Q_i – Distribuição de esforços de corte no tramo i (definidos perpendicularmente à configuração rectilínea ideal)

Letras gregas

α – Parâmetro que define a posição de um contraventamento ao longo do vão

α_i – Parâmetro que define a posição do contraventamento i ao longo do vão

χ_i – Curvatura no tramo i

$\chi_{0,i}$ – Curvatura no tramo i de uma coluna imperfeita na configuração indeformada

δ – Deslocamento transversal relativo

ξ – Abcissa normalizada

1 INTRODUÇÃO

1.1 Enquadramento geral

O dimensionamento e a verificação da segurança de estruturas esbeltas são frequentemente condicionados por considerações de estabilidade. No caso particular de colunas – peças lineares submetidas a esforços de compressão –, é necessário garantir uma resistência adequada à encurvadura por flexão ou varejamento. Quando se verifica que esta resistência é insuficiente, o projectista tem essencialmente duas alternativas à sua disposição: utilizar uma peça menos esbelta (e geralmente mais pesada) ou adoptar um sistema de contraventamento que restrinja as deformações de flexão que ocorrem na encurvadura.

A concepção geral e a pormenorização dos sistemas de contraventamento de colunas variam consideravelmente. No entanto, na sua maioria, estes sistemas podem ser convenientemente modelados por intermédio de molas elásticas lineares (eventualmente com rigidez infinita), de translação e de rotação, dispostas de forma contínua ou discreta ao longo da coluna (Trahair e Nethercot, 1984). A Figura 1.1 mostra um exemplo esquemático de contraventamento de uma coluna.

Independentemente do seu tipo e disposição, os elementos de contraventamento de uma coluna devem possuir rigidez e resistência adequadas à sua função. Como se verá neste trabalho, a rigidez dos elementos de contraventamento está directamente relacionada com o acréscimo de carga crítica elástica que a coluna contraventada exhibe em relação à situação não contraventada. Por outro lado, os elementos de contraventamento devem ser capazes de suportar com segurança as forças que lhes são transmitidas pela coluna contraventada. A avaliação destas forças obriga à consideração das (inevitáveis) imperfeições na coluna.

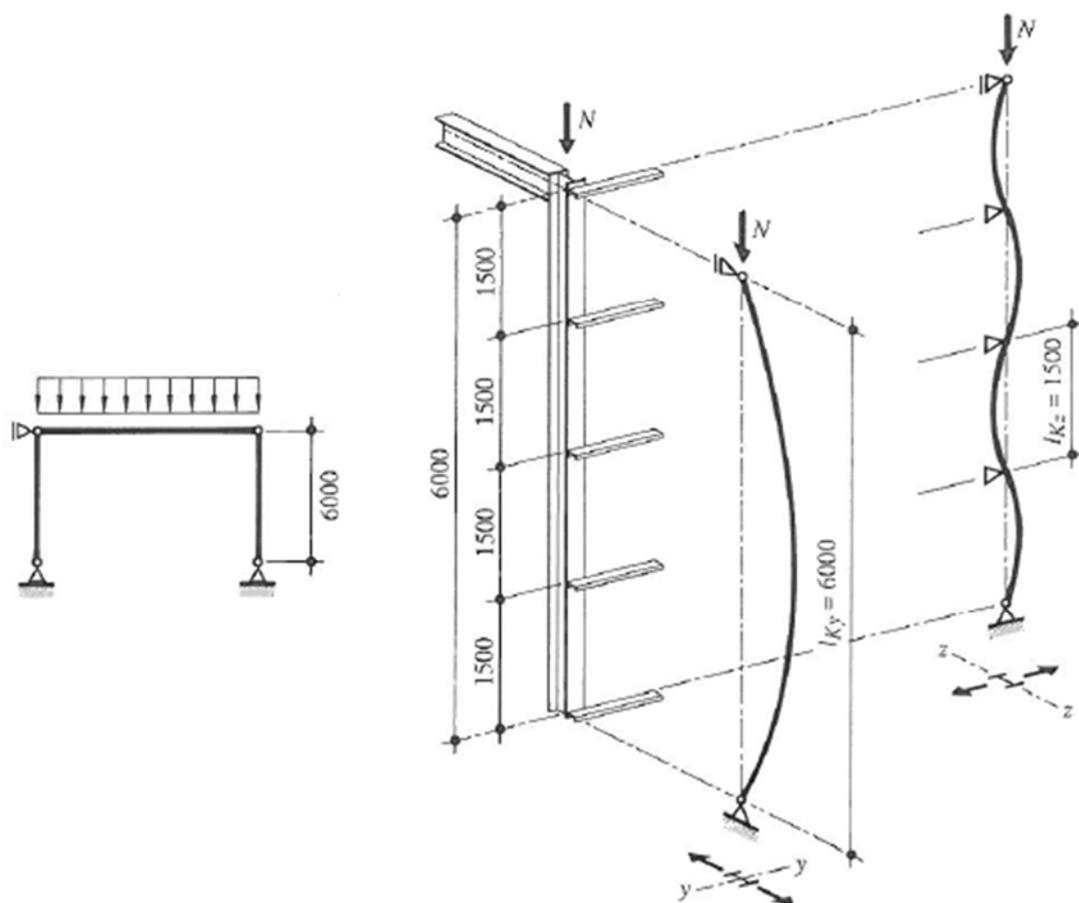


Figura 1.1 – Exemplo esquemático de uma coluna com contraventamentos transversais rígidos no plano principal de menor inércia (Hirt *et al.*, 2015)

O estudo do comportamento elástico de colunas com contraventamentos discretos – o tema desta dissertação – constitui um capítulo clássico da Teoria da Estabilidade (*e.g.*, Timoshenko e Gere, 1961). É importante distinguir entre colunas perfeitas ou ideais, de eixo inicialmente recto e comprimidas por cargas que actuam exactamente segundo esse eixo, e colunas imperfeitas ou reais, em que pelo menos uma daquelas condições é violada. Nas primeiras, estados de equilíbrio que envolvam flexão da coluna apenas são possíveis para determinados valores das cargas de compressão; estamos pois perante um problema de bifurcação do equilíbrio, no qual se pretende determinar aqueles valores das cargas e, complementarmente, as formas dos modos de instabilidade que lhes estão associados. Nas colunas reais, as deformações de flexão surgem desde o início do carregamento, aumentando de forma muito significativo na proximidade da primeira carga de bifurcação da coluna perfeita

correspondente; trata-se do que alguns autores designam como instabilidade por divergência (*e.g.*, Dias da Silva, 2013).

As primeiras investigações dedicadas a este tema incidiram sobre colunas perfeitas e contraventamentos igualmente espaçados. Como exemplos paradigmáticos, referem-se os trabalhos de Tu (1944), Budiansky *et al.* (1948) e Saibel (1952). Os primeiros estudos de colunas contraventadas imperfeitas datam de meados dos anos 50 do século passado (Zuk, 1956) e também admitem contraventamentos igualmente espaçados. Trahair e Nethercot (1984) apresentam uma síntese destas investigações. A análise sistemática de colunas, perfeitas e imperfeitas, com contraventamentos discretos localizados em posições arbitrárias do vão é bastante mais recente, destacando-se os artigos de Stanway *et al.* (1992) e de Plaut e Yang (1993, 1995). Muitas das disposições relativas a colunas contraventadas que se encontram nas especificações técnicas de estruturas metálicas (Ziemian, 2010) baseiam-se nos princípios e métodos simplificados desenvolvidos por Winter (1960), que realçou a inter-relação entre a rigidez dos elementos de contraventamento e as forças que neles se desenvolvem. O trabalho pioneiro de Winter foi reavaliado e generalizado por Yura (1996).

1.2 Objectivos e âmbito da dissertação

Nesta dissertação pretende-se estudar o comportamento, em regime elástico, de colunas planas com contraventamento discretos. Consideram-se colunas perfeitas e colunas com uma configuração indeformada não rectilínea. Os contraventamentos são modelados por intermédio de molas elásticas lineares, de translação ou de rotação, com uma rigidez finita ou infinita. Desprezam-se as deformações por esforço transversal na coluna (modelo de Euler) e adopta-se uma relação linearizada deslocamento transversal-curvatura, válida para pequenas rotações. Os problemas, perfeito e imperfeito, são primeiro formulados matematicamente em termos gerais, procedendo-se depois ao estudo analítico detalhado de dois casos particulares – colunas prismáticas em compressão uniforme, simplesmente apoiadas nas extremidades (podendo o apoio simples ser rígido ou flexível) e com um contraventamento translacional intermédio, igualmente rígido ou flexível, localizado numa posição arbitrária do vão. Para as colunas perfeitas, determinam-se as cargas críticas e os correspondentes modos críticos de instabilidade. Para as colunas imperfeitas, avaliam-se os deslocamentos transversais e as

forças no contraventamento e apoio flexíveis em função do nível de compressão aplicado; a configuração indeformada adoptada tem (i) a forma do modo crítico de instabilidade da coluna perfeita correspondente ou (ii) uma forma simétrica em relação à secção de meio vão, descrita por uma função quadrática.

1.3 Organização da dissertação

A dissertação encontra-se dividida em quatro capítulos, o primeiro dos quais é a presente Introdução.

O corpo da dissertação é constituído pelos capítulos 2 e 3, o primeiro relativo a colunas perfeitas e o segundo a colunas imperfeitas. A estrutura destes dois capítulos é semelhante. Começa-se por descrever e formular matematicamente um “problema geral”, que consiste numa coluna com (i) secção constante por troços, (ii) múltiplos contraventamentos intermédios, de translação e rotação, flexíveis ou infinitamente rígidos, localizados arbitrariamente ao longo do vão, (iii) múltiplas forças de compressão aplicadas e (iv) condições de apoio que permitem simular os constrangimentos impostos nas extremidades pelos restantes elementos de uma estrutura de que a coluna seja parte integrante. De seguida, procede-se ao estudo analítico de dois casos particulares do “problema geral”. Estes casos particulares permitem ilustrar a influência da posição e rigidez dos contraventamentos de translação.

No quarto capítulo e último capítulo são apresentadas as principais conclusões retiradas deste trabalho e algumas sugestões para desenvolvimentos futuros.

2 COLUNAS PERFEITAS

As colunas perfeitas ou ideais não passam de uma abstracção teórica, mas o seu estudo revela-se indispensável para uma plena compreensão do comportamento das colunas reais.

2.1 Problema geral e sua formulação matemática

Considera-se a coluna esquematizada nas Figuras 2.1 e 2.2. Trata-se de uma coluna de Euler plana, com comprimento total L e eixo perfeitamente recto. As condições de apoio nas extremidades são as consideradas por Reis e Camotim (2001) na secção “colunas com apoios elásticos”: o deslocamento transversal na extremidade esquerda está impedido, o deslocamento transversal e a rotação nas duas extremidades estão restringidos por molas de comportamento elástico linear (uma rigidez infinita das molas significa que o deslocamento generalizado correspondente está impedido). A coluna dispõe ainda de n contraventamentos intermédios, localizados a distâncias $\alpha_i L$ da extremidade esquerda, com $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < L$. Cada contraventamento intermédio é modelado através de duas molas elásticas lineares, uma de translação e outra de rotação, caracterizadas pelas rigidezes k_i e c_i ($0 \leq k_i \leq +\infty$, $0 \leq c_i \leq +\infty$, $i = 1, \dots, n$). Os n contraventamentos intermédios dividem a coluna em $n + 1$ tramos prismáticos.¹ A rigidez de flexão da secção transversal do tramo i é designada por EI_i , $i = 1, \dots, n + 1$. A coluna é comprimida concentricamente por cargas conservativas $P_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n + 1$, aplicadas na extremidade direita de cada um dos tramos.

¹ A coluna é, portanto, prismática por troços, mas não necessariamente prismática.

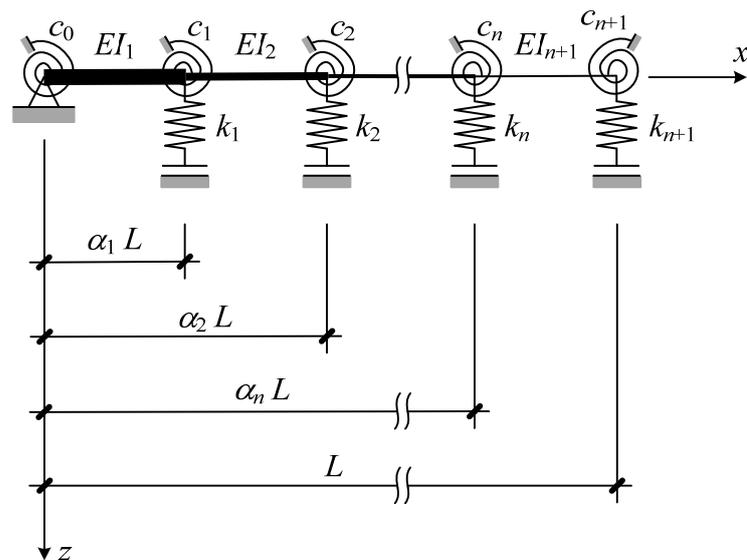


Figura 2.1 – Problema geral – Sistema de referência, geometria e características mecânicas

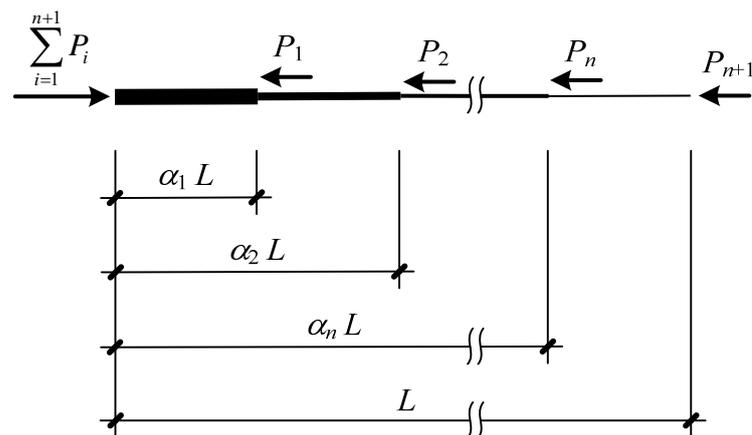


Figura 2.2 – Problema geral – Forças exteriores

Pretende-se determinar os valores das cargas P_i para os quais são possíveis configurações de equilíbrio com deslocamentos transversais $w(x)$ não nulos. Em suma, pretende-se efectuar a análise linear de estabilidade da coluna (Reis e Camotim, 2001).

Para formular matematicamente o problema, considere-se o equilíbrio de um troço infinitesimal do tramo i da coluna ($\alpha_{i-1}L < x < \alpha_i L$, convencionando-se que $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_{n+1} = 1$) numa configuração ligeiramente flectida, tal como indicado na Figura 2.3. Designe-se por w_i a restrição da função $w: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ ao intervalo $[\alpha_{i-1}L, \alpha_i L]$. De forma análoga, M_i e Q_i representam, respectivamente, a distribuição de momentos flectores e de esforços de corte

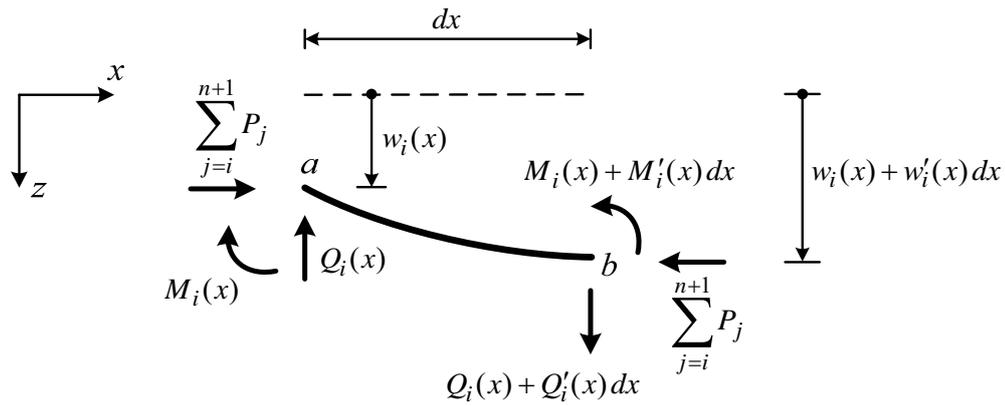


Figura 2.3 – Problema geral – Equilíbrio de um trecho infinitesimal do tramo i da coluna

(estes últimos definidos perpendicularmente à configuração retilínea inicial) no interior do tramo i . Tem-se

$$\sum M_b = 0 \Leftrightarrow M'_i(x) dx - Q_i(x) dx - \sum_{j=i}^{n+1} P_j w'_i(x) dx = 0 \Leftrightarrow Q_i(x) = M'_i(x) - \sum_{j=i}^{n+1} P_j w'_i(x) \quad (1)$$

$$\sum F_z = 0 \Leftrightarrow Q'_i(x) = 0. \quad (2)$$

Diferenciando a primeira das duas equações anteriores em ordem a x e introduzindo o resultado na segunda equação, obtém-se

$$M''_i(x) - \sum_{j=i}^{n+1} P_j w''_i(x) = 0. \quad (3)$$

Utilizando a relação momento-curvatura elástica linear

$$M_i(x) = -EI_i \chi_i(x) \quad (4)$$

e a relação curvatura-deslocamento transversal linearizada

$$\chi_i(x) = w''_i(x), \quad (5)$$

válida para pequenas rotações (Dias da Silva, 2013), pode finalmente escrever-se

$$EI_i w_i^{(4)}(x) + \sum_{j=i}^{n+1} P_j w''_i(x) = 0, \quad \alpha_{i-1}L < x < \alpha_i L, \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (6)$$

Nas extremidades da coluna ($x=0$ e $x=L$), as condições de fronteira tomam a forma (Figura 2.4)

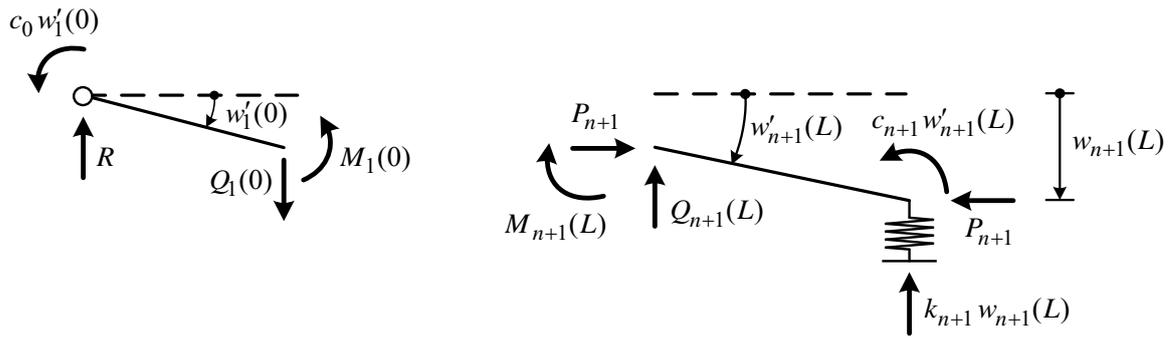


Figura 2.4 – Problema geral – Condições de fronteira nas extremidades da coluna

$$w_1(0) = 0 \quad (7)$$

$$M_1(0) = -c_0 w_1'(0) \Leftrightarrow EI_1 w_1''(0) = c_0 w_1'(0) \text{ se } c_0 \neq +\infty \quad \text{ou} \quad w_1'(0) = 0 \text{ se } c_0 = +\infty \quad (8)$$

$$M_{n+1}(L) = c_{n+1} w_{n+1}'(L) \Leftrightarrow -EI_{n+1} w_{n+1}''(L) = c_{n+1} w_{n+1}'(L) \text{ se } c_{n+1} \neq +\infty$$

$$\text{ou} \quad w_{n+1}'(L) = 0 \text{ se } c_{n+1} = +\infty \quad (9)$$

$$Q_{n+1}(L) = -k_{n+1} w_{n+1}(L) \Leftrightarrow EI_{n+1} w_{n+1}'''(L) + P_{n+1} w_{n+1}'(L) = k_{n+1} w_{n+1}(L) \text{ se } k_{n+1} \neq +\infty$$

$$\text{ou} \quad w_{n+1}(L) = 0 \text{ se } k_{n+1} = +\infty. \quad (10)$$

Num contraventamento intermédio, é necessário satisfazer as seguintes condições de continuidade e/ou salto (Figura 2.5):

$$w_i(\alpha_i L) = w_{i+1}(\alpha_i L) \quad (11)$$

$$w_i'(\alpha_i L) = w_{i+1}'(\alpha_i L) \quad (12)$$

$$M_i(\alpha_i L) - c_i w_i'(\alpha_i L) = M_{i+1}(\alpha_i L) \Leftrightarrow EI_i w_i''(\alpha_i L) + c_i w_i'(\alpha_i L) = EI_{i+1} w_{i+1}''(\alpha_i L) \text{ se } c_i \neq +\infty$$

$$\text{ou} \quad w_i'(\alpha_i L) = 0 \text{ se } c_i = +\infty \quad (13)$$

$$Q_i(\alpha_i L) + k_i w_i(\alpha_i L) = Q_{i+1}(\alpha_i L) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow EI_i w_i'''(\alpha_i L) + P_i w_i'(\alpha_i L) - k_i w_i(\alpha_i L) = EI_{i+1} w_{i+1}'''(\alpha_i L) \text{ se } k_i \neq +\infty$$

$$\text{ou} \quad w_i(\alpha_i L) = 0 \text{ se } k_i = +\infty, \quad i = 1, \dots, n. \quad (14)$$

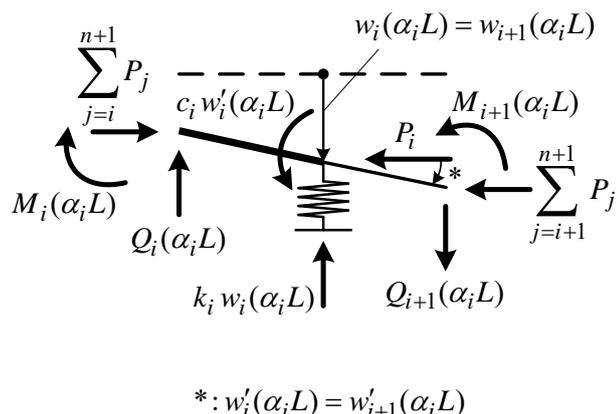


Figura 2.5 – Problema geral – Condições de continuidade e/ou salto num contraventamento intermédio

O problema geral relativo a colunas perfeitas pode então ser enunciado da seguinte forma: determinar os valores não negativos das $n+1$ cargas P_i para os quais existem funções não nulas $w: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, também a determinar, cujas restrições aos $n+1$ intervalos $[\alpha_{i-1}L, \alpha_i L]$ satisfazem as $n+1$ equações diferenciais lineares e homogêneas de quarta ordem (6), as 4 condições de fronteira (7)-(10) e as $4n$ condições de continuidade ou salto (11)-(14).

2.2 Exemplos ilustrativos

Tendo formulado o problema da análise linear de estabilidade de colunas elásticas ideais com contraventamentos discretos numa generalidade que se julga adequada à maioria das aplicações em engenharia de estruturas, torna-se agora mais útil e esclarecedor, na opinião da autora, fazer incidir o foco da discussão sobre a solução analítica detalhada de alguns casos particulares. Consideram-se apenas colunas solicitadas por uma única carga aplicada e com um único contraventamento intermédio, do tipo translacional. Os problemas com carregamentos multi-paramétricos e um estudo aprofundado dos efeitos de contraventamentos rotacionais são remetidos para os desenvolvimentos futuros. Sempre que possível, os resultados obtidos são comparados com os disponíveis na literatura.

2.2.1 Exemplo 1

Como primeiro exemplo ilustrativo, considera-se a coluna prismática (secção transversal com rigidez de flexão EI) de dois tramos representada na Figura 2.6, submetida a uma compressão uniforme P . Nas secções extremas, o deslocamento transversal está impedido e a rotação é livre. A coluna dispõe de um contraventamento translacional de rigidez k (com $0 \leq k \leq +\infty$), localizado a uma distância αL da extremidade esquerda. Por razões de simetria, considera-se apenas $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Na nomenclatura do problema geral, tem-se $n=1$, $\alpha_1 = \alpha$, $k_1 = k$, $c_0 = c_1 = c_2 = 0$, $EI_1 = EI_2 = EI$, $P_1 = 0$ e $P_2 = P$. Como referem Timoshenko e Gere (1961), este modelo pode ser usado para representar a corda comprimida de uma treliça, restringida lateralmente numa localização intermédia por outro elemento da treliça.

É conveniente colocar este exemplo num formato adimensional. Para tal, considera-se a mudança de variável independente $x \mapsto \xi = \frac{1}{L}x$ e introduzem-se as funções \tilde{w}_1 , definida no intervalo $[0, \alpha]$ por $\tilde{w}_1(\xi) = \frac{1}{L}w_1(\xi L)$, e \tilde{w}_2 , definida em $[\alpha, 1]$ por $\tilde{w}_2(\xi) = \frac{1}{L}w_2(\xi L)$. A regra de derivação da função composta permite escrever

$$w_1^{(n)}(x) = \frac{1}{L^{n-1}} \tilde{w}_1^{(n)}(\xi) \quad (15)$$

$$w_2^{(n)}(x) = \frac{1}{L^{n-1}} \tilde{w}_2^{(n)}(\xi), \quad n=1, \dots, 4. \quad (16)$$

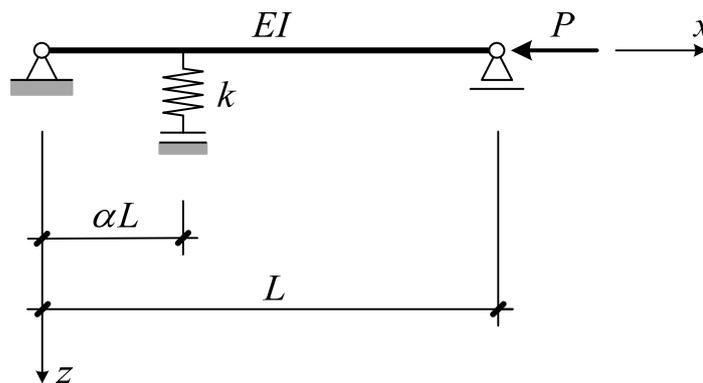


Figura 2.6 – Exemplo 1 – Definição do sistema estrutural

Definem-se ainda os quocientes adimensionais (Budiansky *et al.*, 1948)

$$\tilde{P} = \frac{PL^2}{EI} \quad (17)$$

$$\tilde{k} = \frac{kL^3}{EI}. \quad (18)$$

Chega-se assim ao seguinte enunciado: determinar os valores positivos de \tilde{P} para os quais existem funções $\tilde{w}_1 \in C^4[0, \alpha]$ e $\tilde{w}_2 \in C^4[\alpha, 1]$ que não sejam ambas identicamente nulas e que satisfaçam

$$\tilde{w}_1^{(4)}(\xi) + \tilde{P} \tilde{w}_1''(\xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \alpha \quad (19)$$

$$\tilde{w}_2^{(4)}(\xi) + \tilde{P} \tilde{w}_2''(\xi) = 0, \quad \alpha \leq \xi \leq 1 \quad (20)$$

$$\tilde{w}_1(0) = 0 \quad (21)$$

$$\tilde{w}_1''(0) = 0 \quad (22)$$

$$\tilde{w}_2(1) = 0 \quad (23)$$

$$\tilde{w}_2''(1) = 0 \quad (24)$$

$$\tilde{w}_1(\alpha) = \tilde{w}_2(\alpha) \quad (25)$$

$$\tilde{w}_1'(\alpha) = \tilde{w}_2'(\alpha) \quad (26)$$

$$\tilde{w}_1''(\alpha) = \tilde{w}_2''(\alpha) \quad (27)$$

$$-\tilde{w}_1'''(\alpha) + \tilde{k} \tilde{w}_1(\alpha) = -\tilde{w}_2'''(\alpha) \text{ se } \tilde{k} \neq +\infty \quad \text{ou} \quad \tilde{w}_1(\alpha) = 0 \text{ se } \tilde{k} = +\infty. \quad (28)$$

Para $\tilde{P} > 0$ (compressão), as equações diferenciais (19) e (20) apresentam a solução geral (Birkhoff & Rota, 1989)

$$\tilde{w}_1(\xi) = A_1 + A_2 \xi + A_3 \cos(\tilde{P}^{1/2} \xi) + A_4 \sin(\tilde{P}^{1/2} \xi), \quad 0 \leq \xi \leq \alpha \quad (29)$$

$$\tilde{w}_2(\xi) = B_1 + B_2 \xi + B_3 \cos(\tilde{P}^{1/2} \xi) + B_4 \sin(\tilde{P}^{1/2} \xi), \quad \alpha \leq \xi \leq 1. \quad (30)$$

As condições de fronteira (21) e (22) implicam então $A_1 = A_3 = 0$, pelo que (29) se reduz a

$$\tilde{w}_1(\xi) = A_2 \xi + A_4 \sin(\tilde{P}^{1/2} \xi), \quad 0 \leq \xi \leq \alpha. \quad (31)$$

As condições de fronteira (23) e (24), por sua vez, implicam $B_1 + B_2 = 0$, pelo que (30) se reduz a

$$\tilde{w}_2(\xi) = B_2(\xi - 1) + B_3 \cos(\tilde{P}^{1/2} \xi) + B_4 \sin(\tilde{P}^{1/2} \xi), \quad \alpha \leq \xi \leq 1. \quad (32)$$

Introduzindo estes resultados em (25)-(28) e (23), obtém-se um sistema linear homogéneo tendo as constantes A_2 , A_4 , B_2 , B_3 e B_4 como incógnitas:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \sin(\tilde{P}^{1/2} \alpha) & -(\alpha - 1) & -\cos(\tilde{P}^{1/2} \alpha) & -\sin(\tilde{P}^{1/2} \alpha) \\ 1 & \tilde{P}^{1/2} \cos(\tilde{P}^{1/2} \alpha) & -1 & \tilde{P}^{1/2} \sin(\tilde{P}^{1/2} \alpha) & -\tilde{P}^{1/2} \cos(\tilde{P}^{1/2} \alpha) \\ 0 & \sin(\tilde{P}^{1/2} \alpha) & 0 & -\cos(\tilde{P}^{1/2} \alpha) & -\sin(\tilde{P}^{1/2} \alpha) \\ \tilde{k} \alpha & \tilde{k} \sin(\tilde{P}^{1/2} \alpha) + \tilde{P}^{3/2} \cos(\tilde{P}^{1/2} \alpha) & 0 & \tilde{P}^{3/2} \sin(\tilde{P}^{1/2} \alpha) & -\tilde{P}^{3/2} \cos(\tilde{P}^{1/2} \alpha) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{P}^{1/2}) & \sin(\tilde{P}^{1/2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_4 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

se $\tilde{k} \neq +\infty$, ou

$$\begin{bmatrix} \alpha & \sin(\tilde{P}^{1/2} \alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \tilde{P}^{1/2} \cos(\tilde{P}^{1/2} \alpha) & -1 & \tilde{P}^{1/2} \sin(\tilde{P}^{1/2} \alpha) & -\tilde{P}^{1/2} \cos(\tilde{P}^{1/2} \alpha) \\ 0 & \sin(\tilde{P}^{1/2} \alpha) & 0 & -\cos(\tilde{P}^{1/2} \alpha) & -\sin(\tilde{P}^{1/2} \alpha) \\ 0 & 0 & \alpha - 1 & \cos(\tilde{P}^{1/2} \alpha) & \sin(\tilde{P}^{1/2} \alpha) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{P}^{1/2}) & \sin(\tilde{P}^{1/2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_4 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

se $\tilde{k} = +\infty$. Para que o sistema tenha soluções não nulas – e, portanto, para que as funções \tilde{w}_1 , \tilde{w}_2 não sejam ambas idênticamente nulas –, é necessário e suficiente que o determinante da matriz de coeficientes se anule (Santana e Queiró, 2010). Após algumas simplificações, esta condição conduz à equação transcendente

$$\tilde{P}^{3/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}) + \tilde{k} \left\{ \sin(\alpha \tilde{P}^{1/2}) \sin[(1 - \alpha) \tilde{P}^{1/2}] - \alpha(1 - \alpha) \tilde{P}^{1/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}) \right\} = 0 \quad (35)$$

se $\tilde{k} \neq +\infty$, ou

$$\sin(\alpha \tilde{P}^{1/2}) \sin[(1 - \alpha) \tilde{P}^{1/2}] - \alpha(1 - \alpha) \tilde{P}^{1/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}) = 0 \quad (36)$$

se $\tilde{k} = +\infty$. Estas equações, ditas características (Reis e Camotim, 2001), são equivalentes às obtidas por Timoshenko e Gere (1961), Brush e Almroth (1975) e Plaut e Yang (1993). Observe-se ainda que o membro esquerdo de (36) não é mais do que o coeficiente de \tilde{k} em (35).

As raízes positivas $\tilde{P}_b^{(m)}$, $m=1, 2, \dots$, da equação característica (35) – ou (36), consoante o caso –, repetidas tantas vezes quanto a sua multiplicidade algébrica e dispostas por ordem não decrescente ($0 < \tilde{P}_b^{(1)} \leq \tilde{P}_b^{(2)} \leq \dots$), definem, através de (17), as cargas de bifurcação $P_b^{(m)}$ da coluna (Reis e Camotim, 2001). A menor carga de bifurcação, $P_b^{(1)}$, da maior importância do ponto de vista estrutural, é qualificada de “crítica” e representada pelo símbolo P_{cr} . De igual forma, em termos adimensionais escreve-se $\tilde{P}_{cr} = \tilde{P}_b^{(1)}$.

Na Figura 2.7 representa-se a variação de \tilde{P}_{cr} em função da posição do contraventamento intermédio (definida pelo parâmetro α), para valores seleccionados da rigidez adimensionalizada \tilde{k} . Consta-se que:

- (i) Para $\tilde{k} = 0$, a coluna está simplesmente apoiada e, conseqüentemente, $\tilde{P}_{cr} = \pi^2$ (ou seja, $P_{cr} = \pi^2 EI / L^2$).
- (ii) Para $\tilde{k} = +\infty$, tem-se $\tilde{P}_{cr} \rightarrow r^2$ quando $\alpha \rightarrow 0$, em que $r \cong 4,4934$ é a menor raiz positiva da equação $\tan(u) - u = 0$, o que corresponde à carga crítica elástica de uma coluna uniforme encastrada-apoiada (Timoshenko e Gere, 1961). De facto, os dois apoios rígidos adjacentes funcionam como um encastramento fixo.
- (iii) Ainda para $\tilde{k} = +\infty$, tem-se $\tilde{P}_{cr} = 4\pi^2$ quando $\alpha = \frac{1}{2}$, o que corresponde à segunda carga de bifurcação de uma coluna uniforme simplesmente apoiada. Todos os valores possíveis de \tilde{P}_{cr} estão situados entre π^2 e $4\pi^2$.
- (iv) Para $\tilde{k} < +\infty$, tem-se $\tilde{P}_{cr} \rightarrow \pi^2$ quando $\alpha \rightarrow 0$, o que corresponde à carga crítica elástica de uma coluna uniforme simplesmente apoiada – o apoio elástico adjacente ao apoio rígido é totalmente ineficaz.
- (v) Qualquer que seja $\tilde{k} > 0$, a localização óptima do contraventamento, aquela para a qual \tilde{P}_{cr} atinge o seu valor máximo, é a meio vão ($\alpha = \frac{1}{2}$).

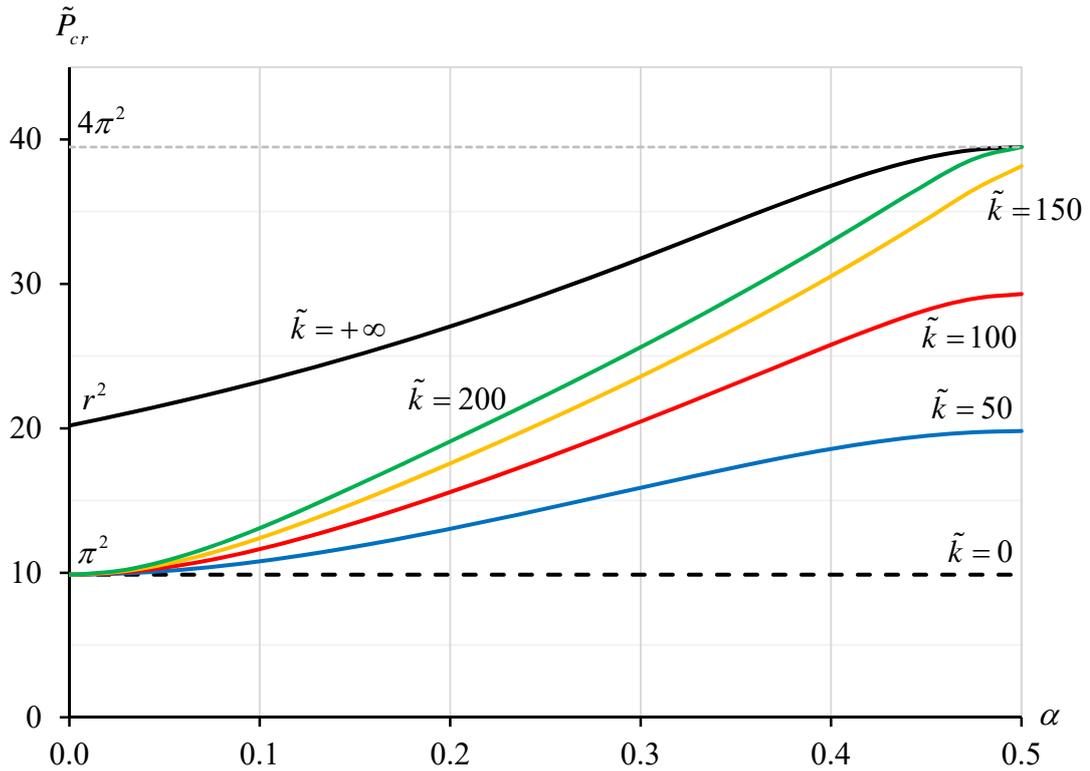


Figura 2.7 – Exemplo 1 – Variação de \tilde{P}_{cr} em função de α , para valores seleccionados de \tilde{k}

Na Figura 2.8, \tilde{P}_{cr} é representado em função de \tilde{k} , para valores fixos de α .

- (i) Para $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, verifica-se que \tilde{P}_{cr} é uma função estritamente crescente de \tilde{k} , com uma assíntota horizontal (correspondente ao valor de \tilde{P}_{cr} para $\tilde{k} = +\infty$, que é inferior a $4\pi^2$ – ver Figura 2.7).
- (ii) Para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\tilde{k} \geq 16\pi^2 (\cong 157,914)$, tem-se \tilde{P}_{cr} constante e igual a $4\pi^2$, valor correspondente ao segundo modo de encurvadura da coluna análoga não contraventada.²

² As raízes positivas da equação característica (35) são independentes de \tilde{k} se $\sin(\tilde{P}^{1/2})$ e o coeficiente de \tilde{k} se anularem simultaneamente. Tal acontece quando

$$\tilde{P}^{1/2} = n\pi \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{m}{n}$$

ou

$$\tilde{P}^{1/2} = n\pi \quad \text{e} \quad 1 - \alpha = \frac{m}{n},$$

em que m e n são inteiros positivos. A menor raiz positiva com $0 < \alpha < 1$ (isto é, com $n > m$), $\tilde{P}_{cr} = 4\pi^2$, é obtida para $\alpha = 1 - \alpha = \frac{1}{2}$. Usando a regra de Cauchy (Campos Ferreira, 1987), tem-se ainda que

$$\lim_{\tilde{P}^{1/2} \rightarrow 2\pi^-} \left(-\frac{\tilde{P}^{3/2} \sin(\tilde{P}^{1/2})}{\sin^2(\frac{1}{2}\tilde{P}^{1/2}) - \frac{1}{4}\tilde{P}^{1/2} \sin(\tilde{P}^{1/2})} \right) = 16\pi^2.$$

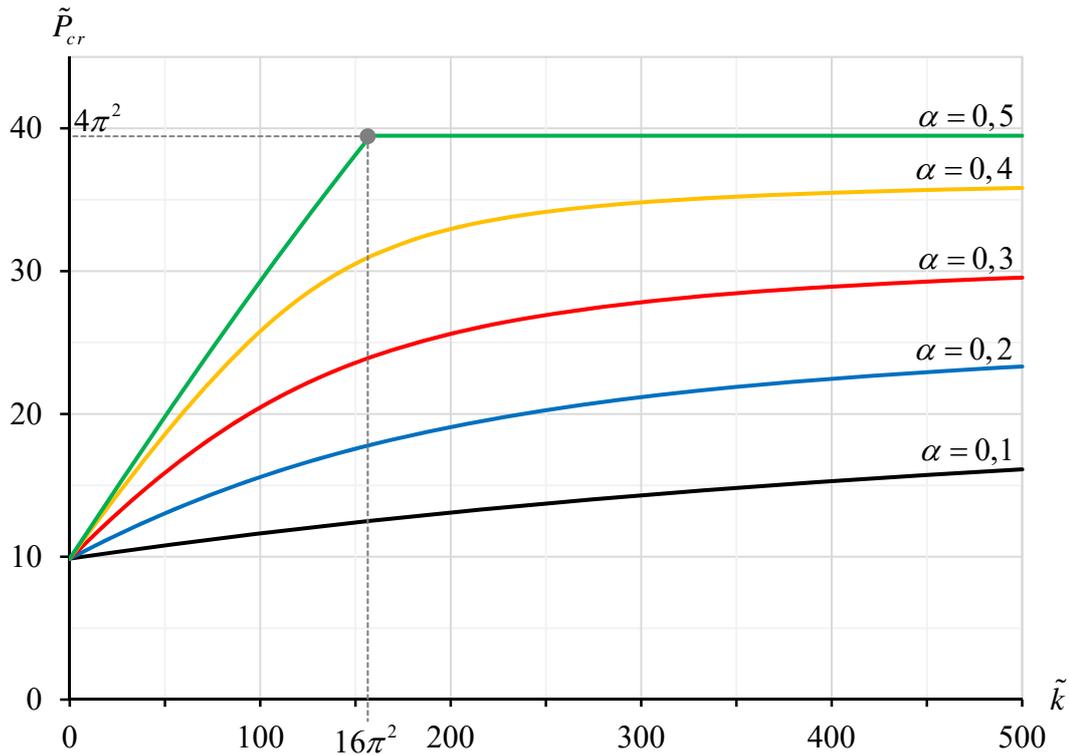


Figura 2.8 – Exemplo 1 – Variação de \tilde{P}_{cr} em função de \tilde{k} , para valores seleccionadas de α

Esta situação é designada por Winter (1960) como “contraventamento total” (“full bracing”, no original).

- (iii) Ainda para $\alpha = \frac{1}{2}$, mas agora com $0 \leq \tilde{k} \leq 16\pi^2$, verifica-se que \tilde{P}_{cr} cresce de forma praticamente linear com \tilde{k} , tendo-se $\tilde{P}_{cr} = \pi^2$ para $\tilde{k} = 0$ e $\tilde{P}_{cr} = 4\pi^2$ para $\tilde{k} = 16\pi^2$:

$$\tilde{P}_{cr} \cong \pi^2 + \frac{3}{16}\tilde{k}, \quad 0 \leq \tilde{k} \leq 16\pi^2. \quad (37)$$

Esta aproximação coincide com a proposta por Trahair & Nethercot (1984).

É interessante referir ainda que a menor raiz positiva da equação característica (35) para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\tilde{k} = 16\pi^2$ é uma raiz dupla, isto é, tanto o determinante da matriz de coeficientes em (33) como a sua primeira derivada em ordem a \tilde{P} se anulam quando $\tilde{P} = \tilde{P}_{cr} = 4\pi^2$.

Para obter o(s) modo(s) crítico(s) de instabilidade, faz-se $\tilde{P} = \tilde{P}_{cr}$ em (33) – ou (34), caso $\tilde{k} = +\infty$ – e calcula-se a solução do sistema homogéneo resultante. Sendo este sistema necessariamente indeterminado, a sua solução contém pelo menos uma incógnita livre (Santana e Queiró, 2010).

Suponha-se que existe apenas uma incógnita livre, o que corresponde ao caso genérico. Introduzindo a solução geral em (31) e (32), obtém-se uma família a um parâmetro de funções $\tilde{w}_{1,cr}$, $\tilde{w}_{2,cr}$ que, quando justapostas, definem a forma do modo crítico de instabilidade adimensionalizado (cuja amplitude é indeterminada):

$$\tilde{w}_{cr}(\xi) = \begin{cases} \tilde{w}_{1,cr}(\xi) & \text{se } 0 \leq \xi \leq \alpha \\ \tilde{w}_{2,cr}(\xi) & \text{se } \alpha \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (38)$$

Esta situação está ilustrada nas Figuras 2.9 e 2.10, nas quais a amplitude dos modos foi normalizada pela condição $|\tilde{w}_{cr}|_{\max} = 1$. Observe-se que para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\tilde{k} = 100 < 16\pi^2$, o modo crítico de instabilidade é simétrico em relação a $\xi = \frac{1}{2}$. Já para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\tilde{k} = 200 > 16\pi^2$, o modo crítico de instabilidade é definido por uma onda sinusoidal completa, sendo portanto antissimétrico em relação a $\xi = \frac{1}{2}$ e igual ao segundo modo de instabilidade da coluna análoga não contraventada (em particular, verifica-se que $\tilde{w}_{cr}(\frac{1}{2}) = 0$).

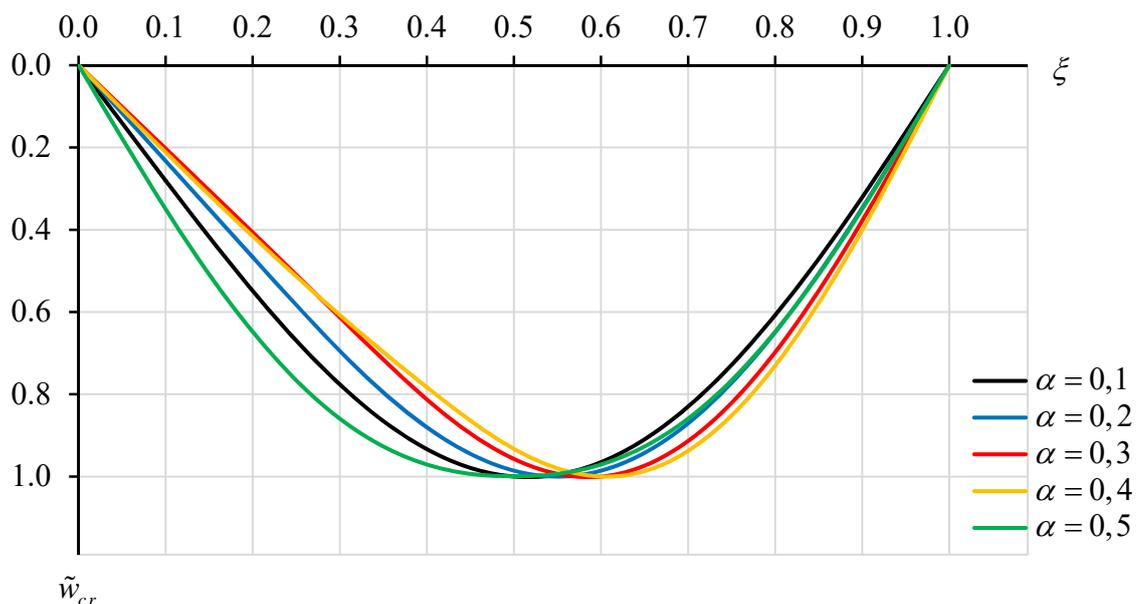


Figura 2.9 – Exemplo 1 – Modos críticos de instabilidade (com amplitude normalizada por

$|\tilde{w}_{cr}|_{\max} = 1$) para $\tilde{k} = 100 < 16\pi^2$ e valores seleccionados de α

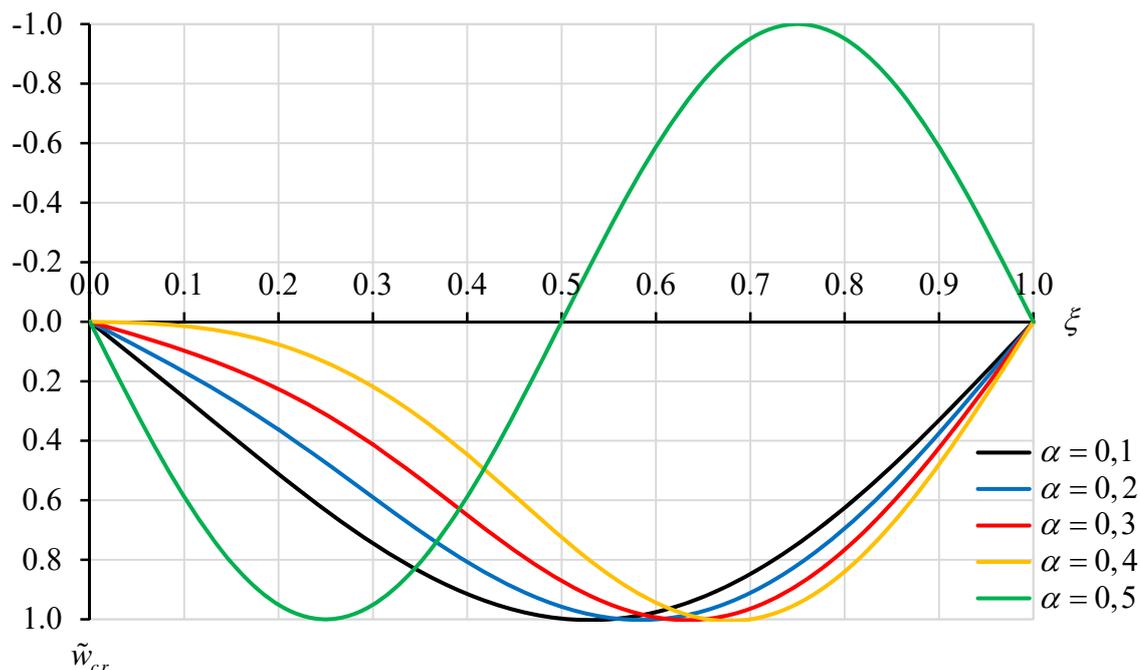


Figura 2.10 – Exemplo 1 – Modos críticos de instabilidade (com amplitude normalizada por $|\tilde{w}_{cr}|_{\max} = 1$) para $\tilde{k} = 200 > 16\pi^2$ e valores seleccionados de α

Considere-se agora o caso (excepcional) $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\tilde{k} = 16\pi^2$. A solução geral do sistema (43) com $\tilde{P} = \tilde{P}_{cr} = 4\pi^2$ apresenta duas incógnitas livres. A coluna pode instabilizar num modo antissimétrico (definido, uma vez mais, por uma onda sinusoidal completa), num modo simétrico ou ainda numa qualquer combinação linear não nula destes dois modos. Os modos simétrico e antissimétrico (normalizados) estão representados na Figura 2.11. Estes modos são ortogonais para o produto interno definido no espaço linear das funções reais contínuas no intervalo $[0,1]$ por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(\xi) g(\xi) d\xi. \quad (39)$$

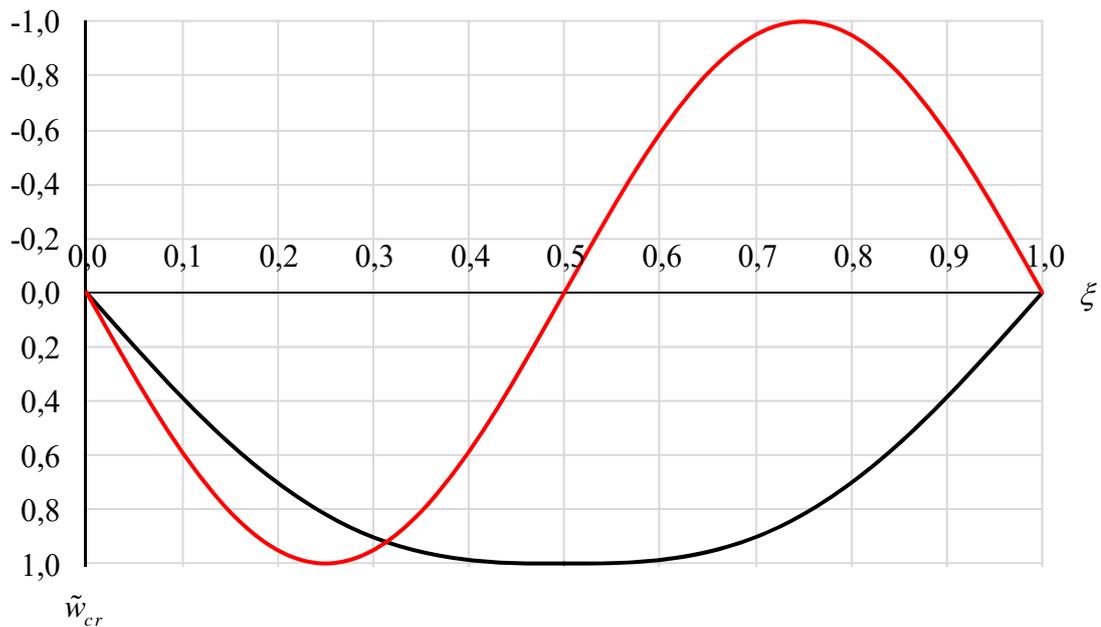


Figura 2.11 – Exemplo 1 – Modos críticos de instabilidade simétrico e antissimétrico (com amplitude normalizada por $|\tilde{w}_{cr}|_{\max} = 1$) para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\tilde{k} = 16 \pi^2$

2.2.2 Exemplo 2

O segundo exemplo ilustrativo consiste numa modificação do exemplo 1, com o apoio simples rígido na extremidade direita substituído por um apoio flexível, de rigidez k igual à do contraventamento intermédio ($0 < k < +\infty$)³ – Figura 2.12.

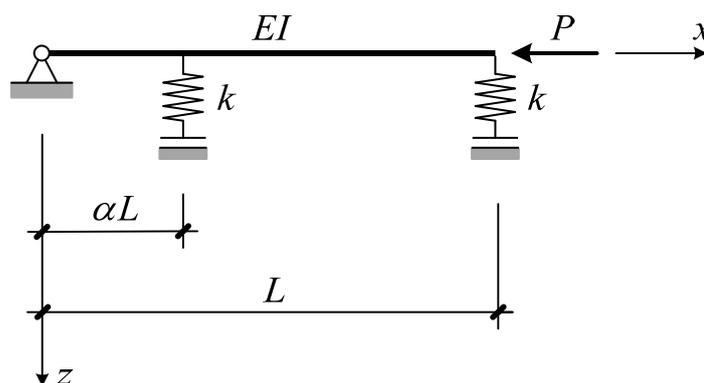


Figura 2.12 – Exemplo 2 – Definição do sistema estrutural

³ O caso $k = +\infty$ foi analisado no âmbito do exemplo 1. O caso $k = 0$ corresponderia a uma coluna insuficientemente vinculada.

A formulação matemática adimensional do primeiro exemplo mantém-se válida na sua quase totalidade, sendo apenas necessário substituir a condição de fronteira (23) por

$$-\tilde{w}_2'''(1) + \tilde{k} \tilde{w}_2(1) = \tilde{P} \tilde{w}_2'(1). \quad (40)$$

Procedendo como descrito no exemplo 1, obtém-se a equação característica

$$\begin{aligned} & \tilde{k}^2 \left\{ \alpha(1-\alpha)\tilde{P}^{1/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}) - \sin(\alpha\tilde{P}^{1/2}) \sin[(1-\alpha)\tilde{P}^{1/2}] \right\} + \\ & + \tilde{k} \tilde{P} \left\{ \sin(\alpha\tilde{P}^{1/2}) \sin[(1-\alpha)\tilde{P}^{1/2}] - (1+\alpha)\tilde{P}^{1/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}) \right\} + \tilde{P}^{5/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}) = 0. \quad (41) \end{aligned}$$

As Figuras 2.13 e 2.14 representam a variação da menor raiz positiva \tilde{P}_{cr} desta equação (i) em função da posição do contraventamento intermédio (parâmetro α), para valores fixos de \tilde{k} , e (ii) em função de \tilde{k} , para valores fixos de α . Para facilitar comparações, a Figura 2.13 inclui também o caso $\tilde{k} = +\infty$, analisado no exemplo 1.

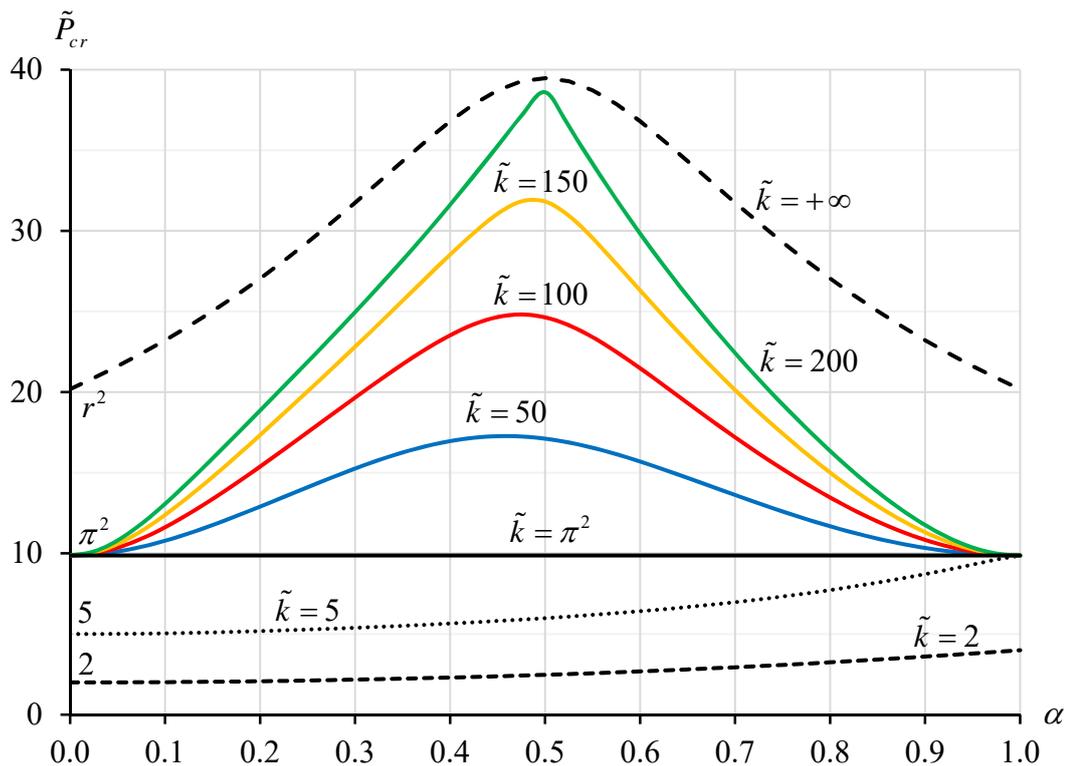


Figura 2.13 – Exemplo 2 – Variação de \tilde{P}_{cr} em função de α , para valores seleccionados de \tilde{k}

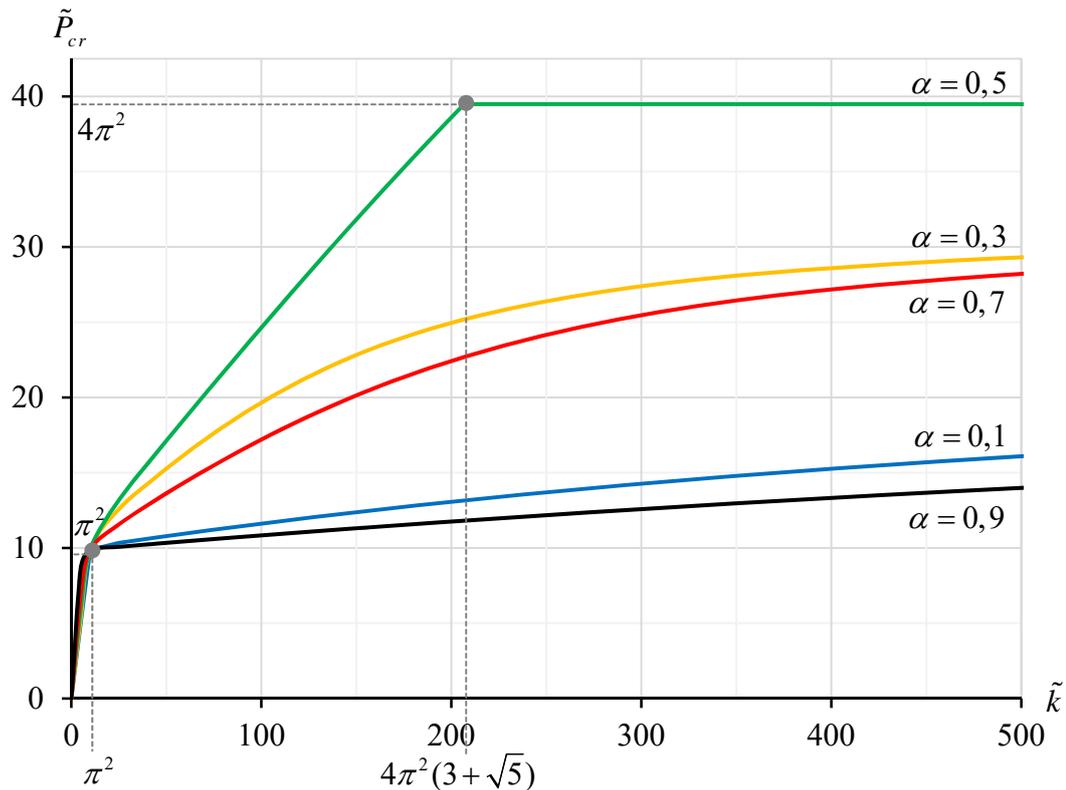


Figura 2.14 – Exemplo 2 – Variação de \tilde{P}_{cr} em função de \tilde{k} , para valores seleccionadas de α

Salientam-se os seguintes aspectos:

- (i) No limite quando $\alpha \rightarrow 0$, tem-se $\tilde{P}_{cr} \rightarrow \pi^2$ se $\tilde{k} \geq \pi^2$ e $\tilde{P}_{cr} \rightarrow \tilde{k}$ se $\tilde{k} \leq \pi^2$ (esta última situação está exemplificada na Figura 2.13 para $\tilde{k} = 2$ e $\tilde{k} = 5$). De facto, quando $\alpha \rightarrow 0$ o contraventamento intermédio flexível torna-se completamente ineficaz, como já observado no exemplo 1, pelo que o sistema estrutural se reduz efectivamente ao representado na Figura 2.15. Nestas condições, a encurvadura da coluna pode ocorrer num modo com deslocamento transversal relativo das extremidades, esquematizado na

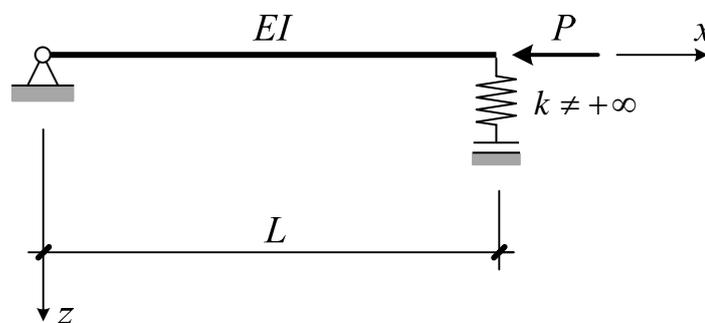


Figura 2.15 – Exemplo 2 – Sistema estrutural quando $\alpha \rightarrow 0$.

Figura 2.16(a), a que corresponde a carga crítica

$$P_{cr}^{(1)} = kL, \quad (42)$$

ou num modo sem deslocamento transversal relativo das extremidades, representado na Figura 2.16(b), a que corresponde a carga crítica de Euler

$$P_{cr}^{(2)} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \quad (43)$$

Tem-se assim

$$P_{cr} = \min \{ P_{cr}^{(1)}, P_{cr}^{(2)} \} = \begin{cases} kL & \text{se } k \leq \frac{\pi^2 EI}{L^3} \\ \frac{\pi^2 EI}{L^2} & \text{se } k \geq \frac{\pi^2 EI}{L^3} \end{cases}, \quad (44)$$

como traduzido graficamente na Figura 2.17.

- (ii) Examinemos agora a situação limite $\alpha \rightarrow 1$, para a qual o sistema estrutural se reduz ao representado na Figura 2.18. A análise anterior (com k substituído por $2k$) permite concluir imediatamente que $\tilde{P}_{cr} \rightarrow \pi^2$ se $\tilde{k} \geq \frac{1}{2}\pi^2$ e $\tilde{P}_{cr} \rightarrow 2\tilde{k}$ se $\tilde{k} \leq \frac{1}{2}\pi^2$ (esta última situação está exemplificada na Figura 2.13 por $\tilde{k} = 2$).

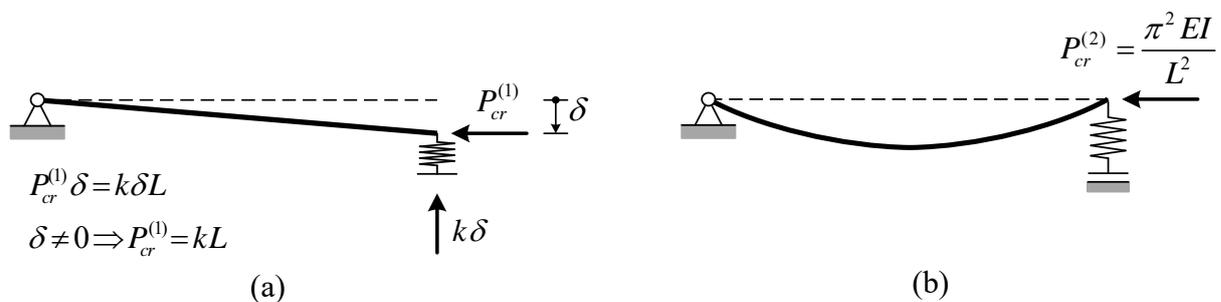


Figura 2.16 – Encurvadura da coluna representada na Figura 2.15

(a) modo de instabilidade com deslocamento transversal relativo das extremidades

(b) modo de instabilidade sem deslocamento transversal relativo das extremidades

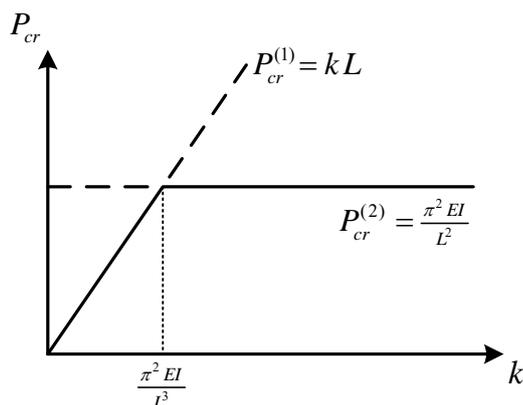


Figura 2.17 – Encurvadura da coluna representada na Figura 2.15 – carga crítica elástica

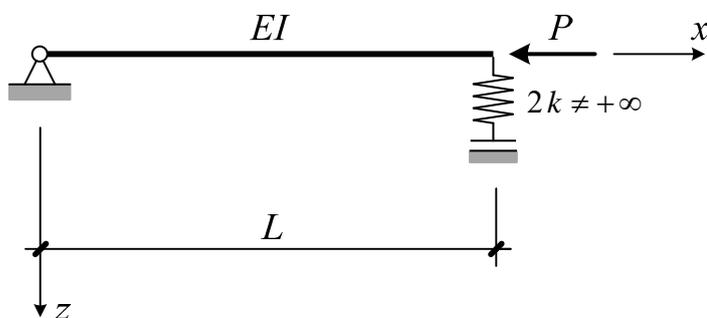


Figura 2.18 – Exemplo 2 – Sistema estrutural quando $\alpha \rightarrow 1$

- (iii) Para $\alpha \neq \frac{1}{2}$, verifica-se que \tilde{P}_{cr} é uma função estritamente crescente de \tilde{k} , com uma assíntota horizontal (correspondente ao valor de \tilde{P}_{cr} para $\tilde{k} = +\infty$, que é inferior a $4\pi^2$) – ver Figura 2.14. O crescimento de \tilde{P}_{cr} com \tilde{k} é particularmente acentuado no intervalo $0 < \tilde{k} \leq \pi^2$, com $\tilde{P}_{cr} \rightarrow 0$ quando $\tilde{k} \rightarrow 0$ e $\tilde{P}_{cr} = \pi^2$ quando $\tilde{k} = \pi^2$, qualquer que seja α .
- (iv) Para $\alpha = \frac{1}{2}$, \tilde{P}_{cr} é uma função estritamente crescente de \tilde{k} no intervalo $0 < \tilde{k} \leq 4\pi^2(3 + \sqrt{5}) \cong 206,712$ e uma função constante (igual a $4\pi^2$) quando $\tilde{k} \geq 4\pi^2(3 + \sqrt{5})$.⁴

⁴ As raízes positivas da equação característica (41) são independentes de \tilde{k} se $\sin(\tilde{P}^{1/2})$ e os coeficientes de \tilde{k} e \tilde{k}^2 se anularem simultaneamente. Tal acontece quando

$$\tilde{P}^{1/2} = n\pi \text{ e } \alpha = \frac{m}{n}$$

ou

$$\tilde{P}^{1/2} = n\pi \text{ e } 1 - \alpha = \frac{m}{n},$$

(v) Para $\tilde{k} < \pi^2$ fixo, \tilde{P}_{cr} é uma função estritamente crescente de α . Para $\tilde{k} = \pi^2$, tem-se $\tilde{P}_{cr} = \pi^2$ qualquer que seja a posição do contraventamento lateral, como se pode facilmente confirmar por substituição directa na equação característica (41). Para $\pi^2 < \tilde{k} < 4\pi^2(3 + \sqrt{5})$, \tilde{P}_{cr} é máximo para um valor de α próximo, mas inferior, a $\frac{1}{2}$. Finalmente, para $\tilde{k} \geq 4\pi^2(3 + \sqrt{5})$, a posição óptima do contraventamento é a meio vão ($\alpha = \frac{1}{2}$).

Os modos críticos de instabilidade (com amplitude normalizada pela condição $|\tilde{w}_{cr}|_{\max} = 1$) estão representados na Figura 2.19, para $\tilde{k} = 100 < 4\pi^2(3 + \sqrt{5})$, e na Figura 2.20, para $\tilde{k} = 300 > 4\pi^2(3 + \sqrt{5})$. Para $\tilde{k} = 300$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, o modo crítico é antissimétrico, definido por uma onda sinusoidal completa – em particular, tem-se $\tilde{w}_{cr}(\frac{1}{2}) = \tilde{w}_{cr}(1) = 0$. Ainda para $\alpha = \frac{1}{2}$, mas agora com $\tilde{k} = 100$, o modo crítico é assimétrico, com $\tilde{w}_{cr}(1/2)\tilde{w}_{cr}(1) < 0$.

Finalmente, no caso excepcional $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\tilde{k} = 4\pi^2(3 + \sqrt{5})$, coluna pode instabilizar num modo antissimétrico (onda sinusoidal completa), num modo assimétrico com $\tilde{w}_{cr}(1/2)\tilde{w}_{cr}(1) < 0$, ortogonal ao anterior para o produto interno definido em (39), ou numa qualquer combinação linear não nula destes dois modos – ver Figura 2.21.

em que m e n são inteiros positivos. A menor raiz positiva com $0 < \alpha < 1$ (isto é, com $n > m$), $\tilde{P}_{cr} = 4\pi^2$, é obtida para $\alpha = 1 - \alpha = \frac{1}{2}$. A regra de Cauchy (Campos Ferreira, 1987) permite ainda concluir que, com

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4}\tilde{P}^{1/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}) - \sin^2(\frac{1}{2}\tilde{P}^{1/2}) \\ b &= \tilde{P} \left[\sin^2(\frac{1}{2}\tilde{P}^{1/2}) - \frac{3}{2}\tilde{P}^{1/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}) \right] \\ c &= \tilde{P}^{5/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}), \end{aligned}$$

se tem

$$\lim_{\tilde{P}^{1/2} \rightarrow 2\pi^-} \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2b} \right) = 4\pi^2(3 \pm \sqrt{5}).$$

O limite relevante é $4\pi^2(3 + \sqrt{5})$. A autora não conseguiu atribuir um significado ao limite $4\pi^2(3 - \sqrt{5})$.

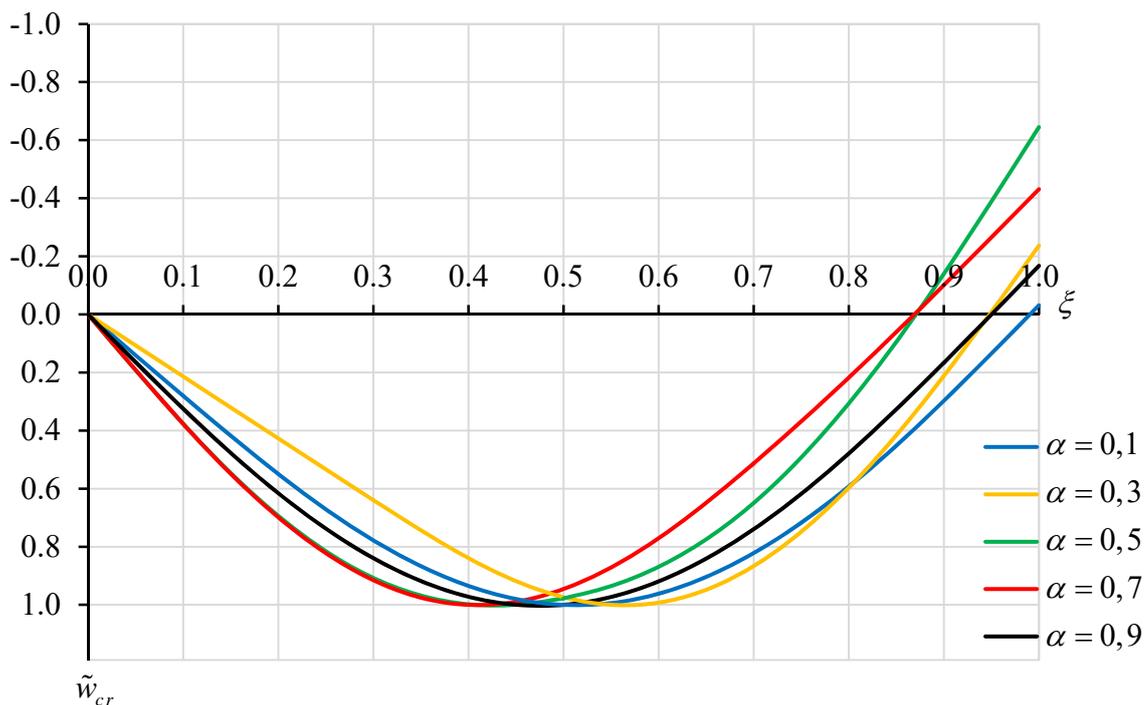


Figura 2.19 – Exemplo 2 – Modos críticos de instabilidade (com amplitude normalizada por $|\tilde{w}_{cr}|_{\max} = 1$) para $\tilde{k} = 100 < 4\pi^2(3 + \sqrt{5})$ e valores seleccionados de α



Figura 2.20 – Exemplo 2 – Modos críticos de instabilidade (com amplitude normalizada por $|\tilde{w}_{cr}|_{\max} = 1$) para $\tilde{k} = 300 > 4\pi^2(3 + \sqrt{5})$ e valores seleccionados de α

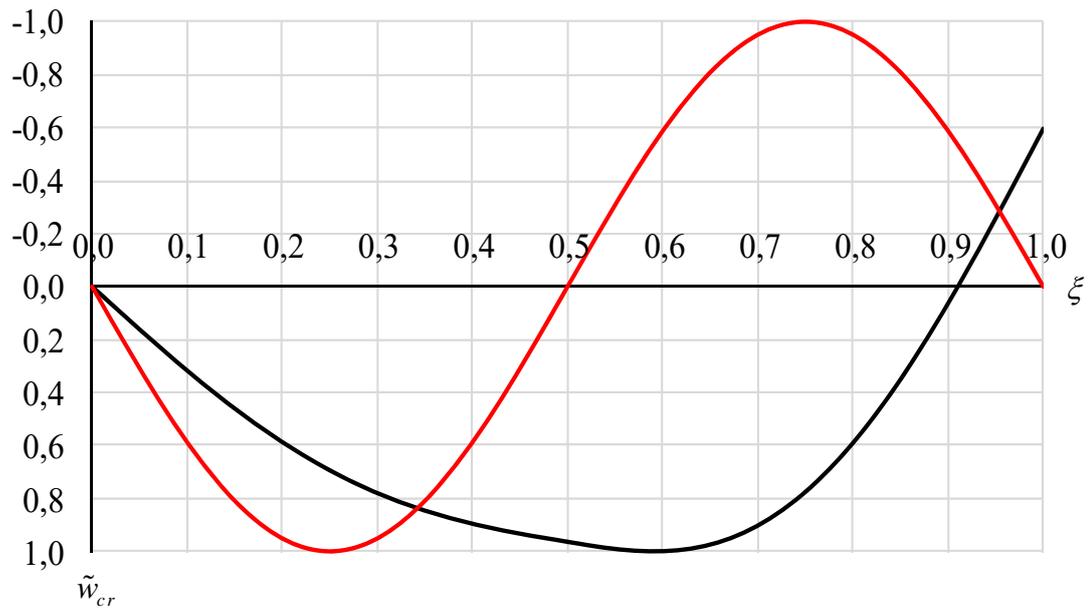


Figura 2.21 – Exemplo 2 – Modos críticos de instabilidade ortogonais (com amplitude normalizada por $|\tilde{w}_{cr}|_{\max} = 1$), antissimétrico e assimétrico, para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\tilde{k} = 4\pi^2(3 + \sqrt{5})$

3 COLUNAS IMPERFEITAS

No capítulo anterior consideraram-se colunas geometricamente perfeitas ou ideais. Na realidade, as imperfeições geométricas – configuração indeformada não rectilínea e cargas excêntricas ou com componente transversal – são inevitáveis e afectam consideravelmente o comportamento das colunas “reais”, tanto quantitativa como qualitativamente. Neste capítulo, estuda-se o comportamento elástico de colunas com uma configuração indeformada não rectilínea. As imperfeições associadas ao carregamento conduzem a um comportamento com as mesmas características, de tal forma que podem ser substituídas por uma configuração indeformada “equivalente” (Reis e Camotim, 2001).

3.1 Problema geral e sua formulação matemática

Considere-se novamente o problema geral descrito na secção 2.1, mas suponha-se agora que o eixo da coluna na configuração indeformada (quando $P_i = 0$, $i = 1, \dots, n+1$, e as forças/momentos nas molas são nulos) não é perfeitamente recto, apresentando um desvio na direcção transversal que é representado pela função w_0 (Figura 3.1). Admite-se que esta função é continuamente diferenciável em $[0, L]$ (ou seja, o eixo da coluna imperfeita não apresenta descontinuidades angulares) e satisfaz as condições de apoio rígidas:

$$w_0(0) = 0 \quad (45)$$

$$w_0(\alpha_i L) = 0 \text{ se } k_i = +\infty, i = 1, \dots, n+1 \quad (46)$$

$$w_0'(\alpha_i L) = 0 \text{ se } c_i = +\infty, i = 0, \dots, n+1. \quad (47)$$

Admite-se ainda que as restrições de w_0 aos intervalos $[\alpha_{i-1}L, \alpha_i L]$, $i = 1, \dots, n+1$, designadas por $w_{0,i}$, são suficientemente suaves (pelo menos quatro vezes continuamente diferenciáveis).

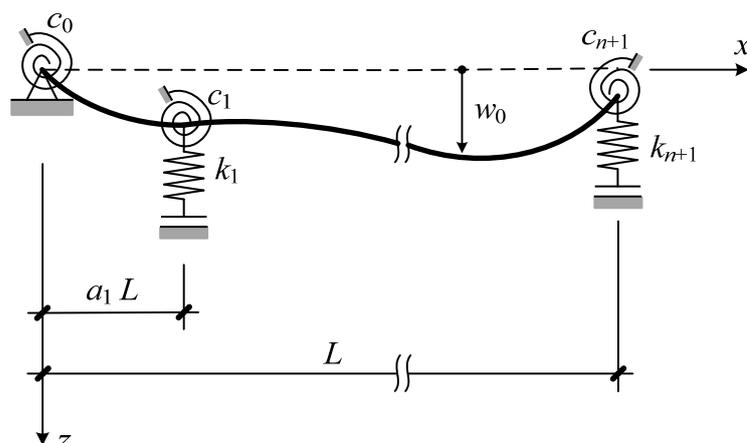


Figura 3.1 – Problema geral – Configuração indeformada da coluna geometricamente imperfeita

As cargas P_i são aplicadas sem excentricidade e têm a direcção do eixo da coluna na configuração rectilínea ideal (eixo x). Pretende-se determinar, para valores fixos destas cargas, o campo w de deslocamentos transversais do eixo da coluna, medidos a partir da configuração rectilínea ideal, correspondente ao estado de equilíbrio (Figura 3.2).⁵

Para formular matematicamente o problema, observa-se em primeiro lugar que as condições de equilíbrio (1) e (2) obtidas para a coluna perfeita se mantêm válidas. O mesmo acontece,

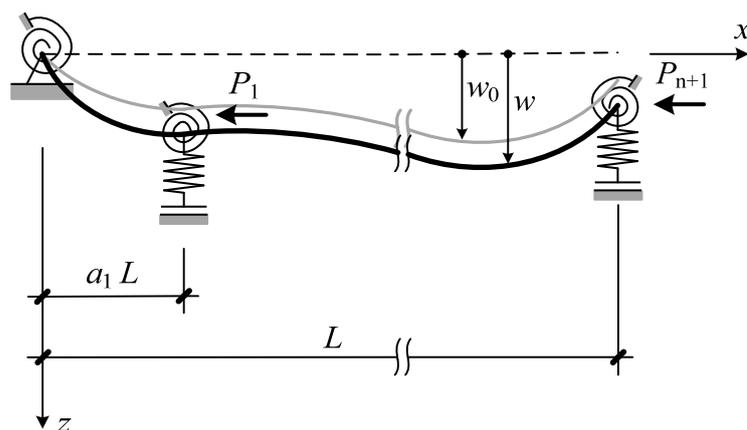


Figura 3.2 – Problema geral – Campo de deslocamentos transversais w

⁵ O deslocamento transversal da secção de abscissa x , medido a partir da configuração indeformada, será então $w(x) - w_0(x)$.

na hipótese de pequenas rotações, com a condição de compatibilidade (5). Já a relação constitutiva toma agora a forma

$$M_i(x) = -EI_i (\chi_i(x) - \chi_{0,i}(x)), \quad (48)$$

em que $\chi_{0,i} = w_{0,i}''$ representa a curvatura do tramo i da coluna imperfeita na configuração indeformada. Combinando equilíbrio, compatibilidade e relação constitutiva, obtém-se

$$EI_i (w_i^{(4)}(x) - w_{0,i}^{(4)}(x)) + \sum_{j=i}^{n+1} P_j w_i''(x) = 0, \quad \alpha_{i-1}L < x < \alpha_i L, \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (49)$$

Para estabelecer as condições de fronteira e as condições de continuidade ou salto, é ainda necessário ter em conta que a força ou momento numa mola (com rigidez finita) é proporcional ao deslocamento transversal ou rotação entre as configurações indeformada e deformada. Resulta assim:

(i) Condições de fronteira ($x = 0$ e $x = L$)

$$w_1(0) = 0 \quad (50)$$

$$EI_1 (w_1''(0) - w_{0,1}''(0)) = c_0 (w_1'(0) - w_{0,1}'(0)) \text{ se } c_0 \neq +\infty$$

$$\text{ou } w_1'(0) = 0 \text{ se } c_0 = +\infty \quad (51)$$

$$-EI_{n+1} (w_{n+1}''(L) - w_{0,n+1}''(L)) = c_{n+1} (w_{n+1}'(L) - w_{0,n+1}'(L)) \text{ se } c_{n+1} \neq +\infty$$

$$\text{ou } w_{n+1}'(L) = 0 \text{ se } c_{n+1} = +\infty \quad (52)$$

$$EI_{n+1} (w_{n+1}'''(L) - w_{0,n+1}'''(L)) + P_{n+1} w_{n+1}'(L) = k_{n+1} (w_{n+1}(L) - w_{0,n+1}(L)) \text{ se } k_{n+1} \neq +\infty$$

$$\text{ou } w_{n+1}(L) = 0 \text{ se } k_{n+1} = +\infty. \quad (53)$$

(ii) Condições de continuidade ou salto nos contraventamentos intermédios ($x = \alpha_i L$, $i = 1, \dots, n$)

$$w_i(\alpha_i L) = w_{i+1}(\alpha_i L) \quad (54)$$

$$w_i'(\alpha_i L) = w_{i+1}'(\alpha_i L) \quad (55)$$

$$EI_i \left(w_i''(\alpha_i L) - w_{0,n+1}''(L) \right) + c_i \left(w_i'(\alpha_i L) - w_{0,n+1}'(L) \right) = EI_{i+1} \left(w_{i+1}''(\alpha_i L) - w_{0,i+1}''(\alpha_i L) \right) \text{ se } c_i \neq +\infty$$

$$\text{ou } w_i'(\alpha_i L) = 0 \text{ se } c_i = +\infty \quad (56)$$

$$EI_i \left(w_i'''(\alpha_i L) - w_{0,i}'''(\alpha_i L) \right) + P_i w_i'(\alpha_i L) - k_i \left(w_i(\alpha_i L) - w_{0,i}(\alpha_i L) \right) = EI_{i+1} \left(w_{i+1}'''(\alpha_i L) - w_{0,i+1}'''(\alpha_i L) \right)$$

$$\text{se } k_i \neq +\infty \quad \text{ou } w_i(\alpha_i L) = 0 \text{ se } k_i = +\infty, i = 1, \dots, n. \quad (57)$$

3.2 Exemplos ilustrativos

Procede-se agora à análise detalhada de alguns problemas particulares. A forma da imperfeição geométrica a adoptar não é óbvia (Plaut, 1993). Assim, optou-se por considerar (i) a forma do modo crítico de instabilidade da coluna perfeita correspondente, tal como sugerido no Eurocódigo 3 (NP EN 1993-1-1, 2010) para elementos de pórticos considerados individualmente, e (ii) uma forma quadrática simétrica, utilizada por Plaut e Yang (1995) e em linha com as indicações do Eurocódigo 3 para a análise de sistemas de contraventamento. Em virtude da primeira destas opções, escolheu-se para objecto de análise detalhada os exemplos ilustrativos 1 e 2 do capítulo anterior.

3.2.1 Exemplo 1

Particularizando o problema geral para a coluna representada na Figura 2.6, na qual se considera agora uma imperfeição arbitrária w_0 , e adimensionalizando como descrito na secção 2.2.1, obtém-se o problema de valores na fronteira (para $k \neq +\infty$)

$$\tilde{w}_1^{(4)}(\xi) - \tilde{w}_{0,1}^{(4)}(\xi) + \tilde{P} \tilde{w}_1''(\xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \alpha \quad (58)$$

$$\tilde{w}_2^{(4)}(\xi) - \tilde{w}_{0,2}^{(4)}(\xi) + \tilde{P} \tilde{w}_2''(\xi) = 0, \quad \alpha \leq \xi \leq 1 \quad (59)$$

$$\tilde{w}_1(0) = 0 \quad (60)$$

$$\tilde{w}_1''(0) - \tilde{w}_{0,1}''(0) = 0 \quad (61)$$

$$\tilde{w}_2(1) = 0 \quad (62)$$

$$\tilde{w}_2''(1) - \tilde{w}_{0,2}''(1) = 0 \quad (63)$$

$$\tilde{w}_1(\alpha) = \tilde{w}_2(\alpha) \quad (64)$$

$$\tilde{w}'_1(\alpha) = \tilde{w}'_2(\alpha) \quad (65)$$

$$\tilde{w}''_1(\alpha) - \tilde{w}''_{0,1}(\alpha) = \tilde{w}''_2(\alpha) - \tilde{w}''_{0,2}(\alpha) \quad (66)$$

$$\tilde{w}'''_1(\alpha) - \tilde{w}'''_{0,1}(\alpha) - \tilde{k}(\tilde{w}_1(\alpha) - \tilde{w}_{0,1}(\alpha)) = \tilde{w}'''_2(\alpha) - \tilde{w}'''_{0,2}(\alpha), \quad (67)$$

em que $\tilde{w}_0(\xi) = \frac{1}{L} w_0(\xi L)$ e os restantes símbolos foram já anteriormente definidos (no segundo parágrafo da secção 2.2.1).

Admita-se primeiro uma imperfeição geométrica com a forma do modo crítico de instabilidade da coluna contraventada perfeita e amplitude $e_0 > 0$.⁶ Em termos adimensionais, escreve-se

$$\tilde{w}_0(\xi) = \frac{e_0}{L} \tilde{w}_{cr}(\xi), \quad (68)$$

com $|\tilde{w}_{cr}|_{\max} = 1$.

Tendo em atenção que \tilde{w}_0 satisfaz as equações (19)-(28) para $\tilde{P} = \tilde{P}_{cr}$, verifica-se por substituição directa que

$$\tilde{w}(\xi) = \frac{1}{1 - \frac{\tilde{P}}{\tilde{P}_{cr}}} \tilde{w}_0(\xi) = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \tilde{w}_0(\xi) \quad (69)$$

satisfaz as equações (58)-(67) da coluna imperfeita. Constata-se, assim, que uma imperfeição geométrica inicial com a forma do modo crítico de instabilidade é amplificada pelo factor

$$\frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}, \quad (70)$$

o qual tende para $+\infty$ quando $P \rightarrow P_{cr}$ por valores inferiores.⁷

A força que se desenvolve no contraventamento intermédio é dada por

⁶ Em colunas metálicas, é usual adoptar $e_0 = L/1000$ (ECCS, 1976, Ziemian, 2010).

⁷ Este último resultado é uma consequência de se estar a efectuar uma análise linearizada, assente na hipótese de pequenas rotações (Dias da Silva, 2013).

$$\begin{aligned}
F_s &= k (w(\alpha L) - w_0(\alpha L)) = \frac{EI}{L^2} \tilde{k} (\tilde{w}(\alpha) - \tilde{w}_0(\alpha)) = \\
&= \frac{EI}{L^2} \frac{\frac{P}{P_{cr}}}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \tilde{k} \tilde{w}_0(\alpha) = \frac{e_0 EI}{L^3} \frac{\frac{P}{P_{cr}}}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \tilde{k} \tilde{w}_{cr}(\alpha).
\end{aligned} \tag{71}$$

Nas especificações técnicas de estruturas metálicas, as forças a que terão de resistir os elementos de contraventamento são por vezes definidas como uma percentagem da força de compressão na coluna a contraventar.⁸ Nas Figuras 3.3 e 3.4 representa-se

$$\frac{F_s}{P} = \frac{e_0 EI}{L^3} \frac{\frac{P}{P_{cr}}}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \tilde{k} \tilde{w}_{cr}(\alpha) = \frac{e_0}{L} \frac{\frac{\tilde{P}}{P_{cr}}}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \tilde{k} \tilde{w}_{cr}(\alpha) \tag{72}$$

em função do rácio P/P_{cr} , para diferentes valores de \tilde{k} e de α . Considerou-se $e_0 = L/1000$. Verifica-se, nos casos apresentados, que a força no contraventamento intermédio é inferior a 1% (resp. 2%) da força de compressão na coluna sempre que esta última não ultrapasse 60% (resp. 80%) do valor crítico da coluna perfeita correspondente. Para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\tilde{k} > 16\pi^2$, tem-se $\tilde{w}_{cr}(\alpha) = 0$ (Figura 2.10) e, conseqüentemente, a força no contraventamento intermédio é nula qualquer que seja $0 < P < P_{cr} = 4\pi^2 EI / L^2$.

Considere-se agora uma imperfeição geométrica simétrica definida pela função quadrática (Plaut e Yang, 1995)

$$w_0(x) = \frac{4e_0}{L^2} x(L-x), \tag{73}$$

em que e_0 representa uma vez mais a amplitude da imperfeição. Adimensionalmente, fica

$$\tilde{w}_0(\xi) = \frac{4e_0}{L} \xi(1-\xi). \tag{74}$$

⁸ Por exemplo, o Regulamento de Estruturas de Aço para Edifícios (REAPE, 1986), actualmente em vigor, estipula no seu artigo 54º que “os elementos de contraventamento que têm como única função impedir o varejamento de barras comprimidas no plano da estrutura devem ser dimensionados para resistir, tanto à tracção como à compressão, a uma força cujo valor de cálculo é 0,01 do valor de cálculo do esforço de compressão existente na barra a contraventar”.

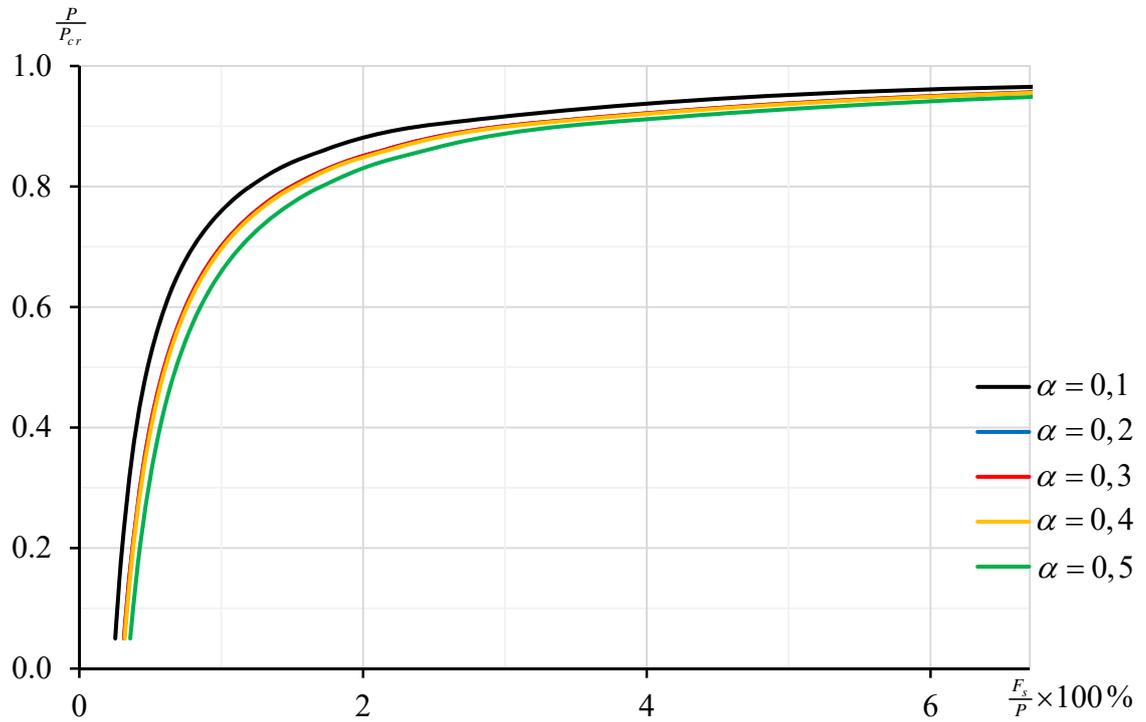


Figura 3.3 – Exemplo 1 – Força no contraventamento intermédio como percentagem da força de compressão na coluna, para $\tilde{k} = 100 < 16\pi^2$ e valores seleccionados de α (imperfeição geométrica com a forma do modo crítico de instabilidade e amplitude $e_0 = L/1000$)

A solução analítica do problema de valores na fronteira (58)-(67) para esta segunda imperfeição, obtida no programa Mathematica (Wolfram Research, 2006), fornece

$$\frac{\tilde{w}(\alpha) - \tilde{w}_0(\alpha)}{\frac{e_0}{L}} = \frac{4\tilde{P}^{1/2} \left\{ 2\sin(\alpha\tilde{P}^{1/2}) + 2\sin[(1-\alpha)\tilde{P}^{1/2}] - [2 + \alpha(1-\alpha)\tilde{P}] \sin(\tilde{P}^{1/2}) \right\}}{\tilde{P}^{3/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}) + \tilde{k} \left\{ \sin(\alpha\tilde{P}^{1/2}) \sin[(1-\alpha)\tilde{P}^{1/2}] - \alpha(1-\alpha)\tilde{P}^{1/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}) \right\}}. \quad (75)$$

A partir deste resultado, facilmente se obtém a força no contraventamento intermédio.

Observe-se que o denominador do membro direito de (75) não é mais do que o membro esquerdo da equação característica (35) da coluna perfeita com $\tilde{k} \neq +\infty$. Consequentemente, este denominador tende para zero quando $\tilde{P} \rightarrow \tilde{P}_{cr}$.

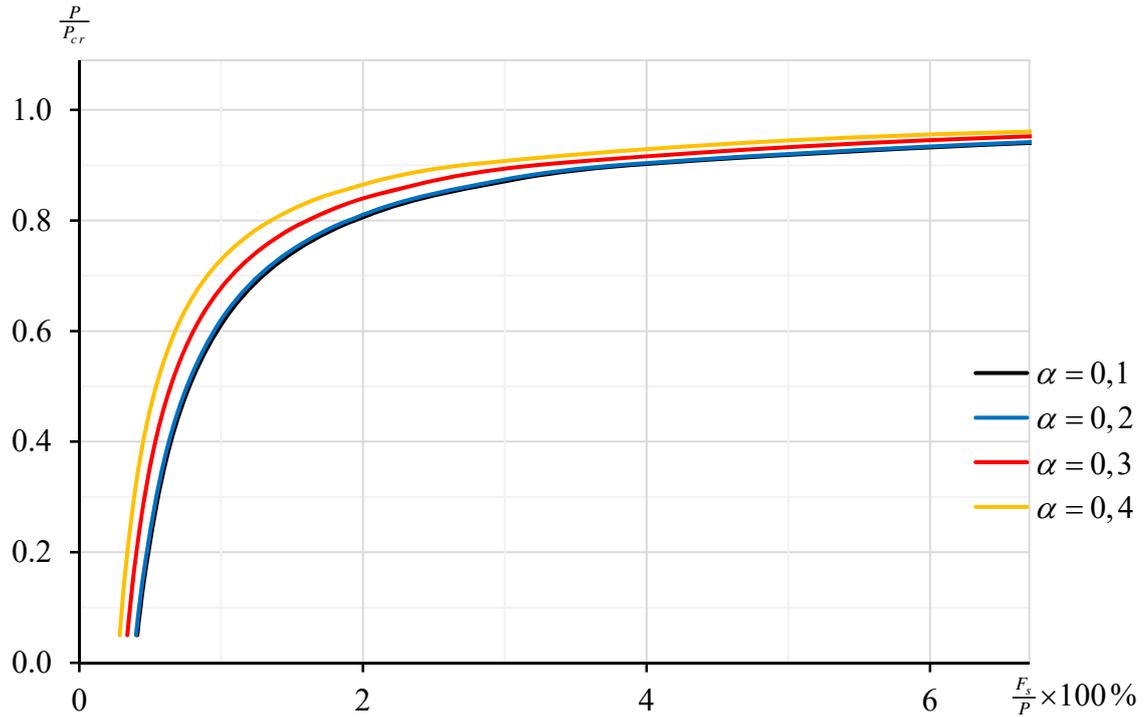


Figura 3.4 – Exemplo 1 – Força no contraventamento intermédio como percentagem da força de compressão na coluna, para $\tilde{k} = 200 > 16\pi^2$ e valores seleccionados de α (imperfeição geométrica com a forma do modo crítico de instabilidade e amplitude $e_0 = L/1000$)

As Figuras 3.5 e 3.6 apresentam, em formato adimensional, algumas curvas típicas carga *versus* deslocamento transversal da secção contraventada. Para $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ou para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\tilde{k} \leq 16\pi^2$, estas curvas apresentam uma assíntota horizontal, correspondente ao valor da carga crítica da coluna perfeita e representada a ponteados. A existência desta assíntota horizontal é, novamente, consequência de se estar a efectuar uma análise linearizada, válida para pequenas rotações. Para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\tilde{k} > 16\pi^2$, a situação é bastante mais interessante. O modo crítico de instabilidade da coluna perfeita e a imperfeição geométrica adoptada são ortogonais (para o produto interno definido em (39)). Por esta razão, a curva carga *versus* deslocamento transversal da secção transversal tem uma assíntota horizontal correspondente, não à carga crítica, mas sim à segunda carga de bifurcação da coluna perfeita, representada a traço-dois pontos.⁹ No entanto, quando se atinge a carga crítica, a solução do

⁹ Para $\alpha = 1/2$ e $\tilde{k} > 16\pi^2$, tanto o denominador como o numerador do membro direito de (75) se anulam para $\tilde{P} = \tilde{P}_{cr} = 4\pi^2$. Levantando a indeterminação $0/0$, obtém-se o limite finito

$$\lim_{\tilde{P}^{1/2} \rightarrow 2\pi} \frac{4\tilde{P}^{1/2} \left[4\sin\left(\frac{1}{2}\tilde{P}^{1/2}\right) - \left(2 + \frac{1}{4}\tilde{P}\right)\sin\left(\tilde{P}^{1/2}\right) \right]}{\tilde{P}^{3/2} \sin\left(\tilde{P}^{1/2}\right) + \tilde{k} \left[\sin^2\left(\frac{1}{2}\tilde{P}^{1/2}\right) - \frac{1}{4}\tilde{P}^{1/2} \sin\left(\tilde{P}^{1/2}\right) \right]} = \frac{16(4 + \pi^2)}{\tilde{k} - 16\pi^2}.$$

problema de valores na fronteira (58)-(67) não é única. De facto, se \tilde{w} é solução de (58)-(67) para $\tilde{P} = \tilde{P}_{cr} = 4\pi^2$, então $\tilde{w} + \tilde{w}_{cr}$ também o é (Figura 3.7). Por outras palavras, para $P = P_{cr} = 4\pi^2 EI / L^2$ ocorre uma bifurcação do equilíbrio da coluna imperfeita (Bazant e Cedolin, 1991). Esta ocorrência está assinalada na Figura 3.6 pela representação da curva carga *versus* deslocamento a traço contínuo para $0 \leq \tilde{P} < \tilde{P}_{cr}$ e a traço interrompido para $\tilde{P}_{cr} < \tilde{P} < \tilde{P}_b^{(2)}$.

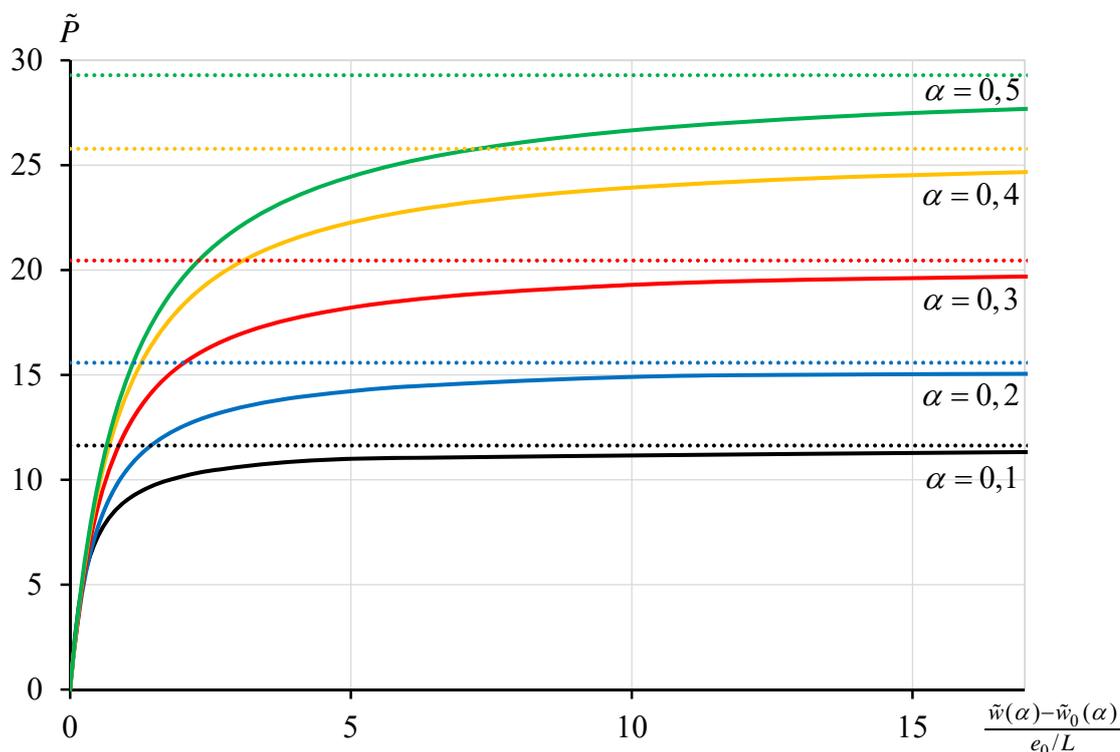


Figura 3.5 – Exemplo 1 – Deslocamento transversal da secção contraventada para $\tilde{k} = 100 < 16\pi^2$ e valores seleccionados de α (imperfeição quadrática)

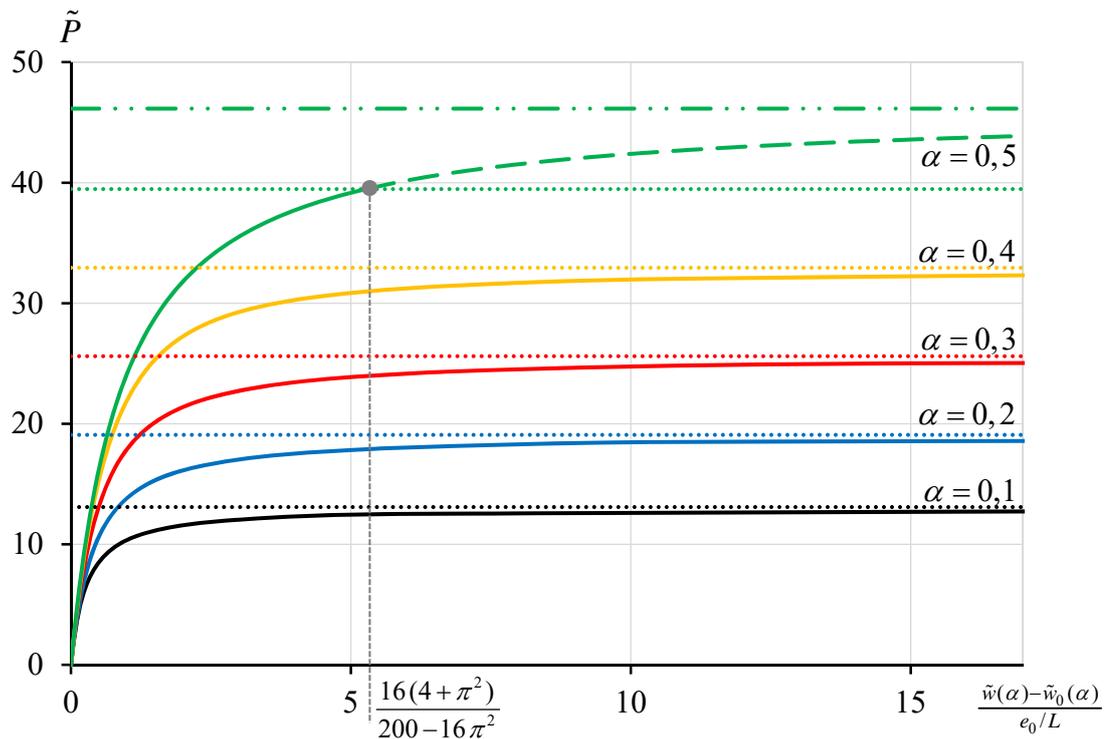


Figura 3.6 – Exemplo 1 – Deslocamento transversal da secção contraventada para $\tilde{k} = 200 > 16\pi^2$ e valores seleccionados de α (imperfeição quadrática)

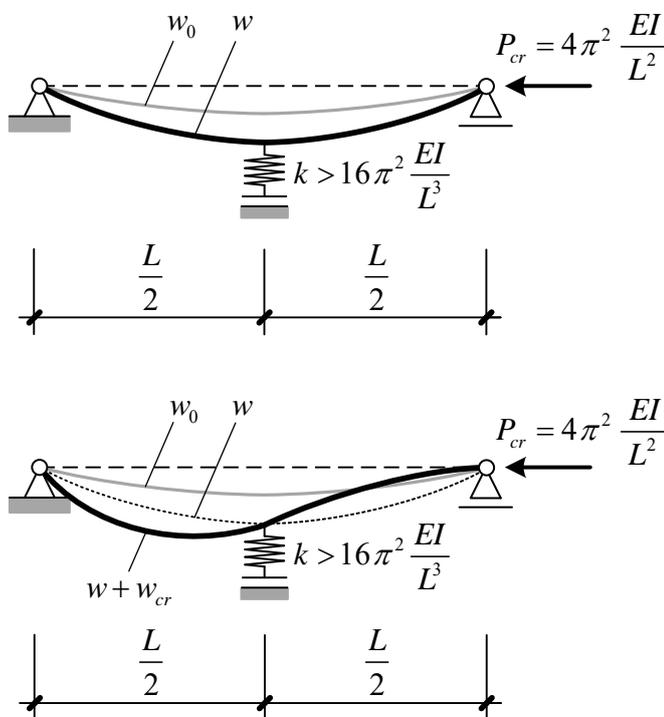


Figura 3.7 – Exemplo 1 – Bifurcação do equilíbrio de colunas com $\alpha = \frac{1}{2}$, $\tilde{k} > 16\pi^2$ e imperfeição simétrica (quadrática) quando $\tilde{P} = \tilde{P}_{cr} = 4\pi^2$

3.2.2 Exemplo 2

Tal como no capítulo 2, o apoio simples rígido na extremidade direita da coluna é agora substituído por um apoio flexível com a mesma rigidez k do contraventamento intermédio ($0 < k < +\infty$). Torna-se assim necessário substituir a condição de fronteira (62) por

$$\tilde{w}_2'''(1) - \tilde{w}_{0,2}'''(1) + \tilde{P}\tilde{w}_2'(1) = \tilde{k} (\tilde{w}_2(1) - \tilde{w}_{0,2}(1)). \quad (76)$$

Quando se adopta uma imperfeição geométrica com a forma do modo crítico de instabilidade da coluna contraventada perfeita, verifica-se novamente que esta é amplificada pelo factor (70) – por outras palavras, a equação (69) mantém-se válida. As forças no contraventamento intermédio e no apoio simples flexível da extremidade direita, dadas respectivamente por

$$F_{s1} = k (w(\alpha L) - w_0(\alpha L)) = \frac{e_0 EI}{L^3} \frac{\frac{P}{P_{cr}}}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \tilde{k} \tilde{w}_{cr}(\alpha) \quad (77)$$

$$F_{s2} = k (w(L) - w_0(L)) = \frac{e_0 EI}{L^3} \frac{\frac{P}{P_{cr}}}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \tilde{k} \tilde{w}_{cr}(1), \quad (78)$$

estão representadas nas Figuras 3.8-3.11 como percentagem da força de compressão na coluna, para uma amplitude $e_0 = L/1000$ da imperfeição geométrica. Para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\tilde{k} > 4\pi^2(3 + \sqrt{5})$, tem-se $\tilde{w}_{cr}(\alpha) = \tilde{w}_{cr}(1) = 0$, pelo que $F_{s1} = F_{s2} = 0$ qualquer que seja $0 < P < P_{cr} = 4\pi^2 EI / L^2$.

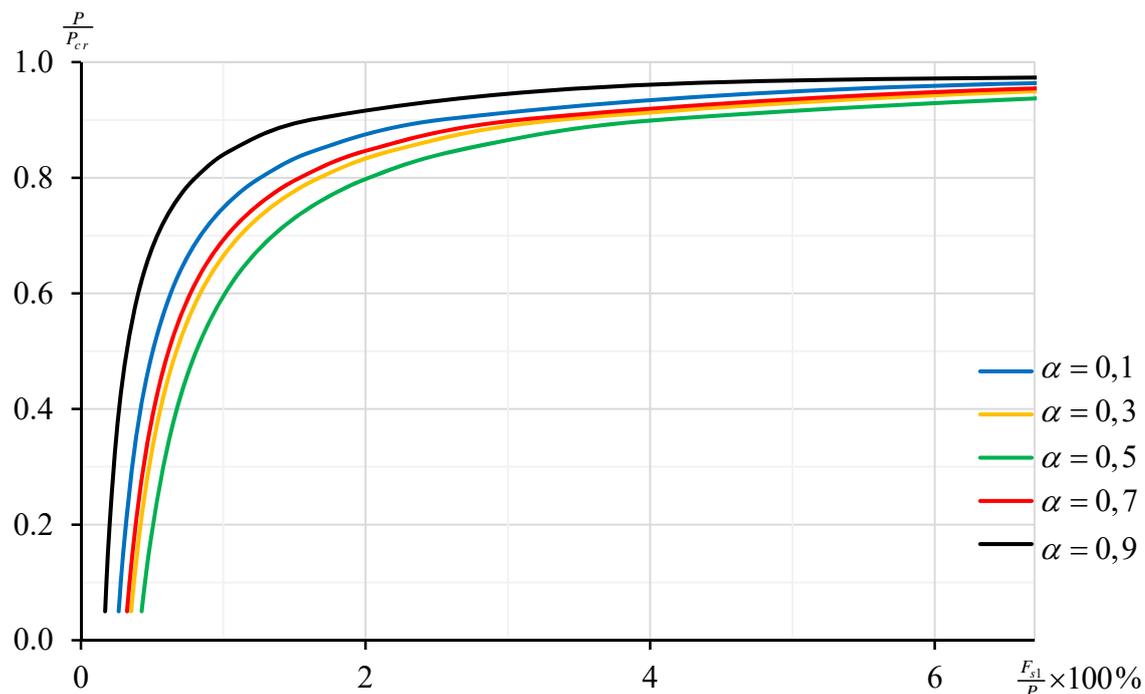


Figura 3.8 – Exemplo 2 – Força no contraventamento intermédio como percentagem da força de compressão na coluna, para $\tilde{k} = 100 < 4\pi^2(3 + \sqrt{5})$ e valores seleccionados de α (imperfeição geométrica com a forma do modo crítico de instabilidade e amplitude $e_0 = L/1000$)

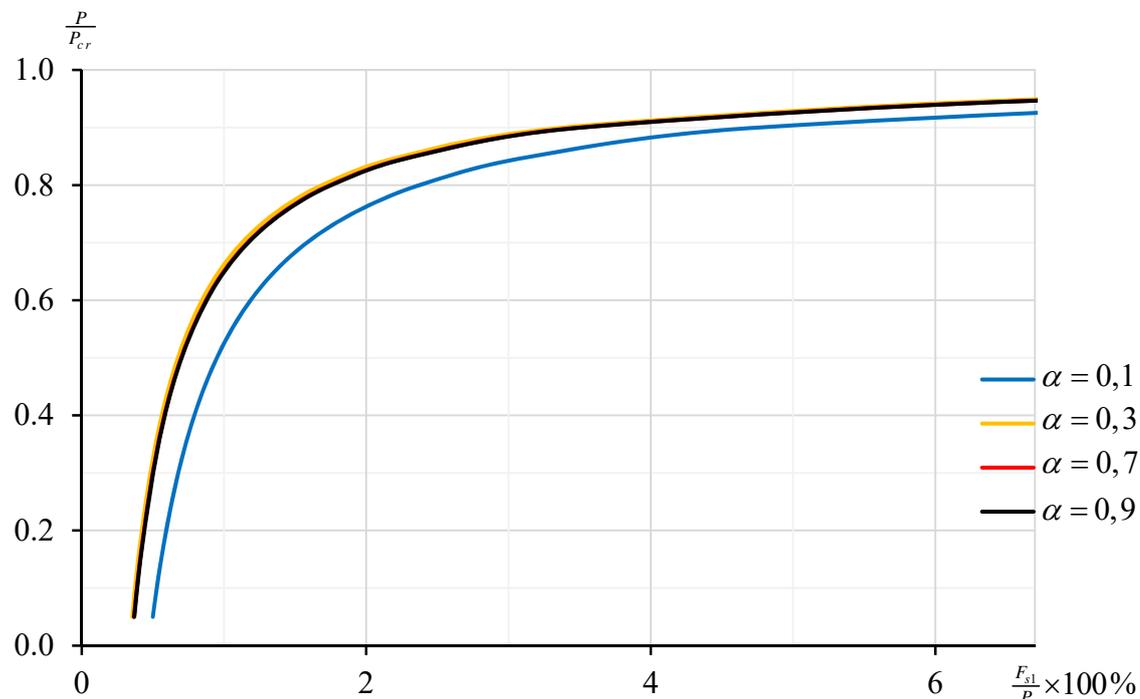


Figura 3.9 – Exemplo 2 – Força no contraventamento intermédio como percentagem da força de compressão na coluna, para $\tilde{k} = 300 > 4\pi^2(3 + \sqrt{5})$ e valores seleccionados de α (imperfeição geométrica com a forma do modo crítico de instabilidade e amplitude $e_0 = L/1000$)

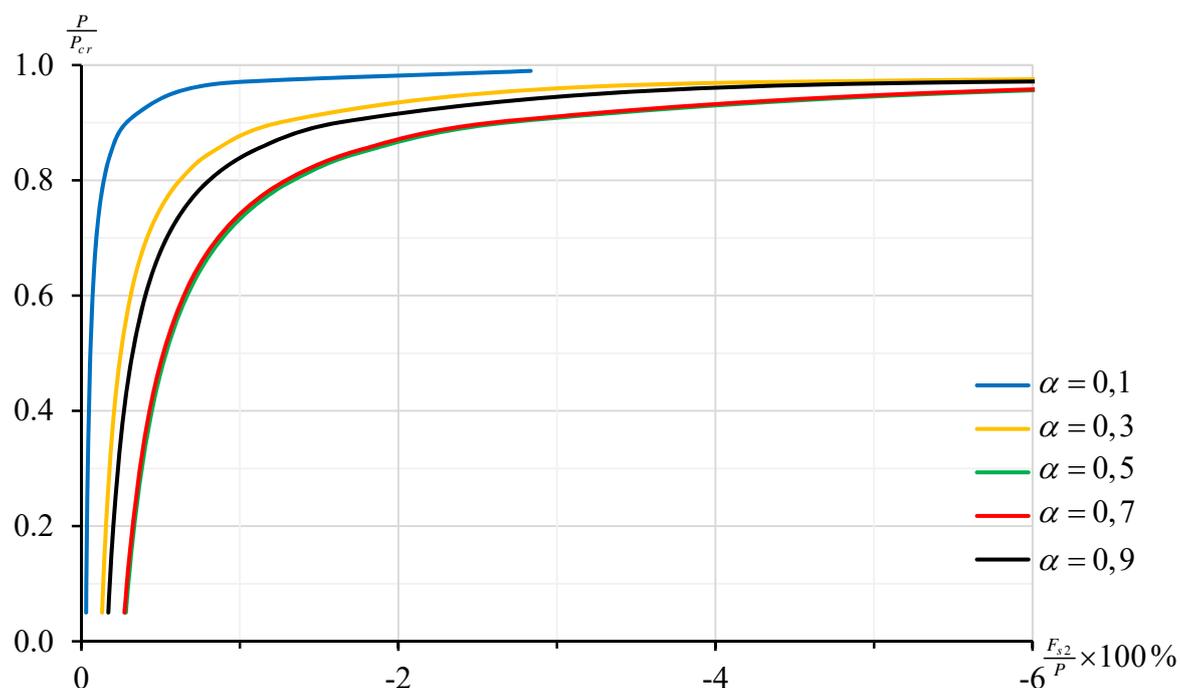


Figura 3.10 – Exemplo 2 – Força no apoio flexível da extremidade direita como percentagem da força de compressão na coluna, para $\tilde{k} = 100 < 4\pi^2(3 + \sqrt{5})$ e valores seleccionados de α (imperfeição geométrica com a forma do modo crítico de instabilidade e amplitude $e_0 = L/1000$)

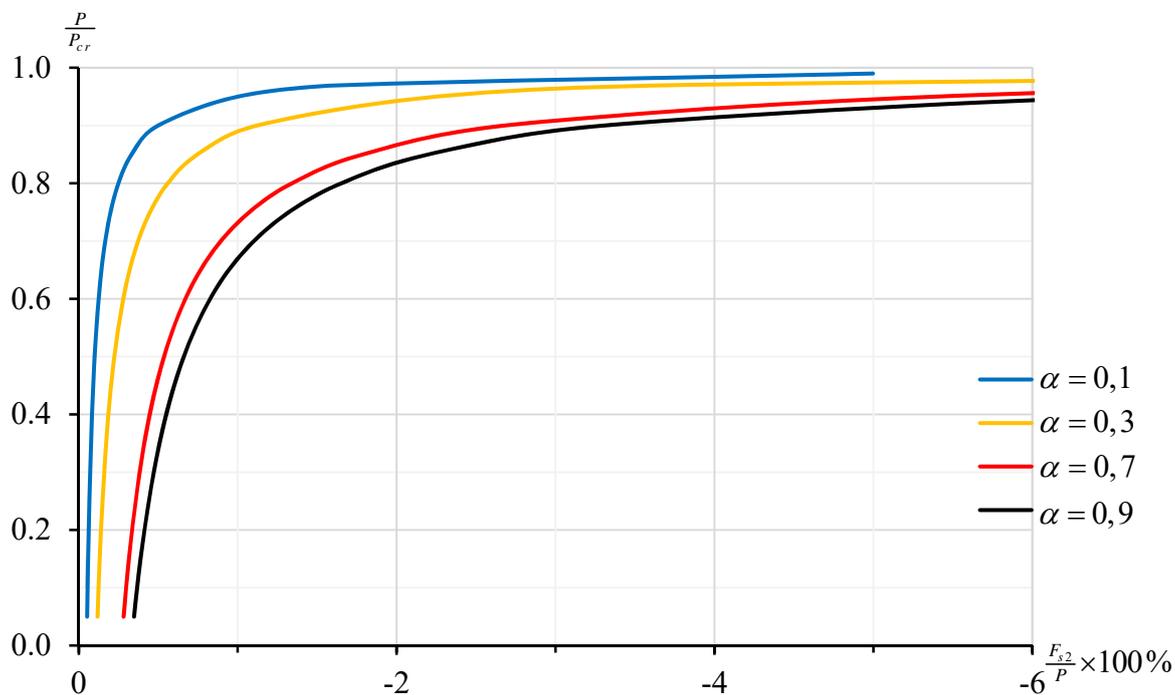


Figura 3.11 – Exemplo 2 – Força no apoio flexível da extremidade direita como percentagem da força de compressão na coluna, para $\tilde{k} = 300 > 4\pi^2(3 + \sqrt{5})$ e valores seleccionados de α (imperfeição geométrica com a forma do modo crítico de instabilidade e amplitude $e_0 = L/1000$)

Voltemos agora a nossa atenção para a imperfeição geométrica definida por (73) ou, em termos adimensionais, por (74). Para este caso, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{w}(\alpha) - \tilde{w}_0(\alpha)}{e_0 / L} &= 4 \tilde{P}^{1/2} (-\tilde{k} + \tilde{P}) \left[2 \sin(\alpha \tilde{P}^{1/2}) + 2 \sin((1-\alpha) \tilde{P}^{1/2}) - (2 + \alpha(1-\alpha) \tilde{P}) \sin(\tilde{P}^{1/2}) \right] / \\ &\quad \left\{ \tilde{k}^2 \left[\alpha(1-\alpha) \tilde{P}^{1/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}) - \sin(\alpha \tilde{P}^{1/2}) \sin((1-\alpha) \tilde{P}^{1/2}) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{k} \tilde{P} \left[\sin(\alpha \tilde{P}^{1/2}) \sin((1-\alpha) \tilde{P}^{1/2}) - (1+\alpha) \tilde{P}^{1/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}) \right] + \tilde{P}^{5/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}) \right\} \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{w}(1) - \tilde{w}_0(1)}{e_0 / L} &= 4 \alpha \tilde{k} \tilde{P}^{1/2} \left[2 \sin(\alpha \tilde{P}^{1/2}) + 2 \sin((1-\alpha) \tilde{P}^{1/2}) - (2 + \alpha(1-\alpha) \tilde{P}) \sin(\tilde{P}^{1/2}) \right] / \\ &\quad \left\{ \tilde{k}^2 \left[\alpha(1-\alpha) \tilde{P}^{1/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}) - \sin(\alpha \tilde{P}^{1/2}) \sin((1-\alpha) \tilde{P}^{1/2}) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{k} \tilde{P} \left[\sin(\alpha \tilde{P}^{1/2}) \sin((1-\alpha) \tilde{P}^{1/2}) - (1+\alpha) \tilde{P}^{1/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}) \right] + \tilde{P}^{5/2} \sin(\tilde{P}^{1/2}) \right\} \end{aligned} \quad (80)$$

grandezas que estão representadas graficamente nas Figuras 3.12-3.15 para dois valores distintos de \tilde{k} (as convenções gráficas são idênticas às adoptadas nas Figuras 3.5 e 3.6). À semelhança do exemplo 1, verifica-se que:

- (i) Para $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ou para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\tilde{k} \leq 4 \pi^2 (3 + \sqrt{5})$, as curvas carga *versus* deslocamento apresentam uma assíntota horizontal correspondente ao valor da carga crítica da coluna perfeita correspondente.
- (ii) Para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\tilde{k} > 4 \pi^2 (3 + \sqrt{5})$, as curvas apresentam uma assíntota horizontal correspondente ao valor da segunda carga de bifurcação da coluna perfeita correspondente, em virtude da ortogonalidade entre o modo crítico de instabilidade e a imperfeição geométrica. Quando se atinge a carga crítica, ocorre uma bifurcação do equilíbrio da coluna imperfeita.

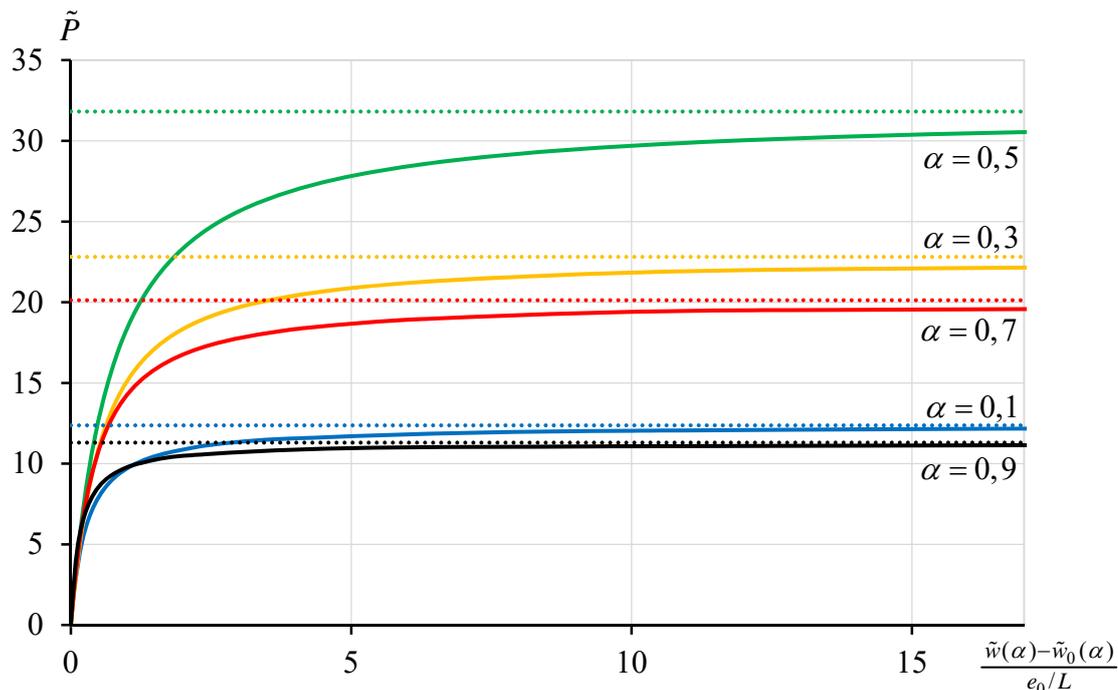


Figura 3.12 – Exemplo 2 – Deslocamento transversal da secção contraventada para $\tilde{k} = 150 < 4\pi^2(3 + \sqrt{5})$ e valores seleccionados de α (imperfeição quadrática)

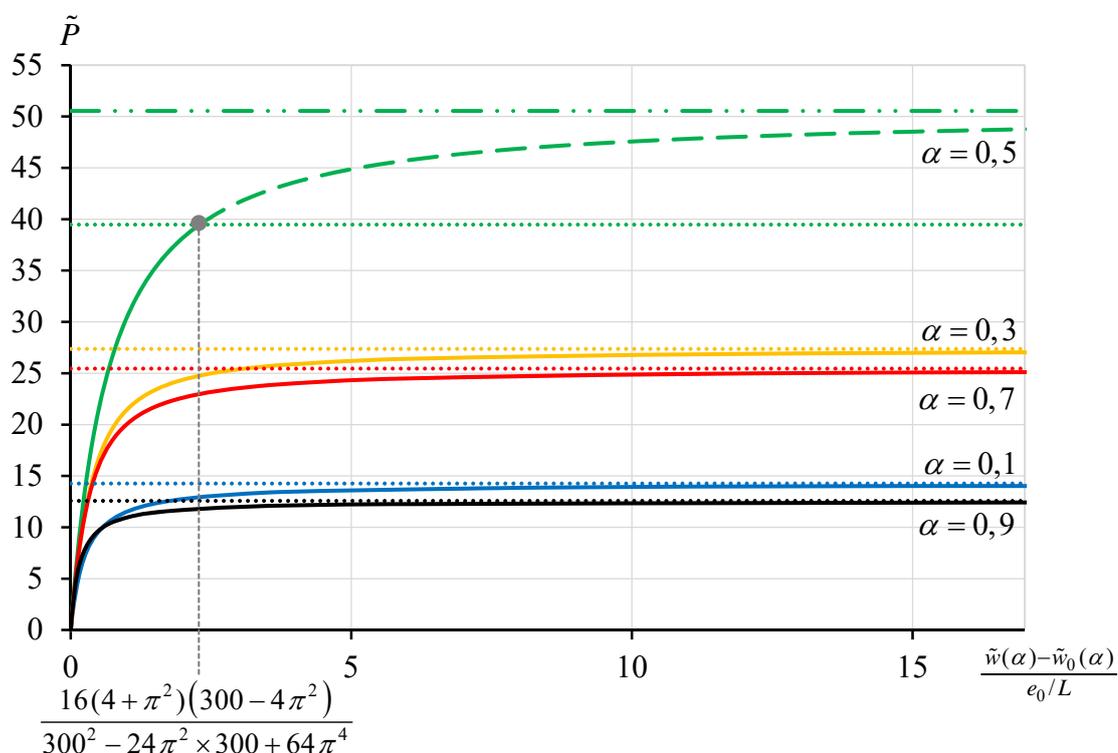


Figura 3.13 – Exemplo 2 – Deslocamento transversal da secção contraventada para $\tilde{k} = 300 > 4\pi^2(3 + \sqrt{5})$ e valores seleccionados de α (imperfeição quadrática)

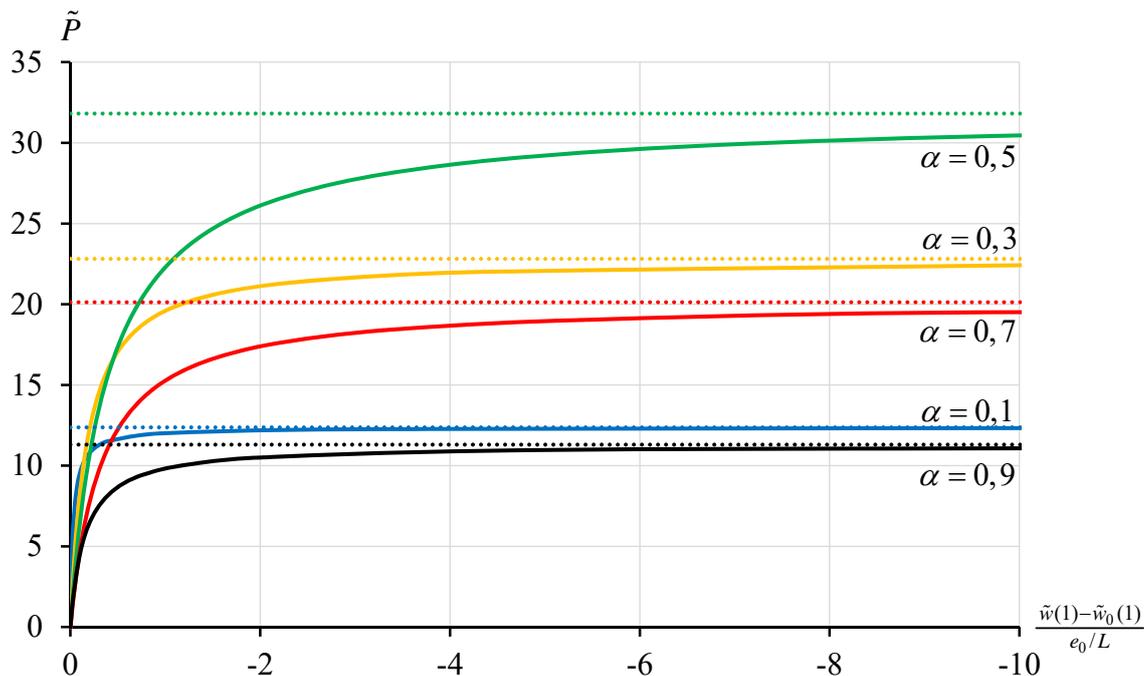


Figura 3.14 – Exemplo 2 – Deslocamento transversal na extremidade direita da coluna para $\tilde{k} = 150 < 4 \pi^2 (3 + \sqrt{5})$ e valores seleccionados de α (imperfeição quadrática)

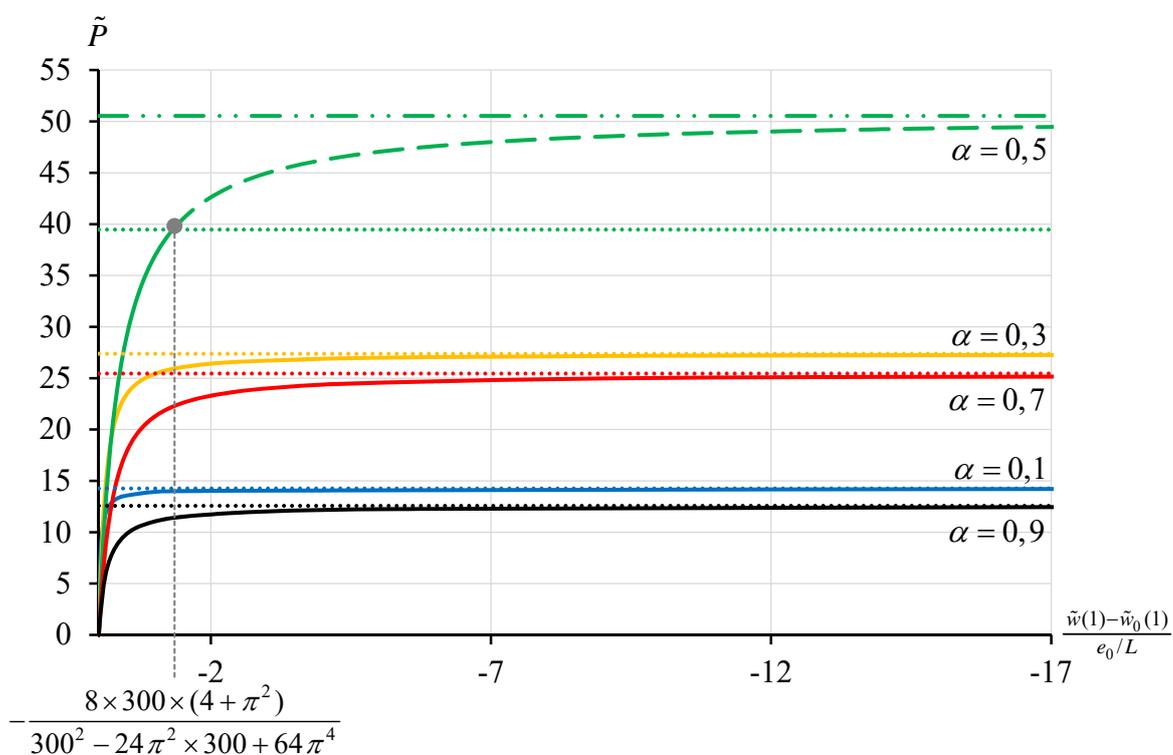


Figura 3.15 – Exemplo 2 – Deslocamento transversal na extremidade direita da coluna para $\tilde{k} = 300 > 4 \pi^2 (3 + \sqrt{5})$ e valores seleccionados de α (imperfeição quadrática)

4 CONCLUSÃO

Nesta dissertação estudou-se o comportamento elástico de colunas planas com contraventamento discretos. Consideraram-se colunas perfeitas e colunas com uma configuração indeformada não rectilínea. Os contraventamentos foram modelados por intermédio de molas elásticas lineares, de translação ou de rotação, com uma rigidez eventualmente infinita. Desprezaram-se as deformações por esforço transversal na coluna e adoptou-se uma relação linearizada deslocamento transversal-curvatura, válida para pequenas rotações. Os problemas, perfeito e imperfeito, foram primeiro formulados matematicamente em termos gerais. Com o objectivo de ilustrar a influência da posição e rigidez dos contraventamentos de translação, realizou-se depois um estudo analítico detalhado de dois casos particulares – colunas prismáticas em compressão uniforme, simplesmente apoiadas nas extremidades (podendo o apoio simples ser rígido ou flexível) e com um contraventamento translacional intermédio, igualmente rígido ou flexível, localizado numa posição arbitrária do vão. Para as colunas perfeitas, determinaram-se as cargas críticas e os correspondentes modos críticos de instabilidade. Para as colunas imperfeitas, avaliaram-se os deslocamentos transversais e as forças no contraventamento e apoio flexíveis em função do nível de compressão aplicado. Para este efeito, adoptaram-se dois tipos de configuração indeformada inicial, uma com a forma do modo crítico de instabilidade da coluna perfeita correspondente e outra com uma forma simétrica em relação à secção de meio vão, descrita por uma função quadrática.

Para as colunas perfeitas, as principais conclusões retiradas dos dois exemplos de aplicação foram as seguintes:

- (i) Só para colunas com dois tramos iguais existe um valor da rigidez k do contraventamento acima do qual a carga crítica da coluna permanece constante; o modo crítico de instabilidade correspondente anula-se na secção contraventada (meio vão) e, no caso do

exemplo 2, também no apoio extremo não rígido (situação de contraventamento total, na terminologia de Winter).

- (ii) Quando o contraventamento intermédio divide a coluna em dois vãos desiguais, a carga crítica é uma função estritamente crescente de k , com um limite superior; para valores elevados de k , a taxa de crescimento é reduzida.
- (iii) No exemplo 1, em virtude da simetria do problema, a posição óptima do contraventamento – aquela para a qual a carga crítica atinge o seu valor máximo – é sempre a meio vão, independentemente da sua rigidez k . No exemplo 2, a ausência de simetria determina que a posição óptima do contraventamento dependa de k .

Para as colunas imperfeitas, os dois exemplos permitiram constatar que:

- (i) A forma da imperfeição geométrica a considerar na análise pode depender do objectivo pretendido – verificação da segurança da coluna ou verificação da segurança do sistema de contraventamento.
- (ii) Uma imperfeição com a forma do modo crítico é amplificada pelo factor

$$\frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}},$$

que tende para $+\infty$ quando $P \rightarrow P_{cr}$ por valores inferiores.

- (iii) Quando a imperfeição é ortogonal ao modo crítico de instabilidade, ocorre uma bifurcação do equilíbrio da coluna imperfeita para $P = P_{cr}$.
- (iv) As forças nos elementos de contraventamento permanecem pequenas até a compressão na coluna se aproximar do valor crítico, aumentando depois significativamente.

Como base na experiência adquirida durante a realização deste trabalho, sugerem-se os seguintes desenvolvimentos futuros:

- (i) Aprofundamento do estudo de colunas com contraventamentos rotacionais.

- (ii) Análise de sistema designados na literatura anglo-saxónica por “lean-on”, nos quais uma coluna se apoia em elementos adjacentes de forma a garantir a sua estabilidade (Figura 4.1)
- (iii) Consideração colunas actuadas por várias cargas com variação independente (carregamentos multi-paramétricos).

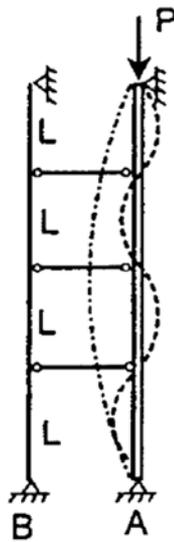


Figura 4.1 – Exemplo de um sistema “lean-on” (Ziemian, 2010)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bazant, Z.P., Cedolin, L. (1991). “Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories”. Oxford University Press, Nova Iorque.
- Birkhoff, G., Rota, G.-C. (1989). “Ordinary Differential Equations” (4ª edição). Wiley, Nova Iorque.
- Brush, D.O., Almroth, B.O. (1975). “Buckling of Bars, Plates, and Shells”. McGraw-Hill, Nova Iorque.
- Budiansky, B., Seide, P., Weinberger, R.A. (1948). “The Buckling of a Column on Equally Spaced Deflectional and Rotational Springs”. Technical Note n. 1519, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington.
- Campos Ferreira, J. (1987). “Introdução à Análise Matemática”. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Dias da Silva, V. (2013). “Mecânica e Resistência dos Materiais” (4ª edição). Coimbra.
- ECCS – European Convention for Constructional Steelwork (1976). “Manual on Stability of Steel Structures” (2ª edição).
- Hirt, M.A., Bez, R., Nussbaumer, A. (2015). “Construction Métallique – Notions Fondamentales et Méthodes de Dimensionnement” (2ª edição). Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne.
- NP EN 1993-1-1 (2010). “Eurocódigo 3 – Projecto de Estruturas de Aço. Parte 1-1: Regras Gerais e Regras para Edifícios”. Instituto Português da Qualidade, Caparica.
- Plaut, R.H. (1993). “Requirements for Lateral Bracing of Columns with Two Spans”. Journal of Structural Engineering – ASCE, Vol. 119, Issue 10, 2913-2931.

- Plaut, R.H., Yang, J.-G. (1993). “Lateral Bracing Forces in Columns with Two Unequal Spans”. *Journal of Structural Engineering – ASCE*, Vol. 119, Issue 10, pp. 2896-2912.
- Plaut, R.H., Yang, Y.-W. (1995). “Behavior of Three-Span Braced Columns with Equal or Unequal Spans, *Journal of Structural Engineering – ASCE*, Vol. 121, Issue 6, pp. 986-994.
- REAPE (1986). “Regulamento de Estruturas de Aço para Edifícios”. Decreto-Lei n.º 211/86 de 31 de Julho.
- Reis, A., Camotim, D. (2001). “Estabilidade Estrutural”. McGraw-Hill, Lisboa.
- Santana, A.P., Queiró J.F. (2010). “Introdução à Álgebra Linear”. Gradiva, Lisboa.
- Saibel, E. (1952). “Buckling of continuous beams on elastic supports”. *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 253, Issue 6, pp. 563-566.
- Stanway, G.S., Chapman, J.C., Dowling, P.J. (1992). “A Simply Supported Imperfect Column with a Transverse Elastic Restraint at Any Position – Part 1: Behaviour”. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers – Structures and Buildings*, Vol. 94, Issue 2, pp. 205-216.
- Timoshenko, S.P., Gere, J.M. (1961). “Theory of Elastic Stability” (2ª edição). McGraw-Hill, Singapura.
- Trahair, N.S., Nethercot, D.A. (1984). “Bracing Requirements in Thin-Walled Structures”. *Developments in Thin-Walled Structures 2*, J. Rhodes e A.C. Walker (Eds.), Elsevier, Amesterdão, pp. 93–130.
- Tu, S.-N. (1944). “Column with Equal-Spaced Elastic Supports”. *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 11, Issue 1, pp. 67-72 e 75.
- Winter, G. (1960). “Lateral Bracing of Columns and Beams”. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Paper n. 3044, 807-826.
- Wolfram Research (2006). “Wolfram Mathematica 6.2”. Champaign, Illinois.
- Yura, J.A. (1996). “Winter’s Bracing Approach Revisited”. *Engineering Structures*, Vol. 18, Issue 10, pp. 821-825.
- Ziemian, R.D. (Ed.) (2010), “Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures” (6ª edição). Wiley, Hoboken, New Jersey.
-

Zuk, W. (1956). "Lateral Bracing Forces on Beams and Columns". *Journal of the Engineering Mechanics Division – ASCE*, Vol. 82, Issue 3, pp. 1-16.