Álgebras Celulares

Teresa Gomes Cipriano Nabais Conde

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Álgebras Celulares

Teresa Gomes Cipriano Nabais Conde

Dissertação para a obtenção do Grau de **Mestre em Matemática**

Área de Especialização em **Geometria, Álgebra e Análise**

Júri

Presidente:	Professora Doutora Maria Teresa Fernandes de Oliveira Martins
Co-Orientador:	Professora Doutora Ana Paula Jacinto Santana Ramires
Co-Orientador:	Doutor Ivan Yudin
Vogal:	Professor Doutor António José Esteves Leal Duarte

Data: Junho de 2012

Resumo

As álgebras celulares estão presentes em várias áreas da Matemática e da Física e surgem, sobretudo, sob a forma de álgebras de diagramas. As álgebras de Brauer, as q-álgebras de Schur, as álgebras de Ariki-Koike, as álgebras de Temperley-Lieb e as álgebras de Birman-Wenzl são exemplos importantes desta classe de álgebras.

A noção de álgebra celular foi introduzida por Graham e Lehrer, em 1996. Estas álgebras foram, então, definidas à custa de uma base finita com certas propriedades combinatórias, particularmente úteis para o seu estudo. Mais tarde, em 1998, König e Xi apresentaram uma outra definição, mais conceptual, de álgebra celular, a qual nos permite trabalhar nestas álgebras independentemente da base considerada.

Uma das características importantes das álgebras celulares é a sua estrutura celular. Esta estrutura permite a classificação completa dos seus módulos simples.

Nesta dissertação, conjugando as definições de Graham e Lehrer e de König e Xi, expomos algumas das propriedades principais das álgebras celulares, classificamos os seus módulos simples e apresentamos alguns exemplos importantes destas álgebras, nomeadamente, as álgebras de Brauer.

Palavras Chave: álgebras celulares, álgebras de Brauer, módulos simples

Abstract

Cellular algebras arise in many fields of Mathematics and Physics, often in the form of diagram algebras. The Brauer algebra, the q-Schur algebra, the Ariki-Koike algebra, the Temperley-Lieb algebra and the Birman-Wenzl algebra are examples of this type of algebras.

The concept of cellular algebra was introduced by Graham and Lehrer, in 1996. These algebras were defined by the existence of a basis with certain combinatorial properties, which are highly suitable for studying the algebras in question. Later, in 1998, König and Xi presented a more conceptual definition of cellular algebra which allows us to work in these algebras regardless of a basis choice.

One of the most important features of cellular algebras is their cellular structure. This structure leads to a complete classification of the simple modules of a cellular algebra.

In this dissertation we introduce some of the main properties of cellular algebras, classify their simple modules and present some important examples of these algebras, namely the Brauer algebra. This is done combining the definitions of Graham and Lehrer and of König and Xi.

Keywords: cellular algebras, Brauer algebra, simple modules

Agradecimentos

Aos meus orientadores, Professora Doutora Ana Paula Santana e Doutor Ivan Yudin, agradeço o apoio incansável, o encorajamento e a paciência.

Conteúdo

Introdução

> *"It seems to me now that mathematics is capable of an artistic excellence as great as that of any music, perhaps greater; not because the pleasure it gives (although very pure) is comparable (...) to that of music, but because it gives in absolute perfection that combination, characteristic of great art, of godlike freedom, with the sense of inevitable destiny; because, in fact, it constructs an ideal world where everything is perfect but true."*
>
> - Bertrand Russell

As álgebras celulares estão presentes em várias áreas da Matemática e da Física e surgem, sobretudo, sob a forma de álgebras de diagramas.

O conceito de álgebra celular foi originalmente introduzido por Graham e Lehrer, em 1996, em [GL]. Neste artigo, as álgebras celulares são definidas à custa da existência de uma base satisfazendo determinadas condições. Esta definição foi motivada pelas propriedades da base de Kazhdan-Lusztig das álgebras de Hecke ([KL], [Wil]). Em [GL], Graham e Lehrer mostram como construir as representações irredutíveis de uma álgebra celular arbitrária sobre um corpo. Como tal, ao estudar uma álgebra sobre um corpo, é importante saber se ela possui uma estrutura celular. Em caso afirmativo, a estrutura celular da álgebra conduz à construção e classificação das suas representações irredutíveis, o que é um passo considerável no estudo da álgebra em questão.

Em [KX1], [KX2] e [KX3], König e Xi desenvolvem a teoria introduzida por Graham e Lehrer. No artigo [KX1], apresentam uma definição alternativa de álgebra celular, que se distingue da original por não depender da escolha de uma base. Em [KX2] é descrito um processo iterativo, o qual permite construir novas álgebras celulares, designadas por inflações iteradas, à custa de álgebras celulares previamente existentes.

Nos últimos anos, a teoria das álgebras celulares tem-se revelado muito conveniente para estudar várias classes de álgebras, provenientes não só da Álgebra, mas também da Topologia, da Teoria dos Nós e da Física Estatística. As álgebras de Brauer, as q-álgebras de Schur, as álgebras de Ariki-Koike, as álgebras de Temperley-Lieb e as álgebras de Birman-Wenzl são alguns exemplos de álgebras que apresentam uma estrutura celular.

Esta dissertação tem por objectivo expor algumas das propriedades principais das álgebras celulares, classificar os seus módulos simples e apresentar alguns exemplos importantes destas álgebras, nomeadamente, as álgebras de Brauer. Os resultados principais que apresentamos podem ser encontrados em [KX1], [KX2], [KX3] e [GL].

O Capítulo 1 inicia-se com a definição original de Graham e Lehrer de álgebra celular e com alguns resultados imediatos sobre esta classe de álgebras. Seguidamente, é apresentada a definição de álgebra celular dada por König e Xi e é provada a equivalência entre as duas abordagens. Terminamos com alguns resultados adicionais sobre álgebras celulares.

O Capítulo 2 é dedicado à noção de inflação iterada de álgebras celulares, definida em [KX2]. Apresentamos, em primeiro lugar, a definição de inflação de uma álgebra celular ao longo de um módulo e, seguidamente, a de inflação de uma álgebra celular ao longo de uma álgebra celular. No final do capítulo é provado que toda a álgebra celular sobre um anel comutativo R é isomorfa a uma inflação iterada de cópias de R.

No Capítulo 3, é estudada uma classe particular de álgebras, as álgebras de Brauer, e é demonstrado que estas álgebras são celulares, recorrendo à construção de inflação iterada introduzida no capítulo anterior.

Por fim, no Capítulo 4, definimos módulos celulares sobre uma álgebra celular, e estudamos as suas principais propriedades. Terminamos o capítulo mostrando que é possível classificar as representações irredutíveis de uma álgebra celular sobre um corpo à custa dos seus módulos celulares.

Ao longo deste trabalho, R denota um anel comutativo com identidade ($1 \neq 0$), A uma R-álgebra associativa que pode não ter identidade e K representa um corpo arbitrário. Caso nada seja dito em contrário, os módulos considerados são módulos à esquerda e os ideais são ideais bilaterais. Vamos convencionar que $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Capítulo 1

Conceitos fundamentais

Neste capítulo introduzimos duas definições equivalentes de álgebra celular e provamos alguns resultados básicos acerca destas álgebras.

1.1. Definição de álgebra celular

Nesta secção apresentamos a definição de álgebra celular dada por Graham e Lehrer e alguns exemplos e propriedades simples destas álgebras.

Definição 1.1 ([GL]). Uma R-álgebra A diz-se uma **álgebra celular** com dados celulares (Λ, M, C, i) se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. $(\Lambda, \leq)$ é um conjunto finito parcialmente ordenado e, para cada $\lambda \in \Lambda$, $M(\lambda)$ é um conjunto finito não vazio tal que $C : \coprod_{\lambda\in\Lambda} M(\lambda) \times M(\lambda) \longrightarrow A$ é uma aplicação injectiva. Dados $\lambda \in \Lambda$ e $s, t \in M(\lambda)$, a imagem de (s, t) por C é denotada por $C^\lambda_{s,t}$ e $\{C^\lambda_{s,t} : \lambda \in \Lambda, s, t \in M(\lambda)\}$ constitui uma R-base de A (base celular).

2. i é uma anti-involução R-linear de A, tal que $i(C^\lambda_{s,t}) = C^\lambda_{t,s}$, para $\lambda \in \Lambda$ e $s, t \in M(\lambda)$.

3. Dados $a \in A$, $\lambda \in \Lambda$ e $s, t \in M(\lambda)$ tem-se

$$aC^\lambda_{s,t} = \sum_{u\in M(\lambda)} r_a(u, s)C^\lambda_{u,t} + r', \tag{1.1}$$

   onde os coeficientes $r_a(u, s) \in R$ não dependem de t, e com r' combinação R-linear de elementos da base com índice superior estritamente inferior a λ.

Os casos que se seguem são exemplos muito simples de álgebras celulares.

Exemplo 1.1. *Para* $n \in \mathbb{N}$*, a* R*-álgebra* $M_n(R)$ *é celular, com dados celulares* (Λ, M, C, i)*, onde* $\Lambda = \{*\}$*,* $M(*) = \{1, \ldots, n\}$*,* $i(A) = A^T$*, para* $A \in M_n(R)$*, e,* *para $s, t \in M(\lambda)$, a matriz $C^*_{s,t}$ é definida por*

$$\left(C^*_{s,t}\right)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = s \text{ e } j = t, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De facto, as condições 1 e 2 da Definição 1.1 são trivialmente satisfeitas. Dada uma matriz $A = [a_{i,j}] \in M_n(R)$ e $s, t \in \{1, \ldots, n\}$, vem que $AC^*_{s,t} = \sum_{u=1}^{n} a_{u,s} C^*_{u,t}$, logo a condição 3 também se verifica.

Como caso particular, tem-se que R é uma R-álgebra celular.

Exemplo 1.2. *Dado $n \in \mathbb{N}$, considere-se a R-álgebra $A = R[x]/(x^{n+1})$. É fácil provar que A é uma álgebra celular, com dados celulares (Λ, M, C, i), onde: $\Lambda = \{0, \ldots, n\}$, com a ordenação habitual; $M(\lambda) = \{*\}$, para $\lambda \in \Lambda$; $C^\lambda_{*,*} = x^{n-\lambda} + (x^{n+1})$, para $\lambda \in \Lambda$; $i = \mathrm{id}_A$.*

Seja A uma R-álgebra celular com dados celulares (Λ, M, C, i). Aplicando i à expressão (1.1) obtém-se

$$C^\lambda_{t,s} i(a) = \sum_{u \in M(\lambda)} r_a(u, s) C^\lambda_{t,u} + i(r'). \tag{1.2}$$

Consideremos agora $\lambda \in \Lambda$ e $r, q, s, t \in M(\lambda)$ arbitrários. De (1.1) vem que

$$C^\lambda_{r,q} C^\lambda_{s,t} = \sum_{u \in M(\lambda)} r_{C^\lambda_{r,q}}(u, s) C^\lambda_{u,t} + r',$$

onde r' é uma combinação linear de elementos da base celular com índice superior estritamente inferior a λ. Por outro lado, de (1.2), tem-se que

$$C^\lambda_{r,q} C^\lambda_{s,t} = C^\lambda_{r,q} i(C^\lambda_{t,s}) = \sum_{u \in M(\lambda)} r_{C^\lambda_{t,s}}(u, q) C^\lambda_{r,u} + i(r''),$$

onde r'' (e, por conseguinte, $i(r'')$) é uma combinação linear de elementos da base celular com índice superior estritamente inferior a λ. Daqui obtemos $r' = i(r'')$, $r_{C^\lambda_{r,q}}(u, s) = 0$ para $u \neq r$, $r_{C^\lambda_{t,s}}(u, q) = 0$ para $u \neq t$ e $r_{C^\lambda_{r,q}}(r, s) = r_{C^\lambda_{t,s}}(t, q)$. Como $r_{C^\lambda_{r,q}}(r, s)$ não depende de t e $r_{C^\lambda_{t,s}}(t, q)$ não depende de r, vem que

$$C^\lambda_{r,q} C^\lambda_{s,t} = \widehat{r}_{q,s} C^\lambda_{r,t} + r'. \tag{1.3}$$

Dado $\Lambda' \subseteq \Lambda$, defina-se $J(\Lambda') = R\{C^\lambda_{s,t} : \lambda \in \Lambda', s, t \in M(\lambda)\}$, R-submódulo de A. Tem-se que

$$i(J(\Lambda')) = R\{i(C^\lambda_{s,t}) : \lambda \in \Lambda', s, t \in M(\lambda)\} = J(\Lambda'). \tag{1.4}$$

Dada uma ordem parcial $(\Lambda, \leq)$ e $\Phi \subseteq \Lambda$, dizemos que Φ é um *ideal* de Λ se

$$\forall \phi \in \Phi \; \forall \lambda \in \Lambda \;\; (\lambda \leq \phi \Rightarrow \lambda \in \Phi).$$

Lema 1.1. *Seja A uma R-álgebra celular com dados celulares (Λ, M, C, i) e Φ um ideal de Λ. Então $J(\Phi)$ é um ideal de A.*

Demonstração. Repare-se que $J(\Phi)$ é R-submódulo de A, logo é um subgrupo aditivo de A. Consideremos $a \in A$ e $C^{\lambda}_{s,t}$, $\lambda \in \Phi$, $s, t \in M(\lambda)$, arbitrários. De (1.1) vem que $aC^{\lambda}_{s,t} \in J(\Phi)$ e de (1.2) conclui-se que $C^{\lambda}_{s,t}a \in J(\Phi)$. Atendendo a que $\{C^{\lambda}_{s,t} : \lambda \in \Lambda', s, t \in M(\lambda)\}$ gera $J(\Phi)$ como R-módulo, conclui-se que $J(\Phi)$ é um ideal de A. □

Dado $\lambda \in \Lambda$, considere-se $\Phi_{\leq\lambda} = \{\mu \in \Lambda : \mu \leq \lambda\}$, ideal de Λ. Denotemos $J(\Phi_{\leq\lambda})$, ideal de A, por $J(\leq \lambda)$. Definamos de forma análoga o ideal $J(< \lambda)$.

Proposição 1.2. *As seguintes propriedades são válidas:*

1. *Se A for uma R-álgebra celular então A^{op} é celular.*

2. *A soma directa de um número finito de álgebras celulares é celular.*

3. *Seja K um corpo algebricamente fechado. Toda a K-álgebra semi-simples de dimensão finita tem uma estrutura celular.*

4. *O produto tensorial de um número finito de álgebras celulares é celular.*

5. *Se A for uma R-álgebra celular com dados celulares (Λ, M, C, i) e se $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$ forem dois ideais de Λ, então $Q(\Phi_2 - \Phi_1) = J(\Phi_2)/J(\Phi_1)$ é uma R-álgebra celular.*

6. *Seja A uma R-álgebra celular e seja $\theta : R \longrightarrow R'$ um homomorfismo de anéis que preserva a identidade. Então, a extensão de escalares $A^{\theta} = R' \otimes_R A$ é uma R'-álgebra celular.*

Demonstração. 1. Se A for uma R-álgebra celular com dados celulares (Λ, M, C, i), então A^{op} é uma álgebra celular com dados celulares (Λ, M, D, i), onde $D^{\lambda}_{s,t} = C^{\lambda}_{t,s}$, $\lambda \in \Lambda$, $s, t \in M(\lambda)$. As condições 1 e 2 da Definição 1.1 são trivialmente satisfeitas. Denotando por $*$ a multiplicação em A^{op}, vem que, para $a \in A$, $\lambda \in \Lambda$ e $s, t \in M(\lambda)$,

$$a * D^{\lambda}_{s,t} = C^{\lambda}_{t,s}a = \sum_{u \in M(\lambda)} r_{i(a)}(u, s)C^{\lambda}_{t,u} + r' = \sum_{u \in M(\lambda)} r_{i(a)}(u, s)D^{\lambda}_{u,t} + r',$$

onde os coeficiente $r_{i(a)}(u, s)$ não dependem de t e com r' combinação linear de elementos da base $\{D^{\lambda}_{s,t} : \lambda \in \Lambda, s, t \in M(\lambda)\}$ com índice superior estritamente inferior a λ.

2. Basta provar que a soma directa de duas álgebras celulares é celular. Sejam A_1 e A_2 R-álgebras celulares com dados celulares (Λ_1, M_1, C, i_1) e (Λ_2, M_2, D, i_2), respectivamente. É simples verificar que $A_1 \oplus A_2$ é uma R-álgebra celular com dados celulares $(\Lambda_1 + \Lambda_2, N, E, i_1 + i_2)$, onde: $\Lambda_1 + \Lambda_2$ é o coproduto de Λ_1 e Λ_2 na categoria dos conjuntos parcialmente ordenados; para cada $\lambda \in \Lambda_1 + \Lambda_2$, $N(\lambda) = M_1(\lambda)$ se $\lambda \in \Lambda_1$ e $N(\lambda) = M_2(\lambda)$ caso contrário; dados $\lambda \in \Lambda_1 + \Lambda_2$ e $s, t \in N(\lambda)$, $E^\lambda_{s,t} = C^\lambda_{s,t}$ se $\lambda \in \Lambda_1$ e $E^\lambda_{s,t} = D^\lambda_{s,t}$ caso contrário.

3. Pelo Teorema de Wedderburn, toda a K-álgebra semi-simples de dimensão finita, com K corpo algebricamente fechado, é isomorfa à soma directa de um número finito de álgebras $M_n(K)$. Do Exemplo 1.1 e da alínea anterior decorre o pretendido.

4. Também neste caso basta demonstrar que o produto tensorial de duas álgebras celulares é celular. Consideremos A_1 e A_2, R-álgebras celulares com dados celulares (Λ_1, M_1, C, i_1) e (Λ_2, M_2, D, i_2), respectivamente. Mostremos que a R-álgebra $A_1 \otimes_R A_2$ (ver, por exemplo, [Cohn, §5.5, Theorem 5.1]) é celular com dados celulares $(\Lambda_1 \times \Lambda_2, N, E, i_1 \otimes_R i_2)$, onde: $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ é o produto de Λ_1 e Λ_2 na categoria dos conjuntos parcialmente ordenados; para cada $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$, $N(\lambda_1, \lambda_2) = M_1(\lambda_1) \times M_2(\lambda_2)$; dados $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ e $(s_1, s_2), (t_1, t_2) \in N(\lambda_1, \lambda_2)$, $E^{(\lambda_1,\lambda_2)}_{(s_1,s_2),(t_1,t_2)} = C^{\lambda_1}_{s_1,t_1} \otimes_R D^{\lambda_2}_{s_2,t_2}$. Verifica-se facilmente que as condições 1 e 2 da Definição 1.1 são satisfeitas. Por outro lado, dados $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$, tem-se

$$\begin{aligned}
&(a_1 \otimes_R a_2)\, E^{(\lambda_1,\lambda_2)}_{(s_1,s_2),(t_1,t_2)} = \left(a_1 C^{\lambda_1}_{s_1,t_1}\right) \otimes_R \left(a_2 D^{\lambda_2}_{s_2,t_2}\right) \\
&= \left(\sum_{u_1 \in M_1(\lambda_1)} r^{(1)}_{a_1}(u_1, s_1) C^{\lambda_1}_{u_1,t_1} + r' \right) \otimes_R \left(\sum_{u_2 \in M_2(\lambda_2)} r^{(2)}_{a_2}(u_2, s_2) D^{\lambda_2}_{u_2,t_2} + r'' \right) \\
&= \sum_{(u_1,u_2) \in N(\lambda_1,\lambda_2)} r^{(1)}_{a_1}(u_1, s_1) r^{(2)}_{a_2}(u_2, s_2) E^{(\lambda_1,\lambda_2)}_{(u_1,u_2),(t_1,t_2)} + r''',
\end{aligned}$$

onde r' é uma combinação linear de elementos da base celular de A_1 com índice superior estritamente inferior a λ_1 e r'' é uma combinação linear de elementos da base celular de A_2 com índice superior estritamente inferior a λ_2. O elemento r''' é dado por

$$\left(\left(\sum_{u_1 \in M_1(\lambda_1)} r^{(1)}_{a_1}(u_1, s_1) C^{\lambda_1}_{u_1,t_1} \right) \otimes_R r'' \right) + \left(r' \otimes_R \left(\sum_{u_2 \in M_2(\lambda_2)} r^{(2)}_{a_2}(u_2, s_2) D^{\lambda_2}_{u_2,t_2} \right) \right)$$
$$+ (r' \otimes_R r''),$$

ou seja, é uma combinação linear dos elementos de

$$\{E^{(\lambda_1,\lambda_2)}_{(s_1,s_2),(t_1,t_2)} : (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2, (s_1, s_2), (t_1, t_2) \in N(\lambda_1, \lambda_2)\},$$

com índice superior estritamente inferior a (λ_1, λ_2) no conjunto parcialmente ordenado $\Lambda_1 \times \Lambda_2$. Daqui conclui-se que a condição 3 da Definição 1.1 é satisfeita.

5. Como $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$ tem-se $J(\Phi_1) \subseteq J(\Phi_2)$ e podemos considerar o R-módulo $J(\Phi_2)/J(\Phi_1)$. Uma vez que Φ_1 e Φ_2 são ideais de Λ, o Lema 1.1 permite-nos concluir que $J(\Phi_2)$ é um anel e que $J(\Phi_1)$ é um ideal de $J(\Phi_2)$. Isto mostra que $J(\Phi_2)/J(\Phi_1)$ é uma R-álgebra. Considere-se agora o conjunto $\Phi_2 - \Phi_1$ munido com a relação de ordem parcial herdada de Λ. Repare-se que

$$\mathcal{B} = \{D^\lambda_{s,t} : \lambda \in \Phi_2 - \Phi_1, s, t \in M(\lambda)\},$$

onde $D^\lambda_{s,t} = C^\lambda_{s,t} + J(\Phi_1)$, constitui uma R-base de $J(\Phi_2)/J(\Phi_1)$. Seja

$$i' : J(\Phi_2)/J(\Phi_1) \longrightarrow J(\Phi_2)/J(\Phi_1)$$

a função definida por $i'(a + J(\Phi_1)) = i(a) + J(\Phi_1)$. Esta função está bem definida pois i é aditiva e, por (1.4), $i(J(\Phi_1)) = J(\Phi_1)$ e $i(J(\Phi_2)) = J(\Phi_2)$. É simples verificar que i' é uma anti-involução R-linear em $J(\Phi_2)/J(\Phi_1)$, satisfazendo $i'(D^\lambda_{s,t}) = D^\lambda_{t,s}$ para $\lambda \in \Phi_2 - \Phi_1$ e $s, t \in M(\lambda)$. Dados $a + J(\Phi_1) \in J(\Phi_2)/J(\Phi_1)$, $\lambda \in \Phi_2 - \Phi_1$ e $s, t \in M(\lambda)$, vem que

$$(a + J(\Phi_1))D^\lambda_{s,t} = \sum_{u \in M(\lambda)} r_a(u, s) D^\lambda_{u,t} + r',$$

onde r' é uma combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$ com índice superior estritamente inferior a λ. Daqui decorre que $J(\Phi_2)/J(\Phi_1)$ é uma álgebra celular com dados celulares $(\Phi_2 - \Phi_1, N, D, i')$, onde $N(\lambda) = M(\lambda)$, $\lambda \in \Phi_2 - \Phi_1$. Pelo que vimos, a R-álgebra $J(\Phi_2)/J(\Phi_1)$ depende apenas de $\Phi_2 - \Phi_1$ sob o ponto de vista estrutural, logo podemos denotar esta álgebra por $Q(\Phi_2 - \Phi_1)$.

6. O anel R' é um R-módulo para a acção $*$ definida por $r * s' = \theta(r)s'$, $r \in R, s' \in R'$. Considere-se a extensão de escalares $A^\theta = R' \otimes_R A$. Por um lado A^θ é um R'-módulo. Por outro lado, como R' e A são R-álgebras, A^θ é uma R-álgebra ([Cohn, §5.5, Theorem 5.1]). É muito simples verificar que $s'(b_1 b_2) = (s' b_1) b_2 = b_1(s' b_2)$, $s' \in R'$, $b_1, b_2 \in A^\theta$. Logo A^θ é, de facto, uma R'-álgebra. Suponhamos que A tem dados celulares (Λ, M, C, i). Prova-se facilmente que o conjunto $\{1 \otimes_R C^\lambda_{s,t} : \lambda \in \Lambda, s, t \in M(\lambda)\}$ é uma R'-base de A^θ. Além disso, $\mathrm{id}_{R'} \otimes_R i$ é uma anti-involução R'-linear de A^θ que verifica $(\mathrm{id}_{R'} \otimes_R i)\,(1 \otimes_R C^\lambda_{s,t}) = 1 \otimes_R C^\lambda_{t,s}$. Demonstra-se facilmente que A^θ é uma R' álgebra celular com dados celulares $(\Lambda, M, D, \mathrm{id}_{R'} \otimes_R i)$, onde $D^\lambda_{s,t} = 1 \otimes_R C^\lambda_{s,t}$, $\lambda \in \Lambda$, $s, t \in M(\lambda)$. As condições 1 e 2 da Definição 1.1 são claramente

satisfeitas. Por outro lado, para $\lambda \in \Lambda$, $s, t \in M(\lambda)$, $s' \in R'$ e $a \in A$, vem

$$\begin{aligned}
\left(s' \otimes_R a\right) D^{\lambda}_{s,t} &= s' \otimes_R \left(aC^{\lambda}_{s,t}\right) = s' \otimes_R \left(\sum_{u \in M(\lambda)} r_a(u,s) C^{\lambda}_{u,t} + r'\right) \\
&= \sum_{u \in M(\lambda)} \left(r_a(u,s) * s'\right) \left(1 \otimes_R C^{\lambda}_{u,t}\right) + s' \left(1 \otimes_R r'\right),
\end{aligned}$$

onde r' é uma combinação linear de elementos da base celular de A com índice superior estritamente inferior a λ. Daqui conclui-se que a condição 3 da Definição 1.1 também se verifica. □

1.2. Uma nova definição de álgebra celular

Em [KX1], König e Xi apresentaram uma outra definição mais conceptual de álgebra celular. Seguidamente introduzimos esta definição e mostramos a sua equivalência à definição dada por Graham e Lehrer.

Comecemos por definir ideal celular.

Definição 1.2. Seja A uma R-álgebra, J um ideal e um R-submódulo de A e i uma anti-involução R-linear em A. Diz-se que J é um **ideal celular** de A relativamente a i se:

1. $i(J) = J$;

2. existir um ideal esquerdo de A, Δ, finitamente gerado e livre sobre R, com $\Delta \subseteq J$;

3. existir um isomorfismo R-linear de (A, A)-bimódulos $\alpha : J \longrightarrow \Delta \otimes_R i(\Delta)$ que torne o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"'] & \Delta \otimes_R i(\Delta) \arrow[d, "\varphi : x \otimes_R y \longmapsto i(y) \otimes_R i(x)"] \\
J \arrow[r, "\alpha"] & \Delta \otimes_R i(\Delta)
\end{tikzcd}.$$

Seja A um anel, i um anti-homomorfismo de anéis e Δ um ideal esquerdo de A. É fácil demonstrar que $i(\Delta)$ é um ideal direito de A. Se, além disso, Δ for um R-módulo e i for R-linear, vem que $\Delta \otimes_R i(\Delta)$ é simultaneamente um R-módulo e um (A, A)-bimódulo, pelo que a condição 3 da Definição 1.2 faz sentido.

Lema 1.3. *Seja A uma R-álgebra, i uma anti-involução R-linear em A e J um ideal celular de A relativamente a i. Então J é uma R-álgebra celular com dados celulares $(\{*\}, M, C, i|_J)$ e $aC^*_{s,t} = \sum_{u=1}^m r_a(u,s)C^*_{u,t}$, quaisquer que sejam $a \in A$ e $s, t \in M(*)$.*

Demonstração. Por J ser um ideal celular de A relativamente a i existe um ideal esquerdo de A, Δ, finitamente gerado e livre sobre R, com $\Delta \subseteq J$. Seja $\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ uma R-base de Δ. Como existe um isomorfismo R-linear de (A, A)-bimódulos $\alpha : J \longrightarrow \Delta \otimes_R i(\Delta)$, J é um R-submódulo livre de A com R-base $\{C^*_{s,t} : s, t = 1, \ldots, m\}$, onde $C^*_{s,t} = \alpha^{-1}(\delta_s \otimes_R i(\delta_t))$. Para $s, t = 1, \ldots, m$, vem que $\alpha\left(i\left(C^*_{s,t}\right)\right) = \varphi(\delta_s \otimes_R i(\delta_t)) = \alpha\left(C^*_{t,s}\right)$, portanto $i(C^*_{s,t}) = C^*_{t,s}$. Por outro lado, dado $a \in A$, vem que

$$\alpha\left(aC^*_{s,t}\right) = (a\delta_s) \otimes_R i(\delta_t) = \left(\sum_{u=1}^m r_a(u,s)\delta_u\right) \otimes_R i(\delta_t) = \alpha\left(\sum_{u=1}^m r_a(u,s)C^*_{u,t}\right),$$

logo $aC^*_{s,t} = \sum_{u=1}^m r_a(u,s)C^*_{u,t}$. □

Considere-se agora $(\Lambda, \leq)$, conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que $\mu \in \Lambda$ é um *elemento minimal* de Λ se $\forall \lambda \in \Lambda\ (\lambda \leq \mu \Rightarrow \lambda = \mu)$. Prova-se facilmente que todo o conjunto finito parcialmente ordenado tem algum elemento minimal.

Lema 1.4. *Seja A uma R-álgebra celular com dados celulares (Λ, M, C, i). Seja $\mu \in \Lambda$ um elemento minimal de Λ. Então $J(\leq \mu) = J(\{\mu\})$ é um ideal celular de A relativamente a i.*

Demonstração. Por (1.4) e pelo Lema 1.1 conclui-se que $J(\leq \mu) = J(\{\mu\})$ é um ideal de A invariante por i. Fixemos arbitrariamente $f \in M(\mu)$ e consideremos $\Delta = R\{C^\mu_{s,f} : s \in M(\mu)\} \subseteq J(\{\mu\})$, R-submódulo de A finitamente gerado e livre. De (1.1) vem que Δ é uma ideal esquerdo de A. Consequentemente, $i(\Delta)$, R-submódulo livre e ideal direito de A, tem por R-base o conjunto $\{C^\mu_{f,s} : s \in M(\mu)\}$. Seja $\alpha : J(\{\mu\}) \longrightarrow \Delta \otimes_R i(\Delta)$ o homomorfismo de R-módulos definido por $\alpha(C^\mu_{s,t}) = C^\mu_{s,f} \otimes_R C^\mu_{f,t}$. A aplicação α é, aliás, um isomorfismo de R-módulos pois transforma uma R-base numa R-base. Por outro lado,

$$\alpha\left(aC^\mu_{s,t}\right) = \alpha\left(\sum_{u \in M(\mu)} r_a(u,s)C^\lambda_{u,t}\right) = \sum_{u \in M(\mu)} r_a(u,s)\left(C^\mu_{u,f} \otimes_R C^\mu_{f,t}\right)$$
$$= \left(aC^\mu_{s,f}\right) \otimes_R C^\mu_{f,t} = a\alpha\left(C^\mu_{s,t}\right),$$

para $a \in A$ e $s,t \in M(\mu)$ quaisquer. Prova-se, de forma análoga, que $\alpha(C^{\mu}_{s,t}a) = \alpha(C^{\mu}_{s,t})a$, $a \in A$ e $s,t \in M(\mu)$. Como tal, α é um homomorfismo de (A,A)-bimódulos. Finalmente, tem-se $(\alpha \circ i)(C^{\mu}_{s,t}) = C^{\mu}_{t,f} \otimes_R C^{\mu}_{f,s} = (\varphi \circ \alpha)(C^{\mu}_{s,t})$, onde $\varphi : \Delta \otimes_R i(\Delta) \longrightarrow \Delta \otimes_R i(\Delta)$ é o único homomorfismo de R-módulos que verifica $\varphi(x \otimes y) = i(y) \otimes_R i(x)$, $x \in \Delta, y \in i(\Delta)$. Isto prova o pretendido. $\square$

Seja A uma R-álgebra arbitrária e i uma anti-involução R-linear em A. Suponhamos que J_1 e J_2, $J_1 \subseteq J_2$, são R-submódulos de A que satisfazem $i(J_i) = J_i$, $i = 1,2$. Suponhamos ainda J_2 é subanel de A e que J_1 é ideal de J_2. Daqui vem que J_2/J_1 é uma R-álgebra. Considere-se a aplicação $i' : J_2/J_1 \longrightarrow J_2/J_1$ definida por $i'(a + J_1) = i(a) + J_1$, $a \in J_2$. Como i é aditiva e J_1 e J_2 são invariantes por i, a aplicação i' está bem definida. É simples verificar que se trata de uma anti-involução R-linear em J_2/J_1. Designamos i' por anti-involução R-linear em induzida por i em J_2/J_1.

Definição 1.3. Seja A uma R-álgebra e i uma anti-involução R-linear em A. Dizemos que A é uma **álgebra celular** relativamente a i se:

1. existir uma decomposição de A como soma directa de R-submódulos,

$$A = J'_1 \oplus \cdots \oplus J'_n,$$

   com $i(J'_k) = J'_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$;

2. definindo $J_l = \bigoplus_{k=1}^{l} J'_k$, se obtiver uma cadeia de ideais de A (cadeia celular)

$$0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_{n-1} \subset J_n = A;$$

3. para $l = 1, \ldots, n$, o quociente J_l/J_{l-1} for um ideal celular de A/J_{l-1} relativamente à anti-involução R-linear induzida por i em A/J_{l-1}.

Lema 1.5. *Seja A uma R-álgebra celular relativamente a i (segundo a Definição 1.3), com cadeia celular $0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_{n-1} \subset J_n = A$. Se $0 \leq l_1 \leq l_2 \leq n$, então J_{l_2}/J_{l_1} é uma R-álgebra celular relativamente à anti-involução R-linear induzida por i no quociente (Definição 1.3).*

Demonstração. Suponhamos que temos $A = J'_1 \oplus \cdots \oplus J'_n$, como soma directa de R-submódulos, e consideremos $J_k = \bigoplus_{l=1}^{k} J'_l$. Ora J_{l_2}/J_{l_1} e $J'_{l_1+1} \oplus \cdots \oplus J'_{l_2}$ são R-módulos isomorfos. Desta correspondência vem

$$J_{l_2}/J_{l_1} = ((J'_{l_1+1} \oplus J_{l_1})/J_{l_1}) \oplus \cdots \oplus ((J'_{l_2} \oplus J_{l_1})/J_{l_1}),$$

como soma directa de R-submódulos. Seja i' a anti-involução R-linear induzida por i em J_{l_2}/J_{l_1}. É simples ver que, para $l = l_1+1, \ldots, l_2$,

$$i'((J'_l \oplus J_{l_1})/J_{l_1}) = (J'_l \oplus J_{l_1})/J_{l_1}.$$

Para $k = 1, \ldots, l_2 - l_1$, o R-módulo

$$\widehat{J}_k = \bigoplus_{l=l_1+1}^{l_1+k} ((J'_l \oplus J_{l_1})/J_{l_1}) = J_{l_1+k}/J_{l_1}$$

é claramente um ideal de J_{l_2}/J_{l_1}. Falta ver que, para $k = 1, \ldots, l_2 - l_1$, $\widehat{J}_k/\widehat{J}_{k-1} \cong J_{l_1+k}/J_{l_1+k-1}$ (isomorfismo de R-álgebras) é um ideal celular de $(J_{l_2}/J_{l_1})/\widehat{J}_{k-1} \cong J_{l_2}/J_{l_1+k-1}$ (isomorfismo de R-álgebras) para a anti-involução R-linear induzida por i' no quociente. Ora J_{l_1+k}/J_{l_1+k-1} é um ideal celular de A/J_{l_1+k-1} para a anti-involução R-linear induzida por i em A/J_{l_1+k-1}, $k = 1, \ldots, l_2 - l_1$. Daqui vem que J_{l_1+k}/J_{l_1+k-1} é um ideal celular de J_{l_2}/J_{l_1+k-1} para a anti-involução R-linear induzida por i em J_{l_2}/J_{l_1+k-1}, $k = 1, \ldots, l_2 - l_1$, de onde se conclui o pretendido. □

Proposição 1.6. *As Definições 1.1 e 1.3 são equivalentes, no sentido em que toda a R-álgebra celular relativamente à Definição 1.1 possui uma estrutura de R-álgebra celular segundo a Definição 1.3 e vice-versa.*

Demonstração. Seja A uma R-álgebra celular com dados celulares (Λ, M, C, i) (segundo [GL]). Suponhamos que $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ onde λ_1 é um elemento minimal de Λ e, para $l > 1$, λ_l é um elemento minimal no conjunto parcialmente ordenado $\Lambda - \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}\}$. Temos que $A = J(\{\lambda_1\}) \oplus \cdots \oplus J(\{\lambda_n\})$, como soma directa de R-submódulos. Além disso, por (1.4), $i(J(\{\lambda_l\})) = J(\{\lambda_l\})$. O R-módulo $J_l = \bigoplus_{k=1}^{l} J(\{\lambda_k\}) = J(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\})$, $l = 1, \ldots, n$, é claramente um ideal de A, pois $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$ é um ideal de Λ (ver Lema 1.1). Falta ver que J_l/J_{l-1} é um ideal celular de A/J_{l-1} relativamente à anti-involução R-linear induzida por i no quociente, para $l = 1, \ldots, n$. Fixemos $l \in \{1, \ldots, n\}$. Tomando $\Phi_1 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}\}$ e $\Phi_2 = \Lambda$ na alínea 5 da Proposição 1.2, vem que $Q(\{\lambda_l, \ldots, \lambda_n\}) = A/J_{l-1}$ é uma R-álgebra celular com dados celulares $(\{\lambda_l, \ldots, \lambda_n\}, N, D, i')$, onde $N(\lambda) = M(\lambda)$ para $\lambda \in \{\lambda_l, \ldots, \lambda_n\}$, $D^\lambda_{s,t} = C^\lambda_{s,t} + J_{l-1}$, $\lambda \in \Lambda$, $s, t \in N(\lambda)$, e i' é a anti-involução R-linear induzida por i em A/J_{l-1}. É simples ver que J_l/J_{l-1} é o R-submódulo de A/J_{l-1} gerado por $\{D^{\lambda_l}_{s,t} : s, t \in N(\lambda_l)\}$. Como λ_l é um elemento minimal em $\{\lambda_l, \ldots, \lambda_n\}$, vem, pelo Lema 1.4, que J_l/J_{l-1} é um ideal celular de A/J_{l-1} relativamente a i'.

Reciprocamente, suponhamos que A é uma R-álgebra celular relativamente a i (segundo a Definição 1.3). Então $A = J'_1 \oplus \cdots \oplus J'_n$, com $i(J'_k) = J'_k$, $k = 1, \ldots, n$. Além disso, definindo $J_l = \bigoplus_{k=1}^{l} J'_k$, obtém-se a cadeia de ideais de A

$$0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_{n-1} \subset J_n = A,$$

e, para $l = 1, \ldots, n$, o quociente J_l/J_{l-1} é um ideal celular de A/J_{l-1}, relativamente à anti-involução R-linear induzida por i em A/J_{l-1}. Procedamos por indução em n.

Se $n = 1$, vem que $A = J_1$, onde J_1 é um ideal celular de A relativamente a i. Então, pelo Lema 1.3, A é uma álgebra celular com dados celulares $(\{*\}, M, C, i)$ (Definição 1.1).

Suponhamos agora que toda R-álgebra celular relativamente à anti-involução R-linear i (Definição 1.3), com cadeia celular de comprimento n, é uma álgebra celular com dados celulares (Λ, M, C, i) (Definição 1.1), onde $|\Lambda| = n$. Seja A uma R-álgebra celular relativamente i, segundo a definição de [KX1], com cadeia celular $0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_n \subset J_{n+1} = A$. Tomando $l_2 = n + 1$ e $l_1 = 1$ no Lema 1.5, concluímos que A/J_1 é uma álgebra celular relativamente à anti-involução R-linear i', induzida por i no quociente. Aliás, sabemos que a cadeia celular obtida tem comprimento n. Então, pela hipótese de indução, concluímos que A/J_1 é uma álgebra celular com dados celulares (Λ, N_1, D, i') (Definição 1.1), onde $|\Lambda| = n$. Seja $\psi : J'_2 \oplus \cdots \oplus J'_{n+1} \longrightarrow A/J_1$ o isomorfismo de R-módulos definido por $\psi(a) = a + J_1$, $a \in J'_2 \oplus \cdots \oplus J'_{n+1}$. Definamos $C^\lambda_{s,t} = \psi^{-1}(D^\lambda_{s,t})$, $\lambda \in \Lambda$, $s, t \in N_1(\lambda)$. Como A/J_1 é um R-módulo livre com R-base $\{D^\lambda_{s,t} : \lambda \in \Lambda, s, t \in N_1(\lambda)\}$, vem que $J'_2 \oplus \cdots \oplus J'_{n+1}$ é um R-módulo livre com R-base $\{C^\lambda_{s,t} : \lambda \in \Lambda, s, t \in N_1(\lambda)\}$. Por outro lado, $J'_1 = J_1$ é um ideal celular de A relativamente a i, logo, pelo Lema 1.3, J_1 é uma R-álgebra celular relativamente a $i|_{J_1}$. Tomemos $\mu \notin \Lambda$. Sem perda de generalidade, podemos denotar os dados celulares de J_1 por $(\{\mu\}, N_2, C, i|_{J_1})$. Consideremos o conjunto $\Lambda \cup \{\mu\}$. Adicionemos à ordem parcial de Λ as relações $\mu \leq \lambda$, para todo o $\lambda \in \Lambda$. Desta forma, $\Lambda \cup \{\mu\}$ torna-se um conjunto parcialmente ordenado. Vejamos que A é uma álgebra celular, com dados celulares $(\Lambda \cup \{\mu\}, M, C, i)$, onde $M(\lambda) = N_1(\lambda)$ se $\lambda \in \Lambda$ e $M(\mu) = N_2(\mu)$. Claramente, $\{C^\lambda_{s,t} : \lambda \in \Lambda \cup \{\mu\}, s, t \in M(\lambda)\}$ constitui uma R-base de A. Além disso, tem-se que $i(C^\mu_{s,t}) = i|_{J_1}(C^\mu_{s,t}) = C^\mu_{t,s}$, $t, s \in M(\mu)$. Por outro lado, para $\lambda \in \Lambda$, $s, t \in M(\lambda)$,

$$\psi(i(C^\lambda_{s,t})) = i(C'_{s,t}) + J_1 = i'(D^\lambda_{s,t}) = D^\lambda_{t,s} = \psi(C^\lambda_{t,s}),$$

logo $i(C^\lambda_{s,t}) = C^\lambda_{t,s}$. Pelo Lema 1.3, sabemos que $aC^\mu_{s,t} = \sum_{u=1}^{n} r_a(u, s) C^\mu_{u,t}$, para

$s, t \in M(\mu)$. Para $\lambda \in \Lambda$, $s, t \in M(\lambda)$ vem

$$\begin{aligned} aC^\lambda_{s,t} + J_1 = (a + J_1)D^\lambda_{s,t} &= \sum_{u \in N(\lambda)} r_{a+J_1}(u, s)D^\lambda_{u,t} + r' \\ &= \left(\sum_{u \in N(\lambda)} r_{a+J_1}(u, s)C^\lambda_{u,t} + \psi^{-1}(r') \right) + J_1, \end{aligned}$$

onde r' é uma combinação linear de elementos da base celular de A/J_1 com índice superior estritamente inferior a λ. Isto mostra que $aC^\lambda_{s,t} = \sum_{u \in N(\lambda)} r_{a+J_1}(u, s)C^\lambda_{u,t} + r''$, onde r'' é uma combinação linear de elementos da R-base $\{C^\lambda_{s,t} : \lambda \in \Lambda \cup \{\mu\}, s, t \in M(\lambda)\}$ que apresentam índice superior estritamente inferior a λ no conjunto parcialmente ordenado $\Lambda \cup \{\mu\}$. Fica assim provado o pretendido. $\square$

Proposição 1.7. *Seja R um anel onde $1 + 1 \in \mathcal{U}_R$, A uma R-álgebra e i uma anti--involução R-linear em A. Se J for um ideal celular de A e se A/J for uma R-álgebra celular relativamente à anti-involução R-linear induzida por i em A/J então A é uma R-álgebra celular relativamente a i.*

Demonstração. Suponhamos que A/J tem dados celulares (Λ, N_1, D, i'), onde i' é a anti-involução R-linear induzida por i em A/J. Como $N_1(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, é um conjunto finito, podemos identificar $N_1(\lambda)$ com $\{1, \dots, n_\lambda\}$. Para $\lambda \in \Lambda$ e $s, t \in \{1, \dots, n_\lambda\}$, com $s < t$, definamos $C^\lambda_{s,t}$ como sendo um elemento de A tal que $C^\lambda_{s,t} + J = D^\lambda_{s,t}$. Para $\lambda \in \Lambda$ e $s, t \in \{1, \dots, n_\lambda\}$, com $s > t$, definamos $C^\lambda_{s,t} = i(C^\lambda_{t,s})$. Nesta situação tem-se $C^\lambda_{s,t} + J = i(C^\lambda_{t,s}) + J = i'(C^\lambda_{t,s} + J) = i'(D^\lambda_{t,s}) = D^\lambda_{s,t}$. Finalmente, para $\lambda \in \Lambda$ e $s \in \{1, \dots, n_\lambda\}$, defina-se $C^\lambda_{s,s} = 2^{-1}(\widehat{C}^\lambda_{s,s} + i(\widehat{C}^\lambda_{s,s}))$, onde $\widehat{C}^\lambda_{s,s} \in A$ verifica $\widehat{C}^\lambda_{s,s} + J = D^\lambda_{s,s}$. Repare-se que $C^\lambda_{s,s} + J = 2^{-1}(2D^\lambda_{s,s}) = D^\lambda_{s,s}$. Por outro lado, J é um ideal celular de A, logo, pelo Lema 1.3, J é uma R-álgebra celular relativamente a $i|_J$. Tomemos $\mu \notin \Lambda$. Sem perda de generalidade podemos supor que os dados celulares de J são $(\{\mu\}, N_1, C, i|_J)$. Consideremos o conjunto $\Lambda \cup \{\mu\}$. Adicionemos à ordem parcial de Λ as relações $\mu \leq \lambda$, para todo o $\lambda \in \Lambda$. Desta forma, $\Lambda \cup \{\mu\}$ torna-se um conjunto parcialmente ordenado. Vejamos que A é uma álgebra celular, com dados celulares $(\Lambda \cup \{\mu\}, M, C, i)$, onde $M(\lambda) = N_1(\lambda)$ se $\lambda \in \Lambda$ e $M(\mu) = N_2(\mu)$. É simples verificar que $\{C^\lambda_{s,t} : \lambda \in \Lambda \cup \{\mu\}, s, t \in M(\lambda)\}$ é uma R-base de A. Já sabemos que $i(C^\mu_{s,t}) = C^\mu_{t,s}$, $s, t \in M(\mu)$. Por outro lado, dados $\lambda \in \Lambda$ e $s, t \in M(\lambda)$, tem-se, por definição, que $i(C^\lambda_{s,t}) = C^\lambda_{t,s}$. É simples verificar que $aC^\lambda_{s,t}$, $a \in A$, $\lambda \in \Lambda \cup \{\mu\}, s, t \in M(\lambda)$, é uma combinação linear dos elementos da base celular com a configuração pretendida. $\square$

Proposição 1.8. *Seja A uma R-álgebra com identidade e i uma anti-involução R-linear de A. Suponhamos que A é um ideal celular de A relativamente a i. Então $A \cong M_n(R)$ (isomorfismo de R-álgebras), para certo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.3, A é uma R-álgebra celular com dados celulares $(\{*\}, M, C, i)$. Como $M(*)$ é um conjunto finito, podemos supor, sem perda de generalidade, que $M(*) = \{1, \dots, n\}$. Suponhamos que $1 = \sum_{r,q=1}^{n} \tilde{r}_{r,q} C^*_{r,q}$ é a decomposição da identidade de A como combinação R-linear dos elementos da base celular. Por (1.3), vem que $C^*_{r,q} C^*_{s,t} = \widehat{r}_{q,s} C^*_{r,t}$, $r, q, s, t = 1, \dots, n$. Dados $s, t \in \{1, \dots, n\}$, tem-se

$$C^*_{s,t} = 1 C^*_{s,t} = \left(\sum_{r,q=1}^{n} \tilde{r}_{r,q} C^*_{r,q} \right) C^*_{s,t} = \sum_{r,q=1}^{n} \left(\tilde{r}_{r,q} \widehat{r}_{q,s} \right) C^*_{r,t} = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{n} \tilde{r}_{r,q} \widehat{r}_{q,s} \right) C^*_{r,t}.$$

Daqui concluímos que $\sum_{q=1}^{n} \tilde{r}_{r,q} \widehat{r}_{q,s} = \delta_{r,s}$, $r, s = 1, \dots, n$. Partindo de $C^*_{s,t} = C^*_{s,t} 1$, obtém-se $\sum_{r=1}^{n} \widehat{r}_{t,r} \tilde{r}_{r,q} = \delta_{t,q}$, $q, t = 1, \dots, n$.

Considerem-se as matrizes $\tilde{R} = [\tilde{r}_{s,t}]$, $\widehat{R} = [\widehat{r}_{s,t}] \in M_n(R)$. Pelo que acabámos de ver estas matrizes são inversas uma da outra. Para $s, t = 1, \dots, n$, definamos $E_{s,t} = \sum_{u=1}^{n} \tilde{r}_{u,s} C^*_{u,t}$ e consideremos o endomorfismo de R-módulos $\psi : A \longrightarrow A$, definido por $\psi(C^*_{s,t}) = E_{s,t}$. Seja $\mathcal{B} = \left(C^*_{1,1}, \dots, C^*_{n,1}, \dots, C^*_{1,n}, \dots, C^*_{n,n} \right)$. Denotemos por $M(\psi; \mathcal{B})$ a matriz de ψ relativamente à base ordenada $\mathcal{B}$. É simples verificar que $M(\psi; \mathcal{B}) = \operatorname{diag}(\tilde{R}, \dots, \tilde{R})$, logo $M(\psi; \mathcal{B})$ é invertível e $M(\psi; \mathcal{B})^{-1} = \operatorname{diag}(\widehat{R}, \dots, \widehat{R})$. Como tal, ψ é um isomorfismo de R-módulos, logo os elementos $E_{s,t}$, $s, t = 1, \dots, n$, formam uma R-base de A.

Consideremos a R-álgebra $M_n(R)$ munida com a estrutura celular introduzida no Exemplo 1.1. Denotemos os seus dados celulares por $(\{*\}, N, D, j)$, onde $N(*) = \{1, \dots, n\}$. Verifica-se facilmente que $D^*_{r,q} D^*_{s,t} = \delta_{q,s} D^*_{r,t}$. Seja $\phi : A \longrightarrow M_n(R)$ o isomorfismo de R-módulos definido por $\phi(E_{s,t}) = D^*_{s,t}$, $s, t = 1, \dots, n$. Repare-se que

$$\begin{aligned} E_{r,q} E_{s,t} &= \left(\sum_{u=1}^{n} \tilde{r}_{u,r} C^*_{u,q} \right) \left(\sum_{v=1}^{n} \tilde{r}_{v,s} C^*_{v,t} \right) = \sum_{u=1}^{n} \sum_{v=1}^{n} \tilde{r}_{u,r} \tilde{r}_{v,s} \widehat{r}_{q,v} C^*_{u,t} \\ &= \left(\sum_{v=1}^{n} \widehat{r}_{q,v} \tilde{r}_{v,s} \right) \left(\sum_{u=1}^{n} \tilde{r}_{u,r} C^*_{u,t} \right) = \delta_{q,s} E_{r,t}. \end{aligned}$$

Daqui decorre que ϕ é um isomorfismo de R-álgebras. □

Capítulo 2

Inflações

No capítulo anterior foram analisadas várias formas de construir novas álgebras celulares à custa de álgebras celulares preexistentes. Neste capítulo, focamo-nos num processo iterativo específico que permite produzir novas álgebras celulares através de um conjunto de álgebras celulares e de R-módulos livres previamente escolhidos.

Provaremos ainda que todas as álgebras celulares podem ser obtidas através desta construção recursiva. Mais concretamente, demonstra-se que toda a R-álgebra celular é uma inflação iterada da R-álgebra R.

2.1. Inflações de uma R-álgebra ao longo de um R-módulo

Seja B' uma R-álgebra, V um R-módulo e $\psi : V \times V \longrightarrow B'$ uma aplicação R-bilinear. Vamos definir uma nova R-álgebra B à custa de B', de V e de ψ.

Considere-se o R-módulo $B = V \otimes_R B' \otimes_R V$. Pretendemos munir B com uma multiplicação associativa. Para tal, considere-se $\tilde{\phi} : V \times B' \times V \times V \times B' \times V \longrightarrow B$, a função definida por $\tilde{\phi}(v_1, b'_1, w_1, v_2, b'_2, w_2) = v_1 \otimes_R b'_1\psi(w_1, v_2)b'_2 \otimes_R w_2$, onde $v_1, w_1, v_2, w_2 \in V$ e $b'_1, b'_2 \in B'$. Esta função é R-multilinear pois $- \otimes_R - \otimes_R -$ e ψ são aplicações R-multilineares. Pela propriedade universal do produto tensorial, existe um único homomorfismo de R-módulos, $\phi : B \otimes_R B \longrightarrow B$, satisfazendo $\phi \circ (- \otimes_R - \otimes_R - \otimes_R - \otimes_R - \otimes_R -) = \tilde{\phi}$. Como ϕ é um homomorfismo de R-módulos, ϕ induz uma multiplicação R-linear em B definida por

$$b_1 b_2 = \phi(b_1 \otimes_R b_2), \tag{2.1}$$

para $b_1, b_2 \in B$. Em particular, dados $v_1, w_1, v_2, w_2 \in V$ e $b'_1, b'_1 \in B'$, vem que

$$\big(v_1 \otimes_R b'_1 \otimes_R w_1\big)\big(v_2 \otimes_R b'_2 \otimes_R w_2\big) = v_1 \otimes_R b'_1\psi(w_1, v_2)b'_2 \otimes_R w_2.$$

Pela associatividade da multiplicação em B' temos

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(v_1 \otimes_R b_1' \otimes_R w_1\right)\left(v_2 \otimes_R b_2' \otimes_R w_2\right)\right)\left(v_3 \otimes_R b_3' \otimes_R w_3\right) \\
&= \left(v_1 \otimes_R b_1'\psi(w_1, v_2)b_2' \otimes_R w_2\right)\left(v_3 \otimes_R b_3' \otimes_R w_3\right) \\
&= v_1 \otimes_R \left(b_1'\psi(w_1, v_2)b_2'\right)\psi(w_2, v_3)b_3' \otimes_R w_3 \\
&= v_1 \otimes_R b_1'\psi(w_1, v_2)\left(b_2'\psi(w_2, v_3)b_3'\right) \otimes_R w_3 \\
&= \left(v_1 \otimes_R b_1' \otimes_R w_1\right)\left(v_2 \otimes_R b_2'\psi(w_2, v_3)b_3' \otimes_R w_3\right) \\
&= \left(v_1 \otimes_R b_1' \otimes_R w_1\right)\left(\left(v_2 \otimes_R b_2' \otimes_R w_2\right)\left(v_3 \otimes_R b_3' \otimes_R w_3\right)\right).
\end{aligned}
$$

Daqui vem que a multiplicação definida em B é associativa, logo B é uma R-álgebra para esta multiplicação.

Seja agora i uma anti-involução R-linear em B'. Consideremos a função $\tilde{j}$: $V \times B' \times V \longrightarrow B$, definida por $\tilde{j}(v, b', w) = w \otimes_R i(b') \otimes_R v$. Como $\tilde{j}$ é uma aplicação R-trilinear, existe um único homomorfismo de R-módulos j satisfazendo

$$
j(v \otimes_R b' \otimes_r w) = w \otimes_R i(b') \otimes_R v, \tag{2.2}
$$

para $v, w \in V$ e $b' \in B'$. Verifica-se facilmente que j é uma involução de B. Se, adicionalmente, a função i satisfizer $i(\psi(v, w)) = \psi(w, v)$, $v, w \in V$, tem-se $j\left(\left(v_1 \otimes_R b_1' \otimes_R w_1\right)\left(v_2 \otimes_R b_2' \otimes_R w_2\right)\right) = j\left(v_2 \otimes_R b_2' \otimes_R w_2\right) j\left(v_1 \otimes_R b_1' \otimes_R w_1\right)$, de onde se conclui que j é uma anti-involução R-linear de B.

Proposição 2.1. *Seja B' uma R-álgebra celular com dados celulares (Λ, M, C, i), V um R-módulo finitamente gerado e livre sobre R, com base $\{v_1, \dots, v_n\}$, e ψ : $V \times V \longrightarrow B'$ uma aplicação R-linear verificando $i(\psi(v, w)) = \psi(w, v)$, $v, w \in V$. Então $B = V \otimes_R B' \otimes_R V$ é uma R-álgebra celular com dados celulares (Λ, N, D, j), onde $N(\lambda) = \{1, \dots, n\} \times M(\lambda)$, para $\lambda \in \Lambda$, $D^\lambda_{(s_1,t_1),(s_2,t_2)} = v_{s_1} \otimes_R C^\lambda_{t_1,t_2} \otimes_R v_{s_2}$, para $\lambda \in \Lambda$ e $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in N(\lambda)$, e j é a função definida à custa de i em (2.2).*

Demonstração. O R-módulo $B = V \otimes_R B' \otimes_R V$ é uma R-álgebra para a operação definida à custa de ψ em (2.1). Como ψ verifica $i(\psi(v, w)) = \psi(w, v)$, $v, w \in V$, vem que a involução R-linear j é um anti-homomorfismo de anéis. Mostremos então que B é uma R-álgebra celular com os dados celulares referidos no enunciado. O conjunto $\{D^\lambda_{(s_1,t_1),(s_2,t_2)} : \lambda \in \Lambda, (s_1, t_1), (s_2, t_2) \in N(\Lambda)\}$ é claramente uma R-base de B. Além do mais,

$$
j\left(D^\lambda_{(s_1,t_1),(s_2,t_2)}\right) = j\left(v_{s_1} \otimes_R C^\lambda_{t_1,t_2} \otimes_R v_{s_2}\right) = v_{s_2} \otimes_R C^\lambda_{t_2,t_1} \otimes_R v_{s_1} = D^\lambda_{(s_2,t_2),(s_1,t_1)}.
$$

Tomemos agora $v\otimes_R b'\otimes_R w$, com $v, w \in V$ e $b' \in B'$ e $\lambda \in \Lambda$, $(s_1,t_1),(s_2,t_2) \in N(\lambda)$. Suponhamos que $v = \sum_{s=1}^{n} r_v(s)v_s$, $r_v(s) \in R$. Vem que

$$\begin{aligned}
&\left(v \otimes_R b' \otimes_R w\right) D^{\lambda}_{(s_1,t_1),(s_2,t_2)} = v \otimes_R b'\psi(w,v_{s_1})C^{\lambda}_{t_1,t_2} \otimes_R v_{s_2} \\
&= \left(\sum_{s=1}^{n} r_v(s)v_s\right) \otimes_R \left(\sum_{u\in M(\lambda)} r_{b'\psi(w,v_{s_1})}(u,t_1)C^{\lambda}_{u,t_2} + r'\right) \otimes_R v_{s_2} \\
&= \sum_{(s,u)\in N(\lambda)} r_v(s)r_{b'\psi(w,v_{s_1})}(u,t_1)D^{\lambda}_{(s,u),(s_2,t_2)} + \sum_{s=1}^{n} r_v(s)\left(v_s \otimes_R r' \otimes_R v_{s_2}\right),
\end{aligned}$$

onde r' é uma combinação linear de elementos da base celular de B' com índice superior estritamente inferior a λ. Daqui conclui-se que a condição 3 da Definição 1.1 é satisfeita. $\square$

Definição 2.1. À R-álgebra celular B obtida na proposição anterior chamamos **inflação da álgebra B' ao longo do R-módulo V**.

A definição que se segue formaliza o que entedemos ser um isomorfismo de R-álgebras celulares que preserve a sua estrutura celular.

Definição 2.2. Sejam A_1 e A_2 R-álgebras celulares com dados celulares (Λ_1, M_1, C, i_1) e (Λ_2, M_2, D, i_2), respectivamente. Consideremos $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$, isomorfismo de R-álgebras. Dizemos que φ é um **isomorfismo canónico de álgebras celulares** se existirem bijeccções $f : \Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_2$ e $g_\lambda : M_1(\lambda) \longrightarrow M_2(f(\lambda))$, para cada $\lambda \in \Lambda_1$, tais que $\varphi(C^{\lambda}_{s,t}) = D^{f(\lambda)}_{g_\lambda(s),g_\lambda(t)}$, para todo o $\lambda \in \Lambda_1$ e $s,t \in M_1(\lambda)$.

As R-álgebras celulares A_1 e A_2 dizem-se canonicamente isomorfas se existir $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$, isomorfismo canónico de R-álgebras celulares.

Seja $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ um isomorfismo canónico entre as álgebras celulares A_1 e A_2, com dados celulares (Λ_1, M_1, C, i_1) e (Λ_2, M_2, D, i_2), respectivamente. Este isomorfismo verifica $\varphi \circ i_1 = i_2 \circ \varphi$, pois $(\varphi \circ i_1)(C^{\lambda}_{s,t}) = (i_2 \circ \varphi)(C^{\lambda}_{s,t})$, $\lambda \in \Lambda$, $s,t \in M(\lambda)$.

O próximo lema esclarece como podemos construir ideais celulares utilizando inflações de álgebras ao longo de módulos. Recordemos que, pelo Exemplo 1.1, R é uma R-álgebra celular com dados celulares $(\{*\}, M, C, \mathrm{id}_R)$, onde $M(*) = \{1\}$ e $C^{*}_{1,1} = 1$.

Lema 2.2. *Seja A uma R-álgebra, i uma anti-involução R-linear em A e J um ideal celular de A relativamente a i. Então J é uma R-álgebra celular canonicamente* *isomorfa a uma inflação da R-álgebra R ao longo de um R-módulo livre e finitamente gerado sobre R.*

Demonstração. Como J é um ideal celular de A relativamente a i, então, pelo Lema 1.3, J é uma álgebra celular com dados celulares $(\{*\}, M, C, i|_J)$, onde, sem perda de generalidade, temos $M(*) = \{1, \ldots, m\}$, para algum inteiro positivo m. Por (1.3), vem que $C^*_{r,q}C^*_{s,t} = \widehat{r}_{q,s}C^*_{r,t}$, $r, q, s, t = 1, \ldots, m$. Seja V um R-módulo livremente gerado por $\{v_1, \ldots, v_m\}$ e $\psi : V \times V \longrightarrow R$ a aplicação R-bilinear definida por $\psi(v_s, v_t) = \widehat{r}_{s,t}$. Por um lado, $i|_J\left(C^*_{r,q}C^*_{s,t}\right) = \widehat{r}_{q,s}i|_J(C^*_{r,t}) = \widehat{r}_{q,s}C^*_{t,r}$. Por outro lado, $i|_J\left(C^*_{r,q}C^*_{s,t}\right) = C^*_{t,s}C^*_{q,r} = \widehat{r}_{s,q}C^*_{t,r}$, logo $\widehat{r}_{q,s} = \widehat{r}_{s,q}$, $q, s = 1, \ldots, m$. Daqui decorre que $\mathrm{id}_R(\psi(v, w)) = \psi(w, v)$, $v, w \in V$. Logo, pela Proposição 2.1, podemos considerar a inflação da R-álgebra R ao longo do R-módulo V, isto é, a R-álgebra celular $V \otimes_R R \otimes_R V$ com dados celulares $(\{*\}, N, D, j)$, definidos à custa dos dados celulares de R. Seja $\phi : J \longrightarrow V \otimes_R R \otimes_R V$ o homomorfismo de R-módulos definido por $\phi(C^*_{s,t}) = v_s \otimes_R 1 \otimes_R v_t = D^*_{(s,1),(t,1)}$, $s, t = 1, \ldots, m$. Como ϕ transforma uma R-base numa R-base, ϕ é um isomorfismo de R-módulos. Repare-se que $\phi(C^*_{r,q}C^*_{s,t}) = \widehat{r}_{q,s}\phi(C^*_{r,t}) = \widehat{r}_{q,s}(v_r \otimes_R 1 \otimes_R v_t)$, $r, q, s, t = 1, \ldots, m$. Por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned} \phi(C^*_{r,q})\phi(C^*_{s,t}) &= (v_r \otimes_R 1 \otimes_R v_q)(v_s \otimes_R 1 \otimes_R v_t) \\ &= v_r \otimes_R 1\psi(v_q, v_s)1 \otimes_R v_t = \phi(C^*_{r,q}C^*_{s,t}), \end{aligned}$$

logo ϕ é um isomorfismo de R-álgebras. Como ϕ preserva os dados celulares, J e $V \otimes_R R \otimes_R V$ são álgebras celulares canonicamente isomorfas. □

2.2. Inflações de uma R-álgebra ao longo de uma R-álgebra

Suponhamos agora que B e C são R-álgebras. Considere-se o R-módulo $A = B \oplus C$.

O nosso primeiro objectivo é dotar A de uma estrutura de R-álgebra, de tal forma que B seja ideal de A e, consequentemente, que A/B e C sejam R-álgebras isomorfas. Munir A com uma multiplicação R-linear equivale a definir um homomorfismo de R-módulos de $A \otimes_R A$ para A. Como $A \otimes_R A \cong (B \otimes_R B) \oplus (B \otimes_R C) \oplus (C \otimes_R B) \oplus (C \otimes_R C)$ (isomorfismo de R-módulos), então, definir um homomorfismo de R-módulos de $A \otimes_R A$ para A é equivalente a definir oito homomorfismos R-lineares: $B \otimes_R B \longrightarrow B$, $B \otimes_R B \longrightarrow C$, $B \otimes_R C \longrightarrow B$, $B \otimes_R C \longrightarrow C$, $C \otimes_R B \longrightarrow B$, $C \otimes_R B \longrightarrow C$, $C \otimes_R C \longrightarrow B$ e $C \otimes_R C \longrightarrow C$. Queremos que as funções $B \otimes_R B \longrightarrow B$ e $C \otimes_R C \longrightarrow C$ correspondam, respectivamente, às multiplicações em B e em C. Por outro lado, para que B seja ideal de A, é necessário que os homomorfismos $B \otimes_R B \longrightarrow C$, $B \otimes_R C \longrightarrow C$, $C \otimes_R B \longrightarrow C$ sejam nulos. Como tal, precisamos de definir três homomorfismos de R-módulos: $\alpha : C \otimes_R C \longrightarrow B$, $\beta : B \otimes_R C \longrightarrow B$ e $\gamma : C \otimes_R B \longrightarrow B$. Desta forma, a multiplicação em A será dada por

$$(b_1 + c_1)(b_2 + c_2) = b_1 b_2 + \beta(b_1 \otimes_R c_2) + \gamma(c_1 \otimes_R b_2) + \alpha(c_1 \otimes_R c_2) + c_1 c_2, \quad (2.3)$$

para $b_1, b_2 \in B$ e $c_1, c_2 \in C$. Esta operação é associativa se $((b_1 + c_1)(b_2 + c_2))(b_3 + c_3) = (b_1 + c_1)((b_2 + c_2)(b_3 + c_3))$, para $b_1, b_2, b_3 \in B$, $c_1, c_2, c_3 \in C$ arbitrários. Ou seja, a associatividade é garantida se e só se

$$\begin{aligned}
&((b_1 b_2 + \beta(b_1 \otimes_R c_2) + \gamma(c_1 \otimes_R b_2) + \alpha(c_1 \otimes_R c_2)) + c_1 c_2)(b_3 + c_3) \\
&= (b_1 + c_1)((b_2 b_3 + \beta(b_2 \otimes_R c_3) + \gamma(c_2 \otimes_R b_3) + \alpha(c_2 \otimes_R c_3)) + c_2 c_3) \\
&\Leftrightarrow (b_1 b_2 + \beta(b_1 \otimes_R c_2) + \gamma(c_1 \otimes_R b_2) + \alpha(c_1 \otimes_R c_2))\, b_3 \\
&+ \beta\left((b_1 b_2 + \beta(b_1 \otimes_R c_2) + \gamma(c_1 \otimes_R b_2) + \alpha(c_1 \otimes_R c_2)) \otimes_R c_3\right) + \gamma\left((c_1 c_2) \otimes_R b_3\right) \\
&+ \alpha\left((c_1 c_2) \otimes_R c_3\right) + (c_1 c_2)\, c_3 = b_1\left(b_2 b_3 + \beta(b_2 \otimes_R c_3) + \gamma(c_2 \otimes_R b_3) + \alpha(c_2 \otimes_R c_3)\right) \\
&+ \beta(b_1 \otimes_R (c_2 c_3)) + \gamma\left(c_1 \otimes_R (b_2 b_3 + \beta(b_2 \otimes_R c_3) + \gamma(c_2 \otimes_R b_3) + \alpha(c_2 \otimes_R c_3))\right) \\
&+ \alpha\left(c_1 \otimes_R (c_2 c_3)\right) + c_1\left(c_2 c_3\right) \Leftrightarrow \beta\left(b_1 \otimes_R c_2\right) b_3 + \gamma\left(c_1 \otimes_R b_2\right) b_3 + \alpha\left(c_1 \otimes_R c_2\right) b_3 \\
&+ \beta\left((b_1 b_2) \otimes_R c_3\right) + \beta\left(\beta\left(b_1 \otimes_R c_2\right) \otimes_R c_3\right) + \beta\left(\gamma\left(c_1 \otimes_R b_2\right) \otimes_R c_3\right) \\
&+ \beta\left(\alpha\left(c_1 \otimes_R c_2\right) \otimes_R c_3\right) + \gamma\left((c_1 c_2) \otimes_R b_3\right) + \alpha\left((c_1 c_2) \otimes_R c_3\right) = b_1 \beta\left(b_2 \otimes_R c_3\right) \\
&+ b_1 \gamma\left(c_2 \otimes_R b_3\right) + b_1 \alpha\left(c_2 \otimes_R c_3\right) + \beta\left(b_1 \otimes_R (c_2 c_3)\right) + \gamma\left(c_1 \otimes_R (b_2 b_3)\right) \\
&+ \gamma\left(c_1 \otimes_R \beta\left(b_2 \otimes_R c_3\right)\right) + \gamma\left(c_1 \otimes_R \gamma\left(c_2 \otimes_R b_3\right)\right) + \gamma\left(c_1 \otimes_R \alpha\left(c_2 \otimes_R c_3\right)\right) \\
&+ \alpha\left(c_1 \otimes_R (c_2 c_3)\right).
\end{aligned}$$

Suponhamos que a multiplicação considerada é associativa.

Tomando $b_3 = 0$ e $c_1 = c_2 = 0$ na última igualdade obtida, concluímos que

$$\forall\, b, b' \in B\ \forall\, c \in C\ \ \beta\left(\left(b' b\right) \otimes_R c\right) = b' \beta\left(b \otimes_R c\right), \quad (2.4)$$

Daqui vem que $\beta : B \otimes_R C \longrightarrow B$ é um homomorfismo de B-módulos à esquerda.

Analogamente, fazendo $b_1 = 0$, $c_2 = c_3 = 0$, deduzimos que $\gamma : C \otimes_R B \longrightarrow B$ é um homomorfismo de B-módulos à direita, ou, equivalentemente, que

$$\forall\, b, b' \in B\ \forall\, c \in C\ \ \gamma\left(c \otimes_R \left(b b'\right)\right) = \gamma\left(c \otimes_R b\right) b'. \quad (2.5)$$

Se fixarmos $b_2 = b_3 = 0$ e $c_1 = 0$, vem que

$$\forall\, b \in B\ \forall\, c, c' \in C\ \ \beta\left(\beta\left(b \otimes_R c\right) \otimes_R c'\right) = b\alpha\left(c \otimes_R c'\right) + \beta\left(b \otimes_R \left(c c'\right)\right). \quad (2.6)$$

Por outro lado, fazendo $b_1 = b_2 = 0$ e $c_3 = 0$, vem que

$$\forall\, b \in B\ \forall\, c, c' \in C\ \ \alpha(c \otimes_R c')b + \gamma((cc') \otimes_R b) = \gamma(c \otimes_R \gamma(c' \otimes_R b)). \tag{2.7}$$

Analogamente, se tomarmos $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, concluímos que

$$\forall\, c, c', c'' \in C\ \ \alpha((cc')\otimes_R c'')+\beta(\alpha(c\otimes_R c')\otimes_R c'') = \alpha(c\otimes_R (c'c''))+\gamma(c\otimes_R \alpha(c'\otimes_R c'')). \tag{2.8}$$

Fixando $b_2 = 0$ e $c_1 = c_3 = 0$, vem que

$$\forall\, b, b' \in B\ \forall\, c \in C\ \ \beta(b \otimes_R c)b' = b\gamma(c \otimes_R b'). \tag{2.9}$$

Finalmente, se fizermos $b_1 = b_3 = 0$ e $c_2 = 0$, concluímos que

$$\forall\, b \in B\ \forall\, c, c' \in C\ \ \beta(\gamma(c \otimes_R b) \otimes_R c') = \gamma(c \otimes_R \beta(b \otimes_R c')). \tag{2.10}$$

Reciprocamente, é claro que se as condições (2.4) a (2.10) forem satisfeitas, então a multiplicação definida em (2.3) é associativa.

Se a álgebra C tiver identidade então A tem identidade se e só se existir $\widehat{b} \in B$ tal que $(\widehat{b}+1)(b+c) = (b+c)(\widehat{b}+1) = b+c$, quaisquer que sejam $b \in B$ e $c \in C$, ou seja, se e só se existir $\widehat{b} \in B$ satifazendo

$$\begin{cases} \forall\, c \in C\ \ \beta\left(\widehat{b} \otimes_R c\right) + \alpha\,(1 \otimes_R c) = \gamma\left(c \otimes_R \widehat{b}\right) + \alpha\,(c \otimes_R 1) = 0, \\ \forall\, b \in B\ \ \widehat{b}b + \gamma\,(1 \otimes_R b) = b\widehat{b} + \beta\,(b \otimes_R 1) = b. \end{cases} \tag{2.11}$$

Consideremos j_1 e j_2, anti-involuções R-lineares em B e em C, respectivamente. Seja $i : A \longrightarrow A$ a função definida por

$$i(b+c) = j_1(b) + j_2(c), \tag{2.12}$$

para $b \in B$, $c \in C$. Ora i é claramente uma involução R-linear de A. Por outro lado, i é um anti-homomorfismo de anéis se e só se, para $b_1, b_2 \in B$, $c_1, c_2 \in C$ arbitrários, tivermos que

$$\begin{aligned} & i\,((b_1 + c_1)\,(b_2 + c_2)) = i\,(b_2 + c_2)\,i\,(b_1 + c_1) \\ & \Leftrightarrow j_1\,(\beta\,(b_1 \otimes_R c_2)) + j_1\,(\gamma\,(c_1 \otimes_R b_2)) + j_1\,(\alpha\,(c_1 \otimes_R c_2)) \\ & = \beta\,(j_1\,(b_2) \otimes_R j_2\,(c_1)) + \gamma\,(j_2\,(c_2) \otimes_R j_1\,(b_1)) + \alpha\,(j_2\,(c_2) \otimes_R j_2\,(c_1)) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, c, c' \in C\ \ j_1\,(\alpha\,(c \otimes_R c')) = \alpha\,(j_2\,(c') \otimes_R j_2\,(c))\,, \\ \forall\, b \in B\ \forall\, c \in C\ \ j_1\,(\gamma\,(c \otimes_R b)) = \beta\,(j_1\,(b) \otimes_R j_2\,(c))\,. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Admitamos agora que B e C são R-álgebras celulares relativamente a j_1 e a j_2, respectivamente. Suponhamos ainda que existem homomorfismos de R-módulos, $\alpha : C \otimes_R C \longrightarrow B$, $\beta : B \otimes_R C \longrightarrow B$ e $\gamma : C \otimes_R B \longrightarrow B$, verificando as condições (2.4) a (2.10) e (2.13). Pelo que acabámos de ver, A é uma R-álgebra para a multiplicação definida em (2.3) e a função i, definida em (2.12), é uma anti-involução R-linear de A. Vamos averiguar em que condições é que A é uma R-álgebra celular relativamente a i com cadeia celular

$$0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_{n-1} \subset J_n \subset B \oplus H_1 \subset \cdots \subset B \oplus H_{m-1} \subset B \oplus H_m = A,$$

onde $0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_{n-1} \subset J_n = B$ é a cadeia celular de B e $0 = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{m-1} \subset H_m = C$ é a cadeia celular de C. Transpondo este problema para a abordagem de [GL] e supondo que B e C são álgebras celulares com dados celulares (Λ_1, M_1, C, j_1) e (Λ_2, M_2, D, j_2), respectivamente, pretendemos verificar em que condições é que A é uma R-álgebra celular com dados celulares (Γ, N, E, i), onde: o conjunto subjacente a $(\Gamma, \preceq)$ é $\Lambda_1 \dot\cup \Lambda_2$; $N(\lambda) = M_1(\lambda)$, se $\lambda \in \Lambda_1$, e $N(\lambda) = M_2(\lambda)$, caso contrário; para $\lambda \in \Gamma$ e $s, t \in N(\lambda)$, $E^\lambda_{s,t} = C^\lambda_{s,t}$, se $\lambda \in \Lambda_1$, e $E^\lambda_{s,t} = D^\lambda_{s,t}$, se $\lambda \in \Lambda_2$ (recordar a construção da alínea 2 da Proposição 1.2). Dados $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma$, estabelecemos que $\lambda_1 \preceq \lambda_2$ se $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_1$ e $\lambda_1 \leq \lambda_2$ em Λ_1, se $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2$ e $\lambda_1 \leq \lambda_2$ em Λ_2, ou se $\lambda_1 \in \Lambda_1$ e $\lambda_2 \in \Lambda_2$. As condições 2 e 3 da Definição 1.1 são trivialmente satisfeitas. Analisemos agora a expressão $(b + c)E^\lambda_{s,t}$, para $b \in B$, $c \in C$, $\lambda \in \Gamma$ e $s, t \in N(\lambda)$. Se $\lambda \in \Lambda_2$, é simples confirmar que $(b+c)E^\lambda_{s,t}$ é uma combinação linear dos elementos da base $\mathcal{B} = \{E^\lambda_{s,t} : \lambda \in \Gamma, s, t \in N(\lambda)\}$ que possui a configuração da expressão (1.1). Por outro lado, se $\lambda \in \Lambda_1$ e se r' for uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$ com índice superior estritamente inferior a λ, tem-se que

$$\begin{aligned}
&(b+c)E^\lambda_{s,t} = \sum_{u \in N(\lambda)} r_{b+c}(u,s) E^\lambda_{u,t} + r' \\
&\Leftrightarrow bC^\lambda_{s,t} + \gamma\left(c \otimes_R C^\lambda_{s,t}\right) = \sum_{u \in M_1(\lambda)} r_{b+c}(u,s) C^\lambda_{u,t} + r' \\
&\Leftrightarrow \sum_{u \in M_1(\lambda)} r_b(u,s) C^\lambda_{u,t} + r'' + \gamma\left(c \otimes_R C^\lambda_{s,t}\right) = \sum_{u \in M_1(\lambda)} r_{b+c}(u,s) C^\lambda_{u,t} + r',
\end{aligned}$$

onde r'' é uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$ com índice superior estritamente inferior a λ. Daqui conclui-se que a álgebra A satisfaz a condição 3 da Definição 1.1 para os dados celulares (Γ, N, E, i) se e só se

$$\forall\, \lambda \in \Lambda_1\ \forall\, s, t \in M_1(\lambda)\ \forall\, c \in C\ \ \gamma\left(c \otimes_R C^\lambda_{s,t}\right) = \sum_{u \in M(\lambda)} r_c(u,s) C^\lambda_{u,t} + r''', \quad (2.14)$$

com r''' combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$ com índice superior estritamente inferior a λ. Nestas condições, A é uma R-álgebra celular com dados celulares (Γ, N, E, i).

Definição 2.3. A R-álgebra celular que acabámos de construir chama-se **inflação da álgebra $\boldsymbol{B}$ ao longo da álgebra $\boldsymbol{C}$**.

2.3. Inflações iteradas

É possível aplicar indutivamente o processo anterior a um conjunto de R-álgebras $C, B_n, \ldots, B_1$, onde cada B_j é uma inflação da R-álgebra (celular) B'_j ao longo de um R-módulo V_j, livre e finitamente gerado sobre R. Como resultado, obtém-se a R-álgebra celular

$$A = (\underbrace{V_1 \otimes_R B'_1 \otimes_R V_1}_{B_1}) \oplus (\cdots \oplus ((\underbrace{V_{n-1} \otimes_R B'_{n-1} \otimes_R V_{n-1}}_{B_{n-1}}) \oplus ((\underbrace{V_n \otimes_R B'_n \otimes_R V_n}_{B_n}) \oplus C))),$$

onde $B_j \oplus (\cdots \oplus (B_{n-1} \oplus (B_n \oplus C)))$ é uma inflação da álgebra B_j ao longo da álgebra $B_{j-1} \oplus (\cdots \oplus (B_{n-1} \oplus (B_n \oplus C)))$. Estamos, evidentemente, a supor que existem aplicações satisfazendo as condições necessárias para efectuar as inflações referidas. Se a R-álgebra C tiver identidade e se a condição (2.11) for satisfeita em cada passo da inflação da álgebra B_j ao longo da álgebra $B_{j-1} \oplus (\cdots \oplus (B_{n-1} \oplus (B_n \oplus C)))$, então a R-álgebra celular A resultante tem identidade.

Definição 2.4. A álgebra A que resulta do procedimento acima referido diz-se uma **inflação iterada das álgebras $\boldsymbol{C, B'_n, \ldots, B'_1}$**.

Teorema 2.3. *Toda a R-álgebra celular é canonicamente isomorfa a uma inflação iterada de um número finito de cópias de R.*

Demonstração. Seja A uma álgebra celular arbitrária com dados celulares (Λ, M, C, i). Provemos que A é canonicamente isomorfa a uma inflação iterada de cópias de R, procedendo por indução em $|\Lambda|$.

Se $|\Lambda| = 1$, o único elemento de Λ, digamos $*$, é, evidentemente, um elemento minimal em Λ. Portanto, pelo Lema 1.4, $J(\{*\}) = A$ é um ideal celular de A relativamente a i e, pelo Lema 2.2, A é uma álgebra celular canonicamente isomorfa uma inflação da R-álgebra R ao longo de um R-módulo V_1, livre e finitamente gerado sobre R.

Suponhamos agora que toda a álgebra celular com dados celulares (Λ, M, C, i), onde $|\Lambda| = n$, n inteiro positivo arbitrariamente fixo, é canonicamente isomorfa a uma inflação iterada do tipo

$$(V_1 \otimes_R R \otimes_R V_1) \oplus (\cdots \oplus ((V_{n-1} \otimes_R R \otimes_R V_{n-1}) \oplus (V_n \otimes_R R \otimes_R V_n))).$$

Consideremos a R-álgebra celular A, com dados celulares (Λ, M, C, i), onde $|\Lambda| = n+1$. Seja μ um elemento minimal de Λ. Tem-se $A = J(\{\mu\}) \oplus J(\Lambda - \{\mu\})$, como soma directa de R-submódulos, e, pelo Lema 1.4, $J(\{\mu\})$ é um ideal celular de A relativamente a i. Então, novamente pelo Lema 2.2, existe um isomorfismo canónico de álgebras celulares $\varphi_1 : J(\{\mu\}) \longrightarrow B$, onde $B = V_1 \otimes_R R \otimes_R V_1$ é uma inflação da R-álgebra R ao longo de um R-módulo V_1, livre e finitamente gerado sobre R. Repare-se que $J(\{\mu\})$ é uma álgebra celular com dados celulares $(\{\mu\}, N_1, D, i|_{J(\{\mu\})})$, onde $N_1(\mu) = M(\mu)$ e $D^{\mu}_{s,t} = C^{\mu}_{s,t}$, para $s, t \in N_1(\mu)$. Por outro lado, pela alínea 5 da Proposição 1.2 e sua demonstração, sabemos que $A/J(\{\mu\})$ é uma álgebra celular com dados celulares $(\Lambda - \{\mu\}, N_2, E, i')$, onde: $N_2(\lambda) = M(\lambda)$, para $\lambda \in \Lambda - \{\mu\}$; $E^{\lambda}_{s,t} = C^{\lambda}_{s,t} + J(\{\mu\})$, para $\lambda \in \Lambda - \{\mu\}$ e $s, t \in N_2(\lambda)$; i' é a anti-involução R-linear induzida por i no quociente. Então, pela hipótese de indução, existem R-módulos, $V_2, \ldots, V_{n+1}$, livres e finitamente gerados sobre R, para os quais $A/J(\{\mu\})$ e a inflação iterada

$$C = (V_2 \otimes_R R \otimes_R V_2) \oplus (\cdots \oplus ((V_n \otimes_R R \otimes_R V_n) \oplus (V_{n+1} \otimes_R R \otimes_R V_{n+1})))$$

são álgebras celulares canonicamente isomorfas. Isto é, existe $\varphi_2 : A/J(\{\mu\}) \longrightarrow C$, isomorfismo canónico de R-álgebras celulares. Seja $\pi : J(\Lambda - \{\mu\}) \longrightarrow A/J(\{\mu\})$ a projecção canónica. A função π é um isomorfismo de R-módulos. Consideremos agora o isomorfismo de R-módulos $\Phi : A \longrightarrow B \oplus C$, definido por

$$\Phi(j + h) = \varphi_1(j) + (\varphi_2 \circ \pi)(h),$$

para $j \in J(\{\mu\})$, $h \in J(\Lambda - \{\mu\})$. Tomemos ainda as projecções canónicas $\nu_1 : A \longrightarrow J(\{\mu\})$ e $\nu_2 : A \longrightarrow J(\Lambda - \{\mu\})$. Seja $\tilde{\alpha} : C \times C \longrightarrow B$ a função definida por

$$\tilde{\alpha}(c, c') = (\varphi_1 \circ \nu_1)((\varphi_2 \circ \pi)^{-1}(c)(\varphi_2 \circ \pi)^{-1}(c')),$$

para $c, c' \in C$. É simples verificar que $\tilde{\alpha}$ é uma aplicação R-bilinear. Considerem-se também as funções R-bilineares $\tilde{\beta} : B \times C \longrightarrow B$ e $\tilde{\gamma} : C \times B \longrightarrow B$ definidas, respectivamente, por

$$\tilde{\beta}(b, c) = \varphi_1(\varphi_1^{-1}(b)(\varphi_2 \circ \pi)^{-1}(c)),$$

$$\tilde{\gamma}(c, b) = \varphi_1((\varphi_2 \circ \pi)^{-1}(c)\varphi_1^{-1}(b)),$$

para $b \in B$, $c \in C$. Seja $B \oplus C$ o R-módulo munido com a multiplicação R-linear definida em (2.3) à custa de α, β e γ, onde $\alpha \circ (- \otimes_R -) = \tilde{\alpha}$, $\beta \circ (- \otimes_R -) = \tilde{\beta}$ e $\gamma \circ (- \otimes_R -) = \tilde{\gamma}$. Para $j, j' \in J(\{\mu\})$, $h, h' \in J(\Lambda - \{\mu\})$ arbitrários, tem-se que

$$\begin{aligned}
&\Phi\left((j+h)\left(j'+h'\right)\right) \\
&= \varphi_1\left(jj'\right) + \varphi_1\left(jh'\right) + \varphi_1\left(hj'\right) + \varphi_1\left(\nu_1\left(hh'\right)\right) + \left(\varphi_2 \circ \pi\right)\left(\nu_2\left(hh'\right)\right) \\
&= \varphi_1(j)\,\varphi_1\left(j'\right) + \beta\left(\varphi_1(j) \otimes_R \left(\varphi_2 \circ \pi\right)\left(h'\right)\right) + \gamma\left(\left(\varphi_2 \circ \pi\right)(h) \otimes_R \varphi_1\left(j'\right)\right) \\
&+ \alpha\left(\left(\varphi_2 \circ \pi\right)(h) \otimes_R \left(\varphi_2 \circ \pi\right)\left(h'\right)\right) + \varphi_2\left(\nu_2\left(hh'\right) + J(\{\mu\})\right).
\end{aligned}$$

Como $\nu_2(hh') + J(\{\mu\}) = hh' + J(\{\mu\})$, vem que

$$\begin{aligned}
&\varphi_2(\nu_2(hh') + J(\{\mu\})) = \varphi_2(hh' + J(\{\mu\})) \\
&= \varphi_2(h + J(\{\mu\}))\varphi_2(h' + J(\{\mu\})) = (\varphi_2 \circ \pi)(h)(\varphi_2 \circ \pi)(h'),
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
&\Phi\left((j+h)\left(j'+h'\right)\right) \\
&= \varphi_1(j)\,\varphi_1\left(j'\right) + \beta\left(\varphi_1(j) \otimes_R \left(\varphi_2 \circ \pi\right)\left(h'\right)\right) + \gamma\left(\left(\varphi_2 \circ \pi\right)(h) \otimes_R \varphi_1\left(j'\right)\right) \\
&+ \alpha\left(\left(\varphi_2 \circ \pi\right)(h) \otimes_R \left(\varphi_2 \circ \pi\right)\left(h'\right)\right) + \left(\varphi_2 \circ \pi\right)(h)\left(\varphi_2 \circ \pi\right)\left(h'\right) \\
&= \Phi(j+h)\,\Phi\left(j'+h'\right).
\end{aligned}$$

Daqui vem que Φ é um isomorfismo de anéis. Como a multiplicação em A é associativa então a multiplicação em $B \oplus C$ também o é, portanto $B \oplus C$ é uma R-álgebra. Como $J(\{\mu\})$ e B são álgebras celulares canonicamente isomorfas, podemos supor, sem perda de generalidade, que B tem dados celulares $(\{\mu\}, N_1, F, j_1)$. Da mesma forma, podemos admitir que C tem dados celulares $(\lambda - \{\mu\}, N_2, G, j_2)$. Então temos $\Phi(C^{\mu}_{s,t}) = \varphi_1(C^{\mu}_{s,t}) = \varphi_1(D^{\mu}_{s,t}) = F^{\mu}_{s,t}$ e, para $\lambda \in \Lambda - \{\mu\}$, $\Phi(C^{\lambda}_{s,t}) = \varphi_2(C^{\lambda}_{s,t} + J(\{\mu\})) = \varphi_2(E^{\lambda}_{s,t}) = G^{\lambda}_{s,t}$. Considere-se agora a involução R-linear $\widehat{i} : B \oplus C \longrightarrow B \oplus C$, dada por $\widehat{i} = j_1 + j_2$. Como Φ preserva as bases celulares conclui-se que $\Phi \circ i = \widehat{i} \circ \Phi$, de onde decorre que $\widehat{i}$ é um anti-homomorfismo de anéis. Para concluirmos que $B \oplus C$ é uma inflação da álgebra B ao longo da álgebra C falta mostrar que a condição (2.14) se verifica. Mas, para $c \in C$, $s, t \in N_1(\mu)$, vem

$$\begin{aligned}
&\gamma\left(c \otimes_R F^{\mu}_{s,t}\right) = \varphi_1\left((\varphi_2 \circ \pi)^{-1}(c) D^{\mu}_{s,t}\right) = \varphi_1\left((\varphi_2 \circ \pi)^{-1}(c) C^{\mu}_{s,t}\right) \\
&= \varphi_1\left(\sum_{u \in M(\mu)} r_{(\varphi_2 \circ \pi)^{-1}(c)}(u, s) C^{\mu}_{u,t}\right) = \sum_{u \in M(\mu)} r_{(\varphi_2 \circ \pi)^{-1}(c)}(u, s) F^{\mu}_{u,t}.
\end{aligned}$$

Como Φ transforma a base celular de A na base celular de $B \oplus C$, vem que A e $B \oplus C$ são álgebras celulares canonicamente isomorfas. $\square$

Capítulo 3

A álgebra de Brauer

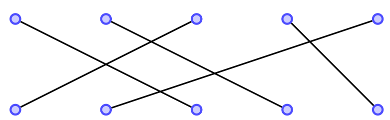
A álgebra de Brauer foi introduzida por Richard Brauer, em 1937, e surge na Teoria das Representações do grupo ortogonal e do grupo simplético. Mais concretamente, esta álgebra desempenha um papel semelhante à álgebra do grupo simétrico quando, na dualidade de Schur-Weyl, substituímos o grupo linear geral pelo grupo ortogonal ou pelo grupo simplético.

Neste capítulo provaremos que a álgebra de Brauer é celular. Para tal, vamo-nos basear num resultado conhecido, isto é, vamos partir do pressuposto que a álgebra do grupo simétrico é celular.

Para tornar as construções feitas neste capítulo mais simples e sugestivas, vamos estabelecer como multiplicação no grupo simétrico a operação dual da composição de bijecções. Ou seja, vamos utilizar a operação $*$ definida por $\sigma * \tau = \tau \circ \sigma$, $\sigma, \tau \in S_r$. Repare-se que esta alteração é irrelevante no contexto das álgebras celulares, pois A é uma álgebra é celular se e só se A^{op} o for (ver alínea 1 da Proposição 1.2).

3.1. Definição

Uma forma intuitiva de visualizar uma permutação $\sigma \in S_r$ consiste em desenhar o diagrama que lhe corresponde, ou seja, em unir r vértices superiores a r vértices inferiores de acordo com a acção da função σ nos inteiros $1, \ldots, r$, representados pelos vértices. Assim, a permutação $(1\,3)(2\,4\,5) \in S_5$ é representada por



Desta forma, a multiplicação $\sigma * \tau$ das permutações $\sigma, \tau \in S_r$ obtém-se através da concatenação dos respectivos diagramas, posicionando σ acima de τ.

O monóide de Brauer, que definimos de seguida, é uma generalização do grupo simétrico.

Definição 3.1. O **monóide de Brauer** de grau r, B_r, é o conjunto das partições do conjunto $\{1, \ldots, 2r\}$ em subconjuntos com exactamente dois elementos. Dada uma tal partição $d = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_r\} \in B_r$ (com $\Omega_i \subseteq \{1, \ldots, 2r\}$, $|\Omega_i| = 2$ e $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, para $i \neq j$) podemos representar d através de um diagrama composto por r vértices superiores, numerados de 1 a r, por r vértices inferiores, numerados de $r+1$ a $2r$, e por r arestas unindo os vértices que pertencem ao mesmo subconjunto Ω_i. A multiplicação $d_1 * d_2$ de dois diagramas $d_1, d_2 \in B_r$ é dada pela sua concatenação, posicionando d_1 acima de d_2. Mais detalhadamente, o diagrama $d_1 * d_2$ obtém-se a partir do seguinte procedimento:

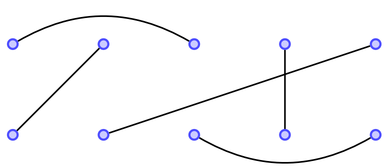
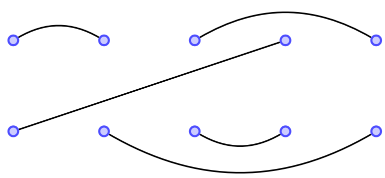
1. Posicionamos d_1 acima de d_2, identificando os vértices inferiores de d_1 com os vértices superiores de d_2.

2. Do passo anterior obtemos um grafo d, com r vértices superiores, r vértices intermédios e r vértices inferiores. Em d, numeramos os vértices superiores de 1 a r e os vértices inferiores de $r+1$ a $2r$.

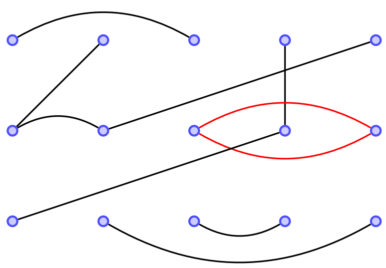
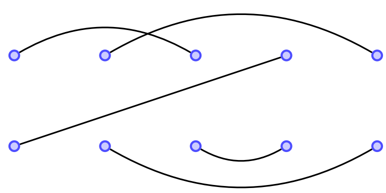
3. Dados $i, j \in \{1, \ldots, 2r\}$, i e j são vértices adjacentes em $d_1 * d_2$ se e só se existe um caminho entre i e j no grafo d.

É possível provar que a multiplicação considerada é associativa. Verifica-se facilmente que a identidade em B_r corresponde ao diagrama da permutação id_{S_r}. Além disso, $|B_r| = (2r-1)(2r-3)\cdots 1 = \dfrac{(2r)!}{r!2^r}$.

Por exemplo, dados $d_1, d_2 \in B_5$, representados por

$d_1 =$  , $d_2 =$  ,

o produto $d_1 * d_2$ em B_5 corresponde a

 $\rightarrow$ $d_1 * d_2 =$  .

Na concatenação de d_1 com d_2 obtemos um grafo intermédio onde os vértices inferiores de d_1 são identificados com os vértices superiores de d_2. Vamos denotar por $c(d_1, d_2)$ o *número de ciclos* deste grafo, que corresponde ao número de componentes conexas do grafo que incluem apenas vértices inferiores de d_1 e vértices superiores de d_2. Considerando os diagramas do exemplo anterior, temos $c(d_1, d_2) = 1$.

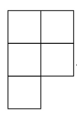
A *R-álgebra de Brauer* de grau r e parâmetro $\delta \in R$, $B_R(r, \delta)$, é muito semelhante à R-álgebra do monóide B_r. Como módulo, $B_R(r, \delta)$ é o R-módulo livremente gerado pelo conjunto B_r. Dados $d_1, d_2 \in B_r$, elementos da R-base de $B_R(r, \delta)$, definimos o produto de d_1 e d_2 em $B_R(r, \delta)$ por $\delta^{c(d_1,d_2)} d_1 * d_2$, onde $d_1 * d_2$ é a multiplicação em B_r (concatenação). A associatividade desta multiplicação decorre essencialmente da associatividade da multiplicação em B_r. O elemento id_{S_r} é identidade da álgebra $B_R(r, \delta)$.

3.2. A estrutura celular da álgebra de Brauer

É possível provar que a álgebra de Hecke do grupo simétrico é celular. Foi, aliás, esta álgebra que motivou Graham e Lehrer a desenvolver o conceito de álgebra celular. Deste facto decorre, em particular, que a álgebra do grupo simétrico sobre um domínio de integridade é celular. Antes de detalhar mais concretamente a estrutura celular desta álgebra necessitamos de introduzir alguma notação e resultados adicionais. As noções que se seguem podem ser encontradas em [Ful, Part I], por exemplo.

Uma *partição* do inteiro r é uma sequência $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, $\lambda_k \in \mathbb{N}_0$, satisfazendo $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_l$ e $\sum_{k=1}^{l} \lambda_k = r$. Quando conveniente, identificamos as partições que diferem apenas no número de zeros. Designemos por Λ o conjunto de todas as partições distintas (isto é, não identificáveis) do inteiro r. Dados $\lambda, \mu \in \Lambda$, dizemos que $\lambda \trianglelefteq \mu$ se $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k \leq \mu_1 + \cdots + \mu_k$, $k \geq 1$. Esta relação define uma ordem parcial em Λ chamada *ordem de dominância*.

Dada uma partição $\lambda \in \Lambda$, um λ-*diagrama de Young* é uma colecção finita de caixas, dispostas em linhas justificadas à esquerda, de tal forma que a k-ésima linha do diagrama tem λ_k caixas. Por exemplo, o diagrama de Young associado à partição $\lambda = (2, 2, 1)$ é dado por


.

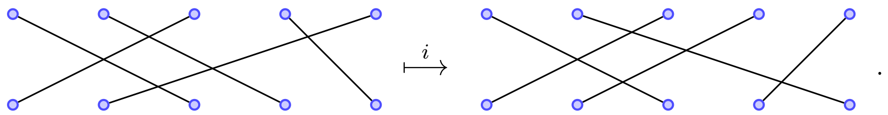
Por sua vez, um λ-*tableau* é um λ-diagrama de Young cujas caixas estão preenchidas com inteiros distintos de 1 a r. Um λ-tableau diz-se *standard* se as suas entradas forem crescentes por linhas e por colunas.

Dado $r \in \mathbb{N}$, é possível definir uma correspondência bijectiva entre as permutações de S_r e os pares de tableaux standard da mesma forma por meio de um algoritmo: o *algoritmo de Robinson-Schensted*. Assim, é possível associar a cada par (s,t) de λ-tableaux standard (onde λ é uma partição de r) uma permutação $\omega^{\lambda}_{s,t} \in S_r$.

Se R for um domínio de integridade, a álgebra RS_r é celular para os dados celulares (Λ, M, C, i), onde Λ é o conjunto das partições distintas de r e, para $\lambda \in \Lambda$, $M(\lambda)$ é o conjunto dos λ-tableaux standard. Dados $\lambda \in \Lambda$ e $s,t \in M(\lambda)$, definimos $C^{\lambda}_{s,t} = C'_{\omega^{\lambda}_{s,t}}$, onde $\omega^{\lambda}_{s,t}$ é a permutação que corresponde ao par (s,t) através do algoritmo de Robinson-Schensted e $\{C'_{\omega} : \omega \in S_r\}$ é a *base de Kazhdan-Lusztig* (ver [KL] e [Wil]). Por fim, i é o homomorfismo de R-módulos definido por

$$\begin{aligned} i:\quad & RS_r \longrightarrow RS_r \\ & \sigma \in S_r \longmapsto i(\sigma) = \sigma^{-1}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Pensando em termos de diagramas, a função i transforma $\sigma \in S_r$ na correspondente reflexão horizontal, ou seja, para $\sigma = (1\,3)(2\,4\,5) \in S_5$ temos



Vamos definir de forma análoga uma anti-involução R-linear em $B_R(r,\delta)$. Para tal, considere-se a aplicação $\tilde{j} : B_r \longrightarrow B_r$, que transforma o diagrama $d \in B_r$ em $\tilde{j}(d)$, reflexão horizontal de d (ou seja, para $l = 1,\ldots,r$, o vértice l de $\tilde{j}(d)$ corresponde ao vértice $r+l$ de d, o vértice $r+l$ de $\tilde{j}(d)$ corresponde ao vértice l de d e, para $k_1, k_2 \in \{1,\ldots,2r\}$, k_1k_2 é uma aresta em $\tilde{j}(d)$ se e só se for uma aresta em d).

Lema 3.1. *A aplicação $\tilde{j} : B_r \longrightarrow B_r$, que acabámos de definir, induz uma anti--involução R-linear em $B_R(r,\delta)$.*

Demonstração. Como B_r é uma R-base de $B_R(r,\delta)$ existe um único homomorfismo de R-módulos $j : B_R(r,\delta) \longrightarrow B_R(r,\delta)$ tal que $j|_{B_r} = \tilde{j}$. É evidente que $\tilde{j}^2 = \tilde{j}$, logo j também é uma involução. Tomemos agora $d_1, d_2 \in B_r$ arbitrários. Repare-se que $c(d_1,d_2) = c(\tilde{j}(d_2), \tilde{j}(d_1))$. Por outro lado, $\tilde{j}(d_1 * d_2) = \tilde{j}(d_2) * \tilde{j}(d_1)$. Então

$$\begin{aligned} j(d_1d_2) &= j(\delta^{c(d_1,d_2)} d_1 * d_2) = \delta^{c(d_1,d_2)} \tilde{j}(d_1 * d_2) \\ &= \delta^{c(\tilde{j}(d_2),\tilde{j}(d_1))} \tilde{j}(d_2) * \tilde{j}(d_1) = \tilde{j}(d_2)\tilde{j}(d_1) = j(d_2)j(d_1). \end{aligned}$$

Daqui decorre que j é um anti-homomorfismo de anéis e fica provado o pretendido. $\square$

A cada diagrama $d \in B_r$ podemos associar o valor $t(d)$ que exprime o *número de arestas verticais* do diagrama d, isto é, o número de arestas de d que unem vértices superiores a vértices inferiores. Para os diagramas d_1 e d_2 da página 26 temos $t(d_1) = 3$ e $t(d_2) = t(d_1 * d_2) = 1$. As arestas não verticais de um diagrama subdividem-se em *arestas superiores* e em *arestas inferiores*, caso emparelhem, respectivamente, apenas vértices superiores ou apenas vértices inferiores.

Lema 3.2. *Dados $d_1, d_2 \in B_r$ tem-se $t(d_1 * d_2) \leq \min\{t(d_1), t(d_2)\}$.*

Demonstração. Sabemos que o diagrama d_1 tem $\frac{r-t(d_1)}{2}$ arestas superiores. Por outro lado, o diagrama d_2 tem $\frac{r-t(d_2)}{2}$ arestas inferiores. Logo, o diagrama $d_1 * d_2$ tem, pelo menos, $\frac{r-t(d_1)}{2}$ arestas superiores e $\frac{r-t(d_2)}{2}$ arestas inferiores. Então $d_1 * d_2$ tem, no mínimo, $\max\left\{\frac{r-t(d_1)}{2}, \frac{r-t(d_2)}{2}\right\}$ arestas superiores e igual número de arestas inferiores. Daqui vem que o número de arestas verticais de $d_1 * d_2$ é, no máximo, $r - 2\max\left\{\frac{r-t(d_1)}{2}, \frac{r-t(d_2)}{2}\right\} = \min\{t(d_1), t(d_2)\}$. □

Seja J'_l o R-submódulo de $B_R(r, \delta)$ gerado pelos diagramas de B_r que possuem exactamente l arestas verticais. Note-se que $0 \leq l \leq r$ tem que ser sempre um inteiro com a mesma paridade de r. Verifica-se facilmente que $j(J'_l) = J'_l$, onde j é a anti-involução R-linear de $B_R(r, \delta)$ definida no Lema 3.1. Denotemos por $\mathcal{B}_l$ o conjunto

$$\mathcal{B}_l = \{d \in B_r : t(d) = l\},$$

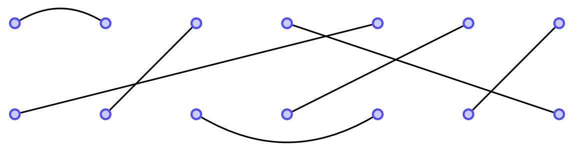
R-base de J'_l. Para formar um diagrama pertencente a $\mathcal{B}_l$ existem $\frac{r!}{l!((r-l)/2)!2^{(r-l)/2}}$ formas de escolher as $\frac{r-l}{2}$ arestas superiores. Do mesmo modo, há $\frac{r!}{l!((r-l)/2)!2^{(r-l)/2}}$ escolhas possíveis para as $\frac{r-l}{2}$ arestas inferiores e $l!$ escolhas para as arestas verticais. Daqui conclui-se que $|\mathcal{B}_l| = \frac{(r!)^2}{l!(((r-l)/2)!)^2 4^{(r-l)/2}}$. É claro que $B_R(r, \delta) = J'_a \oplus \cdots \oplus J'_{r-2} \oplus J'_r$, onde a é o resto da divisão de r por 2.

Considerem-se agora os R-módulos $J_l = J'_a \oplus \cdots \oplus J'_{l-2} \oplus J'_l$, livremente gerados sobre R pelos diagramas $d \in B_r$ satisfazendo $t(d) \leq l$. Dados $d, d' \in B_r$, com $t(d) \leq l$, vem que $dd' = \delta^{c(d,d')} d * d'$ e, pelo Lema 3.2, $t(d * d') \leq l$, logo $dd' \in J_l$. De forma análoga, deduz-se que $d'd \in J_l$. Desta observação decorre que os R-módulos J_l são ideais de $B_R(r, \delta)$.

Dado um inteiro l, $0 \leq l \leq r$ e $l \equiv r \pmod 2$, denotemos por G_l o *conjunto dos grafos constituídos por r vértices e por $\frac{r-l}{2}$ arestas, onde cada vértice tem grau igual ou inferior a 1.*

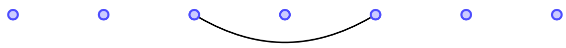
Vamos ver que um diagrama $d \in \mathcal{B}_l$ é totalmente caracterizado por dois grafos $e, f \in G_l$ e por uma permutação $\sigma \in S_l$. O grafo e é constituído por r vértices e pelas $\frac{r-l}{2}$ arestas superiores do diagrama d. De modo análogo, o grafo f é composto por r vértices e pelas $\frac{r-l}{2}$ arestas inferiores do diagrama d. Por fim, podemos numerar de 1 a l, da esquerda para a direita, os vértices superiores de d que pertencem a alguma aresta vertical e aplicar o mesmo procedimento aos vértices inferiores de d pertencentes a alguma aresta vertical. Desta forma, as arestas verticais de d definem uma permutação $\sigma \in S_l$.

Por exemplo, o diagrama

$d =$ 

é caracterizado pela permutação $\sigma = (1\,2\,5\,4\,3) \in S_5$ e pelos grafos

$e =$  ,

$f =$  .

Reciprocamente, é evidente que quaisquer dois elementos de G_l e qualquer permutação de S_l definem um diagrama de Brauer com l arestas verticais. Dados dois grafos $e, f \in G_l$ e uma permutação $\sigma \in S_l$, denotamos por $[\sigma]_{e,f}$ *o diagrama $d \in \mathcal{B}_l$ cujas arestas superiores e inferiores são caracterizadas, respectivamente, pelos grafos e e f, e cujas arestas verticais são definidas à custa de σ.*

Consideremos os os diagramas $d_1 = [\sigma]_{e,f}$ e $d_2 = [\tau]_{f,g}$, com $e, f, g \in G_l$ e $\sigma, \tau \in S_l$. É simples verificar que $d_1 * d_2 = [\sigma * \tau]_{e,g}$. Repare-se ainda que $j(d_1) = [\sigma^{-1}]_{f,e}$, onde j é a anti-involução R-linear de $B_R(r, \delta)$ definida no Lema 3.1.

Lema 3.3. *Consideremos os diagramas $d_1 = [\sigma]_{e,f}, d_2 = [\tau]_{g,h} \in B_r$, onde $e, f \in G_{l_1}$, $\sigma \in S_{l_1}$, $g, h \in G_{l_2}$, $\tau \in S_{l_2}$, $0 \leq l_1, l_2 \leq r$ e $l_1 \equiv l_2 \equiv r \pmod 2$. Então:*

1. $t(d_1 * d_2) = t([\mathrm{id}_{S_{l_1}}]_{f,f} * [\mathrm{id}_{S_{l_2}}]_{g,g})$;

2. $c(d_1, d_2) = c([\mathrm{id}_{S_{l_1}}]_{f,f}, [\mathrm{id}_{S_{l_2}}]_{g,g})$;

3. *se* $l_1 = l_2$ *e* $t(d_1 * d_2) = l_1$, *então* $d_1 * d_2 = [\sigma * \pi * \tau]_{e,h}$, *com* $[\mathrm{id}_{S_{l_1}}]_{f,f} * [\mathrm{id}_{S_{l_1}}]_{g,g} = [\pi]_{f,g}$.

Demonstração. 1. Pela observação anterior sabemos que $d_1 = d_1 * [\mathrm{id}_{S_{l_1}}]_{f,f}$, $d_2 = [\mathrm{id}_{S_{l_2}}]_{g,g} * d_2$, $j(d_1) * d_1 = [\mathrm{id}_{S_{l_1}}]_{f,f}$ e $d_2 * j(d_2) = [\mathrm{id}_{S_{l_2}}]_{g,g}$. Então, pelo Lema 3.2, vem que $t(d_1 * d_2) = t(d_1 * ([\mathrm{id}_{S_{l_1}}]_{f,f} * [\mathrm{id}_{S_{l_2}}]_{g,g}) * d_2) \leq t([\mathrm{id}_{S_{l_1}}]_{f,f} * [\mathrm{id}_{S_{l_2}}]_{g,g})$. Por outro lado (também pelo Lema 3.2), temos $t([\mathrm{id}_{S_{l_1}}]_{f,f} * [\mathrm{id}_{S_{l_2}}]_{g,g}) = t(j(d_1) * (d_1 * d_2) * j(d_2)) \leq t(d_1 * d_2)$.

2. Para provar que $c(d_1, d_2) = c([\mathrm{id}_{S_{l_1}}]_{f,f}, [\mathrm{id}_{S_{l_2}}]_{g,g})$ basta reparar que o número de ciclos formados durante a concatenação de d_1 com d_2 depende apenas das arestas inferiores de d_1 e das arestas superiores de d_2.

3. Se $l_1 = l_2$ e $t(d_1 * d_2) = l_1$ então, pela alínea 1, tem-se $t([\mathrm{id}_{S_{l_1}}]_{f,f} * [\mathrm{id}_{S_{l_1}}]_{g,g}) = l_1$. Logo $[\mathrm{id}_{S_{l_1}}]_{f,f} * [\mathrm{id}_{S_{l_1}}]_{g,g} = [\pi]_{f,g}$ para alguma permutação $\pi \in S_{l_1}$. Agora, basta reparar que $d_1 * d_2 = d_1 * ([\mathrm{id}_{S_{l_1}}]_{f,f} * [\mathrm{id}_{S_{l_1}}]_{g,g}) * d_2 = [\sigma]_{e,f}[\pi]_{f,g}[\tau]_{g,h}$. □

Lema 3.4. *Seja R um domínio de integridade e seja l um inteiro arbitrário satisfazendo $0 \leq l \leq r$ e $l \equiv r \pmod 2$. Convencione-se que J_{a-2} é o R-módulo nulo, onde a é o resto da divisão de r por 2. Então a R-álgebra J_l/J_{l-2} é isomorfa a uma inflação da R-álgebra do grupo S_l ao longo de um R-módulo V_l, livre e finitamente gerado sobre R, verificando* $\operatorname{rank} V_l = |G_l|$.

Demonstração. Como R-módulo, J_l/J_{l-2} é isomorfo a J'_l, através da projecção canónica $\pi : J'_l \longrightarrow J_l/J_{l-2}$. Daqui vem que o conjunto $\widehat{\mathcal{B}_l} = \{d + J_{l-2} : d \in B_r, t(d) = l\}$ é uma R-base de J_l/J_{l-2}. Note-se que um elemento $d + J_{l-2} \in \widehat{\mathcal{B}_l}$ é univocamente determinado pelo diagrama d. Seja V_l o R-módulo livremente gerado pelo conjunto G_l. Considere-se o homomorfismo de R-módulos $\varphi_l : J_l/J_{l-2} \longrightarrow V_l \otimes_R RS_l \otimes_R V_l$, que a cada $d + J_{l-2} \in \widehat{\mathcal{B}_l}$ faz corresponder o elemento $e \otimes_R \sigma \otimes_R f$, onde $d = [\sigma]_{e,f}$. A aplicação φ_l é um isomorfismo de R-módulos, pois transforma uma R-base numa R-base.

O próximo passo consiste em construir uma aplicação R-bilinear $\psi : V_l \times V_l \longrightarrow RS_l$, que nos vai permitir definir uma multiplicação em $V_l \otimes_R RS_l \otimes_R V_l$. Para tal, considerem-se e e f, dois grafos arbitrários pertencentes G_l, e faça-se o produto $[\mathrm{id}_{S_l}]_{e,e} * [\mathrm{id}_{S_l}]_{f,f}$. Se $t([\mathrm{id}_{S_l}]_{e,e} * [\mathrm{id}_{S_l}]_{f,f}) < l$, definimos $\psi(e, f) = 0$. Se, pelo contrário, $t([\mathrm{id}_{S_l}]_{e,e} * [\mathrm{id}_{S_l}]_{f,f}) = l$, definimos $\psi(e, f) = \delta^{c([\mathrm{id}_{S_l}]_{e,e}, [\mathrm{id}_{S_l}]_{f,f})}\sigma$, onde $[\mathrm{id}_{S_l}]_{e,e} * [\mathrm{id}_{S_l}]_{f,f} = [\sigma]_{e,f}$. Estenda-se ψ a $V_l \times V_l$ por R-bilinearidade. Verifica-se facilmente que $i(\psi(e, f)) = \psi(f, e)$, onde i é a anti-involução R-linear de RS_r definida em (3.1). Então, pela Proposição 2.1, $V_l \otimes_R RS_r \otimes_R V_l$ é uma R-álgebra para a multiplicação definida em (2.1), que é celular relativamente à anti-involução R-linear j'_l dada por $j'_l(e \otimes_R \sigma \otimes_R f) = f \otimes_R i(\sigma) \otimes_R e$.

Provemos agora que φ_l é um isomorfismo de R-álgebras. Consideremos $d_1 + J_{l-2}, d_2 + J_{l-2} \in \widehat{\mathcal{B}}_l$ e admitamos que $\varphi_l(d_1 + J_{l-2}) = e \otimes_R \sigma \otimes_R f$, $\varphi_l(d_2 + J_{l-2}) = g \otimes_R \tau \otimes_R h$. Vem que

$$\varphi_l((d_1 + J_{l-2})(d_2 + J_{l-2})) = \varphi_l(\delta^{c(d_1,d_2)} d_1 * d_2 + J_{l-2}),$$

$$\varphi_l(d_1 + J_{l-2})\varphi_l(d_2 + J_{l-2}) = e \otimes_R \sigma * \psi(f,g) * \tau \otimes_R h.$$

Suponhamos primeiramente que $t(d_1 * d_2) < l$. Por um lado, vem que $\varphi_l((d_1 + J_{l-2})(d_2 + J_{l-2})) = 0$. Por outro lado, pela alínea 1 do Lema 3.3, tem-se $t([\mathrm{id}_{S_l}]_{f,f} * [\mathrm{id}_{S_l}]_{g,g}) = t(d_1 * d_2) < l$, logo $\psi(f,g) = 0$ e $\varphi_l(d_1 + J_{l-2})\varphi_l(d_2 + J_{l-2}) = 0$. Suponhamos agora que $t(d_1 * d_2) = l$. Pela alínea 3 do Lema 3.3 vem que $d_1 * d_2 = [\sigma * \pi * \tau]_{e,h}$, onde $[\mathrm{id}_{S_l}]_{f,f} * [\mathrm{id}_{S_l}]_{g,g} = [\pi]_{f,g}$, para algum $\pi \in S_l$. Então temos

$$\varphi_l((d_1 + J_{l-2})(d_2 + J_{l-2})) = \delta^{c(d_1,d_2)}(e \otimes_R \sigma * \pi * \tau \otimes_R h),$$

$$\varphi_l(d_1 + J_{l-2})\varphi_l(d_2 + J_{l-2}) = e \otimes_R \left(\delta^{c([\mathrm{id}_{S_l}]_{f,f},[\mathrm{id}_{S_l}]_{g,g})}(\sigma * \pi * \tau)\right) \otimes_R h.$$

Pela alínea 2 do Lema 3.3 concluímos a igualdade das duas expressões que acabámos de obter. $\square$

Dado um inteiro l satisfazendo $0 \leq l \leq r$ e $l \equiv r \pmod 2$, considerem-se as aplicações $\varphi_l : J_l/J_{l-2} \longrightarrow V_l \otimes_R RS_l \otimes_R V_l$ e $j'_l : V_l \otimes_R RS_l \otimes_R V_l \longrightarrow V_l \otimes_R RS_l \otimes_R V_l$, definidas na demonstração anterior. Como φ_l é um isomorfismo de R-álgebras e como $V_l \otimes_R RS_l \otimes_R V_l$ é uma álgebra celular relativamente à anti-involução R-linear j'_l, então J_l/J_{l-2} é uma R-álgebra celular relativamente à anti-involução R-linear $\kappa_l = \varphi_l^{-1} \circ j'_l \circ \varphi_l$. É simples verificar que a função κ_l, que acabámos de construir, coincide com a anti-involução R-linear induzida por j em J_l/J_{l-2}, onde j é a anti-involução R-linear de $B_R(r,\delta)$ definida no Lema 3.1.

Teorema 3.5. *Seja R um domínio de integridade. Então a R-álgebra $B_R(r,\delta)$ é isomorfa a uma inflação iterada das álgebras $RS_r, RS_{r-2}, \ldots, RS_a$, onde a é o resto da divisão de r por 2. Mais concretamente, $B_R(r,\delta)$ é isomorfa à inflação iterada*

$$A = (V_a \otimes_R RS_a \otimes_R V_a) \oplus (\cdots \oplus ((V_{r-2} \otimes_R RS_{r-2} \otimes_R V_{r-2}) \oplus (V_r \otimes_R RS_r \otimes_R V_r))),$$

onde os R-módulos V_l, com $0 \leq l \leq r$ e $l \equiv r \pmod 2$, são os definidos no Lema 3.4.

Demonstração. Vamos definir a álgebra A e construir um isomorfismo de R-álgebras $\Phi : B_R(r,\delta) \longrightarrow A$ de forma recursiva. Dado um inteiro l verificando $0 \leq l \leq r$ e $l \equiv r \pmod 2$, as R-álgebras $\widehat{B}_l = V_l \otimes_R RS_l \otimes_R V_l$, definidas no Lema 3.4, são celulares por construção e a aplicação $\varphi_l : J_l/J_{l-2} \longrightarrow \widehat{B}_l$ considerada é um isomorfismo de R-álgebras. Denotemos por $\widehat{C}_l$ os R-módulos

$$(V_l \otimes_R RS_l \otimes_r V_l) \oplus (\cdots \oplus ((V_{r-2} \otimes_R RS_{r-2} \otimes_R V_{r-2}) \oplus (V_r \otimes_R RS_r \otimes_R V_r)))$$

e por Φ_r o isomorfismo de álgebras $\varphi_r : B_R(r,\delta)/J_{r-2} \longrightarrow \widehat{B}_r = \widehat{C}_r$. Convencionemos que $\widehat{C}_{r+2}$ é o R-módulo nulo. Para $l \leq r-2$, definamos os homomorfismos de R-módulos $\Phi_l : B_R(r,\delta)/J_{l-2} \longrightarrow \widehat{B}_l \oplus \widehat{C}_{l+2} = \widehat{C}_l$ da seguinte forma: dado $d + J_{l-2}$ com $d \in B_r$ e $t(d) \geq l$,

$$\Phi_l(d + J_{l-2}) = \begin{cases} \varphi_l(d + J_{l-2}) & \text{se t(d)=l,} \\ \Phi_{l+2}(d + J_l) & \text{se } t(d) \geq l+2. \end{cases}$$

Para $l = r, r-2, \ldots, a$, mostremos que:

1. o homomorfismo de R-módulos Φ_l transforma o elemento $d + J_{l-2}$, $d = [\sigma]_{e,f} \in B_r$, $t(d) \geq l$, em $e \otimes_R \sigma \otimes_R f \in \widehat{B}_l \oplus \widehat{C}_{l+2} = \widehat{C}_l$, logo, é um isomorfismo de R-módulos;

2. é possível definir uma multiplicação em $\widehat{B}_l \oplus \widehat{C}_{l+2} = \widehat{C}_l$ que torna $\widehat{C}_l$ numa inflação da álgebra celular $\widehat{B}_l$ ao longo da álgebra celular $\widehat{C}_{l+2}$ (em particular $\widehat{C}_l$ é celular);

3. Φ_l é um homorfismo de anéis tomando para multiplicação em $\widehat{C}_l$ a operação definida em 2;

4. se $\widehat{C}_l$ for celular relativamente à anti-involção R-linear ι_l e se j_l for a anti-involução R-linear induzida por j em $B_R(r,\delta)/J_{l-2}$ (onde j é a anti-involução R-linear de $B_R(r,\delta)$ definida no Lema 3.1) então $\Phi_l \circ j_l = \iota_l \circ \Phi_l$.

As quatro afirmações anteriores são verdadeiras para $l = r$. As três primeiras decorrem da definição do isomorfismo φ_r e da construção da multiplicação em $\widehat{B}_r$ no Lema 3.4. A observação que antecede o enunciado desta teorema permite concluir que a quarta afirmação também é verdadeira para $l = r$.

Provemos que a veracidade destas condições para $l \in \{a+2, \ldots, r-2, r\}$ implica a sua validade para $l-2$. Suponhamos então que as afirmações 1,2,3 e 4 se verificam para um $l \in \{a+2, \ldots, r-2, r\}$ arbitrário.

Considere-se $d + J_{l-4}$, com $d = [\sigma]_{e,f} \in B_r$, $t(d) \geq l-2$. Se $t(d) = l-2$ então, pela definição de φ_{l-2} no Lema 3.4, vem $\Phi_{l-2}(d + J_{l-4}) = \varphi_{l-2}(d + J_{l-4}) = e \otimes_R \sigma \otimes_R f$.

Pelo contrário, se $t(d) \geq l$, então $\Phi_{l-2}(d + J_{l-4}) = \Phi_l(d + J_{l-2}) = e \otimes_R \sigma \otimes_R f$, por hipótese.

Provemos agora que 2, 3 e 4 também se verificam para $l-2$. Para tal é necessário definir três homomorfismos de R-módulos adequados: $\alpha : \widehat{C}_l \otimes_R \widehat{C}_l \longrightarrow \widehat{B}_{l-2}$, $\beta : \widehat{B}_{l-2} \otimes_R \widehat{C}_l \longrightarrow \widehat{B}_{l-2}$ e $\gamma : \widehat{C}_l \otimes_R \widehat{B}_{l-2} \longrightarrow \widehat{B}_{l-2}$.

Comecemos por definir α, exibindo as imagens dos elementos de uma R-base de $\widehat{C}_l \otimes_R \widehat{C}_l$. Considerem-se $e \otimes_R \sigma \otimes_R f, g \otimes_R \tau \otimes_R h \in \widehat{C}_l$ arbitrários, com $e, f \in G_{k_1}$, $\sigma \in S_{k_1}$, $g, h \in G_{k_2}$, $\tau \in S_{k_2}$, $l \leq k_1, k_2 \leq r$ e $k_1 \equiv k_2 \equiv r \pmod 2$. Suponhamos que $[\sigma]_{e,f} * [\tau]_{g,h} = [\pi]_{i,j}$. Então

$$\alpha((e \otimes_R \sigma \otimes_R f) \otimes_R (g \otimes_R \tau \otimes_R h)) = \begin{cases} \delta^{c([\sigma]_{e,f},[\tau]_{g,h})} i \otimes_R \pi \otimes_R j & \text{se } t([\pi]_{i,j}) = l-2, \\ 0 & \text{se } t([\pi]_{i,j}) \neq l-2. \end{cases}$$

As aplicações β e γ são definidas de modo semelhante. Tomemos $e \otimes_R \sigma \otimes_R f \in \widehat{B}_{l-2}, g \otimes_R \tau \otimes_R h \in \widehat{C}_l$, elementos da base. Suponhamos que $[\sigma]_{e,f} * [\tau]_{g,h} = [\pi]_{i,j}$ e que $[\tau]_{g,h} * [\sigma]_{e,f} = [\upsilon]_{k,m}$. Defina-se

$$\beta((e \otimes_R \sigma \otimes_R f) \otimes_R (g \otimes_R \tau \otimes_R h)) = \begin{cases} \delta^{c([\sigma]_{e,f},[\tau]_{g,h})} i \otimes_R \pi \otimes_R j & \text{se } t([\pi]_{i,j}) = l-2, \\ 0 & \text{se } t([\pi]_{i,j}) \leq l-4, \end{cases}$$

$$\gamma((g \otimes_R \tau \otimes_R h) \otimes_R (e \otimes_R \sigma \otimes_R f)) = \begin{cases} \delta^{c([\tau]_{g,h},[\sigma]_{e,f})} i \otimes_R \pi \otimes_R j & \text{se } t([\upsilon]_{k,m}) = l-2, \\ 0 & \text{se } t([\upsilon]_{k,m}) \leq l-4. \end{cases}$$

Sabemos então que $\widehat{B}_{l-2} \oplus \widehat{C}_l$ é uma álgebra (não necessariamente associativa) para a operação definida em (2.3), que vamos denotar por $\star$. Consideremos $d_1 + J_{l-4}, d_2 + J_{l-4} \in B_R(r, \delta)$, com $d_1 = [\sigma]_{e,f}, d_2 = [\tau]_{g,h} \in B_r$, $t(d_1), t(d_2) \geq l-2$ e $d_1 * d_2 = [\pi]_{i,j}$. Vamos ver que $\Phi_{l-2}((d_1 + J_{l-4})(d_2 + J_{l-4})) = \Phi_{l-2}(d_1 + J_{l-4}) \star \Phi_{l-2}(d_2 + J_{l-4})$. Para tal vamos analisar quatro casos distintos: $t(d_1) = t(d_2) = l-2$; $t(d_1) = l-2$ e $t(d_2) \geq l$; $t(d_1) \geq l$ e $t(d_2) = l-2$; $t(d_1), t(d_2) \geq l$.

Se $t(d_1) = t(d_2) = l-2$, então $d_1 + J_{l-4}, d_2 + J_{l-4}, (d_1 + J_{l-4})(d_2 + J_{l-4}) \in J_{l-2}/J_{l-4}$, portanto

$$\begin{aligned} &\Phi_{l-2}((d_1 + J_{l-4})(d_2 + J_{l-4})) = \varphi_{l-2}((d_1 + J_{l-4})(d_2 + J_{l-4})) \\ &= \varphi_{l-2}(d_1 + J_{l-4})\varphi_{l-2}(d_2 + J_{l-4}), \end{aligned}$$

onde o último produto é realizado em $\widehat{B}_{l-2}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} &\varphi_{l-2}(d_1 + J_{l-4})\varphi_{l-2}(d_2 + J_{l-4}) = \varphi_{l-2}(d_1 + J_{l-4}) \star \varphi_{l-2}(d_2 + J_{l-4}) \\ &= \Phi_{l-2}(d_1 + J_{l-4}) \star \Phi_{l-2}(d_1 + J_{l-4}), \end{aligned}$$

de onde vem a igualdade pretendida.

Suponhamos agora que $t(d_1) = l-2$ e $t(d_2) \geq l$. Tem-se

$$\begin{aligned}\Phi_{l-2}((d_1 + J_{l-4})(d_2 + J_{l-4})) &= \Phi_{l-2}(d_1 d_2 + J_{l-4}) \\ &= \Phi_{l-2}(\delta^{c(d_1,d_2)} d_1 * d_2 + J_{l-4}).\end{aligned}$$

Se $t(d_1 * d_2) \leq l-4$, vem que $\Phi_{l-2}((d_1 + J_{l-4})(d_2 + J_{l-4})) = 0$. Pelo contrário, se $t(d_1 * d_2) = l-2$, vem que

$$\Phi_{l-2}((d_1 + J_{l-4})(d_2 + J_{l-4})) = \delta^{c(d_1,d_2)} i \otimes_R \pi \otimes_R j.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\Phi_{l-2}(d_1 + J_{l-4}) \star \Phi_{l-2}(d_2 + J_{l-4}) &= \varphi_{l-2}(d_1 + J_{l-4}) \star \Phi_l(d_2 + J_{l-2}) \\ = (e \otimes_R \sigma \otimes_R f) \star (g \otimes_R \tau \otimes_R h) &= \beta((e \otimes_R \sigma \otimes_R f) \otimes_R (g \otimes_R \tau \otimes_R h)).\end{aligned}$$

Pela forma com foi definida a aplicação β conclui-se que $\Phi_{l-2}((d_1+J_{l-4})(d_2+J_{l-4})) = \Phi_{l-2}(d_1 + J_{l-4})\Phi_{l-2}(d_2 + J_{l-4})$ quando $t(d_1) = l-2$ e $t(d_2) \geq l$.

A prova do caso em que $t(d_1) \geq l$ e $t(d_2) = l-2$ é análoga, com a função γ a desempenhar o papel de β.

Finalmente, admitamos que $t(d_1), t(d_2) \geq l$. Por um lado, temos

$$\Phi_{l-2}((d_1 + J_{l-4})(d_2 + J_{l-4})) = \delta^{c(d_1,d_2)} \Phi_{l-2}(d_1 * d_2 + J_{l-4}).$$

Por outro lado, vem que

$$\begin{aligned}\Phi_{l-2}(d_1 + J_{l-4}) \star \Phi_{l-2}(d_2 + J_{l-4}) &= \Phi_l(d_1 + J_{l-2}) \star \Phi_l(d_2 + J_{l-2}) \\ &= \alpha((e \otimes_R \sigma \otimes_R f) \otimes_R (g \otimes_R \tau \otimes_R h)) + \Phi_l(d_1 + J_{l-2}) \diamond \Phi_l(d_2 + J_{l-2}) \\ &= \alpha((e \otimes_R \sigma \otimes_R f) \otimes_R (g \otimes_R \tau \otimes_R h)) + \Phi_l((d_1 + J_{l-2})(d_2 + J_{l-2})),\end{aligned}$$

onde $\diamond$ é a multiplicação em $\widehat{C}_l$. Suponhamos primeiramente que $t(d_1 * d_2) \leq l-4$. Vem que

$$\Phi_{l-2}((d_1 + J_{l-4})(d_2 + J_{l-4})) = 0$$

e que

$$\Phi_{l-2}(d_1 + J_{l-4}) \star \Phi_{l-2}(d_2 + J_{l-4}) = 0 + \Phi_l(\delta^{c(d_1,d_2)} d_1 * d_2 + J_{l-2}) = 0.$$

Se $t(d_1 * d_2) = l-2$, temos

$$\Phi_{l-2}((d_1 + J_{l-4})(d_2 + J_{l-4})) = \delta^{c(d_1,d_2)} i \otimes_R \pi \otimes_R j$$

e

$$\Phi_{l-2}(d_1 + J_{l-4}) \star \Phi_{l-2}(d_2 + J_{l-4}) = \delta^{c(d_1,d_2)} i \otimes_R \pi \otimes_R j + 0.$$

Por fim, se $t(d_1 * d_2) \geq l$, tem-se

$$\Phi_{l-2}((d_1 + J_{l-4})(d_2 + J_{l-4})) = \delta^{c(d_1,d_2)} i \otimes_R \pi \otimes_R j$$

e

$$\Phi_{l-2}(d_1 + J_{l-4}) \star \Phi_{l-2}(d_2 + J_{l-4}) = 0 + \delta^{c(d_1,d_2)} i \otimes_R \pi \otimes_R j.$$

Acabámos de mostrar que a afirmação 3 se verifica para $l-2$. Por Φ_{l-2} ser uma função sobrejectiva e por $B_R(r,\delta)$ ser uma álgebra associativa conclui-se que $\widehat{C}_{l-2}$ é uma R-álgebra associativa.

Considerem-se agora as anti-involuções R-lineares $j_l' : \widehat{B}_{l-2} \longrightarrow \widehat{B}_{l-2}$, $\iota_l : \widehat{C}_l \longrightarrow \widehat{C}_l$. Então a função $\iota_{l-2} = j_l' + \iota_l$ é uma involução R-linear em $\widehat{C}_{l-2}$. Vejamos que $\Phi_{l-2} \circ j_{l-2} = \iota_{l-2} \circ \Phi_{l-2}$. Seja $d + J_{l-4} \in C_{l-2}$, onde $d = [\sigma]_{e,f} \in B_r$, $t(d) \geq l-2$. Se $t(d) = l-2$, vem que

$$\begin{aligned}&(\Phi_{l-2} \circ j_{l-2})(d + J_{l-4}) = \Phi_{l-2}([\sigma^{-1}]_{f,e} + J_{l-4}) = \varphi_{l-2}(\kappa_{l-2}(d + J_{l-4}))\\ &= \kappa_{l-2}(\varphi_{l-2}(d + J_{l-4})) = (\iota_{l-2} \circ \Phi_{l-2})(d + J_{l-4}).\end{aligned}$$

Se $t(d) \geq l$, temos

$$\begin{aligned}&(\Phi_{l-2} \circ j_{l-2})(d + J_{l-4}) = \Phi_{l-2}([\sigma^{-1}]_{f,e} + J_{l-4})\\ &= \Phi_l([\sigma^{-1}]_{f,e} + J_{l-2}) = \Phi_l(j_l(d + J_{l-2})) = \iota_l(\Phi_l(d + J_{l-2}))\\ &= \iota_l(\Phi_{l-2}(d + J_{l-4})) = (\iota_{l-2} \circ \Phi_{l-2})(d + J_{l-4}).\end{aligned}$$

Daqui conclui-se que $\Phi_{l-2} \circ j_{l-2} = \iota_{l-2} \circ \Phi_{l-2}$. Como j_{l-2} é um anti-homomorfismo de anéis então ι_{l-2} é uma anti-involução R-linear de $\widehat{C}_{l-2}$.

Falta apenas mostrar que a condição (2.14) é satisfeita para demonstrar que $\widehat{C}_{l-2}$ é uma inflação da álgebra celular $\widehat{B}_{l-2}$ ao longo da álgebra celular $\widehat{C}_l$. Suponhamos que RS_{l-2} tem dados celulares (Λ, M, C, i). Então $\widehat{B}_{l-2}$ é uma álgebra celular com dados celulares $(\Lambda, N, D, \kappa_{l-2})$, onde $N(\lambda) = G_{l-2} \times M(\lambda)$ e $D^\lambda_{(g,s),(h,t)} = g \otimes_R C^\lambda_{s,t} \otimes_R h$, para $\lambda \in \Lambda$ e $(g,s),(h,t) \in N(\lambda)$ (ver Proposição 2.1). Suponhamos que $C^\lambda_{s,t} = \sum_{\tau \in S_{l-2}} r^\tau_{\lambda,s,t}\tau$, $\lambda \in \Lambda$, $s,t \in M(\lambda)$, e tomemos o elemento $e \otimes_R \sigma \otimes_R f \in \widehat{C}_l$, $\sigma \in S_k$, $e,f \in G_k$, $k \geq l$, $k \equiv r \pmod 2$. Vem que

$$\gamma\left((e \otimes_R \sigma \otimes_R f) \otimes_R D^\lambda_{(g,s),(h,t)}\right) = \sum_{\tau \in S_{l-2}} r^\tau_{\lambda,s,t}\gamma\left((e \otimes_R \sigma \otimes_R f) \otimes_R (g \otimes_R \tau \otimes_R h)\right).$$

Agora existem duas situações possíveis. Se $t([\mathrm{id}_{S_k}]_{f,f} * [\mathrm{id}_{S_{l-2}}]_{g,g}) = t([\sigma]_{e,f} * [\tau]_{g,h}) \leq l-4$ (alínea 1 do Lema 3.3), então $\gamma\left((e \otimes_R \sigma \otimes_R f) \otimes_R (g \otimes_R \tau \otimes_R h)\right) = 0$, para todo o $\tau \in S_{l-2}$.

Pelo contrário, se $t([\mathrm{id}_{S_k}]_{f,f} * [\mathrm{id}_{S_{l-2}}]_{g,g}) = t([\sigma]_{e,f} * [\tau]_{g,h}) = l-2$ então, como $t([\mathrm{id}_{S_{l-2}}]_{g,g}) = l-2$, vem $[\sigma]_{e,f} * [\tau]_{g,h} = ([\sigma]_{e,f} * [\mathrm{id}_{S_{l-2}}]_{g,g}) * [\tau]_{g,h} = [\pi]_{k,g} * [\tau]_{g,h} = [\pi * \tau]_{k,h}$, para certos $\pi \in S_{l-2}$ e $k \in G_{l-2}$. Neste caso, tem-se (ver alínea 2 do Lema 3.3)

$$\begin{aligned}&\gamma\left((e \otimes_R \sigma \otimes_R f) \otimes_R (g \otimes_R \tau \otimes_R h)\right) = \delta^{c([\sigma]_{e,f},[\tau]_{g,h})} k \otimes_R \pi * \tau \otimes_R h \\ &= \delta^{c([\mathrm{id}_{S_k}]_{f,f},[\mathrm{id}_{S_{l-2}}]_{g,g})} k \otimes_R \pi * \tau \otimes_R h,\end{aligned}$$

qualquer que seja $\tau \in S_{l-2}$. Nesta segunda situação, temos

$$\begin{aligned}&\gamma\left((e \otimes_R \sigma \otimes_R f) \otimes_R D^\lambda_{(g,s),(h,t)}\right) = \sum_{\tau \in S_{l-2}} r^\tau_{\lambda,s,t} \delta^{c([\mathrm{id}_{S_k}]_{f,f},[\mathrm{id}_{S_{l-2}}]_{g,g})} (k \otimes_R \pi * \tau \otimes_R h) \\ &= \delta^{c([\mathrm{id}_{S_k}]_{f,f},[\mathrm{id}_{S_{l-2}}]_{g,g})} k \otimes_R \pi * \left(\sum_{\tau \in S_{l-2}} r^\tau_{\lambda,s,t} \tau\right) \otimes_R h \\ &= \delta^{c([\mathrm{id}_{S_k}]_{f,f},[\mathrm{id}_{S_{l-2}}]_{g,g})} k \otimes_R \pi * C^\lambda_{s,t} \otimes_R h \\ &= \delta^{c([\mathrm{id}_{S_k}]_{f,f},[\mathrm{id}_{S_{l-2}}]_{g,g})} k \otimes_R \left(\sum_{u \in M(\lambda)} r_\pi(u,s) C^\lambda_{u,t} + r'\right) \otimes_R h \\ &= \delta^{c([\mathrm{id}_{S_k}]_{f,f},[\mathrm{id}_{S_{l-2}}]_{g,g})} \left(\sum_{u \in M(\lambda)} r_\pi(u,s) k \otimes_R C^\lambda_{u,t} \otimes_R h + k \otimes_R r' \otimes_R h\right) \\ &= \sum_{u \in M(\lambda)} \delta^{c([\mathrm{id}_{S_k}]_{f,f},[\mathrm{id}_{S_{l-2}}]_{g,g})} r_\pi(u,s) D^\lambda_{(k,u),(h,t)} + \delta^{c([\mathrm{id}_{S_k}]_{f,f},[\mathrm{id}_{S_{l-2}}]_{g,g})} k \otimes_R r' \otimes_R h,\end{aligned}$$

onde r' é uma combinação linear de elementos da base celular (Λ, M, C, i) de RS_{l-2} com índice superior estritamente inferior a λ. Em ambos os casos concluímos que

$$\gamma\left((e \otimes_R \sigma \otimes_R f) \otimes_R D^\lambda_{(g,s),(h,t)}\right) = \sum_{(m,u) \in N(\lambda)} r_{e \otimes_R \sigma \otimes_R f}((m,u),(g,s)) D^\lambda_{(m,u),(h,t)} + r''',$$

onde os coeficientes $r_{e \otimes_R \sigma \otimes_R f}((m,u),(g,s))$ não dependem de (h,t) e com r''' combinação linear dos elementos da base celular de $\widehat{B}_{l-2}$ com índice superior estritamente inferior a λ.

Assim, fica provado que as condições 1,2,3 e 4 são satisfeitas para $l-2$ se se verificarem para l. Daqui decorre que 1, 2, 3 e 4 são afirmações válidas para todo o inteiro positivo l, menor ou igual a r e com a mesma paridade de r. Em particular, estas condições são satisfeitas para a. Como tal, é possível munir A com uma estrutura de inflação iterada de álgebras celulares e $B_R(r,\delta)$ é uma álgebra isomorfa a A

por meio do isomorfismo $\Phi = \Phi_a$ que a cada diagrama $d = [\sigma]_{e,f}$ faz corresponder o elemento $e \otimes_R \sigma \otimes_R f$. Além do mais, $\Phi \circ j = \iota_a \circ \Phi$, onde ι_a é a anti-involução R-linear da álgebra celular A. Então $B_R(r, \delta)$ é uma álgebra celular relativamente à anti-involução R-linear j definida no Lema 3.1. $\square$

Capítulo 4

Módulos celulares e representações irredutíveis

Este capítulo é dedicado ao estudo de uma classe particular de módulos sobre uma álgebra celular: os módulos celulares. Vamos ver que, no caso em que A é uma álgebra celular sobre um corpo, se pode definir uma aplicação injectiva do conjunto das classes de isomorfismo de A-módulos simples no conjunto dos A-módulos celulares. Para tal, vamos conjugar a definição de álgebra celular dada por Graham e Lehrer com a definição de König e Xi.

4.1. Módulos celulares

Seja A uma R-álgebra celular com dados celulares (Λ, M, C, i). Suponhamos que $|\Lambda| = n$. Podemos ordenar os elementos de Λ da forma $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, onde λ_1 é um elemento minimal de Λ e, para $l > 1$, λ_l é um elemento minimal no conjunto parcialmente ordenado $\Lambda - \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}\}$. Esta ordenação pode não ser única. Pela demonstração da primeira implicação da Proposição 1.6, temos $A = J'_1 \oplus \cdots \oplus J'_n$, com $J'_l = J(\{\lambda_l\})$, e A é uma álgebra celular relativamente a i com cadeia celular $0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_{n-1} \subset J_n = A$, onde $J_l = \bigoplus_{k=1}^{l} J'_k$.

Fixemos arbitrariamente $\lambda \in \Lambda$. Temos $\lambda = \lambda_l$ para certo $l \in \{1, \cdots, n\}$. Sabemos que J_l/J_{l-1} é um ideal celular da R-álgebra A/J_{l-1} relativamente à anti-involução R-linear i', induzida por i no quociente. Assim, existe um ideal esquerdo de A/J_{l-1}, Δ, livre e finitamente gerado sobre R, com $\Delta \subseteq J_l/J_{l-1}$, e um isomorfismo R-linear de $(A/J_{l-1}, A/J_{l-1})$-bimódulos, $\alpha : J_l/J_{l-1} \longrightarrow \Delta \otimes_R i'(\Delta)$, que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
J_l/J_{l-1} & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \Delta \otimes_R i'(\Delta) \\
{\scriptstyle i'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi : x \otimes_R y \longmapsto i'(y) \otimes_R i'(x)} \\
J_l/J_{l-1} & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \Delta \otimes_R i'(\Delta)
\end{array}.$$

Como Δ é um A/J_{l-1}-módulo, então Δ é um A-módulo para a acção definida por

$$a\delta = (a + J_{l-1})\delta,$$

para $a \in A$ e $\delta \in \Delta$. Pela construção efectuada na Proposição 1.6 (ver primeira implicação da demonstração), sabemos que existe $\{\delta_s : s \in M(\lambda)\}$, R-base de Δ, verificando $\alpha(C^\lambda_{s,t} + J_{l-1}) = \delta_s \otimes_R i'(\delta_t)$, $s, t \in M(\lambda)$. Para $t \in M(\lambda)$, vem que

$$\begin{aligned}
&(a\delta_s) \otimes_R i'(\delta_t) = (a + J_{l-1})(\delta_s \otimes_r i'(\delta_t)) = (a + J_{l-1})\alpha(C^\lambda_{s,t} + J_{l-1}) = \\
&= \alpha(aC^\lambda_{s,t} + J_{l-1}) = \sum_{u \in M(\lambda)} r_a(u,s)\alpha(C^\lambda_{u,t} + J_{l-1}) \\
&= \sum_{u \in M(\lambda)} r_a(u,s)\left(\delta_u \otimes_R i'(\delta_t)\right) = \left(\sum_{u \in M(\lambda)} r_a(u,s)\delta_u\right) \otimes_R i'(\delta_t).
\end{aligned}$$

Daqui decorre que

$$a\delta_s = \sum_{u \in M(\lambda)} r_a(u,s)\delta_u. \tag{4.1}$$

Em particular, a estrutura do A-módulo Δ não depende da ordenação $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ atribuída aos elementos de Λ; depende apenas de λ e dos dados celulares de A. Como tal, podemos denotar o A-módulo Δ por $W(\lambda)$.

Definição 4.1. Considere-se $\lambda \in \Lambda$. O A-módulo $W(\lambda)$, que acabámos de introduzir, designa-se por ***A*-módulo celular associado a $\boldsymbol{\lambda}$**.

Mantendo a notação introduzida, considere-se $\lambda \in M(\lambda)$. De (1.3) conclui-se que $C^\lambda_{r,q}C^\lambda_{s,t} = \widehat{r}_{q,s}C^\lambda_{r,t} + r'$, onde o coeficiente $\widehat{r}_{q,s}$ depende apenas de q e s e com r' combinação linear de elementos da base celular com índice superior estritamente inferior a λ. Vamos denotar por $\phi_\lambda : W(\lambda) \times W(\lambda) \longrightarrow R$ a forma R-bilinear que satisfaz

$$\phi_\lambda(\delta_s, \delta_t) = \widehat{r}_{s,t},\ \ s, t = 1, \ldots, m.$$

Note-se que, de (4.1), se tem que

$$C^\lambda_{r,q}\delta_s = \widehat{r}_{q,s}\delta_r = \phi_\lambda(\delta_q, \delta_s)\delta_r. \tag{4.2}$$

Antes de exibirmos algumas propriedades da aplicação ϕ_λ precisamos de provar um resultado auxiliar.

Lema 4.1. *Tomemos $a \in A$, $\lambda \in \Lambda$ e $q, s \in M(\lambda)$. Seguindo a notação de* (1.1) *e de* (1.3)*, temos que:*

1. $\widehat{r}_{q,s} = \widehat{r}_{s,q}$*;*

2. $\sum_{u \in M(\lambda)} r_a(u,s)\widehat{r}_{q,u} = \sum_{u \in M(\lambda)} r_{i(a)}(u,q)\widehat{r}_{u,s}$.

Demonstração. 1. Tomemos $r, t \in M(\lambda)$ arbitrários. Vem que $C^\lambda_{r,q}C^\lambda_{s,t} = \widehat{r}_{q,s}C^\lambda_{r,t}+r'$, onde r' é uma combinação linear de elementos da base celular com índice superior estritamente inferior a λ. Por um lado, $i(C^\lambda_{r,q}C^\lambda_{s,t}) = \widehat{r}_{q,s}C^\lambda_{t,r} + i(r')$. Por outro lado, por (1.3), tem-se $i(C^\lambda_{r,q}C^\lambda_{s,t}) = C^\lambda_{t,s}C^\lambda_{q,r} = \widehat{r}_{s,q}C^\lambda_{t,r} + r''$, com r'' combinação linear de elementos da base celular com índice superior estritamente inferior a λ. Daqui vem que $\widehat{r}_{q,s} = \widehat{r}_{s,q}$.

2. Considerem-se $r, t \in M(\lambda)$ arbitrários. Por (1.1) e (1.3), vem que

$$\begin{aligned} C^\lambda_{r,q}\left(aC^\lambda_{s,t}\right) &= C^\lambda_{r,q}\left(\sum_{u \in M(\lambda)} r_a(u,s)C^\lambda_{u,t} + r'\right) \\ &= \sum_{u \in M(\lambda)} r_a(u,s)C^\lambda_{r,q}C^\lambda_{u,t} + C^\lambda_{r,q}r' = \left(\sum_{u \in M(\lambda)} r_a(u,s)\widehat{r}_{q,u}\right) C^\lambda_{r,t} + s', \end{aligned}$$

onde s' é uma combinação linear de elementos da base celular com índice superior estritamente inferior a λ. Por outro lado, pelas expressões (1.2) e (1.3), temos que

$$\begin{aligned} \left(C^\lambda_{r,q}a\right) C^\lambda_{s,t} &= \left(\sum_{u \in M(\lambda)} r_{i(a)}(u,q)C^\lambda_{r,u} + r''\right) C^\lambda_{s,t} \\ &= \sum_{u \in M(\lambda)} r_{i(a)}(u,q)C^\lambda_{r,u}C^\lambda_{s,t} + r''C^\lambda_{s,t} = \left(\sum_{u \in M(\lambda)} r_{i(a)}(u,q)\widehat{r}_{u,s}\right) C^\lambda_{r,t} + s'', \end{aligned}$$

com s'' combinação linear de elementos da base celular com índice superior estritamente inferior a λ. Daqui decorre que $\sum_{u \in M(\lambda)} r_a(u,s)\widehat{r}_{q,u} = \sum_{u \in M(\lambda)} r_{i(a)}(u,q)\widehat{r}_{u,s}$.

□

Proposição 4.2. *Considere-se $\lambda \in \Lambda$. Então:*

1. a forma R-bilinear ϕ_λ é simétrica;

2. dados $x, y \in W(\lambda)$, $a \in A$, temos $\phi_\lambda(i(a)x, y) = \phi_\lambda(x, ay)$;

3. dados $x, y, z \in W(\lambda)$, temos que $\alpha^{-1}(x \otimes_R i'(y))z = \phi_\lambda(y,z)x$ (onde α é a aplicação introduzida na página 39).

Demonstração. 1. Esta afirmação é uma consequência da alínea 1 do Lema 4.1.

2. Como ϕ_λ é R-bilinear, basta mostrar que $\phi_\lambda(i(a)\delta_s, \delta_t) = \phi_\lambda(\delta_s, a\delta_t)$, onde $\{\delta_s : s \in M(\lambda)\}$ é a R-base de $W(\lambda)$ introduzida na página 40. Sabemos que

$i(a)\delta_s = \sum_{u\in M(\lambda)} r_{i(a)}(u,s)\delta_u$. Portanto

$$\phi_\lambda(i(a)\delta_s,\delta_t) = \sum_{u\in M(\lambda)} r_{i(a)}(u,s)\phi_\lambda(\delta_u,\delta_t) = \sum_{u\in M(\lambda)} r_{i(a)}(u,s)\widehat{r}_{u,t}.$$

Analogamente, $a\delta_t = \sum_{u\in M(\lambda)} r_a(u,t)\delta_u$, logo $\phi_\lambda(\delta_s, a\delta_t) = \sum_{u\in M(\lambda)} \widehat{r}_{s,u} r_a(u,t)$. Pela alínea 2 do Lema 4.1, conclui-se que $\phi_\lambda(i(a)\delta_s,\delta_t) = \phi_\lambda(\delta_s, a\delta_t)$.

3. Basta provar que $\alpha^{-1}(\delta_s \otimes_R i'(\delta_t))\delta_r = \phi_\lambda(\delta_t,\delta_r)\delta_s$, $s,t,r \in M(\lambda)$. Ora $\alpha^{-1}(\delta_s \otimes_R i'(\delta_t))\delta_r = C^\lambda_{s,t}\delta_r = \phi_\lambda(\delta_t,\delta_r)\delta_s$, sendo a última igualdade consequência de (4.2). □

Dado $y \in W(\lambda)$, seja

$$R_y = \{\phi_\lambda(x,y) : x \in W(\lambda)\}.$$

É simples mostrar que R_y é um ideal de R: basta reparar que $f = \phi_\lambda(-,y)$ é uma função R-linear e que $R_y = \operatorname{im} f$, sendo $\operatorname{im} f$ um R-submódulo de R.

Corolário 4.3. *Considere-se $\lambda \in \Lambda$, $y \in W(\lambda)$ e o ideal R_y de R.*

1. *Para qualquer $a \in A$, tem-se $R_{ay} \subseteq R_y$.*

2. *$R_y W(\lambda) = J(\{\lambda\})y \subseteq Ay$. Em particular, se $R_y = R$, tem-se $W(\lambda) = Ay$.*

Demonstração. 1. Tomemos $r \in R_{ay}$. Vem que $r = \phi_\lambda(x, ay)$, para certo $x \in W(\lambda)$. Pela alínea 2 da Proposição 4.2, tem-se $r = \phi_\lambda(i(a)x, y) \in R_y$.

2. É óbvio que $J(\{\lambda\})y \subseteq Ay$. Falta provar que $R_y W(\lambda) = J(\{\lambda\})y$. Para tal, seja $\phi_\lambda(x,y)z \in R_y W(\lambda)$, $x, z \in W(\lambda)$. Segundo notação da página 39, temos $\lambda = \lambda_l$, para certo l. Pela alínea 3 da Proposição 4.2, tem-se $\phi_\lambda(x,y)z = \alpha^{-1}(z \otimes_R i'(x))y = jy$, onde j pertence a $J(\{\lambda\})$ e verifica $j + J_{l-1} = \alpha^{-1}(z \otimes_R i'(x))$. Logo $R_y W(\lambda) \subseteq J(\{\lambda\})y$. Seja agora $jy \in J(\{\lambda\})y$, com $j \in J(\{\lambda\})$. Como $j + J_{l-1} \in J_l/J_{l-1}$, vem que $j + J_{l-1} = \alpha^{-1}(\sum_{s\in S} z_s \otimes_R i'(x_s))$, para $z_s, x_s \in W(\lambda)$. Então

$$\begin{aligned} jy = (j+J_{l-1})y &= \alpha^{-1}\left(\sum_{s\in S} z_s \otimes_R i'(x_s)\right) y \\ &= \sum_{s\in S} \alpha^{-1}\left(z_s \otimes_R i'(x_s)\right) y = \sum_{s\in S} \phi_l(x_s, y) z_s. \end{aligned}$$

Logo $jy \in R_y W(\lambda)$.

Se $R_y = R$, tem-se que $W(\lambda) = R_y W(\lambda) \subseteq Ay \subseteq W(\lambda)$. □

Lema 4.4. *Tomemos $a \in J(\{\lambda\})$ e admitamos que $\lambda \not\geq \mu$. Se $a' \in J(\{\mu\})$ então $aa' \in J(<\mu)$. Em particular, $aW(\lambda) = 0$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que $C^{\lambda}_{r,q}C^{\mu}_{s,t} \in J(< \mu)$, $r, q \in M(\lambda)$, $s, t \in M(\mu)$. Por (1.1), tem-se $C^{\lambda}_{r,q}C^{\mu}_{s,t} = j_1 + j_2$, com $j_1 \in J(\{\mu\})$ e $j_2 \in J(< \mu)$. Por outro lado, de (1.2), vem que $C^{\lambda}_{r,q}C^{\mu}_{s,t} \in J(\leq \lambda)$. Como $\lambda \not\geq \mu$, temos que ter $j_1 = 0$, portanto $C^{\lambda}_{r,q}C^{\mu}_{s,t} \in J(< \mu)$. Tomemos agora $s, t \in M(\mu)$ arbitrários. Considere-se δ_s, elemento da R-base escolhida para $W(\mu)$. Pela alínea anterior, tem-se $aC^{\mu}_{s,t} \in J(< \mu)$. Logo, $a\delta_s = 0$ (relembrar a acção de A em $W(\mu)$, apresentada em (4.1)). Consequentemente, $ax = 0$ para $x \in W(\mu)$. □

Ao longo do resto do capítulo vamos admitir que a álgebra A tem identidade.

Proposição 4.5. *Consideremos $\lambda, \mu \in \Lambda$ e suponhamos que $\theta : W(\lambda) \longrightarrow W(\mu)/W'$ é um homomorfismo de A-módulos, onde W' é um A-submódulo de $W(\mu)$. Admitamos ainda que $W(\mu)/W'$ é um R-módulo livre e que $\phi_\lambda \neq 0$. Então:*

1. *se R for um domínio de integridade e $\lambda \not\geq \mu$, a aplicação θ é nula;*
2. *se $\lambda = \mu$, existem $r_0, r_{1,\theta} \in R$, com $r_0 \neq 0$ e r_0 não dependente de θ, tais que, para todo o $x \in W(\lambda)$, se tem $r_0\theta(x) = r_{1,\theta}x + W'$.*

Demonstração. 1. Suponhamos que $\lambda \not\geq \mu$. Considerem-se $j \in J(\{\lambda\})$ e $x \in W(\lambda)$. Temos $\theta(jx) = j\theta(x) = j(y+W')$, para determinado $y \in W(\mu)$. Logo, pelo Lema 4.4, $\theta(jx) = jy + W' = 0 + W' = 0$. Ou seja, $\theta(J(\{\lambda\})x) = 0$, para todo o $x \in W(\lambda)$. Pela alínea 2 do Corolário 4.3, temos que $R_xW(\lambda) = J(\{\lambda\})x$, qualquer que seja $x \in W(\mu)$. Então $R_x\theta(W(\lambda)) = \theta(R_xW(\lambda)) = \theta(J(\{\lambda\})x) = 0$, $x \in W(\mu)$.

Por outro lado, como $\phi_\lambda \neq 0$, existe $z \in W(\lambda)$ tal que $R_z \neq 0$.

Suponhamos, por absurdo, que $\theta \neq 0$. Então existe $x \in W(\lambda)$ tal que $\theta(x) \neq 0$, ou seja, $\theta(x) = \sum_{k=1}^{p} r_k v_k$, com algum coeficiente não nulo e com $v_1, \ldots, v_p$ elementos de $W(\mu)/W'$ linearmente independentes sobre R. Como $R_z \neq 0$ e $R_z\theta(W(\lambda)) = 0$ então, dado $s \in R_z - \{0\}$, tem-se $s\theta(x) = 0$. Assim, temos $sr_k = 0$, $k = 1, \ldots, p$, o que é uma contradição. Portanto, $\theta = 0$.

2. Suponhamos que $\lambda = \mu = \lambda_l$, seguindo a notação introduzida na página 39. Como $\phi_\lambda \neq 0$, existem $y, z \in W(\lambda)$ tais que $\phi_\lambda(y, z) = r_0 \neq 0$. Considere-se $x \in W(\lambda)$ arbitrário. Temos que $\alpha^{-1}(x \otimes_R i'(y)) = j + J_{l-1}$, $j \in J_l$. Então $jz = \alpha^{-1}(x \otimes_R i'(y))z = \phi_\lambda(y, z)x = r_0x$, pela alínea 3 da Proposição 4.2. Denotemos $\theta(z)$ por $z' + W'$, para certo $z' \in W(\lambda)$. Vem

$$\begin{aligned} r_0\theta(x) &= \theta(jz) = j(z' + W') = jz' + W' \\ &= \alpha^{-1}(x \otimes_R i'(y))z' + W' = \phi_\lambda(y, z')x + W', \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre da alínea 3 da Proposição 4.2. □

Corolário 4.6. *Seja R um domínio de integridade. Considere-se $\lambda \in \Lambda$ e suponhamos que $\phi_\lambda \neq 0$. Então os únicos endomorfismos do A-módulo $W(\lambda)$ são as homotetias de razão r, $r \in R$. Em particular,* $\mathrm{End}_A(W(\lambda))$ *e R são R-módulos isomorfos.*

Demonstração. Pela alínea 2 da Proposição 4.5 existe $r_0 \in R$, $r_0 \neq 0$, tal que, para cada $\theta \in \mathrm{End}_A(W(\lambda))$, $r_0\theta(x) = r_{1,\theta}x$, $r_{1,\theta} \in R$, qualquer que seja $x \in W(\lambda)$. Seja δ_s, $s \in M(\lambda)$, elemento da R-base de $W(\lambda)$. Vem que $\theta(\delta_s) = \sum_{u\in M(\lambda)} r_u^s\delta_u$, para certos $r_u^s \in R$. Então $r_{1,\theta}\delta_s = r_0\theta(\delta_s) = \sum_{u\in M(\lambda)} r_0r_u^s\delta_u$, logo $r_0r_s^s = r_{1,\theta}$ e $r_0r_u^s = 0$ para $u \neq s$. Como R não tem divisores de zero, vem que $r_s^u = 0$ para $u \neq s$, logo $\theta(\delta_s) = r_s^s\delta_s$. Se t for outro elemento de $M(\lambda)$ sabemos então que $\theta(\delta_t) = r_t^t\delta_t$, com r_t^t verificando $r_0r_t^t = r_{1,\theta}$. Por R não ter divisores de zero, deduz-se que $r_t^t = r_s^s$. Daqui decorre que existe $r_\theta \in R$ tal que $\theta(x) = r_\theta x$, qualquer que seja $x \in W(\lambda)$. Mais ainda: o elemento $r_\theta \in R$ é o único que satisfaz $\theta(x) = r_\theta x$, pois, como R-módulo, $W(\lambda)$ tem elementos sem torção.

Consideremos então a aplicação ψ, que a cada $\theta \in \mathrm{End}_A(W(\lambda))$ faz corresponder r_θ. A função ψ é claramente injectiva e sobrejectiva. Verifica-se facilmente que ψ é um isomorfismo de R-módulos. □

4.2. Módulos projectivos e ideais de Λ

Considerem-se Φ_1 e Φ_2, ideais de Λ, tais que $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$. Recordemos a R-álgebra $Q(\Phi_2 - \Phi_1) = J(\Phi_2)/J(\Phi_1)$, definida na alínea 5 da Proposição 1.2. Na verdade, como $J(\Phi_2)$ e $J(\Phi_1)$ são A-módulos à esquerda e à direita e como a operação em A é associativa, então $Q(\Phi_2 - \Phi_1)$ é um (A, A)-bimódulo.

Seja agora P um A-módulo arbitrário. Vamos denotar por $P(\Phi_2 - \Phi_1)$ o A-módulo

$$Q(\Phi_2 - \Phi_1) \otimes_A P.$$

Realçamos dois casos particulares: considerando os conjuntos Φ e $\emptyset$, ideais de Λ, temos que $P(\Phi) = Q(\Phi) \otimes_A P = J(\Phi) \otimes_A P$; se considerarmos $\lambda = \lambda_l$, na notação da página 39, e definirmos $\Phi_1 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}\}$, $\Phi_2 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$, então $P(\{\lambda\}) = P(\Phi_2 - \Phi_1)$.

Lema 4.7. *Seja Φ um ideal de A.*

1. *Se P for um A-módulo projectivo, então o homomorfismo de A-módulos $\vartheta : P(\Phi) \longrightarrow J(\Phi)P$, definido por $\vartheta(j \otimes_A p) = jp$, $j \in J(\Phi)$, $p \in P$, é um isomorfismo.*

2. *Se $e \in A$ for um idempotente, então $J(\Phi)Ae = J(\Phi)e = J(\Phi) \cap Ae$.*

Demonstração. 1. A aplicação $\varepsilon : A \otimes_A P \longrightarrow P$, que a cada $a \otimes_A p$, $a \in A$, $p \in P$, faz corresponder ap, é um isomorfismo de A-módulos, independentemente de P ser um A-módulo projectivo. Por P ser projectivo, P é um A-módulo plano (ver [Rot, §3.3, Proposition 3.46]). Então, sendo $\iota : J(\Phi) \longrightarrow A$ a inclusão de $J(\Phi)$ em A, o homomorfismo de A-módulos $\iota \otimes_A \mathrm{id}_P : P(\Phi) \longrightarrow A \otimes_A P$ é injectivo. Logo $\epsilon \circ (\iota \otimes_A \mathrm{id}_P)$ é uma aplicação injectiva. Repare-se que $(\epsilon \circ (\iota \otimes_A \mathrm{id}_P))(j \otimes_A p) = jp$. É simples mostrar que $\mathrm{im}(\epsilon \circ (\iota \otimes_A \mathrm{id}_P)) = J(\Phi)P$. Daqui decorre que a função ϑ, definida no enunciado, é um isomorfismo de A-módulos.

2. Por $J(\Phi)$ ser ideal direito de A e porque $e^2 = e$, vem que $J(\Phi)Ae = J(\Phi)e \subseteq J(\Phi) \cap Ae$. Por outro lado, dado $ae \in J(\Phi) \cap Ae$, $a \in A$, tem-se $ae = ae^2 \in J(\Phi)e$. □

Lema 4.8. *Seja P um A-módulo projectivo. Dados $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$, ideais de Λ,*

$$0 \longrightarrow P(\Phi_1) \overset{\iota \otimes_A \mathrm{id}_P}{\longrightarrow} P(\Phi_2) \overset{\pi \otimes_A \mathrm{id}_P}{\longrightarrow} P(\Phi_2 - \Phi_1) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exacta curta de A-módulos, onde $\iota : J(\Phi_1) \longrightarrow J(\Phi_2)$ é a inclusão de $J(\Phi_1)$ em $J(\Phi_2)$ e $\pi : J(\Phi_2) \longrightarrow J(\Phi_2)/J(\Phi_1) = Q(\Phi_2 - \Phi_1)$ é a projecção canónica.

Demonstração. Repare-se que ι é um homomorfismo injectivo de (A, A)-bimódulos, π é um homomorfismo sobrejectivo de (A, A)-bimódulos e $\mathrm{im}\,\iota = \ker \pi$. Como P é um módulo projectivo então P é um A-módulo plano ([Rot, §3.3, Proposition 3.46]), logo o functor $- \otimes_A P$ é exacto. Daqui vem que

$$0 \longrightarrow P(\Phi_1) \overset{\iota \otimes_A \mathrm{id}_P}{\longrightarrow} P(\Phi_2) \overset{\pi \otimes_A \mathrm{id}_P}{\longrightarrow} P(\Phi_2 - \Phi_1) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exacta curta de A-módulos. □

Tomemos $\lambda \in \Lambda$ e, retomando a notação da página 39, suponhamos que $\lambda = \lambda_l$, para certo l. Sabemos $i'(W(\lambda))$ é um ideal direito de A/J_{l-1}, onde i' é a anti-involução R-linear induzida por i em A/J_{l-1}. É possível tornar $i'(W(\lambda))$ num A-módulo à direita inflacionando a acção de A/J_{l-1} a A.

Lema 4.9. *Seja P um A-módulo arbitrário e consideremos $\lambda \in \Lambda$. Denotemos por P^λ o R-módulo $i'(W(\lambda)) \otimes_A P$, onde i' é a anti-involução introduzida na página 39. Então:*

1. *$P(\{\lambda\})$ é um A-módulo isomorfo a $W(\lambda) \otimes_R P^\lambda$;*

2. *se $\phi_\lambda \neq 0$ e se R for um domínio de integridade, então $\mathrm{Hom}_A(P(\{\lambda\}), W(\lambda))$ e $\mathrm{Hom}_R(P^\lambda, R)$ são R-módulos isomorfos.*

Demonstração. 1. Na notação da página 39, tem-se $\lambda = \lambda_l$, para algum $l \in \{1, \ldots, n\}$. Consideremos $\Phi_1 = \{\lambda_1, \ldots \lambda_{l-1}\}$, $\Phi_2 = \{\lambda_1, \ldots \lambda_l\}$. Temos $Q(\{\lambda\}) = Q(\Phi_1 - \Phi_2) = J_l/J_{l-1}$. Repare-se que podem existir mais formas de construir o (A, A)-bimódulo $Q(\lambda)$, no entanto, estas construções originam sempre estruturas isomorfas. Retomando a notação da página 39, existe um ideal esquerdo de A/J_{l-1}, Δ, livre e finitamente gerado sobre R, com $\Delta \subseteq J_l/J_{l-1}$, e um isomorfismo de $(A/J_{l-1}, A/J_{l-1})$-bimódulos $\alpha : J_l/J_{l-1} \longrightarrow \Delta \otimes_R i'(\Delta)$. Inflacionando a acção de A/J_{l-1} a A, obtemos um isomorfismo de (A, A)-bimódulos, de $Q(\lambda)$ para $W(\lambda) \otimes_R i'(W(\lambda))$. Logo vem que $P(\lambda) = Q(\lambda) \otimes_A P \cong (W(\lambda) \otimes_R i'(W(\lambda))) \otimes_A P \cong W(\lambda) \otimes_R P^\lambda$, onde os isomorfismos considerados são isomorfismos de A-módulos.

2. Pela alínea anterior, $\mathrm{Hom}_A(P(\{\lambda\}), W(\lambda)) \cong \mathrm{Hom}_A(W(\lambda) \otimes_R P^\lambda, W(\lambda))$, onde o isomorfismo anterior é R-linear. Por [Rot, §2.2.1, Proposition 2.76], vem que $\mathrm{Hom}_A(W(\lambda) \otimes_R P^\lambda, W(\lambda))$ e $\mathrm{Hom}_R(P^\lambda, \mathrm{End}_A(W(\lambda)))$ são R-módulos isomorfos. Finalmente, do Corolário 4.6, decorre que $\mathrm{Hom}_R(P^\lambda, \mathrm{End}_A(W(\lambda))) \cong \mathrm{Hom}_R(P^\lambda, R)$ (isomorfismo de R-módulos). □

4.3. Representações irredutíveis de uma K-álgebra celular

Ao longo desta secção vamos supor que A é uma álgebra celular sobre um corpo K, com dados celulares (Λ, M, C, i). Esta notação será mantida até ao final da secção.

Definição 4.2. Dado $\lambda \in \Lambda$, define-se $\boldsymbol{\mathrm{rad}\,\lambda = \{x \in W(\lambda) : \phi_\lambda(x, y) = 0, \forall\, y \in W(\lambda)\}}$.

Proposição 4.10. *Dado $\lambda \in \Lambda$, tem-se que:*

1. *$\mathrm{rad}\,\lambda$ é um A-submódulo de $W(\lambda)$;*

2. *se $\phi_\lambda \neq 0$, então $W(\lambda)/\mathrm{rad}\,\lambda$ é um A-módulo absolutamente simples;*

3. *se $\phi_\lambda \neq 0$, então $\mathrm{rad}\,\lambda$ é igual a $\mathrm{rad}\,W(\lambda)$, o radical do A-módulo $W(\lambda)$.*

Demonstração. 1. Repare-se que $0 \in \operatorname{rad}\lambda$, logo $\operatorname{rad}\lambda \neq \emptyset$. Dados $x, y \in \operatorname{rad}\lambda$ e $z \in W(\lambda)$ arbitrário, temos que $\phi_\lambda(x-y,z) = \phi_\lambda(x,z) - \phi_\lambda(y,z) = 0$, portanto $x - y \in \operatorname{rad}\lambda$. Tomemos agora $a \in A$. Pela alínea 2 da Proposição 4.2 vem que $\phi_\lambda(ax,y) = \phi_\lambda(x,i(a)y)$, qualquer que seja $y \in W(\lambda)$, logo $ax \in \operatorname{rad}\lambda$.

2. Se $\phi_\lambda \neq 0$, existem $x, y \in W(\lambda)$ tais que $\phi_\lambda(x,y) \neq 0$. Daqui decorre que $x + \operatorname{rad}\lambda \neq 0$, logo $W(\lambda)/\operatorname{rad}\lambda \neq 0$. Dado $z + \operatorname{rad}\lambda \in W(\lambda)/\operatorname{rad}\lambda$, $z + \operatorname{rad}\lambda \neq 0$, arbitrário, temos que $K_z = \{\phi_\lambda(x,z) : x \in W(\lambda)\} \neq 0$ (recordar que, pela alínea 1 da Proposição 4.2, ϕ_λ é uma aplicação simétrica). Como K é um corpo e K_z é um ideal não nulo de K, então $K_z = K$. Pela alínea 2 do Corolário 4.3 conclui-se que $W(\lambda) = Az$. Então $W(\lambda)/\operatorname{rad}\lambda = A(z + \operatorname{rad}\lambda)$. Como $z + W(\lambda)$ é um elemento não nulo arbitrário de $W(\lambda)/\operatorname{rad}\lambda$, isto prova que $W(\lambda)/\operatorname{rad}\lambda$ é um A-módulo simples.

Falta mostrar que $W(\lambda)/\operatorname{rad}\lambda$ é absolutamente simples, isto é, que os únicos endomorfismos do A-módulo $W(\lambda)/\operatorname{rad}\lambda$ são as homotetias de razão k, $k \in K$. Tomemos $\theta \in \operatorname{End}_A(W(\lambda)/\operatorname{rad}\lambda)$ e consideremos $\pi : W(\lambda) \longrightarrow W(\lambda)/\operatorname{rad}\lambda$, a projecção canónica. Pela alínea 2 da Proposição 4.5, existem $r_0, r_{1,\theta\circ\pi} \in K$, $r_0 \neq 0$, tais que $r_0\theta(x + \operatorname{rad}\lambda) = r_{1,\theta\circ\pi}(x + \operatorname{rad}\lambda)$, qualquer que seja $x \in W(\lambda)$. Daqui decorre que θ é uma homotetia de razão $r_0^{-1}r_{1,\theta\circ\pi}$. Reciprocamente, é óbvio que toda a homotetia de razão k em $W(\lambda)/\operatorname{rad}\lambda$, $k \in K$, é um endomorfismo do A-módulo $W(\lambda)/\operatorname{rad}\lambda$.

Repare-se que o argumento invocado permite demonstrar que os elementos de $\operatorname{Hom}_A(W(\lambda)/W_1, W(\lambda)/W_2)$ correspondem às funções θ_k definidas por $\theta_k(x+W_1) = k(x+W_2)$, $k \in K$, quaisquer que sejam W_1 e W_2, A-submódulos de $W(\lambda)$ verificando $W_1 \subseteq W_2$.

3. Por definição, $\operatorname{rad} W(\lambda)$ é a intersecção de todos os A-submódulos maximais de $W(\lambda)$. Provemos que $\operatorname{rad} W(\lambda) = \operatorname{rad}\lambda$, mostrando que $\operatorname{rad}\lambda$ é o único A-submódulo maximal de $W(\lambda)$. Por $W(\lambda)/\operatorname{rad}\lambda$ ser um A-módulo simples conclui-se que $\operatorname{rad}\lambda$ é um A-submódulo maximal de $W(\lambda)$. Procedamos agora por absurdo e admitamos que existe um A-submódulo maximal de $W(\lambda)$ diferente de $\operatorname{rad}\lambda$, digamos M. É claro que não podemos ter $M \subseteq \operatorname{rad}\lambda$. Então existe $m \in M$ tal que $m \notin \operatorname{rad}\lambda$. Logo $K_m \neq 0$ (recordar que, pela alínea 1 da Proposição 4.2, ϕ_λ é uma aplicação simétrica). Como K_m é um ideal de K, temos que ter $K_m = K$. Pela alínea 2 do Corolário 4.3 conclui-se que $W(\lambda) = Am$. Mas $W(\lambda) = Am \subseteq M$, o que contradiz o facto de M ser um A-submódulo maximal de $W(\lambda)$. □

Definição 4.3. Dado $\lambda \in \Lambda$ satisfazendo $\phi_\lambda \neq 0$, designamos por $\boldsymbol{L_\lambda}$ o A-módulo absolutamente simples $W(\lambda)/\operatorname{rad}\lambda$.

Teorema 4.11. *Denotemos por* Λ_0 *o conjunto* $\{\lambda \in \Lambda : \phi_\lambda \neq 0\}$. *Então* $\{L_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\}$ *é um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismo de* A*-módulos simples.*

Demonstração. Dados $\lambda, \mu \in \Lambda_0$, suponhamos que existe um isomorfismo de A-módulos $\theta : L_\lambda \longrightarrow L_\mu$. Consideremos as projecções canónicas $\pi_\lambda : W(\lambda) \longrightarrow L_\lambda$ e $\pi_\mu : W(\mu) \longrightarrow L_\mu$. Como $\theta \neq 0$, então $\theta \circ \pi_\lambda \neq 0$, logo, pela alínea 1 da Proposição 4.5, vem que $\lambda \geq \mu$. Tomando a composição $\theta^{-1} \circ \pi_\mu$, obtemos, de forma análoga, que $\mu \geq \lambda$. Então $\lambda = \mu$, portanto o conjunto $\{L_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\}$ não contém módulos simples isomorfos.

Mostremos agora que em $\{L_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\}$ se encontram representantes de todas as classes de isomorfismo de A-módulos simples. Como A é uma álgebra com dimensão finita sobre K, A é um anel artiniano. Então existe uma correspondência bijectiva entre as classes de isomorfismo de A-módulos indecomponíveis principais e as classes de isomorfismo de A-módulos simples. Esta função associa à classe de isomorfismo do A-módulo indecomponível principal P a classe de isomorfismo do A-módulo simples $P/\operatorname{rad} P$ (consultar [Dor, §45, Corollary 45.8]). Para completar a demonstração deste teorema vamos tomar um A-módulo indecomponível principal arbitrário, P, e provar que $P/\operatorname{rad} P$ é isomorfo a L_λ, para certo $\lambda \in \Lambda_0$.

Seja Φ o ideal de Λ gerado pelo conjunto $S = \{\lambda \in \Lambda : P(\{\lambda\}) \neq 0\}$, isto é, Φ é a intersecção de todos os ideais de Λ contendo S. Comecemos por ver que $P \cong P(\Phi)$ (isomorfismo de A-módulos). É claro que se $\Phi = \Lambda$ então $P(\Phi)$ e P são módulos isomorfos. Suponhamos então que $\Phi \subset \Lambda$. Tomemos μ_1 elemento minimal em $\Lambda - \Phi$. É simples provar que $\Phi \cup \{\mu_1\}$ é um ideal de Λ. Aplicando o Lema 4.8 aos ideais Φ e $\Phi \cup \{\mu_1\}$ obtemos uma sequência exacta curta de A-módulos

$$0 \longrightarrow P(\Phi) \stackrel{\iota \otimes_A \mathrm{id}_P}{\longrightarrow} P(\Phi \cup \{\mu_1\}) \stackrel{\pi \otimes_A \mathrm{id}_P}{\longrightarrow} P(\{\mu_1\}) \longrightarrow 0.$$

Como $\mu_1 \notin \Phi$, vem que $P(\{\mu_1\}) = 0$, logo $\operatorname{im}(\iota \otimes_A \mathrm{id}_P) = \ker(\pi \otimes_A \mathrm{id}_P) = P(\Phi \cup \{\mu_1\})$ e $P(\Phi)$ e $P(\Phi \cup \{\mu_1\})$ são A-módulos isomorfos. Se $\Phi \cup \{\mu_1\} = \Lambda$, conclui-se que $P(\Phi) \cong P$. Caso contrário, tomamos μ_2 elemento minimal em $\Lambda - (\Phi \cup \{\mu_1\})$ e repetimos o procedimento para os ideais $\Phi \cup \{\mu_1\}$ e $\Phi \cup \{\mu_1, \mu_2\}$. Aplicando sucessivamente este raciocínio é possível deduzir que $P(\Phi)$ e P são A-módulos isomorfos. Mais concretamente, obtém-se o isomorfismo de A-módulos $\theta : P(\Phi) \longrightarrow P$ definido por $\theta(j \otimes_A p) = jp$, com $j \in J(\Phi)$ e $p \in P$. Por outro lado, pelo isomorfismo de

A-módulos definido na alínea 1 do Lema 4.7, conclui-se que $P = J(\Phi)P$. Como P é um A-módulo indecomponível principal, vem que $P = Ae$, para certo idempotente primitivo $e \in A$. Pela alínea 2 do Lema 4.7, temos que $Ae = J(\Phi)Ae = J(\Phi) \cap Ae$, logo $e \in J(\Phi)$.

Tomemos agora λ_0 elemento maximal em Φ. Comecemos por ver que $P(\{\lambda_0\}) \neq 0$. Suponhamos, por absurdo, que $P(\{\lambda_0\}) = 0$. Como λ_0 é um elemento maximal em Φ então $\Phi - \{\lambda_0\}$ ainda é um ideal de Λ. Por outro lado, como $P(\{\lambda_0\}) = 0$, temos $\lambda_0 \notin S$, portanto $\Phi - \{\lambda_0\}$ é um ideal de Λ que contém S, o que contradiz a definição de Φ. Logo $P(\lambda_0) \neq 0$.

Provemos agora que $\phi_{\lambda_0} \neq 0$. Admitamos que $\phi_{\lambda_0} = 0$ e tomemos $\lambda \in \Phi$ arbitrário. Por um lado, tem-se que $C^{\lambda}_{r,q} C^{\lambda_0}_{s,t} = \sum_{u \in M(\lambda_0)} r_{C^{\lambda}_{r,q}}(u,s) C^{\lambda_0}_{u,t} + r'$, onde r' é uma combinação linear dos elementos da base celular com índice superior estritamente inferior a λ_0. Por outro lado, de (1.2), vem que $C^{\lambda}_{r,q} C^{\lambda_0}_{s,t} = \sum_{u \in M(\lambda)} r_{C^{\lambda_0}_{t,s}}(u,q) C^{\lambda}_{r,u} + r''$, com r'' combinação linear de elementos da base celular com índice superior estritamente inferior a λ. Como $\lambda \in \Phi$ e λ_0 é um elemento maximal de Φ, vem que $r_{C^{\lambda}_{r,q}}(u,s) = 0$, $u \in M(\lambda_0)$, se $\lambda \neq \lambda_0$. No caso em que $\lambda = \lambda_0$ temos, por (1.3), que $C^{\lambda_0}_{r,q} C^{\lambda_0}_{s,t} = \widehat{r}_{q,s} C^{\lambda_0}_{r,t} = \phi_{\lambda_0}(\delta_q, \delta_s) C^{\lambda_0}_{r,t} = 0$. Denotemos por $\{\delta_s : s \in M(\lambda_0)\}$ a R-base de $W(\lambda_0)$ introduzida na página 40. Pelo que acabámos de ver e por (4.1), vem que $C^{\lambda}_{r,q} \delta_s = 0$, de onde se conclui que $J(\Phi)W(\lambda_0) = 0$. Pela alínea 1 do Lema 4.9 temos $P(\{\lambda_0\}) \cong W(\lambda_0) \otimes_R P^{\lambda_0}$ (isomorfismo de A-módulos), com $P^{\lambda_0} = i'(W(\lambda_0)) \otimes_A P$ (recordar que i' é a anti-involução introduzida na página 39). Por P ser um A-módulo indecomponível principal, P^{λ_0} e $i'(W(\lambda_0))P$ são R-módulos isomorfos. Mas $i'(W(\lambda_0))P = i'(W(\lambda_0))e \cong i(e)W(\lambda_0)$, onde o último isomorfismo é um isomorfismo de R-módulos por meio da aplicação $i'|_{i'(W(\lambda_0))e}$. Como $J(\Phi)$ é invariante por i e $e \in J(\Phi)$, vem que $i(e) \in J(\Phi)$. Então $i(e)W(\lambda_0) = 0$ e, portanto, $P^{\lambda_0} = 0$, de onde decorre que $P(\{\lambda_0\}) = 0$. Um absurdo. Acabámos assim de demonstrar que $\phi_{\lambda_0} \neq 0$.

Pelos argumentos anteriores, conclui-se ainda que $P^{\lambda_0} \neq 0$. Logo $\mathrm{Hom}_K(P^{\lambda_0}, K) \neq 0$. Como $\phi_{\lambda_0} \neq 0$, então, pela alínea 2 do Lema 4.9, temos que $\mathrm{Hom}_K(P^{\lambda_0}, K)$ e $\mathrm{Hom}_A(P(\{\lambda_0\}), W(\lambda_0))$ são K-espaços vectoriais isomorfos. De facto, pode provar-se (ver [Rot, §2.2.1, Proposition 2.76]) que existe um isomorfismo de espaços vectoriais

$$\chi : \mathrm{Hom}_K(P^{\lambda_0}, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P(\{\lambda_0\}), W(\lambda_0)),$$

dado por $\chi(\psi) = \overline{\psi}$, onde

$$\begin{aligned} \overline{\psi}: \quad & P(\{\lambda_0\}) \longrightarrow W(\lambda_0) \\ & y \otimes_R x \longmapsto \overline{\psi}(y \otimes_R x) = \psi(x)y. \end{aligned}$$

Se $\psi \in \mathrm{Hom}_K(P^{\lambda_0}, K)$ for não nula, é simples verificar que $\overline{\psi}$ é sobrejectiva. Aplicando o Lema 4.8 aos ideais $\Phi - \{\lambda_0\}$ e Φ, obtemos um homomorfismo sobrejectivo de A-módulos de $P(\Phi)$ para $P(\{\lambda_0\})$. Como $P(\Phi)$ e P são A-módulos isomorfos, existe um homomorfismo sobrejectivo de A-módulos de P para $P(\{\lambda_0\})$, digamos ϑ. Considere-se a projecção canónica $\pi : W(\lambda_0) \longrightarrow L_{\lambda_0}$. Concluímos então que $\pi \circ \overline{\psi} \circ \vartheta$ é um homomorfismo sobrejectivo de A-módulos. Logo $P/\ker(\pi \circ \overline{\psi} \circ \vartheta) \cong L_{\lambda_0}$. Como P é um A-módulo indecomponível principal então $\mathrm{rad}\, P$ é o único A-submódulo maximal de P ([Dor, §45, Theorem 45.7, (i)]). Então temos $\mathrm{rad}\, P = \ker(\pi \circ \overline{\psi} \circ \vartheta)$, de onde decorre o pretendido. $\square$

Bibliografia

[Cohn] P. M. Cohn, *Algebra*. Second Edition, Volume 2, John Wiley & Sons (1989).

[Dor] L. Dornhoff, *Group Representation Theory, Part B, Modular Representation Theory*. M. Dekker (1972).

[Ful] W. Fulton, *Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry*. Cambridge University Press (1997).

[GL] J. J. Graham e G. I. Lehrer, *Cellular algebras*. Invent. Math. **123**, 1-34 (1996).

[KL] D. Kazhdan e G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*. Invent. Math. **53**, 165-184 (1979).

[KX1] S. König e C. C. Xi, *On the structure of cellular algebras*. In: I. Reiten, S. Smalø and Ø. Solberg (Eds.): *Algebras and Modules II. Canadian Mathematical Society Conference Procedings* Vol. **24**, 365-386 (1998).

[KX2] S. König e C. C. Xi, *Cellular algebras: inflations and Morita equivalences*. J. London Math. Soc. **60**, 700-722 (1999).

[KX3] S. König e C. C. Xi, *A characteristic free approach to Brauer algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. **353**, 1489-1505 (2001).

[Rot] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*. Second Edition, Universitext, Springer (2009).

[Wil] G. Williamson, *Mind your P and Q-symbols: Why the Kazhdan-Lusztig basis of the Hecke algebra of type A is cellular*. An essay submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of B.A. (Honours), University of Sydney (2003).

[Xi] C. C. Xi, *Cellular algebras*. Advanced School and Conference on Representation Theory and Related Topics, ICTP, Trieste, Itália (2006).