



UNIVERSIDADE D  
COIMBRA

Paulo Jorge Sebastião Gaspar

**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE À PRECISÃO  
DIMENSIONAL DE UM PROVETE DE  
TRAÇÃO/COMPRESSÃO À ESCALA MESO**

**Dissertação no âmbito do Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica na especialidade de Produção e Projeto orientada pela Professora Doutora Marta Cristina Cardoso de Oliveira e apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.**

Fevereiro de 2022



1 2



9 0

FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE  
COIMBRA

# **Análise de sensibilidade à precisão dimensional de um provete de tração/compressão à escala meso**

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia  
Mecânica na Especialidade de Produção e Projeto

## **Sensitivity analysis of the dimensional accuracy of a meso- tensile/compression specimen**

**Autor**

**Paulo Jorge Sebastião Gaspar**

**Orientador**

**Marta Cristina Cardoso de Oliveira**

**Júri**

<b>Presidente</b>	<b>Professor Doutor André Filipe Gomes Pereira</b> <b>Investigador Doutoramento da Universidade de Coimbra</b>
<b>Orientador</b>	<b>Professora Doutora Marta Cristina Cardoso de Oliveira</b> <b>Professora Associada da Universidade de Coimbra</b>
<b>Vogais</b>	<b>Professor Doutor Diogo Mariano Simões Neto</b> <b>Professor Auxiliar da Universidade de Coimbra</b>

---

**Coimbra, fevereiro, 2022**



## Agradecimentos

Quero agradecer a quem, sem a sua ajuda, este trabalho teria sido impossível de executar.

Em primeiro lugar quero dar os meus maiores agradecimentos à Professora Marta Oliveira. Sem o seu conhecimento, ajuda, orientação e enorme disponibilidade para me apoiar durante este projeto nada teria sido possível. Todo o seu apoio a nível pessoal, académico e profissional foi imprescindível.

Quero também agradecer aos meus pais, avós e irmão por todo o suporte que me deram e pelos momentos felizes que me têm proporcionado ao longo dos anos.

Por último quero agradecer a todos os meus amigos que continuam ao meu lado após todos estes anos.

Esta dissertação foi realizada no âmbito do projeto “IfDamagElse: Modelling and numerical simulation of damage in metallic sheets: anisotropic behaviour and tension-compression asymmetry coupled approach for formability prediction” (PTDC/EME-EME/30592/2017), cofinanciados pela Fundação Portuguesa para a Ciência e Tecnologia (FCT) e pelo Fundo Europeu de Desenvolvimento Regional (FEDER), através do Programa Operacional Competitividade e Internacionalização (POCI-01-0145-FEDER-030592 e UIDB/00285/2020).





## Resumo

O ensaio de tração uniaxial é amplamente utilizado para determinar as propriedades mecânicas de chapas metálicas. As dimensões dos provetes a serem utilizados em macro-escala são padronizadas. No entanto, no caso específico de chapas metálicas não é possível realizar ensaios com essas dimensões, devido à ocorrência de flambagem, caso sejam necessárias mudanças de trajetórias de deformação entre a tração e a compressão. De facto, a caracterização das chapas metálicas em tração e compressão uniaxial é essencial para avaliar se o material apresenta assimetria na resistência e/ou efeito de Bauschinger. Neste contexto, foi desenvolvido um equipamento que permite realizar ensaios com provetes de menores dimensões (meso-escala), i.e. permite utilizar um comprimento de referência menor e um maior controle do alinhamento do provete, para reduzir o efeito de flambagem. No entanto, o uso de provetes de menores dimensões levanta algumas questões relacionadas com a sensibilidade da curva tensão-deformação a pequenas variações dimensionais, inerentes ao processo de fabrico do provete, principalmente na espessura da chapa.

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo numérico sobre a influência de pequenos desvios na espessura da chapa na curva tensão-deformação. Foram adotadas duas abordagens para descrever a variação de espessura ao longo da área de referência. A primeira assume uma distribuição aleatória da espessura, impondo que esta siga uma distribuição normal, para a qual a média e o desvio padrão são conhecidos. A segunda assume uma distribuição sinusoidal, para a qual a média, a amplitude de variação e o comprimento de onda são conhecidos de modo que o desvio padrão também pode ser controlado. Foram realizadas simulações numéricas de ensaios de tração e compressão com provetes com a mesma espessura média, mas diferentes valores de desvio padrão. Além disso, foram considerados diferentes valores médios de espessura. Todas as simulações numéricas foram realizadas com o programa DD3IMP, assumindo o mesmo refinamento de malha no plano e na espessura da chapa, para avaliar a sensibilidade à variação da espessura. Os resultados mostram que a curva tensão-deformação, avaliada no centro do provete, é sensível a pequenas mudanças na distribuição de espessura ao longo da área de referência. De facto, desvios padrão mais elevados conduzem a menores valores de deslocamento da amarra para o início da estricção ou flambagem.

**Palavras-chave:** Método dos elementos finitos, Provete na escala meso, Variabilidade na espessura, Tração uniaxial, Compressão uniaxial.



## Abstract

The uniaxial tensile test is widely used to determine the mechanical properties of metallic sheets. The dimensions of the specimens to be used at the macro-scale are standardized. However, in the specific case of metallic sheets it is not possible to carry out tests using those dimensions, due to the occurrence of buckling, if reverse strain paths changes between tension and compression are required. Indeed, the characterization of the metallic sheets under tension and compression is essential to assess whether the material presents strength differential effects and/or Bauschinger effect. In this context, an equipment was developed that allows to carry out tests with smaller specimens (meso-scale), i.e. allows using a smaller gauge length and a greater control of the specimen alignment to reduce the buckling effect. Nevertheless, the use of small specimens raises some issues related to the sensitivity of the assessed stress-strain curve to small dimensional variations, which are inherent to the specimen manufacturing process, particularly in the sheet thickness.

The objective of this work is to perform a numerical study about the influence of small deviations in the sheet thickness on the assessed stress-strain curve. Two approaches are adopted to describe the thickness variation along the gauge area. The first assumes a random distribution of the thickness, imposing that globally it follows a normal distribution, for which the mean and the standard deviation are known. The second assumes a sinusoidal distribution, for which the mean, the amplitude of variation and the wavelength are known, such that the standard deviation can also be controlled. Numerical simulations of tensile and compression tests were performed considering specimens with the same mean thickness, but different values of standard deviation. Also, different mean thickness values were considered. All numerical simulations were performed with the in-house solver DD3IMP, assuming the same in-plane and through-thickness mesh refinement. The results show that stress-strain curve evaluated at the centre of the specimen is sensitive to small changes in the thickness distribution along the gauge area. In fact, higher standard deviations lead to smaller values of grip displacement for the onset of necking or buckling.

**Keywords** Finite element Method, Meso-scale specimen, Thickness variability, Uniaxial tension, Uniaxial Compression.



---

## Índice

Índice de Figuras .....	ix
Índice de Tabelas .....	xiii
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Enquadramento .....	1
1.2. Determinação da curva tensão-deformação .....	2
1.3. Objetivos.....	8
1.4. Estrutura da dissertação .....	8
2. ALGORITMOS PARA ESPESSURA VARIÁVEL.....	11
2.1. Algoritmo para Distribuição Aleatória de espessura .....	12
2.2. Algoritmo para Distribuição Sinusoidal de Espessura .....	15
2.3. Geração da Malha 3D .....	17
3. MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS .....	21
3.1. Geometria do Provelte e condições de fronteira .....	21
3.2. Estruturas da malha 2D.....	25
3.2.1. Tracção .....	25
3.2.2. Compressão .....	28
3.3. Estrutura das malhas 3D .....	28
3.4. Propriedades mecânicas .....	29
3.5. Análise da sensibilidade à discretização do modelo numérico.....	32
4. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS.....	37
4.1. Influência da variação de espessura: Tracção.....	39
4.1.1. Desvio Padrão.....	40
4.1.2. Espessura Média.....	43
4.1.3. Comprimento de Onda .....	45
4.2. Influência da variação de espessura: Compressão .....	46
4.2.1. Desvio Padrão.....	46
4.2.2. Espessura média .....	51
4.2.3. Comprimento de onda .....	53
5. Conclusões.....	55
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	57
ANEXO A .....	59
ANEXO B .....	61
APÊNDICE A .....	65



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Tensão limite de elasticidade em função do erro cometido na medição da área da zona útil do provete: (a) meso (b) macro.....	4
Figura 1.2. Distribuição da espessura para a liga: (a) 6016-T4 e (b) 6061-T6 (Simões, 2017).....	5
Figura 1.3. Estado de tensão num espaço Cartesiano das tensões principais (Bai, 2008).....	6
Figura 1.4. Relação entre a triaxialidade e o parâmetro de Lode para vários tipos de ensaios (Bai, 2008).....	7
Figura 2.1. Representação da distribuição de espessura obtida em função da relação entre a amplitude e o comprimento do elemento finito.....	17
Figura 2.2. Esquemas representativos do método de criação das camadas da malha 3D partir da malha 2D: (a) Malha com duas camadas; (b) Malha com três camadas.	18
Figura 3.1. Dimensões do provete meso considerado: (a) Medidas do provete meso com medidas não proporcionais em mm (adaptado de (Cruz, 2019)); (b) Medidas em mm da zona entre amarras do provete que é crítica e que é sujeita á simulação usando elementos finitos. ....	21
Figura 3.2. Evolução da força da amarra com o seu deslocamento para o ensaio uniaxial à tração com a malha $25 \times 25(13)$ (ver capítulo 3.5) e um deslocamento de 0,35 mm.....	23
Figura 3.3. Evolução da força da amarra com o seu deslocamento para o ensaio uniaxial à compressão com a malha $25 \times 25(13)$ (ver capítulo 3.5), um deslocamento de 0,57 mm e avaliada para diferentes valores de incremento da deslocação da amarra. ....	24
Figura 3.4. Malha 2D de tracção com discretização um uma dimensão para os elementos quadrangulares na zona A de 0.5mm. ....	26
Figura 3.5. Malhas 2D geradas com, denominadas de acordo com o número de elementos que apresentam na Zona A (Figura 3.4): (a) Malha $10 \times 10$ ; (b) Malha $16 \times 16$ ; (c) Malha $20 \times 20$ ; (d) Malha $25 \times 25$ ; (b) Malha $32 \times 32$ .....	27
Figura 3.6. Análise das diferentes malhas 3D de elementos finitos submetidas a tracção uniaixal: (a) Evolução da Força com o deslocamento da amarra; (b) Evolução do erro relativo da força em função do deslocamento; (c) Erro relativo na força máxima em função da discretização 2D do tamanho de elemento na espessura; (d) Evolução da tensão real em função da deformação real; (e) Evolução da triaxialidade em função do deslocamento; (f) Evolução do parâmetro de Lode em função do deslocamento. ....	34
Figura 4.1. Representação da distribuição das coordenadas z na camada superior obtida para diferentes valores de desvio padrão.....	38
Figura 4.2. Representação da distribuição de espessura na camada superior obtida para diferentes valores de espessura média. ....	38

Figura 4.3. Representação da distribuição de espessura na camada superior obtida para diferentes comprimentos de onda. ....	39
Figura 4.4. Análise da influência do desvio padrão nos modelos EINS sujeitos a tração: (a) evolução da curva força-deslocamento da amarra; (b) Erro relativo na força; (c) evolução da tensão real em função da deformação real; e (d) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.....	41
Figura 4.5. Análise da influência do desvio padrão nos modelos EIS sujeitos a tração: (a) evolução da curva força-deslocamento da amarra; (b) Erro relativo na força; (c) evolução da tensão real em função da deformação real; e (d) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.....	43
Figura 4.6. Análise da influência da espessura média nos modelos EINS sujeitos a tração: (a) evolução da tensão real em função da deformação real; e (b) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.....	44
Figura 4.7. Análise da influência da espessura média nos modelos EIS sujeitos a tração: (a) evolução da tensão real em função da deformação real; e (b) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.....	45
Figura 4.8. Análise da influência do comprimento de onda nos modelos EIS sujeitos a tração: (a) evolução da curva força-deslocamento da amarra; (b) Erro relativo na força; (c) evolução da tensão real em função da deformação real; e (d) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.....	46
Figura 4.9. Análise da influência do desvio padrão nos modelos EINS sujeitos a compressão: (a) evolução da curva força-deslocamento da amarra; (b) Erro relativo na força; (c) evolução da tensão real em função da deformação real; e (d) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.....	49
Figura 4.10. Distribuição da deformação plástica equivalente para um desvio padrão de 0,00625: (a) Vista no plano XY ; (b) Vista no plano ZY.....	49
Figura 4.11. Análise da influência do desvio padrão nos modelos EIS sujeitos a compressão: (a) evolução da curva força-deslocamento da amarra; (b) Erro relativo na força; (c) evolução da tensão real em função da deformação real; e (d) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.....	51
Figura 4.12. Análise da influência da espessura média nos modelos EINS sujeitos a compressão: (a) evolução da tensão real em função da deformação real; e (b) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.....	52
Figura 4.13. Análise da influência da espessura média nos modelos EIS sujeitos a compressão: (a) evolução da tensão real em função da deformação real; e (b) erro na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.....	53
Figura 4.14. Análise da influência do comprimento de onda nos modelos EIS sujeitos a compressão: (a) evolução da curva força-deslocamento da amarra; (b) Erro relativo na força; (c) evolução da tensão real em função da deformação real; e (d)	

erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.....	54
Figura A.1. Distribuição da deformação plástica equivalente para o modelo com espessura constante sujeito à tracção.....	65
Figura A.2. Distribuição da deformação plástica equivalente para o modelo com espessura constante sujeito à compressão.....	65
Figura A.3. Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EINS com diferentes valores de desvio padrão, sujeitos à tracção: (a) $\sigma = 0,1 \text{ mm}$ ; (b) $\sigma = 0,05 \text{ mm}$ ; (c) $\sigma = 0,025 \text{ mm}$ ; (d) $\sigma = 0,0125 \text{ mm}$ ; (e) $\sigma = 0,00625 \text{ mm}$ ; (f) $\sigma = 0,003125 \text{ mm}$ .....	66
Figura A.4. Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EIS com diferentes valores de desvio padrão, sujeitos à tracção: (a) $\sigma = 0,1 \text{ mm}$ ; (b) $\sigma = 0,05 \text{ mm}$ ; (c) $\sigma = 0,025 \text{ mm}$ ; (d) $\sigma = 0,0125 \text{ mm}$ ; (e) $\sigma = 0,00625 \text{ mm}$ ; (f) $\sigma = 0,003125 \text{ mm}$ .....	67
Figura A.5. Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EINS com diferentes valores de espessura inicial ( $\sigma = 0,0125 \text{ mm}$ ), sujeitos à tracção: (a) $\mu=0,85 \text{ mm}$ ; $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ; (b) $\mu=0,95 \text{ mm}$ ; $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ; (c) $\mu=1,05 \text{ mm}$ ; $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ; (d) $\mu=1,15 \text{ mm}$ ; $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ; (e) $\mu=1,00 \text{ mm}$ ; $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ..	68
Figura A.6. Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EIS com diferentes valores de espessura inicial ( $\sigma = 0,0125 \text{ mm}$ ), sujeitos à tracção: (a) $\mu=0,85 \text{ mm}$ ; $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ; (b) $\mu=0,95 \text{ mm}$ ; $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ; (c) $\mu=1,05 \text{ mm}$ ; $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ; (d) $\mu=1,15 \text{ mm}$ ; $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ; (e) $\mu=1,00 \text{ mm}$ ; $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ..	69
Figura A.7. Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EIS com diferentes valores de comprimento de onda ( $\mu=1,00 \text{ mm}$ ; $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ), sujeitos à tracção: (a) $\lambda=0,3125 \text{ mm}$ ; (b) $\lambda=0,4 \text{ mm}$ ; (c) $\lambda=0,5 \text{ mm}$ ; (d) $\lambda=0,625 \text{ mm}$ ; (e) $\lambda=1 \text{ mm}$ .....	70
Figura A.8. Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EINS com diferentes valores de desvio padrão, sujeitos à compressão: (a) $\sigma = 0,1 \text{ mm}$ ; (b) $\sigma = 0,05 \text{ mm}$ ; (c) $\sigma = 0,025 \text{ mm}$ ; (d) $\sigma = 0,0125 \text{ mm}$ ; (e) $\sigma = 0,00625 \text{ mm}$ ; (f) $\sigma = 0,003125 \text{ mm}$ .....	71
Figura A.9. Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EINS com diferentes valores de desvio padrão, sujeitos à compressão: (a) $\sigma = 0,1 \text{ mm}$ ; (b) $\sigma = 0,05 \text{ mm}$ ; (c) $\sigma = 0,025 \text{ mm}$ ; (d) $\sigma = 0,0125 \text{ mm}$ ; (e) $\sigma = 0,00625 \text{ mm}$ ; (f) $\sigma = 0,003125 \text{ mm}$ .....	72
Figura A.10. Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EINS com diferentes valores de espessura inicial ( $\sigma = 0,0125 \text{ mm}$ ), sujeitos à compressão: (a) $\mu=0,85 \text{ mm}$ ; $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ; (b) $\mu=0,95 \text{ mm}$ ; $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ; (c) $\mu=1,05 \text{ mm}$ ; $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ; (d) $\mu=1,15 \text{ mm}$ ; $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ; (e) $\mu=1,00 \text{ mm}$ ; $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ..	73
Figura A.11. Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EINS com diferentes valores de espessura inicial ( $\sigma = 0,0125 \text{ mm}$ ), sujeitos à compressão:	

(a)  $\mu=0,85$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm; (b)  $\mu=0,95$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm; (c)  $\mu=1,05$  mm;  
 $\sigma=0,0125$  mm; (d)  $\mu=1,15$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm;  $\mu=1,00$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm. .... 74

Figura A.12. Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EIS com diferentes valores de comprimento de onda ( $\mu=1,00$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm), sujeitos à compressão: (a)  $\lambda=0,3125$  mm; (b)  $\lambda=0,4$  mm; (c)  $\lambda=0,5$  mm; (d)  $\lambda=0,625$  mm; (e)  $\lambda=1$  mm. .... 75



---

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1. Alterações realizadas ao Bi2Tri para permitir a escolha do algoritmo para a espessura variável.....	12
Tabela 2.2. Alterações realizadas ao Bi2Tri para permitir a definição dos parâmetros para a geração de valores de espessura com uma distribuição normal. ....	14
Tabela 2.3. Algoritmo para a geração de uma distribuição aleatória de espessura (adaptado a partir do exemplo (The Stanford Exploration Project (SEP), 2015)). ....	15
Tabela 2.4. Algoritmo para a geração de uma distribuição sinusoidal de espessura.....	17
Tabela 2.5. Criação das coordenadas $z$ das diferentes camadas ao longo da espessura.....	19
Tabela 3.1. Informações sobre as malhas 2D à tracção.....	27
Tabela 3.2. Informações sobre as malhas 2D à compressão. ....	28
Tabela 3.3. Número de camadas a considerar na direcção da espessura em função de $R$ ...	29
Tabela 3.4. Propriedades mecânicas da liga AA5754-T4 de acordo com (Granta Design, 2018).....	30
Tabela 3.5. Propriedades mecânicas obtidas para a liga AA5754-T4 ((Cruz, 2019)).....	31
Tabela 3.6. Tempos de cálculo para cada uma das malhas à tracção .....	33
Tabela A.1 Número de nós das malhas 3D geradas para os ensaios à tração. ....	59



## 1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo introdutório é enquadrado o tema tratado neste trabalho. São também apresentados alguns conceitos fundamentais para este estudo. Neste contexto, são definidos os objetivos do trabalho e, por último, é descrita a metodologia e a estrutura utilizada.

### 1.1. Enquadramento

Existe uma grande necessidade, tanto a nível académico como a nível de indústria, de caracterizar correctamente as propriedades mecânicas dos materiais. Um dos tipos de testes mais usados para o estudo destas propriedades são os testes uniaxiais, tanto de tracção como de compressão. Estes são caracterizados pela aplicação de uma força uniaxial a provetes normalizados (International Organization for Standardization, 2016) nos quais tem de se garantir que não existem outras componentes de tensão. No entanto, quando se pretende efectuar o estudo do comportamento de uma chapa quando esta é sujeita à compressão, a geometria normalizada leva ao aparecimento de fenómenos de flambagem, o que torna impossível o estudo do efeito de Bauschinger. Para evitar que ocorra flambagem uma das soluções possíveis é o uso de provetes com geometrias que não sejam tão esbeltas como a geometria padronizada. Com este intuito foi desenvolvido um equipamento que permite o uso de provetes de menores dimensões e menos esbeltas, denominados por provetes meso (Cruz, 2019). No entanto, este tipo de provetes não apresenta medidas normalizadas nem responde a qualquer tipo de normas previamente estabelecidas, e como apresenta dimensões muito inferiores às normalizadas impossibilita o uso de extensómetros para a avaliação das deformações. Actualmente, esta dificuldade pode ser ultrapassada com o auxílio de técnicas de correlação digital de imagem.

Tal como foi referido anteriormente, as dimensões usadas para o provete à escala meso são muito inferiores às normalizadas (Cruz, 2019). Neste contexto, a utilização deste tipo de provetes levanta questões relacionadas com o fabrico a pequenas escalas, em que é necessária uma elevada precisão dimensional do produto final. Aliás, a utilização de corte por arrombamento na produção dos provetes é uma das razões que justificam alguns dos problemas observados nos provetes meso à compressão (Cruz, 2019). Para além disso, a

questão que surge é até que ponto pequenas variações dimensionais, inerentes ao processo de fabrico, e pequenas variações de espessura podem provocar alterações na determinação da curva tensão-deformação real, que é fundamental para caracterizar o comportamento plástico do material.

Este trabalho foca-se na análise da influência de pequenas variações de espessura no comportamento mecânico extraído com base em resultados obtidos com provetes meso, tanto para ensaios de tração como para ensaios de compressão uniaxial. Assim, no capítulo seguinte são apresentados alguns conceitos fundamentais para o estudo realizado.

## 1.2. Determinação da curva tensão-deformação

Como o estudo é baseado num provete à escala meso surge a questão de perceber a sensibilidade na determinação da curva tensão-deformação a pequenas variações dimensionais do provete. A tensão real é definida como:

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad (1.1)$$

onde  $F$  é a força aplicada e  $A$  é a área da secção do provete, transversa à direcção de aplicação da carga, em cada instante. O volume inicial e final têm de ser iguais:

$$A_0 l_0 = Al, \quad (1.2)$$

onde  $A_0$  é a área inicial da secção do provete e  $l_0$  e  $l$  o comprimento inicial e final da zona útil. Deste modo, a área em cada instante pode ser determinada como

$$A = \frac{A_0 l_0}{l}, \quad (1.3)$$

A deformação real,  $\varepsilon$ , na direcção de aplicação de carga pode ser determinada com base na definição de Hencky:

$$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0} \Leftrightarrow l = l_0 \exp(\varepsilon). \quad (1.4)$$

Substituindo o valor de  $l$  na equação (1.3):

$$A = \frac{A_0}{\exp(\varepsilon)}, \quad (1.5)$$

É possível definir a tensão real como:

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \exp(\varepsilon), \quad (1.6)$$

Esta expressão, em conjunto com a equação (1.4), mostra que um erro cometido na medição do comprimento inicial da zona útil  $l_0$  pode introduzir um erro na determinação da deformação e da tensão.

Para se poder avaliar a curva tensão-deformação real é necessário determinar a deformação equivalente,  $\bar{\varepsilon}$ . De acordo com a definição de von Mises:

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{xz}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2} \quad (1.7)$$

onde  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$  são as componentes de deformação no sistema de eixos  $Oxyz$ . Em ensaios de tração e de compressão para materiais isotrópicos esta equação pode ser reduzida a:

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2} \quad (1.8)$$

uma vez que todas as outras componentes de deformação são nulas.

Admitindo que durante o ensaio apenas se executa a tração/compressão na direção 1, e que se considera apenas as componentes plásticas de deformação, pela conservação de volume obtém-se:

$$\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_1^p = -(\varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p) \quad (1.9)$$

Para um material isotrópico,  $\varepsilon_2^p = \varepsilon_3^p$ , pelo que:

$$\varepsilon_1^p = -2(\varepsilon_2^p) \quad (1.10)$$

Logo a deformação plástica equivalente:

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} = \varepsilon_1 = \varepsilon. \quad (1.11)$$

Por outro lado, a tensão equivalente é definida como:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (1.12)$$

pelo que, para uma solicitação de tração ou compressão, e admitindo que só se aplicam forças na direção 1:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1)^2 + (\sigma_1)^2]} = \sigma_1. \quad (1.13)$$

Em muitos casos também se opta por determinar a curva tensão-deformação convencional. A deformação convencional é definida como:

$$e = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (1.14)$$

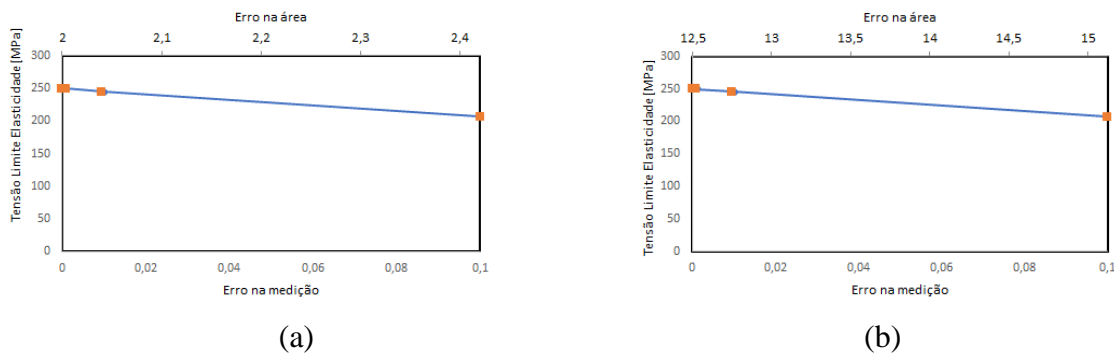
em que  $\Delta l$  é a variação de comprimento entre o instante inicial e final. Para relacionar a tensão convencional com a real:

$$\sigma = \left[ \frac{F}{A} = \left( \frac{F}{A_0} \right) \left( \frac{A_0}{A} \right) = \sigma_c \left( \frac{l}{l_0} \right) = \sigma_c \exp \varepsilon = \sigma_c (1 + e) \right]. \quad (1.15)$$

O cálculo da tensão convencional obriga a que seja medida a área inicial:

$$\sigma_c = F/A_0. \quad (1.16)$$

Esta expressão evidencia que um erro cometido na medição na largura da zona útil  $w_0$  ou na espessura  $t_0$  também podem introduzir erro na tensão convencional (real).



**Figura 1.1.** Tensão limite de elasticidade em função do erro cometido na medição da área da zona útil do provete: (a) meso (b) macro.

De modo a avaliar o eventual impacto de um *erro* cometido na medição de  $w_0$  e de  $t_0$ , considerou-se que este pode variar entre 0,00001 e 0,1, para cada uma destas dimensões. Isto corresponde a assumir que na medição de  $w_0$  e de  $t_0$  podemos obter valores correspondentes a  $(1 + erro)w_0$  e  $(1 + erro)t_0$ , respectivamente. Nessa situação, para o provete à meso-escala a área da zona útil varia de 2,00 a 2,42 mm<sup>2</sup>, como se mostra na Figura 1.1. Um provete à macro-escala, com uma largura inicial da zona útil de 12,5mm, apresenta um valor máximo para esta área de 15,125 mm<sup>2</sup>. O erro na tensão limite de elasticidade

inicial é idêntico nos dois casos, assumindo que a força necessária para entrar no regime elástico é 6,25 vezes maior para o provete macro. No entanto, importa realçar que um erro de 0,1 na medição da largura de 12,5 mm corresponde a 13,75 mm, i.e. uma diferença de 1,75 mm. A probabilidade de cometer este erro é muito inferior à probabilidade de cometer um erro de 0,2 mm na medição da largura do meso-provete.

Em relação à espessura inicial, alguns autores reportaram desvios em relação ao valor nominal indicado pelo fabricante. A título de exemplo a Figura 1.2 apresenta os resultados obtidos com base na medição de 50 pontos, distribuídos de forma aleatória, em chapas das ligas 6016-T4 e 6061-T6. A distribuição da espessura apresenta características distintas: a liga 6016-T4 apresenta uma frequência cuja distribuição pode ser descrita pela distribuição normal, enquanto a liga 6061-T6 apresenta uma frequência mais aleatória. O valor médio é de 1,047 mm e 0,976 mm, para a 6016-T4 e 6061-T6, respectivamente. Isto significa que, a diferença em relação ao valor nominal indicado pelo fabricante (1,000 mm) atinge os 5% (Simões, 2017).

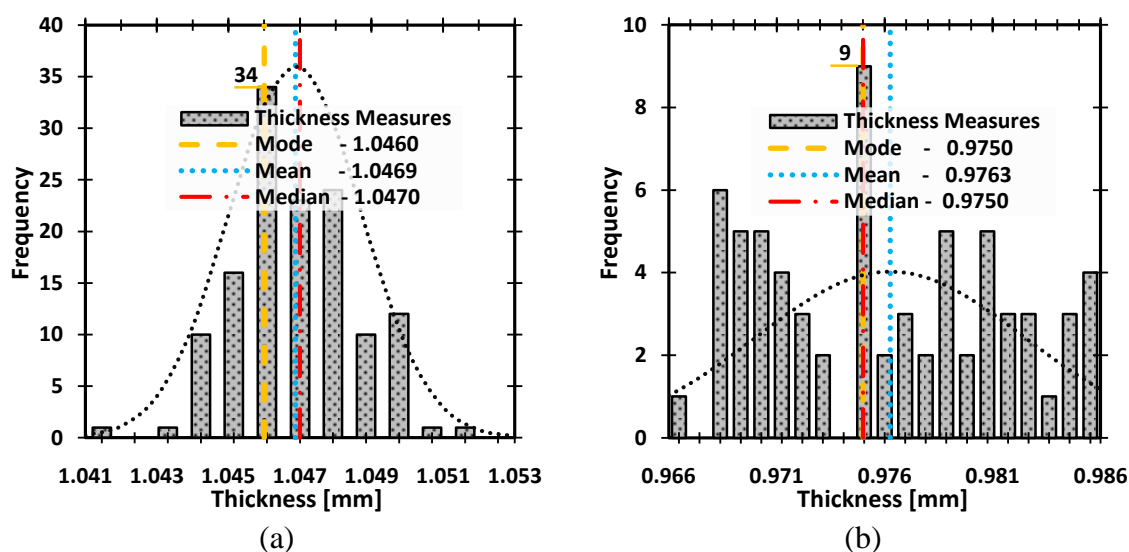


Figura 1.2. Distribuição da espessura para a liga: (a) 6016-T4 e (b) 6061-T6 (Simões, 2017).

As relações utilizadas no cálculo da tensão convencional e real assumem um estado de tracção/compressão uniaxial. Assim, importa também avaliar se pequenas alterações na distribuição da dimensão do provete podem conduzir a mudanças no estado de tensão. O estado de tensão em qualquer ponto material pode ser caracterizado através de três variáveis (Xue & Wierzbicki, 2009). Estas são a triaxialidade  $\eta$ , a tensão hidrostática ou tensão média  $\sigma_{med}$  e o ângulo de Lode  $\theta_L$  ou o seu parâmetro correspondente (parâmetro de

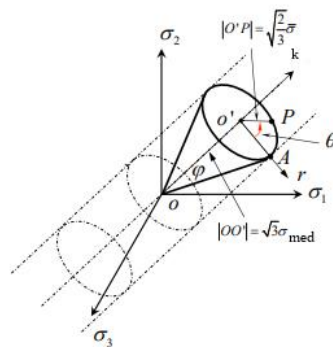
Lode  $P_L$ ). A tensão hidrostática corresponde à média das componentes principais de tensão,  $\sigma_i$ , com  $i = 1,2,3$ , tal que:

$$\sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (1.17)$$

O valor da triaxialidade pode ser relacionado com o valor da tensão média e equivalente, tal que:

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{med}}}{\bar{\sigma}}, \quad (1.18)$$

em que  $\bar{\sigma}$  corresponde á tensão equivalente do critério de plasticidade de von Mises. Este é o critério escolhido por ser o mais utilizado para descrever o comportamento de materiais isotrópicos (Andrade, 2019).



**Figura 1.3.** Estado de tensão num espaço Cartesiano das tensões principais (Bai, 2008).

O estado de tensões dum material isotrópico pode ser representado num sistema de coordenadas Cartesiano em que os três eixos correspondem às três principais tensões ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ) ou num sistema de coordenadas esféricas. No caso em que se recorre a coordenadas esféricas é usado um vetor representado pela soma de outros dois vetores, um que representa a componente hidrostática e outro que representa a componente desviadora (Bai, 2008). Na Figura 1.3 pode-se ver a componente hidrostática representada por  $\overline{OO'}$ , e a componente desviadora representada por  $\overline{O'P}$  (Andrade, 2019; Bai, 2008). De acordo com o critério de von Mises, estes vectores podem ser definidos como (Bai, 2008):

$$\overline{OO'} = \sqrt{3}\sigma_{\text{med}} \quad (1.19)$$

$$\overline{O'P} = \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\sigma} \quad (1.20)$$

O ângulo  $\varphi$  apresentado na Figura 1.3 pode ser relacionado com a triaxialidade:



$$\tan\varphi = \frac{3}{\sqrt{2}}\eta \tag{1.21}$$

Mas a um determinado valor de triaxialidade corresponde um número infinito de estados de tensão representados pela superfície do cone visível na Figura 1.3 (Morales 2013). Admitindo que a pressão hidrostática também é conhecida, os estados de tensão possíveis correspondem à circunferência representada na Figura 1.3. Assim, para caracterizar completamente o estado de tensão, é necessária a definição de uma outra grandeza, o ângulo de Lode,

$$\theta_L = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}\right). \tag{1.22}$$

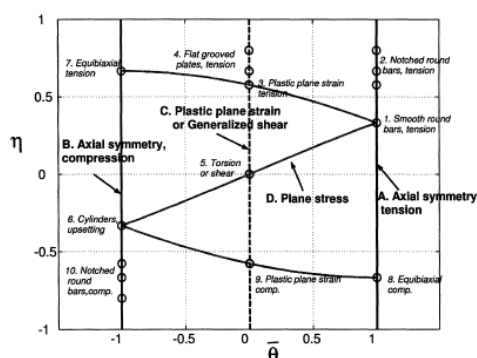
O ângulo de Lode pode também ser formulado a partir da sua relação com o valor normalizado do terceiro invariante do tensor da tensão desviadora, designado por

$$\xi = \frac{27 J_3}{2 \bar{\sigma}^3}, \tag{1.23}$$

onde

$$J_3 = s_1 s_2 s_3, \tag{1.24}$$

em que  $s_i$ , com  $i = 1,2,3$  correspondem aos valores próprios (principais) da componente desviadora do tensor das tensões.



**Figura 1.4.** Relação entre a triaxialidade e o parâmetro de Lode para vários tipos de ensaios (Bai, 2008).

A Figura 1.4 apresenta um resumo das combinações possíveis entre triaxialidade e parâmetro de Lode, para estados planos de tensão. Os valores indicados são válidos para o estado de tensão existente no início do ensaio. Para o caso de uma tração uniaxial o parâmetro de Lode deve ser próximo de 1 e para uma compressão uniaxial deve ser próximo

de -1. O valor da triaxialidade para um ensaio de tração uniaxial é de  $1/3$  e para um ensaio de compressão é de  $-1/3$ . Qualquer desvio em relação a estes valores de referência indica a presença de outras componentes de tensão.

### 1.3. Objetivos

Esta dissertação tem como objetivo avaliar a influência de pequenas variações de espessura, ao longo da chapa, na avaliação da curva tensão-deformação. Isto é feito com o auxílio de ensaios de tração e de compressão, usando um provete definido na meso-escala. A análise é realizada com base:

Na distribuição da deformação plástica equivalente na zona útil do provete;

Na ocorrência de instabilidades, estrição no caso da tração e encurvadura no caso de compressão;

Na curva tensão-deformação determinada com base apenas na zona central do provete.

Todas as simulações numéricas foram realizadas com o auxílio do *solver* de elementos finitos DD3IMP (contração de “*Deep Drawing 3D IMPLICIT finite element solver*”). O modelo mecânico adotado neste *solver* baseia-se na teoria das grandes transformações. É utilizada uma formulação *quasi*-estática, pelo que as equações de equilíbrio não contemplam quaisquer termos de inércia. Em qualquer instante de cálculo, o equilíbrio da estrutura é assegurado através da utilização de um algoritmo de integração temporal implícito, do tipo Newton-Raphson (Oliveira, 2005).

### 1.4. Estrutura da dissertação

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos que são sucintamente descritos neste capítulo para facilitar a sua leitura. Neste primeiro capítulo é feita a introdução ao tema, sendo este enquadrado em termos da exploração das técnicas de correlação digital de imagem na utilização de provetes de menores dimensões, para a caracterização do comportamento mecânico dos materiais. Referem-se também os objetivos principais do trabalho desenvolvido no âmbito da dissertação. Neste contexto, são descritos os princípios subjacentes ao código de elementos finitos DD3IMP, utilizado em todas as simulações numéricas apresentadas neste documento.

Os algoritmos desenvolvidos para permitir introduzir uma variação de espessura nos provetes, com base numa distribuição normal, são apresentados no segundo capítulo. Foram consideradas duas abordagens diferentes. Uma com uma distribuição aleatória de espessura e outra com uma distribuição sinusoidal. Ambas são aplicadas a uma malha de elementos finitos 2D, que define a geometria do provete. A geração das malhas 3D é feita por geração de camadas em espessura, todas com a mesma dimensão na direcção da espessura. Este algoritmo de geração da malha 3D é também descrito no segundo capítulo.

No terceiro capítulo é apresentada a geometria do provete seleccionado e as condições de fronteira adotadas para as solicitações de tracção e de compressão. É descrita a estrutura adotada para as malhas 2D do provete à meso-escala, bem como a definição do número de camadas em função da dimensão seleccionada no plano da chapa para o elemento finito. Apresentam-se ainda as propriedades mecânicas do material seleccionado para que seja possível fazer o estudo da malha. No final, apresenta-se a análise de sensibilidade à discretização, que foi realizada de modo a seleccionar a malha de elementos finitos a adoptar no estudo acerca da influência da variação de espessura nos resultados numéricos.

No capítulo quatro descreve-se o estudo paramétrico realizado. São sumariados os resultados obtidos, com os dois algoritmos, na análise à sensibilidade ao desvio padrão e à espessura média. Para o algoritmo que impõe uma distribuição sinusoidal da espessura é também analisada a sensibilidade ao comprimento de onda. Estes resultados são discutidos para a solicitação de tracção e de compressão.

Por fim, no capítulo cinco, apresentam-se as principais conclusões resultantes do estudo desenvolvido nesta dissertação.

Inclui-se ainda um Anexo onde são sumariadas as distribuições da deformação plástica equivalente obtida no final dos ensaios de tracção e compressão, para as diferentes distribuições de espessura.



## 2. ALGORITMOS PARA ESPESSURA VARIÁVEL

O ponto de partida para este trabalho foi um algoritmo de geração de malha tridimensional (3D) por extrusão de uma malha bidimensional (2D), designado de Bi2Tri. A malha 2D deve ser constituída por elementos finitos quadrangulares e definida no plano  $Oxy$ . Uma vez definida a espessura e o número de camadas nessa direcção,  $Oz$ , o algoritmo gera os elementos finitos hexaédricos. A coordenada mínima na direcção  $Oz$  é mantida sempre igual à da malha inicial. É de notar que todas as camadas de nós geradas apresentam as mesmas coordenadas  $x$  e  $y$  dos nós da malha inicial 2D. Isto porque não existe qualquer rotação durante a criação das diferentes camadas existindo apenas a alteração do valor da coordenada  $z$ .

Neste capítulo descrevem-se as alterações realizadas ao algoritmo base de modo a permitir gerar malhas 3D com espessura variável. Neste contexto importa referir que foram contempladas duas alternativas. A primeira gera uma distribuição aleatória de espessura, sendo que a única exigência é presente uma distribuição normal da espessura, com um valor médio e desvio padrão definidos pelo utilizador. Este algoritmo é denominado de Espessura Irregular Não Suavizada (EINS) (descrito no capítulo 2.1). A outra opção implementada considera que a variação de espessura apresenta uma distribuição sinusoidal, com um valor médio e desvio padrão também definidos pelo utilizador. Este algoritmo é denominado de malha com Espessura Irregular Suavizada (EIS) (descrito no capítulo 2.2). A introdução destas alternativas no programa Bi2Tri exigiu a alteração do programa principal, como se mostra na Tabela 2.1.

**Tabela 2.1.** Alterações realizadas ao Bi2Tri para permitir a escolha do algoritmo para a espessura variável.

Início
Leitura da malha 2D, incluindo o número total de nós, o número total de elementos, as coordenadas de cada nó e a conectividade
Leitura do valor de espessura pretendida, $t$
<b>-Especificar que tipo de variação de espessura se pretende-</b>
Identificar se a espessura pretendida é variável (“1”) ou constante (“0”)
Ler a resposta que é armazenada na variável <i>toption</i>
<b>Se</b> ( <i>toption</i> = 1)
Identificar se a variação é do tipo aleatório (“0”) ou com suavização sinusoidal (“1”)
Ler resposta que é armazenada na variável <i>toption2</i>
Criar o vector <i>rthick</i> com uma dimensão igual ao número total de nós da malha 2D, para armazenar a espessura a associar a cada nó.

## 2.1. Algoritmo para Distribuição Aleatória de espessura

Como referido anteriormente, o objectivo é gerar uma malha 3D que apresente uma distribuição de espessura aleatória, que obedeça a uma distribuição normal, com média ( $\mu$ ) e desvio padrão pré-definidos ( $\sigma$ ). Uma vez que cada malha 2D apresenta um número total de nós que não é conhecido, é necessário garantir que os valores de espessura gerados e armazenados no vector *rthick* obedecem a esta condição.

A função utilizada para a geração dos valores aleatórios distribuídos de forma normal no fortran é denominada “*vsrnggaussian*” da INTEL® oneAPI Math Kernel (Intel Corporation, 2003). O método de funcionamento desta função foi obtido através da consulta do manual (Intel Corporation, 2003). Esta função permite a criação de valores aleatórios contínuos com distribuição normal (Gaussiana), com valor médio,  $\mu$ , e desvio padrão,  $\sigma$ , conhecidos. A função recorre a métodos probabilísticos que garantem que existe uma determinada probabilidade  $P(x)$  de os valores gerados se situarem no intervalo de valores pretendido. Apenas se consegue determinar a probabilidade desses valores estarem num intervalo dado que, tal como referido anteriormente, estes valores são contínuos e são definidos como números reais. Neste caso a equação usada é especificamente para

distribuições normais (Gauss) e contém como base matemática a função densidade de probabilidade (FDP):

$$f_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), -\infty < x < +\infty, \quad (2.1)$$

onde  $x$  é o valor gerado. Esta FDP irá apresentar uma distribuição normal com o mesmo valor de média e desvio padrão fornecido pelo utilizador. Neste caso o valor de  $\sigma$  representa o valor de desvio padrão pretendido para a variação de espessura na malha e o valor de  $a$  representa a média pretendida para essa espessura ( $a = \mu$ ). É de notar que:

$$-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = -\frac{z_p^2}{2}, \quad (2.2)$$

Sendo que a variável  $z_p$  representa o número de desvios padrão a que o valor aleatório obtido estará da média pretendida. O integral da FDP definida em (2.1) permite determinar a probabilidade de se obter um valor que seja menor do que o valor  $x$ , i.e.  $P(X) < x$ , ou a probabilidade de se obter um valor que seja maior do que o valor de  $x$ , i.e.  $P(X) > x$ .

As variáveis de entrada da função “*vsrnggaussian*” são: (i) o método a utilizar na geração dos valores aleatórios, “*method*”; (ii) o descritor da estrutura do estado do fluxo, “*stream*”; (iii) o número de valores a serem gerados, neste caso o número total de nós da malha  $2D$ ,  $nn2D$ ; (iv) o valor médio,  $\mu$ ; e (v) o desvio padrão,  $\sigma$ . A variável de saída é um vector de dimensão  $nn2D$ , que neste caso corresponderá ao *rthick*.

A implementação no Bi2Tri desta função foi realizada com o auxílio do exemplo de aplicação disponível em (The Stanford Exploration Project (SEP), 2015). Neste contexto, optou-se por recorrer ao mesmo tipo de variáveis de entrada. Isto significa que foi adoptado o método de BOXMULLER e um gerador congruente multiplicativo de 32 bits, de números aleatórios.

Após a obtenção dos valores aleatórios, no exemplo consultado é realizada uma verificação, com base no cálculo dos momentos teóricos (Iowa State University-Department of Economics, 2003) da distribuição normal e dos obtidos para o vector *rthick* gerado. Caso a diferença relativa entre os momentos teóricos e da amostra seja inferior a 3%, é dada a indicação que os valores gerados obedecem à distribuição normal definida pelo utilizador. Opta-se por não apresentar as equações utilizadas para o cálculo dos momentos, uma vez que estas estão definidas no código (ver ANEXO B). Para além disso, foram realizadas

também verificações aos valores obtidos para *rthick* com base na análise da média e desvio padrão com o auxílio do Microsoft Excel.

A Tabela 2.2 apresenta o resumo das alterações realizadas ao programa Bi2Tri. A Tabela 2.3 apresenta o resumo das operações realizadas na nova sub-rotina para a criação dos valores aleatórios: MKL\_VSL\_Thick.

**Tabela 2.2.** Alterações realizadas ao Bi2Tri para permitir a definição dos parâmetros para a geração de valores de espessura com uma distribuição normal.

**Se** a resposta for que o utilizador pretende uma espessura variável do tipo irregular (*toption2* = 0) **então:**

Ler o valor do desvio padrão e armazenar na variável *sigma* ( $\sigma$ )

Chamar a sub-rotina MKL\_VSL\_Thick que irá transferir as variáveis *nn2D*, *t*, *sigma*, de modo a permitir calcular e armazenar *rthick*



**Tabela 2.3.** Algoritmo para a geração de uma distribuição aleatória de espessura (adaptado a partir do exemplo (The Stanford Exploration Project (SEP), 2015)).

<p><b>-Geração dos valores quasi-aleatórios com base num desvio padrão e num valor médio -</b></p> <p>A sub-rotina <i>MKL_VSL_Thick</i> tem como variáveis de entrada <i>n</i>, <i>a</i>, <i>sigma</i>, e de saída <i>r</i>. Estas correspondem no programa principal às variáveis <i>nn2D</i>, <i>t</i>, <i>sigma</i>, <i>rthick</i>, respetivamente</p> <p>Inclusão de dois módulos associados à biblioteca “Math Kernel” [MKL_VSL_TYPE e MKL_VSL] que irão permitir o uso de funções pré-programadas que geram números aleatórios básicos (e.g. BRNG).</p> <p>Indicação do tipo de <i>stream</i> e qual a sua estrutura</p> <p>Uso da função VSL_BRNG_MCG31, que representa um gerador congruente multiplicativo de 32 bits, para gerar um conjunto de valores pseudoaleatórios que são predefinidos na variável <i>brng</i></p> <p>Inicialização de uma nova <i>stream</i> com base na <i>seed</i> definida e verificação da ausência de erros</p> <p>Geração dos valores de espessura aleatórios com base nos parâmetros definidos e na <i>stream</i> acima criada</p> <p>Cálculo dos valores teóricos dos momentos da distribuição normal. com base nos parâmetros introduzidos</p> <p>Cálculo dos valores dos momentos obtidos através da amostra gerada pelo gerador de números aleatórios</p> <p>Comparação dos dois conjuntos de valores e verificação da sua precisão</p> <p>Impressão dos resultados e em caso de erro impressão duma mensagem de erro</p>
--

## 2.2. Algoritmo para Distribuição Sinusoidal de Espessura

A geração de superfícies onduladas é comumente realizada com o auxílio de uma função do tipo (Yastrebov et al., 2014):

$$z(x, y) = B \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right), \quad (2.3)$$

onde *B* é a amplitude de variação da função e  $\lambda$  é o comprimento de onda. Esta fórmula permite obter o valor da coordenada *z* de qualquer ponto, para o qual são conhecidas as coordenadas *x* e *y*. No entanto, existem alguns pontos que devem ser discutidos antes de

adoptar a equação (2.3) para a definição da espessura em cada ponto. O primeiro prende-se com o valor obtido para as coordenadas  $(x, y) = (0,0)$  que seja sempre o máximo. Ora como esse ponto corresponde muitas vezes à intersecção dos planos de simetria do provete, a adopção da equação (2.3) iria conduzir a um valor máximo de espessura nessa zona. Assim, optou-se por adicionar a constante  $\pi$  ao primeiro cosseno, para garantir que o ponto de Gauss usado na obtenção de resultados se situa numa zona onde existe localização de deformação, permitindo assim analisar as características mais crítica do provete. Estas são zonas de espessura mínima. O segundo ponto que é necessário discutir é que a equação (2.3) apresenta sempre um valor médio nulo. Assim, é necessário adicionar à expressão o valor médio pretendido para a espessura, i.e.  $\mu = t$ . Por último, de modo a gerar distribuições de espessura comparáveis com as aleatórias, é necessário relacionar o valor de amplitude,  $B$ , com o valor de desvio padrão ( $\sigma$ ) pretendido pelo utilizador. Para isso recorre-se à equação do valor eficaz da onda sinusoidal, tal que:

$$B = \sqrt{2}\sigma. \quad (2.4)$$

No final, a função implementada no código Bi2tri corresponde a:

$$z(x, y) = t + \sqrt{2}\sigma \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \pi\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right). \quad (2.5)$$

A Tabela 2.4 apresenta o resumo das alterações introduzidas no programa Bi2Tri para possibilitar a geração de uma malha 3D com variação sinusoidal de espessura. Por último, importa referir que o programa não verifica a relação entre o comprimento de onda seleccionado e a discretização adotada no plano. No entanto, o utilizador deve seleccionar o valor de comprimento de onda em função da discretização adoptada.

O valor do comprimento de onda dita a frequência de variação da espessura. No entanto, se não existir um número de nós suficiente para permitir a reprodução desta frequência esta não será capturada. A título de exemplo, na Figura 2.1, apresenta-se a distribuição de espessura obtida para nós a uma distância de 0,1 mm e diferentes valores de comprimento de onda. Para um comprimento de onda igual à distância entre os nós, obtém-se uma distribuição de espessura constante, igual ao valor mínimo pretendido. O exemplo considera  $\mu=1,0$  e  $B=0,125\sqrt{2}$ . Para  $\lambda$  igual a duas vezes a distância entre os nós, obtém-se uma distribuição triangular, a variar entre o valor máximo e mínimo. Para  $\lambda$  igual a cinco vezes a distância entre os nós, a distribuição obtida não consegue capturar o valor máximo. De facto, verifica-se que de modo a recuperar o valor máximo é necessário que a relação

entre o comprimento de onda e a distância entre os nós seja par. No exemplo, consegue-se observar esse efeito para  $\lambda$  igual a 8 e 10 vezes a distância entre nós. Assim, neste trabalho considera-se que a situação ideal é garantir que o comprimento de onda deve ser igual a 10 vezes a distância entre os nós. Isto significa que a malha de elementos finitos dita o valor do  $\lambda$  a considerar. De notar que o valor de  $\lambda$  não influencia a média e o desvio padrão.

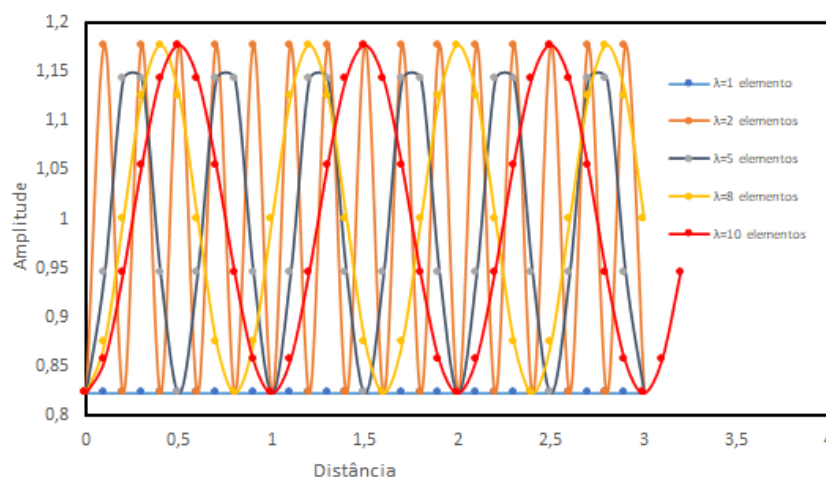
**Tabela 2.4.** Algoritmo para a geração de uma distribuição sinusoidal de espessura.

**- Geração de valores com base na função sinusoidal -**

Ler o valor do desvio padrão e armazenar na variável *sigma* ( $\sigma$ )

Ler o valor do comprimento de onda e armazenar na variável *LThick* ( $\lambda$ )

Definir a variável *rthick* com auxílio da equação (2.5)



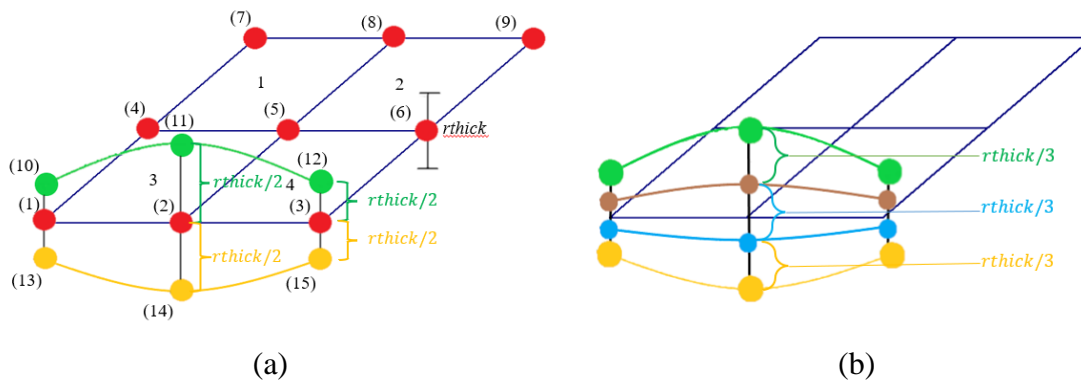
**Figura 2.1.** Representação da distribuição de espessura obtida em função da relação entre a amplitude e o comprimento do elemento finito.

### 2.3. Geração da Malha 3D

Cabe ao utilizador definir o número total de camadas a gerar,  $NC$ , que pode tomar vários valores para o mesmo vector *rthick*, quer este tenha sido obtido com o algoritmo de variação de EINS (Tabela 2.3) ou de variação de EIS (Tabela 2.4). Tal como referido na Tabela 2.5, a primeira camada a ser criada é a mais inferior, cujas coordenadas  $z$  são inicialmente definidas como sendo iguais a  $-rthick/2$ . Este passo inicial facilita a geração das coordenadas  $z$  das camadas seguintes, com o auxílio da seguinte expressão:

$$z = \frac{rthick}{NC} \times IL, \text{ com } IL = 1, \dots, NC \quad (2.6)$$

onde  $IL$  é o número da camada a ser gerada. Esta expressão impõe que cada camada apresenta uma espessura igual a  $rthick/NC$ . A definição da camada mais inferior impõe que a construção é feita a partir da meia espessura. Deste modo, é sempre mantida a linha média constante, quer o número de camadas seja par ou ímpar. Esta interação pode ser melhor observada na Figura 2.2.



**Figura 2.2.** Esquemas representativos do método de criação das camadas da malha 3D partir da malha 2D: (a) Malha com duas camadas; (b) Malha com três camadas.

A Figura 2.2 (a) mostra quando se pretende que a malha 3D apresente duas camadas (número par), a camada de nós correspondente à linha de simetria apresenta as mesmas coordenadas  $z$  da malha original 2D. Se forem substituídos os valores na (2.6), para a camada  $IL = 1$  (representada pelos nós a vermelho) obtém-se a seguinte expressão  $\frac{rthick}{2} \times 1 = \frac{rthick}{2}$  que é a distância desde a camada a amarelo ( $IL = 0$ ) até à camada  $IL = 1$ . No exemplo da Figura 2.2 (b), com três camadas, verifica-se que a distância entre camadas é também mantida (exemplo: para a camada  $IL = 2$  que neste caso é castanha a distância da camada  $IL = 0$  até á camada  $IL = 2$  é de  $\frac{rthick}{3} \times 2 = \frac{2}{3} rthick$ ).

**Tabela 2.5.** Criação das coordenadas  $z$  das diferentes camadas ao longo da espessura.**-Geração das várias camadas com espessura variável -**

**Se**  $toption = 1$  (ver Tabela 2.2) **então** as camadas serão criadas de acordo com os passos seguintes

Inicializar a variável espessura mínima a zero:  $thick\_min=0.0$

**Ciclo** de  $IL=0$  a  $NC$  (número total de camadas)

**Ciclo** de 1 a  $nn2D$

**Se**  $IL=0$  como esta é a camada mais inferior da malha 3D **então**:

$$z = -rthick/2$$

Armazena-se em  $thick\_min$  o menor valor gerado

Caso contrário

$$z = \frac{rthick}{NC} \times IL$$

Efetua-se a translação de toda a malha 3D de modo a garantir que o ponto com coordenada  $z$  mínima fica com coordenada  $z = 0$  e todos os outros pontos têm uma coordenada  $z$  positiva.

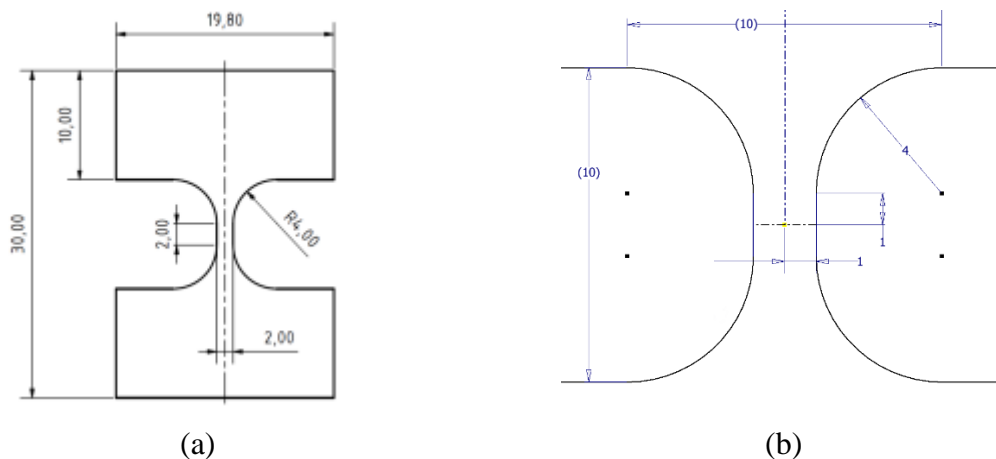


### 3. MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo descrevem-se os modelos de elementos finitos adoptados neste trabalho. Numa primeira etapa foram construídas diferentes discretizações no plano e na espessura da chapa, de modo a proceder a um estudo de sensibilidade dos resultados a ambos os tipos de refinamento. A escolha das discretizações baseou-se em relações empíricas e no facto de o provete ser submetido a ensaios uniaxiais de tração e de compressão. No capítulo seguinte apresentam-se as características geométricas do provete adotado, bem como as condições de fronteira consideradas.

#### 3.1. Geometria do Provete e condições de fronteira

Como referido no capítulo 1.1, o modelo numérico usado nas simulações de elementos finitos será baseado nos ensaios de tração e compressão dum meso-provete. As dimensões do meso-provete foram retiradas de (Cruz, 2019) e são apresentadas na Figura 3.1(a).



**Figura 3.1.** Dimensões do provete meso considerado: (a) Medidas do provete meso com medidas não proporcionais em mm (adaptado de (Cruz, 2019)); (b) Medidas em mm da zona entre amarras do provete que é crítica e que é sujeita à simulação usando elementos finitos.

É importante realçar que para provetes à escala meso não existem normas que definam quais as dimensões que se devem utilizar na avaliação das propriedades mecânicas do material, quer este seja feito por métodos empíricos ou por métodos analíticos (Cruz,

2019). Neste caso considera-se um provete com uma zona útil com um comprimento igual à largura, como se mostra na Figura 3.1(a). Esta zona de secção reduzida (zona crítica de deformação durante os ensaios uniaxiais) é definida para provetes standard com um comprimento muito superior à largura, de modo a atingir valores de deformação relativamente elevados com uma distribuição uniforme da deformação (International Organization for Standardization, 2016). No provete à escala meso o comprimento e largura da zona útil é de 2 mm (Cruz, 2019).

O modelo numérico implementado no programa de elementos finitos DD3IMP considera que os ensaios de tracção e compressão são realizados com base no controlo do deslocamento na zona da amarra. Nestas circunstâncias pode-se assumir-se que o provete apresenta simetria de condições de fronteira nos planos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$  (Hedström et al., 2009). Por outro lado, o provete apresenta simetria geométrica nesses mesmos planos. De notar que mesmo para uma espessura variável a simetria no plano da linha média se mantém, dada a forma como se optou por gerar a variação de espessura (ver Figura 2.1). Assim, mesmo que o material considerado seja ortotrópico, é possível realizar a simulação numérica apenas com um oitavo da geometria do provete caso a direcção da força aplicada tenha um ângulo de  $0^\circ$  ou  $90^\circ$  com a direcção de laminagem. No entanto, a imposição de condições de fronteira de simetria tende a estabilizar os resultados numéricos. No caso da estrição, que ocorre para solicitações de tracção, optou-se por considerar apenas um quarto do modelo, i.e. não foi considerada a simetria no plano  $Oz$ . No caso da flambagem, que ocorre para solicitações de compressão, como esta é muito sensível às condições de fronteira, optou-se por realizar as simulações numéricas com o provete completo, i.e. não foi considerada qualquer condição de fronteira de simetria.

As condições de fronteira no DD3IMP são impostas com o auxílio da definição de planos, cuja na equação geral é dada por:

$$Ax + By + Cz = D, \quad (3.1)$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são as constantes do plano, definido no plano cartesiano de direcções espaciais  $(x, y, z)$ .

No caso do ensaio de tracção, as condições de simetria são definidas nos planos:

- $A = 1; B, C, D = 0$ , para a coordenada  $x$

Para o plano  $x = 0$  não há movimento na direcção  $Ox$

- $B = 1; A, C, D = 0$ , para a coordenada  $y$



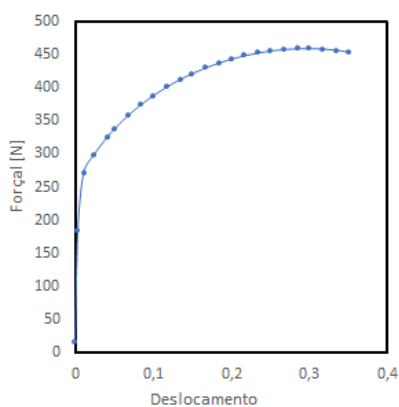
Para o plano  $y = 0$  não há movimento na direcção  $Oy$

Por outro lado, na zona da amarra, apenas pode ocorrer deslocamento na direcção com deslocamento imposto, logo no plano:

- $B = 1; D = 5; A, C = 0$ , para as coordenadas  $x, y, z$

Para o plano  $y = 5$  não há movimento na direcção  $Ox$  e  $Oz$ , sendo que é imposto o deslocamento na direcção  $Oy$  (direcção de carga)

Durante as simulações à tração vai haver a ocorrência de estrição para um determinado valor de deslocamento. No entanto, como não se pretende analisar os resultados após a estrição, foi feita uma análise da evolução da força em função do deslocamento, de modo a determinar o seu valor máximo, admitindo que o provete apresenta uma espessura constante. A Figura 3.2 apresenta a curva de evolução da força da amarra com o seu deslocamento, sendo possível observar a queda da força para um deslocamento de aproximadamente 0,3 mm. O valor de força máxima para este ensaio ( $F_{máx}$ ) é de 458,044 N. Assim, optou-se por realizar todas as outras simulações numéricas com um deslocamento máximo da amarra de 0,285 mm, que corresponde a um instante anterior à carga máxima. Esta opção permite também avaliar se a alteração de espessura resulta na antecipação do instante de ocorrência do início da localização da deformação (estricção). Todas as simulações foram realizadas com um incremento de deslocamento da amarra ( $\Delta y$ ) igual a 0,01. De modo a permitir a correcta comparação dos resultados, a força obtida no ensaio de tração foi sempre multiplicada por quatro. No entanto, o deslocamento não foi multiplicado por dois.



**Figura 3.2.** Evolução da força da amarra com o seu deslocamento para o ensaio uniaxial à tração com a malha  $25 \times 25(13)$  (ver capítulo 3.5) e um deslocamento de 0,35 mm.

No caso do ensaio de compressão, a condição de fronteira para a amarra que se desloca é idêntica à utilizada para o ensaio de tração, isto é:

- $B = 1; D = 5; A, C = 0$ , para as coordenadas  $x, y, z$

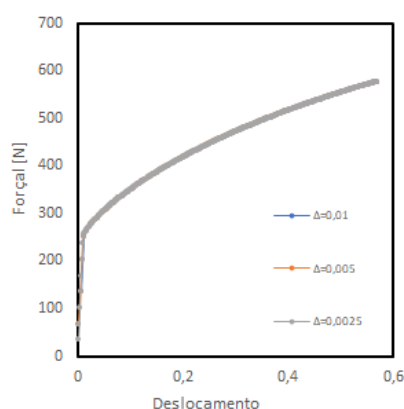
Para o plano  $y = 5$  não há movimento na direção  $Ox$  e  $Oz$ , sendo que é imposto o deslocamento na direção  $Oy$  (direção de carga)

A outra amarra está fixa, pelo que:

- $B = 1; D = -5; A, C = 0$ , para a coordenada  $x, y, z$

Para o plano  $y = -5$  não há movimento na direção  $Ox, Oy, Oz$

Quando o provete é sujeito a compressão é expectável que ocorra a flambagem. Este tipo de instabilidade é muito sensível a parâmetros numéricos, pelo que foram realizadas simulações numéricas para diferentes valores de incremento de deslocamento da amarra ( $\Delta y$ ). A Figura 3.3 apresenta os resultados obtidos para três valores distintos de  $\Delta y$ , assumindo que o provete apresenta uma espessura constante. Assumiu-se também um valor para o deslocamento máximo correspondente ao dobro do aplicado na tração, i.e.  $2 \times 0,285 = 0,57$  mm. A análise da Figura 3.3 permite observar que não há influência do tamanho do incremento na evolução da força, pelo que todas as simulações foram realizadas com  $\Delta y$  igual a 0,01 e um deslocamento total de 0,57 mm. Esta opção permite também avaliar se a alteração de espessura resulta na antecipação do instante de ocorrência do início da flambagem.



**Figura 3.3.** Evolução da força da amarra com o seu deslocamento para o ensaio uniaxial à compressão com a malha  $25 \times 25$  (13) (ver capítulo 3.5), um deslocamento de 0,57 mm e avaliada para diferentes valores de incremento da deslocação da amarra.

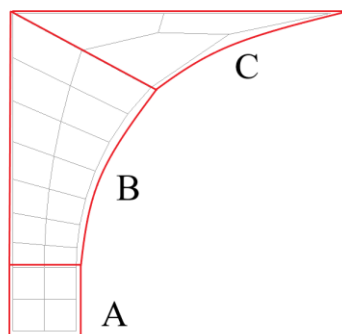
## 3.2. Estruturas da malha 2D

A geometria do provete apresenta uma zona de contacto com a amarra de dimensões elevadas, de modo a reduzir a hipótese de escorregamento. Uma vez que esta zona apresenta menores níveis de deformação, optou-se por considerar que a deformação é nula e desprezar esta zona nos modelos, tal como se mostra na Figura 3.1(b).

No caso dos ensaios em análise, a zona útil apresenta uma deformação homogénea até ao instante em que ocorre a instabilidade. Nestas circunstâncias a distribuição da deformação em espessura é também uniforme. Os elementos finitos sólidos, hexaédricos, apresentam resultados mais precisos se a razão entre as dimensões nas diferentes direcções for próxima de 1.0 e os ângulos internos forem próximos de 90°. No caso das malhas 2D, os elementos finitos com uma geometria mais próxima de um quadrado apresentam melhor precisão especialmente para geometrias regulares e melhor eficiência no uso de recursos computacionais (Biswas & Strawn, 1998). Assim, a zona central da zona útil foi sempre discretizada com uma malha estruturada (área de  $2 \times 2$  mm). Nas secções seguintes descrevem-se em maior detalhe as discretizações adotadas para as malhas 2D.

### 3.2.1. Tracção

A Figura 3.4 apresenta as três regiões consideradas nas discretizações no plano, que foram estabelecidas de acordo com a sua relevância na obtenção dos campos de tensão e deformação. Tal como mencionado anteriormente, para a região A foi definida uma malha estruturada, uniforme, com dimensão de elemento finito igual na direcção  $Ox$  e  $Oy$ . A região C apresenta apenas três lados, pelo que se optou pela construção de malhas não estruturadas. A construção da discretização para esta região obrigou a alguns cuidados na definição do número de elementos, de modo a evitar elementos de pequena dimensão ou com ângulos muito diferentes de 90°. Na região B, a malha é estruturada, mas não uniforme, de modo a facilitar a transição entre as zonas A e C e reduzir o número de elementos. De facto, esta zona apresenta alguma deformação, especialmente para valores de tensão próximos da tensão de engenharia do material, mas os níveis atingidos não requerem uma discretização tão fina. A Figura 3.4 apresenta um exemplo de uma das malhas 2D construídas para o ensaio de tracção.



**Figura 3.4.** Malha 2D de tração com discretização em uma dimensão para os elementos quadrangulares na zona A de 0.5mm.

Como referido anteriormente, as malhas 3D de elementos hexaédricos devem apresentar elementos com uma geometria próxima de um cubo, para garantir a precisão dos resultados numéricos. Tendo este factor em conta, deduz-se que a malha 2D não pode ser tão fina que crie posteriormente problemas na obtenção da malha 3D. De notar que neste trabalho se considera que a espessura de referência é de 1 mm, i.e. metade da dimensão da zona útil. Assim, a obtenção de elementos finitos com uma geometria próxima de um cubo pode resultar num número de elementos muito elevado. Por outro lado, a utilização de um número reduzido de camadas em espessura pode conduzir a elementos com uma razão entre a dimensão em espessura e no plano muito elevada. Com base nestas premissas, definiram-se algumas condições básicas para os tipos de malhar a gerar. Essas condições foram:

1. A discretização tem por base a Zona A (ver Figura 3.4) e as suas dimensões. Foi definido que todos os elementos nesta zona têm de ter dimensões iguais entre si, malha quadrada.
2. Pretende-se que os elementos da malha 3D, criada a partir da malha 2D, possuam uma forma não muito distante da cúbica. Isto implica que no máximo a distância entre camadas na malha 3D tem de ser duas vezes a distância entre cada elemento na zona A (zona mais refinada).

Com base nestas duas condições, construiu-se 5 malhas diferentes 2D com as características apresentadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1. Informações sobre as malhas 2D à tracção.

Nº Elementos Zona A	Tamanho Elemento Zona A[mm]	Nós (Zona A)	Nós totais
<b>10 × 10</b>	0,1	121	329
<b>16 × 16</b>	0,0625	289	615
<b>20 × 20</b>	0,05	441	968
<b>25 × 25</b>	0,04	676	1279
<b>32 × 32</b>	0,03125	1089	2062

A partir deste momento cada uma destas 5 malhas ou malhas que tenham sido construídas a partir destas são denominadas pelo número de elementos que possuem na Zona A (ver Figura 3.4). Estas malhas podem ser observadas na Figura 3.5.

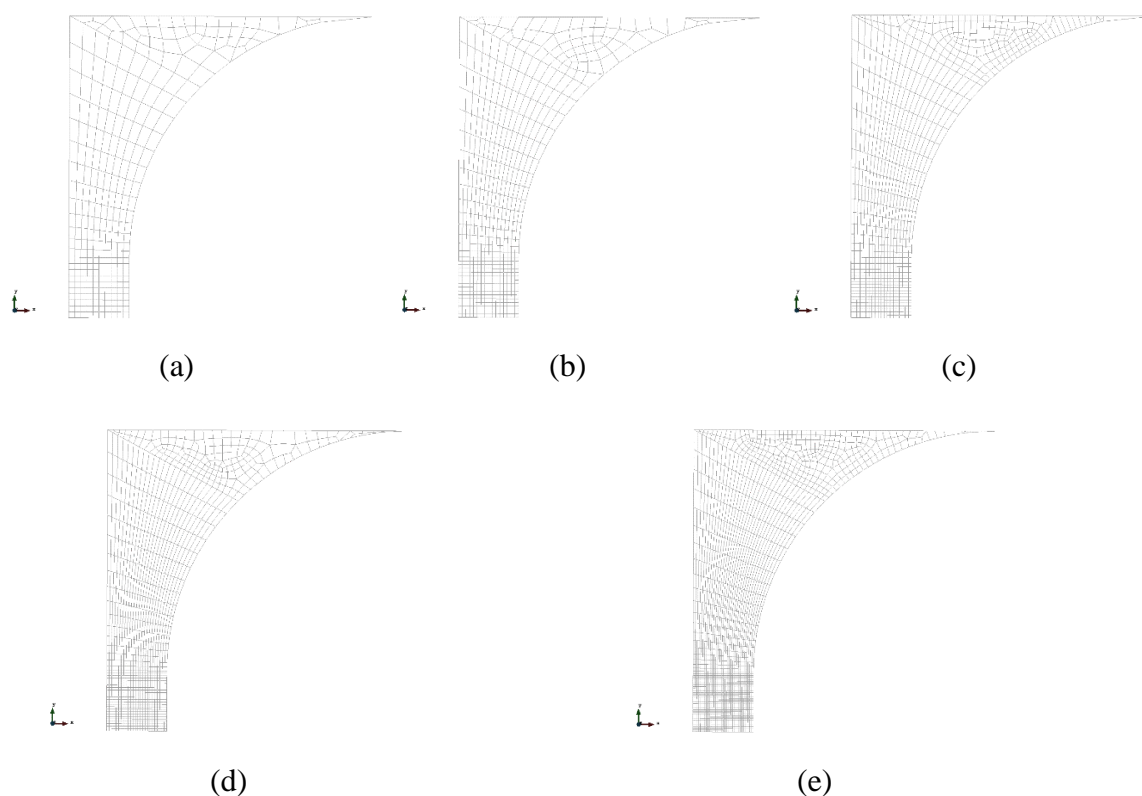


Figura 3.5. Malhas 2D geradas com, denominadas de acordo com o número de elementos que apresentam na Zona A (Figura 3.4): (a) Malha **10 × 10**; (b) Malha **16 × 16**; (c) Malha **20 × 20**; (d) Malha **25 × 25**; (e) Malha **32 × 32**.

### 3.2.2. Compressão

Para o caso da compressão, as malhas 2D tem por base a mesma geometria do provete (ver Capítulo 3.1) e a mesma malha base gerada (ver Figura 3.5 para os ensaios de tração (3.2.1). No entanto, considera-se a geometria total do provete. Isto deve-se ao facto de que a compressão apresentar uma instabilidade do tipo flambagem, cuja ocorrência é minimizada pelas condições de simetria consideradas para a tração. (3.1)

Como se pretende comparar o comportamento das diferentes malhas de modelos dos elementos finitos, os modelos usados para a compressão têm de ser idênticos aos modelos usados nas simulações dos ensaios de tração. Por causa disto as malhas 2D criadas para os modelos dos meso-provetes à compressão são idênticas às malhas 2D criadas para a tração. A Tabela 3.2 apresenta o resumo das características das malhas de compressão.

**Tabela 3.2.** Informações sobre as malhas 2D à compressão.

Nº Elementos Zona A	Tamanho Elemento Zona A[mm]	Nós (Zona A)	Nós totais
<b>4 × 10 × 10</b>	0,1	121	1247
<b>4 × 16 × 16</b>	0,0625	1089	2363
<b>4 × 20 × 20</b>	0,05	1681	3759
<b>4 × 25 × 25</b>	0,04	2601	5015
<b>4 × 32 × 32</b>	0,03125	4225	8077

### 3.3. Estrutura das malhas 3D

Como se pretende comparar o comportamento das diferentes malhas de modelos dos elementos finitos, os modelos usados para a compressão foram construídos de forma idêntica aos modelos usados nas simulações dos ensaios de tração. Isto é, as malhas 2D criadas para os modelos dos meso-provetes à compressão são idênticas às malhas 2D criadas para a tração, como descrito no capítulo anterior. Após a criação das várias malhas 2D, estas são usadas como base para gerar as malhas 3D com recurso ao programa Bi2Tri (Capítulo 2.3 e 3.2). As malhas 3D apresentadas neste capítulo apresentam todas uma espessura de 1 mm, dado que esta é a espessura do provete usado nos ensaios de tração e compressão utilizados como referência para este trabalho. Neste capítulo analisa-se a influência da discretização adoptada ao longo da espessura. Esta análise é feita com o intuito de determinar

qual o número de camadas em espessura que deve ser adoptado para os estudos a realizar acerca da influência da variação de espessura na curva tensão-deformação.

Foram criadas várias malhas 3D com base nas diferentes razões ( $R$ ) entre o tamanho dos elementos da discretização 2D da Zona A (ver 2.3 e 3.2) e o tamanho do elemento na direcção da espessura, que é função do número de camadas consideradas nas malhas 3D. Consideraram-se apenas valores para  $R$  pares, com um valor mínimo de 2 e máximo de 8, visto que valores maiores apresentam um desvio demasiado grande em relação ao formato ideal de um cubo para os elementos. Com base nesta gama de valores de  $R$  obteve-se, para cada uma das 5 malhas 2D apresentadas no capítulo 3.2.1 o número de camadas a considerar para a geração de malhas 3D. A Tabela 3.3 apresenta o resumo das características das malhas 3D consideradas no estudo. Tendo o número de camadas procedeu-se à geração das malhas 3D, com o auxílio do programa Bi2Tri. O ANEXO A apresenta a tabela com o número total de nós de cada uma destas malhas de elementos finitos.

**Tabela 3.3.** Número de camadas a considerar na direcção da espessura em função de  $R$ .

Designação da malha 2D	10 × 10	16 × 16	20 × 20	25 × 25	32 × 32
Tamanho Elemento na Zona A [mm]	0,1	0,0625	0,05	0,04	0,03125
Razão ( $R$ )	Número de camadas a gerar na direcção da espessura				
2	5	8	10	13	16
4	3	4	5	6	8
6	2	3	3	4	5
8	1	2	3	3	4

### 3.4. Propriedades mecânicas

O modelo de elementos finitos tem por base o meso-provete testado experimentalmente em ensaios de tração e compressão uniaxial em (Cruz, 2019). Nesse trabalho, um dos materiais utilizados foi a liga de alumínio AA5754-T4, que é muito usada na industria automóvel (Cruz, 2019). Este material apresenta as propriedades mecânicas indicadas na Tabela 3.4 (Granta Design, 2018).

**Tabela 3.4.** Propriedades mecânicas da liga AA5754-T4 de acordo com (Granta Design, 2018).

<b>Propriedade</b>	<b>AA5754-T4</b>
Módulo de elasticidade E [GPa]	70
Coefficiente de Poisson $\nu$	0,33
Tensão de Cedência $R_{p0,2}$ [MPa]	122
Tensão Real para a Força Máxima $\sigma_m$ [MPa]	232
Extensão após rotura F [%]	15

Todas estas propriedades representam diferentes características associadas às curvas tensão-deformação convencional e real, que caracterizam o comportamento de um material para um ensaio uniaxial de tração. O valor de Módulo de Elasticidade ( $E$ ) representa um valor associado à proporcionalidade entre o valor de tensão a que um material está sujeito no regime elástico e a sua deformação linear. A tensão de Cedência ( $R_{p0,2}$ ) representa a tensão limite para a transição entre o regime elástico e plástico; neste caso, adopta-se o valor da tensão convencional associada a uma deformação de 0,2%. A Tensão Real para a Força Máxima ( $\sigma_m$ ) representa a tensão medida no início de estrição do provete e corresponde à tensão associada à força máxima exercida sobre o provete durante o ensaio. A extensão após rotura representa a percentagem de deformação que o provete apresenta após a ocorrência da rotura.

No entanto, estas propriedades mecânicas apresentam uma gama de variação, quer entre diferentes fornecedores, quer entre lotes (bobinas) do mesmo fornecedor. Assim, na Tabela 3.5 apresentam-se as propriedades mecânicas extraídas dos resultados experimentais para o meso-provete com este material (Cruz, 2019).

As propriedades mecânicas do material são necessárias para a realização das simulações numéricas, dado que nos permitem descrever o comportamento do material, no regime elástico e elastoplástico. O comportamento elástico é considerado isotrópico e descrito pela Lei de Hooke generaliza, sendo que tal exige apenas o conhecimento do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson (ver Tabela 3.4).



**Tabela 3.5.** Propriedades mecânicas obtidas para a liga AA5754-T4 ((Cruz, 2019)).

<b>Propriedade</b>	<b>AA5754-T4</b>
Módulo de Elasticidade E [GPa]	90
Deformação para o ponto de Tensão Real de Força Máxima $\epsilon_m$	0,13
Tensão de Cedência Elástica $R_{p0,2}$ [MPa]	125,3
Tensão de rotura Convencional $R_m$ [MPa]	224,2
Tensão Real para Força Máxima $\sigma_m$ [MPa]	257,2
Extensão total até ao ponto de rotura Convencional $A_{gt}$ [%]	14,7

A descrição do comportamento plástico exige a definição de uma lei de encruamento e de um critério de plasticidade, uma vez que se considera plasticidade associada. Considerou-se um valor de 90 GPa para o módulo de elasticidade dado que o valor experimental obtido demonstra problemas na medição e este é um valor típico verificado em alumínio. Optou-se por considerar que também o comportamento plástico é isotrópico, descrito pelo critério de von Mises, de modo a simplificar a análise dos resultados das simulações. Em relação à lei de encruamento, existem várias alternativas que podem ser aplicadas para diferentes tipos de materiais. Para o caso da AA5754-T4 Tabela 3.5 que é uma liga de alumínio da série 5XXX, a lei de encruamento que melhor descreve o seu comportamento elastoplástico é a lei de *Voce*. Isto porque esta liga apresenta um comportamento com saturação para valores elevados de deformação plástica. A forma adoptada para a lei de *Voce* é.

$$Y = Y_0 + (Y_s - Y_0)[1 - \exp(-C_Y \bar{\epsilon}^P)] \quad (3.2)$$

onde  $Y$  é a tensão de escoamento e  $\bar{\epsilon}^P$  é a deformação plástica equivalente. As restantes variáveis correspondem a parâmetros do material, sendo que  $Y_0$  é a tensão limite de elasticidade inicial,  $Y_s$  é a tensão de saturação e  $C_Y$  define a taxa de aproximação à tensão de saturação. Os parâmetros utilizados neste trabalhos foram identificados em (Cruz, 2019), tendo os seguintes valores:  $Y_0 = 125,3$  MPa;  $Y_s = 279,9$  MPa e  $C_Y = 15,1$ .

Por último é preciso ter em conta que para analisar o comportamento do material ao longo do tempo é necessário verificar as pequenas deformações localizadas que existem no provete. Experimentalmente isto pode ser feito de várias maneiras, mas para o caso em questão foi feito com base no processo de Correlação Digital de Imagem (CDI) (Cruz, 2019). Este método óptico recorre ao uso de duas câmaras que geram várias imagens do provete para diferentes instantes de tempo, durante a sua deformação. Para que se consiga observar os níveis de deformação superficial do provete é necessário usar o método de *speckle*. Este método consiste na marcação de vários pigmentos aleatórios ao longo da zona em que se pretende avaliar a deformação superficial. Como estes pontos alteram a sua posição relativa em função da deformação sofrida, o tratamento das imagens permitem fazer uma análise da evolução da deformação (Abdulqader & Rizos, 2020).

### **3.5. Análise da sensibilidade à discretização do modelo numérico**

Neste capítulo analisam-se os resultados obtidos para um provete com as dimensões na meso-escala e uma espessura inicial constante de 1.0 mm. O objectivo é avaliar a influência da discretização 2D e do número de camadas na direcção da espessura nos resultados obtidos, de modo a seleccionar uma malha de elementos finitos para realizar o estudo acerca da influência da variação da espessura na determinação da curva tensão-deformação. A análise da influência da discretização foi realizada tendo em conta:

- A evolução da força da amarra em função do seu deslocamento;
- A evolução da tensão equivalente com a deformação plástica equivalente, obtida com base na deformação plástica equivalente do ponto de Gauss mais próximo da superfície livre e da zona central do provete e na equação (1.6);
- A evolução da Triaxialidade em função da deformação plástica equivalente;
- A evolução do Parâmetro de Lode em função da deformação plástica equivalente.

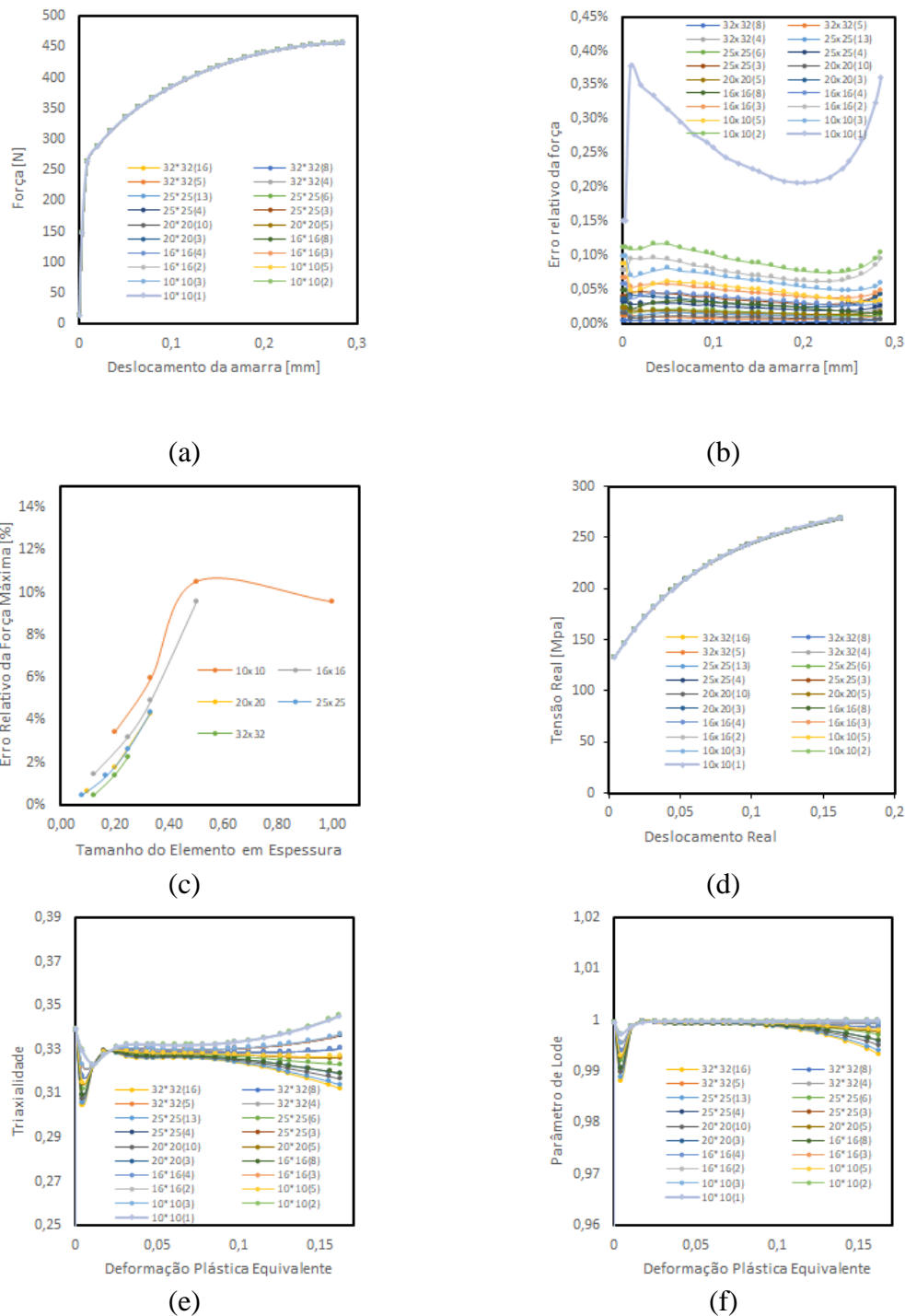
De modo a facilitar a interpretação qualitativa dos resultados, é avaliado o erro relativo cometido na evolução da força. Este é determinado considerando como referência a discretização com o maior número de elementos, i.e.  $32 \times 32(16)$  (ver Tabela 3.3). De

modo a possibilitar a correcta avaliação da evolução do erro relativo, foi realizada a interpolação do valor de deslocamento da amarra para o valor da malha de referência.

A Figura 3.6(a) apresenta a evolução da força em função do deslocamento da amarra. Como o deslocamento da amarra foi definido de modo a não ultrapassar o valor da carga máxima, a evolução da força é muito semelhante para todas as malhas. De facto, a análise da Figura 3.6(b) mostra que o erro relativo na evolução de força é sempre inferior a 0,40% até ser atingido um valor de deslocamento da amarra próximo da força máxima. O erro relativo atinge o valor máximo para um instante próximo da carga máxima sendo que, como se mostra na Figura 3.6(c), este tende a diminuir com a redução do tamanho elemento no plano e em espessura. As discretizações  $20 \times 20$  e  $25 \times 25$  permitem garantir valores de erro na força máxima inferiores a 5%. A evolução da tensão equivalente em função da deformação plástica equivalente é também muito semelhante para todas as discretizações, como se mostra na Figura 3.6(d). No entanto, uma análise mais cuidada da evolução da triaxialidade e do parâmetro de Lode, em função da deformação plástica equivalente, mostra a maior sensibilidade destas variáveis à discretização, no plano e em espessura. Na Figura 3.6(e) observa-se que a triaxialidade apresenta um desvio em relação ao valor de referência que aumenta para valores mais elevados e mais baixos de camadas, sendo que algumas discretizações apresentam um aumento da triaxialidade e outras uma diminuição. No caso do parâmetro de Lode (ver Figura 3.6(f)) todas as discretizações conduzem a uma diminuição deste valor com o aumento da deformação plástica.

**Tabela 3.6.** Tempos de cálculo para cada uma das malhas à tracção

<b>Designação da malha 2D/ Razão (R)</b>	<b>10 × 10</b>	<b>16 × 16</b>	<b>20 × 20</b>	<b>25 × 25</b>	<b>32 × 32</b>
2	00:01:09	00:03:12	00:07:36	00:16:57	00:55:06
4	00:00:38	00:01:52	00:03:11	00:05:32	00:15:13
6	00:00:26	00:01:56	00:01:51	00:03:13	00:08:46
8	00:00:15	00:01:31	-	00:02:47	00:05:36



**Figura 3.6.** Análise das diferentes malhas 3D de elementos finitos submetidas a tracção uniaxial: (a) Evolução da Força com o deslocamento da amarra; (b) Evolução do erro relativo da força em função do deslocamento; (c) Erro relativo na força máxima em função da discretização 2D do tamanho de elemento na espessura; (d) Evolução da tensão real em função da deformação real; (e) Evolução da triaxialidade em função do deslocamento; (f) Evolução do parâmetro de Lode em função do deslocamento.

Os tempos de cálculo para cada umas das simulações à tração são sumariados na Tabela 3.6, em função da razão  $R$ . O tempo de cálculo para a malha  $32 \times 32$  e 16 camadas

ao longo da espessura é considerado como demasiado elevado para ter em consideração o seu uso neste estudo. De notar que, para os ensaios de compressão o tempo de simulação vai, pelo menos, quadruplicar dado que se tem de considerar todo o provete. Por outro lado, a malha  $25 \times 25$  com 13 camadas ao longo da espessura tem um tempo de simulação cerca de três vezes inferior e apresenta distribuições de força-deslocamento, parâmetros de Lode e triaxialidade muito similares às distribuições verificadas para a malha  $32 \times 32$  com 16 camadas de espessura. Tendo todos estes factores em conta, pode-se concluir que a melhor malha para usar no estudo destes modelos numéricos é a malha  $25 \times 25$  com 13 camadas de espessura.

Neste trabalho optou-se por não realizar o estudo à sensibilidade da malha quando o provete é submetido à compressão, sendo que foi adoptada a mesma malha de  $25 \times 25$  com 13 camadas de espessura.



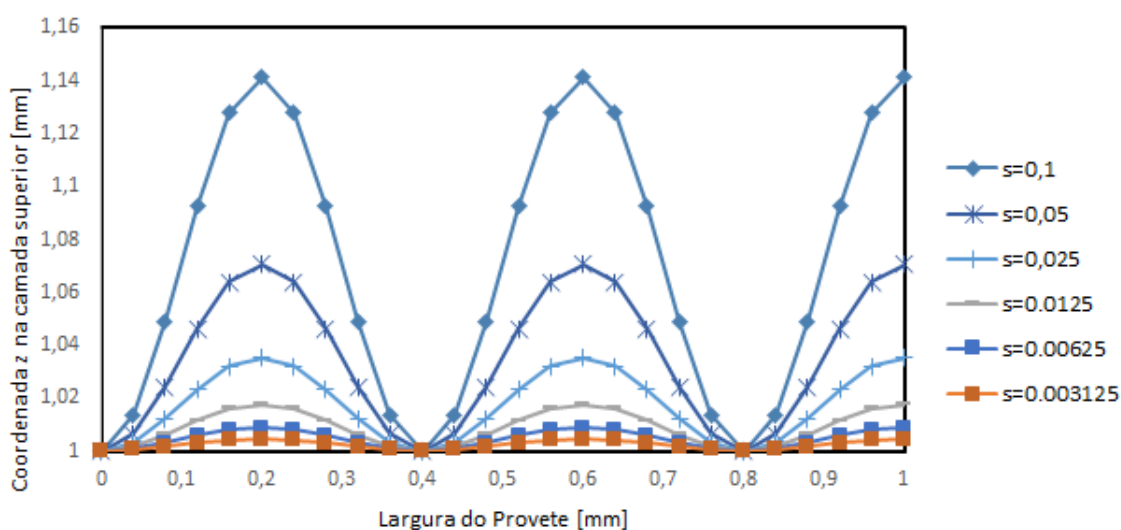
## 4. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos das várias simulações realizadas com diferentes distribuições de espessura no provete. A estratégia adotada passou por considerar como referência a simulação com um provete com uma espessura constante de 1,0 mm. De seguida optou-se por variar cada parâmetro, assumindo que todos os outros permanecem constantes. Numa primeira fase, considerou-se a variação do desvio padrão ( $\sigma$ ) admitindo que a espessura média é igual a 1,0 mm ( $\mu = 1,0$ ). No caso específico da distribuição sinusoidal de espessura assumiu-se um comprimento de onda  $\lambda=0,4$  mm. Os valores considerados para o desvio padrão foram: 0,1; 0,05; 0,025; 0,0125; 0,00625 e 0,003125 mm. A Figura 4.1 mostra a distribuição das coordenadas  $z$  obtidas para os nós da camada superior após a translação explicada na Tabela 2.5, em função do desvio padrão, ao longo da largura do provete. Esta figura apenas é válida na situação em que se considera uma distribuição sinusoidal da espessura, mas permite confirmar que a frequência de variação é idêntica para todos os modelos. Neste contexto, importa mencionar que a discretização do modelo introduz algum erro, sendo que a análise da distribuição obtida ao longo da largura do provete conduz a valores médios de espessura ligeiramente inferiores a 1,0 mm. Esta diferença tende a ser maior para os maiores valores de desvio padrão, sendo que para  $\sigma$  igual a 0,1 mm o valor médio obtido é de 0,995 mm.

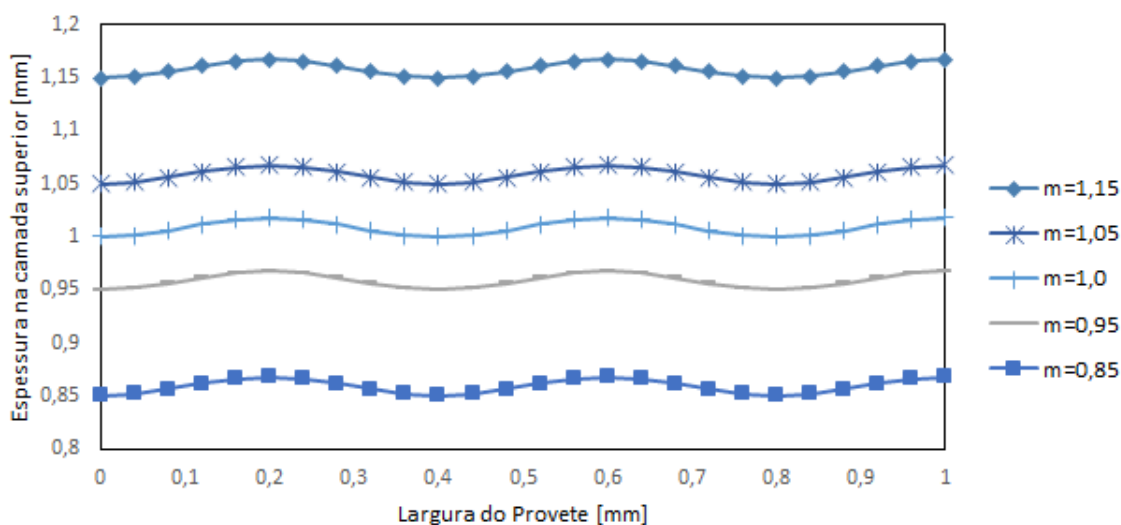
De seguida procedeu-se à análise da influência do valor médio da espessura, assumindo que o desvio padrão  $\sigma$  é igual a 0,0125. Neste estudo, na distribuição sinusoidal de espessura considera-se também que  $\lambda=0,4$ . Os valores de espessura ( $\mu$ ) considerados foram: 1,15, 1,05; 0,95 e 0,85 mm. A Figura 4.2 mostra a distribuição de espessura obtida para a camada superior, em função da espessura média, ao longo da largura do provete. Esta figura permite confirmar que a amplitude e frequência de variação é idêntica para todos os modelos, tal como seria de esperar em função da análise realizada no capítulo 2.2.

No caso específico da distribuição sinusoidal de espessura também se procedeu a uma análise da influência do comprimento de onda,  $\lambda$ . Este estudo foi realizado assumindo uma espessura média de 1,0 mm e um desvio padrão  $\sigma=0,0125$ . No entanto, tal como referido no capítulo 2.2, a variação de  $\lambda$  exige algum cuidado na seleção da malha de elementos finitos. Assim, optou-se por recorrer às malhas 3D previamente construídas (ver Tabela 3.3

sendo que se optou por considerar sempre o maior número de camadas em espessura. Assim, como base na dimensão do elemento finito no plano (ver Tabela 3.3) e impondo que  $\lambda$  deve ser 10 vezes esse valor (ver Figura 2.1), os valores considerados para  $\lambda$  foram: 1,0; 0,625; 0,5; 0,4; 0,3125. A Figura 4.3 mostra a distribuição de espessura obtida para a camada superior, em função da malha considerada e do valor de  $\lambda$ . Esta figura permite observar que para 1,0 apenas existe uma onda, para 0,625 existe um pouco mais de uma e meia onda, para 0,5 são visíveis duas ondas e para 0,3125 existe um pouco mais de 3 ondas na largura do provete.

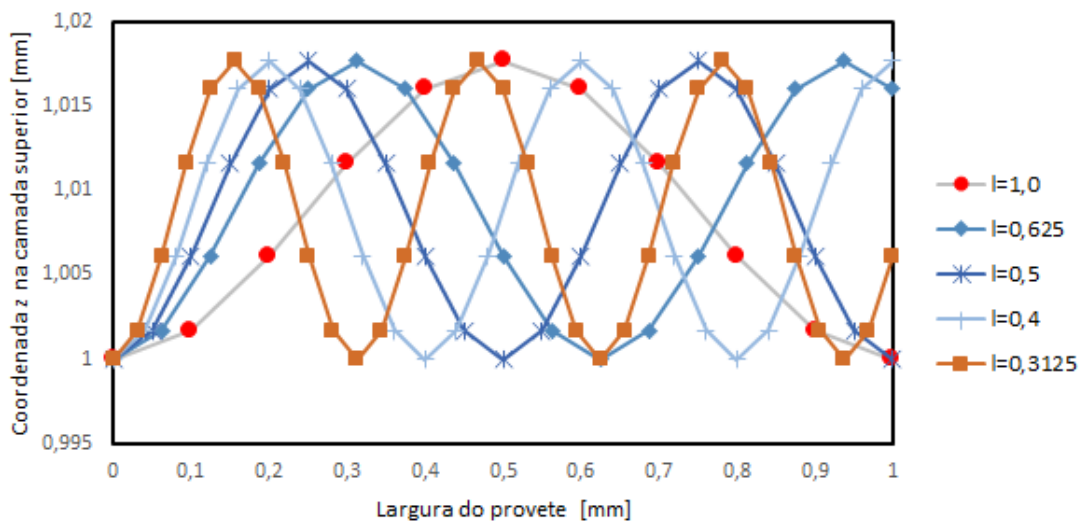


**Figura 4.1.** Representação da distribuição das coordenadas z na camada superior obtida para diferentes valores de desvio padrão.



**Figura 4.2.** Representação da distribuição de espessura na camada superior obtida para diferentes valores de espessura média.





**Figura 4.3.** Representação da distribuição de espessura na camada superior obtida para diferentes comprimentos de onda.

Nas secções seguintes apresentam-se e discutem-se os resultados obtidos para cada uma destas análises. Os resultados apresentados são idênticos aos utilizados no capítulo 3.5, sendo que neste caso o erro relativo é calculado tendo sempre como referência o modelo com espessura constante de 1,0 mm. Assim, a análise é realizada com base nos seguintes parâmetros:

- A evolução da força da amarra em função do seu deslocamento;
- A evolução da tensão equivalente com a deformação plástica equivalente;
- Análise do erro relativo da força em função do deslocamento;
- Análise do erro da deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.

#### 4.1. Influência da variação de espessura: Tracção

Neste capítulo são analisados os resultados obtidos para os diferentes modelos considerados em ensaios à tracção. Estes ensaios foram realizados para avaliar a influência de cada um desses parâmetros associados à irregularidade da espessura nos resultados finais obtidos.

### 4.1.1. Desvio Padrão

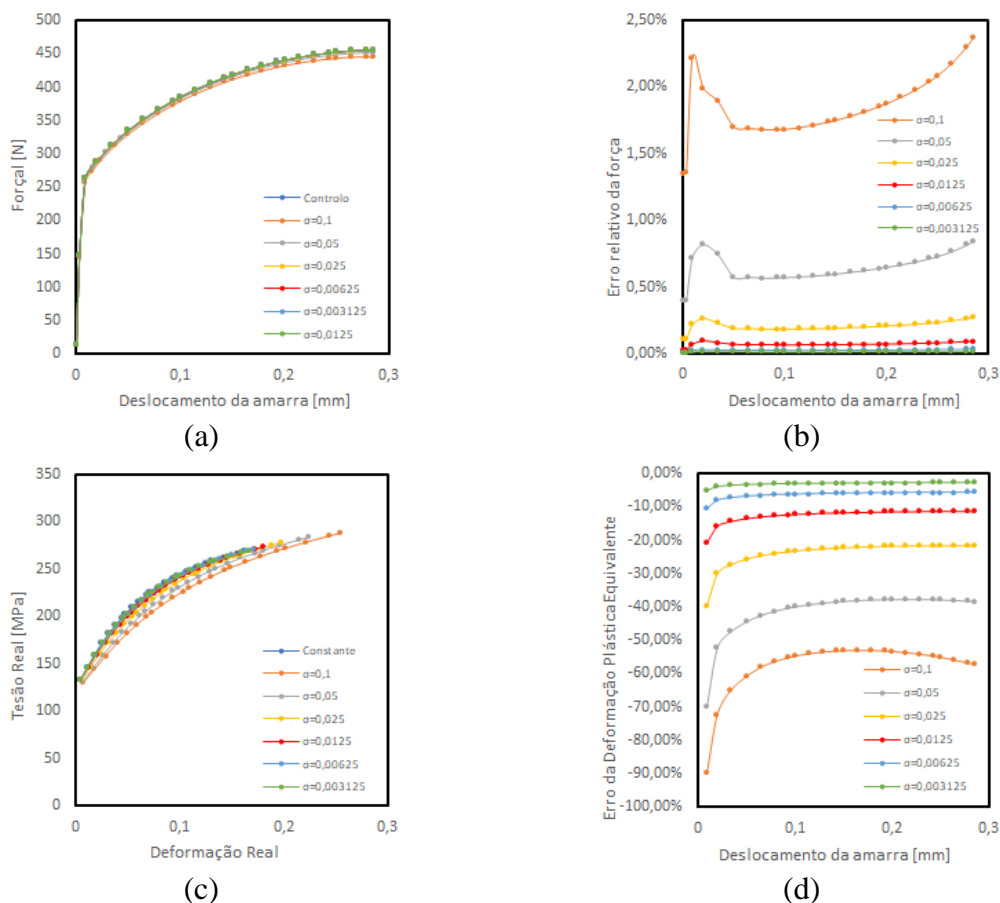
#### 4.1.1.1. EINS

Tal como foi descrito no início deste capítulo, o estudo foi feito tendo em conta sempre como referência o modelo com espessura ( $\mu = 1,0$  mm) não variável, que é denominada de “Constante” ou “Controlo”. Para fazer a interpretação da influência do desvio padrão num provete com variação de espessura irregular foram considerados provetes com  $\mu = 1,0$  mm e  $\sigma$  variável. Neste caso, os valores considerados para  $\sigma$  são: 0,1 mm; 0,05 mm; 0,025 mm; 0,0125 mm; 0,00625 mm e 0,003125 mm. A Figura 4.4(a) mostra que evolução da força é pouco influenciada pelo valor do desvio padrão, apesar de se observar uma diminuição do valor máximo de força antes do ponto de estricção, em particular para  $\sigma = 0,1$  mm. Isto significa que o aumento do desvio padrão conduz a uma diminuição da força máxima (diminuição de cerca de 10 MPa, para  $\sigma = 0,1$  mm). Isto significa que o início da localização da deformação ocorre para um menor valor de deslocamento. A análise do erro relativo na força, apresentado na Figura 4.4(b), permite constatar que para  $\sigma = 0,1$  mm este atinge o valor máximo de aproximadamente 0,025, o que corresponde a 2,5 % do valor da força. Quando o desvio padrão é reduzido para metade,  $\sigma = 0,05$ , existe também uma redução desse erro para cerca de 0,9 % o que indica uma redução de mais de metade da percentagem de erro. Para um desvio padrão de 0,00625 mm, ou inferior, o erro tende a apresentar valores constantes. Da evolução da tensão equivalente em função da deformação plástica equivalente, apresentada na Figura 4.4(c), observa-se que o aumento do desvio padrão conduz a uma diminuição da derivada da curva, uma vez que para o mesmo valor de deslocamento ocorre um aumento da deformação plástica equivalente. Isto pode ser confirmado pela análise da distribuição desta variável para os diferentes modelos, apresentada na Figura A.3. Assim, de acordo com a lei de encruamento adotada (equação (3.2)), a tensão equivalente no final é também superior para valores de desvio padrão maiores. O erro na deformação plástica equivalente em função do deslocamento (ver Figura 4.4(d)) é calculado segundo a fórmula:

$$Erro\ relativo = \frac{\bar{\epsilon}_{espessura\ constante} - \bar{\epsilon}_{espessura\ variável}}{\bar{\epsilon}_{espessura\ constante}} \quad (4.1)$$

E apresenta valores máximos na transição entre o regime elástico e plástico, qualquer que seja o desvio padrão. O facto deste erro ser negativo confirma que são obtidos valores de deformação plástica mais elevados nos modelos com variabilidade na espessura,

i.e. a transição entre estes regimes elástico e plástico ocorre mais cedo. Estas percentagens de erro relativo são muito elevadas devido ao facto de existir acumulação de deformações plásticas equivalentes na zona do ponto de Gauss onde se estão a retirar estes resultados. Para valores de desvio padrão mais baixos, i.e.  $\sigma = 0,025$  mm ou menores, existe uma estabilização do erro da deformação plástica equivalente. Pelo contrário, para  $\sigma = 0,1$  mm o erro torna-se ainda mais negativo para valores de deslocamento superiores a 0,2 mm, o que confirma a antecipação do início da localização (ver também Figura 4.4(b)). A diminuição do valor de erro com a diminuição do desvio padrão é mais uniforme para a deformação equivalente do que para a força.

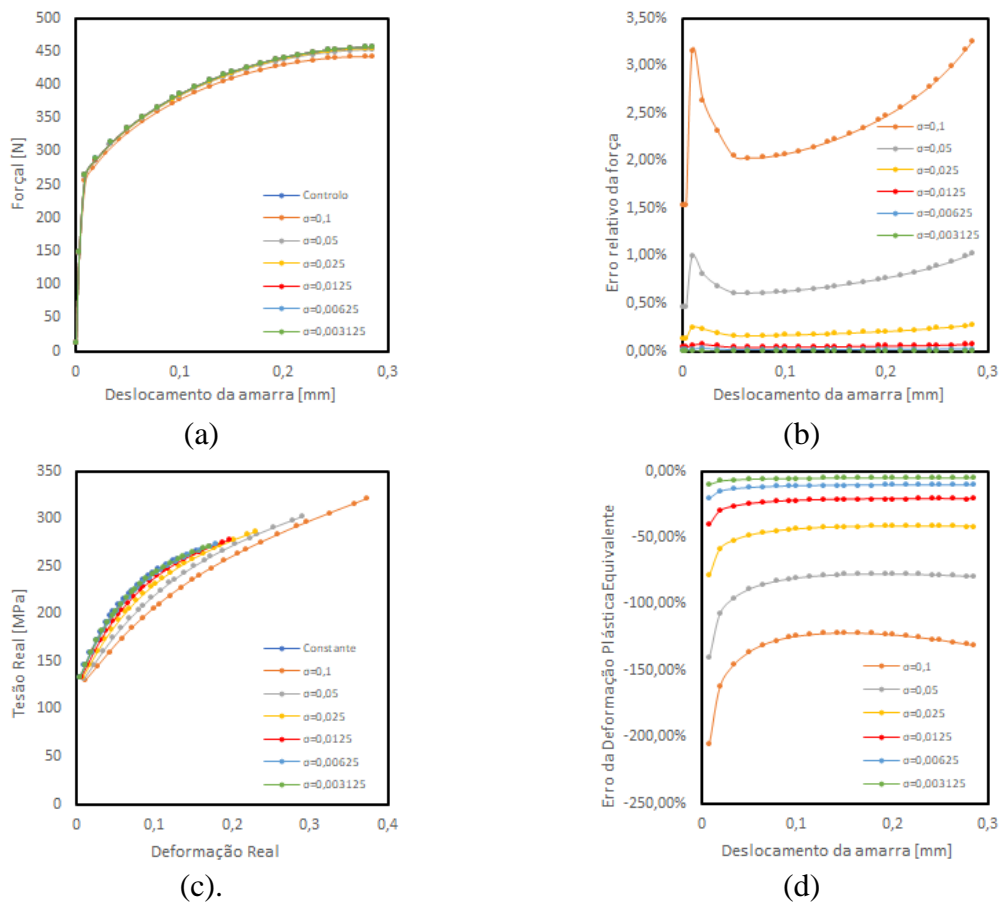


**Figura 4.4.** Análise da influência do desvio padrão nos modelos EINS sujeitos a tracção: (a) evolução da curva força-deslocamento da amarra; (b) Erro relativo na força; (c) evolução da tensão real em função da deformação real; e (d) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.

#### 4.1.1.2. EIS

Neste capítulo discutem-se os resultados obtidos para os modelos numéricos que apresentam uma distribuição sinusoidal de espessura. A evolução da força em função do deslocamento é apresentada na Figura 4.5(a). A comparação com a Figura 4.4(a) permite constatar que o comportamento é idêntico, i.e. o valor da força tende a diminuir com o aumento do desvio padrão, sendo particularmente visível para  $\sigma = 0,1$  mm. A diferença na força máxima observada no modelo de controlo e a obtida para  $\sigma = 0,1$  mm é de cerca de 15 MPa. Isto indica que há um aumento do erro da força, para os modelos com distribuição sinusoidal, tal como é observado na Figura 4.5(b). Neste caso, o erro relativo atinge valores próximos de 3,5 %. No entanto, a estabilização do erro é semelhante nos dois modelos, verificando-se que para desvios padrão superiores o erro tende a aumentar no final do ensaio, enquanto que para valores de  $\sigma$  iguais ou inferiores a 0,00625 mm o erro tende a ser estável. A tensão equivalente, apresentada na Figura 4.5(c), mostra uma diferença ainda maior, sendo que para  $\sigma=0,1$  mm ultrapassa os 300 MPa. Este valor está associado a uma deformação plástica equivalente próxima de 40% (4.1), sendo que para o modelo com uma distribuição de espessura aleatória não ultrapassa os 30% (ver Figura 4.4(c)). Ao analisar o erro relativo na deformação plástica, apresentado na Figura 4.5(d), observa-se que este apresenta uma evolução muito semelhante nos dois modelos, mas com valores absolutos superiores ao dobro dos valores obtidos em Figura 4.4(d).

A análise da distribuição da deformação plástica equivalente no final do ensaio, apresentada na Figura A.4 mostra que esta atinge os valores máximos nas zonas de menor espessura (ver também Figura 4.1). Assim, o facto de a área transversal apresentar zonas de menor espessura conduz a uma localização da deformação que não consegue ser compensada pelas zonas de maior espessura. Isto conduz à diminuição da força máxima e conseqüente antecipação da localização da deformação, em particular quando o centro do provete apresenta uma zona de menor espessura, como foi imposto nos modelos sinusoidais.



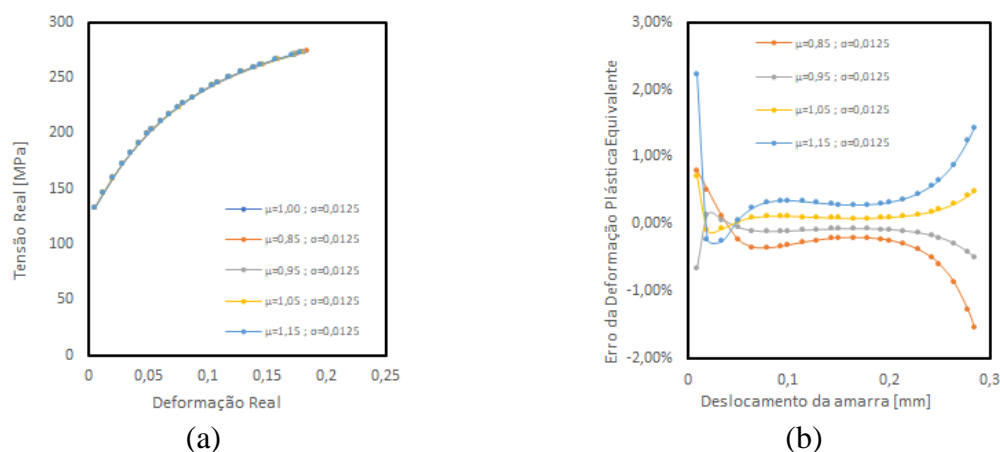
**Figura 4.5.** Análise da influência do desvio padrão nos modelos EIS sujeitos a tracção: (a) evolução da curva força-deslocamento da amarra; (b) Erro relativo na força; (c) evolução da tensão real em função da deformação real; e (d) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.

## 4.1.2. Espessura Média

### 4.1.2.1. EINS

Nesta secção analisa-se a influência da espessura média do provete, admitindo que  $\sigma=0,0125$  mm e  $\lambda=0,4$  mm. Apesar de não se mostrar aqui, a alteração da espessura média tem um grande impacto na força, uma vez que a área da zona útil sofre uma forte alteração (ver capítulo 1.2). Assim, o valor absoluto do erro relativo na força é de 0.15 para  $\mu$  igual a 1.15 e 0.85 mm e de 0.05 para  $\mu$  igual a 1.05 e 0.95 mm. Isto é o erro é proporcional à variação de espessura inicial, como seria expectável da equação (1.6). O erro relativo na força é negativo para valores de espessura menores que 1.0 mm e positivo para valores maiores. A Figura 4.6 (a) apresenta a evolução da tensão com a deformação, sendo possível observar que o efeito da variação da espessura média no encruamento é marginal. De facto, o valor absoluto do erro relativo na deformação plástica é inferior a 3 % (ver Figura 4.6 (b)),

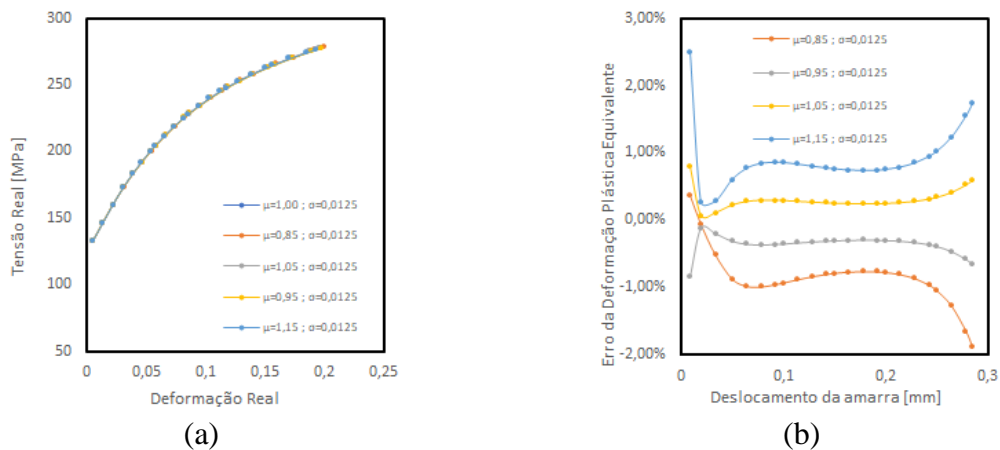
sendo globalmente comparável ao obtido considerando  $\mu=1,0$  mm,  $\sigma=0,0125$  mm e  $\lambda=0,4$  mm (ver Figura 4.4 (d)). A distribuição da deformação plástica equivalente no final do ensaio é apresentada na Figura A.5, sendo possível observar que todos os modelos apresentam distribuições idênticas.



**Figura 4.6.** Análise da influência da espessura média nos modelos EINS sujeitos a tracção: (a) evolução da tensão real em função da deformação real; e (b) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.

#### 4.1.2.2. EIS

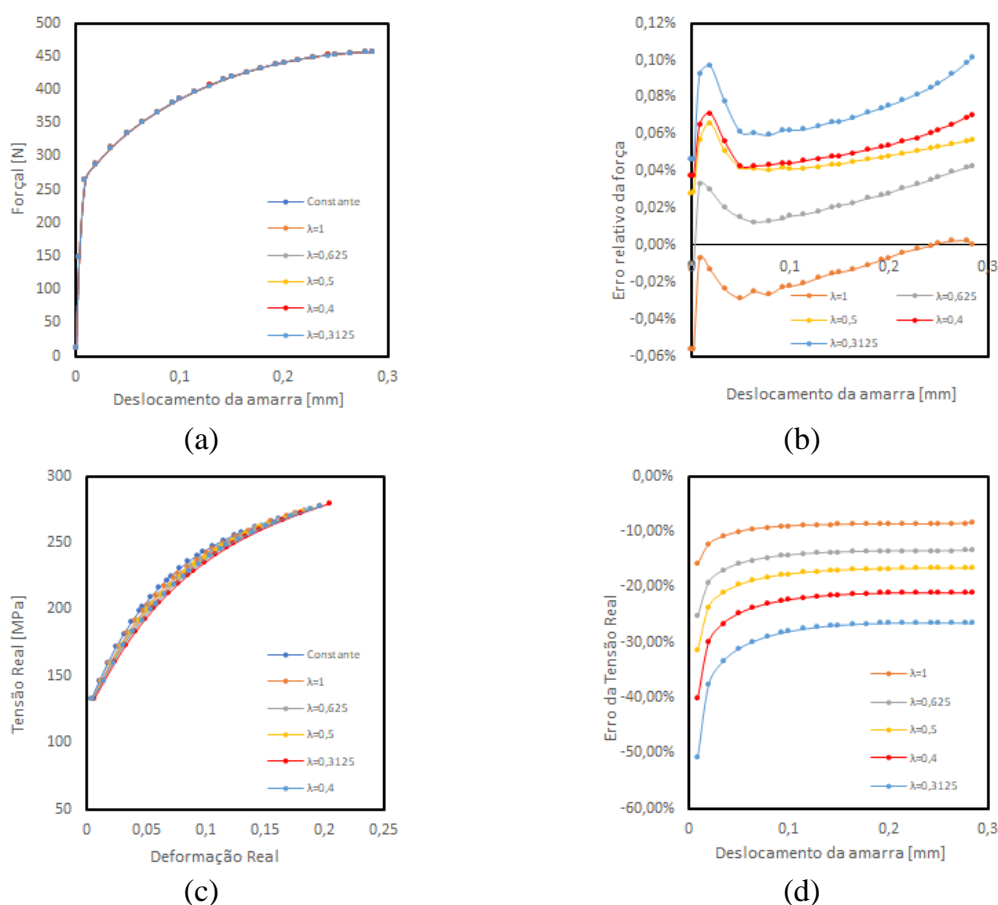
Nesta secção analisa-se a influência da espessura média do provete, admitindo que  $\sigma=0,0125$  mm e  $\lambda=0,4$  mm e uma distribuição sinusoidal de espessura. Também neste caso opta-se por não mostrar a curva de evolução de força nem de erro relativo na força. No entanto, o valor absoluto do erro relativo na força é igual ao obtido para a distribuição aleatória de espessura, i.e. o erro é proporcional à variação de espessura inicial. O erro relativo na força é negativo para valores de espessura menores que 1.0 mm e positivo para valores maiores. Também neste caso o impacto da espessura média na evolução da tensão com a deformação é marginal, como se mostra na Figura 4.7(a). O valor absoluto do erro relativo na deformação plástica permanece inferior a 3 % (ver Figura 4.7(b)), sendo que apresenta valores médios ligeiramente superiores aos observados para a distribuição aleatória (ver Figura 4.6(b)). A semelhança na distribuição da deformação plástica equivalente no final do ensaio pode ser observada na Figura A.6.



**Figura 4.7.** Análise da influência da espessura média nos modelos EIS sujeitos a tracção: (a) evolução da tensão real em função da deformação real; e (b) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.

#### 4.1.3. Comprimento de Onda

Nesta secção analisam-se os resultados obtidos assumindo uma espessura média de 1,0 mm, um desvio padrão  $\sigma=0,0125$  mm e diferentes valores de comprimento de onda,  $\lambda$  [mm]. A Figura 4.8(a) mostra que o impacto da variação de  $\lambda$  na evolução da força com o deslocamento da amarra é marginal. De facto, o erro na força atinge valores máximos inferiores a 0,12 %, como se mostra na Figura 4.8(b). Este tende a apresentar valores mais elevados para maiores frequências de variação de espessura, i.e. menores valores de  $\lambda$ . No entanto, o impacto na curva de tensão-deformação real é visível, como se mostra na Figura 4.8(c). Isto deve-se ao facto de para o mesmo valor de tensão sempre previstos maiores valores de deformação, como se pode observar pelo valor negativo do erro na deformação plástica equivalente, apresentado na Figura 4.8(c). O valor absoluto deste erro é tanto maior quanto menor é o comprimento de onda considerado. Este efeito também pode ser observado na Figura A.7.



**Figura 4.8.** Análise da influência do comprimento de onda nos modelos EIS sujeitos a tracção: (a) evolução da curva força-deslocamento da amarra; (b) Erro relativo na força; (c) evolução da tensão real em função da deformação real; e (d) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.

## 4.2. Influência da variação de espessura: Compressão

Nesta secção são analisados os resultados obtidos para os diferentes modelos considerados em ensaios à compressão. Estes ensaios foram realizados para avaliar a influência de cada um desses parâmetros associados à irregularidade da espessura nos resultados finais obtidos.

### 4.2.1. Desvio Padrão

#### 4.2.1.1. EINS

Nesta secção é feita uma análise semelhante à que é feita no capítulo 4.1.1.1 mas para os ensaios à compressão. A evolução da força em função do deslocamento é apresentada na Figura 4.9(a) onde se observa que todos os modelos com variação de espessura



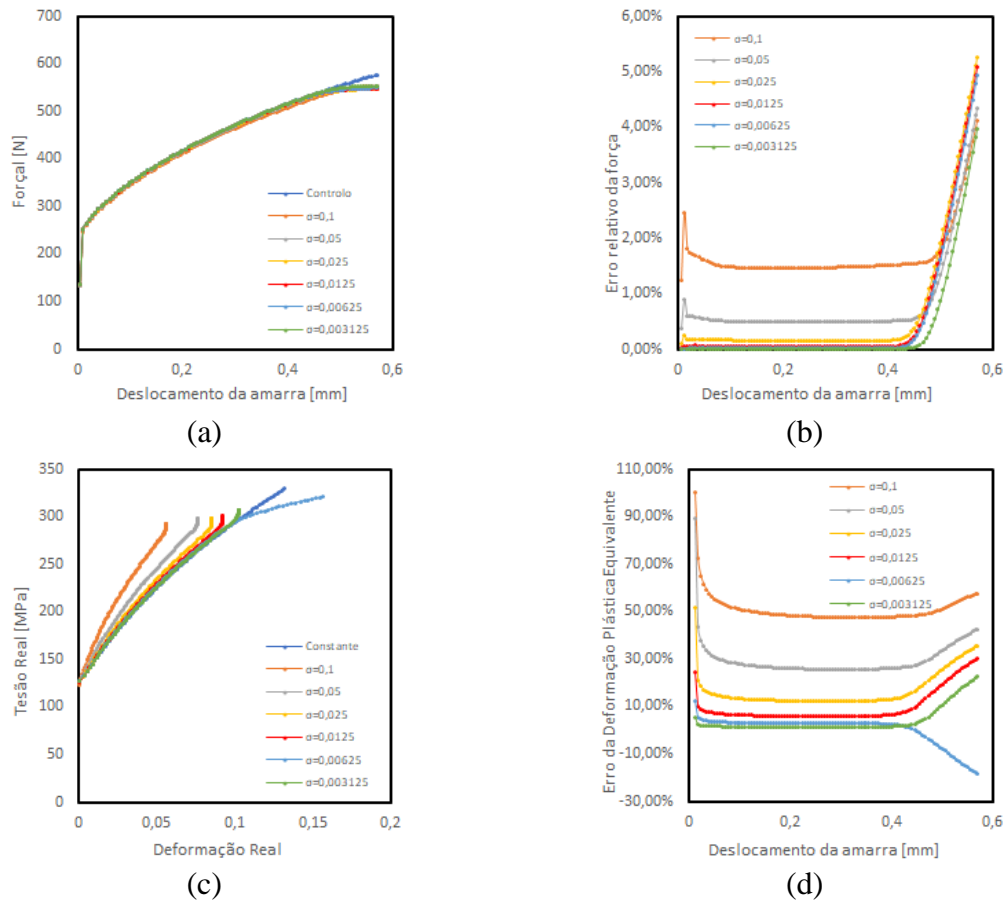
apresentam uma redução do valor da força, seguida de uma estabilização. A Figura 4.9(b) apresenta a evolução no erro relativo da força, sendo possível observar que este apresenta um valor relativamente estável durante o ensaio, até ao instante em que ocorre um forte aumento.

O deslocamento máximo considerado neste estudo foi de 0,57 mm (capítulo 3.1). Para o provete com uma espessura constante a força aumenta até ao final do ensaio apesar de o processo de instabilidade se iniciar para um deslocamento próximo de 0,53 mm. Assim, os resultados mostram que a introdução da variabilidade na distribuição da espessura conduz à redução do valor do deslocamento para o qual o processo de flambagem se inicia, qualquer que seja o valor do desvio padrão. O valor do deslocamento para o qual ocorre um elevado aumento do erro da força é variável consoante o desvio padrão considerado. Para  $\sigma = 0,1$  mm o aumento brusco do erro da força acontece apenas para um deslocamento próximo de 0,47 mm, enquanto para  $\sigma = 0,05$  mm, este aumento abrupto do erro ocorre para um deslocamento menor, próximo de 0,43 mm e para valores de desvio padrão ainda menores, i.e.  $\sigma = 0,0125$  mm este aumento do erro da força ocorre para um valor de 0,41 mm de deslocamento da amarra. Ou seja, globalmente os resultados indicam que o aumento do desvio padrão tende a retardar o início da instabilidade. A comparação do erro relativo da força à compressão (ver Figura 4.9(b)) com os obtidos à tracção (ver Figura 4.4(a)) mostra que estes apresentam valores semelhantes até ao ponto da ocorrência do início de flambagem. No entanto, a instabilidade de flambagem apresenta um comportamento mais imprevisível.

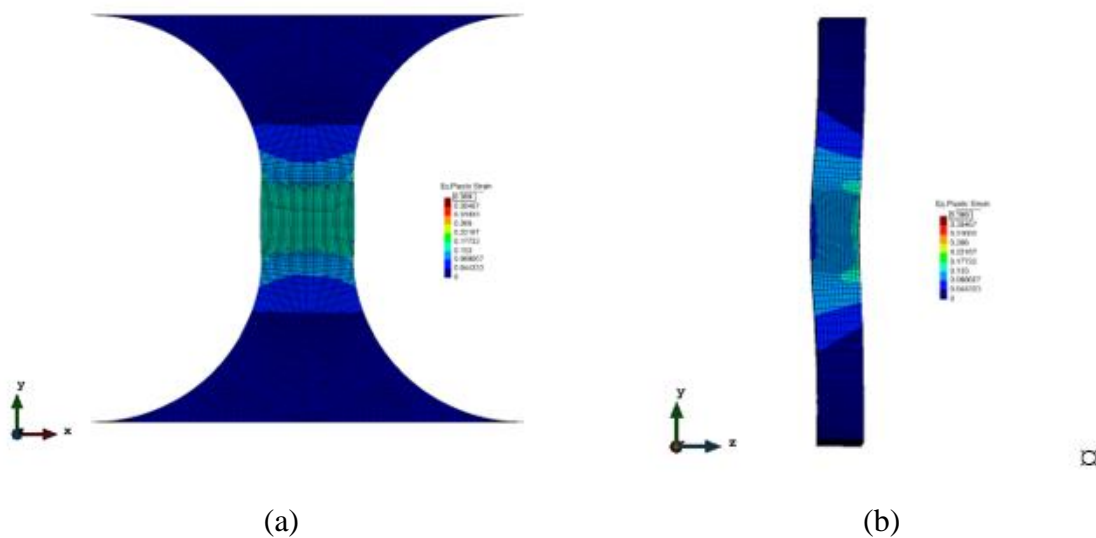
A análise da evolução da tensão equivalente em função da deformação real é apresentada na Figura 4.9(c). Neste caso, observa-se um forte aumento da tensão associada à estabilização de deformação para todos os modelos, excepto  $\sigma = 0,00625$  mm que apresenta uma diminuição do valor da tensão e um aumento da deformação. Para compreender a diferença de comportamento é necessário observar o que acontece a partir do instante em que esta instabilidade se inicia. A Figura 4.10 apresenta a distribuição da deformação plástica equivalente no final do ensaio para o modelo com  $\sigma = 0,00625$  mm. Neste caso, é possível observar que a encurvadura do provete ocorre de tal forma que a zona do provete com menor coordenada  $Oz$  está sujeita à tracção e a zona com maior coordenada  $Oz$  está submetida à compressão. Os resultados apresentados na evolução da tensão com a deformação baseiam-se sempre na análise do ponto de Gauss que apresenta a maior

coordenada  $Oz$ . Então, para o modelo com  $\sigma = 0,00625$  mm, o ponto usado na obtenção dos resultados situa-se na zona onde a flambagem provoca tensões de compressão, que se adicionam à componente de compressão provocada pelas condições do ensaio. Isto significa que o ponto material naquela zona continua a deformar, como se pode observar na Figura 4.9(c) apesar que a força permanecer relativamente estável. Para os restantes modelos com diferentes valores de desvio padrão, a flambagem ocorreu na direcção oposta, o que induz uma tensão de tração no ponto material, o que reduz a deformação do ponto material. Assim, o aumento da tensão observado na Figura 4.9(c) é fictício, uma vez que o ponto material está no regime elástico. Esta análise mostra que a superfície analisada pode influenciar os resultados obtidos no ensaio de compressão.

A análise da Figura 4.9(c) mostra também que, apesar do valor da tensão equivalente máxima ser semelhante para todos os diferentes desvios padrão (um pouco menos de 300 MPa), existe uma grande diferença nos valores de deformação máxima atingida. Esta variação no erro relativo da deformação é bastante evidente na Figura 4.9(d), que mostra que o aumento do desvio padrão conduz a uma diminuição da deformação máxima atingida. Por exemplo, para  $\sigma = 0,1$  mm a deformação máxima é próxima de 0,055 (erro médio relativo de 60 %) enquanto para  $\sigma = 0,05$  mm a deformação máxima é de cerca de 0,075 (erro médio relativo de aproximadamente 40 %). A redução da deformação conduz um aumento da derivada da curva, sendo que se observa um encruamento maior do que o expectável.



**Figura 4.9.** Análise da influência do desvio padrão nos modelos EINS sujeitos a compressão: (a) evolução da curva força-deslocamento da amarra; (b) Erro relativo na força; (c) evolução da tensão real em função da deformação real; e (d) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.

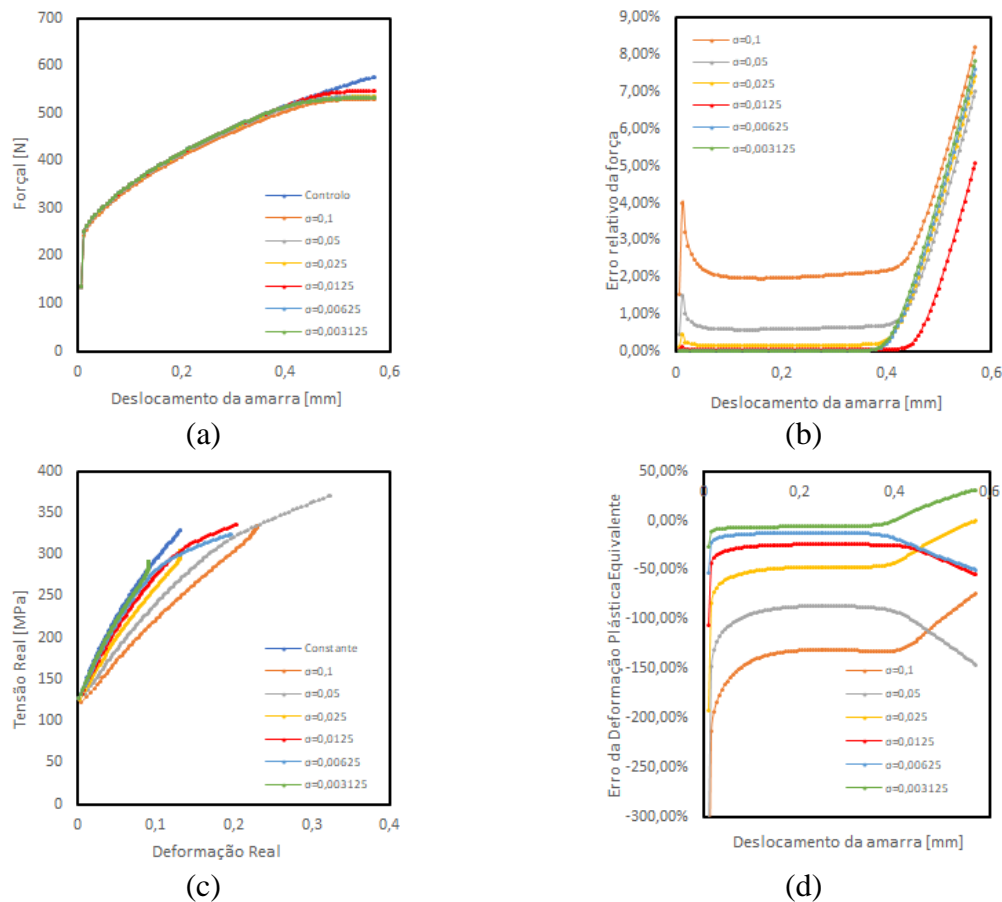


**Figura 4.10.** Distribuição da deformação plástica equivalente para um desvio padrão de 0,00625: (a) Vista no plano XY; (b) Vista no plano ZY.

#### 4.2.1.2. EIS

Nesta secção discutem-se os resultados obtidos para os modelos numéricos que apresentam uma distribuição sinusoidal de espessura. A evolução da força em função do deslocamento é apresentada na Figura 4.11(a). A comparação com a Figura 4.9(a) permite constatar que o comportamento é idêntico, sendo que para todos os modelos se observa a ocorrência da instabilidade para um menor valor de deslocamento da amarra do que para o modelo com espessura constante. Tal como para o caso de tração, a imposição de uma variação de espessura sinusoidal conduz a um ligeiro aumento do valor do erro relativo na força, para o mesmo valor de desvio padrão (ver Figura 4.11(b)).

A Figura 4.11(c) apresenta a evolução da tensão com a deformação, sendo que neste caso se observa que apenas para o menor desvio padrão ocorre um comportamento idêntico ao observado para os modelos com distribuição aleatória da espessura. De facto, para todos os outros casos, observa-se uma deformação plástica da zona central do provete maior do que a prevista para o modelo com espessura constante, o que obrigou à alteração da escala de representação dos resultados. Estes resultados estão associados ao facto de a distribuição sinusoidal impor na zona central do provete uma zona de menor espessura enquanto que, na distribuição aleatória, esta redução não é tão evidente. A análise da distribuição da deformação plástica equivalente no final do ensaio, apresentada na Figura A.9, permite observar este resultado. No entanto, é necessário ter algum cuidado uma vez que neste caso os modelos flambam em diferentes direcções. Esta conclusão pode também ser retirado da Figura 4.11(d), uma vez que após a estricção os modelos com  $\sigma$  igual a 0,1, 0,025 e 0,003125 mm apresentam um aumento do erro relativo da deformação plástica. Este aumento surge associado ao facto de a zona de análise parar de deformar, i.e. neste caso o material com maior coordenada  $Oz$  está à tracção. Os restantes modelos apresentam essa zona à compressão, o que justifica o aumento da deformação até ao final do ensaio. A comparação destes resultados com os obtidos com a distribuição aleatória mostra que a curva tensão-deformação é sensível ao valor do desvio padrão, mas também à forma como a espessura se distribui ao longo da zona útil.



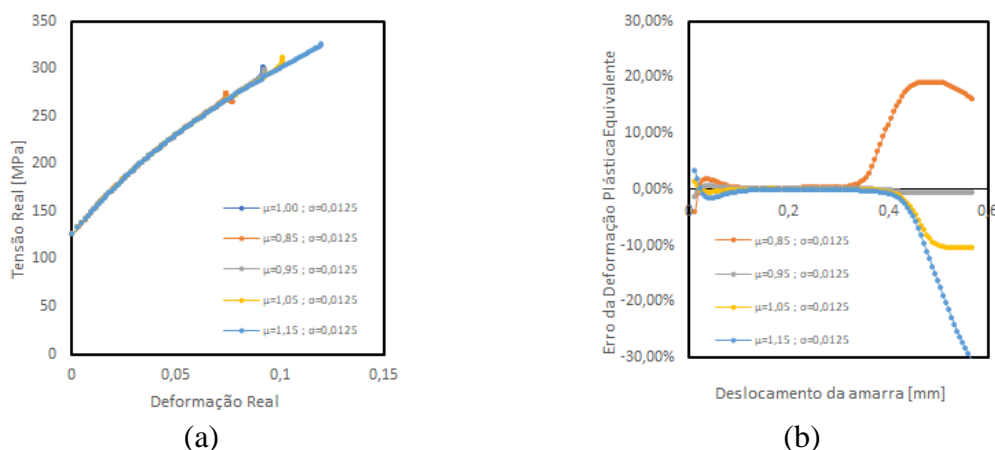
**Figura 4.11.** Análise da influência do desvio padrão nos modelos EIS sujeitos a compressão: (a) evolução da curva força-deslocamento da amarra; (b) Erro relativo na força; (c) evolução da tensão real em função da deformação real; e (d) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.

## 4.2.2. Espessura média

### 4.2.2.1. EINS

Nesta secção analisa-se a influência da espessura média do provete, admitindo que  $\sigma = 0,0125$  mm, para os modelos sujeitos à compressão. Em relação à evolução da força com o deslocamento, observa-se que o valor absoluto do erro relativo na força é proporcional à variação de espessura inicial, até à ocorrência da instabilidade. No entanto, a espessura média tem um forte impacto no instante para o qual ocorre a instabilidade. A Figura 4.12(a) permite observar este efeito, uma vez que a deformação tende a estabilizar em todos os modelos analisados. No entanto, o provete com menor espessura média inicial apresenta uma variação no valor da tensão, que parece estar associado ao facto de apresentar encurvadura na direcção contrária aos outros, de acordo com a Figura 4.12(b) e a Figura A.10. Curiosamente, os provetes com variações de espessura inicial média em relação à referência

de 5% apresentam instantes idênticos para o início da flambagem. A análise da Figura 4.12(b) mostra que o valor do erro relativo na deformação plástica aumenta fortemente quando ocorre o início da instabilidade. No entanto, a evolução do encruamento não sofre alterações, como é expectável da equação (1.6).

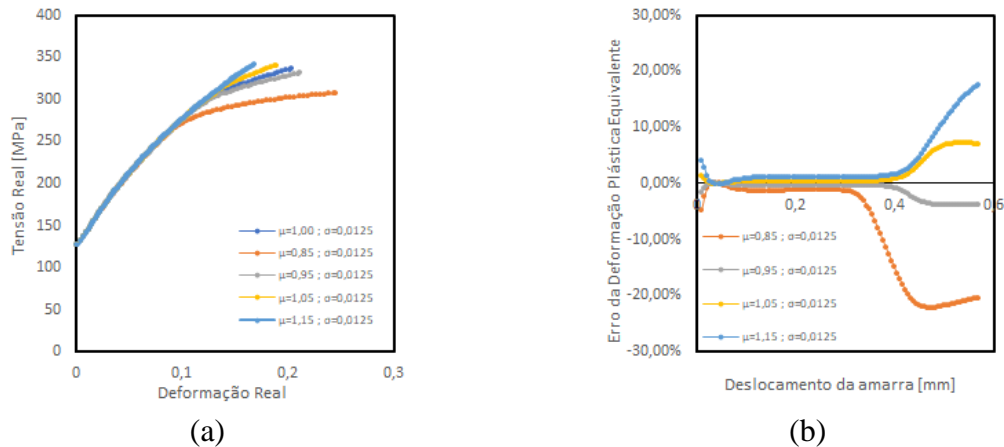


**Figura 4.12.** Análise da influência da espessura média nos modelos EINS sujeitos a compressão: (a) evolução da tensão real em função da deformação real; e (b) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.

#### 4.2.2.2. EIS

Nesta secção analisa-se a influência da espessura média do provete, admitindo que  $\sigma=0,0125$  mm e  $\lambda=0,4$  mm, para os modelos sujeitos à compressão com uma distribuição sinusoidal de espessura. Em relação à evolução da força com o deslocamento, observa-se que o valor absoluto do erro relativo na força é proporcional à variação de espessura inicial, até à ocorrência da instabilidade. Também neste caso se observa que a espessura média tem um forte impacto no instante para o qual ocorre a instabilidade (ver Figura 4.13(a)). Neste caso, o instante para o qual ocorre a instabilidade tende a aumentar com o aumento da espessura média, sendo que a tensão é sempre inferior à prevista para a espessura constante (ver Figura 4.13(a)) para os provetes com menor espessura inicial e maior para os outros. Neste caso todos os modelos encurvam de tal forma que a zona em análise está sujeita à compressão. Esta análise deve ser realizada com o auxílio da Figura A.11. Neste caso a Figura 4.13(b) pode induzir em erro uma vez que se observam menores valores de deformação do que no provete com espessura constante no início da instabilidade, para os provetes com espessura superior a 1,0 mm. De notar que neste caso a zona central do provete apresenta sempre um valor de espessura igual ao valor médio, pelo que o efeito observado

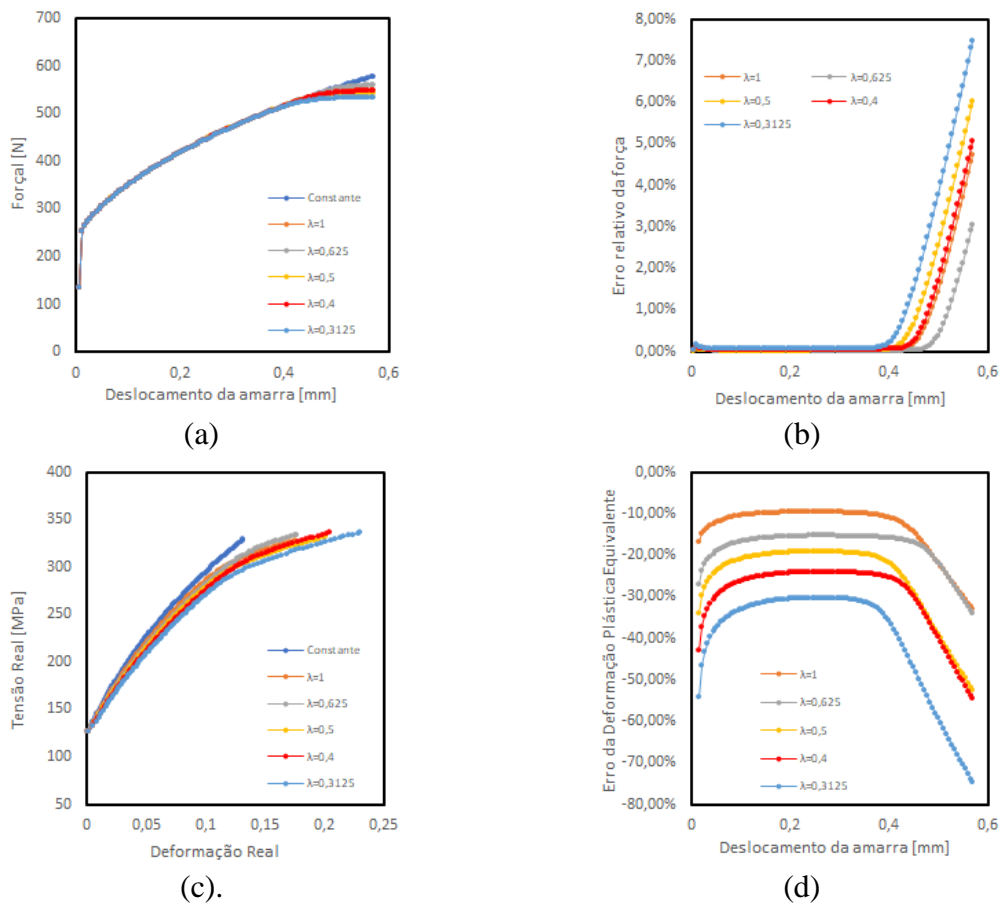
resulta da alteração de espessura imposta nesta zona. Assim, o encruamento é sobrestimado para maiores valores de espessura média superiores e é subestimado para valores inferiores de espessura média. Isto desde que a análise seja realizada na superfície sujeita à compressão.



**Figura 4.13.** Análise da influência da espessura média nos modelos EIS sujeitos a compressão: (a) evolução da tensão real em função da deformação real; e (b) erro na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.

### 4.2.3. Comprimento de onda

Nesta secção analisam-se os resultados obtidos assumindo uma espessura média de 1,0 mm, um desvio padrão  $\sigma=0.0125$  mm e diferentes valores de comprimento de onda,  $\lambda$ . A Figura 4.14(a) mostra que o impacto da variação de  $\lambda$  na evolução da força com o deslocamento da amarra é marginal até ao instante em que ocorre a instabilidade. De facto, mesmo após a instabilidade, o erro máximo da força atinge valores máximos que são inferiores a 8 %, como se mostra na Figura 4.14(b). O deslocamento da amarra para o qual ocorre a instabilidade não apresenta uma tendência clara, mas este resultado é muito sensível à alteração da discretização no plano. Também neste caso, o impacto na curva de tensão-deformação real é visível, como se mostra na Figura 4.14(c). O motivo é idêntico ao observado nos modelos sujeitos à tracção, i.e. para o mesmo valor de tensão são sempre previstos maiores valores de deformação, como se pode observar pelo valor negativo do erro na deformação plástica equivalente, apresentado na Figura 4.14 (c). O valor absoluto deste erro é tanto maior quanto menor é o comprimento de onda considerado. Este efeito também pode ser observado na Figura A.12, onde também é possível observar que todos os modelos flambam para o mesmo lado.



**Figura 4.14.** Análise da influência do comprimento de onda nos modelos EIS sujeitos a compressão: (a) evolução da curva força-deslocamento da amarra; (b) Erro relativo na força; (c) evolução da tensão real em função da deformação real; e (d) erro relativo na deformação plástica equivalente em função do deslocamento da amarra.



## 5. CONCLUSÕES

A análise dos resultados de simulação permite concluir que a variação da espessura da secção transversal de um provete à escala meso, sujeita a uma solicitação de tracção ou de compressão tem influência nos resultados extraídos deste tipo de ensaios. O facto de a área transversal apresentar zonas de menor espessura conduz a uma localização da deformação que não consegue ser compensada pelas zonas de maior espessura. Assim, para o mesmo valor de espessura média e diferentes desvios padrão observa-se uma diminuição da força máxima e conseqüente antecipação da ocorrência da instabilidade. No caso do ensaio de tracção, a localização da deformação ocorre mais facilmente quando o centro do provete apresenta uma zona de menor espessura, como foi imposto nos modelos sinusoidais. Assim, nestas situações, a evolução do encruamento do material é subestimada com o aumento do valor do desvio padrão. No caso do ensaio de compressão, a análise é mais complexa, porque depende da distribuição da espessura na zona central do provete. Quando esta apresenta uma espessura menor do que a de referência o comportamento é idêntico ao observado na tracção. No entanto, se a zona central apresentar valores médios maiores do que a espessura de referência o encruamento é sobrestimado, uma vez que para o mesmo valor de força esta zona apresenta um menor valor de deformação. Importa ainda realçar, que a evolução da tensão com a deformação real após a ocorrência da instabilidade depende fortemente da superfície em análise. Se esta estiver sujeita à tracção devido à flambagem, a deformação plástica cessa. Pelo contrário, se esta estiver sujeita à compressão devido à flambagem o material continua a deformar, mas a taxa de encruamento reduz. Esta análise mostra que a superfície analisada pode influenciar os resultados obtidos no ensaio de compressão e dificultar a identificação do início da instabilidade com base na curva tensão-deformação.

A espessura média tem um forte impacto no valor da força máxima, mas a influência na evolução da tensão com a deformação real é marginal. Este resultado é válido para a tracção e para a compressão. No entanto, sabendo que a espessura média não influencia a ocorrência da estrição, apresenta um forte impacto na ocorrência da flambagem. De facto, observa-se que esta tende a ocorrer para menores valores de

deslocamento da amarra para espessuras médias menores. Este resultado é o expectável em função das condições do problema.

A influência da frequência de variação da espessura foi estudada com o auxílio da variável do comprimento de onda, válida apenas para a distribuição sinusoidal de espessura. Os resultados mostram que o aumento da frequência de variação conduz a um maior erro na determinação da deformação, o que se traduz em maiores diferenças na evolução do encruamento, mesmo antes da ocorrência da instabilidade. De facto, também a comparação dos resultados obtidos com a distribuição aleatória e a sinusoidal para os mesmos valores de espessura média e desvio padrão mostra que a curva tensão-deformação é sensível ao valor do desvio padrão, mas também à forma como a espessura se distribui ao longo da zona útil.

A distribuição da deformação plástica equivalente nos provetes que apresentam maiores variações na distribuição de espessura é claramente não uniforme na zona útil, mesmo para pequenos valores de deformação plástica. A utilização de uma zona útil de maiores dimensões tende a uniformizar estes valores o que contribui para diminuir o impacto de pequenas variações de deformação na estimativa da tensão real. Assim, este trabalho realça a importância da selecção da dimensão da zona útil em função da variação de espessura observada no material.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdulqader, A., & Rizos, D. C. (2020). Advantages of using digital image correlation techniques in uniaxial compression tests. *Results in Engineering*, 6. <https://doi.org/10.1016/J.RINENG.2020.100109>

Andrade, C. M. J. O. A. (2019). Previsão da fratura dúctil com recurso a modelos de dano desacoplados [Universidade de Coimbra]. In *Previsão da fratura dúctil com recurso a modelos de dano desacoplados*. <https://estudogeral.sib.uc.pt/handle/10316/85995>

Bai, Y. (2008). *Effect of loading history in necking and fracture* [MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY]. <https://www.researchgate.net/publication/38003378>

Biswas, R., & Strawn, R. C. (1998). Tetrahedral and hexahedral mesh adaptation for CFD problems. *Applied Numerical Mathematics*, 26(1–2), 135–151. [https://doi.org/10.1016/S0168-9274\(97\)00092-5](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(97)00092-5)

Cruz, D. J. da. (2019). *Ensaaios mecânicos de tração-compressão em provetes metálicos miniaturizados Desenvolvimento de um equipamento especializado*.

Granta Design. (2018). *CES EduPack*.

Hedström, P., Lindgren, L. E., Almer, J., Lienert, U., Bernier, J., Turner, M., & Odén, M. (2009). Load partitioning and strain-induced martensite formation during tensile loading of a metastable austenitic stainless steel. *Metallurgical and Materials Transactions A: Physical Metallurgy and Materials Science*, 40(5), 1039–1048. <https://doi.org/10.1007/S11661-009-9807-3>

Intel Corporation. (2003). *Intel® Math Kernel Library Vector Statistical Library Notes*.

International Organization for Standardization. (2016). *ISO. 6892-1 -Metallic materials — Tensile testing — Part 1: Method of test at room temperature*.

The Stanford Exploration Project (SEP). (n.d.). *Index of /sep/claudio/Research/Thesis*. Retrieved January 28, 2022, from [http://sep.stanford.edu/sep/claudio/Research/Prst\\_ExpRefl/ShtPSPI/intel/mkl/10.0.3.020/examples/vslf/source/vsrnggaussian.f](http://sep.stanford.edu/sep/claudio/Research/Prst_ExpRefl/ShtPSPI/intel/mkl/10.0.3.020/examples/vslf/source/vsrnggaussian.f)

Xue, L., & Wierzbicki, T. (2009). Ductile fracture characterization of aluminum alloy 2024-T351 using damage plasticity theory. *International Journal of Applied Mechanics*, 1(2), 267–304. <https://doi.org/10.1142/S1758825109000198>

Yastrebov, V. A., Anciaux, G., & Molinari, J. F. (2014). The contact of elastic regular wavy surfaces revisited. *Tribology Letters*, 56(1), 171–183. <https://doi.org/10.1007/S11249-014-0395-Z/TABLES/1>

## ANEXO A

Tabela A.1 Número de nós das malhas 3D geradas para os ensaios à tração.

Designação da malha 2D	10 × 10	16 × 16	20 × 20	25 × 25	32 × 32
Tamanho Elemento na Zona A [mm]	0,1	0,0625	0,05	0,04	0,03125
Razão (R)	Número de nós total gerado para as malhas 3D				
2	1962	5562	10681	18032	35054
4	1308	3090	5826	9016	18558
6	981	2472	3884	6440	12372
8	654	1854	-	5152	10310



## ANEXO B

Neste anexo apresenta-se o código fonte das principais alterações realizadas ao programa Bi2Tri, bem como das alterações realizadas à sub-rotina de exemplo, de modo a construir a sub-rotina MKL\_VSL\_Thick.

---

```

include 'mkl_vs1.f90'
program Bi2Tri_MESH
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C  DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS (...)
INTEGER toption, toption2
real(kind=4) t,sigma, Bthick, Lthick
real(kind=4), ALLOCATABLE:: rthick(:)
C  LEITURA DA MALHA 2D (...)
C  LEITURA DE DADOS PARA A GERAÇÃO DA NOVA MALHA 3D
write(*,*) 'Espesura da malha na direcção Z.'
write(*,*) 'Espessura...'
read (*,*) t
C
write(*,*) 'Espessura constante (0) ou variavel (1)?'
read(*,*) toption
IF (toption.eq.1) THEN
  write(*,*) 'Variavel sigma (0) ou cosseno (1)?'
  read(*,*) toption2
  IF (toption2.eq.0) THEN
    write(*,*) 'Desvio padrao?'
    read(*,*) sigma
    allocate (rthick(nn2d))
    CALL MKL_VSL_Thick (nn2D,t,sigma,rthick)
  ELSE
    write(*,*) 'Desvios padrao?'
    read(*,*) sigma
    write(*,*) 'Valor lamba?'
    read(*,*) Lthick
    PI=2.d0*DACOS(0.d0)
    allocate (rthick(nn2d))
    Bthick=sqrt(2.0)*sigma
    DO I=1, nn2D
      rthick(I)= t + Bthick*DCOS((2*PI*XINIT(1,I))/Lthick+PI)
      *DCOS((2*PI*XINIT(2,I))/Lthick)
    END DO
  END IF
END IF
C  DEFINIÇÃO DAS CAMADAS A GERAR
2 write(*,*) 'Número de camadas a gerar (0 - stop) ...'
read (*,*) nlayers
C  DEFINIÇÃO DA DIMENSÃO DAS VARIÁVEIS DA CONECTIVIDADE DA MALHA 3D (...)
C  DEFINIÇÃO DAS COORDENADAS DA MALHA 3D
DO IL=0,NC
  X3D(1,1+IL*NN2D:NN2D+IL*NN2D)=XINIT(1,1:NN2D)
  X3D(2,1+IL*NN2D:NN2D+IL*NN2D)=XINIT(2,1:NN2D)
  IF (toption.eq.1) THEN

```

---

```

        thick_min=0.0d0
        DO IK=1,NN2D
            IM=IK+IL*NN2D
            IF (IL.eq.0) THEN
                X3D(3,IK+IL*NN2D)=XINIT(3,IK)-(rthick(IK)/2.0d0)
                IF ((X3D(3,IK+IL*NN2D)-thick_min).lt.1d-8) THEN
                    thick_min=X3D(3,IK+IL*NN2D)
                END IF
            ELSE
                X3D(3,IK+IL*NN2D)=X3D(3,IK)+(rthick(IK)/NC)*IL
            END IF
        END DO
        ! translação
        X3D(3,1:NN3D)=X3D(3,1:NN3D)-thick_min
    ELSE
        X3D(3,1+IL*NN2D:NN2D+IL*NN2D)=XINIT(3,1:NN2D)+(T/NC)*IL
    END IF
ENDDO
C   DEFINIÇÃO DA CONECTIVIDADE DA MALHA 3D (...)
C   OPTION TO ROTATED THE MESH (...)
C   ESCRITA DO FICHEIRO COM A MALHA 3D (...)...
END

```

---

```

Subroutine MKL_VSL_Thick (n,a,sigma,r)
    USE MKL_VSL_TYPE
    USE MKL_VSL
    integer(kind=4) i,nn
    integer n
    integer(kind=4) errcode
    real(kind=4) a,sigma
    real(kind=4) r(n)
    integer brng,method,seed
    real(kind=8) tM,tD,tQ,tD2
    real(kind=8) sM,sD
    real(kind=8) sum, sum2
    real(kind=8) s
    real(kind=8) DeltaM,DeltaD
    CHARACTER(40) FNAME,FILE,Text
    TYPE (VSL_STREAM_STATE) :: stream
    nn=10
    brng=VSL_BRNG_MCG31      !A 32-bit multiplicative congruential generator.
    method=0
    CALL RANDOM_SEED (null)
!   ***** Initialize *****
    errcode=vslnewstream( stream, brng, seed )
    call CheckVslError(errcode)
!   ***** Call RNG *****
    errcode=vsrnggaussian( method, stream, n, r, a, sigma)
    call CheckVslError(errcode)
!   ***** Theoretical moments *****
    tM=a
    tD=sigma*sigma
    tQ=720.0*sigma*sigma*sigma*sigma
!   ***** Sample moments *****
    sum=0.0
    sum2=0.0

```

---



---

```

do i=1,n
  sum=sum+r(i)
  sum2=sum2+r(i)*r(i)
end do
sM=sum/n
sD=sum2/n-sM*sM
! ***** Comparison of theoretical and sample moments *****
tD2=tD*tD
s=((tQ-tD2)/n)-(2*(tQ-2*tD2)/(n*n))+((tQ-3*tD2)/(n*n*n))
DeltaM=(tM-sM)/sqrt(tD/n)
DeltaD=(tD-sD)/sqrt(s)
! ***** Printing results *****
print *, "Sample of vsRngGaussian."
print *, "-----"
print *, ""
print *, "Parameters:"
print 11, "    a=", a
print 11, "    sigma=", sigma
print *, ""
print *, "Results (1000):"
print *, "-----"
do i=1,n
  print 10, r(i)
end do
print *, ""
if (DeltaM>3.0 .OR. DeltaD>3.0) then
  print 12, "Error: sample moments (mean=",
&    sM, ", variance=", sD,
&    ") are disagreed with theory (mean=",
&    tM, ", variance=", tD, ")."
  stop 1
else
  print 12, "Sample moments (mean=", sM,
&    ", variance=", sD, ") are agreed with theory (mean=",
&    tM, ", variance=", tD, ")."
end if
errcode=vs1deletestream( stream )
call CheckVs1Error(errcode)
10 format(F7.3)
12 format(A,F5.2,A,F5.2,A,F5.2,A,F5.2,A)
end

```

---

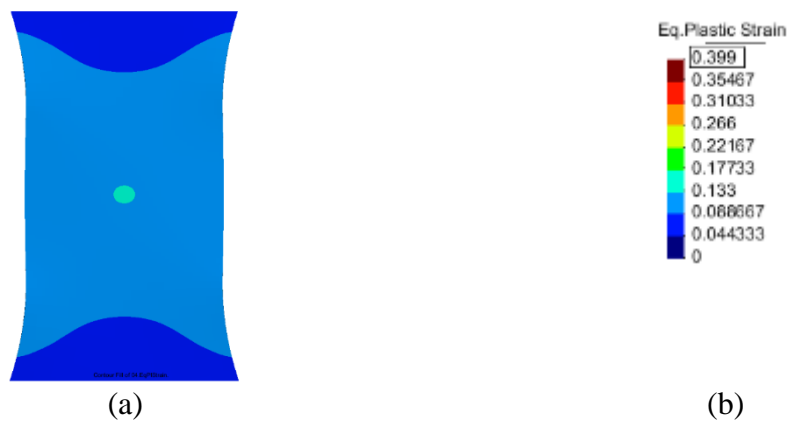


## APÊNDICE A

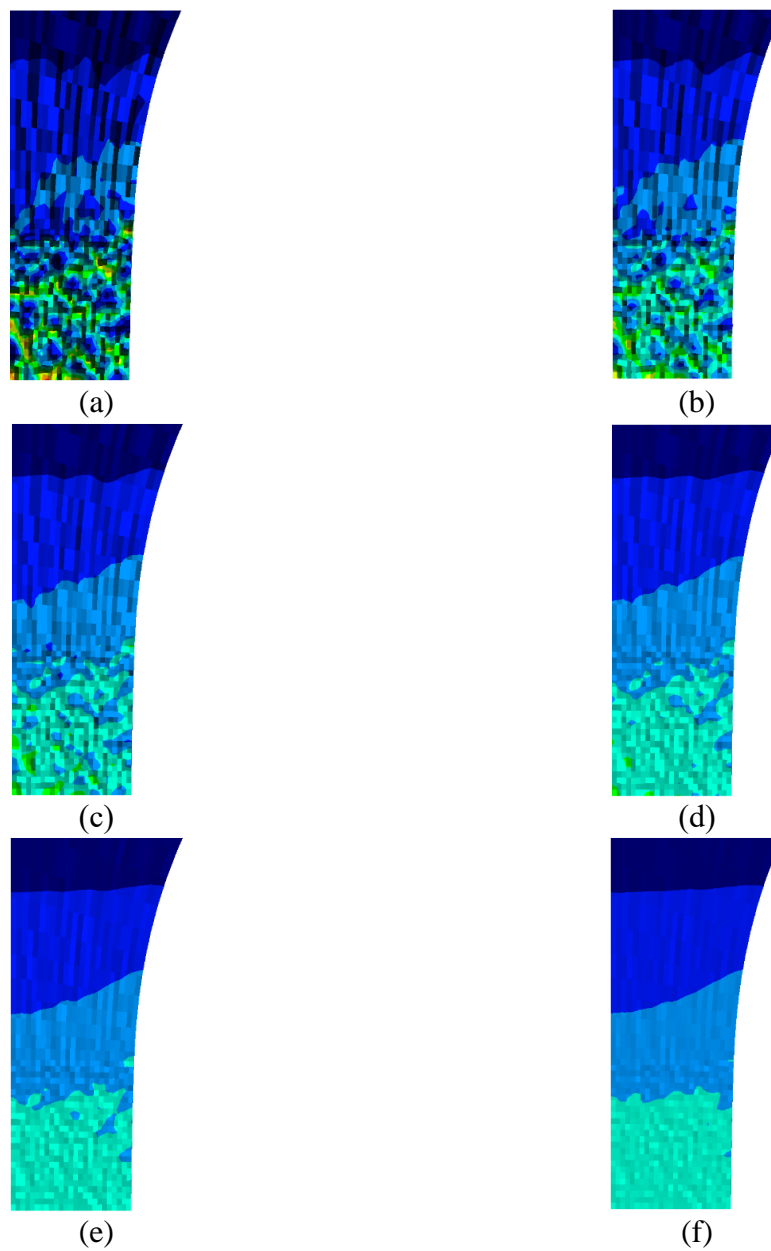
Neste apêndice apresenta-se a distribuição da deformação plástica equivalente na superfície superior do provete (maior coordenada  $Oz$ ), para cada um dos modelos estudados. Para os modelos à tracção representa-se apenas um quarto do modelo, pois foir apenas este que foi utilizado na simulação numérica. Para os modelos à compressão apresenta-se o detalhe da zona central do provete completo. Todas as figuras apresentam a mesma escala, de modo a facilitar a comparação dos resultados.



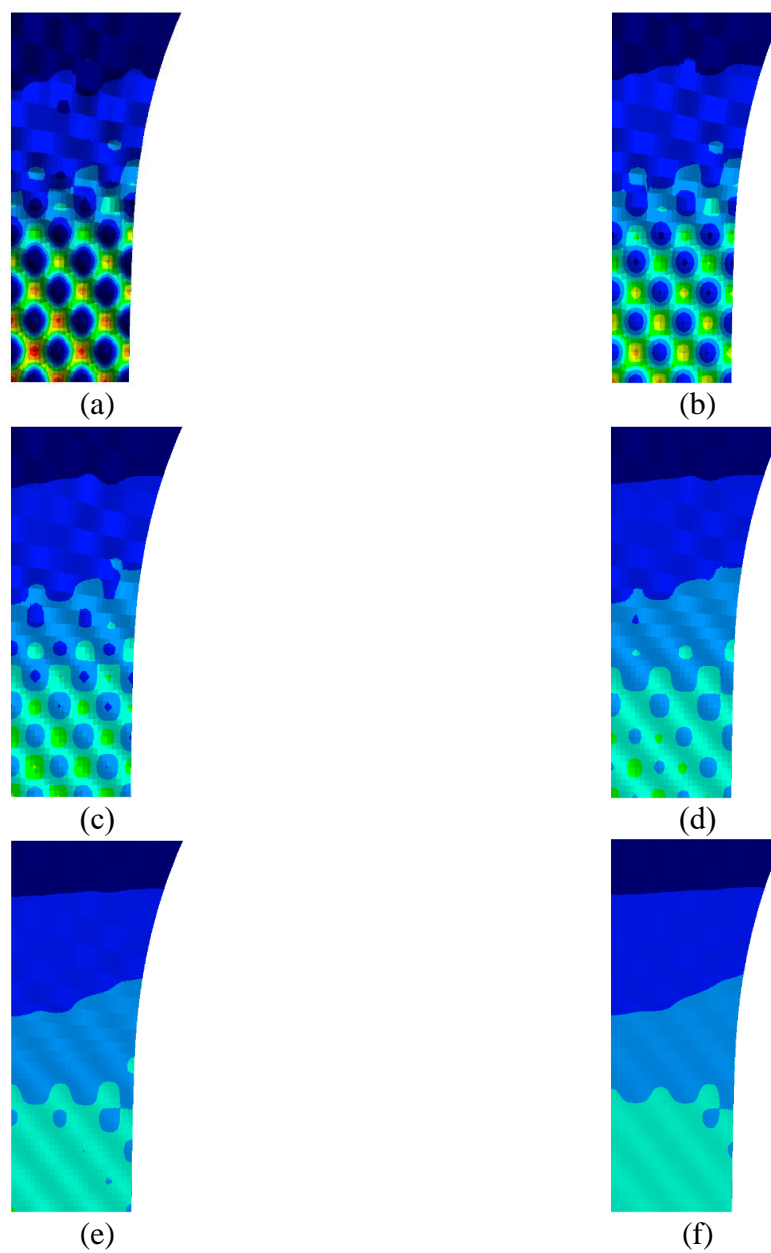
**Figura A.1.** Distribuição da deformação plástica equivalente para o modelo com espessura constante sujeito à tracção.



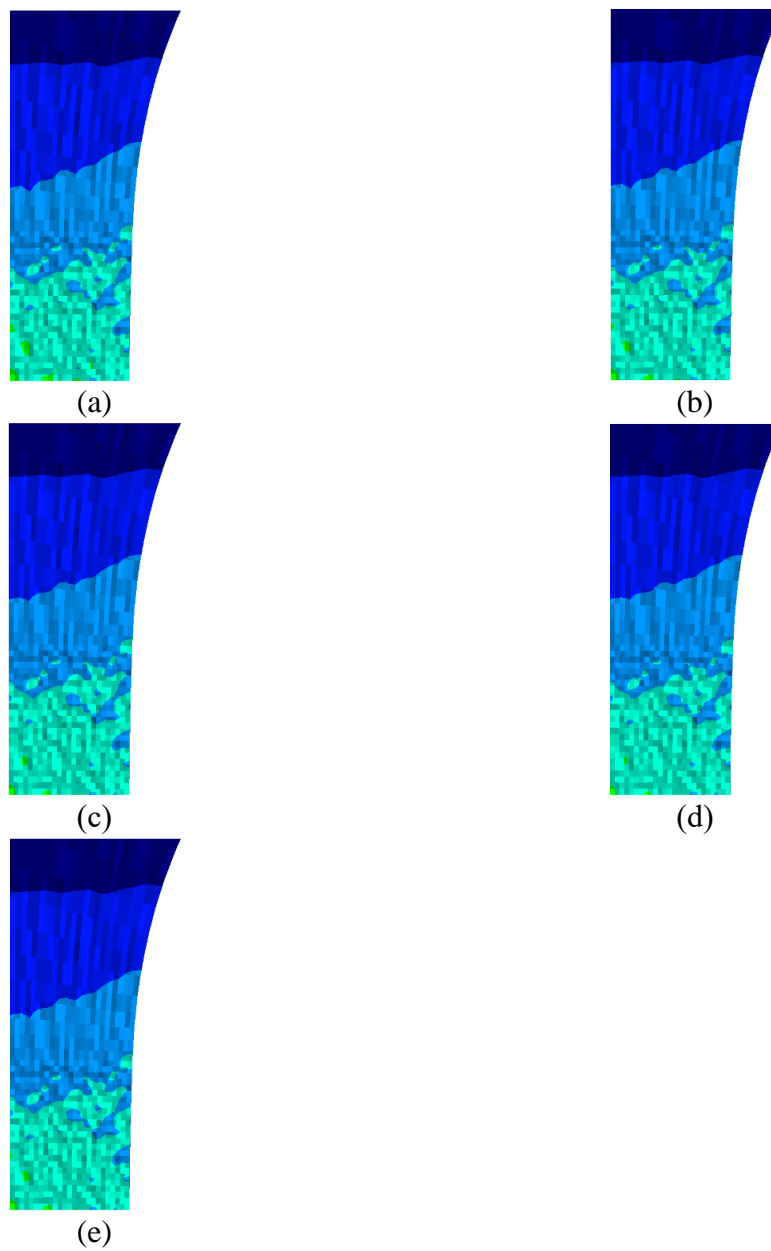
**Figura A.2.** Distribuição da deformação plástica equivalente para o modelo com espessura constante sujeito à compressão.



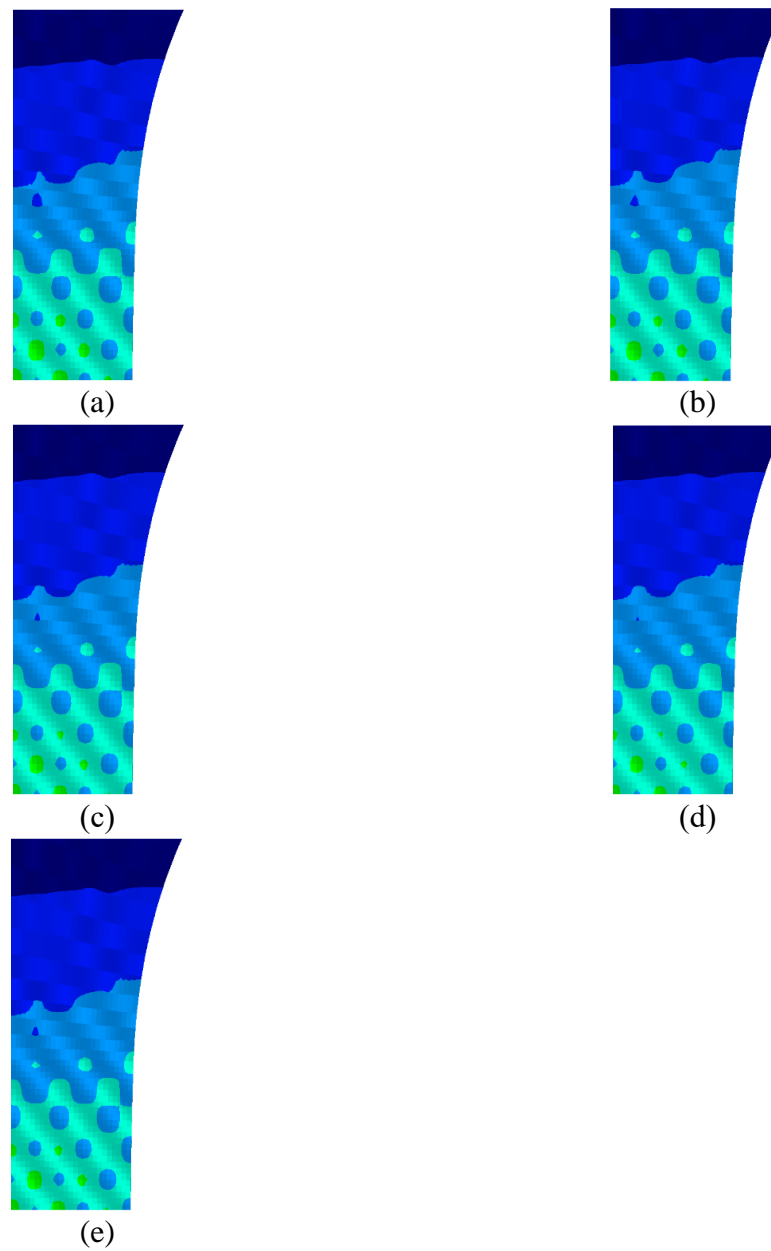
**Figura A.3.** Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EINS com diferentes valores de desvio padrão, sujeitos à tracção: (a)  $\sigma = 0,1 \text{ mm}$ ; (b)  $\sigma = 0,05 \text{ mm}$ ; (c)  $\sigma = 0,025 \text{ mm}$ ; (d)  $\sigma = 0,0125 \text{ mm}$ ; (e)  $\sigma = 0,00625 \text{ mm}$ ; (f)  $\sigma = 0,003125 \text{ mm}$ .



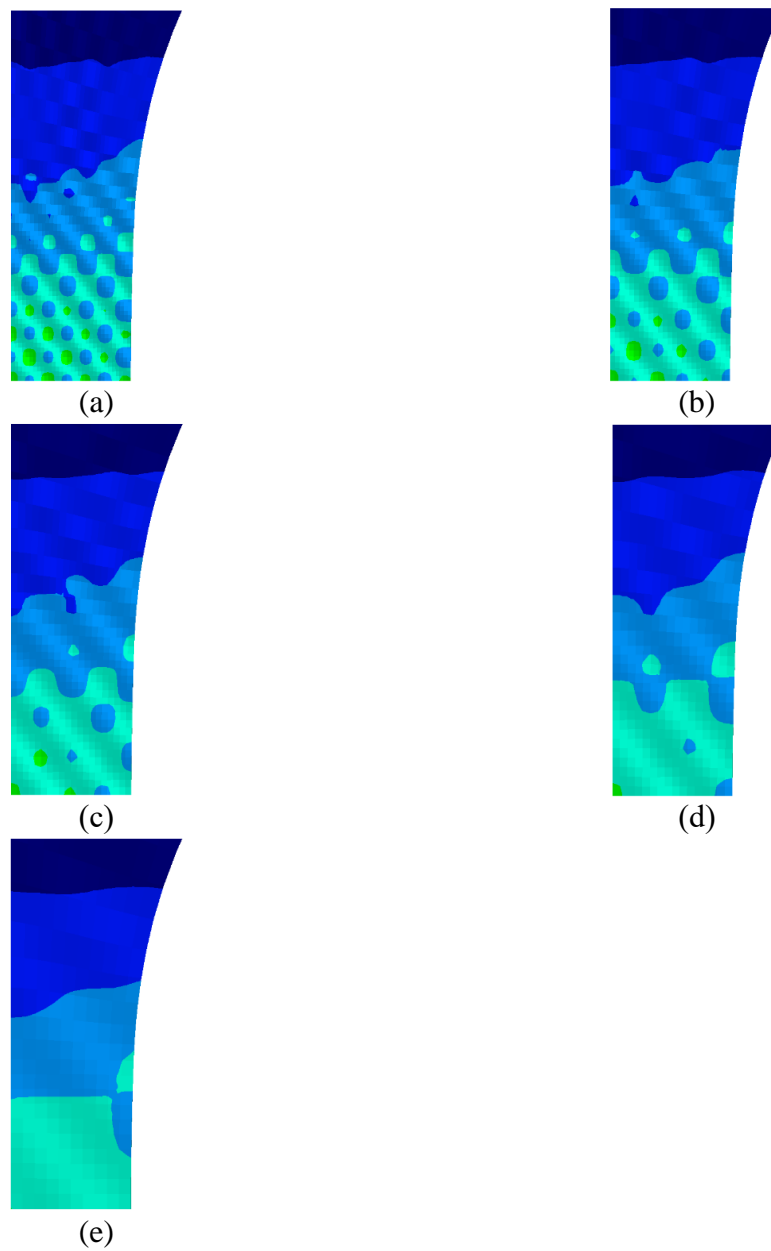
**Figura A.4.** Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EIS com diferentes valores de desvio padrão, sujeitos à tracção: (a)  $\sigma = 0,1 \text{ mm}$ ; (b)  $\sigma = 0,05 \text{ mm}$ ; (c)  $\sigma = 0,025 \text{ mm}$ ; (d)  $\sigma = 0,0125 \text{ mm}$ ; (e)  $\sigma = 0,00625 \text{ mm}$ ; (f)  $\sigma = 0,003125 \text{ mm}$ .



**Figura A.5.** Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EINS com diferentes valores de espessura inicial ( $\sigma = 0,0125 \text{ mm}$ ), sujeitos à tracção: (a)  $\mu=0,85 \text{ mm}$ ;  $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ; (b)  $\mu=0,95 \text{ mm}$ ;  $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ; (c)  $\mu=1,05 \text{ mm}$ ;  $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ; (d)  $\mu=1,15 \text{ mm}$ ;  $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ ; (e)  $\mu=1,00 \text{ mm}$ ;  $\sigma=0,0125 \text{ mm}$ .

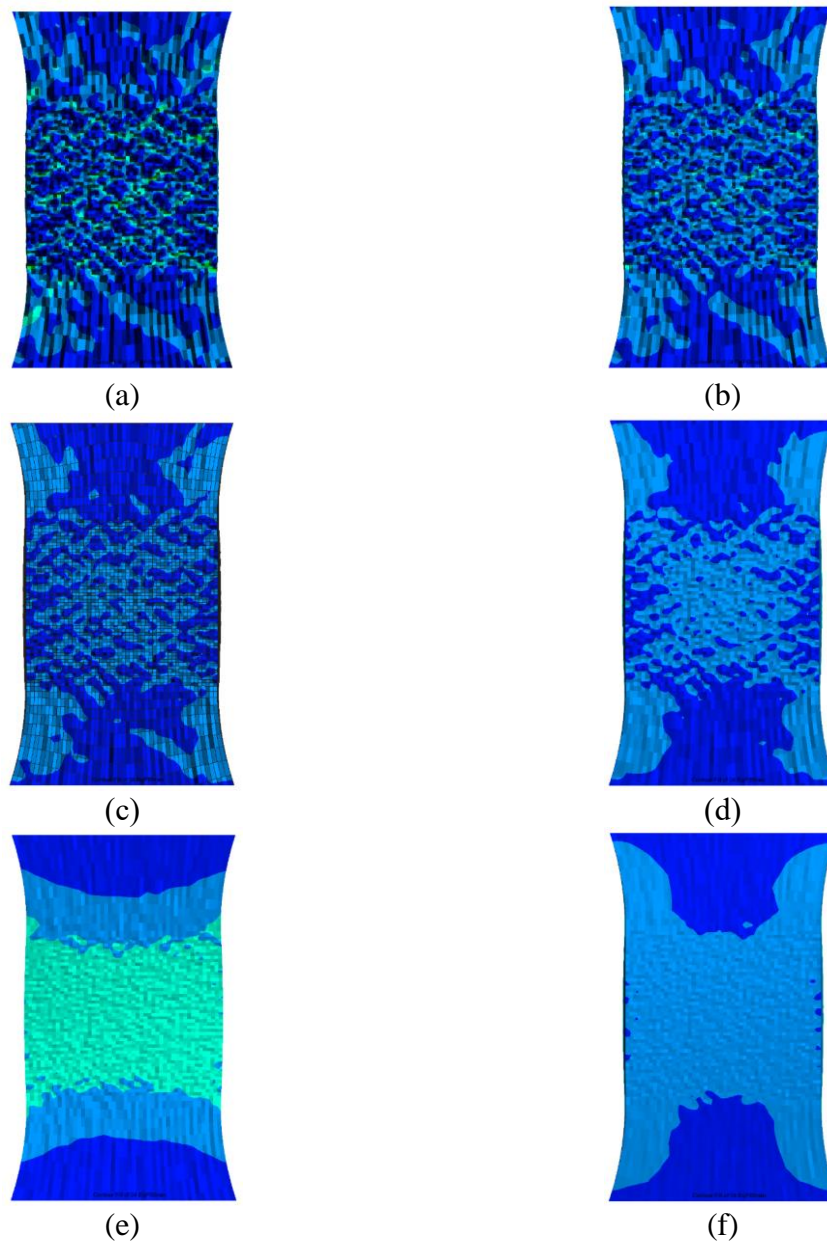


**Figura A.6.** Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EIS com diferentes valores de espessura inicial ( $\sigma = 0,0125$  mm), sujeitos à tracção: (a)  $\mu=0,85$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm; (b)  $\mu=0,95$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm; (c)  $\mu=1,05$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm; (d)  $\mu=1,15$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm; (e)  $\mu=1,00$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm.

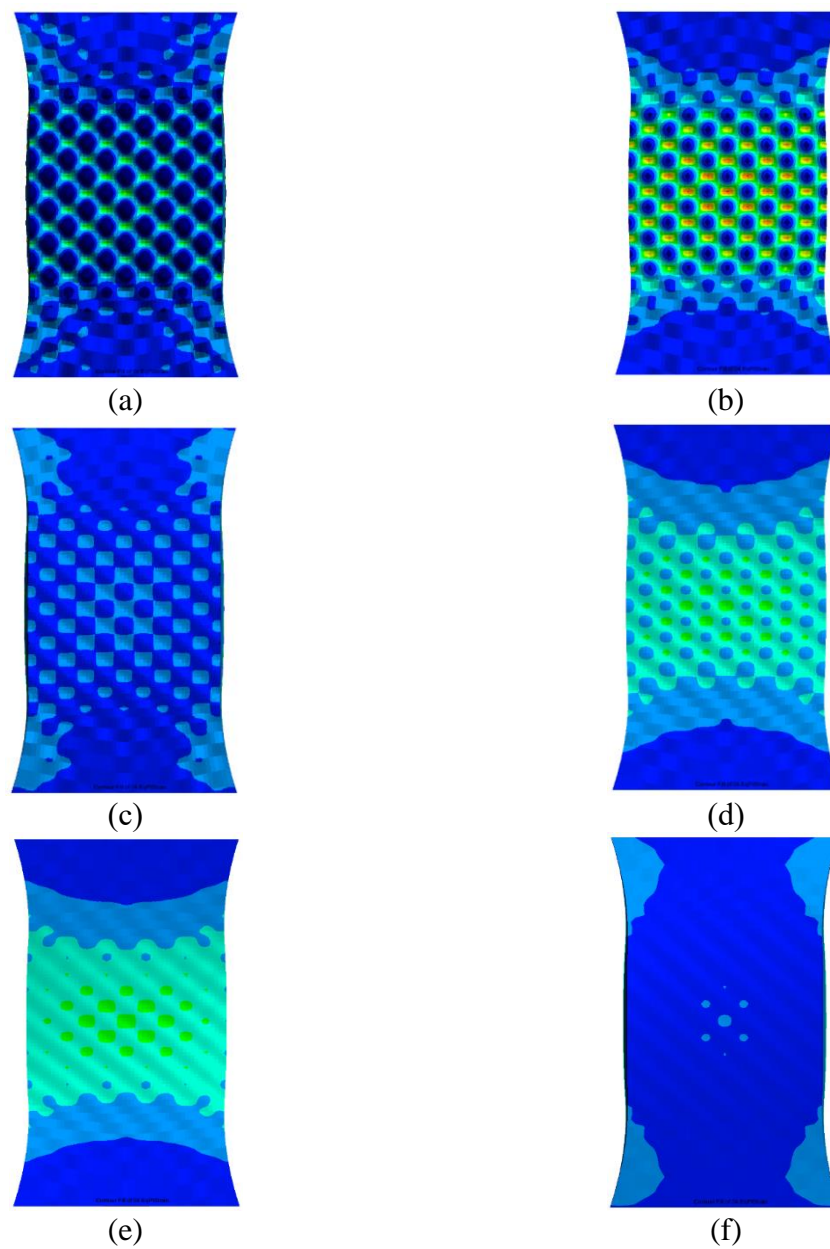


**Figura A.7.** Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EIS com diferentes valores de comprimento de onda ( $\mu=1,00$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm), sujeitos à tracção: (a)  $\lambda=0,3125$  mm; (b)  $\lambda=0,4$  mm; (c)  $\lambda=0,5$  mm; (d)  $\lambda=0,625$  mm; (e)  $\lambda=1$  mm.

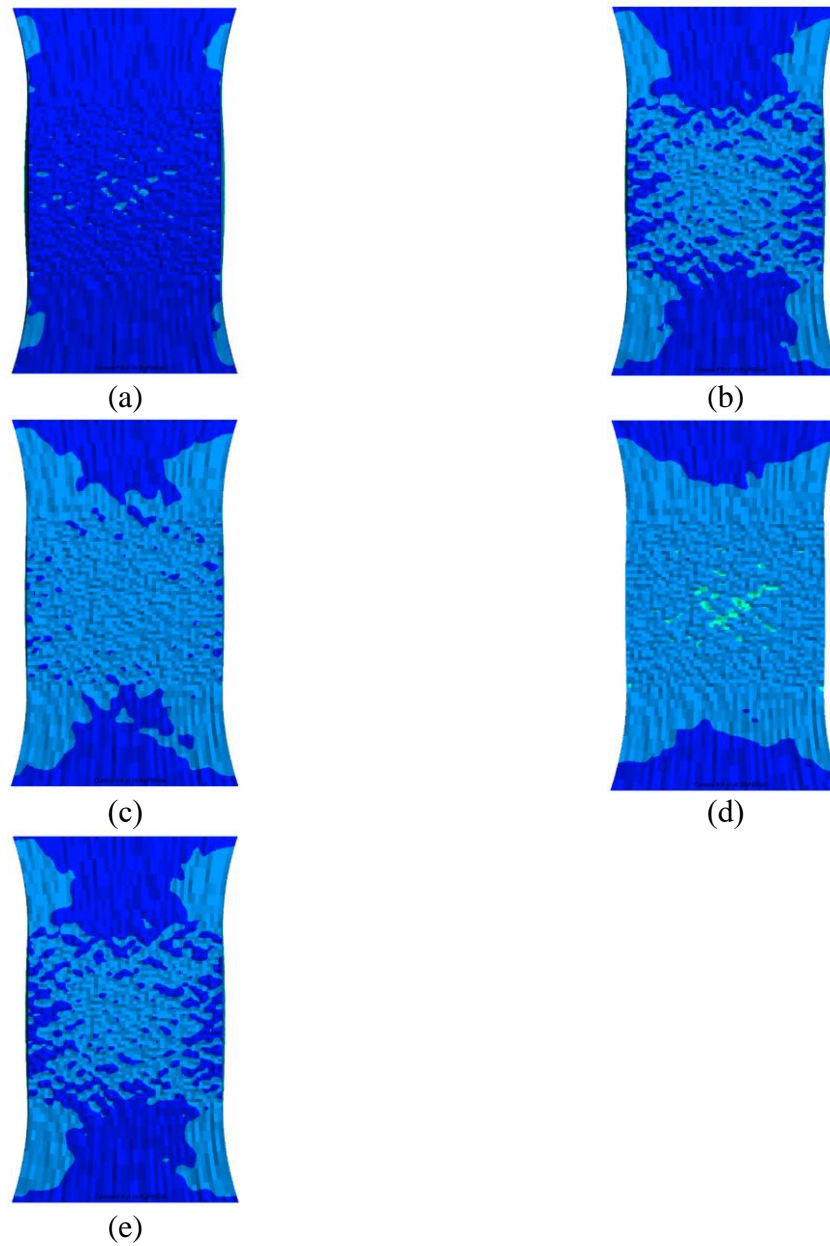




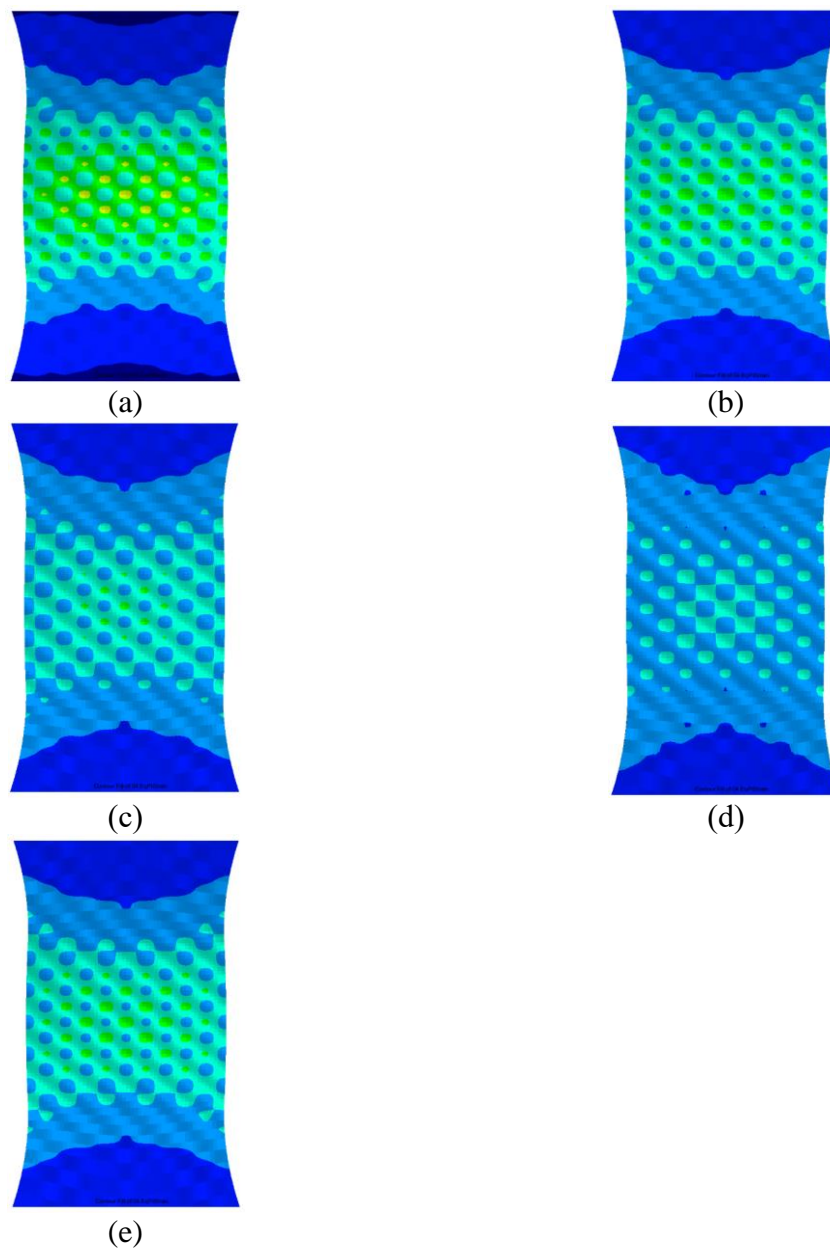
**Figura A.8.** Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EINS com diferentes valores de desvio padrão, sujeitos à compressão: (a)  $\sigma = 0,1 \text{ mm}$ ; (b)  $\sigma = 0,05 \text{ mm}$ ; (c)  $\sigma = 0,025 \text{ mm}$ ; (d)  $\sigma = 0,0125 \text{ mm}$ ; (e)  $\sigma = 0,00625 \text{ mm}$ ; (f)  $\sigma = 0,003125 \text{ mm}$ .



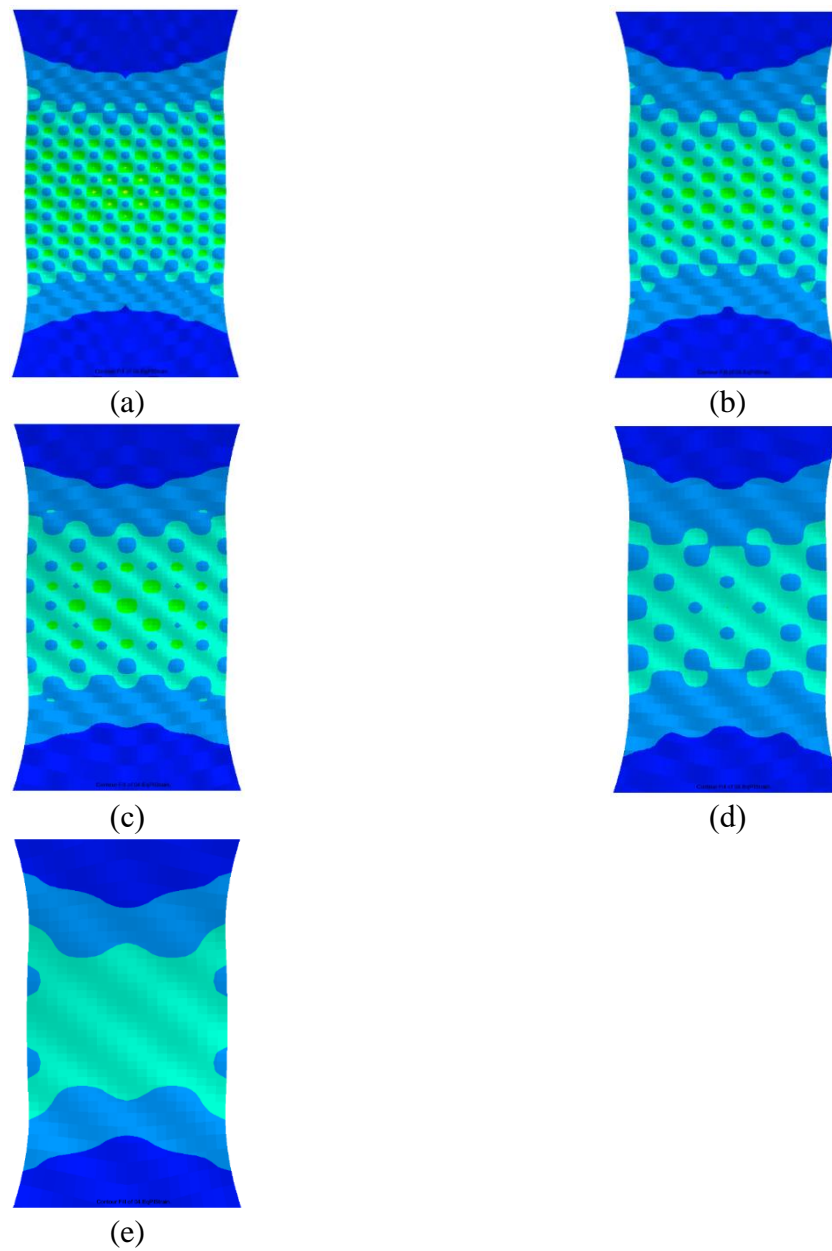
**Figura A.9.** Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EINS com diferentes valores de desvio padrão, sujeitos à compressão: (a)  $\sigma = 0,1 \text{ mm}$ ; (b)  $\sigma = 0,05 \text{ mm}$ ; (c)  $\sigma = 0,025 \text{ mm}$ ; (d)  $\sigma = 0,0125 \text{ mm}$ ; (e)  $\sigma = 0,00625 \text{ mm}$ ; (f)  $\sigma = 0,003125 \text{ mm}$ .



**Figura A.10.** Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EINS com diferentes valores de espessura inicial ( $\sigma = 0,0125$  mm), sujeitos à compressão: (a)  $\mu=0,85$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm; (b)  $\mu=0,95$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm; (c)  $\mu=1,05$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm; (d)  $\mu=1,15$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm; (e)  $\mu=1,00$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm.



**Figura A.11.** Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EINS com diferentes valores de espessura inicial ( $\sigma = 0,0125$  mm), sujeitos à compressão: (a)  $\mu=0,85$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm; (b)  $\mu=0,95$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm; (c)  $\mu=1,05$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm; (d)  $\mu=1,15$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm;  $\mu=1,00$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm.



**Figura A.12.** Distribuição da deformação plástica equivalente para os modelos EIS com diferentes valores de comprimento de onda ( $\mu=1,00$  mm;  $\sigma=0,0125$  mm), sujeitos à compressão: (a)  $\lambda=0,3125$  mm; (b)  $\lambda=0,4$  mm; (c)  $\lambda=0,5$  mm; (d)  $\lambda=0,625$  mm; (e)  $\lambda=1$  mm.

