Ana Cristina Becerra Nata

Majoração de Grupo e Integral de Haar

Universidade de Coimbra
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática

2000

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do programa de mestrado em Matemática, na área de especialização de Álgebra Linear, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Prefácio

Esta dissertação foi elaborada com o objectivo de organizar e desenvolver alguns dos resultados mais recentes sobre a teoria da majoração de grupo e suas aplicações à teoria das matrizes.

O conceito de majoração de grupo (ou, abreviadamente, G-majoração) foi introduzido inicialmente por Rado [31, (1952)] e Mudholkar [26, (1966)]. Desde então tem sido estudado e desenvolvido por vários matemáticos, nomeadamente por Eaton e Perlman [9, (1977)], Giovagnoli e Wynn [12, (1985)], Steerneman [34, (1990)], Miranda e Thompson [23, (1994)] e Niezgoda [28, 29 (1998); 30 (1999); 31 (2000)] entre outros.

Em 1987, Eaton introduziu uma relação de G-majoração que ao longo desta dissertação será denominada por *G-ordem induzida por um cone* ou, abreviadamente, *GIC-ordem*. Esta pré-ordem está relacionada com a estrutura de *terno de Eaton* (veja-se definição 1.3.14 para pormenorização) e, apesar de ter surgido no âmbito das probabilidades e estatística, admite várias aplicações à Álgebra Linear e também à teoria de Lie (veja-se [2, 12, 23, 27, 28, 38]).

O presente trabalho está dividido em três capítulos. No capítulo 1 apresentamos e desenvolvemos os conceitos e resultados relativos à teoria da majoração (clássica e de grupo) que servem de apoio aos capítulos seguintes. Além disso, introduzimos na secção 1.2 a noção de função isótona, da qual as funções S-convexas são um caso particular (cf., Definição 1.2.12). Tais funções são caracterizadas pelo facto de preservarem a relação de majoração clássica em $\mathbb{R}^n$. Sendo assim, a escolha de uma função isótona conveniente permite deduzir de um modo unificado várias desigualdades majoracionais conhecidas. A desigualdade determinantal de Hadamard é um exemplo clássico onde este raciocínio pode ser aplicado (veja-se [7, Teorema II.3.17, pág. 46]). Refira-se ainda que as funções S-convexas (e, consequentemente, S-côncavas) devem o seu nome a Issai Schur (1923).

No capítulo 2 começamos por estudar os conceitos de grupo efectivo e de grupo irredutível, uma vez que estes surgem de um modo intuitivo na teoria da majoração de grupo. Seguidamente, na seção 2.2 introduz-se a noção de grupo de reflexão, dando especial relevo aos grupos de reflexão finitos para os quais se deduz uma região fundamental (cf., (2.17)). Os conceitos apresentados são ainda concretizados para o grupo simétrico de grau n, $\mathcal{P}_n$ (cf., Exemplo 2.2.16) e para o grupo gerado pela união de $\mathcal{P}_n$ com o grupo $\mathcal{C}_n$ das mudanças de sinal nas coordenadas de $\mathbb{R}^n$ (cf., Exemplo 2.2.17).

Na secção 2.3 expõem-se as principais propriedades da medida e correspondente integral de Haar, sendo que esta medida foi introduzida originalmente pelo matemático húngaro Alfréd Haar em 1933.

No capítulo 3, com base no artigo [30] de Niezgoda, apresentamos um método que permite obter uma variedade bastante considerável de desigualdades G-majoracionais para a projecção ortogonal de um espaço euclideano V sobre o espaço de todos os pontos fixos pela acção de um dado subgrupo fechado K de G. A este respeito veja-se o lema 3.1.1, cuja demonstração recorre de uma forma original ao conceito de integral de Haar.

No caso em que a G-majoração é uma GIC-ordem, as desigualdades obtidas através deste método estão relacionadas com uma certa desigualdade do tipo de Schur (ou, abreviadamente, S-desigualdade) (cf., alíneas (iv) e (vi) do teorema 3.1.2). Além disso, mediante algumas condições adicionais, o corolário 3.1.5 estabelece a equivalência entre a S-desigualdade (3.11) e a desigualdade do tipo de von Neumann (ou, abreviadamente, N-desigualdade) (3.10). Refira-se ainda que esta N-desigualdade é equivalente à condição (A2) da definição 1.3.14. Portanto, este corolário descreve um processo que permite verificar se um determinado terno $(V, G, \mathcal{T})$ é um terno de Eaton, sabendo previamente que este satisfaz a condição (A1) da definição 1.3.14. Este facto é importante, uma vez que garante a aplicabilidade dos teoremas 3.1.2 e 3.1.3 que sustentam o método descrito nesta secção.

Finalmente, na secção 3.2 apresentamos vários exemplos que ilustram o método descrito na secção anterior.

Como comentário final, refira-se que ao longo de toda a dissertação as demonstrações, exemplos e observações assinalados com um "asterisco" representam contribuições pessoais para o aprofundamento da teoria exposta.

★

Ao terminar, desejo manifestar os meus agradecimentos a todos aqueles que, pelo seu apoio e amizade, tornaram possível a concretização deste trabalho. Não podendo mencionar cada um individualmente, devo particularizar alguns nomes.

Destaco a Professora Doutora Natália Bebiano Providência e Costa que me iniciou na actividade de investigação. Agradeço a sugestão do tema, o apoio científico e a orientação agradável que me dispensou ao longo da elaboração desta dissertação.

Desejo também testemunhar o meu profundo agradecimento aos meus pais pelas palavras de incentivo sempre afectuosas que tiveram para comigo.

Ana Cristina Becerra Nata
Coimbra, Novembro de 2000

Índice

Bibliografia

[1] S. A. Anderson and M. D. Perlman, Group-invariant analogues of Hadamard's inequality, *Linear Algebra Appl.* 110:91-116 (1988).

[2] T. Ando, Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* 118:163-243 (1989).

[3] T. Ando, Majorization and inequalities in matrix theory, *Linear Algebra Appl.* 199:17-67 (1994).

[4] R. B. Bapat and V. S. Sunder, On majorization and Schur produts, *Linear Algebra Appl.* 72:107-117 (1985).

[5] S. K. Berberian, *Measure and Integration*, 2nd ed., The Macmillan Company, 1965.

[6] R. Bhatia, *Perturbation bounds for matrix eigenvalues*, Pitman Research Notes in Mathematics Series 162, Longman Scientific and Technical, 1987.

[7] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer-Verlag, 1997.

[8] D. L. Cohn, *Measure Theory*, 1st ed., Birkhäuser, 1980.

[9] M. L. Eaton and M. D. Perlman, Reflection groups, generalized Schur functions, and the geometry of majorization, *Ann. Probab.* 5:829-860 (1977).

[10] K. Fan, On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 35:652-655 (1949).

[11] K. Fan, Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 37:760-766 (1951).

[12] A. Giovagnoli and H. P. Wynn, G-majorization with applications to matrix orderings, *Linear Algebra Appl.* 67:111-135 (1985).

[13] L. C. Grove and C. T. Benson, *Finite reflection groups*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1985.

[14] P. Halmos, *Measure Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1988.

[15] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1952.

[16] A. J. Hoffman and H. W. Wielandt, The variation of the spectrum of a normal matrix, *Ducke Math. J.* 20:37-39 (1953).

[17] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 1985.

[18] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, 1991.

[19] J. L. Kelley and T. P. Srinivasan, *Measure and Integral*, Vol. 1, Springer-Verlag, 1988.

[20] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with applications*, 2nd ed., Wiley Classics Library, 1989.

[21] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: theory of majorization and its applications*, Academic Press, New York, 1979.

[22] H. F. Miranda and R. C. Thompson, A trace inequality with a subtracted term, *Linear Algebra Appl.* 185:165-172 (1993).

[23] H. F. Miranda and R. C. Thompson, Group majorization, the convex hull of sets of matrices, and the diagonal elements – singular value inequalities, *Linear Algebra Appl.* 199:131-141 (1994).

[24] L. Mirsky, A trace inequality of John von Neumann, *Monatshefte für Mathematik* 79:303-306 (1975).

[25] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, 1970.

[26] G. S. Mudholkar, The integral of an invariant unimodal function over an invariant convex set – an inequality and applications, *Proc. Amer. Math. Soc.* 17:1327-1333 (1966).

[27] M. Niezgoda, Group majorization and Schur type inequalities, *Linear Algebra Appl.* 268:9-30 (1998).

[28] M. Niezgoda, An analytical characterization of effective and of irreducible groups inducing cone orderings, *Linear Algebra Appl.* 269:105-114 (1998).

[29] M. Niezgoda, G-majorization inequalities for linear maps, *Linear Algebra Appl.* 292:207-231 (1999).

[30] M. Niezgoda, G-majorization and orthoprojectors; submetida a publicação em *Linear Algebra Appl.*

[31] R. Rado, An inequality, *J. London Math. Soc.* 71:1-6 (1952).

[32] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, 2nd ed., Princeton University Press, 1972.

[33] R. Schatten, *A theory of cross-spaces*, Princeton University Press, 1950.

[34] A. G. M. Steerneman, G-majorization, group-induced cone orderings, and reflection groups, *Linear Algebra Appl.* 127:107-119 (1990).

[35] G. W. Stewart and J. -G. Sun, *Matrix perturbation theory*, Academic Press, 1990.

[36] T. Y. Tam, Miranda and Thompson's trace inequality and a log convexity result, *Linear Algebra Appl.* 262:307-325 (1997).

[37] T. Y. Tam, Kostant's convexity theorem and the compact classical groups, *Linear Algebra Appl.* 43:87-113 (1997).

[38] T. Y. Tam, Group majorization, Eaton triples and numerical range, *Linear Algebra Appl.* 47: 11-28 (2000).

[39] C. M. Theobald, An inequality for the trace of the product of two matrices, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 77:265-267 (1975).

[40] R. C. Thompson, Singular values, diagonal elements, and convexity, *SIAM J. Appl. Math.* 32:39-63 (1977).