



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

José Pedro Lopes

ESTIMAÇÃO DE PROBABILIDADES DE *DEFAULT*

**Dissertação no âmbito do Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças,
orientada pela Professora Doutora Ana Margarida Monteiro e pelo Professor
Doutor António Santos e apresentada ao Departamento de Matemática da
Faculdade de Ciências e Tecnologia e à Faculdade de Economia da Universidade
de Coimbra.**

outubro de 2021

Estimação de probabilidades de *default*

José Pedro Lopes



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças

Master in Quantitative Methods in Finance

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

outubro 2021

Agradecimentos

Um grande e sincero obrigado aos meus dois orientadores, a Professora Ana Margarida Monteiro e o Professor António Alberto, por todo o auxílio durante a realização desta dissertação. A ajuda, o interesse e a disponibilidade, juntamente com o rigor, exigência e paciência ao longo destes meses foi extremamente importante para a concretização deste trabalho.

À Ana Silva, pela preocupação, compreensão, apoio, motivação e carinho que permitiram ultrapassar todos os altos e baixos mais forte e capaz.

Por fim, à minha família, em especial aos meus pais, que foram o pilar de tudo, pela paciência, pelo apoio incondicional e pelo amor dado, que me permitiram alcançar tudo o que consegui até ao momento.

Resumo

A dissertação apresentada tem como motivação a obtenção de uma probabilidade de *default* associada a preços de opções financeiras. Consiste no estudo, apresentação e implementação de duas abordagens para a estimação de funções densidade neutras face ao risco. Numa primeira fase apresentam-se os modelos de atribuição de preços a opções financeiras, nomeadamente Black-Scholes e Merton (BSM), bem como o seu desenvolvimento. Através da formulação de BSM e considerando as suas limitações, são realizadas duas extensões a este modelo.

A primeira extensão apresentada consiste na introdução de um parâmetro para a probabilidade de *default* ao modelo de atribuição de preços de BSM. Por sua vez, é estudada outra abordagem com base no método da mistura de distribuições lognormais, que inclui uma distribuição associada à possibilidade de incumprimento por parte das empresas. Ambas as abordagens estimam uma função densidade neutra face ao risco.

Realiza-se uma análise num ambiente simulado e, posteriormente, estima-se as funções densidade neutras face ao risco bem como as probabilidade de *default* para duas empresas, através do uso de dados de mercado de opções financeiras.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
2 Revisão de Literatura	3
3 Modelo de Black-Scholes-Merton	7
3.1 Modelo de Merton - <i>distance to default</i>	11
3.2 Estimação de densidades neutras face ao risco: mistura de distribuições lognormais	12
4 Extensão do modelo de BSM com probabilidade de <i>default</i>	17
5 Análise Empírica	21
5.1 Dados Simulados	22
5.1.1 Usando a mistura de distribuições lognormais	22
5.1.2 Usando uma densidade lognormal com inclusão da probabilidade de <i>default</i>	23
5.1.3 Usando a mistura de distribuições lognormais com inclusão da probabilidade de <i>default</i>	25
5.2 Dados de mercado	26
5.2.1 Usando uma densidade lognormal com inclusão da probabilidade de <i>default</i>	27
5.2.2 Usando a mistura de distribuições lognormais com inclusão da probabilidade de <i>default</i>	28
6 Conclusão	31
Bibliografia	33

Lista de Figuras

3.1	<i>Payoff</i> Opção <i>Call</i>	7
3.2	<i>Payoff</i> Opção <i>Put</i>	8
5.1	Preços de opções <i>call</i> e <i>put</i> simulados; Estimativa da FDNR obtida através de uma mistura de duas distribuições lognormais.	23
5.2	Preços de opções <i>call</i> e <i>put</i> simulados; Estimativa da FDNR delta-lognormal	24
5.3	Preços de opções <i>call</i> e <i>put</i> estimados; Estimativa da FDNR obtida através de uma mistura de duas distribuições lognormais com inclusão da probabilidade de <i>default</i>	26
5.4	Preços de opções <i>call</i> e <i>put</i> da AAPL no dia 14 de julho com uma maturidade até 22 de janeiro de 2022.	27
5.5	Preços de opções <i>call</i> e <i>put</i> da GME entre os dias 5 e 9 de julho com uma maturidade até 22 de janeiro de 2022.	28
5.6	Estimativa da FDNR para a AAPL, obtida através do uso de uma distribuição delta-lognormal com inclusão da probabilidade de <i>default</i>	29
5.7	Estimativa da FDNR para a GME, obtida através do uso de uma distribuição delta-lognormal com inclusão da probabilidade de <i>default</i>	30

Lista de Tabelas

5.1	Estimação dos parâmetros através de uma mistura de duas distribuições lognormais: Comparação entre os valores teóricos e os estimados através das estatísticas erro padrão, z -stat e p -value.	24
5.2	Estimação dos parâmetros através de uma distribuição delta-lognormal com inclusão de probabilidade de <i>default</i> ; Comparação entre os valores teóricos e os estimados através das estatísticas p -value, z -stat e erro padrão.	25
5.3	Estimação dos parâmetros através de uma mistura de duas distribuições lognormais com inclusão da probabilidade de <i>default</i> ; Comparação entre os valores teóricos e os estimados através das estatísticas p -value, z -stat e erro padrão.	27
5.4	Estimação dos parâmetros para a empresa AAPL através do uso de uma distribuição delta-lognormal com inclusão da probabilidade de <i>default</i> ; Estatísticas p -value, z -stat e erro padrão para os valores estimados.	27
5.5	Estimação dos parâmetros para a empresa GME através do uso de uma distribuição delta-lognormal com inclusão da probabilidade de <i>default</i> ; Estatísticas p -value, z -stat e erro padrão para os valores estimados.	28
5.6	Estimação dos parâmetros para a empresa AAPL através de uma mistura de duas distribuições lognormais com inclusão da probabilidade de <i>default</i> ; Estatísticas p -value, z -stat e erro padrão para os valores estimados.	29
5.7	Estimação dos parâmetros para a empresa GME através de uma mistura de duas distribuições lognormais com inclusão da probabilidade de <i>default</i> ; Estatísticas p -value, z -stat e erro padrão para os valores estimados.	30

Capítulo 1

Introdução

Os mercados financeiros são geralmente caracterizados pela sua volatilidade. Uma tomada de decisão política, um acontecimento natural ou uma especulação *online* podem ter impactos significativos nos índices bolsistas, nos lucros/prejuízos dos investidores ou até na expansão ou regressão da economia mundial. Devido a esta forte capacidade de influenciar a economia mundial, aliado ao facto do mercado poder ser extremamente lucrativo para os investidores, os investigadores desenvolveram modelos para estimar os movimentos do mercado.

Ao longo do tempo verificou-se uma introdução de opções de investimento mais complexas, nomeadamente os derivados financeiros. Estes podem apresentar diversos tipos, opções financeiras, contratos de futuros ou contratos *forward*, e são instrumentos financeiros que determinam uma entrega diferida de um ativo subjacente, ou seja, presume-se que são liquidados numa data futuras preestabelecidas ou durante um determinado período. O ativo subjacente pode assumir a forma de ação, matéria-prima, obrigação, taxa de juro, taxa de câmbio, ou outro ativo sobre o qual se possa estabelecer o contrato.

Dada a sua relevância em termos financeiros e em montantes transacionados, as opções oferecem aos investidores um vasto leque de oportunidades e de ações a tomar, nomeadamente controlo de perdas.

O incumprimento (*default*) é um conceito fundamental ao longo desta dissertação e é geralmente desencadeado por um evento de crédito. A *International Swaps and Derivatives Association* (ISDA) especificou possíveis eventos de crédito, sendo eles entrada em bancarrota, falha nos pagamentos, *default* da obrigação, existência de moratória ou, por fim, reestruturação. Desta forma, conclui-se que o *default* pode ser definido por uma variedade de eventos. Num contexto empresarial, o incumprimento ocorre quando a empresa não cumpre os seus compromissos, nomeadamente no que diz respeito a pagamentos. A estimação do risco de *default* tem sido objeto de estudo por parte da comunidade científica e trata-se de um tema de grande interesse para as empresas e para a vida económica em geral.

Cada empresa ou país está sujeito a uma avaliação sobre a sua probabilidade de *default*. Numa realidade onde a dívida mundial atinge constantemente valores recorde, é importante definir a capacidade das entidades cumprirem com as suas obrigações financeiras. As agências de *rating* têm um papel importante nessa avaliação. Estas são responsáveis por classificar o risco das entidades não cumprirem com as suas obrigações financeiras. Os *ratings* definem a saúde financeira de uma forma

acessível e clara, sem apresentação de modelos de avaliação, usando letras para definir as diferentes classificações.

Black e Scholes [6] e Merton [15] (BSM) desenvolveram uma fórmula para atribuição de preços a opções Europeias. Apesar da relevância da teoria de atribuição de preços a opções, evidências empíricas demonstram certas limitações ao modelo. Black e Scholes [6] (BS) tinham como motivação determinar uma probabilidade de *default* para o valor de uma empresa. Esse objetivo foi concretizado por Merton [15] com a formulação de um modelo baseado nos mesmos pressupostos de BS, mas focando-se nos dados referentes ao balanço de uma determinada empresa, nomeadamente o valor da empresa e o valor da sua dívida.

Breeden e Litzenberger [7] e outros autores tais como Cox e Ross [9] extraem informação relacionada com as expectativas dos agentes do mercado tendo em conta o preço das opções financeiras. Estas expectativas são expressas numa FDNR, que pode ser usada para diferentes propósitos, avaliar o risco de mercado, calcular o preço de novos contratos ou obter uma probabilidade de *default* associada ao valor de uma empresa. Considera-se a estimação de uma FDNR através do método da mistura de distribuições lognormais, com certas extensões, tendo em conta o *default*. São utilizadas simulações para avaliar o comportamento e a capacidade do modelo em estimar os parâmetros num ambiente com pouca incerteza. Posteriormente são utilizados preços de mercado de duas empresas com historial e perspectivas muito distintas, a Apple (AAPL) e a GameStop (GME).

A organização desta dissertação engloba seis capítulos. No capítulo dois, Revisão de Literatura, é explicado o conceito dos instrumentos financeiros utilizados e é realizada uma breve síntese bibliográfica sobre as diferentes abordagens e formulações utilizadas. No terceiro capítulo aborda-se o modelo de Black-Scholes-Merton (BSM), as suas limitações e o seu desenvolvimento até à introdução da FDNR. O capítulo quatro consiste na apresentação das duas abordagens estudadas que refletem em si a probabilidade de *default*. No quinto capítulo apresenta-se a análise empírica, onde é realizada uma análise com preços de opções obtidos por simulação e outra com preços de mercado, recorrendo ao uso do programa R. Por fim, no sexto capítulo, apresenta-se a conclusão do trabalho.

Capítulo 2

Revisão de Literatura

Os derivados financeiros são definidos como contratos financeiros cujo valor depende do valor de um ou mais ativos designados por ativos subjacentes ([11]). Trata-se de uma negociação entre duas ou mais partes, convertida em contratos passíveis de serem transacionados em bolsa, especialmente nos mercados de derivados. Neste tipo de contrato fixa-se, num momento presente, o preço de uma transação que irá ocorrer no futuro. De entre os derivados mais transacionados temos as opções, os contratos de *forward*, futuros ou *swaps*. As opções são um instrumento financeiro que permite gerir a perceção dos investidores quanto ao aumento ou à diminuição do valor de um determinado ativo.

Os derivados de crédito em particular, têm apresentado uma grande evolução devido ao seu crescimento quer no volume de contratos, quer nos montantes envolvidos. São contratos cujo *payoff* depende da capacidade de crédito das empresas e/ou dos países ([11]). Um dos derivados mais comercializados é o chamado *credit default swap* (CDS) e é fundamental no que diz respeito aos derivados de crédito. O conceito de risco de crédito é o risco de existir uma perda financeira ocorrida devido a uma redução da qualidade de crédito de um devedor ([11]). Este pode assumir duas formas, o risco de *default*, risco de um devedor não pagar parte ou a totalidade da sua obrigação financeira, e o risco de deterioração de crédito, risco da qualidade de crédito do devedor diminuir.

Há uma vasta literatura acerca do estudo dos derivados de crédito, assim como todos os seus modelos de previsão, subjacente à grande crise do *subprime* de 2007/08. Diversos autores tentam analisar os pontos fortes e fracos, bem como a eficácia de variados modelos teóricos através dos dados referentes a este acontecimento.

Um contrato de opções é um acordo pelo qual o comprador adquire o direito de comprar (opção de compra ou *call*) ou de vender (opção de venda ou *put*) uma quantidade específica de um determinado bem ou instrumento financeiro a um preço pré-estabelecido, numa data futura denominada de maturidade ou data de vencimento ([11]). Uma opção Europeia ou de estilo Europeu implica que o contrato só pode ser exercido na sua data de maturidade. Se o contrato for exercido durante o período até à maturidade trata-se de uma opção Americana ou de estilo Americano. O vendedor da opção assume a obrigação de comprar ou vender o ativo subjacente, nas condições pré-estabelecidas, caso o comprador decida exercer o seu direito. Diz-se que um investidor toma uma posição longa quando compra um contrato de derivados. Por sua vez, quem vende o contrato assume uma posição curta.

As opções podem ser negociadas *over-the-counter* ou "em bolsa". No primeiro caso, os termos dos contratos são completamente definidos de acordo com as vontades das partes, enquanto que no

segundo caso os contratos estão completamente padronizados. Estes instrumentos financeiros também se distinguem de acordo com o resultado do seu exercício imediato. Desta forma há três estados, *in-the-money* (ITM), quando o exercício imediato resulta num saldo positivo, *out-of-the-money* (OTM), quando resulta numa perda de rendimentos, e, por fim, *at-the-money* (ATM), quando o lucro é nulo ou perto de zero.

Os preços dos contratos de opções fornecem importantes informações acerca das expectativas do mercado, nomeadamente através de uma correspondência entre o preço de exercício e o preço do seu ativo subjacente. O modelo de Black-Scholes-Merton (BSM) determina uma fórmula fechada que permite o cálculo de preços teóricos de opções e é aplicável a opções do tipo *call* e *put* europeias ([6]) ([15]). A formulação de BSM assume que o preço do ativo subjacente segue um processo estocástico designado de movimento Browniano geométrico ([12]).

Tendo em conta as hipóteses subjacentes ao modelo de BSM, nomeadamente a hipótese da não arbitragem, é possível determinar a função distribuição neutra face ao risco (FDNR) do ativo subjacente, para uma determinada maturidade. Esta função permite ilustrar a distribuição de probabilidades de ocorrência atribuídas a eventos futuros e caracterizar o perfil das expectativas dos agentes económicos relativas à evolução do preço do ativo subjacente ([9]). O modelo de BSM relaciona, entre outros parâmetros, o preço do ativo subjacente e a sua volatilidade. Este último parâmetro, a volatilidade, não é diretamente observável e necessita de ser estimado. A volatilidade usada no modelo é considerada constante porém, inferindo este parâmetro através da inversão da fórmula de BSM, é possível obter uma volatilidade implícita, que apresenta um traçado semelhante ao de um sorriso. Desta forma, conclui-se que a volatilidade varia de acordo com o preço de exercício e com a maturidade ([12]).

No caso específico das opções financeiras, o princípio da neutralidade face ao risco permite modelar o preço das opções *call* e *put* europeias, como o valor esperado do ganho futuro descontado à taxa de juro sem risco. Breeden e Litzenberger [7] mostram que através da segunda derivada do preço das opções em relação ao seu preço de exercício é possível obter a FDNR. Porém, esta formulação apresenta algumas limitações principalmente no que diz respeito ao uso da dupla derivação.

Tendo como objetivo a obtenção de uma FDNR e devido às limitações na formulação de BSM e de Breeden e Litzenberger [7], a mistura de distribuições lognormais surge como uma alternativa ao uso de uma só densidade lognormal ([2]) ([13]) ([12]). O método de estimação usado por Bhara [2], Melick e Thomas [13] e Jondeau, Poon e Rockinger [12] é o método dos mínimos quadrados.

Esta dissertação foca-se em obter uma probabilidade de *default* através dos preços de contratos de opções financeiros. A probabilidade de *default* surge como uma das motivações para o estudo de Fischer Black e Myron Scholes [6], e Robert Merton [14] [15]. Merton [15] aplica o modelo construído por BS à estrutura de capital de uma empresa.

O modelo de Merton [15] partilha os mesmos pressupostos do modelo de BS [6], mas aplica a sua formulação ao balanço de uma empresa. Bharath e Shumway [4], aplicando o modelo de Merton [15], apresentam uma abordagem numérica para estimar uma distância ao *default*. O modelo de Merton [15] apresenta uma fórmula para obter o valor do capital próprio da empresa, com o valor total da empresa a representar o valor do ativo subjacente e o preço de exercício a ser representado pelo valor da sua dívida. A ideia geral do modelo de Merton [15] consiste em obter uma função densidade e, através desta, a probabilidade de *default* será a probabilidade do valor total da empresa ser inferior ao valor da sua dívida. Como referido em Bharath e Shumway [4], a principal diferença entre o modelo

de Merton [15] e por exemplo, o modelo KMV, utilizado pela *Moody's*, diz respeito à avaliação da situação de crédito de uma determinada empresa a curto e a longo prazo ([4]).

Câmara, Popova e Simkins [8] utilizam uma fórmula, desenvolvida a partir de alguns pressupostos diferentes de BS, cujo parâmetro para a probabilidade de *default* é tido em conta. Este modelo assume que o preço do ativo subjacente segue um processo com características de uma variável aleatória mista. A probabilidade de *default* é calculada através da otimização de um problema de mínimos quadrados, onde os dois parâmetros a serem estimados são a volatilidade e a probabilidade de *default*.

Tal como o modelo de BSM, o modelo de Câmara, Popova e Simkins [8] apresenta a mesma limitação no que diz respeito à volatilidade, ou seja, assume este parâmetro como uma constante. Para contornar esta questão, utiliza-se a mesma solução anteriormente mencionada ou seja, estima-se a probabilidade de *default* através do método da mistura de lognormais.

Taylor, Tzeng e Widdicks [18] implementaram esse método com duas distribuições de pesos inferiores à unidade, sendo que o restante peso está associado à probabilidade de default. É novamente utilizado o método dos mínimos quadrados, porém com dificuldades acrescidas devido ao aumento do número de parâmetros a estimar e ao aumento das restrições.

Capítulo 3

Modelo de Black-Scholes-Merton

Um contrato de opções é um acordo pelo qual o comprador adquire o direito de comprar ou vender uma quantidade específica de um determinado bem ou instrumento financeiro a um preço pré-estabelecido, numa data futura específica, ou durante um determinado período ([11]). O valor das opções *call* ($V_C(S_T, T)$) e *put* ($V_P(S_T, T)$), na maturidade, podem ser representados pelas suas funções *payoff*, respetivamente:

$$V_C(S_T, T) = \max(S_T - K, 0), \quad (3.1)$$

$$V_P(S_T, T) = \max(K - S_T, 0), \quad (3.2)$$

onde S_T é o preço do ativo subjacente na maturidade e K o preço de exercício.

No caso de uma opção *call*, o contrato só é exercido quando o preço do ativo subjacente é superior ao preço de exercício estabelecido. Neste caso, o comprador irá exercer a opção pois paga um valor inferior ao valor real do ativo subjacente, caso contrário não é vantajoso exercer a opção. No caso das opções *put* a lógica é semelhante. O comprador do contrato opta por vender o ativo subjacente se o seu valor for inferior ao valor estabelecido pelo preço de exercício. As Figuras 3.1 e 3.2, representam as funções *payoff* das opções *call* e *put*, respetivamente, na ótica do comprador do contrato, estando este associado a uma posição longa, e do vendedor do contrato, que detém uma posição curta.

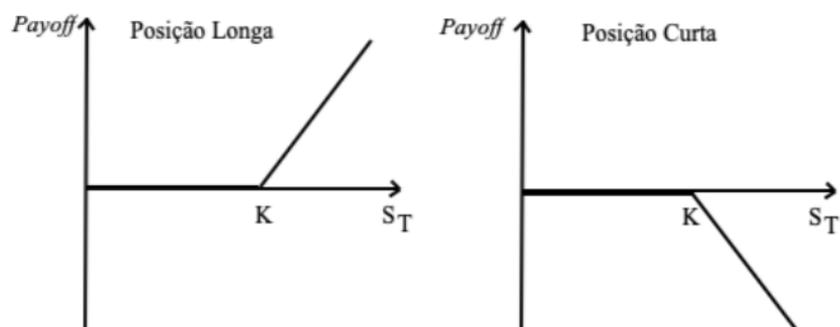
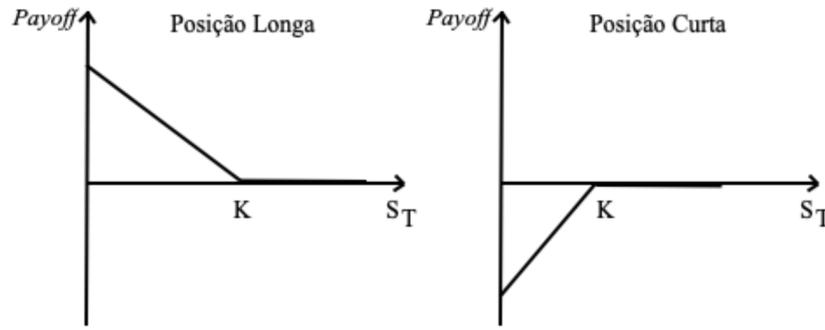


Fig. 3.1 *Payoff* Opção *Call*

Fig. 3.2 *Payoff* Opção Put

No modelo de BSM é assumido que os mercados são eficientes e que o preço do ativo subjacente incorpora toda a informação passada. Aliado a estes pressupostos está a impossibilidade de prever o valor futuro de um ativo financeiro subjacente a uma opção europeia, ou seja, a aleatoriedade do preço do ativo subjacente. Com base nestes pressupostos é possível determinar as hipóteses subjacentes ao modelo. O ativo subjacente é perfeitamente divisível e a sua negociação pode ocorrer ao longo da maturidade. É permitida a venda a descoberto (*short selling*), a taxa de juro sem risco é constante e não existem custos de transação e oportunidades de arbitragem.

Neste modelo o preço do ativo subjacente evolui de acordo com a seguinte equação diferencial estocástica (EDE),

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t, \quad (3.3)$$

onde dS_t representa a variação do preço do ativo subjacente, dt o acréscimo infinitesimal de tempo, W_t designa um movimento Browniano ou processo de Wiener, μ o *drift* e σ a volatilidade.

De seguida considera-se uma opção, independentemente do seu tipo, cujo valor V depende de S_t e de t . Ao aplicar-se o lema de Itô a esta função, obtém-se uma nova EDE que representa a dinâmica de preço do ativo derivado. É possível verificar que o processo seguido por uma função V , que depende das variáveis S_t e t , obedece à seguinte equação diferencial estocástica,

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t. \quad (3.4)$$

Com o objetivo de obter uma fórmula para a determinação dos preços de opções, considera-se a criação de um portefólio A , contendo uma unidade do ativo derivado e uma posição curta de $\frac{\partial V}{\partial S}$ unidades no ativo subjacente. O valor deste portefólio é dado por

$$A_t = V - \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t \quad (3.5)$$

e apresenta a seguinte dinâmica de preços:

$$dA_t = dV - \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t. \quad (3.6)$$

Substituindo na expressão (3.6), dV por (3.4) e dS_t por (3.3), obtém-se:

$$dA_t = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt. \quad (3.7)$$

A expressão (3.7) representa um portefólio livre de risco para variações infinitesimais de tempo.

Para evitar oportunidades de arbitragem, o retorno instantâneo do portefólio deverá ser o mesmo que a taxa de juro sem risco. Como consequência, a variação verificada no portefólio é dada por:

$$dA_t = rA_t dt = r \left(V_t - \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t \right) dt. \quad (3.8)$$

Das equações (3.7) e (3.8) obtém-se a Equação Fundamental de Derivadas Parciais (EFDP) de BSM, que modela o valor de uma opção em função do preço do ativo subjacente e do tempo,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - rV = 0. \quad (3.9)$$

Através desta formulação verifica-se que o preço da opção depende da volatilidade e da taxa de juro sem risco. Também é possível observar-se que as preferências dos investidores face ao risco não são tidas em conta. Num ambiente de neutralidade face ao risco, o retorno esperado coincide com a taxa de juro sem risco ($\mu = r$) ([11]).

A EFDP (3.9), através de diversas operações e por mudanças de variável, reduz-se a uma equação de difusão que, dependendo de condições finais e de fronteira, permite obter uma família de soluções. Para obter soluções particulares torna-se necessário considerar condições de fronteira e condições iniciais ou finais. As condições finais são dadas pelos *payoffs* definidos por (3.1) e (3.2). Por sua vez, as condições de fronteira são obtidas ao calcular o limite do preço do ativo subjacente quando este tende para 0 e para $+\infty$.

Começando pelo caso das opções *call*, quando $S_t \rightarrow +\infty$ a opção irá ser sempre exercida pois $S_t > K$, ou seja, o valor do ativo subjacente irá ser sempre superior ao valor do preço de exercício. Obtém-se então o seu valor, dado por $V_C(S_t, t) \approx S_t - Ke^{-r\tau}$. Assim sendo,

$$\lim_{S_t \rightarrow +\infty} [S_t - V_C(S_t, t)] = Ke^{-r\tau}, t \geq 0. \quad (3.10)$$

Neste caso, a opção é exercida porque é possível garantir que $S_t > K$.

Por outro lado, quando S_t tende para 0, como o valor do ativo subjacente é nulo, o valor da opção também o é, pois o detentor do direito de preferência não apresenta nenhuma perspectiva de lucro ao exercer a opção.

$$\lim_{S_t \rightarrow 0^+} V_C(S_t, t) = 0, t \geq 0. \quad (3.11)$$

Para as opções *put* o raciocínio é semelhante.

$$\lim_{S_t \rightarrow +\infty} V_P(S_t, t) = 0, t \geq 0, \quad (3.12)$$

$$\lim_{S_t \rightarrow 0^+} [V_P(S_t, t) + S_t] = Ke^{-r\tau}, t \geq 0. \quad (3.13)$$

No primeiro caso (3.12), o preço do ativo subjacente irá ser sempre superior ao preço de exercício, logo o detentor do contrato não obtém lucro ao ativar o seu direito de preferência. Por sua vez, quando o preço do ativo subjacente tende para um valor nulo (3.13), o detentor do contrato vai optar por vender o ativo subjacente ao preço estipulado no preço de exercício, obtendo lucro ($\approx Ke^{-rt} - S_t$).

A definição das condições de fronteira torna possível obter as fórmulas de preços de BS para os dois tipos de opções *call* e *put*, respetivamente.

$$V_C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2), \quad (3.14)$$

$$V_P(S,t) = Ke^{-r\tau}N(-d_2) - SN(-d_1), \quad (3.15)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad (3.16)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}, \quad (3.17)$$

sendo $N(\cdot)$ a função de distribuição de uma variável estandardizada.

Numa situação onde existem pagamentos de dividendos do ativo subjacente, a uma taxa de dividendo contínua, ω , as fórmulas para o preço de opções apresentam uma outra forma:

$$V_C(S,t) = e^{-\omega\tau}SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2), \quad (3.18)$$

$$V_P(S,t) = Ke^{-r\tau}N(-d_2) - e^{-\omega\tau}SN(-d_1), \quad (3.19)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \omega + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad (3.20)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}. \quad (3.21)$$

Ao assumir que o horizonte temporal de uma opção é $\tau = T - t$ e S_T designa o preço do ativo subjacente na maturidade, demonstra-se que $\ln(S_T) - \ln(S_t)$ segue uma distribuição normal:

$$\ln S_T - \ln S_t \sim N\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau, \sigma\sqrt{\tau}\right], \quad (3.22)$$

$$\ln S_T \sim N\left[\ln S_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau, \sigma\sqrt{\tau}\right]. \quad (3.23)$$

A paridade *put-call* é um conceito que diz respeito à relação que deve existir, na ausência de oportunidades de arbitragem, entre opções com o mesmo estilo, preço de exercício, maturidade e sobre o mesmo ativo subjacente. Ou seja, as opções de compra e venda podem combinar-se de modo a estabelecer um equilíbrio entre os seus preços e o preço do ativo subjacente. Desta forma, com a

paridade *put-call* é possível calcular o preço da opção *call* a partir do preço da opção *put* e vice-versa, respeitando a equação

$$V_C(S,t) - V_P(S,t) = S - Ke^{-r\tau}. \quad (3.24)$$

Uma análise através da paridade *put-call* pode não apresentar grande precisão e é extremamente sensível quando utilizada em contexto de mercado.

3.1 Modelo de Merton - *distance to default*

Black e Scholes [6], para além do desenvolvimento de uma fórmula fechada para avaliar o preço de opções financeiras, considera uma possibilidade para o *default*. Merton [15], partindo dos mesmo pressupostos, aplica a mesma fórmula à estrutura de capital de uma determinada empresa. Assim sendo, o valor total da empresa (V) é o ativo subjacente de uma opção *call* e o valor total da sua dívida (D) é visto como o preço de exercício associado ao ativo subjacente. Esta opção *call* permite calcular o valor da capital próprio da empresa (E),

$$E = VN(d_1) - e^{-r\tau}DN(d_2), \quad (3.25)$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{V}{D} + (r + \frac{1}{2}\sigma_V^2)\tau}{\sigma_V\sqrt{\tau}}, \quad (3.26)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_V\sqrt{\tau}. \quad (3.27)$$

Note-se que quando o valor do ativo subjacente tende para infinito ($V \rightarrow +\infty$), a opção irá ser sempre exercida porque o valor da empresa é superior ao valor da sua dívida ($V > D$). Desta forma, o seu valor será dado por $E \approx V - De^{-r\tau}$. Conclui-se portanto que:

$$\lim_{V \rightarrow +\infty} (V - E) = De^{-r\tau}. \quad (3.28)$$

Quando o valor da empresa se aproxima de zero tem-se,

$$\lim_{V \rightarrow 0^+} E = -De^{-r\tau}. \quad (3.29)$$

Neste caso, o valor da opção será zero pois o limite tende para um valor negativo. O detentor da opção não terá nenhuma vantagem em exercer o seu direito pois a empresa não tem valor ($V = 0$).

O modelo de Merton *distance to default* (Merton-DD) propõe estimar características do *default* relativo a uma determinada empresa. Assim sendo, considera duas equações fundamentais ([4]). A primeira é a equação de BSM (3.25) e a segunda relaciona a volatilidade do valor da empresa com a volatilidade das suas ações, $\sigma_E = \frac{V}{E} \frac{\partial E}{\partial V} \sigma_V$. Tendo em conta a equação (3.25), tem-se $\frac{\partial E}{\partial V} = N(d_1)$, desta forma:

$$\sigma_E = \frac{V}{E} N(d_1) \sigma_V, \quad (3.30)$$

onde σ_V é a volatilidade associada ao valor da empresa.

Nesta formulação, o valor da empresa, V , não é diretamente observável enquanto que E pode ser obtido do mercado, multiplicando o preço de cada ação pelo número de ações. A volatilidade associada a E , σ_E , pode ser estimada, no entanto a volatilidade associada a V , σ_V , deve ser obtida através da resolução do sistema de equações referido anteriormente ([4]).

A primeira etapa do modelo de Merton-DD é a estimação de σ_E a partir dos rendimentos históricos da ação ou dos dados associados às volatilidades implícitas de opções. A segunda etapa é estabelecer um horizonte temporal para a maturidade da dívida e o seu valor nominal. De seguida, é necessário definir o valor da taxa de juro isenta de risco e o valor do capital próprio. Sendo assim, as variáveis do problema são V e σ_V e vão ser determinadas a partir da resolução numérica do sistema composto por (3.25) e (3.30). Deste modo, podemos obter o valor da distância ao *default* dado por:

$$DD = \frac{\ln \frac{V}{D} + (r - \frac{1}{2} \sigma_V^2) \tau}{\sigma_V \sqrt{\tau}}. \quad (3.31)$$

A probabilidade de *default* implícita, também designada por frequência de *default* é dada por:

$$\delta_{Merton} = N \left(- \frac{\ln \frac{V}{D} + (r - \frac{1}{2} \sigma_V^2) \tau}{\sigma_V \sqrt{\tau}} \right) = N(-DD). \quad (3.32)$$

O valor da dívida de uma empresa (D) é difícil de obter, nomeadamente por não ser do interesse das empresas a divulgação deste valor. Desta forma, a obtenção da probabilidade através deste processo requer acesso a base de dados relativas à dívida das empresas.

3.2 Estimação de densidades neutras face ao risco: mistura de distribuições lognormais

A modelação da volatilidade assume uma importância determinante no contexto da atribuição de preços a opções. As volatilidades implícitas são usadas para monitorizar a opinião do mercado acerca da volatilidade de uma ação particular ([11]).

O modelo de BSM apresenta algumas limitações nomeadamente no que diz respeito ao parâmetro da volatilidade (σ). A volatilidade é uma medida de incerteza sobre o retorno possível de uma dada ação. Quanto maior este parâmetro, maior será a variação do retorno e, conseqüentemente, maior o risco ([11]).

A volatilidade é um parâmetro não observável e, através do modelo de BSM, apresenta o traçado de uma linha horizontal. Usando os dados de mercado do preço do ativo subjacente, do preço de exercício, da maturidade e da taxa de juro sem risco, é possível obter a volatilidade implícita através da inversão das fórmulas (3.14) e (3.15) ([10]). A volatilidade implícita apresenta usualmente a forma de uma curva convexa ao longo dos diferentes preços de exercício. Esta característica é designada por “sorriso da volatilidade”.

A diferença entre o comportamento da volatilidade observada no mercado, e o conceito de volatilidade presente no modelo de BSM é uma limitação ao modelo. A característica de uma volatilidade constante no modelo de BSM advém da existência de um movimento geométrico Browniano para o preço do ativo subjacente, que implica a existência de uma distribuição lognormal no modelo. Este

comportamento não se verifica no mercado, como evidencia o conceito de volatilidade implícita ([12]).

Uma alternativa para determinar o preço de opções financeiras consiste em usar a FDNR do ativo subjacente numa determinada maturidade. Segundo Cox e Ross [9], a FDNR é uma função de distribuição de probabilidades de ocorrência atribuídas a eventos futuros relativos à evolução do preço do ativo subjacente. Desta forma é apresentada a seguinte formulação:

$$V_C(S_t, T) = e^{-r\tau} \int_K^{+\infty} q(S_T)(S_T - K)dS_T, \quad (3.33)$$

$$V_P(S_t, T) = e^{-r\tau} \int_0^K q(S_T)(K - S_T)dS_T, \quad (3.34)$$

onde q designa a FDNR para o preço do ativo subjacente na maturidade, S_T , r representa a taxa de juro sem risco e $\tau = T - t$ o tempo até à maturidade.

Segundo Breeden e Litzenberger [7] ao utilizar a segunda derivada do preço das opções em relação ao preço de exercício é possível obter a FDNR:

$$\frac{\partial^2 V_C}{\partial K^2} \Big|_{K=S_T} = e^{-r\tau} q(S_T). \quad (3.35)$$

A segunda derivada da função que modela os preços de uma opção *call* europeia, em ordem ao seu preço de exercício, é proporcional à FDNR na maturidade. Considerando a relação estabelecida entre o preço da opção *call* em relação ao preço de exercício, uma das possíveis estratégias para a estimação das segundas derivadas e da FDNR, seria através de diferenças finitas avaliar numericamente as respetivas segundas derivadas. A estratégia não se verifica viável porque a interpolação do preço das opções usando o valor dos preços de exercício não resulta numa curva suave, não permitindo usar aproximações numéricas no cálculo das derivadas ([12]).

As alternativas apresentadas ao modelo de BS continuam a apresentar limitações. Tendo em conta a distribuição lognormal presente no modelo de BS, autores como Bhara [2], e Melick e Thomas [13], desenvolvem um método que consiste na mistura de distribuições lognormais, para extrair a FDNR.

O método da mistura de distribuições lognormais (MLN) é considerado um modelo paramétrico. Uma das principais características destes modelos é a sua capacidade de assumir uma forma funcional para a função densidade, dependendo de um número reduzido de parâmetros.

A MLN é um método que combina duas ou mais distribuições lognormais, em que cada uma tem associado a si um peso como fator de ponderação. Cada densidade lognormal é definida por:

$$L(S_T; \alpha, \sigma) = \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln S_T - \alpha}{\sigma\sqrt{\tau}} \right)^2 \right], \quad (3.36)$$

$$\alpha = \ln S_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau$$

Uma mistura de densidades lognormais apresenta a seguinte forma:

$$q(S_T; \theta) = \sum_{i=1}^k \psi_i L(S_T; \alpha_i, \sigma_i), \quad (3.37)$$

onde q representa a FDNR, ψ_i os pesos associados a cada densidade e θ representa o conjunto de parâmetros α_i , σ_i e ψ_i , $i = 1, \dots, k$. Para garantir que q representa uma densidade, $\psi_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$ e o somatório de todos os pesos tem que ser igual a 1.

Para uma opção do tipo *call* e para um dado preço de exercício e maturidade, o preço das opções a ser utilizado numa MLN é dado da seguinte forma:

$$V_C^{LN}(K; \theta) = e^{-r\tau} \sum_{i=1}^k \psi_i \int_K^{+\infty} (S_T - K) L(S_T; \alpha_i, \sigma_i) dS_T. \quad (3.38)$$

No caso de uma opção *put*, a expressão é:

$$V_P^{LN}(K; \theta) = e^{-r\tau} \sum_{i=1}^k \psi_i \int_0^K (K - S_T) L(S_T; \alpha_i, \sigma_i) dS_T. \quad (3.39)$$

Através das equações (3.38) e (3.39) é possível chegar a fórmulas semelhantes às de BS:

$$V_C^{LN}(K; \theta) = \sum_{i=1}^k \psi_i [S_i N(d_{1i}) - K e^{-r\tau} N(d_{2i})], \quad (3.40)$$

$$V_P^{LN}(K; \theta) = \sum_{i=1}^k \psi_i [-S_i N(-d_{1i}) + K e^{-r\tau} N(-d_{2i})], \quad (3.41)$$

$$d_{1i} = \frac{\ln\left(\frac{S_i}{K}\right) + (\alpha_i \tau + \frac{1}{2} \sigma_i^2 \tau)}{\sigma_i \sqrt{\tau}}, \quad (3.42)$$

$$d_{2i} = d_{1i} - \sigma_i \sqrt{\tau}. \quad (3.43)$$

O método da MLN é uma alternativa à limitação da volatilidade constante do modelo de BS. No entanto, as abordagens apresentam semelhanças. O uso de uma lognormal como densidade provém do comportamento da fórmula de BS.

A abordagem da MLN apresenta vantagens em relação aos casos anteriores, nomeadamente o aumento da flexibilidade. Em comparação com a abordagem de BS, onde a estimação é realizada apenas com o objetivo de obter um valor para a volatilidade, a abordagem da MLN realiza a estimação para um maior número de parâmetros, permitindo um aumento da variabilidade de formas para a FDNR. Aliada a esta característica, a imposição de restrições, de igualdade e de desigualdade, lineares ou não lineares, permite enquadrar os parâmetros de acordo com as necessidades e as intenções do estudo. Esta característica aumenta significativamente a flexibilidade na estimação.

Observando o caso específico estudado por Bhara [2], e Melick e Thomas [13], a MLN apresenta cinco parâmetros a estimar, $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \sigma_1, \sigma_2, \psi)$, com uma densidade associada a ψ e a segunda associada a $(1 - \psi)$ ([12]). O problema de otimização é realizado através do método dos mínimos quadrados.

Os mínimos quadrados permitem minimizar as distâncias entre os valores de opções teóricas e os valores de mercado/observados, procurando o melhor ajuste para um determinado conjunto de dados, ao minimizar a soma das diferenças entre os dois tipos de dados. Este método de otimização é utilizado com o objetivo de determinar uma solução ótima para um problema, de acordo com alguns parâmetros e restrições aos mesmo. Os mínimos quadrados são frequentemente usado para o cálculo de regressões lineares, mas também podem ser utilizados em regressões não lineares. Neste caso, o problema de otimização incorpora dois tipos de objetos, dados de mercado e dados teóricos. Nas observações de mercado é possível retirar dados para o preço do ativo subjacente e para o preço de exercício de opções, onde n_C e n_P representa o número de preços observados para opções do tipo *call* e *put* respetivamente. Estes dados compõem a primeira amostra, uma amostra de mercado. Uma segunda amostra é composta por valores teóricos para os preços de opções. Neste caso dá-se uso às fórmulas (3.40) e (3.41), seguindo a abordagem de BSM.

Como referido anteriormente, o modelo de BSM não incorpora o parâmetro μ , representativo das preferências dos investidores face ao risco. Visto que nesta estimação os preços teóricos são simulados de acordo com as fórmulas de BSM e este ambiente é considerado neutro face ao risco, o parâmetro é substituído pela taxa de juro isenta de risco (r). Desta forma, no método da mistura de distribuições lognormais, o parâmetro μ é então substituído pela taxa de juro, seguindo a metodologia de BSM. Assim sendo, a mistura passa a apresentar apenas 3 parâmetros a estimar, $\theta = (\sigma_1, \sigma_2, \psi)$.

Com base nesta abordagem, o problema de otimização vem da seguinte forma,

$$\underset{\sigma_1, \sigma_2, \psi}{\text{minimizar}} \quad \frac{1}{n_C} \sum_{i=1}^{n_C} w_{iC} [V_{iC}^* - V_C(S_t, \theta)]^2 + \frac{1}{n_P} \sum_{j=1}^{n_P} w_{jP} [V_{jP}^* - V_P(S_t, \theta)]^2 \quad (3.44)$$

$$\text{sujeito a} \quad 0 \leq \psi \leq 1 \quad (3.45)$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 < 0 \quad (3.46)$$

com V_C^* e V_P^* a representar, respetivamente, os preços de opções *call* e *put* observados. Para o intervalo de preços de exercício K_i , com $i = 1, \dots, n_C$, K_j , com $j = 1, \dots, n_P$, sendo n_C e n_P o número de preços observados para as opções *call* e *put*, respetivamente, e w_{iC} e w_{jP} a exprimir os pesos associados a cada contrato de opção.

Na MLN (3.44), o peso associado à primeira distribuição é dado por ψ e o restante valor é associado à segunda distribuição, $(1 - \psi)$.

As observações de mercado contêm em si diferentes quantidades de informação. Como referido anteriormente, as opções financeiras podem ser do tipo ATM, ITM ou OTM. Este tipo de caracterização tem inerente a si diferentes informações. Opções do tipo ATM e OTM apresentam uma maior probabilidade de serem exercidas e conseqüentemente maior quantidade de informação. Tendo em conta esta característica presente no mercado de opções, introduz-se no problema de otimização duas componentes, w_{iC} e w_{jP} , associadas a diferentes observações i e j , e a opções do tipo *call* e *put* respetivamente. Estas servem para quantificar a informação presente em cada observação.

Numa análise empírica, com a utilização de dados de mercado, w_{iC} e w_{jP} podem ser calculados através do *open interest*, do volume ou do *spread bid-ask*, sendo estes exemplos de medidas de liquidez. Os dados *open interest* dizem respeito ao número total de contratos pendentes que ainda não

foram liquidados num determinado momento. Estes são representativos da intensidade de negociação do contrato e transmitem, por isso, informação sobre as perspectivas do mercado ([11]).

Capítulo 4

Extensão do modelo de BSM com probabilidade de *default*

As opções financeiras podem contribuir para obter informação acerca do comportamento do preço do ativo subjacente num momento futuro. Câmara, Popova e Simkins [8] e Taylor, Tzeng e Widdicks [18] procuram obter uma estimacão para o parâmetro da probabilidade de *default*.

Câmara, Popova e Simkins [8] apresentaram um modelo no seguimento dos modelos de Aitchinson [1], Samuelson [17] e Merton [15], [16]. O modelo apresentado incorpora uma probabilidade de *default*. Ao contrário do modelo de Merton-DD, não são consideradas o capital próprio da empresa, o seu valor e as obrigações emitidas por ela.

Segundo Aitchison [1], um determinado ativo financeiro pode seguir um processo estocástico que permita atingir o valor 0 no fim de um certo período, com probabilidade não nula, por outro lado, esse mesmo ativo pode seguir um movimento Browniano geométrico. Câmara, Popova e Simkins [8] aplicaram o modelo usando dados de mercado referentes ao preço de opções. O ativo pode atingir o valor 0 com probabilidade δ e entrar em processo de *default* ou não atingir o *default*, neste caso com probabilidade $(1 - \delta)$. Neste modelo é possível obter fórmulas para atribuição de preços a opções *call* e *put*.

A distribuição seguida pelo ativo subjacente é designada por delta-lognormal. Num contexto de neutralidade face ao risco, o preço do ativo subjacente associado à medida de probabilidade Q , neutra face ao risco, é tal que:

$$S_T \sim \Delta^Q \left[1 - (1 - \delta)^\tau, \ln(S_t) + r\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\tau - \ln(1 - \delta)^{\frac{3}{2}\tau}, \sigma^2 + \ln(1 - \delta)^\tau \right]. \quad (4.1)$$

Sendo assim, os preços de opções *call* e *put*, de estilo europeu, com preço de exercício K e maturidade T são dados por:

$$V_C = SN(d_1) - (1 - \delta)^\tau K e^{-r\tau} N(d_2), \quad (4.2)$$

$$V_P = [1 - (1 - \delta)^\tau] K e^{-r\tau} + (1 - \delta)^\tau K e^{-r\tau} N(-d_2) - SN(-d_1), \quad (4.3)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau - \ln(1-\delta)^{\frac{\tau}{2}}}{\left[\sigma^2 + \ln(1-\delta)\right]^{\frac{1}{2}}\sqrt{\tau}}, \quad (4.4)$$

$$d_2 = d_1 - \left[\sigma^2 + \ln(1-\delta)\right]^{\frac{1}{2}}\sqrt{\tau}, \quad (4.5)$$

em que N é a função de distribuição de uma variável aleatória normal estandardizada e σ a volatilidade. As equações (4.2) e (4.3) permitem obter a fórmula de Black-Scholes, considerando $\delta = 0$.

Das equações (4.4) e (4.5) é possível obter uma restrição de desigualdade em relação aos parâmetros do problema, para garantir que a raiz quadrada é aplicada a um argumento positivo:

$$\sigma^2 + \ln(1-\delta) > 0 \Leftrightarrow \delta + e^{-\sigma^2} - 1 \leq 0. \quad (4.6)$$

Desta forma, o problema de otimização apresenta a seguinte formulação:

$$\underset{\delta, \sigma}{\text{minimizar}} \quad \frac{1}{n_C} \sum_{i=1}^{n_C} w_{iC} [V_C^* - V_C(S_t, \theta)]^2 + \frac{1}{n_P} \sum_{j=1}^{n_P} w_{jP} [V_P^* - V_P(S_t, \theta)]^2 \quad (4.7)$$

$$\text{sujeito a} \quad \delta + e^{-\sigma^2} - 1 \leq 0 \quad (4.8)$$

$$\sigma^2 > 0 \quad (4.9)$$

$$0 \leq \delta \leq 1 \quad (4.10)$$

com V_C^* e V_P^* a representar, respetivamente, os preços de opções *call* e *put* observados e V_C e V_P a representar os preços teóricos de opções pela metodologia de Câmara, Popova e Simkins [8]. Considerando o intervalo de preços de exercício K_i , com $i = 1, \dots, n_C$, K_j , com $j = 1, \dots, n_P$, sendo n_C e n_P o número de preços observados para as opções *call* e *put*, respetivamente, e w_C e w_P os pesos associados a cada contrato de opção.

Taylor, Tzeng e Widdicks [18] apresentam uma nova proposta para a estimação da probabilidade de *default* porém, em vez de se utilizar apenas uma densidade lognormal, os autores vão combinar duas densidades lognormais com uma probabilidade de *default* positiva. Esta abordagem evita a forma rígida da densidade lognormal, tornando-se mais flexível e permitindo descrever melhor as expectativas dos investidores.

Na abordagem original de Taylor, Tzeng e Widdicks [18], a mistura de duas lognormais possui mais 4 parâmetros que a estimação anteriormente descrita, sendo eles $\theta = (\sigma_1, \sigma_2, F_1, F_2, \psi_1, \psi_2)$. Devido ao uso de opções do estilo Americano, os autores assumiram estes contratos redigidos com ativos subjacentes a contratos de futuros sintéticos, no sentido de eliminar a influência dos dividendos no preço dos contratos de opções. Desta forma, os preços dos futuros, F , dependem do preço do ativo subjacente, S , da taxa de juro sem risco, r , e do valor presente dos dividendos até à maturidade, $VP(\omega)$:

$$F = e^{r\tau} (S - VP(\omega)). \quad (4.11)$$

Nesta abordagem não irá ser tido em conta a transformação do ativo subjacente para contratos de futuros como realizada no estudo dos autores. A análise irá basear-se na metodologia da mistura

de distribuições lognormais com 4 parâmetros, $\theta = (\sigma_1, \sigma_2, \psi_1, \psi_2)$. Esta variação é uma evolução ao método da mistura anteriormente descrito, realizado por Bhara [2] e Jondeau, Poon e Rockinger [12], devido à introdução da variável da probabilidade de *default* no problema de otimização. Este parâmetro implica o uso de diferentes restrições e acrescenta robustez ao modelo.

Na seguinte abordagem, cada densidade lognormal tem associada a si duas medidas ou dois pesos, $0 < \psi_1 < 1$ e $0 < \psi_2 < 1$. Para preços do ativo subjacente positivos dados por S_T , a FDNR apresenta a seguinte forma, semelhante à descrita na equação (3.36):

$$q(S_T|\theta) = \psi_1 L(S_T|\sigma_1) + \psi_2 L(S_T|\sigma_2). \quad (4.12)$$

$$L(S_T|\sigma_i) = \frac{1}{S_T \sigma_i \sqrt{\tau}} N \left[\frac{\log(S_T) - (\frac{1}{2} \sigma_i^2 \tau)}{\sigma_i \sqrt{\tau}} \right].$$

Assume-se que o preço do ativo subjacente é sempre positivo até à maturidade, T , e que o *default* ocorre quando $S_T = 0$, com a consideração da probabilidade de *default* dada por $(1 - \psi_1 - \psi_2)$, o que permite estipular que o preço teórico das opções de acordo com esta abordagem seja calculado da seguinte forma:

$$V_C(K|\theta_T) = \psi_1 V_{C1} + \psi_2 V_{C2}, \quad (4.13)$$

$$V_P(K|\theta_T) = e^{-r\tau}(1 - \psi_1 - \psi_2)K + \psi_1 V_{P1} + \psi_2 V_{P2}. \quad (4.14)$$

Nas fórmulas anteriores, V_{Ci} e V_{Pi} , $i = 1, 2$, são calculados através das fórmulas (3.14) e (3.15). Neste contexto, as opções *call* não têm qualquer valor caso a empresa entre em *default* porém, as opções *put* valem $e^{-r\tau}K$ nesse cenário. Estas duas expressões, (4.13) e (4.14), permitem extrair os preços teóricos a ser utilizados no problema de otimização.

Nesta abordagem designamos a função distribuição por MLNpd. Através desta equação (4.12) é possível encontrar os três casos abordados anteriormente. A distribuição lognormal (LN) é obtida quando $\psi_1 = 1$ e $\psi_2 = 0$. Quando $\psi_1 \leq 1$ e $\psi_2 = 0$, a distribuição lognormal com inclusão da probabilidade (LNpd) de *default* usada por Câmara, Popova e Simkins [8]. Por fim, a mistura de duas distribuições lognormais sem prever a probabilidade de *default* (MLN) usada por Bhara [2] e Melick e Thomas [13], ocorre quando $\psi_1 + \psi_2 = 1$.

De forma semelhante às abordagens anteriores, é utilizado o problema de otimização:

$$\underset{\sigma_1, \sigma_2, \psi_1, \psi_2}{\text{minimizar}} \quad \frac{1}{n_C} \sum_{i=1}^{n_C} w_{iC} (V_C^* - V_C(S_i, \theta))^2 + \frac{1}{n_P} \sum_{j=1}^{n_P} w_{jP} (V_P^* - V_P(S_j, \theta))^2 \quad (4.15)$$

$$\text{sujeito a} \quad \psi_1 + \psi_2 < 1 \quad (4.16)$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 < 0 \quad (4.17)$$

com V_C^* e V_P^* a representar, respetivamente, os preços de opções *call* e *put* observados e V_C e V_P a representar os preços de opções teóricos calculados pelas equações (4.13) e (4.14). Considerando o intervalo de preços de exercício K_i , com $i = 1, \dots, n_C$, K_j , com $j = 1, \dots, n_P$, sendo n_C e n_P o número

de preços observados para as opções *call* e *put*, respectivamente, e w_C e w_P os pesos associados a cada contrato de opção.

Em comparação com os dois modelos anteriormente estudados, este último problema de otimização apresenta um maior número de parâmetros e duas restrições desigualdade. Os pesos ou medidas estão associados não só às duas distribuições lognormais mas também à probabilidade de *default*, visto que esta não está presente nas fórmulas de preços (4.13) e (4.14).

Ao longo deste capítulo foi possível verificar os detalhes de cada processo de estimação estudada. A quantidade de parâmetros e o seu papel quer na função objetivo quer nas restrições, o tipo de restrições (lineares ou não lineares), a quantidade e a qualidade dos dados (preço de exercício, preço do ativo subjacente) bem como a forma de calcular os preços teóricos dos derivados, são fatores determinantes na determinação da dificuldade e da estabilidade dos processos de estimação. No capítulo seguinte será feita uma análise empírica usando estas duas abordagens, (4.7)-(4.9) e (4.15)-(4.17).

Capítulo 5

Análise Empírica

Neste capítulo realiza-se um estudo numérico da estimação da FDNR, utilizando a abordagem apresentada anteriormente por Bhara [2] e Jondeau, Poon e Rockinger [12] bem como a estimação das probabilidades de *default* através dos modelos de Câmara, Popova e Simkins [8] e de Taylor, Tzeng e Widdicks [18]. Estas estimações são aplicadas, numa primeira fase para dados simulados e, de seguida, a dados de mercado.

Nas estimações através de dados simulados, os preços teóricos são perturbados, com a implementação de um ruído aleatório. Esta perturbação tenta aproximar o comportamento da simulação ao comportamento observado no mercado, através da introdução de heterocedasticidade no modelo.

Considerando V_{iC} e V_{jP} , com $i = 1, \dots, n_C$ e $j = 1, \dots, n_P$, como os preços simulados através das fórmulas de BSM e, V_{iC}^* e V_{jP}^* como os preços simulados com perturbações de opções *call* e *put*, as seguintes expressões representam a perturbação introduzida no modelo,

$$V_{iC}^* = V_{iC} + \varepsilon_i, \quad (5.1)$$

$$V_{jP}^* = V_{jP} + \eta_j, \quad (5.2)$$

com ε_i e η_j a representarem uma componente da variância do termo de erro para cada observação i e j . Nestas expressões, ε_i segue uma distribuição normal de média zero e desvio padrão εV_{iC} e η_j segue uma distribuição normal de média zero e desvio padrão ηV_{jP} . Os preços simulados das opções são calculados através das equações (5.1) e (5.2). Desta forma, o erro está associado a cada observação. Nas simulações seguintes, o valor dado a ε e a η é 0.01.

Como referido no Capítulo 3, as componentes w_{iC} e w_{jP} visam quantificar a relevância informação presente nos dados. Se considerarmos dados de mercado, estas componentes são dadas pelos valores, por exemplo, do *open interest* para cada contrato de opções. Numa análise empírica utilizando dados simulados, w_{iC} e w_{jP} são calculados através das seguintes fórmulas,

$$w_{iC} = \frac{1}{\varepsilon |V_{iC}|}, \quad (5.3)$$

$$w_{jP} = \frac{1}{\eta |V_{jP}|}. \quad (5.4)$$

É possível verificar que, sendo o parâmetro de erro constante, quanto maior for o valor do contrato de opção, menor será o peso associado à observação. Como referido anteriormente, observações com pesos mais elevados assumem maior relevância no processo de estimação enquanto observações com pesos mais baixos têm menor relevância.

Os dados de mercado dizem respeito às empresas *Gamestop* (GME) e *Apple* (AAPL), retirados do *website yahoo finance* para os dias 5 a 9 de julho e 14 de julho de 2021 respetivamente. Foram extraídos dados dos preços de opções financeiras *call* e *put* com maturidade até 22 de janeiro de 2022.

A AAPL é uma empresa multinacional norte americana que comercializa *software* de computador e outros produtos tecnológicos tais como *smartphones*, *personal computers*, *smartwatches*, entre outros, e foi fundada em abril de 1976. Por sua vez, a GME é uma empresa de jogos de vídeo e entretenimento fundada em 1984. Recentemente, em janeiro de 2021, foi realizada uma oportunidade de arbitragem nas ações da GME por uma comunidade do *website Reddit*. A oportunidade consistia em realizar uma venda de ações a descoberto com o objetivo do valor de mercado da empresa descer e futuramente recomprar as ações por um valor mais baixo. O caso ganhou mediatismo porque, em vez da queda esperada do valor das ações, o valor de compra dos ativos subiu mais de 1000%, forçando os investidores a recomprarem os seus ativos por valores exorbitantes. Esta sugestão divulgada pela comunidade do *Reddit* foi replicada por muitos investidores levando a uma falsa valorização da empresa e dos seus ativos.

A escolha destas duas empresas para a análise real nesta dissertação tem em conta o seu historial. Por um lado uma empresa consolidada e líder de mercado mundial, por outro lado uma empresa cuja valorização resulta somente da especulação e das ações de investidores particulares via *online*. Desta forma, o objetivo é estimar uma probabilidade de *default* para as duas empresas com base nos seus preços de opções e utilizando os dois modelos abordados no capítulo 4, o modelo de Câmara, Popova e Simkins [8] e de Taylor, Tzeng e Widdicks [18].

De modo a avaliar e a interpretar os dados obtidos pela estimação, podemos considerar as estatísticas erro padrão, *z-stat* e *p-value*. O erro padrão é uma medida de variação da média da amostra e é calculado pela raiz quadrada da diagonal da matriz de covariância. O *z-stat* é o rácio entre os parâmetros estimados e o erro padrão, e segue como hipótese nula a distribuição normal. Por fim, o *p-value* representa sob a hipótese nula, a aceitação das estimativas obtidas pela estimação. Este é calculado da seguinte forma, $1 - N(z-stat)$. Estas estatísticas permitem verificar se o modelo foi bem estimado e se os seus parâmetros representam valores interpretáveis. A resolução destes problemas é realizada através do uso do *software R*.

5.1 Dados Simulados

5.1.1 Usando a mistura de distribuições lognormais

Numa fase inicial procedeu-se à estimação da FDNR sem a inclusão das probabilidades de *default*. Para tal foi utilizado o método descrito anteriormente na secção 3.1, a abordagem seguida por Jondeau, Poon e Rockinger [12]. Os preços teóricos das opções foram calculados com base nas equações (3.40) e (3.41). Após o cálculo dos preços teóricos, procedeu-se à estimação da respetiva FDNR, através do problema de otimização (3.44)-(3.46).

Os dados do problema são o preço do ativo subjacente $S = 50$, a taxa de juro sem risco $r = 0.02$, a maturidade $\tau = 0.25$, sugestões de valores iniciais para os parâmetros $\theta = (\sigma_1, \sigma_2, \psi) = (0.25, 0.5, 0.8)$ e, por fim, o preço de exercício K a variar entre 25 e 90.

A primeira distribuição apresenta uma média $\ln(50) + \left(0.02 - \frac{0.25^2}{2}\right) * 0.25$ e desvio padrão $\frac{0.25^2}{4}$ com um peso associado de 0.8 enquanto que a segunda distribuição tem média $\ln(50) + \left(0.02 - \frac{0.5^2}{2}\right) * 0.25$ e desvio padrão $\frac{0.5^2}{4}$, correspondendo a 20% da mistura.

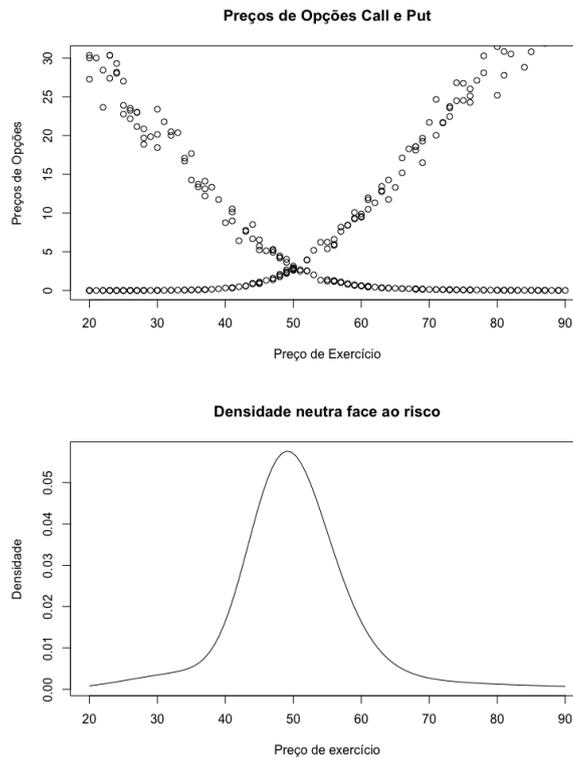


Fig. 5.1 Preços de opções *call* e *put* simulados; Estimativa da FDNR obtida através de uma mistura de duas distribuições lognormais.

A Figura 5.1 apresenta, no gráfico de cima, os preços simulados dos contratos de opções *call* e *put* pelas fórmulas (3.14) e (3.15). O gráfico de baixo representa a estimativa da FDNR obtida através do problema de otimização (3.44)-(3.46). Pela análise do gráfico da FDNR observa-se uma ligeira assimetria positiva, o que sugere que a probabilidade associada aos ganhos é superior.

O objectivo central desta simulação é verificar se o método proposto é capaz de recuperar uma FDNR de forma eficaz. Pela análise da Tabela 5.1 e das estatísticas produzidas, verifica-se que os valores estimados são bastante semelhantes aos reais, o que sugere uma boa aproximação dos parâmetros e uma consequente boa recuperação da FDNR.

5.1.2 Usando uma densidade lognormal com inclusão da probabilidade de *default*

Nesta abordagem realizou-se uma estimação com a inclusão das probabilidades de *default*. Desta forma, os preços das opções foram calculados seguindo o método apresentado por Popova, Câmara

Parâmetros	Valores Teóricos	Valores Estimados	Erro Padrão	z -stat	p -value
σ_1	0.25	0.2370	0.0315	7.5332	0.000
σ_2	0.5	0.5088	0.0564	9.0148	0.000
ψ	0.8	0.7813	0.1119	6.9851	0.000

Tabela 5.1 Estimação dos parâmetros através de uma mistura de duas distribuições lognormais: Comparação entre os valores teóricos e os estimados através das estatísticas erro padrão, z -stat e p -value.

and Simkins [8], utilizando as fórmulas (4.2) e (4.3). Após este cálculo dos preços, realizou-se a estimação dos parâmetros, resolvendo o problema de minimização (4.7)-(4.10).

Forneceram-se os seguintes dados como *input*, o preço do ativo subjacente $S = 50$, a taxa de juro sem risco $r = 0.02$, a maturidade $\tau = 0.25$, sugestões de valores iniciais para os parâmetros $\theta = (\sigma, \delta) = (0.8, 0.1)$ e, por fim, o preço de exercício K a variar entre 25 e 90.

Estes dados estão associados a uma densidade delta-lognormal com probabilidade 0.1 de obter o ponto 0 e com a restante probabilidade de obter uma parte contínua representada por uma distribuição lognormal de média $\ln(50) + 0.02 * 0.25 - \frac{0.8^2 * 0.25}{2} - \ln(1 - 0.1)^{\frac{3}{2} * 0.25}$ e desvio padrão $0.8^2 + \ln(1 - 0.1)^{0.25}$.

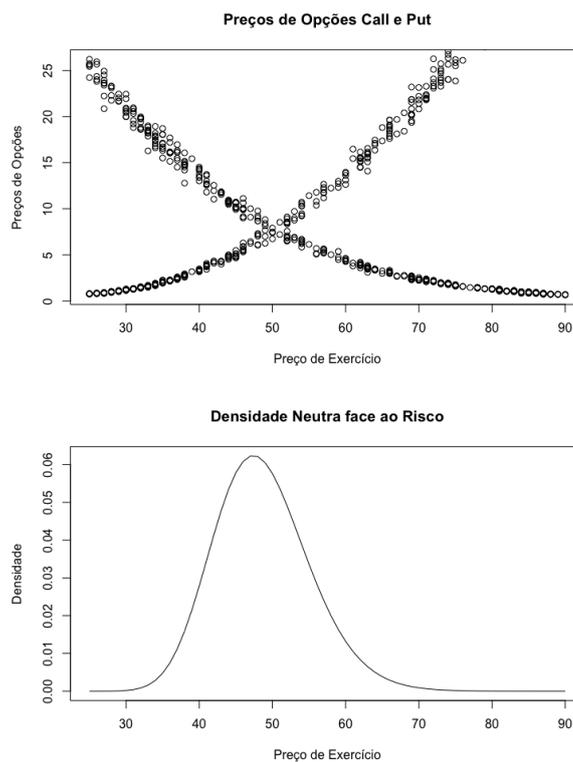


Fig. 5.2 Preços de opções *call* e *put* simulados; Estimação da FDNR delta-lognormal

A Figura 5.2 apresenta os preços simulados dos contratos de opções *call* e *put* pelas fórmulas (4.2) e (4.3) e a estimativa da FDNR obtida através do processo de otimização (4.7)-(4.9), respetivamente. A FDNR representa a parte contínua da densidade delta-lognormal. Pela análise do gráfico da FDNR

observa-se uma ligeira assimetria positiva, o que sugere que a probabilidade associada aos ganhos é superior.

Como não há incerteza perante o modelo visto que estamos a trabalhar num ambiente de simulação, os valores estimados são semelhantes aos reais, o que sugere uma boa estimação dos parâmetros e uma consequente boa recuperação da FDNR, com as estatísticas a comprovar isso. Esta conclusão pode ser verificada na Tabela 5.2.

Parâmetros	Valores Teóricos	Valores Estimados	Erro Padrão	<i>z-stat</i>	<i>p-value</i>
σ	0.8	0.7879	0.0027	289.2918	0.000
δ	0.1	0.0871	0.0062	14.0848	0.000

Tabela 5.2 Estimação dos parâmetros através de uma distribuição delta-lognormal com inclusão de probabilidade de *default*; Comparação entre os valores teóricos e os estimados através das estatísticas *p-value*, *z-stat* e erro padrão.

5.1.3 Usando a mistura de distribuições lognormais com inclusão da probabilidade de *default*

Na última fase de simulação de dados, acrescenta-se a introdução da probabilidade de *default* ao método da mistura de distribuições lognormais, método apresentado por Taylor, Tzeng e Widdicks [18]. Os preços das opções são calculados através das fórmulas de BS (3.14) e (3.15). Após este cálculo dos preços, realizou-se a estimação dos parâmetros, resolvendo o problema de minimização (4.15)-(4.17).

Como referido anteriormente, nesta simulação não irá ser realizada a estimação dos valores para os contratos de futuros sintéticos. Como o objetivo é recuperar eficazmente os parâmetros da lognormal bem como os seus pesos, a análise é realizada de uma forma simplificada, sendo apenas necessários estimar quatro parâmetros, $\theta = (\sigma_1, \sigma_2, \psi_1, \psi_2)$.

Os dados do problema são o preço do ativo subjacente $S = 50$, a taxa de juro sem risco $r = 0.02$, a maturidade $\tau = 0.25$, sugestões de valores iniciais para os parâmetros $\theta = (\sigma_1, \sigma_2, \psi_1, \psi_2) = (0.25, 0.9, 0.8, 0.15)$ e, por fim, o preço de exercício K a variar entre 20 e 90. Estes dados estão associados a uma mistura de duas distribuições lognormais com a inclusão de uma probabilidade de *default* de valor $(1 - \psi_1 - \psi_2)$.

A Figura 5.3 apresenta os preços simulados dos contratos de opções *call* e *put* pelas fórmulas (3.14) e (3.15) e a estimativa da FDNR obtida através do processo de otimização (4.15)-(4.17), respetivamente.

O objectivo central desta simulação é verificar se o método proposto é capaz de recuperar uma FDNR de forma eficaz. Pela análise da Tabela 5.3 e das estatísticas produzidas, verifica-se que os valores estimados são bastante semelhantes aos reais, o que sugere uma boa aproximação dos parâmetros e uma consequente boa recuperação da FDNR. Segundo os valores observados na Tabela 5.3 é possível retirar os valor real e estimado para a probabilidade de *default*. Esta probabilidade é dada por $(1 - \psi_1 - \psi_2)$ e, neste modelo foi estimado que apresente o valor de 0.0456, muito semelhante ao valor estabelecido inicialmente.

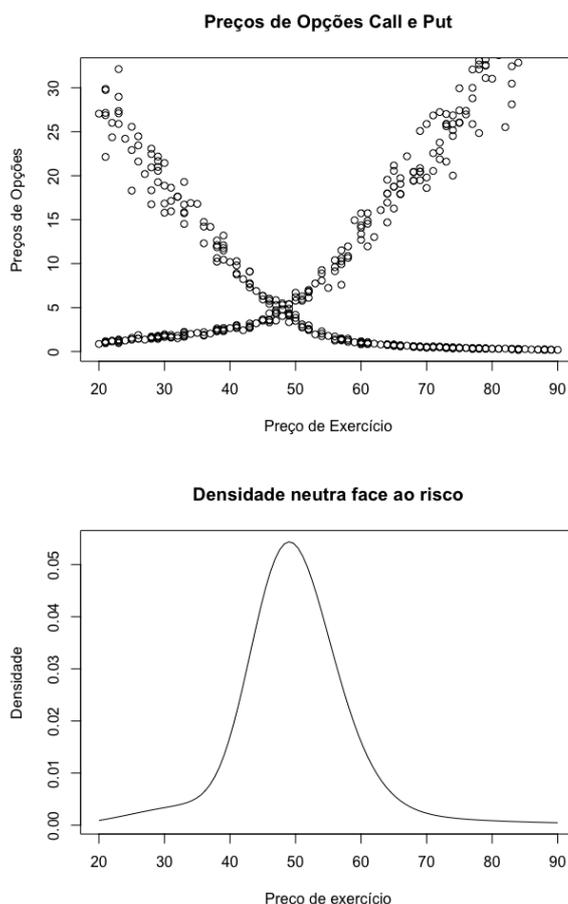


Fig. 5.3 Preços de opções *call* e *put* estimados; Estimativa da FDNR obtida através de uma mistura de duas distribuições lognormais com inclusão da probabilidade de *default*.

5.2 Dados de mercado

No caso da AAPL, o valor do preço do ativo subjacente no dia 14 de julho de 2021 era 144.89 para uma maturidade até 22 de janeiro de 2022 e os preços estão representados na Figura 5.4.

Como é possível observar na Figura 5.4, a configuração apresenta dados bem comportados, com poucos valores a apresentarem variações significativas. O gráfico não apresenta uma nuvem densa mas o bom comportamento dos dados garante que a estimação possa ser realizada com observações de apenas um dia. A existência de *outliers* observados no gráfico presente na Figura 5.4 podem aumentar o erro no processo de estimação. Porém, pelo conhecimento do histórico e estado geral da empresa, pode-se esperar a estimação de uma probabilidade de *default* relativamente baixa.

No caso da GME, o valor preço do ativo subjacente durante a semana de 5 a 9 de julho de 2021 era 195.132 para uma maturidade até 22 de janeiro de 2022 e os preços estão representados na Figura 5.5. Na figura observa-se uma nuvem muito densa, com observações de uma semana. A sua configuração é mais instável que a anterior, apresentando uma alta variação dos dados, o que poderá tornar relativamente mais difícil a estimação duma probabilidade para o *default*. É expectável que a

Parâmetros	Valores Teóricos	Valores Estimados	Erro Padrão	z -stat	p -value
σ_1	0.25	0.2463	0.03136	7.8564	0.000
σ_2	0.9	0.8317	0.0970	8.5768	0.000
ψ_1	0.8	0.7738	0.0582	13.2990	0.000
ψ_2	0.15	0.1806	0.0582	3.1060	0.000

Tabela 5.3 Estimação dos parâmetros através de uma mistura de duas distribuições lognormais com inclusão da probabilidade de *default*; Comparação entre os valores teóricos e os estimados através das estatísticas p -value, z -stat e erro padrão.

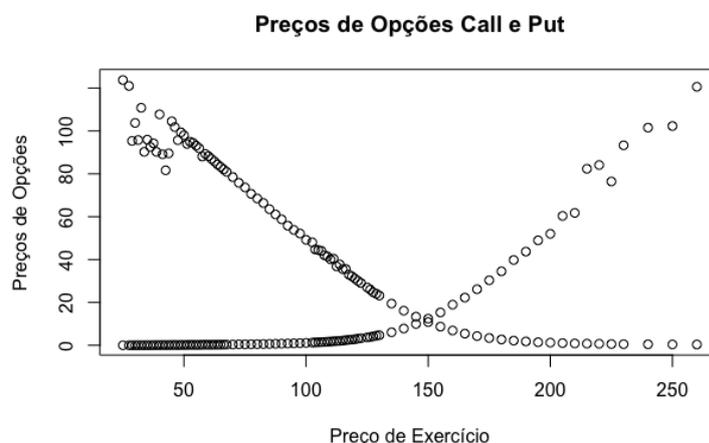


Fig. 5.4 Preços de opções *call* e *put* da AAPL no dia 14 de julho com uma maturidade até 22 de janeiro de 2022.

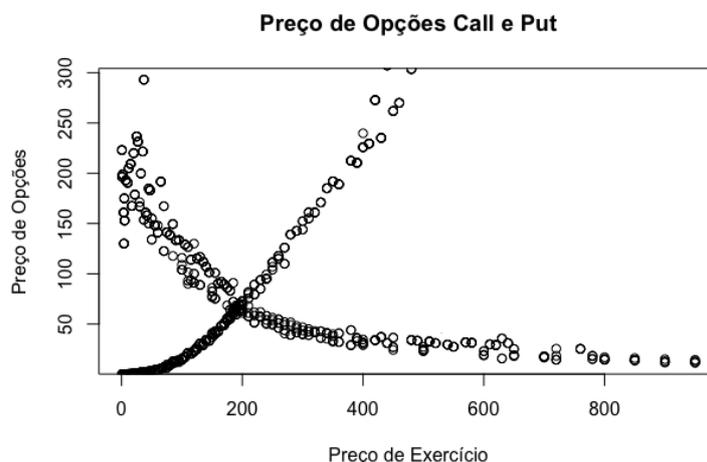
estimação devolva uma probabilidade *default* mais elevada que a AAPL devido à sua instabilidade e alta especulação sobre os preços.

5.2.1 Usando uma densidade lognormal com inclusão da probabilidade de *default*

Realizou-se a estimação para o caso da empresa AAPL pelo método de Câmara, Popova e Simkins [8]. Na Figura 5.6 é possível observar a parte contínua da FDNR estimada para a empresa AAPL. A sua configuração vai de encontro às expectativas e ao comportamento observado nos dados. Foi estimada uma volatilidade relativamente baixa, de cerca de 31% ao ano, e uma probabilidade de *default* a seis meses de aproximadamente 0.1%.

Parâmetros	Valores Estimados	Erro Padrão	z -stat	p -value
σ	0.3067	0.0001	2203.2199	0.0000
δ	0.0010	0.0005	2.0445	0.0205

Tabela 5.4 Estimação dos parâmetros para a empresa AAPL através do uso de uma distribuição delta-lognormal com inclusão da probabilidade de *default*; Estatísticas p -value, z -stat e erro padrão para os valores estimados.



vou

Fig. 5.5 Preços de opções *call* e *put* da GME entre os dias 5 e 9 de julho com uma maturidade até 22 de janeiro de 2022.

De seguida, passou-se à estimação para o caso da empresa GME. Na Figura 5.7 é possível observar a parte contínua da FDNR estimada para a empresa GME. A sua configuração vai de encontro com as expectativas e com o comportamento observado nos dados. Foi estimada uma volatilidade muito elevada, de cerca de 128% ao ano, e uma probabilidade de *default* a seis meses de 10%. Estas estimações vão de encontro às expectativas, dado que se trata de uma empresa que apresenta uma alta instabilidade, resultante da especulação realizada por investidores particulares.

Parâmetros	Valores Estimados	Erro Padrão	<i>z-stat</i>	<i>p-value</i>
σ	1.2806	0.0009	1368.8232	0.0000
δ	0.1041	0.0018	58.2394	0.0000

Tabela 5.5 Estimação dos parâmetros para a empresa GME através do uso de uma distribuição delta-lognormal com inclusão da probabilidade de *default*; Estatísticas *p-value*, *z-stat* e erro padrão para os valores estimados.

A primeira empresa (AAPL) apresenta estabilidade e poucas variações nos preços, o que resulta numa volatilidade baixa, enquanto que a segunda (GME) apresenta um crescimento inseguro, um ambiente extremamente volátil e uma probabilidade elevada de *default*. Através das estimações realizadas é possível verificar que o modelo apresenta resultados interpretáveis e consistentes com as realidades das duas empresas.

5.2.2 Usando a mistura de distribuições lognormais com inclusão da probabilidade de *default*

Para comparar as estimações dos dois modelos procedeu-se à estimação para o caso da empresa AAPL pelo método de Taylor, Tzeng e Widdicks [18]. Na Tabela 5.6 é possível observar que foram estimadas volatilidades relativamente baixas, de cerca de 10% e 15% ao ano para cada distribuição, e uma probabilidade de *default* a seis meses de 2.5%. Comparando com as estimativas do modelo

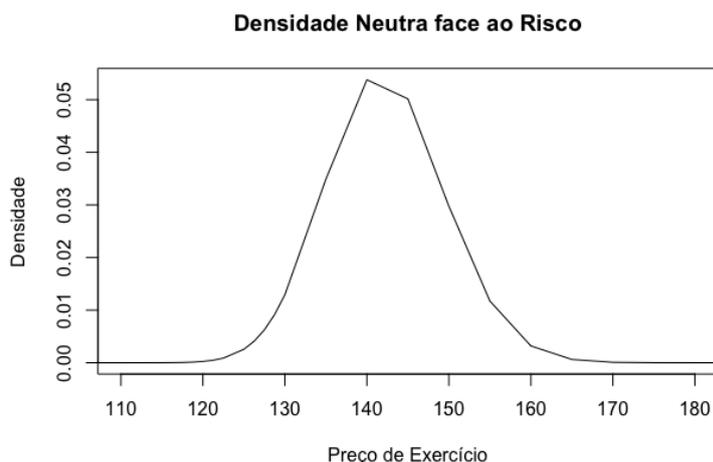


Fig. 5.6 Estimativa da FDNR para a AAPL, obtida através do uso de uma distribuição delta-lognormal com inclusão da probabilidade de *default*.

anterior, teoricamente são reveladas volatilidades semelhantes mas uma probabilidade de *default* relativamente mais baixa.

Parâmetros	Valores Estimados	Erro Padrão	<i>z-stat</i>	<i>p-value</i>
σ_1	0.1	13.3116	0.0075	0.4870
σ_2	0.15	19.7028	0.0076	0.4970
ψ_1	0.75	28.9249	0.0260	0.4897
ψ_2	0.225	32.6507	0.0069	0.4973

Tabela 5.6 Estimação dos parâmetros para a empresa AAPL através de uma mistura de duas distribuições lognormais com inclusão da probabilidade de *default*; Estatísticas *p-value*, *z-stat* e erro padrão para os valores estimados.

No que diz respeito ao caso da GME, na Tabela 5.7 é possível observar que foram estimadas volatilidades extremamente elevadas associadas às duas densidades, de cerca de 138% e 147% ao ano para cada distribuição, e uma probabilidade de *default* a seis meses de 10.8%. Comparando com as estimativas do modelo anterior, teoricamente são reveladas volatilidades semelhantes mas uma probabilidade de *default* relativamente mais alta.

Num ambiente de simulação há muitas observações, o que resulta numa nuvem muito densa. Como é um ambiente controlado, a variação dos preços é quase residual o que permite que as estimativas devolvem valores muito próximos dos teóricos.

Por sua vez, num ambiente não simulado, trabalhando com dados de mercado, a incerteza é algo recorrente e acentuada, quer em relação ao modelo quer em relação às características dos dados. As estimativas refletem isso, *p-values* elevados são resultado de uma estimação com elevada incerteza, não interpretável.

É possível notar que, com os mesmo dados, estimar pelo modelo de Câmara, Popova e Simkins [8] resulta em estimativas interpretáveis por ser um modelo mais simples e com menos parâmetros a estimar. Em contrapartida, um modelo mais complexo e com mais variáveis a estimar como o

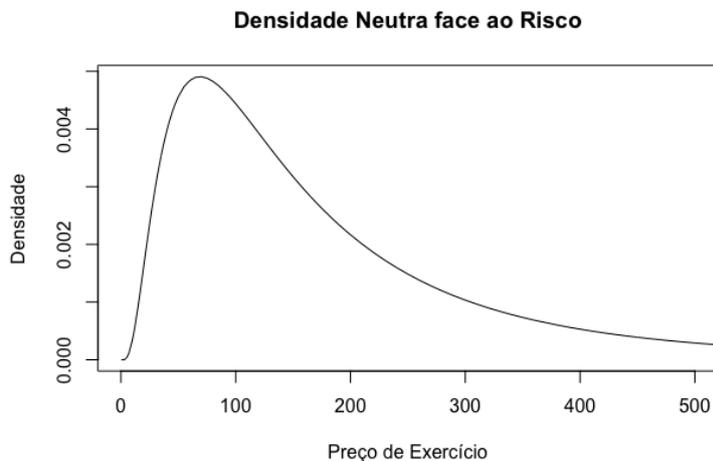


Fig. 5.7 Estimativa da FDNR para a GME, obtida através do uso de uma distribuição delta-lognormal com inclusão da probabilidade de *default*.

Parâmetros	Valores Estimados	Erro Padrão	<i>z-stat</i>	<i>p-value</i>
σ_1	1.3841	155.4577	0.0089	0.4965
σ_2	1.4721	110.0374	0.01334	0.4947
ψ_1	0.1760	102.3746	0.0017	0.4993
ψ_2	0.7360	56.9433	0.0129	0.4949

Tabela 5.7 Estimação dos parâmetros para a empresa GME através de uma mistura de duas distribuições lognormais com inclusão da probabilidade de *default*; Estatísticas *p-value*, *z-stat* e erro padrão para os valores estimados.

de Taylor, Tzeng e Widdicks [18], não apresenta estimativas passíveis de serem interpretadas. A desadequação do modelo pode estar associada ao facto de se verificar grande incerteza ou pela baixa qualidade da base de dados utilizada.

Capítulo 6

Conclusão

As opções financeiras revelam ser fontes de informação importantes sobre as expectativas dos investidores em relação à evolução futura do preço do ativo subjacente. Permitem uma estimação de funções densidade neutras face ao risco representativas de possíveis movimentos futuros do preço do ativo.

Foram expostos dois modelos para a estimação de uma função densidade neutra face ao risco. A estimação foi realizada através de preços de opções financeiras. As duas abordagens utilizadas distinguem-se pelo número de distribuições lognormais associadas e pela forma como o parâmetro do *default* é inserido nos modelos. Na primeira estimação, através de uma distribuição lognormal com probabilidade de *default*, o parâmetro do *default* está incluído na fórmula de atribuição de preços. Na segunda estimação, utilizando uma mistura de distribuições lognormais, a probabilidade de *default* está associada a uma distribuição da mistura e revela hipóteses de *default ex ante*.

Numa primeira fase realizou-se a análise com preços simulados e demonstrou-se que os dois métodos são capazes de recuperar os parâmetros, nomeadamente a probabilidade de *default* e as FDNR teóricas com precisão. A análise com base em dados simulados tem como objetivo testar a adequação dos modelos num ambiente simulado. Neste caso, simulam-se muitas observações que apresentam pouca variação, resultando numa nuvem muito densa. Desta forma, ao realizar a estimação, os parâmetros são muito semelhantes aos teóricos, revelando uma adequação dos modelos.

Na análise através de dados de mercado, foram consideradas opções financeiras sobre as empresas *Apple* e *GameStop*, para as mesmas maturidades. Estas duas empresas apresentam estabilidade e capacidades financeiras distintas, o que permite avaliar a adequação dos modelos em prever uma probabilidade para o *default* tendo em conta as duas situações e historiais. Neste contexto, os modelos apresentaram desempenhos diferentes. O modelo de Câmara, Popova e Simkins [8] resulta em estimativas interpretáveis, porém o modelo de Taylor, Tzeng e Widdicks [18] verifica a existência de uma grande incerteza nas estimações. A desadequação do modelo de Taylor, Tzeng e Widdicks [18] pode ser resultante de um aumento de complexidade na estimação e/ou pouca qualidade nos dados presentes na amostra.

Foi estudada a aplicabilidade dos dois modelos numa obtenção de probabilidades de *default*. Tendo em conta o desempenho do modelo de Taylor, Tzeng e Widdicks [18] na estimação através de dados de mercado, uma análise futura com o uso de uma amostra de maior qualidade era relevante para retirar mais conclusões sobre a adequação do modelo. Seria interessante, numa análise futura, considerar também outro tipo de ativos financeiros como derivados de crédito, nomeadamente *credit*

default swaps. Estes derivados podem conter mais informação sobre o *default* e a sua probabilidade de ocorrência.

Bibliografia

- [1] Aitchison, J. (1955). On the Distribution of a Positive Random Variable Having a Discrete Probability Mass at the Origin. *Journal of the American Statistical Association*, 50(271):901–908.
- [2] Bahra, B. (2005). Implied Risk-neutral Probability Density Functions From Option Prices: Theory and Application. *SSRN Electronic Journal*.
- [3] Berg, T. (2011). From Actual to Risk-Neutral Default Probabilities: Merton and Beyond. *SSRN Electronic Journal*.
- [4] Bharath, S. T. and Shumway, T. (2008). Forecasting default with the Merton distance to default model. *Review of Financial Studies*, 21(3):1339–1369.
- [5] Black, F. (1976). The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2):167–179.
- [6] Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–657.
- [7] Breeden, D. T. and Litzenberger, R. H. (1978). Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices. *The Journal of Business*, 51(4):621.
- [8] Câmara, A., Popova, I., and Simkins, B. (2012). A comparative study of the probability of default for global financial firms. *Journal of Banking and Finance*, 36(3):717–732.
- [9] Cox, J. C. and Ross, S. A. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2):145–166.
- [10] Cvitanic, J. and Zapatero, F. (2004). *An Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*, volume 18.
- [11] Hull, J. C. (2009). *Options, Futures, and Other Derivatives*, volume 7.
- [12] Jondeau, E., Rockinger, M., and Poon, S.-H. (2008). *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*.
- [13] Melick, W. R. and Thomas, C. P. (1997). Recovering an Asset's Implied PDF from Option Prices: An Application to Crude Oil during the Gulf Crisis. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32(1):91.
- [14] Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *Bell J Econ Manage Sci*, 4(1):141–183.
- [15] Merton, R. C. (1974). On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *The Journal of Finance*, 29(2):449.
- [16] Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2):125–144.
- [17] Samuelson, P. A. (1973). Mathematics of Speculative Price. 15:1–42.

- [18] Taylor, S. J., Tzeng, C. F., and Widdicks, M. (2014). Bankruptcy probabilities inferred from option prices. *Journal of Derivatives*, 22(2):8–31.