



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mariana Tocha de Seça

**UM ESTUDO SOBRE O MODELO DE BLACK-
LITTERMAN**

VOLUME 1

**Dissertação no âmbito do Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças,
orientada pelo Professor Doutor José Luís Esteves dos Santos e apresentada ao
Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia e à
Faculdade de Economia.**

Outubro de 2021

Um estudo sobre o Modelo de Black-Litterman

Mariana Tocha de Seça



UNIVERSIDADE DE
COIMBRA

Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças

Master in Quantitative Methods in Finance

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Outubro de 2021

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer ao Professor José Luís Esteves dos Santos por toda a disponibilidade e orientação ao longo destes últimos meses.

Quero também agradecer a todas as pessoas que se cruzaram comigo ao longo do meu percurso académico, tanto durante a Licenciatura na Universidade de Aveiro como durante o Mestrado na Universidade de Coimbra. Um especial obrigada às minhas queridas Turbinadas, Ana Rita, Ana S., Cristiana, Catarina e Ana C. e às minhas queridas Fragilizadas, Madalena e Ana Isabel. Sem vocês, estes 5 anos não tinham sido os mesmos. Foram vocês que me ajudaram a ultrapassar as fases de adaptação às novas cidades e que estiveram do meu lado nos momentos de desespero.

Aos meus amigos da terrinha, obrigada por me ajudarem a desanuviar e distrair nestes últimos anos e principalmente nestes meses finais. Sem vocês, o meu caminho teria sido muito mais difícil.

Por último, quero agradecer aos meus pais e irmão por me apoiarem em tudo e por acreditarem que eu seria capaz de ultrapassar todos os desafios propostos.

A todos, o meu Obrigada!

O trabalho aqui desenvolvido foi parcialmente realizado no âmbito do projeto MobiWise: From mobile sensing to mobility advising (P2020 SAICTPAC / 0011/2015), co-financiado pelo COMPETE 2020, Portugal 2020 - Programa Operacional de Competitividade e Internacionalização (POCI), do ERDF (Fundo Europeu de Desenvolvimento Regional) da União Europeia e da Fundação portuguesa para a Ciência e Tecnologia (FCT).



Cofinanciado por:



UNIÃO EUROPEIA
Fundo Europeu
de Desenvolvimento Regional

Resumo

A construção de portefólios pode levar, muitas das vezes, a portefólios pouco intuitivos e com elevado erro de estimação. Para combater este problema, surgiu a necessidade de criar modelos que conduzissem a portefólios mais eficientes, como por exemplo, o modelo de Black-Litterman. Este modelo foi apresentado pela primeira vez em 1990 por Fischer Black e Robert Litterman, tendo surgido outras versões deste modelo desde então.

O modelo de Black-Litterman permite que os investidores combinem as suas perspetivas com o mercado em equilíbrio e, portanto, no capítulo 2 desta dissertação iremos descrever toda a metodologia deste modelo, bem como a matemática que está por trás do mesmo. Iremos utilizar dois métodos distintos para a determinação da fórmula de Black-Litterman: a abordagem Bayesiana e a abordagem com o método de Estimação Mista de Theil. Além disso, ao longo desta exposição teórica iremos aplicar um pequeno exemplo académico que facilitará a perceção, não só do modelo, como também dos resultados obtidos com a sua aplicação.

No capítulo 3 iremos aplicar este modelo ao contexto real do mercado financeiro português, com o auxílio do *software* MATLAB, utilizando os retornos diários dos 18 ativos constituintes do índice PSI20 num período de 18 meses (período *in-sample*) utilizando os retornos diários dos 6 meses seguintes (período *out-of-sample*) para definir as perspetivas do investidor. Com esta aplicação poderemos analisar de uma forma mais crítica os resultados obtidos, uma vez que se trata de um contexto real o que nos permitirá concluir os pontos fortes e as falhas do modelo. Neste mesmo capítulo iremos também fazer uma breve simulação para testar a influência da variação dos dados futuros (período *out-of-sample*) nos retornos efetivos obtidos tendo em conta os portefólios determinados na secção anterior.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Apresentação geral do modelo	1
1.2 Estado da Arte	2
2 Modelo de Black-Litterman	5
2.1 Modelos auxiliares	5
2.1.1 Modelo de Markowitz	6
2.1.2 CAPM	7
2.2 Descrição do modelo de Black-Litterman	9
2.2.1 Perspetivas do Investidor	9
2.2.2 Fórmula de Black-Litterman	11
2.2.3 Os parâmetros do modelo	21
3 Aplicação do modelo	27
3.1 Seleção dos dados reais	28
3.2 Resultados	31
3.2.1 Heurísticas	31
3.2.2 Optimização sem atualização dos retornos	33
3.2.3 Optimização com atualização dos retornos - Modelo de Black-Litterman	36
3.2.4 Variantes do Modelo de Black-Litterman	40
3.2.5 Perspetivas Subvalorizadas e Sobrevalorizadas	43
3.3 Simulação	44
4 Conclusão	49
Bibliografia	51
Anexo A Gráficos	53
Anexo B Tabelas	61

Lista de Figuras

2.1	Gráfico das fronteiras de eficiência (FE) em que os retornos e variância foram estimados a partir de: dados históricos (Hist), Black-Litterman (BL) e Black-Litterman com 100% de confiança nas perspectivas (BL 100), considerando $\tau = 0,01$. Além disso, estão também assinalados os pontos associados aos portfólios ótimos do rácio de Sharpe (RS) e da aversão ao risco (AR) e ao portfólio inicial (heur).	20
2.2	Gráfico das fronteiras de eficiência usando a média esperada e a variância obtidas pela aplicação do modelo de Black-Litterman para os diferentes valores de τ	22
3.1	Constituição dos portfólios que constituem as heurísticas.	32
3.2	Constituição dos portfólios obtidos por métodos de otimização, utilizando as previsões dos retornos obtidos pelos dados históricos e pelo método CAPM.	33
3.3	Gráfico da relação entre os retornos efetivos e os retornos previstos. Os portfólios opt-CAPM-RS e opt-CAPM-AR estão sobrepostos.	35
3.4	Evolução da composição dos portfólios na fronteira de eficiência com o aumento do retorno previsto segundo os modelos de otimização com retornos históricos (cima) e com retornos em equilíbrio obtidos através do CAPM (baixo) no período <i>in-sample</i> . As retas verticais correspondem aos portfólios do Rácio de Sharpe e de Aversão ao Risco. Quando se consideram os retornos do CAPM estas retas não são visíveis pois o seu retorno previsto coincide com o máximo considerado.	35
3.5	Gráficos dos pesos dos ativos nos portfólios ótimos com os retornos esperados atualizados pelo modelo de Black-Litterman, partindo dos retornos esperados iniciais obtidos pelo CAPM (opt-BL-CAPM) e dos retornos históricos do período <i>in-sample</i> (opt-BL-hist).	37
3.6	Gráfico da relação entre os retornos efetivos e os retornos previstos.	38
3.7	Evolução da composição dos portfólios com o aumento do retorno previsto, os quais foram ajustados com o modelo de Black-Litterman com retornos em equilíbrio obtidos através do CAPM ou com capitalização do último dia (opt-BL-CAPM) (cima) e através dos retornos históricos (opt-BL-hist) (baixo). As retas verticais correspondem aos portfólios do Rácio de Sharpe. Os portfólios AR não são visíveis uma vez que o seu retorno previsto coincide com o valor máximo do retorno previsto considerado.	39

3.8	Gráficos dos pesos dos ativos nos portfólios ótimos com os retornos esperados atualizados pelo modelo de Black-Litterman com 100% de confiança nas perspectivas do investidor, partindo dos retornos esperados iniciais obtidos pelo CAPM (opt-BL100-CAPM) e pelo modelo de Black-Litterman partindo dos retornos históricos do período <i>in-sample</i> , considerando que os ativos na matriz P têm igual ponderação (opt-BL-hist-igual).	41
3.9	Gráfico da relação entre os retornos efetivos e os retornos previstos.	42
3.10	Composição dos portfólios ótimos utilizando os retornos históricos e considerando que as perspectivas são subvalorizadas.	43
3.11	Histogramas com a distribuição de cada portfólio ótimo e curva da distribuição normal que fornece o melhor ajuste a cada portfólio. As retas verticais representam o retorno previsto obtido com a média do período de cada portfólio obtido na secção anterior.	45
3.12	Diagramas de extremos e quartis dos portfólios analisados para a diferença entre os retornos efetivos simulados e os retornos previstos obtidos na secção anterior (cima) e para os retornos efetivos simulados (baixo). Os valores no eixo das abcissas indicam a solução analisada de acordo com a ordenação da Tabela B.9.	46
A.1	Gráfico da variação dos preços de fecho dos ativos.	53
A.2	Gráfico da variação dos retornos dos ativos.	54
A.3	Fronteiras de eficiência dos vários modelos e respetivos portfólios ótimos. Alguns dos portfólios estão sobrepostos: opt-CAPM-RS com opt-CAPM-AR; opt-BL-hist-dia-AR com opt-BL-hist-igual-AR; opt-BL-CAPM-inS-RS com opt-BL-CAPM-inS-AR; opt-BL100-CAPM-dia-RS com opt-BL100-CAPM-mes-RS Mes; opt-BL100-CAPM-dia-AR com opt-BL100-CAPM-mes-AR e com opt-BL100-CAPM-inS-AR.	54
A.4	Fronteiras de eficiência considerando a previsão dos retornos médios pelos dados históricos, pelo método de CAPM e pela atualização dos retornos médios estimados com o modelo de Black-Litterman, utilizando a capitalização de mercado do último dia.	55
A.5	Fronteiras de eficiência considerando a previsão dos retornos médios pelos dados históricos, pelo método de CAPM e pela atualização dos retornos médios estimados com o modelo de Black-Litterman, utilizando a capitalização de mercado do último mês.	55
A.6	Fronteiras de eficiência considerando a previsão dos retornos médios pelos dados históricos, pelo método de CAPM e pela atualização dos retornos médios estimados com o modelo de Black-Litterman, utilizando a capitalização de mercado de todo o período <i>in-sample</i> . Os portfólios opt-BL-CAPM-inS-RS e opt-BL-CAPM-inS-AR estão sobrepostos.	56
A.7	Gráficos da relação entre os retornos efetivos e os retornos previstos das diversas soluções com perspectivas subvalorizadas (cima) e com perspectivas sobrevalorizadas (baixo).	57

A.8	Evolução da composição dos portefólios com o aumento do retorno previsto com perspectivas subvalorizadas (cima) e com perspectivas sobrevalorizadas (baixo). O portefólio AR encontra-se sobreposto com o limite superior do retorno previsto, pelo que não é visível no gráfico.	58
A.9	Diagramas de extremos e quartis dos portefólios analisados para a diferença entre os retornos efetivos simulados e os retornos previstos obtidos na secção anterior com perspectivas subvalorizadas (cima) e sobrevalorizadas (baixo). Os valores no eixo das abcissas indicam a solução analisada de acordo com a ordenação da Tabela B.10.	59
A.10	Diagramas de extremos e quartis dos portefólios analisados para os retornos efetivos simulados com perspectivas subvalorizadas (cima) e sobrevalorizadas (baixo). Os valores no eixo das abcissas indicam a solução analisada de acordo com a ordenação da Tabela B.10.	60

Lista de Tabelas

2.1	Comparação dos vários portfólios ótimos.	20
3.1	Média e desvio-padrão dos retornos dos ativos no período <i>in-sample</i> e do período <i>out-of-sample</i>	28
3.2	τ , taxa livre de risco e δ	29
3.3	Capitalização de mercado em euros e pesos dos ativos.	29
3.4	Retornos previstos, retornos efetivos e diferença absoluta em percentagem (%). . . .	32
3.5	Retornos previstos, retornos efetivos e diferença absoluta em percentagem (%). . . .	34
3.6	Retornos previstos, retornos efetivos e diferença absoluta, em percentagem (%), dos portfólios do Rácio de Sharpe.	38
3.7	Retornos previstos, retornos efetivos e diferença absoluta, em percentagem (%), dos portfólios de Aversão ao Risco.	38
3.8	Retornos previstos, retornos efetivos e diferença absoluta, em percentagem (%), dos portfólios do Rácio de Sharpe.	42
3.9	Retornos previstos, retornos efetivos e diferença absoluta, em percentagem (%), dos portfólios de Aversão ao Risco.	42
B.1	Pesos dos ativos com igual ponderação e com ponderação 60%/40% em percentagem (%).	61
B.2	Previsão dos retornos iniciais esperados em percentagem (%).	62
B.3	Pesos dos ativos nos portfólios ótimos sem atualização dos retornos em percentagem (%).	62
B.4	Pesos dos ativos nos portfólios ótimos do modelo de Black-Litterman utilizando o CAPM, em percentagem (%).	63
B.5	Pesos dos ativos nos portfólios ótimos do modelo de Black-Litterman com 100% de confiança nas perspectivas do investidor, em percentagem (%).	63
B.6	Pesos dos ativos nos portfólios ótimos do modelo de Black-Litterman utilizando os retornos históricos, em percentagem (%).	64
B.7	Retornos esperados atualizados calculados com o modelo de Black-Litterman partindo dos retornos iniciais obtidos com o método CAPM (opt-BL-CAPM) e com os retornos históricos do período <i>in-sample</i> (opt-BL-hist), em percentagem (%).	64

B.8	Retornos esperados atualizados calculados com o modelo de Black-Litterman com 100% de confiança nas perspectivas do investidor (opt-BL100-CAPM) e com o modelo de Black-Litterman quando se consideram os retornos históricos e com a matriz P definida com igual ponderação dos ativos (opt-BL-hist-igual), em percentagem (%).	65
B.9	Média (a) e desvio padrão (b) dos retornos efetivos (em percentagem), percentagem de casos em que os retornos efetivos são superiores aos retornos previstos (c), percentagem de casos em que os retornos efetivos são negativos (d) e <i>rank</i> dos portefólios (e).	66
B.10	Média (a) e desvio-padrão (b) dos retornos efetivos, em percentagem, percentagem de casos em que os retornos efetivos são superiores aos retornos previstos (c), percentagem de casos em que os retornos efetivos são negativos (d) e <i>rank</i> dos portefólios (e) para as perspectivas subvalorizadas e sobrevalorizadas.	67
B.11	Descrição das abreviaturas atribuídas aos diversos portefólios ótimos.	68

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação geral do modelo

O modelo média-variância é um modelo que marca o início da otimização de portfólios. Este modelo foi introduzido por Harry Markowitz (1952) [16] com o intuito de estabelecer uma estrutura matemática para que os investidores escolham portfólios ótimos. Apesar de ser um modelo muito utilizado no início, os portfólios otimizados resultantes deste modelo são, por vezes, pouco intuitivos, sensíveis aos parâmetros de entrada e ao elevado erro de estimação.

A gestão de portfólios está muito relacionada com a recolha de informação que será utilizada na realização de previsões. Os gestores de portfólios recolhem esta informação, geram perspetivas para o futuro dos ativos e tentam obter portfólios ótimos com base nas suas previsões. Os gestores tradicionais têm poucos conhecimentos em matemática financeira e são recetivos aos métodos quantitativos para a determinação dos portfólios ótimos. Contudo, são da opinião que a análise média-variância e outros procedimentos do género não têm em consideração as perspetivas dos investidores. Por sua vez, os gestores que utilizam estes métodos matemáticos para a determinação de portfólios ótimos consideram que há falta de rigor por parte dos gestores tradicionais, uma vez que apenas se baseiam em perspetivas e não utilizam métodos matemáticos para obter tais portfólios [19].

Para colmatar algumas destas lacunas, surge um novo modelo de construção de portfólios proposto por Black e Litterman em 1990 [6]. O objetivo de Black e Litterman era obter portfólios mais intuitivos e eficientes e para isso era necessário obter uma melhor estimativa para o vetor dos retornos esperados, uma vez que no modelo média-variância são utilizados apenas os retornos históricos. A partir deste vetor seria, então, possível calcular os pesos dos diversos ativos no portfólio por forma a que se obtivesse um portfólio mais eficiente.

Black e Litterman consideraram que a informação vinda dos gestores tradicionais é uma mais valia para o cálculo de portfólios ótimos, pelo que criaram um modelo que combina essa informação com a informação de mercado, mais propriamente a informação do mercado em equilíbrio (CAPM - *Capital Asset Pricing Model*¹). Estas duas fontes de informação são então combinadas numa só fórmula para calcular o vetor dos retornos esperados, que será utilizado para determinar o portfólio

¹O CAPM é um modelo que permite medir o risco dos ativos e também relacionar o retorno esperado com o risco através do preço de equilíbrio desses ativos. O risco de um ativo deve ser medido relativamente ao portfólio de mercado, portfólio esse que deve pertencer à fronteira de eficiência [22].

ótimo. Assim, temos que o modelo de Black-Litterman é um modelo que combina as perspectivas do investidor com as perspectivas quantitativas do mercado.

O vetor dos retornos esperados é o *input* mais importante num modelo de média-variância. Em busca de um ponto de partida para a determinação deste vetor, começou por considerar-se os retornos históricos. No entanto, concluiu-se que este método conduzia a portfólios extremos. Para ultrapassar este problema, considerou-se que o modelo de Black-Litterman utilizava os retornos em equilíbrio como ponto de partida. Estes retornos são obtidos através do CAPM o qual estabelece uma relação linear entre o retorno esperado e o risco, sendo o risco avaliado pela comparação da capitalização de mercado dos ativos com um portfólio *benchmark*.

No modelo de Black-Litterman não é obrigatório o investidor ter perspectivas para todos os ativos. Caso o investidor não especifique nenhuma perspectiva, a melhor estratégia é considerar o vetor associado ao mercado em equilíbrio, uma vez que este foi considerado o nosso ponto de partida. Com esta abordagem é menos provável obter soluções instáveis, uma vez que o mercado é sempre tido em consideração e, portanto, as soluções ótimas correspondem sempre à solução do mercado em equilíbrio. Quando se consideram perspectivas do investidor, as soluções alteram-se com a introdução das perspectivas e, dependendo do nível de confiança do investidor, estas desviam-se (nível de confiança elevado) ou aproximam-se (nível de confiança baixo) do vetor dos pesos inicial. Se o investidor especificar perspectivas, elas estão sempre associadas a um nível de confiança, o qual não tem de ser igual para todas as perspectivas. Este nível de confiança tem um papel fundamental uma vez que é tido em consideração no cálculo da matriz de incertezas que entra no cálculo do vetor atualizado dos retornos esperados, como veremos no Capítulo 2. No entanto, pode ser difícil definir esse nível de confiança, pelo que se podem utilizar outros métodos para a determinação desta matriz.

Organizando a informação temos que, para aplicar o modelo, o investidor começa por identificar o seu universo de investimento, ou seja, os ativos que vai utilizar e encontra a capitalização de mercado² para cada um desses ativos. De seguida, o investidor tem de identificar a série temporal dos retornos de cada ativo por forma a calcular a matriz de covariâncias dos retornos. Seguidamente, tem de quantificar as suas perspectivas para que possam ser aplicadas e para que seja possível calcular o vetor atualizado dos retornos esperados. Por fim, todos estes inputs são introduzidos num otimizador por forma a calcular a fronteira de eficiência e consequentemente escolher um portfólio ótimo/eficiente.

1.2 Estado da Arte

O modelo de Black-Litterman foi publicado pela primeira vez por Fischer Black e Robert Litterman num documento da Goldman Sachs Fixed Income em 1990 [6]. Mais tarde, um artigo mais extenso e mais rico foi publicado no Financial Analysts Journal (FAJ) [7]. Este artigo inclui a metodologia e alguma informação relativamente à derivação do modelo, no entanto não mostra todas as fórmulas nem a derivação total.

²A capitalização de mercado relaciona o preço de fecho das ações com o volume de ações transacionadas diariamente. É obtida multiplicando o preço pelo volume de ações.

Numa tentativa de desmistificar a matemática por trás do modelo, Stephen Satchell e Alan Scowcroft publicaram um artigo em 2000 [20] em que mostram, passo a passo, a derivação da fórmula de Black-Litterman através de uma abordagem Bayesiana. Além disso, o artigo inclui também exemplos para ilustrar a metodologia utilizada. Wai Lee [13] também descreve, como Satchell e Scowcroft, uma abordagem Bayesiana para a derivação da fórmula de Black-Litterman. Além disso, inclui aplicações do modelo na alocação de ativos. Thomas Idzorek [11] mostra o passo a passo do modelo de Black-Litterman, utilizando uma nova metodologia para o cálculo da matriz de incertezas.

A distribuição inicial do modelo de Black Litterman apenas tem sensibilidade direta aos retornos dos ativos, sendo que não apresenta sensibilidade aos outros fatores de mercado, como por exemplo as taxas de juro, a inflação e o risco. Como forma de ultrapassar isto, é possível estender este modelo a um modelo multifactor. Hari Krishnan e Norman Mains [12] propõem um modelo de dois fatores que introduz fatores de risco alternativos no modelo, mais propriamente o risco de recessão.

Grande parte da literatura mantém-se perto do modelo original de Black-Litterman, no entanto há alguma literatura que expande o modelo para uma versão mais generalizada. Dimitris Bertsimas, Vishal Gupta e Ioannis Paschalidis [5] descrevem um modelo que combina previsões do modelo de equilíbrio e de investidores que utilizam ideias de otimização inversa. A vantagem deste modelo generalizado é que permite a existência de opiniões dos investidores que não são as *standard*, como por exemplo a incorporação da volatilidade no modelo e a utilização de medidas de risco como o *Conditional Value at Risk* (CVaR). Este modelo também lida com a incerteza da matriz de covariâncias utilizando ideias da otimização robusta [9].

Capítulo 2

Modelo de Black-Litterman

Como discutido no capítulo anterior, o modelo de Black-Litterman combina as perspectivas do investidor com o equilíbrio de mercado. Neste trabalho iremos assumir que tanto as perspectivas do investidor como o modelo de mercado têm a sua distribuição de probabilidade, ambas normais. Assim, o vetor dos retornos esperados resultante da combinação destes dois tipos de informação irá ser resultado da relação entre duas distribuições normais multivariadas, como se irá provar na secção relativa à fórmula de Black-Litterman.

Neste capítulo vai ser apresentado em detalhe o modelo de Black-Litterman [19, 24]. Para ser de mais fácil compreensão é apresentado um exemplo académico meramente ilustrativo que exemplifica a aplicação do modelo.

Este modelo necessita de alguma informação do histórico dos retornos, a qual é útil para complementar a previsão futura para a média dos mesmos. Essa informação será obtida com o CAPM, método já introduzido no capítulo anterior e que será explorado de seguida. Além disso, obtidas as previsões atualizadas sobre a média e a variância dos retornos, eles são introduzidos no modelo de Markowitz para obter uma determinada solução ótima (dependente do retorno mínimo exigido) ou toda a fronteira de eficiência. Deste modo, dedicamos a próxima secção a esses modelos auxiliares que serão depois utilizados conjuntamente com o modelo de Black-Litterman.

2.1 Modelos auxiliares

Nesta secção iremos introduzir alguns modelos auxiliares que irão ser interligados com o modelo de Black-Litterman. Não sendo o tema principal desta dissertação, faremos apenas um breve resumo de cada um deles.

Para a descrição destes modelos, iremos considerar que o nosso mercado financeiro é constituído por n ativos. Seja R o vetor aleatório de dimensão n associado aos retornos dos ativos. Assume-se que R tem distribuição normal com média μ e matriz de covariâncias Σ , ou seja,

$$R \sim N(\mu, \Sigma). \quad (2.1)$$

2.1.1 Modelo de Markowitz

O modelo de Markowitz consiste num problema de otimização que permite obter os portefólios ótimos para uma determinada distribuição dos retornos, podendo ser utilizada, por exemplo, a distribuição estimada a partir dos dados históricos ou a distribuição estimada pelo modelo de Black-Litterman. Isto permite que o investidor tenha diversas opções de portefólios ótimos e que possa escolher a carteira que mais se adequa às suas convicções.

Além disso, a formulação deste problema permite obter a fronteira de eficiência, uma curva que contém todos os portefólios ótimos, com diferentes níveis de risco e de retorno, do qual destacamos o portefólio ótimo do rácio de Sharpe (RS). Para determinar a fronteira de eficiência, determina-se inicialmente o valor mínimo do retorno esperado (r_{min}) associado ao problema de variância mínima e o valor r_{max} correspondente ao valor máximo no vetor dos retornos esperados atualizado. Finalmente, resolve-se o seguinte problema com r a variar no intervalo $[r_{min}, r_{max}]$.

$$\begin{aligned} \min \quad & w' \Sigma w \\ \text{s.a.} \quad & \mu' w \geq r \\ & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & w_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

O rácio de Sharpe [21] ou índice de Sharpe é um indicador que mede o excesso de retorno (relativamente a um investimento sem risco de retorno r_f) por unidade de risco, ou seja, é a medida de rentabilidade ajustada ao risco. A forma de calcular este rácio é através da fórmula $RS = \frac{\mu' w - r_f}{\sqrt{w' \Sigma w}}$, onde $\mu' w$ é o retorno esperado do portefólio w , r_f a taxa livre de risco e $\sqrt{w' \Sigma w}$ o desvio-padrão do portefólio w . Quanto maior for o valor deste rácio, melhor será o desempenho do ativo ou portefólio. Geometricamente, o portefólio que maximiza o rácio de Sharpe está associado ao ponto de interceção da reta tangente à fronteira de eficiência cuja ordenada na origem corresponde à taxa livre de risco.

Outro portefólio ótimo a destacar é o portefólio de aversão ao risco (AR) que é definido pelo seguinte problema de otimização

$$\max \quad w' \mu - \frac{\delta}{2} w' \Sigma w \quad (2.2)$$

onde δ é um parâmetro dado e é designado por coeficiente de aversão ao risco. A solução do problema 2.2 é $w^* = (\delta \Sigma)^{-1} \mu$. Esta solução pode não verificar $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, portanto para garantir esta última restrição, resolve-se o problema de otimização com essa restrição obtendo-se a solução

$$w^* = (\delta \Sigma)^{-1} \left(\mu + \frac{1 - e' (\delta \Sigma)^{-1} \mu}{e' (\delta \Sigma)^{-1} e} e \right), \quad \text{com } e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Caso não seja possível a venda a descoberto é necessário introduzir a condição $w_i \geq 0$. Assim, obtemos o problema

$$\begin{aligned} \max \quad & w' \mu - \frac{\delta}{2} w' \Sigma w \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & w_i \geq 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

problema este que iremos utilizar nas secções seguintes.

2.1.2 CAPM

Quando o mercado está em equilíbrio é possível calcular os retornos esperados dos ativos através do CAPM, o qual é baseado na teoria de portefólios desenvolvida por Markowitz. É um modelo de equilíbrio que permite estudar a relação entre o retorno esperado e o risco dos ativos financeiros, calculando o preço de equilíbrio dos mesmos [1]. Para obter o vetor dos retornos é preciso saber o valor esperado do mercado. Este valor é difícil de obter uma vez que o mercado é constituído por muitos elementos, sejam eles ativos, obrigações, etc. Assim, surge a necessidade de determinar este valor de forma mais fácil, pelo que se utiliza um portefólio *benchmark* para aproximar o mercado e calcular uma aproximação do valor esperado do mercado. Muitas vezes são utilizados índices como *benchmark*, uma vez que esses índices são constituídos pelas empresas com maior cotação na bolsa. Exemplos destes índices são a S&P 500 (Estados Unidos da América) [2], PSI20 (Portugal) [3] e IBEX 35 (Espanha) [15].

O CAPM baseia-se no princípio de que há uma relação linear entre o risco e o retorno. A fórmula base é

$$E(R_i) - r_f = \beta_i (E(R_m) - r_f), \tag{2.5}$$

onde r_f representa a taxa livre de risco, β_i o coeficiente de regressão para cada ativo e $E(R_m)$ o retorno esperado do portefólio de mercado. Este portefólio é um portefólio ótimo que contém todos os ativos utilizados pelo investidor e situa-se na fronteira de eficiência. Os coeficientes β_i são utilizados para estabelecer a relação entre o retorno e o risco, como irá ser explorado nesta secção.

No modelo média-variância de Markowitz assume-se, em geral, que a média dos retornos μ é estimada pela média histórica. Este também era o método utilizado inicialmente pelo modelo de Black-Litterman. No entanto, este método não conduz a resultados tão corretos, pelo que os investidores começaram a utilizar e a dar preferência ao uso do CAPM no cálculo do vetor Π .

Como ponto de partida para o cálculo do vetor Π , utiliza-se um método de otimização inversa cujo *input* é o vetor de pesos do portefólio de mercado e o *output* um vetor de retornos em equilíbrio. Para derivar este método, comecemos pela definição da função utilidade quadrática:

$$U = w' \Pi - \left(\frac{\delta}{2} \right) w' \Sigma w, \tag{2.6}$$

onde U é a utilidade do investidor, w_m o vetor dos pesos do portefólio, Π o vetor dos retornos em excesso, δ o coeficiente de aversão ao risco e Σ a matriz de covariâncias dos retornos em excesso.

Pretendemos que o vetor w que maximiza a função 2.6 seja o vetor w_m que é calculado através da capitalização de mercado, isto é, multiplicando o volume de ações transacionadas pelo preço de fecho. Por exemplo, no dia 2 de janeiro de 2018, o ativo Corticeira Amorim teve um volume de transações de aproximadamente 143 520 ações e o preço de fecho desse dia foi de 10,84€. Assim, a sua capitalização de mercado nesse dia foi de $cap = 143520 \times 10,84 = 1555756,80$ €. O portefólio cujos pesos dos ativos correspondem aos pesos obtidos através da capitalização de mercado denominamos de portefólio inicial. Esses pesos são determinados dividindo o valor da sua capitalização de mercado pela soma das capitalizações de mercado de todos os ativos.

Se maximizarmos a função utilidade, sem restrições, obtemos uma solução fechada, uma vez que, como Σ é uma matriz positiva definida, a matriz da hessiana de U é negativa definida. Assim, basta derivar a expressão em ordem a w_m e igualar a zero para obter uma relação entre w_m e Π :

$$\nabla U = \Pi - \delta \Sigma w_m = 0. \quad (2.7)$$

Como o vetor dos pesos é conhecido e Π desconhecido, podemos resolver em ordem a Π :

$$\Pi = \delta \Sigma w_m. \quad (2.8)$$

O valor de δ é também desconhecido, no entanto é possível determinar uma expressão através da utilização da expressão do CAPM, considerando $\Pi = E(R) - r_f$ e $\beta_i = \frac{Cov(R_i, R^T w_m)}{\sigma_m^2}$, onde w_m é o vetor dos pesos dos ativos no portefólio de mercado e σ_m^2 a variância do portefólio de mercado, calculada diretamente a partir dos retornos do portefólio de mercado, ou neste caso, a partir dos retornos do portefólio *benchmark*. Tendo em consideração que $Cov(R, R)$ é a matriz de covariâncias do retorno R , ou seja Σ , temos, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} E(R_i) - r_f &= \beta_i (E(R_m) - r_f) \\ \Pi_i &= \frac{Cov(R_i, R^T w_m)}{\sigma_m^2} (E(R_m) - r_f) \\ &= \frac{Cov(R_i, R)}{\sigma_m^2} w_m (E(R_m) - r_f) \\ &= \frac{E(R_m) - r_f}{\sigma_m^2} Cov(R_i, R) w_m \end{aligned}$$

onde $Cov(R_i, R)$ é o vetor que contém as componentes $Cov(R_i, R_j)$, $1 \leq j \leq n$. Deste modo, como $\Pi = \delta \Sigma w_m$, $\delta = \frac{E(R_m) - r_f}{\sigma_m^2}$ e, portanto, é possível calcular o seu valor. Este coeficiente atua como um fator de escala: quanto maior for o valor de δ , isto é, quanto maior for o valor de retorno em excesso por unidade de risco, maior o valor dos retornos em excesso estimados.

Após calcular o vetor Π , podemos passar ao tratamento da informação das perspectivas do investidor.

Exemplo 1:

Suponhamos que a nossa carteira de investimento é constituída por 3 ativos: ativo A, ativo B e ativo C, cujas capitalizações de mercado são 3 u.m., 1 u.m. e 2 u.m., respetivamente, sendo os pesos

dos ativos no mercado $w_A = \frac{3}{6}$, $w_B = \frac{1}{6}$ e $w_C = \frac{2}{6}$. Suponhamos ainda que a taxa livre de risco é 1% e que o portefólio de mercado tem um retorno esperado de 7% e variância 2%. Além disto, suponhamos que a matriz de covariâncias Σ é

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0,08 & 0,03 & 0,04 \\ 0,03 & 0,02 & 0,01 \\ 0,04 & 0,01 & 0,05 \end{bmatrix}$$

Temos toda a informação necessária para calcular o valor de δ que nos permite calcular o vetor dos retornos esperados:

$$\delta = \frac{E(R_m) - r_f}{\sigma_m^2} = \frac{0,07 - 0,01}{0,02} = 3$$

e, portanto, pela fórmula 2.8

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0,175 \\ 0,065 \\ 0,115 \end{bmatrix}.$$

2.2 Descrição do modelo de Black-Litterman

Contrariamente ao modelo de Markowitz, no modelo de Black-Litterman, μ é uma média estocástica, mas que não pode diferir muito da média histórica, pelo que

$$\mu = \Pi + \varepsilon_1, \quad (2.9)$$

com ε_1 o termo de erro que segue uma distribuição normal de média 0 e matriz de covariâncias $\tau\Sigma$ (τ é uma constante que assume valores entre 0 e 1). Quanto mais baixo for o valor de τ , mais próximo de Π estão as concretizações de μ . O valor atribuído a esta constante varia de autor para autor e será discutido mais adiante na subsecção 2.2.3. Temos, então, que o vetor dos retornos esperados segue uma distribuição normal de média Π e matriz de covariâncias $\tau\Sigma$, isto é,

$$\mu \sim N(\Pi, \tau\Sigma). \quad (2.10)$$

Tendo já toda a informação proveniente do CAPM, para a aplicação do modelo de Black-Litterman é necessário introduzir as perspetivas do investidor para conseguirmos chegar à fórmula de Black-Litterman, fórmula essa que será determinada utilizando duas abordagens diferentes: Bayesiana e de Theil.

2.2.1 Perspetivas do Investidor

Geralmente, um investidor possui perspetivas acerca do desempenho dos ativos, portanto é importante incluí-las no modelo. Considera-se que estas perspetivas são únicas, uma vez que cada investidor tem as suas próprias perspetivas, e que admitimos serem não correlacionadas entre si. Estas considerações permitem obter um problema mais simples de calcular, uma vez que a matriz de covariâncias é diagonal (devido à não correlação entre perspetivas).

As perspetivas podem ser representadas por

$$P\mu = q + \varepsilon_2 \quad (2.11)$$

onde P é uma matriz $k \times n$ cujas entradas representam os pesos dos ativos em cada perspetiva com k o número de perspetivas do investidor, q um vetor de dimensão k com os retornos de cada perspetiva e ε_2 um vetor aleatório normalmente distribuído de média 0 e matriz de covariâncias Ω , $\varepsilon_2 \sim N(0, \Omega)$. Assumiremos que $\text{car}(P) = k$, o que representa não haver perspetivas redundantes.

Podemos dizer que $P\mu$ segue uma distribuição normal de média q e matriz de covariâncias Ω , isto é,

$$P\mu \sim N(q, \Omega). \quad (2.12)$$

A matriz de covariâncias Ω é, geralmente, uma matriz diagonal e Ω^{-1} representa o grau de confiança nas perspetivas do investidor. O i -ésimo elemento da diagonal é representado por ω_i e quanto maior for o grau de confiança na perspetiva, menor é o valor de ω_i . Quando $\omega_i = 0$ há 100% de confiança na perspetiva associada. No entanto, quando não há um grau de confiança concreto nas perspetivas do investidor, a matriz Ω pode ser determinada [10] por

$$\Omega = \text{diag}(P(\tau\Sigma)P'), \quad (2.13)$$

fórmula que é utilizada tanto no exemplo académico apresentado ao longo deste capítulo, como no exemplo presente no Capítulo 3.

Há dois tipos de perspetivas: as perspetivas absolutas (fortes) e as perspetivas relativas (fracas). Uma perspetiva absoluta está apenas relacionada com o desempenho de um ativo. Por sua vez, uma perspetiva relativa relaciona 2 ou mais ativos/grupos de ativos.

Exemplo 1:

Retomando o exemplo 1 da página 8, consideramos uma perspetiva onde o retorno esperado do ativo A vai superar o retorno esperado do ativo C em 3% (*perspetiva relativa*) e outra onde o ativo B vai ter um retorno esperado de 2% (*perspetiva absoluta*).

Neste caso,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad q = \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,02 \end{bmatrix}.$$

Através da fórmula 2.13, calculamos a matriz Ω , sabendo que $\tau = 0,01$ e, portanto, $\tau\Sigma = \begin{bmatrix} 0,0008 & 0,0003 & 0,0004 \\ 0,0003 & 0,0002 & 0,0001 \\ 0,0004 & 0,0001 & 0,0005 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} \Omega &= \text{diag}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0008 & 0,0003 & 0,0004 \\ 0,0003 & 0,0002 & 0,0001 \\ 0,0004 & 0,0001 & 0,0005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{diag}\left(\begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0002 \\ 0,0002 & 0,0002 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0,0005 & 0 \\ 0 & 0,0002 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 2:

Consideremos que além dos 3 ativos enunciados, a nossa carteira de mercado tem mais 4 ativos, designados por D, E, F e G. Sobre estes 4 ativos, o investidor possui uma perspetiva relativa: "A média dos retornos esperados dos ativos D e E vai superar a média dos retornos esperados dos ativos F e G em 2%". Aqui,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad e \quad q = [0,02],$$

considerando que os ativos têm o mesmo peso.

Quando estamos perante uma perspetiva relativa que envolve 2 grupos de ativos há duas formas de determinar a linha da matriz P correspondente. Os pesos dos ativos podem ser determinados considerando que cada ativo tem o mesmo peso na perspetiva, como no exemplo anterior, ou considerando a capitalização de mercado. No último caso, os pesos de cada ativo num dos grupos é determinado dividindo o valor da sua capitalização de mercado pela soma das capitalizações de mercado de todos os ativos desse grupo. No exemplo 2, o grupo de ativos $\{D, E\}$ tem um desempenho superior (grupo *outperforming*), pois a média do seu retorno vai superar a média do grupo de ativos $\{F, G\}$ (ativos com desempenho inferior - grupo *underperforming*).

Tendo em consideração os valores enunciados no Exemplo 2, podemos calcular a matriz P atendendo à capitalização do mercado. Para o efeito, iremos supor que a capitalização do mercado dos ativos D, E, F e G é 1, 3, 2 e 7, respetivamente. Assim, os pesos dos ativos D e E (*outperforming*) são:

$$Peso_D = \frac{Cap.D}{Cap.D + Cap.E} = \frac{1}{1 + 3} = \frac{1}{4} \quad e \quad Peso_E = \frac{Cap.E}{Cap.D + Cap.E} = \frac{3}{1 + 3} = \frac{3}{4},$$

enquanto que o peso dos ativos F e G (*underperforming*) são:

$$Peso_F = \frac{Cap.F}{Cap.F + Cap.G} = \frac{2}{2 + 7} = \frac{2}{9} \quad e \quad Peso_G = \frac{Cap.G}{Cap.F + Cap.G} = \frac{7}{2 + 7} = \frac{7}{9}.$$

A linha correspondente da matriz P é

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{2}{9} & -\frac{7}{9} \end{bmatrix} \quad e \quad q = [0.02].$$

2.2.2 Fórmula de Black-Litterman

Black e Litterman não especificam no seu artigo como chegaram à fórmula para calcular o vetor dos retornos esperados atualizados. No entanto, vários autores descreveram abordagens para chegar a essa fórmula, sendo que as duas abordagens mais encontradas foram a abordagem Bayesiana, que envolve o teorema de Bayes e as funções densidade das distribuições normais, e a abordagem com o modelo de Estimacão Mista de Theil, que envolve o método dos mínimos quadrados. Nesta secção iremos estudar estas duas abordagens.

Abordagem Bayesiana

Como referido, esta abordagem tem por base o Teorema de Bayes:

Teorema 1 (Teorema de Bayes) *Sejam A e B dois acontecimentos tais que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ e $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Então*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)},$$

onde $\mathbb{P}(\cdot)$ representa uma probabilidade definida num certo espaço probabilizável.

Aplicando ao nosso caso e tendo em consideração que estamos a trabalhar com variáveis aleatórias contínuas, temos que

$$f_{\mu|P\mu}(m) = \frac{f_{P\mu|\mu}(Pm)f_{\mu}(m)}{f_{P\mu}(Pm)}, \quad (2.14)$$

onde $f_{\mu|P\mu}$ representa a função densidade dos retornos atualizados conhecendo as perspetivas do investidor, ou seja, da distribuição posterior, f_{μ} a função densidade da distribuição prior, $f_{P\mu|\mu}$ a função de máxima verosimilhança e $f_{P\mu}$ a distribuição marginal das perspetivas do investidor. Esta última função é determinada da seguinte forma:

$$f_{P\mu}(Pm) = \int_m f_{\mu}(m)f_{P\mu|\mu}(Pm) dm. \quad (2.15)$$

Como $f_{P\mu}$ não é uma função de μ , a função densidade da distribuição posterior é proporcional a $f_{P\mu|\mu}(Pm)f_{\mu}(m)$ e utilizamos a seguinte notação para denotar este facto: $f_{\mu|P\mu}(m) \propto f_{P\mu|\mu}(Pm)f_{\mu}(m)$.

Para determinar a fórmula de Black-Litterman assumimos as seguintes hipóteses que nos conduzem ao Teorema 2:

A1. A distribuição de probabilidade de $P\mu|\mu$ é uma normal de média q e variância Ω , $P\mu|\mu \sim N(q, \Omega)$.

A2. A distribuição de probabilidade de μ é uma normal de média Π e variância $\tau\Sigma$, $\mu \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$.

Teorema 2 (Fórmula de Black-Litterman) *O vetor dos retornos esperados atualizados segue uma distribuição normal de média $\bar{\mu}$ e variância M ,*

$$\mu|P\mu \sim N(\bar{\mu}, M),$$

com

$$\bar{\mu} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}q]$$

e

$$M = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}.$$

Prova. Uma vez que as distribuições são normais multivariadas, temos que

$$f_{\mu}(m) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\tau\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(m - \Pi)'(\tau\Sigma)^{-1}(m - \Pi)\right) \quad (2.16)$$

$$f_{P\mu|P\mu}(Pm) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det(\Omega)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(Pm - q)'(\Omega)^{-1}(Pm - q)\right) \quad (2.17)$$

Tendo isto em consideração, utilizando o Teorema de Bayes e as hipóteses A1 e A2 temos

$$f_{\mu|P\mu}(m) = \frac{c \exp\left(-\frac{1}{2}(Pm - q)'(\Omega)^{-1}(Pm - q)\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(m - \Pi)'(\tau\Sigma)^{-1}(m - \Pi)\right)}{f_{P\mu}(Pm)},$$

$$\text{com } c = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\tau\Sigma)} \sqrt{(2\pi)^k \det(\Omega)}}.$$

A média e a variância de $f_{\mu|P\mu}$ não vão ser calculadas, mas sim deduzidas a partir da função densidade. Assim, sabemos que o valor de $f_{P\mu}$ não interfere com a derivação da média e da variância de $f_{\mu|P\mu}$, uma vez que é uma constante e pode juntar-se à constante de integração. Portanto comecemos por simplificar as exponenciais.

$$\begin{aligned} (Pm - q)' \Omega^{-1} (Pm - q) + (m - \Pi)' (\tau\Sigma)^{-1} (m - \Pi) &= m' P' \Omega^{-1} Pm - 2q' \Omega^{-1} Pm + q' \Omega^{-1} q \\ &+ m' (\tau\Sigma)^{-1} m - 2\Pi' (\tau\Sigma)^{-1} m + \Pi' (\tau\Sigma)^{-1} \Pi \\ &= m' ((\tau\Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P)m - 2m' ((\tau\Sigma)^{-1} \Pi \\ &+ P' \Omega^{-1} q) + (\Pi' (\tau\Sigma)^{-1} \Pi + q' \Omega^{-1} q). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Para simplificar os cálculos, consideremos

$$C = (\tau\Sigma)^{-1} \Pi + P' \Omega^{-1} q,$$

$$H = (\tau\Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P,$$

com $H = H'$, pois H é simétrica e

$$A = \Pi' (\tau\Sigma)^{-1} \Pi + q' \Omega^{-1} q.$$

Assim, podemos reescrever 2.18 na seguinte forma $m' H m - 2C' m + A$. É ainda possível reescrever essa fórmula colocando toda a dependência de m num único fator por forma a obter algo que se assemelhe à função densidade de probabilidade de uma distribuição normal. Por forma a facilitar a

compreensão, comecemos pela fórmula pretendida e tentemos chegar a $m'Hm - 2C'm + A$.

$$\begin{aligned}
(m - H^{-1}C)'H(m - H^{-1}C) + A - C'H^{-1}C &= (H^{-1}(Hm - C))'H(H^{-1}(Hm - C)) + A - C'H^{-1}C \\
&= (Hm - C)'H^{-1}HH^{-1}(Hm - C) + A - C'H^{-1}C \\
&= (Hm - C)'H^{-1}(Hm - C) + A - C'H^{-1}C \\
&= (Hm)'H^{-1}(Hm) - (Hm)'H^{-1}C - C'H^{-1}Hm \\
&\quad + C'H^{-1}C + A - C'H^{-1}C \\
&= (Hm)'H^{-1}Hm - 2C'H^{-1}Hm + A \\
&= m'H'(H^{-1}H)m - 2C'(H^{-1}H)m + A \\
&= m'H'm - 2C'm + A \\
&= m'Hm - 2C'm + A
\end{aligned}$$

Introduzindo a exponencial temos

$$f_{\mu|P\mu}(m) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(m - H^{-1}C)'H(m - H^{-1}C)\right), \quad (2.19)$$

uma vez que os termos $A - C'H^{-1}C$ não dependem do termo μ e podem ser associados à constante de integração. Assim, $\mu|P\mu$ tem média

$$\bar{\mu} = H^{-1}C = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}q] \quad (2.20)$$

e variância

$$M = H^{-1} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}. \quad (2.21)$$

■

Após todos estes cálculos, chegamos à fórmula do vetor dos retornos esperados que combina as perspectivas do investidor com o mercado em equilíbrio.

Abordagem com o Modelo de Estimação Mista de Theil

O modelo de Estimação Mista de Theil foi criado com o intuito de estimar parâmetros com uma mistura de dados. Por este motivo, é utilizado para chegar à fórmula de Black-Litterman, uma vez que o modelo combina a informação proveniente de duas fontes. Como referido, este modelo é uma adaptação do método dos mínimos quadrados.

As equações 2.9 e 2.11 podem ser combinadas e reescritas na forma matricial da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} \mu = \begin{bmatrix} \Pi \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Considerando $D = \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} \Pi \\ q \end{bmatrix}$ e $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$, estamos na presença de um sistema de equações lineares, $D\mu = b + \varepsilon$, em que ε é uma variável aleatória com distribuição normal de média 0 e matriz

de covariâncias W ,

$$\varepsilon \sim N(0, W), \quad (2.23)$$

com $W = \begin{bmatrix} \tau\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$. Este sistema pode ser resolvido no sentido dos mínimos quadrados

$$\min \|D\mu - (b + \varepsilon)\| \quad (2.24)$$

O método dos mínimos quadrados dá-nos um estimador para a variável dependente, neste caso para μ . O teorema de Aitken [23] mostra como se obtém este estimador:

Teorema 3 (Teorema de Aitken) *Considere-se o sistema de equações lineares $y = X\beta + \varepsilon$, onde $y \in \mathbb{R}^k$ é um vetor conhecido, $X \in \mathbb{R}^{k \times n}$ uma matriz de dimensão $k \times n$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ um vetor desconhecido e $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$ um termo de erro com média 0 e variância Σ . Suponhamos que X é uma matriz não estocástica e que $E[y|X] = X\beta$ e que $\text{Var}[y|X] = X'\Sigma X \in \mathbb{R}^{k \times k}$, onde Σ é uma matriz positiva definida. Então,*

$$\hat{\beta} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}(X'\Sigma^{-1}y) \quad (2.25)$$

é o melhor estimador linear não enviesado para β . A variância do estimador é $(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}$.

Traduzindo este teorema para a nossa notação, temos que

$$\bar{\mu} = (D'W^{-1}D)^{-1}(D'W^{-1}b) \quad (2.26)$$

com variância

$$M = (D'W^{-1}D)^{-1} \quad (2.27)$$

Substituindo D , W e b pelas respetivas matrizes temos

$$\begin{aligned} M &= (D'W^{-1}D)^{-1} \\ &= \left(\begin{bmatrix} I & P' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \left(\begin{bmatrix} (\tau\Sigma)^{-1} & P'\Omega^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1} \end{aligned} \quad (2.28)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= (D'W^{-1}D)^{-1}(D'W^{-1}b) = M(D'W^{-1}b) \\ &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1} \left(\begin{bmatrix} I & P' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Pi \\ q \end{bmatrix} \right) \\ &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1} \left(\begin{bmatrix} (\tau\Sigma)^{-1} & P'\Omega^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ q \end{bmatrix} \right) \\ &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}q] \end{aligned} \quad (2.29)$$

Após todos estes cálculos, chegamos à fórmula do vetor dos retornos esperados que combina as perspectivas do investidor com o mercado em equilíbrio.

É possível obter uma fórmula alternativa que exprima de forma mais clara a variação de μ com Π . Para isso é necessário provar que M se pode escrever como

$$M = \tau\Sigma - \tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\tau\Sigma$$

Efetivamente, considerando que $\Omega = P\tau\Sigma P'$ temos que

$$\begin{aligned} MM^{-1} &= [\tau\Sigma - \tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\tau\Sigma][(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P] \\ &= [\tau\Sigma - \tau\Sigma P'(\Omega + \Omega)^{-1}P\tau\Sigma][(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P] \\ &= [\tau\Sigma - \tau\Sigma P'\frac{1}{2}\Omega^{-1}P\tau\Sigma][(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P] \\ &= [\tau\Sigma - \frac{1}{2}P\tau\Sigma P'\Omega^{-1}\tau\Sigma][(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P] \\ &= [\tau\Sigma - \frac{1}{2}\Omega\Omega^{-1}\tau\Sigma][(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P] \\ &= [\tau\Sigma - \frac{1}{2}\tau\Sigma][(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P] \\ &= \frac{1}{2}\tau\Sigma[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P] \\ &= \frac{1}{2}\tau\Sigma(\tau\Sigma)^{-1} + \frac{1}{2}\tau\Sigma P'\Omega^{-1}P \\ &= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}P\tau\Sigma P'\Omega^{-1} \\ &= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\Omega\Omega^{-1} = I \end{aligned}$$

Com este conhecimento, podemos escrever $\bar{\mu}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}q] \\ &= [\tau\Sigma - \tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\tau\Sigma][(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}q] \\ &= \Pi - \tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\Pi + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}q - \tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\tau\Sigma P'\Omega^{-1}q \\ &= \Pi - \tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\Pi + \tau\Sigma P'[I - (P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\tau\Sigma P']\Omega^{-1}q \\ &= \Pi - \tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\Pi + \tau\Sigma P'[(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}(P\tau\Sigma P' + \Omega) - (P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\tau\Sigma P']\Omega^{-1}q \\ &= \Pi - \tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\Pi + \tau\Sigma P'[(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}[P\tau\Sigma P' + \Omega - P\tau\Sigma P']\Omega^{-1}q] \\ &= \Pi - \tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\Pi + \tau\Sigma P'[(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}\Omega\Omega^{-1}q] \\ &= \Pi - \tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\Pi + \tau\Sigma P'[(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}q] \\ &= \Pi + \tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}(q - P\Pi) \end{aligned} \tag{2.30}$$

Retomando os dados do Exemplo 1 e tendo todos os inputs necessários ao cálculo do vetor dos retornos esperados, vamos calcular este mesmo vetor.

A variância é dada por

$$M = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\begin{bmatrix} 0,0008 & 0,0003 & 0,0004 \\ 0,0003 & 0,0002 & 0,0001 \\ 0,0004 & 0,0001 & 0,0005 \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0005 & 0 \\ 0 & 0,0002 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 0,00051 & 0,00012 & 0,00037 \\ 0,00012 & 0,00009 & 0,00007 \\ 0,00037 & 0,00007 & 0,00045 \end{bmatrix} \tag{2.31}
\end{aligned}$$

e o vetor $\bar{\mu}$ por

$$\begin{aligned}
\bar{\mu} &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}q] \\
&= \begin{bmatrix} 0,00051 & 0,00012 & 0,00037 \\ 0,00012 & 0,00009 & 0,00007 \\ 0,00037 & 0,00007 & 0,00045 \end{bmatrix} \\
&\quad \left(\begin{bmatrix} 0,0008 & 0,0003 & 0,0004 \\ 0,0003 & 0,0002 & 0,0001 \\ 0,0004 & 0,0001 & 0,0005 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,175 \\ 0,065 \\ 0,115 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0005 & 0 \\ 0 & 0,0002 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,02 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0,139 \\ 0,042 \\ 0,105 \end{bmatrix} \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Tendo em consideração o vetor Π calculado anteriormente, verificamos que a introdução das perspetivas altera significativamente o valor dos retornos esperados. O retorno esperado do ativo B aproxima-se do valor esperado pelo investidor, de 2%, e o retorno esperado do ativo A supera o retorno do ativo C em 3,4%, valor muito próximo dos 3% considerados pelo investidor. Assim, se as perspetivas corresponderem ao que acontece na realidade, o investidor tirará um maior proveito da solução obtida com a introdução das perspetivas do que o obtido apenas com a utilização do CAPM, uma vez que a previsão dos retornos obtidos pelo CAPM estarão sobrevalorizados, induzindo em erro o investidor. De facto, neste exemplo a atualização dos retornos esperados pelo método de Black-Litterman fez com que as previsões dos retornos esperados de todos os ativos fossem mais baixos. Ora, isto está relacionado com as correlações entre os ativos. Todas as entradas da matriz de covariâncias são positivas, pelo que a correlação entre os ativos é também positiva. Assim, uma diminuição do retorno esperado do ativo B origina uma diminuição no retorno esperado dos outros dois ativos de forma a que a sua diferença vá de encontro à perspetiva do investidor.

A nível matemático, é possível que o investidor tenha 100% de confiança nas suas perspetivas, ainda que a nível prático isto seja difícil de justificar uma vez que se trata de valores futuros. Neste caso, temos $P\mu = q$, visto que não existe erro. Assim, não é possível calcular $\bar{\mu}$ através do sistema de equações lineares $D\mu = b + \varepsilon$, pelo que calculamos $\bar{\mu}$ como a solução do seguinte problema de otimização sem restrições [14]:

$$\begin{aligned}
\min & \quad \frac{1}{2} \|(\tau\Sigma)^{-\frac{1}{2}}(\bar{\mu} - \Pi)\|^2 \\
s.a. & \quad P\bar{\mu} = q \tag{2.33}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}(\bar{\mu} - \Pi)'(\tau\Sigma)^{-1}(\bar{\mu} - \Pi) \\ \text{s.a.} \quad & P\bar{\mu} = q. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Para obtermos a solução deste problema de minimização, começamos por escrever a função Lagrangeana associada ao problema 2.34 onde λ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

$$\begin{aligned} L(\bar{\mu}, \lambda) &= \frac{1}{2}(\bar{\mu} - \Pi)'(\tau\Sigma)^{-1}(\bar{\mu} - \Pi) - \lambda'(P\bar{\mu} - q) \\ &= \frac{1}{2}\bar{\mu}'(\tau\Sigma)^{-1}\bar{\mu} - \frac{1}{2}\bar{\mu}'(\tau\Sigma)^{-1}\Pi - \frac{1}{2}\Pi'(\tau\Sigma)^{-1}\bar{\mu} + \frac{1}{2}\Pi'(\tau\Sigma)^{-1}\Pi - \lambda'P\bar{\mu} + \lambda'q \\ &= \frac{1}{2}\bar{\mu}'(\tau\Sigma)^{-1}\bar{\mu} - \bar{\mu}'(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + \frac{1}{2}\Pi'(\tau\Sigma)^{-1}\Pi - \lambda'P\bar{\mu} + \lambda'q. \end{aligned}$$

De seguida, vamos aplicar as condições de optimalidade de primeira ordem para encontrar o ponto estacionário da função Lagrangeana

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\mu}} = (\tau\Sigma)^{-1}\bar{\mu} - (\tau\Sigma)^{-1}\Pi - P'\lambda = (\tau\Sigma)^{-1}(\bar{\mu} - \Pi) - P'\lambda = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = P\bar{\mu} - q = 0. \quad (2.36)$$

Resolvendo a equação 2.35 em ordem a $\bar{\mu}$, substituindo $\bar{\mu}$ na equação 2.36 e resolvendo em ordem a λ obtemos

$$\bar{\mu} = \Pi + \tau\Sigma P'\lambda \quad (2.37)$$

e

$$\lambda = (P\tau\Sigma P')^{-1}(q - P\Pi). \quad (2.38)$$

Substituindo λ na equação 2.37 obtemos a expressão para o vetor dos retornos esperados atualizados com 100% de confiança nas perspetivas do investidor:

$$\bar{\mu} = \Pi + \tau\Sigma P'[\tau P\Sigma P']^{-1}(q - P\Pi) \quad (2.39)$$

Retomando o Exemplo 1 e considerando agora que o investidor tem 100% de confiança nas suas perspetivas, aplicando a fórmula 2.39, temos que

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= \Pi + \tau\Sigma P'[\tau P\Sigma P']^{-1}(q - P\Pi) \\ &= \begin{bmatrix} 0,175 \\ 0,065 \\ 0,115 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0008 & 0,0003 & 0,0004 \\ 0,0003 & 0,0002 & 0,0001 \\ 0,0004 & 0,0001 & 0,0005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,02 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,175 \\ 0,065 \\ 0,115 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,1125 \\ 0,0200 \\ 0,0825 \end{bmatrix}$$

Neste caso, os retornos esperados atualizados vão ao encontro dos valores considerados pelo investidor, ou seja, o ativo B tem um retorno esperado de 2% e o retorno esperado do ativo A supera em 3% o do ativo C.

Com a fórmula de Black-Litterman é possível obter um ajuste para a média da distribuição dos retornos esperados. No entanto, é ainda necessário fazer um ajuste à matriz de covariância. A média da distribuição dos retornos esperados é igual à média dos retornos esperados atualizados, $\tilde{\mu}$, e a covariância inclui um termo de erro. Assim, temos que $\tilde{\mu} = \bar{\mu}$ e $\tilde{\Sigma} = \Sigma + M$, sendo Σ a matriz de covariâncias dos retornos dos ativos e M a variância dos retornos atualizados obtida pela fórmula de Black-Litterman [8].

Tendo isto em consideração, podemos utilizar $\tilde{\mu}$ e $\tilde{\Sigma}$ no modelo de Markowitz para determinar os pesos ótimos dos ativos na carteira de investimento e, desse modo, obter a fronteira de eficiência e algumas das suas soluções particulares, como a solução ótima do rácio de Sharpe e a solução ótima para a aversão ao risco. Esta última é obtida a partir de 2.4 substituindo μ por $\tilde{\mu}$ e Σ por $\tilde{\Sigma}$.

Para ilustrar o efeito produzido com a atualização dos retornos esperados pelo método de Black-Litterman no Exemplo 1, apresentamos 3 fronteiras de eficiência obtidas com o modelo de Markowitz onde a média e variância foram estimadas a partir:

- dos retornos históricos, sendo o vetor dos retornos históricos $m = \begin{bmatrix} 0,17 \\ 0,05 \\ 0,10 \end{bmatrix}$,
- do modelo de Black-Litterman com $\tau = 0,01$,
- do modelo de Black-Litterman quando o investidor tem 100% de confiança nas suas perspetivas.

Como se pode verificar pela análise da Figura 2.1, o risco previsto associado aos 3 problemas varia em intervalos bastante semelhantes. No entanto, quando comparamos os retornos, verificamos que o modelo de Black-Litterman conduz a portefólios com menor retorno médio previsto. Quando foram usadas as estimações do modelo de Black-Litterman com 100% de confiança nas perspetivas os portefólios obtidos têm um retorno previsto entre os 3% e os 6% mais baixo que os portefólios gerados a partir dos dados históricos. Admitindo que as previsões do investidor estão corretas (pois consideram 100% de confiança), estes resultados indicam que a previsão realizada com os dados históricos está sobrevalorizada, fazendo com que tome decisões menos favoráveis se construir a sua carteira tendo em conta apenas os dados históricos.

Além disto, verificamos que, para os dados considerados, o portefólio inicial (obtido com a heurística em que os pesos dos ativos são obtidos através da capitalização de mercado) se encontra acima das fronteiras de eficiência dos modelos considerados, ou seja, o portefólio inicial utiliza previsões dos retornos dos ativos mais sobrevalorizadas do que nestes modelos.

No Exemplo 1, mas utilizando como parâmetros de entrada os dados atualizados pelo modelo de Black-Litterman, é possível obter os portefólios de aversão ao risco (w_{AR}) e o portefólio de Sharpe (w_{RS}).

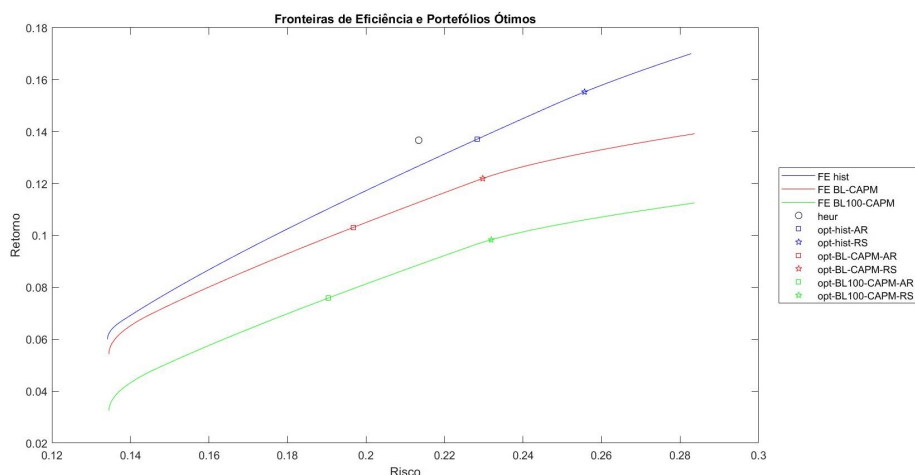


Fig. 2.1 Gráfico das fronteiras de eficiência (FE) em que os retornos e variância foram estimados a partir de: dados históricos (Hist), Black-Litterman (BL) e Black-Litterman com 100% de confiança nas perspectivas (BL 100), considerando $\tau = 0,01$. Além disso, estão também assinalados os pontos associados aos portfólios ótimos do rácio de Sharpe (RS) e da aversão ao risco (AR) e ao portfólio inicial (heur).

Tabela 2.1 Comparação dos vários portfólios ótimos.

	Portfólio Inicial	Histórico		Black-Litterman		Black-Litterman 100%	
		Av. Risco	R. Sharpe	Av. Risco	R. Sharpe	Av. Risco	R. Sharpe
Ativo A	50,00%	60,42%	78,95%	30,90%	49,53%	26,07%	52,75%
Ativo B	16,67%	10,42%	0,00%	19,76%	0,00%	23,20%	0,00%
Ativo C	33,33%	29,16%	21,05%	49,34%	50,47%	50,73%	47,25%

Na Tabela 2.1 apresenta-se a comparação dos diversos portfólios apresentados na Figura 2.1. A aplicação do modelo de Black-Litterman conduziu a portfólios bastante distintos do portfólio inicial e dos portfólios obtidos com os retornos históricos. Efetivamente, nestes casos, houve um aumento no investimento no ativo C, resultante do desinvestimento nos ativos A e B: relativamente ao portfólio inicial, o desinvestimento é no ativo A quando considerado a solução AR e no ativo B no caso do RS; relativamente às soluções obtidas com os dados históricos, o desinvestimento é no ativo A. Estas alterações indicam que os retornos dos ativos A e B estavam muito sobrevalorizados, o que vai ao encontro dos ajustes feitos no vetor dos retornos: $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ tiveram um acentuado decréscimo enquanto que $\bar{\mu}_3$ teve apenas um ligeiro decréscimo.

Quando comparamos o portfólio inicial com os portfólios obtidos com os retornos históricos verificamos que os resultados são relativamente diferentes. Apesar do ativo A ser o ativo com maior peso nas 3 carteiras e o ativo B o que tem menor peso, após a otimização dos retornos, há uma desvalorização dos ativos B e C para compensar a valorização do ativo A. Mais concretamente, no caso do portfólio do rácio de Sharpe, há um desinvestimento total no ativo B, que pode ser justificado pelo facto deste ser o ativo com menor retorno esperado. Assim, o retorno obtido pelo investidor poderá ser maior. No caso do portfólio de aversão ao risco, apesar da desvalorização dos ativos B e

C, estes continuam a constituir a carteira, o que conduz a uma carteira com o risco associado mais baixo, uma vez que a variância dos ativos B e C é mais baixa do que a do ativo A.

Considerando os portefólios de aversão ao risco quando são introduzidas as perspetivas do investidor, verificamos que o ativo A é desvalorizado para compensar o investimento nos ativos B e C. Como são portefólios de aversão ao risco, esta desvalorização pode estar relacionada com o facto da variância do ativo A ser bastante elevada, pelo que o risco associado a este ativo é elevado. Assim, apesar do retorno da carteira continuar a ser alto, o risco associado é mais baixo do que o que seria se se investisse mais no ativo A. O investimento nos ativos B e C ajuda a controlar o risco das carteiras.

No caso dos portefólios do rácio de Sharpe, com a introdução das perspetivas há uma desvalorização total do ativo B, ativo com o menor retorno esperado. Assim, o retorno desta carteira é mais elevado, apesar de continuar a haver um controlo do risco associado às carteiras através do investimento de cerca de 50% no ativo C, que tem variância inferior ao ativo A.

2.2.3 Os parâmetros do modelo

A definição do parâmetro τ e da matriz de covariâncias Ω é um dos principais problemas deste modelo. Há várias interpretações possíveis para τ e, portanto, há discórdia entre os vários autores acerca do valor a atribuir a este parâmetro. No que diz respeito à matriz Ω , Black e Litterman não descreveram um método para a sua determinação. No entanto, ao longo dos anos, vários autores estudaram novos métodos para obter esta matriz. Nesta secção vamos estudar estes parâmetros.

O parâmetro τ

O parâmetro τ foi introduzido por Black e Litterman como uma constante de proporcionalidade com a função de dimensionar a variância dos retornos esperados. Os autores não especificam um valor para τ nem descreveram um método para a sua determinação. No entanto referem que deve ser escolhido um valor próximo de zero, geralmente entre 0,01 e 0,05, e justificam esta escolha com o facto da incerteza da média dos retornos ser muito inferior à variância dos próprios retornos.

Nos anos seguintes, vários autores estudaram o assunto e definiram diferentes abordagens para calibrar o valor de τ . Uma das abordagens é considerar que τ é inversamente proporcional ao número de amostras a considerar. Podemos considerar um estimador de máxima verosimilhança, $\tau = \frac{1}{T}$ (mais utilizado) ou o melhor estimador quadrático não enviesado, $\tau = \frac{1}{T-n}$, com T o número de amostras e n o número de ativos [24]. Note-se que, neste último estimador, quanto maior o número de ativos maior o valor de τ [24]. Como normalmente se consideram amostras mensais durante um período de 5 anos, verifica-se que o valor de τ é relativamente próximo de zero ($\tau = \frac{1}{60} = 0,01667$), o que vai ao encontro do definido por Black e Litterman.

Satchel e Scowcroft (2000) [20] defendem uma abordagem totalmente diferente da de Black e Litterman. Estes autores consideram que τ deve ser próximo de 1 e descrevem um método para determinar este valor. Apesar de um valor de $\tau = 1$ poder não se verificar na prática, os autores consideram que se todos os investidores possuem uma dada perspetiva e investem num mundo em equilíbrio, Π representa os retornos em equilíbrio condicionados pelas crenças individuais e portanto as previsões individuais correspondem aos retornos condicionados. No método apresentado por estes

autores para a determinação de τ , eles assumem que τ é estocástico e, a partir desta consideração, derivam uma nova fórmula para o cálculo dos retornos esperados atualizados. No entanto, esta nova fórmula é bastante mais complexa.

Semelhante à ideia de Satchel e Scowcroft, alguns autores eliminam τ das equações, o que conduz a uma nova fórmula para calcular o novo vetor dos retornos,

$$\bar{\mu} = \Pi + \Sigma P' (P \Sigma P' + \Omega)^{-1} (q - P \Pi). \quad (2.40)$$

Esta expressão obtém-se considerando $\tau = 1$ na fórmula 2.30.

Retomando o Exemplo 1, para estudar a influência do parâmetro τ na fronteira de eficiência, para além de fazer os cálculos para $\tau = 0,01$ também fizemos para $\tau = 1$ (abordagem de Satchel e Scowcroft) e $\tau = 0,5$ (não corresponde a nenhuma abordagem em específico). Assim, foram obtidas as seguintes fronteiras de eficiência:

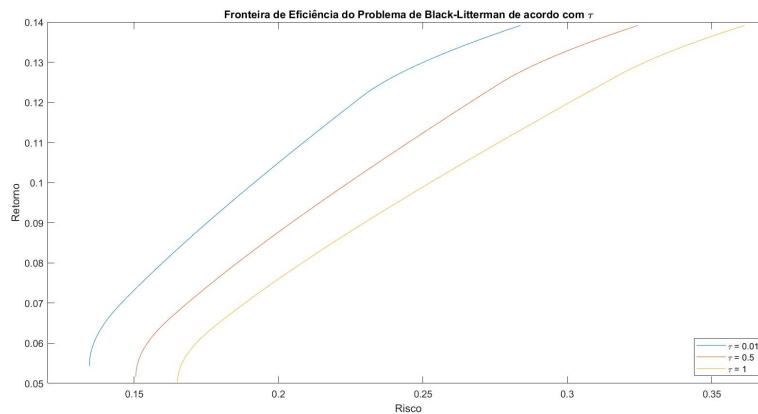


Fig. 2.2 Gráfico das fronteiras de eficiência usando a média esperada e a variância obtidas pela aplicação do modelo de Black-Litterman para os diferentes valores de τ .

Como se pode verificar pela análise da Figura 2.2, quanto maior o valor de τ , maior o risco previsto associado à carteira de investimento. Além disso, a variação do risco com o aumento do retorno também vai sendo maior com o aumento do valor de τ .

A matriz Ω

Tal como para o parâmetro τ , ao longo dos anos vários autores estudaram métodos para a determinação da matriz Ω . Como já foi referido, esta matriz está relacionada com o grau de incerteza/confiança nas perspetivas do investidor.

Black e Litterman não especificaram um método para a determinação de Ω no seu artigo, no entanto, pressupõe-se que tenham utilizado o método de proporcionalidade, método mais utilizado na literatura. Este método [10] considera que Ω é proporcional a $\tau \Sigma$ e que as perspetivas do investidor são independentes. Assim, sendo p_i a linha da matriz P correspondente à perspetiva i , temos que

$$\omega_{ii} = p_i (\tau \Sigma) p_i', \forall i = j$$

$$\omega_{ij} = 0, \forall i \neq j$$

ou

$$\Omega = \text{diag}(P(\tau\Sigma)P').$$

No próximo capítulo, onde será apresentado um exemplo de aplicação do modelo de Black-Litterman, será este o método utilizado para a determinação da matriz Ω , uma vez que é um método de aplicação mais simples.

Além deste método, existem outros 3 na literatura:

- utilização da variância dos resíduos de um modelo de fatores [4],
- utilização de intervalos de confiança [17],
- utilização de um modelo baseado nas perspectivas do investidor com 100% de confiança [11].

Destes três métodos apenas vamos descrever o terceiro, uma vez que os outros dois não são muito utilizados e a sua metodologia é mais complexa.

Método de Idzorek

Para determinar a matriz Ω , Idzorek sugere um método baseado na solução quando se considera 100% de confiança em cada perspectiva isoladamente [11]. Essas soluções auxiliares são utilizadas apenas para chegar à matriz Ω , uma vez que na prática o investidor não tem 100% de confiança nas suas perspectivas, sendo depois comparadas com as do portfólio inicial. Para cada perspectiva ℓ , o método começa com o cálculo do vetor dos retornos esperados ($E[R_{\ell,100\%}]$) pela fórmula de Black-Litterman com 100% de confiança nas perspectivas do investidor e a respetiva solução ótima ($w_{\ell,100\%}$) para esse vetor dos retornos. De seguida faz uma combinação convexa entre $w_{\ell,100\%}$ e a solução inicial w_m (resultante da aplicação do CAPM), por forma a estimar o vetor dos pesos $w_{\ell,\%}$ que permite obter as entradas da diagonal da matriz Ω através de um processo de otimização inversa. Os passos para a determinação dessa matriz são apresentados de seguida, sendo ilustrados pelos dados do Exemplo 1 considerando que o investidor tem 75% de confiança na perspectiva 1 e 60% de confiança na perspectiva 2.

1. Calcular o vetor dos retornos esperados para cada perspectiva, como se fosse única, utilizando a fórmula de Black-Litterman com 100% de confiança:

$$E[R_{\ell,100\%}] = \Pi + \tau\Sigma p'_\ell (p_\ell \tau\Sigma p'_\ell)^{-1} (q_\ell - p_\ell \Pi) \quad (2.41)$$

onde $E[R_{\ell,100\%}]$ é um vetor coluna de dimensão $n \times 1$ que representa o vetor dos retornos esperados atualizado com 100% de confiança, p_ℓ o vetor linha da matriz P correspondente à ℓ -ésima perspectiva e q_ℓ a entrada do vetor q correspondente à ℓ -ésima perspectiva.

Aplicando os dados do Exemplo 1, obtemos que

$$E[R_{1,100\%}] = \Pi + \tau\Sigma p'_1 (p_1 \tau\Sigma p'_1)^{-1} (q_1 - p_1 \Pi) = \begin{bmatrix} 0,1510 \\ 0,0530 \\ 0,1210 \end{bmatrix}.$$

2. Calcular o vetor dos pesos com 100% de confiança na ℓ -ésima perspectiva, utilizando a fórmula

$$w_{\ell,100\%} = (\delta\Sigma)^{-1}E[R_{\ell,100\%}]. \quad (2.42)$$

Esta fórmula resulta da resolução do problema de maximização, através de otimização inversa, apresentado em 2.2.

Aplicando os dados do Exemplo 1, obtemos que

$$w_{1,100\%} = (\delta\Sigma)^{-1}E[R_{1,100\%}] = \begin{bmatrix} 0,300 \\ 0,167 \\ 0,533 \end{bmatrix}.$$

3. Calcular a diferença entre os pesos calculados com capitalização de mercado, w_m , e os pesos calculados com 100% de confiança na ℓ -ésima perspectiva, $w_{\ell,100\%}$:

$$D_{\ell,100\%} = w_{\ell,100\%} - w_m, \quad (2.43)$$

onde $D_{\ell,100\%}$ é um vetor coluna de dimensão $n \times 1$.

Aplicando os dados do Exemplo 1 em que w_m é o portefólio que está na segunda coluna da Tabela 2.1, obtemos que

$$D_{1,100\%} = w_{1,100\%} - w_m = \begin{bmatrix} -0,20 \\ 0,00 \\ 0,20 \end{bmatrix}.$$

4. Estimar a inclinação¹ aproximada causada pela ℓ -ésima perspectiva tendo em consideração a confiança do investidor, isto é,

$$Tilt_{\ell} = D_{\ell,100\%} \times C_{\ell}, \quad (2.44)$$

onde C é um vetor coluna de dimensão $k \times 1$, que representa a confiança do investidor. Os ativos que não estão envolvidos na perspectiva têm valor 0 e os envolvidos têm o valor do nível de confiança. Esta inclinação permite incorporar a confiança do investidor na perspectiva, por forma a calcular o pesos dos ativos tendo em consideração esse mesmo nível de confiança.

Aplicando ao Exemplo 1 e considerando que o investidor tem 75% de confiança na perspectiva 1 e 60% de confiança na perspectiva 2, obtemos que

$$Tilt_1 = D_{1,100\%} \times C_1 = \begin{bmatrix} -0,15 \\ 0,00 \\ 0,15 \end{bmatrix}.$$

¹Tradução do termo inglês *tilt*

5. Estimar o vetor dos pesos desejado com base na inclinação:

$$w_{\ell,\%} = w_m + Tilt_{\ell}. \quad (2.45)$$

Aplicando ao Exemplo 1, obtemos que

$$w_{1,\%} = w_m + Tilt_1 = \begin{bmatrix} 0,3500 \\ 0,1667 \\ 0,4833 \end{bmatrix}.$$

A componente C_{ℓ} do vetor C vai atuar como o coeficiente da combinação convexa entre $w_{\ell,100\%}$ e w_m . Deste modo, se o investidor tiver 100% de confiança na perspectiva ℓ ($C_{\ell} = 1$), então $Tilt_{\ell} = D_{\ell,100\%}$ e $w_{\ell,\%} = w_{\ell,100\%}$. Se o investidor tiver confiança nula na perspectiva ℓ ($C_{\ell} = 0$), então $Tilt_{\ell} = 0$ e $w_{\ell,\%} = w_m$.

6. Calcular o valor de ω_{ℓ} que representa a incerteza na ℓ -ésima perspectiva, ou seja, ω_{ℓ} é o ℓ -ésimo elemento da diagonal de Ω . Este valor minimiza a soma da diferença dos quadrados:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum (w_{\ell,\%} - w_{\ell})^2 \\ \text{s.a.} \quad & \omega_{\ell} \geq 0, \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde

$$w_{\ell} = (\delta\Sigma)^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1} + p'_{\ell}\omega_{\ell}^{-1}p_{\ell}]^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + p'_{\ell}\omega_{\ell}^{-1}q_{\ell}]. \quad (2.47)$$

Aplicando ao Exemplo 1, obtemos²

$$\omega_1 = 0,0001667.$$

7. Repetir os passos 1 a 6 para as restantes perspectivas, por forma a obter toda a matriz Ω . Por fim, calcular o vetor dos retornos atualizado,

$$\bar{\mu} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}q]. \quad (2.48)$$

Após a repetição dos passos anteriores para a perspectiva 2 no Exemplo 1, obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} E[R_{2,100\%}] &= \begin{bmatrix} 0,1075 \\ 0,0200 \\ 0,0925 \end{bmatrix}, \quad w_{2,100\%} = \begin{bmatrix} 0,5000 \\ -0,5833 \\ 0,3333 \end{bmatrix}, \quad D_{2,100\%} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ -0,75 \\ 0,00 \end{bmatrix}, \\ Tilt_2 &= \begin{bmatrix} 0,00 \\ -0,45 \\ 0,00 \end{bmatrix}, \quad w_{2,\%} = \begin{bmatrix} 0,5000 \\ -0,2833 \\ 0,3333 \end{bmatrix} \quad e \quad \omega_2 = 0,0001333. \end{aligned}$$

²Este passo foi realizado com o auxílio do software R [18].

Assim, a matriz Ω é dada por

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0,0001667 & 0 \\ 0 & 0,0001333 \end{bmatrix}.$$

Tendo esta matriz, vamos calcular o vetor dos retornos esperados

$$\bar{\mu} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}q] = \begin{bmatrix} 0,1333 \\ 0,0376 \\ 0,1024 \end{bmatrix}.$$

A perspectiva 1 está mais próxima de ser verificada pois, no exemplo apresentado, o investidor tem uma maior confiança nela.

Comparando com o vetor $\bar{\mu}$ obtido através do método utilizado por Black e Litterman (resultado 2.32) verificamos que os resultados não são muito diferentes. No entanto, os resultados obtidos com o método de Idzorek aproximam-se mais das perspectivas do investidor, no sentido em que é atribuído um nível de confiança a cada perspectiva. Assim, se as perspectivas do investidor correspondessem à realidade, este método traria mais vantagens para o investidor do que o método utilizado anteriormente.

Apesar de ser um método relativamente mais extenso, esta abordagem tem uma vantagem fundamental: os valores da diagonal de Ω são calculados tendo em consideração o grau de confiança do investidor numa escala de 0% a 100%.

Capítulo 3

Aplicação do modelo

Ao longo do Capítulo 2 foi apresentado um exemplo académico para ilustrar o modelo de Black-Litterman. No entanto, é um exemplo simples e não representa verdadeiramente o mercado financeiro. Neste capítulo vamos descrever um exemplo real por forma a estudar a aplicação do modelo e descobrir os pontos fortes e as falhas deste modelo, com o auxílio do software Matlab.

Assim, para cumprir com os objetivos apresentados acima, iremos considerar dois tipos de dados: dados reais e dados simulados. Os primeiros fornecem o *input* necessário para a determinação de várias soluções ótimas (como a do RS e da AR) com ou sem o ajuste dos retornos estimados pelo método de Black-Litterman. Além disso, serão também utilizados para avaliar o desempenho na amostra observada. Os dados simulados permitem uma análise mais completa do desempenho desses portfólios em outros cenários futuros (simulados).

Com a utilização dos dados reais, vamos comparar o desempenho de 2 tipos de métodos: heurísticas e otimização. No primeiro caso utilizamos a capitalização de mercado, ativos com igual ponderação e ativos em que 60% do peso na carteira corresponde aos ativos de melhor desempenho e 40% aos de pior. No segundo caso, resolvemos o problema de otimização de Markowitz, com ou sem atualização dos retornos esperados pelo método de BL (e suas derivações) que permitem determinar as soluções de RS e AR. Esta abordagem permite avaliar o retorno efetivo (no período *out-of-sample*) e a diferença entre este e o retorno previsto (no período *in-sample*).

Além disso, iremos comparar estimativas para μ obtidas através dos retornos históricos e do CAPM. Em cada uma delas iremos considerar o impacto da janela temporal considerada: dia, mês e todo o período *in-sample*. No caso dos retornos históricos, estas janelas temporais afetam apenas o cálculo da matriz P e do coeficiente de aversão ao risco, δ , mantendo sempre a previsão da média dos retornos com todo o período *in-sample*.

Por fim, iremos testar a sensibilidade do modelo de Black-Litterman às alterações de P e q , uma vez que para a definição da matriz P utilizamos a capitalização de mercado. No caso da matriz q , iremos considerar 3 opções: uma em que as perspetivas estão bem valorizadas, outra em que estão subvalorizadas e uma última em que estão sobrevalorizadas.

Dois aspetos a ter em consideração são o de que o valor de τ é igual em todos os modelos considerados e que a matriz Ω depende da matriz P através da relação 2.13, pelo que varia consoante a capitalização de mercado considerada.

3.1 Seleção dos dados reais

Para este exemplo decidimos utilizar dados do mercado financeiro português. Assim, utilizámos os 18 ativos do índice PSI20: Altri, BCP, Corticeira Amorim (CortAm), CTT, EDP, EDP Renováveis (EDPRen), Galp, Ibersol, Jerónimo Martins (JerMar), Mota Engil (Mota), Pharol, Navigator (Nav), NOS, Nova Base (NBase), Ramada, Ren, Semapa e Sonae. É também necessário ter conhecimento sobre o portefólio de mercado. Para isso, utilizámos um portefólio *benchmark*, neste caso o índice PSI20. Além disto, é necessária a taxa livre de risco, que foi obtida fazendo a média dos valores diários da EURIBOR 6 meses para o período considerado (esta taxa está em percentagem e é anualizada, portanto é necessário dividir por $360 \times 100 = 36000$).

Tendo os ativos selecionados, recolhemos a série temporal dos dados diários para um período de 2 anos, de 1 de janeiro de 2018 a 31 de dezembro de 2019. Separámos os dados em dois grupos: o grupo *in-sample* (inS) correspondente aos primeiros 18 meses e o grupo *out-of-sample* (outS), com os dados dos últimos 6 meses. A análise irá ser feita para os dados *in-sample* e os resultados serão comparados com os dados *out-of-sample* para estudar a eficácia da previsão.

Na Figura A.1 do Anexo A encontram-se os gráficos da variação dos preços de fecho dos ativos e na Figura A.2 a variação dos retornos dos ativos, tanto para o período *in-sample* como para o *out-of-sample*. Na Figura A.1 observa-se, no geral, que no período inS há uma maior variação nos preços de fecho comparativamente ao período outS. Além disso, alguns ativos têm um comportamento muito diferente relativamente ao valor de fecho nos períodos inS e outS, como é o caso do EDP Renováveis e do CTT. Na Figura A.2, verifica-se também uma maior variação no período inS do que no período outS. Este comportamento dos ativos irá justificar alguns resultados obtidos neste capítulo. A Tabela 3.1 apresenta um resumo estatístico dos dados considerados em cada um dos períodos.

Tabela 3.1 Média e desvio-padrão dos retornos dos ativos no período *in-sample* e do período *out-of-sample*.

	Retornos Históricos (inS)		Período de Investimento (outS)			Diferença
	Média Arit.	Desv. Pad.	Média	Desv. Pad.	Média Arit.	Médias Aritméticas
Altri	0,067%	2,229%	-0,068%	1,646%	-0,043%	-0,110%
BCP	0,008%	1,798%	-0,202%	2,117%	-0,203%	-0,211%
CortAm	-0,007%	1,372%	0,086%	1,073%	0,086%	0,093%
CTT	-0,129%	1,657%	0,377%	2,037%	0,336%	0,464%
EDP	0,039%	1,190%	0,120%	0,928%	0,116%	0,077%
EDPRen	0,075%	0,972%	0,133%	1,110%	0,123%	0,048%
Galp	-0,027%	1,384%	0,063%	1,209%	0,082%	0,109%
Ibersol	-0,053%	1,224%	-0,004%	1,022%	0,001%	0,055%
JerMar	-0,023%	1,580%	0,006%	1,320%	0,035%	0,058%
Mota	-0,148%	2,575%	-0,027%	1,911%	0,004%	0,152%
Nav	-0,054%	1,727%	0,041%	1,516%	0,062%	0,117%
NOS	0,018%	1,247%	-0,126%	1,073%	-0,137%	-0,155%
NBase	-0,054%	1,638%	0,086%	2,070%	0,077%	0,131%
Pharol	-0,104%	2,834%	-0,267%	2,197%	-0,296%	-0,192%
Ramada	-0,088%	2,122%	-0,145%	1,381%	-0,134%	-0,046%
Ren	-0,003%	0,794%	0,097%	0,724%	0,096%	0,099%
Semapa	-0,085%	1,546%	0,071%	1,242%	0,088%	0,173%
Sonae	-0,069%	1,581%	0,041%	1,213%	0,060%	0,129%

Outra informação necessária é a capitalização de mercado de cada um dos ativos que irá ser necessária para calcular os pesos dos ativos no portefólio inicial. Para calcular os pesos de mercado é utilizada a capitalização do último dia do período da amostra, ou seja, dia 28 de junho de 2019. No estudo computacional aqui apresentado utilizámos também as capitalizações do último mês da amostra e também de todo o período *in-sample*, para comparar os resultados obtidos. Como já foi referido na Secção 2.1.2, este valor é obtido multiplicando o valor de fecho do ativo pelo volume de ações e, por sua vez, o peso de cada ativo é calculado dividindo a capitalização do ativo pela soma de todas as capitalizações. Nas Tabelas 3.2 e 3.3, apresentamos um sumário dos dados necessários para a aplicação do modelo. Os valores de r_f e de δ são negativos, o que irá influenciar a determinação do portefólio AR.

Tabela 3.2 τ , taxa livre de risco e δ .

τ	r_f	δ		
		Último Dia	Último Mês	<i>in-sample</i>
$\frac{1}{379} = 0,0026$	-0,000007165	-1,794	-1,7912	-1,8022

Tabela 3.3 Capitalização de mercado em euros e pesos dos ativos.

	Capitalização de Mercado (euros)			Pesos		
	Último Dia	Último Mês	Todo	Último Dia	Último Mês	Todo
Altri	4000583,60	5495937,16	2839644,06	4,03%	5,98%	3,22%
BCP	13763578,00	11874373,20	11769985,02	13,87%	12,92%	13,36%
CortAm	249613,60	394023,36	526028,30	0,25%	0,43%	0,60%
CTT	1879486,00	1656049,86	2441719,46	1,89%	1,80%	2,77%
EDP	25473300,00	24274740,00	19534676,29	25,66%	26,42%	22,18%
EDPRen	4024273,00	1199995,25	1235498,72	4,05%	1,31%	1,40%
Galp	28932800,00	22189774,20	21994274,99	29,15%	24,15%	24,97%
Ibersol	246104,40	50874,31	100028,53	0,248%	0,06%	0,11%
JerMar	9992004,00	10720545,96	12085545,58	10,07%	11,67%	13,72%
Mota	1045711,65	1371026,48	1783027,28	1,05%	1,49%	2,02%
Nav	2419502,40	3960324,86	3628639,04	2,44%	4,31%	4,12%
NOS	1635277,60	3494406,78	2964402,71	1,65%	3,80%	3,37%
NBase	4200,00	23365,52	38221,53	0,004%	0,03%	0,04%
Pharol	194790,00	171519,94	882656,31	0,20%	0,19%	1,00%
Ramada	149529,60	63086,62	130462,99	0,15%	0,07%	0,15%
Ren	2065297,70	1843435,63	2134390,27	2,08%	2,01%	2,42%
Semapa	257211,60	662051,33	685499,67	0,26%	0,72%	0,78%
Sonae	2922280,00	2435022,63	3311862,88	2,94%	2,65%	3,76%

Por forma a verificar o impacto das perspetivas do investidor, realizámos 3 cenários utilizando a amostra *out-of-sample*: um em que as perspetivas correspondem à realidade (retornos do período *out-of-sample*), outro em que os ativos são sobrevalorizados e um último em que os ativos são subvalorizados. No entanto, iremos utilizar sempre os mesmos ativos e o mesmo conjunto de perspetivas, alterando apenas o valor do retorno esperado. Para determinar quais os valores associados às perspetivas e quais os ativos que as constituem é necessário saber o valor da média dos retornos do período *in-sample* e do período *out-of-sample*. Estes valores bem como os desvios-padrão associados são apresentados na Tabela 3.1.

Em cada cenário iremos utilizar 3 perspetivas, sendo que uma é absoluta e duas são relativas:

Perspetiva 1: O retorno esperado do ativo X irá ser de $a\%$.

Perspetiva 2: O retorno esperado do ativo Y irá superar o retorno esperado do ativo Z em $b\%$.

Perspetiva 3: A média dos retornos esperados dos ativos R e S irá superar a média dos retornos esperados dos ativos T e U em $c\%$.

Para construir a perspetiva 1, considerámos inicialmente a diferença entre o valor do retorno médio *in-sample* e o valor do retorno médio *out-of-sample* para cada ativo. O ativo cuja diferença é maior foi escolhido para a perspetiva absoluta, sendo a o valor que corresponde ao retorno médio no período *out-of-sample* deste ativo. Neste caso o ativo X é CTT e o valor de a é 0,377%.

Na perspetiva 2 considerámos a diferença entre o valor do retorno médio no período *out-of-sample* dos ativos dois a dois e escolhemos aqueles cuja diferença é maior. Neste caso, os ativos Y e Z correspondem a CTT e BCP, sendo o respetivo valor de b igual a 0,644%.

Por fim, para elaborar a perspetiva 3, analisámos inicialmente os retornos médios no período *out-of-sample* de todos os pares de ativos. Por exemplo, para os ativos Altri e BCP, $\frac{-0,068+(-0,202)}{2} = -0,135\%$. Os 2 grupos de ativos escolhidos para esta perspetiva são os que correspondem ao maior e menor valor nas médias dos pares de ativos previamente calculadas, sendo o valor de c a diferença entre eles. Assim, o grupo de ativos *outperformance* é formado pelos ativos R = CTT e S = EDPRen enquanto o grupo de ativos *underperformance* é formado pelos ativos T = BCP e U = Pharol. O valor correspondente de c é 0,49%. Nesta perspetiva optámos por calcular as entradas da matriz P utilizando a capitalização de mercado. Assim, considerando a capitalização correspondente ao último dia (ver Tabela 3.3), obtemos, então

$$P_{3CTT} = \frac{Cap.CTT}{Cap.CTT + Cap.EDPRen} = \frac{1879486}{1879486 + 4024273} = 0,3183,$$

$$P_{3EDPRen} = \frac{Cap.EDPRen}{Cap.CTT + Cap.EDPRen} = \frac{4024273}{1879486 + 4024273} = 0,6816,$$

$$P_{3BCP} = \frac{Cap.BCP}{Cap.BCP + Cap.Pharol} = \frac{13763578}{13763578 + 194790} = 0,9860$$

e

$$P_{3Pharol} = \frac{Cap.Pharol}{Cap.BCP + Cap.Pharol} = \frac{194790}{13763578 + 194790} = 0,0140.$$

Para os outros dois casos (capitalização do último mês e de todo o período *in-sample*) o processo é semelhante.

No cenário subvalorizado consideramos que os valores a , b e c são 0,1% mais baixos. Assim, temos $a = 0,277$, $b = 0,544$ e $c = 0,390$. Por fim, no cenário sobrevalorizado, decidimos que os valores de a , b e c eram 0,1% superiores, originando $a = 0,477$, $b = 0,744$ e $c = 0,590$.

Admitindo que a ordenação dos ativos é a indicada na Tabela 3.3, então as matrizes P para os 3 casos é dada por

$$P_{Dia} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,9860 & 0 & 0,3183 & 0 & 0,6816 & \dots & 0 & -0,0140 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{Mês} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,9858 & 0 & 0,5798 & 0 & 0,4202 & \dots & 0 & -0,0142 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{Todo} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,9302 & 0 & 0,6640 & 0 & 0,3360 & \dots & 0 & -0,0698 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e os vetores q dos cenários bem valorizado, subvalorizado e sobrevalorizado são dados por

$$q_{Bem} = \begin{bmatrix} 0,00377 \\ 0,00644 \\ 0,00490 \end{bmatrix}, \quad q_{Sub} = \begin{bmatrix} 0,00277 \\ 0,00544 \\ 0,00390 \end{bmatrix} \quad e \quad q_{Sobre} = \begin{bmatrix} 0,00477 \\ 0,00744 \\ 0,00590 \end{bmatrix}.$$

3.2 Resultados

Com os dados apresentados na secção anterior é, então, possível aplicar o modelo de Black-Litterman e determinar os vetores dos retornos esperados atualizados para os vários casos. Vamos dividir a análise em 5 partes: uma em que consideramos apenas as heurísticas, outra em que consideramos as estimativas previstas com otimização sem atualização dos retornos, outra em que ajustamos as previsões dos retornos esperados com o modelo de Black-Litterman tendo como ponto de partida os dados históricos e o CAPM, outra em que consideramos as variantes deste modelo (BL 100% e o caso em que P é obtido com igual ponderação) e por fim uma secção onde comparamos os resultados obtidos com os resultados correspondentes às perspectivas sub e sobrevalorizadas.

3.2.1 Heurísticas

Por forma a comparar o desempenho dos portefólios ótimos obtidos foram utilizadas duas heurísticas bem conhecidas na literatura: uma em que os ativos têm igual ponderação (heur-1/18) e outra em que a soma dos pesos dos ativos com menor risco corresponde a 60% e a soma dos pesos dos ativos com maior risco corresponde a 40% (heur-60/40) (dentro de cada grupo, cada ativo tem o mesmo peso). Neste último caso, utilizámos o valor médio do risco (avaliado pelo desvio-padrão) para separar os ativos com maior e menor risco, mas podia ter sido definido um outro valor escolhido pelo utilizador. Para estas duas metodologias, os pesos do portefólio de mercado estão indicados na Tabela B.1. Para estas heurísticas, utilizámos o método do CAPM para determinar o vetor dos retornos esperados. Como nestes casos não se considera a capitalização de mercado, utilizámos vetores que permitissem obter os pesos dos ativos considerados e posteriormente obter o vetor dos retornos.

Além disso, os portefólios iniciais cujos pesos dos ativos são obtidos com a capitalização de mercado do último dia, do último mês e de todo o período *in-sample* também são utilizados como

comparação com os restantes resultados obtidos e, portanto, os resultados destes portefólios são apresentados nesta subsecção.

Na Tabela B.2 são apresentadas as previsões dos retornos esperados nos portefólios iniciais e nas heurísticas consideradas de acordo com o CAPM e na Figura 3.1 é possível observar a constituição destas carteiras.

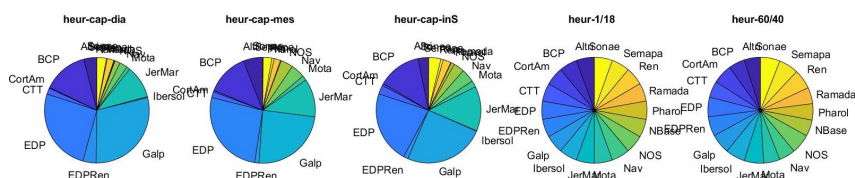


Fig. 3.1 Constituição dos portefólios que constituem as heurísticas.

Com esta informação, e tendo em conta que temos a informação dos retornos reais no período *out-of-sample*, é possível calcular os retornos previstos e os retornos efetivos obtidos pelo investidor caso investisse nestes portefólios. Para calcular os retornos previstos, utilizamos os pesos dos portefólios ótimos e os vetores dos retornos para cada caso. Para calcular os retornos efetivos, utilizamos os pesos dos portefólios ótimos e o vetor da média dos retornos no período *out-of-sample*.

Tabela 3.4 Retornos previstos, retornos efetivos e diferença absoluta em percentagem (%).

	Capitalização de Mercado			1/18	60/40
	Dia	Mês	inS		
Retornos Previstos	-0,014	-0,014	-0,014	-0,129	-0,125
Retornos Efetivos	0,033	0,026	0,025	0,016	0,019
Diferença Absoluta	0,047	0,040	0,039	0,145	0,145

A linha "diferença" na Tabela 3.4 pode ser vista como uma medida de risco associada ao portefólio.

Os portefólios heur-1/18 e heur-60/40 têm as piores previsões para o retorno esperado, uma vez que todos os ativos têm previsões de retorno subvalorizadas devido ao fraco desempenho no período *in-sample*.

Como era antecipado pela previsão dos retornos esperados, os retornos previstos obtidos com os portefólios iniciais seriam negativos, pelo que seriam portefólios que não trariam vantagem para os investidores. No entanto, os retornos diários médios no período *out-of-sample* sofrem alterações significativas. Efetivamente, os ativos EDP, Galp e JerMar que constituem grande parte das carteiras obtidas com a capitalização de mercado, têm um aumento no seu retorno médio no período *out-of-sample*, o que contribui para que o retorno efetivo seja positivo.

Os portefólios heur-1/18 e heur-60/40 são os que têm uma diferença maior. Apesar dessa diferença ser positiva, representa um grande desvio entre o retorno previsto e o efetivo, pelo que estes correspondem aos portefólios com maior risco. Neste exemplo particular, a maior diversificação existente nestes portefólios não permite a diminuição do risco.

3.2.2 Otimização sem atualização dos retornos

Além das heurísticas é interessante comparar os resultados obtidos com otimização sem que o vetor dos retornos seja atualizado. Para isso considerámos o caso em que utilizámos os retornos históricos de todo o período *in-sample* (opt-hist) e o caso em que utilizámos os retornos obtidos pelo CAPM quando se utiliza a capitalização de mercado do último dia (opt-CAPM). Estes retornos estão apresentados nas Tabelas 3.1 e B.2, respetivamente.

Para cada uma das estimativas dos retornos apresentadas, foram determinados os portefólios ótimos do rácio de Sharpe (RS) e da aversão ao risco (AR). Desse modo, pretende-se estudar o impacto da previsão dos retornos esperados no desempenho real desses portefólios. Assim, obtiveram-se os portefólios com as constituições apresentadas na Figura 3.2.

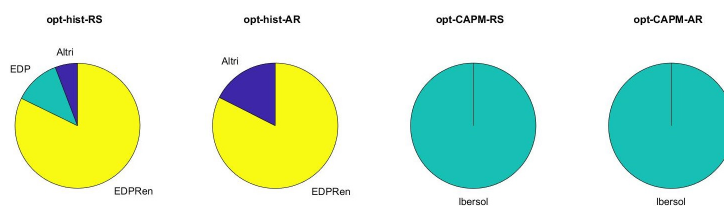


Fig. 3.2 Constituição dos portefólios obtidos por métodos de otimização, utilizando as previsões dos retornos obtidos pelos dados históricos e pelo método CAPM.

Relativamente aos portefólios do rácio de Sharpe, no caso de se utilizar os retornos históricos (opt-hist-RS), quase todos os ativos têm retornos negativos (Tabela 3.1). No entanto, os 3 ativos com maior retorno médio são os que constituem a carteira ótima. Isto pode ser justificado pelo facto do coeficiente $(retorno - r_f)/risco$ (o retorno é o retorno histórico e o risco é o desvio-padrão dos ativos) se destacar mais nestes 3 ativos. No caso de se considerar a previsão dos retornos pelo método CAPM (opt-CAPM-RS), todos os ativos têm retornos médios negativos. Contudo, o ativo Ibersol é o que tem um retorno médio superior, sendo que é este que constitui a carteira ótima. Além disto, se analisarmos a matriz de covariâncias Σ , este ativo é dos que tem uma variância mais baixa. Assim, é intuitivo que, de um modo geral, os ativos constituintes da carteira ótima, sejam os ativos com maior retorno médio e cujo risco não é muito elevado.

Quando consideramos os portefólios de aversão ao risco, tanto no caso do portefólio opt-hist-AR como no caso do portefólio opt-CAPM-AR, os ativos que constituem estas carteiras são os que têm os maiores retornos médios (no período *in-sample*), para o primeiro caso e nos retornos obtidos pelo CAPM para o segundo caso (ver Tabelas 3.1 e B.2, respetivamente). No caso dos retornos históricos, grande parte da carteira é constituída pelo ativo EDPRen, que tem um desvio-padrão consideravelmente baixo quando comparado com os restantes ativos. Assim verificamos que o problema de aversão ao risco gera portefólios que maximizam os retornos e que controlem o risco associado ao investimento.

Nas Figuras A.3, A.4, A.5 e A.6 são apresentados os gráficos das fronteiras de eficiência para todos os modelos considerando as diferentes capitalizações. Como se pode verificar, os portefólios obtidos com as heurísticas e com a otimização sem atualização dos retornos são os que conduzem a menores retornos e, de um modo geral, a menor risco. Estes resultados seriam de esperar, uma vez que

os ativos que constituem maioritariamente estes portefólios são ativos com desvio-padrão reduzido no período *in-sample*, o que conduz a um risco reduzido.

De forma semelhante ao que foi feito na subsecção anterior, com os resultados para os pesos dos ativos nos portefólios ótimos, é possível calcular os retornos previstos e efetivos e analisar a diferença entre eles (Tabela 3.5).

Tabela 3.5 Retornos previstos, retornos efetivos e diferença absoluta em percentagem (%).

	Históricos		CAPM	
	RS	AR	RS	AR
Retorno Previsto	0,0700	0,0734	-0,0025	-0,0025
Retorno Efetivo	0,1200	0,0979	-0,0038	-0,0038
Diferença Absoluta	0,0500	0,0245	0,0013	0,0013

Os portefólios obtidos com base nos retornos históricos produziram melhores resultados efetivos. No entanto, os portefólios do CAPM têm um menor risco associado, uma vez que a diferença entre o retorno previsto e o retorno efetivo é a mais baixa. Seria de esperar que o portefólios AR com os retornos históricos tivesse uma maior diferença (risco), uma vez que os ativos que o constituem têm um maior desvio padrão. No entanto, o portefólio RS tem uma maior diferença, mas os ativos que o constituem não têm maior desvio-padrão comparativamente com o portefólio AR. Assim, podemos verificar que o desvio-padrão não é suficiente para justificar a diferença obtida entre os retornos.

Nos ativos que compõem opt-hist-RS, Altri tem uma evolução contrária à dos ativos EDP e EDPRen, fazendo com que a diferença média seja muito elevada. Relativamente à solução opt-CAPM-RS, o ativo Ibersol é o ativo onde o retorno previsto e efetivo estão mais próximos.

Ao analisar os retornos previstos obtidos com os portefólios ótimos, caso o perfil do investidor seja:

- baixo risco, recomenda-se os portefólios opt-CAPM-RS e opt-CAPM-AR pois são as soluções em que o retorno previsto está mais próximo do efetivo (é onde o cliente vai ter menos "surpresas"), apesar do retorno ser negativo. O único ativo constituinte destes portefólios é um dos ativos com menor desvio-padrão.

- médio/alto risco: recomenda-se o portefólio opt-hist-RS pois é o que tem maior retorno e um risco não muito elevado. Este portefólio é constituído pelos ativos EDP e EDPRen que são dos ativos com menor desvio-padrão no período *in-sample* e portanto, este portefólio não é um portefólio com um risco muito elevado.

Na Figura 3.3 está apresentado o gráfico que relaciona os retornos previstos com os retornos efetivos. Como se pode verificar, os portefólios opt-CAPM-RS e opt-CAPM-AR são os que se encontram mais próximos da reta $y = x$, pelo que são os portefólios com menor risco associado. Uma justificação para este facto é o do desempenho do ativo Ibersol ser muito semelhante no período *in-sample* e *out-of-sample*, como se pode verificar pela evolução dos preços de fecho na Figura A.1 e pelo desvio-padrão dos retornos apresentado na Tabela 3.1. No entanto, como já foi referido, o retorno é negativo, pelo que o investidor optaria por um dos portefólios dos retornos históricos.

Com o intuito de realizar uma análise mais pormenorizada da evolução da composição dos portefólios com o aumento do retorno, foi obtida a Figura 3.4 que ilustra a composição dos portefólios

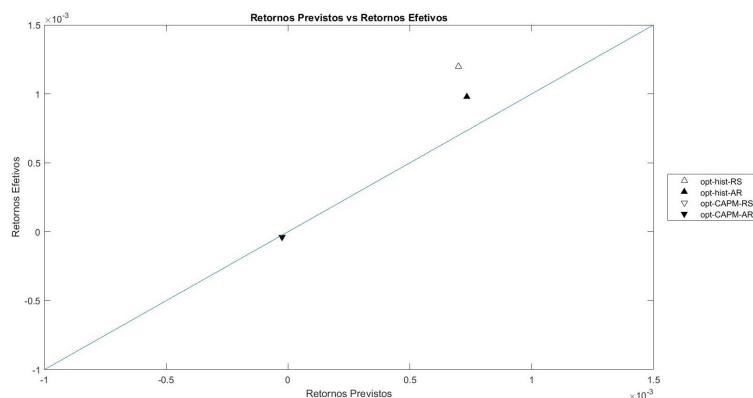


Fig. 3.3 Gráfico da relação entre os retornos efetivos e os retornos previstos. Os portfólios opt-CAPM-RS e opt-CAPM-AR estão sobrepostos.

na fronteira de eficiência considerando os modelos de otimização com os retornos históricos e com os retornos obtidos pelo CAPM.

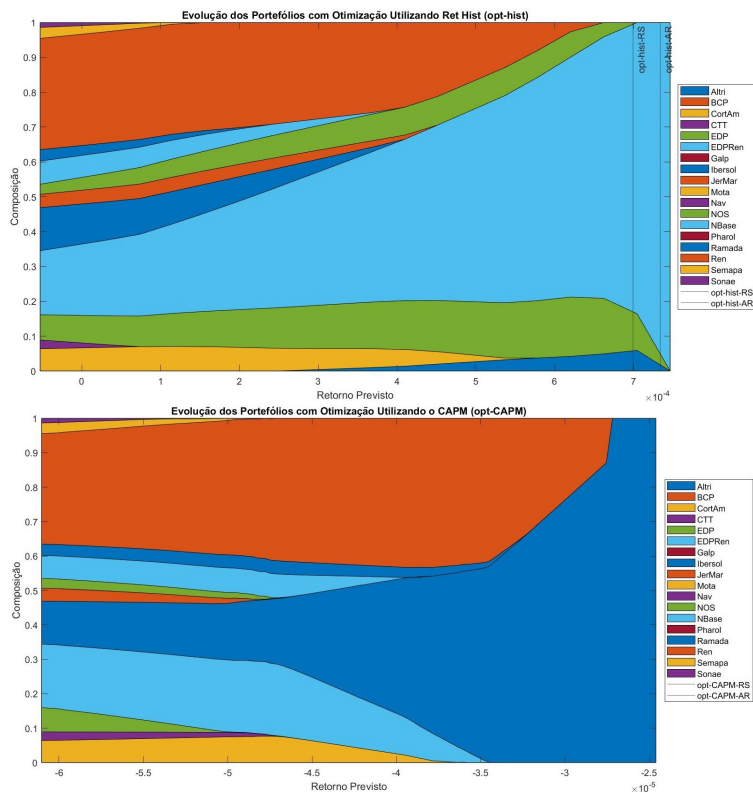


Fig. 3.4 Evolução da composição dos portfólios na fronteira de eficiência com o aumento do retorno previsto segundo os modelos de otimização com retornos históricos (cima) e com retornos em equilíbrio obtidos através do CAPM (baixo) no período *in-sample*. As retas verticais correspondem aos portfólios do Rácio de Sharpe e de Aversão ao Risco. Quando se consideram os retornos do CAPM estas retas não são visíveis pois o seu retorno previsto coincide com o máximo considerado.

Como se pode verificar, dependendo do modelo utilizado, a composição dos portefólios varia de uma forma significativamente diferente, uma vez que utilizam diferentes previsões dos retornos esperados para cada ativo.

Quando se considera o retorno previsto mínimo, a constituição dos portefólios é a mesma, sendo que os ativos com maior peso são os que têm um desvio-padrão mais baixo. No entanto, à medida que o retorno previsto aumenta, a constituição das carteiras varia consoante o aumento dos retornos dos ativos. Assim, no caso em que se consideram os retornos históricos, o ativo que assume a maior parte da carteira de retorno previsto máximo é o EDPRen, que é o ativo com maior retorno histórico médio e no caso dos retornos obtidos com o CAPM é o ativo Ibersol, que tem o retorno mais elevado, ainda que negativo. Assim, temos que quando se considera o menor retorno previsto, dá-se preferência aos ativos com menor desvio-padrão e quando se considera o maior retorno previsto, os ativos com maior retorno são os preferidos na constituição das carteiras.

Os retornos previstos com o método CAPM são os mais baixos e são sempre negativos, o que seria de esperar tendo em conta os dados da Tabela B.2.

3.2.3 Optimização com atualização dos retornos - Modelo de Black-Litterman

Aplicámos o modelo de Black-Litterman tanto para o caso em que são considerados os retornos do mercado em equilíbrio (opt-BL-CAPM) como para o caso em que são utilizados os retornos históricos (opt-BL-hist), uma vez que quando surgiu o modelo eram utilizados os retornos históricos e só depois foi introduzido o CAPM. É, então, interessante comparar estas duas metodologias por forma a verificar qual conduz a melhores resultados.

Na Tabela B.7 estão apresentados os retornos esperados obtidos com a introdução das perspetivas do investidor nos retornos iniciais do CAPM indicados na Tabela B.2 (opt-BL-CAPM) e nos retornos históricos de todo o período *in-sample* presentes na Tabela 3.1 (modelo opt-BL-hist). Neste último caso, utilizamos a capitalização de mercado dos ativos para calcular as entradas da matriz P e para o valor de δ .

Como seria de esperar, nos ativos envolvidos nas perspetivas do investidor observam-se os maiores ajustes efetuados pelo modelo. No entanto, nem todos os retornos dos ativos envolvidos nas perspetivas têm de ter ajustes significativos, como é o caso do ativo EDP. Além disso, devido à correlação existente entre os ativos, todos acabam por ser ajustados. Um exemplo disto é o que acontece com os ativos CortAm, NOS e Ramada, que também sofrem um ajuste significativo apesar de não estarem envolvidos diretamente nas perspetivas do investidor.

Uma vez que as perspetivas do investidor foram baseadas nos resultados reais do período *out-of-sample*, a introdução das perspetivas do investidor permitiu que os retornos esperados atualizados se aproximassem melhor dos retornos reais. Assim, o ativo CTT tem um ajuste positivo bastante grande quer quando se parte dos retornos previstos pelo método CAPM ou pelos retornos históricos. No entanto, no caso dos retornos históricos, o ativo EDPRen também tem um crescimento muito grande, uma vez que o retorno histórico deste ativo é o mais elevado no período *in-sample*, pelo que a atualização dos retornos com as perspetivas do investidor continuam a dar destaque a este ativo.

Tal como na subsecção anterior, para cada uma das estimativas dos retornos apresentadas, foram determinados os portefólios ótimos do rácio de Sharpe (RS) e da aversão ao risco (AR). Na Figura 3.5 estão apresentadas as constituições dos portefólios ótimos determinados.

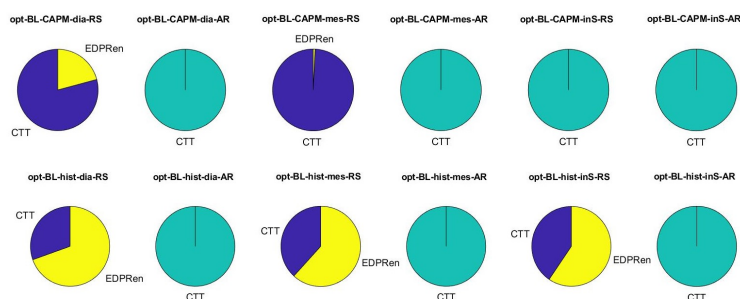


Fig. 3.5 Gráficos dos pesos dos ativos nos portfólios ótimos com os retornos esperados atualizados pelo modelo de Black-Litterman, partindo dos retornos esperados iniciais obtidos pelo CAPM (opt-BL-CAPM) e dos retornos históricos do período *in-sample* (opt-BL-hist).

Quando são utilizados os retornos previstos atualizados com o método de Black-Litterman, os portfólios ótimos são constituídos maioritariamente (ou mesmo unicamente) pelo ativo CTT. Este resultado seria de esperar, uma vez que o ativo CTT é um dos que tem maior retorno esperado e maior rácio entre o retorno esperado e o seu desvio-padrão. A exceção surge apenas no caso dos portfólios que otimizam o rácio de Sharpe utilizando as previsões atualizadas obtidas a partir dos retornos históricos. Este resultado pode justificar-se pelo facto de as previsões iniciais obtidas com os dados históricos serem muito negativas, limitando a atualização feita nos retornos esperados com o modelo de Black-Litterman. Deste modo, o ativo CTT fica com um rácio entre o valor esperado e o seu desvio-padrão inferior ao do ativo EDPRen. Note-se que, sem o conhecimento dos dados no período *out-of-sample*, estes portfólios seriam pouco intuitivos já que nos dados históricos o ativo CTT é o que tem maior perda. Além disto, pelo facto do ativo CTT ser considerado em todas as perspetivas como sendo o ativo que vai ter um desempenho superior, seria de esperar que este ativo constituísse grande parte dos portfólios ótimos.

Da análise das fronteiras de eficiência (Figuras A.3, A.4, A.5 e A.6) podemos verificar a influência das capitalizações de mercado consideradas nos resultados obtidos para os portfólios de Black-Litterman (opt-BL-CAPM e opt-BL-hist). Efetivamente, a alteração da capitalização de mercado no modelo opt-BL-CAPM, provoca alterações maioritariamente ao nível do retorno: com a capitalização do último dia obtemos portfólios com menor retorno previsto e com a capitalização de todo o período *in-sample* obtemos portfólios com maior retorno previsto. Também no modelo opt-BL-hist estes resultados se verificam. Assim, isto permite-nos colocar a questão de se a alteração do período dos retornos considerados (neste caso 18 meses) origina portfólios com retornos e risco diferentes e se os resultados se aproximam mais ou não dos resultados realmente obtidos.

Comparando os resultados obtidos com o modelo opt-BL-CAPM com os do modelo opt-BL-hist, verificamos que quando se consideram os portfólios do rácio de Sharpe, os portfólios do segundo modelo têm um risco associado muito mais baixo do que o primeiro. Assim, se um investidor tiver aversão ao risco, qualquer um destes portfólios seria uma boa opção. Considerando os portfólios de aversão ao risco, o risco associado a ambos os modelos é muito semelhante. Neste caso, a diferença principal está no retorno. Assim, um investidor para o qual o risco não seja um fator limitativo e que apenas queira maximizar o retorno, optaria por um dos portfólios obtidos pelo modelo opt-BL-CAPM uma vez que os seus retornos são superiores.

Nas Tabelas 3.6 e 3.7 estão descritos os retornos previstos e os retornos efetivos para os vários portfólios, bem como a diferença entre estes retornos. Na Figura 3.6 estão representados graficamente os resultados das tabelas anteriormente descritas.

Tabela 3.6 Retornos previstos, retornos efetivos e diferença absoluta, em percentagem (%), dos portfólios do Rácio de Sharpe.

	CAPM			Retornos Históricos		
	Dia	Mês	Todo	Dia	Mês	Todo
Retorno Efetivo	0,3279	0,3774	0,3774	0,2077	0,2268	0,2324
Retorno Previsto	0,1748	0,2309	0,2344	0,1252	0,1265	0,1274
Diferença Absoluta	0,1531	0,1465	0,1430	0,0825	0,1003	0,1050

Tabela 3.7 Retornos previstos, retornos efetivos e diferença absoluta, em percentagem (%), dos portfólios de Aversão ao Risco.

	CAPM			Retornos Históricos		
	Dia	Mês	Todo	Dia	Mês	Todo
Retorno Efetivo	0,3774	0,3774	0,3774	0,3774	0,3774	0,3774
Retorno Previsto	0,2116	0,2309	0,2344	0,1518	0,1735	0,1785
Diferença Absoluta	0,1658	0,1465	0,1430	0,2256	0,2039	0,1989

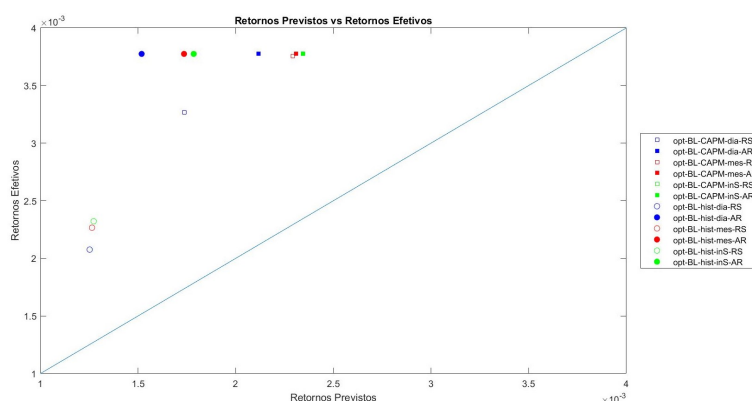


Fig. 3.6 Gráfico da relação entre os retornos efetivos e os retornos previstos.

Ao analisarmos o gráfico, verificamos que todos os portfólios têm um retorno efetivo superior ao retorno previsto. Este resultado é facilmente justificado pelo melhor desempenho dos ativos no período *out-of-sample*. A diferença entre o retorno previsto e o retorno efetivo traduz-se num risco de investimento, pelo que um investidor com aversão ao risco, deverá preferir portfólios que fiquem mais próximos da reta $y = x$. Por outro lado, um investidor sem aversão ao risco tem preferência pelos portfólios com maior retorno efetivo, sendo que neste caso, todos esses portfólios traduzem um maior risco de investimento.

De um modo geral, os portfólios ótimos do rácio de Sharpe são portfólios com menor risco para o investidor, uma vez que estão mais próximos da reta, ou seja, o retorno previsto é semelhante ao retorno efetivo. O facto do ativo EDPRen entrar na constituição de quase todos os portfólios do rácio

de Sharpe, permite justificar o porquê destes portefólios se aproximarem mais da reta $y = x$: este ativo tem um desvio padrão bastante reduzido tanto no período *in-sample* como no período *out-of-sample*, pelo que a evolução dos seus retornos não varia muito. Assim, é um ativo com baixo risco associado e como constitui grande parte destas carteiras ótimas, reduz o risco associado às mesmas. Por sua vez, o ativo CTT é dos que tem maior desvio-padrão em ambos os períodos e portanto o risco associado às carteiras em que este ativo está presente em maior percentagem é mais elevado.

A Figura 3.7 indica a evolução da composição dos portefólios com o aumento do retorno na fronteira de eficiência considerando os modelos de otimização com os retornos obtidos pelo CAPM e pelos retornos históricos.

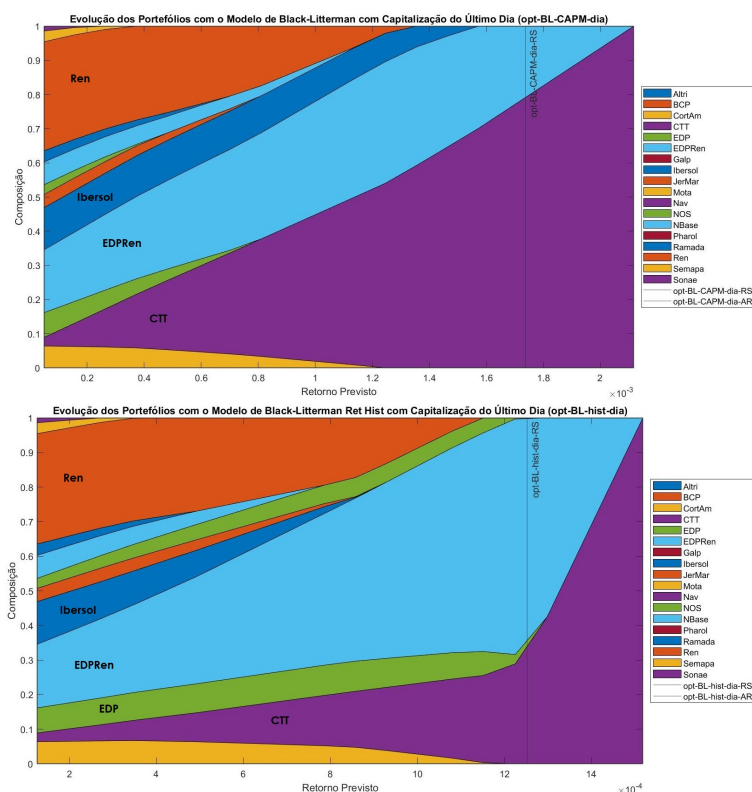


Fig. 3.7 Evolução da composição dos portefólios com o aumento do retorno previsto, os quais foram ajustados com o modelo de Black-Litterman com retornos em equilíbrio obtidos através do CAPM ou com capitalização do último dia (opt-BL-CAPM) (cima) e através dos retornos históricos (opt-BL-hist) (baixo). As retas verticais correspondem aos portefólios do Rácio de Sharpe. Os portefólios AR não são visíveis uma vez que o seu retorno previsto coincide com o valor máximo do retorno previsto considerado.

Tal como nos modelos apresentados na subsecção anterior, quando se considera o retorno previsto mínimo na constituição dos portefólios, os ativos com maior peso são os que têm um desvio-padrão mais baixo. Assim, os ativos REN e EDPRen constituem uma parte considerável dos portefólios com menor retorno (e, portanto, com menos risco), o que faz sentido pois são os ativos com menos variabilidade. Como seria de esperar, à medida que o retorno do portefólio aumenta, o peso do ativo com melhor retorno (CTT) vai aumentando, uma vez que os outros ativos não permitem atingir o retorno previsto desejado.

Com a introdução das perspetivas do investidor no modelo de Black-Litterman, perspetivas que se baseiam no desempenho real dos ativos, os retornos previstos dos portefólios que utilizaram o ajuste pelo modelo de Black-Litterman são mais altos do que os retornos previstos obtidos nas soluções que não consideraram esse ajuste. Estes resultados podem ser justificados com a correção dos retornos previstos dos ativos que irão ao encontro dos retornos efetivos (mais altos). Como seria de esperar, a introdução das perspetivas do investidor é uma mais valia para a obtenção de portefólios ótimos, de portefólios mais favoráveis para o investidor. No entanto, quando estas perspetivas estão subvalorizadas ou sobrevalorizadas, os resultados podem ser diferentes.

Finalmente, é possível verificar que as soluções que correspondem a retornos mais baixos são mais diversificadas, o que faz sentido pois portefólios com retornos mais baixos têm, em geral, menos risco e a diversificação é um fator que contribui para diminuir o risco associado.

3.2.4 Variantes do Modelo de Black-Litterman

Como variantes do modelo de Black-Litterman utilizámos o caso em que a matriz P é definida considerando que os ativos têm igual ponderação quando se utilizam os retornos históricos (opt-BL-hist-igual) e o caso em que o investidor tem 100% de confiança nas perspetivas (opt-BL100-CAPM). No primeiro método, consideramos que a linha da matriz P correspondente à perspetiva 3 é

$$P = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

ou seja, que os pesos dos ativos na perspetiva não estão relacionados com a capitalização de mercado. No segundo método, o que o distingue da versão original é a matriz Ω . Como já foi referido no Capítulo 2, quando o investidor tem 100% de confiança nas perspetivas, os valores da diagonal da matriz Ω são iguais a zero, pelo que esta matriz não entra no cálculo dos retornos atualizados. Assim, com a aplicação destes métodos obtivemos os retornos apresentados na Tabela B.8.

Seria de esperar que no caso do método opt-BL100-CAPM os ativos considerados *outperforming* fossem os que traduzissem um maior retorno e que os ativos *underperforming* os que tivessem um menor retorno atualizado. Efetivamente, estes resultados verificam-se, sendo que os retornos atualizados obtidos se aproximam das previsões das perspetivas do investidor. Assim, os ativos CTT e EDPRen são os que têm maior retorno atualizado e os ativos BCP e Pharol os que têm menor retorno atualizado.

No portefólio opt-BL-hist-igual, como os pesos dos ativos na matriz P são iguais, os resultados obtidos são ligeiramente diferentes dos resultados obtidos na secção anterior para os modelos que utilizam os retornos históricos. Quando se considera a capitalização de mercado na construção da matriz P , a entrada correspondente ao ativo BCP tem um valor muito próximo de -1 . No entanto, quando se considera a igual ponderação, a entrada da matriz P correspondente ao ativo BCP é apenas de $-0,5$. O retorno histórico do ativo é dos mais elevados e o retorno atualizado deste ativo varia conforme o valor de entrada na matriz P : no primeiro caso o retorno atualizado é consideravelmente mais baixo do que no segundo. Quando se considera o ativo Pharol, o efeito é precisamente o contrário: com a igual ponderação o ativo passa a ter um valor de entrada na matriz P mais negativo e, portanto, tem um retorno atualizado mais negativo, uma vez que o seu retorno histórico é dos mais baixos.

Na Figura 3.8 estão apresentados os gráficos com a constituição dos portefólios ótimos para o problema do Rácio de Sharpe (RS) e para o problema de Aversão ao Risco (AR).

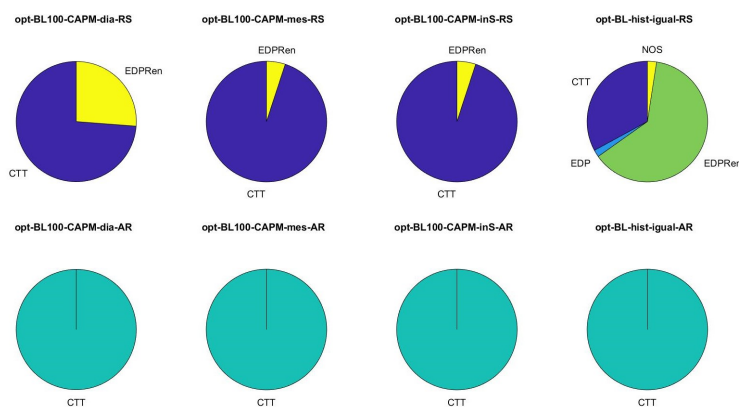


Fig. 3.8 Gráficos dos pesos dos ativos nos portefólios ótimos com os retornos esperados atualizados pelo modelo de Black-Litterman com 100% de confiança nas perspetivas do investidor, partindo dos retornos esperados iniciais obtidos pelo CAPM (opt-BL100-CAPM) e pelo modelo de Black-Litterman partindo dos retornos históricos do período *in-sample*, considerando que os ativos na matriz P têm igual ponderação (opt-BL-hist-igual).

Tal como no caso dos portefólios da Figura 3.5, nos modelos apresentados na Figura 3.8 os portefólios ótimos são constituídos maioritariamente pelo ativo CTT, o que era espectável tendo em conta que as perspetivas definidas se baseiam no desempenho real dos ativos. A exceção surge apenas no caso dos portefólios que otimizam o rácio de Sharpe utilizando as previsões atualizadas obtidas a partir dos retornos históricos. Este resultado pode justificar-se pelo facto de as previsões iniciais obtidas com os dados históricos serem muito negativas, limitando a atualização feita nos retornos esperados com o modelo de Black-Litterman. Deste modo, o ativo CTT fica com um rácio entre o valor esperado e o seu desvio-padrão inferior ao do ativo EDPRen. Note-se que, sem o conhecimento dos dados no período *out-of-sample*, estes portefólios seriam pouco intuitivos já que nos dados históricos o ativo CTT é o que tem maior perda.

De igual forma ao que foi feito nas secções anteriores, vamos analisar e comparar os resultados obtidos nas fronteiras de eficiência. Através da análise das Figuras A.3, A.4, A.5 e A.6, podemos concluir aquilo que já era previsto: quando se considera que há 100% de confiança nas perspetivas do investidor, obtemos portefólios com retornos médios previstos maiores. Isto verifica-se porque as previsões dos retornos médios dos ativos também são mais altas. Os portefólios que otimizam a aversão ao risco (AR) correspondem aos portefólios com maior risco associado, o que pode ser justificado pelo facto do coeficiente de aversão ao risco ter um valor negativo.

Assim, caso o perfil do investidor seja:

- baixo risco, recomenda-se opt-BL-hist-igual-RS, visto que tem menor risco associado.
- médio/alto risco, recomenda-se qualquer um dos portefólios opt-BL100-AR, uma vez que são os portefólios que traduzem um maior retorno para o investidor.

Para ver quais os investimentos mais vantajosos vamos analisar os portefólios que traduzem um maior retorno efetivo e também quais os investimentos mais arriscados. Nas Tabelas 3.8 e 3.9 estão

apresentados os resultados obtidos e na Figura 3.9 estão representados os portfólios ótimos bem como a reta $y = x$ que permite analisar quais os portfólios mais arriscados.

Tabela 3.8 Retornos previstos, retornos efetivos e diferença absoluta, em percentagem (%), dos portfólios do Rácio de Sharpe.

	opt-BL100-CAPM			opt-BL-hist
	Dia	Mês	inS	Igual Pond.
Retorno Efetivo	0,3134	0,3651	0,3651	0,2070
Retorno Previsto	0,2952	0,3593	0,3589	0,1130
Diferença Absoluta	0,0180	0,0053	0,0057	0,0940

Tabela 3.9 Retornos previstos, retornos efetivos e diferença absoluta, em percentagem (%), dos portfólios de Aversão ao Risco.

	opt-BL100-CAPM			opt-BL-hist
	Dia	Mês	inS	Igual Pond.
Retorno Efetivo	0,3774	0,3774	0,3774	0,3774
Retorno Previsto	0,3770	0,3770	0,3770	0,1515
Diferença Absoluta	0,0004	0,0004	0,0004	0,2259

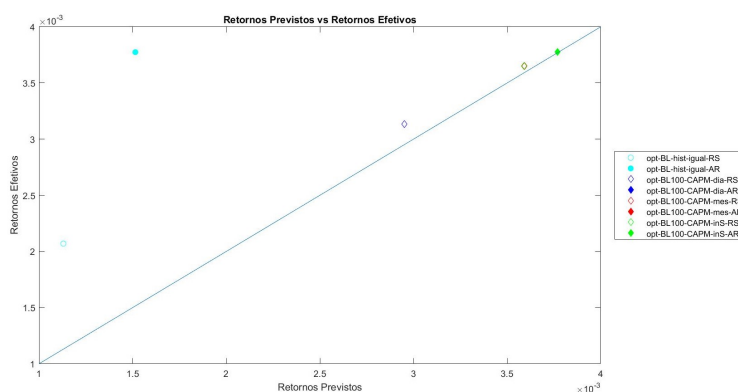


Fig. 3.9 Gráfico da relação entre os retornos efetivos e os retornos previstos.

Como era de esperar, os portfólios cujos retornos foram otimizados com o modelo de Black-Litterman com 100% de confiança nas perspetivas (opt-BL100-CAPM) são os que têm a menor diferença entre os retornos previstos e os retornos efetivos. Isto está relacionado com o facto das perspetivas se basearem no desempenho real dos ativos, pelo que os retornos atualizados se aproximam dos valores reais dos ativos. Assim, estes portfólios são os menos arriscados para investir, pelo que se um investidor tivesse aversão ao risco optaria por um destes portfólios. No entanto, como estes portfólios são constituídos maioritariamente pelo ativo CTT, o investidor podia desconfiar do retorno previsto, uma vez que o ativo CTT tem um retorno histórico médio muito reduzido. O investidor poderia optar pelo portfólio opt-BL-hist-igual-RS, uma vez que é um portfólio com menor risco e cuja constituição depende maioritariamente do ativo EDPRen, que tem um retorno histórico médio mais elevado e um desvio-padrão mais baixo no período *in-sample*.

3.2.5 Perspetivas Subvalorizadas e Sobrevalorizadas

Nesta subsecção iremos comparar os resultados obtidos anteriormente com os resultados obtidos quando as perspetivas estão subvalorizadas e sobrevalorizadas. Isto permite-nos analisar qual a influência das perspetivas nos resultados obtidos.

Em termos da constituição dos portefólios ótimos, os resultados obtidos com as perspetivas sobrevalorizadas são muito semelhantes aos resultados obtidos com os ativos bem valorizados. No entanto, no modelo com as perspetivas subvalorizadas, a constituição dos portefólios ótimos utilizando os retornos históricos é relativamente diferente (ver Figuras 3.5, 3.8 e 3.10). A diferença principal é nos portefólios opt-BL-hist-dia-AR e opt-BL-hist-igual-AR, em que o único ativo que os constitui mudou: no primeiro caso mudou para o ativo Altri e no segundo o portefólio é apenas constituído pelo ativo EDPRen. Nos portefólios RS, a composição é muito semelhante, existindo uma diminuição do peso do ativo CTT e um aumento do ativo EDPRen. Além disso, outros ativos passam a integrar as carteiras como é o caso do ativo EDP que está presente em todas as versões. O risco associado a estes portefólios é inferior ao risco associado aos mesmos portefólios quando se consideram as perspetivas bem valorizadas, o que justifica a diversificação dos portefólios.

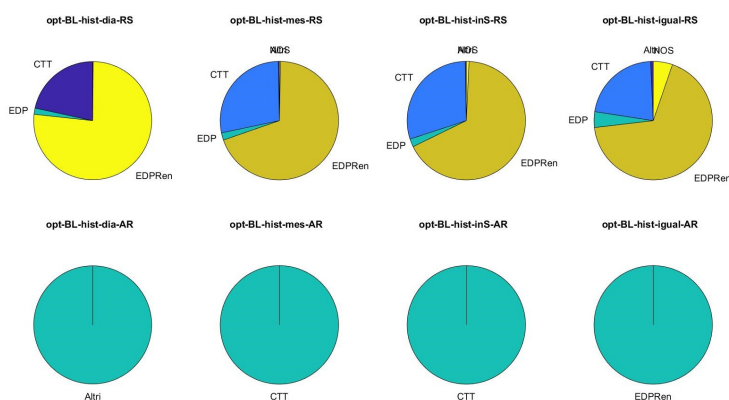


Fig. 3.10 Composição dos portefólios ótimos utilizando os retornos históricos e considerando que as perspetivas são subvalorizadas.

Utilizando os gráficos que comparam os retornos previstos com os efetivos (Figura A.7) e também os gráficos da evolução da composição dos portefólios (Figura A.8), vamos analisar as alterações provocadas pela alteração das perspetivas do investidor.

Como era de esperar, os retornos dos portefólios em que o investidor tem 100% de confiança nas perspetivas afastam-se da reta $y = x$ indicando um maior desvio entre o retorno previsto e o efetivo. Esta situação é justificada porque as perspetivas do investidor se baseiam no desempenho real dos ativos, existindo um enviesamento das estimativas para esses retornos. De um modo geral, os restantes portefólios encontram-se mais ou menos à mesma distância dessa reta, ou seja, com a alteração das perspetivas do investidor, o risco associado a essas carteiras não varia muito. Relativamente ao portefólio opt-BL-hist-dia-AR, o seu posicionamento no gráfico em que as perspetivas são subvalorizadas deve-se ao ativo que está na sua constituição, o ativo Altri, não ter um bom desempenho no período *out-of-sample*. Efetivamente, este ativo tem um retorno médio negativo neste período, pelo que o seu retorno efetivo será negativo.

A maioria dos portfólios têm o retorno efetivo muito próximo no caso sub e sobrevalorizado. Por outro lado, os retornos previstos são maiores (mais à direita) no caso sobrevalorizado. Os retornos históricos dos ativos tiveram um desempenho pior no período *in-sample* e, portanto, ao sobrevalorizar a previsão futura vão ficar mais próximos dos valores reais. Desse modo, observa-se menor envasamento dos retornos, ou seja, menos distância entre os pontos e a reta $y = x$, no caso sobrevalorizado.

Relativamente aos gráficos da evolução da composição dos portfólios com o aumento do retorno previsto, verificamos que a composição dos portfólios é bastante semelhante nestes dois casos e no caso em que as perspectivas são bem valorizadas. No entanto, há uma grande diferença na variação dos retornos previstos: quando as perspectivas são sobrevalorizadas, os retornos previstos variam num intervalo maior, pelo que o risco de investimento pode ser superior. O máximo do retorno previsto aumenta aproximadamente para o dobro no caso das perspectivas sobrevalorizadas relativamente às perspectivas subvalorizadas. O mesmo acontece com o retorno previsto do portfólio do rácio de Sharpe. Assim, facilmente visualizamos que a alteração das perspectivas do investidor influencia os resultados obtidos com o modelo de Black-Litterman, principalmente os retornos previstos obtidos.

3.3 Simulação

Na secção anterior foi feita a comparação do desempenho das carteiras com os valores reais observados na amostra *out-of-sample*. Contudo, esses valores são muito imprevisíveis e seria importante analisar outros possíveis cenários futuros. Desse modo, para tornar a análise do desempenho dos portfólios mais robusta, fizemos uma simulação em que considerámos que os retornos de todo o período *out-of-sample* seguem uma distribuição normal de média Π e matriz de covariâncias Σ , condizentes com a média e a matriz de covariância nesse período. Admitindo a independência dos retornos diários, a média amostral dos retornos no período *out-of-sample* (130 dias) seguirá uma distribuição normal com média Π e matriz de covariâncias $\frac{1}{130}\Sigma$. De seguida, gerámos 1000 vetores aleatórios a partir dessa distribuição para analisar o desempenho das diversas soluções em estudo.

Com os vetores gerados, calculámos a diferença entre o retorno efetivo e o retorno previsto para os diferentes portfólios ótimos obtidos na secção anterior através da fórmula

$$f(w_i; x) = w_i'x - \Pi'x = (w_i - \Pi)'x,$$

onde w_i representa cada vetor gerado, x cada um dos vetores dos pesos dos portfólios em estudo e Π o vetor dos retornos previstos obtidos anteriormente.

Como é possível verificar pelos histogramas da Figura 3.11, de um modo geral, os retornos previstos obtidos anteriormente encontram-se antes do pico da curva da distribuição normal, ou seja, há uma grande quantidade de carteiras cujo retorno efetivo é superior ao retorno previsto obtido na secção anterior. A exceção ocorre nos 3 portfólios associados ao RS usando o modelo de BL 100 para ajuste dos retornos (opt-BL100-CAPM-dia-RS, opt-BL100-CAPM-mes-RS e opt-BL100-CAPM-inS-RS) e nos portfólios opt-CAPM. Isto pode ser considerada uma desvantagem, uma vez que uma pequena alteração nos retornos diários dos ativos no período *out-of-sample* pode gerar um retorno dos portfólios inferior ao esperado pelo investidor, pelo que o investidor poderia optar por um destes

portefólios e obter um retorno inferior ao esperado. Além disso, verificamos que os portefólios de Black-Litterman são portefólios cujos retornos diários simulados geram portefólios com maior retorno efetivo. No entanto, quando comparamos com o retorno previsto calculado anteriormente, muitos destes casos têm portefólios com um retorno superior ao retorno efetivo.

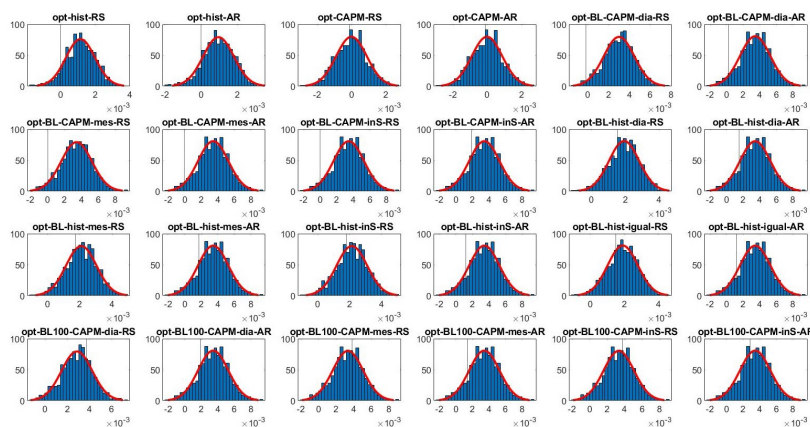


Fig. 3.11 Histogramas com a distribuição de cada portefólio ótimo e curva da distribuição normal que fornece o melhor ajuste a cada portefólio. As retas verticais representam o retorno previsto obtido com a média do período de cada portefólio obtido na secção anterior.

A avaliação do desempenho dos portefólios irá ser feita tendo em conta os seguintes parâmetros:

- retorno efetivo: corresponde ao valor médio dos retornos diários do período *out-of-sample* de cada ativo ponderado pelo peso de cada portefólio ótimo obtido na secção anterior. Permite fazer uma comparação com o retorno previsto obtido na secção anterior por forma a verificar se alterações nos retornos provocam alterações significativas nos retornos efetivos.
- risco: corresponde ao desvio-padrão dos retornos diários obtidos pela simulação e permite analisar quais os portefólios mais e menos arriscados para o investidor.
- proporção de vezes que o retorno efetivo é melhor que o retorno previsto: corresponde à diferença positiva, isto é, quando a diferença entre o retorno efetivo e o retorno previsto é positiva e permite analisar quais os portefólios que podem ser mais arriscados para o investidor.
- proporção de vezes que o retorno efetivo é negativo: corresponde ao número de vezes em que o retorno efetivo obtido com os retornos diários simulados é negativo (perdas efetivas) e pode ser utilizado para comparar os portefólios, uma vez que portefólios com grande percentagem de retornos efetivos negativos não são favoráveis para o investidor.
- *rank*: corresponde à média das posições dos portefólios ordenadas e permite analisar quais os portefólios com melhor ou pior desempenho, uma vez que quanto menor o *rank*, pior o desempenho do portefólio. Uma vez que foram comparados 24 portefólios, o seu valor varia entre 1 e 24. O *rank* dos portefólios permite determinar quais os portefólios com resultados mais consistentes, podendo verificar quais os portefólios cujas alterações nos retornos diários geram maiores retornos efetivos.

Na Tabela B.9 são apresentadas algumas informações necessárias para a interpretação dos resultados obtidos: a média e o desvio-padrão dos retornos efetivos, a percentagem de portfólios cujo retorno efetivo é superior ao previsto, a percentagem de portfólios com retorno efetivo negativo e o *rank* dos portfólios.

Para complementar a informação da Tabela B.9 apresentamos 2 gráficos com os diagramas de extremos e quartis tanto para os retornos efetivos como para a diferença entre estes retornos e os retornos previstos obtidos na secção anterior (Figura 3.12). Nestes gráficos estão representados os mínimos, máximos, medianas e quartis dos vários portfólios e é possível analisar a variabilidade dos retornos.

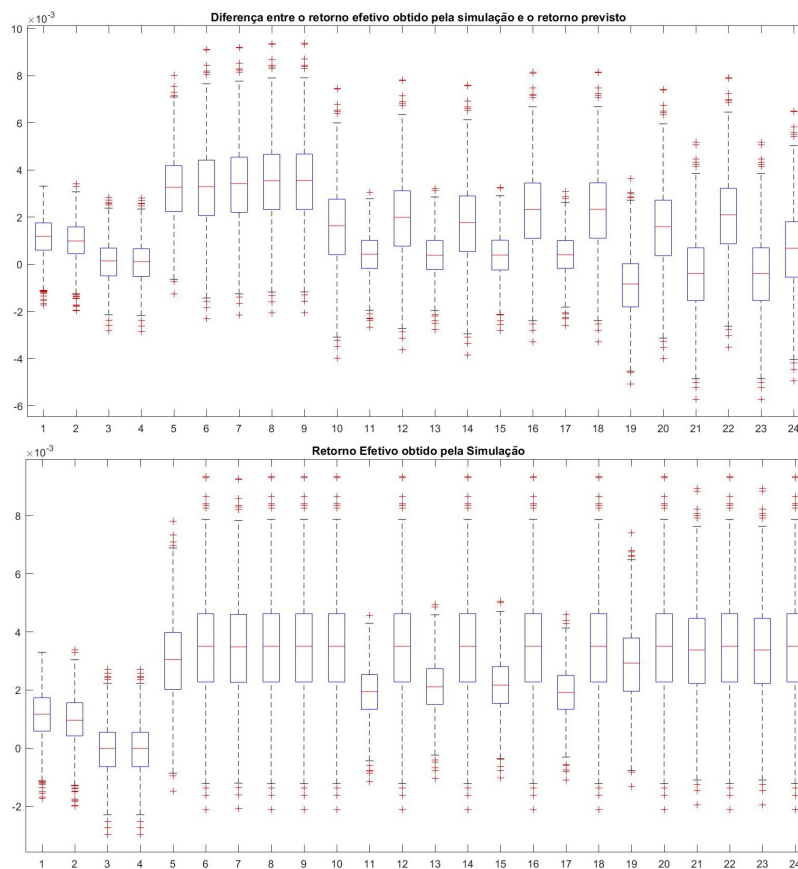


Fig. 3.12 Diagramas de extremos e quartis dos portfólios analisados para a diferença entre os retornos efetivos simulados e os retornos previstos obtidos na secção anterior (cima) e para os retornos efetivos simulados (baixo). Os valores no eixo das abcissas indicam a solução analisada de acordo com a ordenação da Tabela B.9.

Como seria de esperar, os portfólios otimizados sem atualização dos retornos (opt-hist e opt-CAPM) são portfólios cujos retornos efetivos são mais baixos, reforçando as conclusões obtidas na secção anterior. Aliás, os portfólios obtidos com o CAPM são os que têm a maior percentagem de casos com retorno negativo. Além disso, a diferença entre os retornos efetivos e os retornos previstos é em muitos dos casos negativa. Assim, estes são portfólios que poderão ser desfavoráveis a investidores com uma aversão ao risco elevada, uma vez que a incerteza dos retornos diários do período *out-of-sample* defrauda os valores inicialmente previstos.

Caso o investidor tenha aversão ao risco, os portfólios de Black-Litterman 5 a 10 (correspondem às soluções do grupo opt-BL-CAPM) são uma boa opção para o investidor, uma vez que apesar de terem uma variabilidade nos retornos efetivos elevada, a grande maioria destes retornos são positivos e, além disso, a percentagem de portfólios cuja diferença entre retornos efetivos e previstos é negativa é muito baixa. Assim, ao investir num destes seis portfólios, é muito possível que o retorno obtido pelo investidor seja positivo. Por outro lado, os 3 portfólios do grupo opt-BL100-RS (soluções 19, 21 e 23) não são uma boa opção, uma vez que em muitos dos casos, a diferença entre o retorno efetivo e o retorno previsto é negativa, pelo que há uma incerteza bastante grande em termos do retorno obtido pelo investidor.

Se o investidor apenas se interessa com o retorno e o risco não é uma grande preocupação, então qualquer portfólio com exceção dos portfólios de Markowitz e dos de Black-Litterman do rácio de Sharpe quando se utilizam os retornos históricos (opt-BL-hist-RS) será uma boa opção, uma vez que são os portfólios cujos retornos efetivos atingem valores mais altos.

Relativamente ao parâmetro *rank*, observamos que os portfólios sem a atualização dos retornos têm um valor médio baixo, indicando um fraco desempenho quando comparado com os restantes. Este resultado está de acordo com os observados anteriormente, uma vez que são os que têm menor retorno efetivo. Efetivamente, como têm um *rank* por volta de 3 numa escala de 1 a 24, a maior parte dos 1000 casos gerados por estes modelos são os que têm um retorno efetivo mais baixo. Por sua vez, os portfólios opt-BL100-CAPM-dia-AR e opt-BL-hist-dia-AR são os que de um modo geral têm um retorno efetivo simulado mais elevado, pois a maior parte dos 1000 casos gerados tem um retorno efetivo mais elevado do que os restantes modelos.

Tal como foi feito na secção anterior, vamos também realizar esta simulação para o caso em que os ativos das perspetivas são subvalorizados e sobrevalorizados. Nas Figuras A.9 e A.10 apresentamos os diagramas de extremos e quartis para ambos os casos.

Como se pode observar, quando as perspetivas estão sobrevalorizadas, os resultados obtidos são bastante semelhantes aos obtidos quando as perspetivas estão bem valorizadas, portanto, pode ser feita uma análise semelhante. No entanto, quando as perspetivas estão subvalorizadas existem algumas diferenças significativas. As diferenças principais estão relacionadas com os portfólios opt-BL-hist-dia-AR (12), opt-BL-hist-igual-AR (18) e opt-BL100-CAPM-inS-RS (23).

No caso do portfólio 12, o número de carteiras simuladas com um retorno efetivo negativo é muito superior e os retornos obtidos são muito inferiores aos restantes modelos. Efetivamente, quando verificamos a composição desta carteira, apenas o ativo Altri constitui esta carteira. Como os retornos deste ativo são maioritariamente negativos, podemos relacionar este resultado com os retornos efetivos obtidos. Além disso, como os retornos efetivos são negativos e o retorno previsto é positivo, quando analisamos a diferença entre os retornos, este modelo gera muitos valores negativos. Podemos, então concluir que se as perspetivas do investidor estiverem subvalorizadas relativamente ao retorno efetivo, então este método pode gerar soluções desvantajosas.

O portfólio 18, apenas constituído pelo ativo EDP Renováveis, também apresenta resultados distintos aos obtidos no caso em que as perspetivas são bem valorizadas. O ativo que constitui este portfólio, apesar de ter retornos positivos, tem retornos mais baixos do que os portfólios que têm o ativo CTT na sua composição. Assim, os retornos efetivos obtidos na simulação são também mais baixos e, portanto, a diferença entre estes retornos e o retorno previsto obtido anteriormente é, em

muitos casos, negativa. Deste modo, um investidor com aversão ao risco estaria reticente a investir neste portfólio, uma vez que há muitas possibilidades em que o retorno obtido efetivamente pelo investidor é inferior ao retorno previsto.

Relativamente ao portfólio 23, os retornos efetivos são muito semelhantes ao caso em que as perspectivas são bem valorizadas. No entanto, quando consideramos as diferenças entre os retornos verificamos que a tendência não é a mesma. O modelo gera casos com retornos efetivos muito superiores aos retornos previstos obtidos anteriormente. Assim, e como é um portfólio cujo retorno efetivo é dos mais altos, um investidor com aversão ao risco poderia investir nele por ter uma percentagem de casos com o valor da diferença entre os retornos negativo inferior.

Na Tabela B.10 encontra-se a informação anteriormente apresentada para o caso das perspectivas bem valorizadas, mas neste caso para as perspectivas subvalorizadas e sobrevalorizadas.

Relativamente ao *rank* dos portfólios, no caso em que as perspectivas são subvalorizadas, o portfólio opt-BL-CAPM-dia-RS é dos que tem menor *rank*, ou seja, na maioria dos 1000 casos os retornos efetivos são mais baixos do que nos restantes portfólios.

Quando se consideram as perspectivas subvalorizadas, o portfólio opt-BL-hist-dia-AR segue a mesma tendência do portfólio enumerado anteriormente. No entanto, comparando com os casos em que as perspectivas estão bem valorizadas e sobrevalorizadas, este portfólio tem um desempenho muito inferior. Nestes dois cenários, este portfólio é dos que tem um *rank* mais elevado, portanto na maioria dos 1000 casos, este portfólios gera retornos efetivos superiores aos restantes modelos, contrariamente ao que ocorreu no cenário de subvalorização das perspectivas. Esta informação complementa a análise efetuada aos diagramas de extremos e quartis de que para um investidor com aversão ao risco, esta opção não é muito viável, uma vez que os retornos efetivos são, de um modo geral, relativamente baixos. Relacionando este resultado com os resultados da secção anterior, este portfólio é constituído apenas pelo ativo Altri que não tem um retorno no período *out-of-sample* muito elevado. Assim, e como os 1000 casos gerados têm por base os retornos deste período, os retornos gerados não são muito elevados, daí que o seu *rank* não seja muito elevado.

Por outro lado, o portfólio opt-BL-hist-mes-AR tem um *rank* bastante alto, mas nos casos das perspectivas bem valorizadas e sobrevalorizadas este portfólio tem um *rank* baixo. Deste modo, quando as perspectivas são subvalorizadas, os retornos efetivos deste portfólio são mais elevados na maioria dos 1000 vetores simulados. A percentagem de portfólios com retornos efetivos superiores ao retorno previsto obtido na secção anterior é relativamente alta, pelo que seria um bom modelo para um investidor com aversão ao risco.

Comparando o *rank* dos portfólios de Black-Litterman com 100% de confiança, de um modo geral, o *rank* destes portfólios é superior quando as perspectivas são subvalorizadas. Além disso, a percentagem de portfólios cujo retorno efetivo é superior ao retorno previsto é consideravelmente superior. De acordo com a análise feita anteriormente estes portfólios aparentam ser boas opções para investidores com aversão ao risco. No entanto, quando as perspectivas são sobrevalorizadas, estes portfólios geram muita incerteza, uma vez que apesar dos retornos obtidos serem altos, quando comparados com os retornos previstos não são tão superiores quanto o esperado. Assim, de um modo geral, quando as perspectivas são subvalorizadas, o retorno efetivamente obtido pelo investidor irá ser superior ao retorno previsto, enquanto que no caso das perspectivas sobrevalorizadas, o retorno efetivamente obtido irá ser inferior ao retorno previsto.

Capítulo 4

Conclusão

O objetivo principal desta dissertação era o de aprofundar os conhecimentos na área da otimização financeira, principalmente através do estudo do modelo de Black-Litterman e da sua aplicação a um exemplo com dados reais em que fazemos a comparação dos resultados com os resultados obtidos com otimização sem atualização dos retornos. Com este exemplo analisámos também a sensibilidade do modelo às perspetivas do investidor, uma vez que aplicámos o modelo a dados em que os ativos considerados nas perspetivas estavam bem valorizados, subvalorizados e sobrevalorizados. Além disso, fizemos uma breve simulação para analisar de uma forma mais consistente o desempenho dos vários portefólios.

O modelo de Black-Litterman surgiu com o intuito de colmatar alguns dos problemas do problema de média-variância de Markowitz, entre os quais a obtenção de portefólios pouco intuitivos e a sensibilidade aos inputs. Contudo, apesar do problema de Black-Litterman resolver algumas destas questões, surgem outros problemas:

- Definição dos parâmetros τ e Ω : a definição destes parâmetros ainda gera alguma controvérsia, uma vez que há vários métodos para a determinação/especificação destes fatores;
- Correlação das perspetivas: no modelo de Black-Litterman as perspetivas são tratadas como não sendo correlacionadas, no entanto, na realidade, a correlação pode existir, mas é difícil de quantificar;
- Problema da dimensão: se estivermos a trabalhar num universo muito grande de ativos, a dimensão das matrizes podem dificultar o processo de otimização;
- Definição do vetor dos retornos inicial: existem vários estilos de investimento e o portefólio de mercado pode não ser o mais apropriado para todas as estratégias de investimentos;
- Suposições de normalidade e linearidade: o modelo de Black-Litterman assume que os retornos seguem uma distribuição normal e que o modelo de mercado é linear. Porém, há muitos mercados que não seguem esta tendência de normalidade e de linearidade e surge a dificuldade de aplicar este modelo a esses casos.

Apesar de todas estas desvantagens, este modelo apresenta uma vantagem que marca a diferença: o modelo não utiliza apenas a informação quantitativa disponível, utiliza também a informação

qualitativa proveniente dos investidores que se baseia muitas vezes em informação privada. Este modelo destaca-se do modelo de Markowitz por este motivo.

Ao longo do exemplo apresentado verificámos que, de um modo geral, o modelo de Black-Litterman gera resultados mais favoráveis para os investidores. Contudo, um investidor que apresente uma aversão ao risco elevada pode optar pelo investimento nos portefólios ótimos sem atualização dos retornos, uma vez que o risco associado é mais reduzido, mas têm a contrapartida de ter retornos efetivos consideravelmente mais baixos. Assim, de um modo geral, como os portefólios ótimos de Black-Litterman geram retornos mais elevados, este modelo é uma melhor opção para os diversos tipos de investidores, uma vez que gera portefólios com diferentes níveis de risco.

Bibliografia

- [1] Al-Afeef, M. (2017). Capital Asset Pricing Model, theory and practice: Evidence from USA (2009-2016). *International Journal of Business and Management*, 12:182.
- [2] Amadeo, K. (2020). The S&P 500 and how it works. <https://www.thebalance.com/what-is-the-sandp-500-3305888>. Acedido a: 05-06-2021.
- [3] Barros, A. D. C. (2009). Comportamento dos fundos de ações nas revisões do PSI-20. Tese de mestrado em Finanças apresentada na Faculdade de Economia da Universidade do Porto: <https://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/56181>.
- [4] Beach, S. and Orlov, A. (2007). An application of the Black–Litterman model with EGARCH-M-derived views for international portfolio management. *Financial Markets and Portfolio Management*, 21:147–166.
- [5] Bertsimas, D., Gupta, V., and Paschalidis, I. (2012). Inverse optimization: A new perspective on the Black-Litterman model. *Operations Research*, 60:1389–1403.
- [6] Black, F. and Litterman, R. (1991). Asset allocation: Combining investor views with market equilibrium. *The Journal of Fixed Income*, 1:7–18.
- [7] Black, F. and Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48:28–43.
- [8] Cayirli, O. (2011). The Black-Litterman model: Extensions and Asset Allocation. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3464770> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3464770>.
- [9] Chen, S. D. and Lim, A. E. B. (2020). A generalized Black–Litterman model. *Operations Research*, 68(2):381–410.
- [10] He, G. and Litterman, R. (2002). The intuition behind Black-Litterman model portfolios. *Investment Management Research*.
- [11] Idzorek, T. (2007). A step-by-step guide to the Black-Litterman model: Incorporating user-specified confidence levels. In Satchell, S., editor, *Forecasting Expected Returns in the Financial Markets*, chapter 2. Academic Press.
- [12] Krishnan, H. and Mains, N. (2005). The two-factor Black-Litterman model. *Risk Magazine*, 7:69–73.
- [13] Lee, W. (2000). *Advanced Theory and Methodology of Tactical Asset Allocation*, pages 171–182. John Wiley & Sons.
- [14] Lejeune, M. (2009). A VaR Black–Litterman model for the construction of absolute return fund-of-funds. *Quantitative Finance - QUANT FINANC*, 11:1489–1501.
- [15] Luis Ferruz, I. M. and Rivas, F. J. (2007). Stock market indices and investment funds. An empirical approach in the Spanish and European context. *Journal of Applied Sciences*, 7:633–653.

- [16] Mangram, M. (2013). A simplified perspective of the Markowitz Portfolio Theory. *Global Journal of Business Research*, 7:59–70.
- [17] Mankert, C. (2006). The black-litterman model : mathematical and behavioral finance approaches towards its use in practice. QC 20101119.
- [18] Pei, K. (2015). Sector weighting: A detailed implementation of Black-Litterman. <https://kpei.github.io/bl-sector-ssif/bl.html>. Acedido a: 30-04-2021.
- [19] Salomons, A. (2007). The Black-Litterman model hype or improvement?. Tese de mestrado em Matemática apresentada na Universidade de Groningen: <http://fse.studenttheses.ub.rug.nl/id/eprint/8427>.
- [20] Satchell, S. and Scowcroft, A. (2000). A demystification of the Black–Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction. *Journal of Asset Management*, 1:36–53.
- [21] Schmid, F. and Schmidt, R. (2009). *Statistical Inference for Sharpe Ratio*, pages 337–357.
- [22] Sr, E. and French, K. (2004). The Capital Asset Pricing Model: Theory and evidence. *Journal of Economic Perspectives*, 18:25–46.
- [23] Virgantari, F., Wijayanti, H., and Koeshendrajana, S. (2019). Aitken’s generalized least square method for estimating parameter of demand function of animal protein in Indonesia. *Journal of Physics: Conference Series*, 1245:012045.
- [24] Walters, J. (2014). The Black-Litterman model in detail. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1314585> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1314585>.

Anexo A

Gráficos

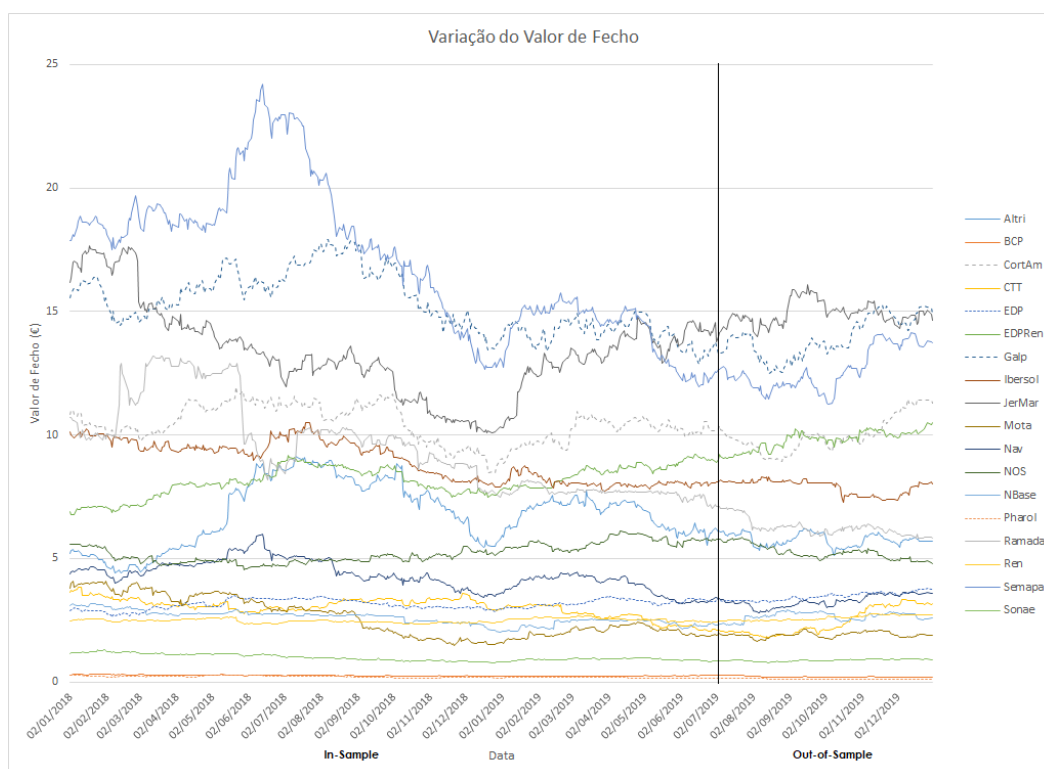


Fig. A.1 Gráfico da variação dos preços de fecho dos ativos.

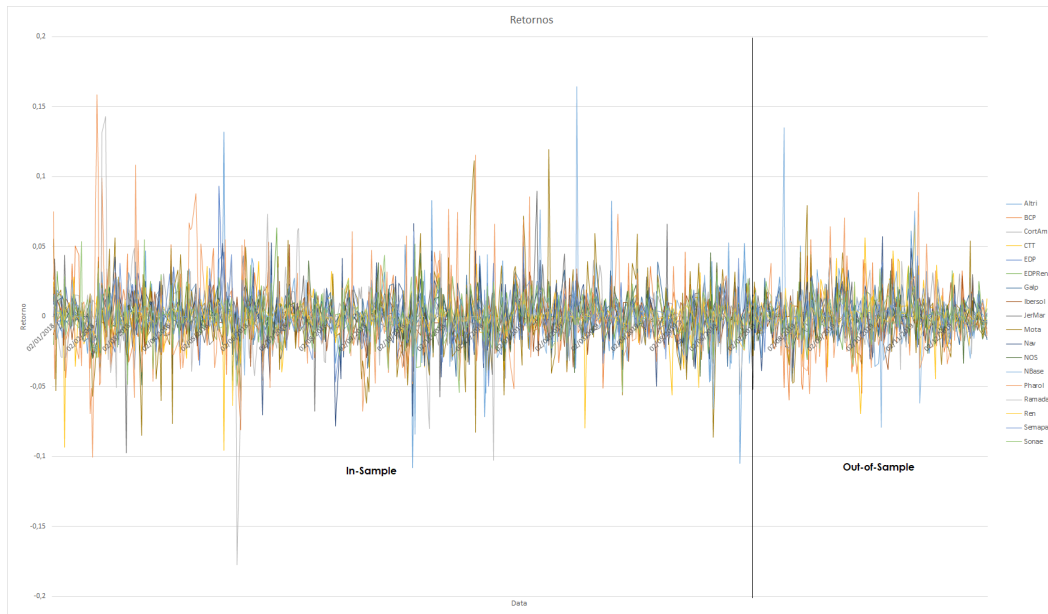


Fig. A.2 Gráfico da variação dos retornos dos ativos.

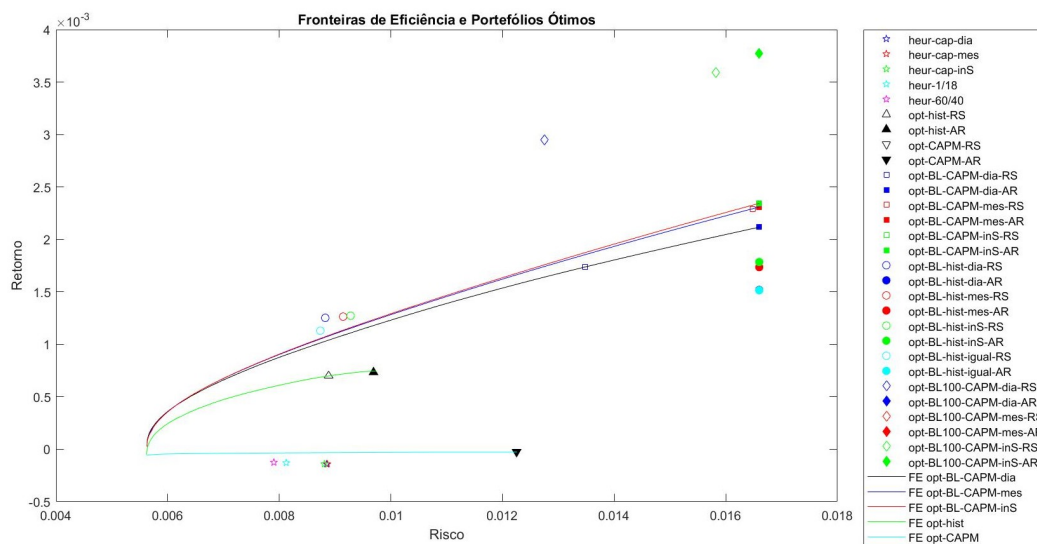


Fig. A.3 Fronteiras de eficiência dos vários modelos e respetivos portefólios ótimos. Alguns dos portefólios estão sobrepostos: opt-CAPM-RS com opt-CAPM-AR; opt-BL-hist-dia-AR com opt-BL-hist-igual-AR; opt-BL-CAPM-inS-RS com opt-BL-CAPM-inS-AR; opt-BL100-CAPM-dia-RS com opt-BL100-CAPM-mes-RS Mes; opt-BL100-CAPM-dia-AR com opt-BL100-CAPM-mes-AR e com opt-BL100-CAPM-inS-AR.

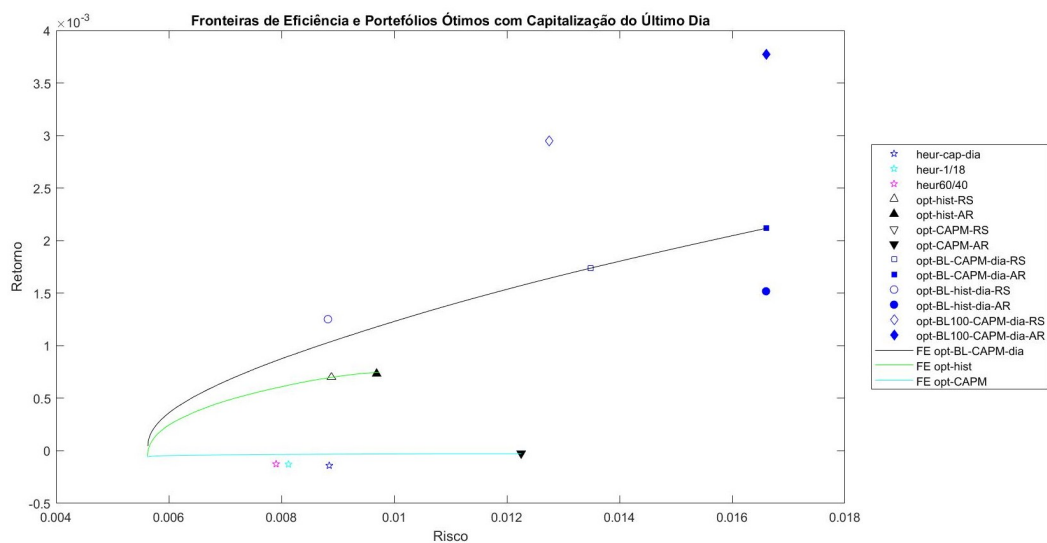


Fig. A.4 Fronteiras de eficiência considerando a previsão dos retornos médios pelos dados históricos, pelo método de CAPM e pela atualização dos retornos médios estimados com o modelo de Black-Litterman, utilizando a capitalização de mercado do último dia.

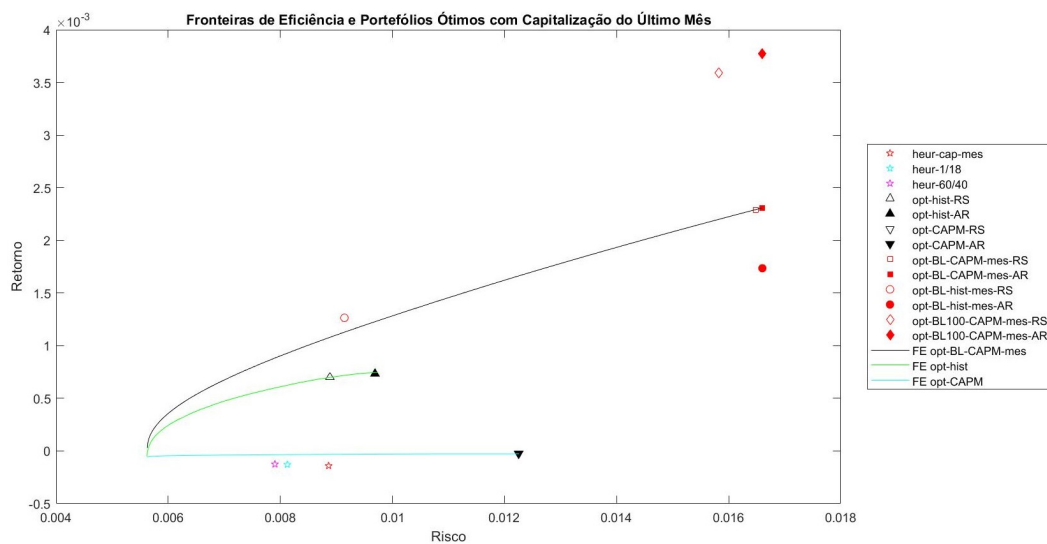


Fig. A.5 Fronteiras de eficiência considerando a previsão dos retornos médios pelos dados históricos, pelo método de CAPM e pela atualização dos retornos médios estimados com o modelo de Black-Litterman, utilizando a capitalização de mercado do último mês.

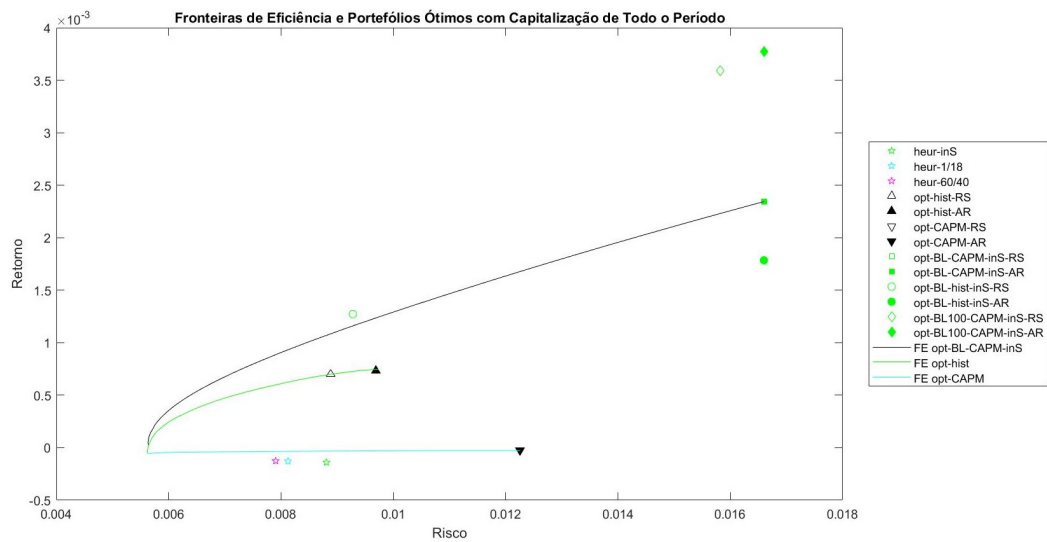


Fig. A.6 Fronteiras de eficiência considerando a previsão dos retornos médios pelos dados históricos, pelo método de CAPM e pela atualização dos retornos médios estimados com o modelo de Black-Litterman, utilizando a capitalização de mercado de todo o período *in-sample*. Os portfólios opt-BL-CAPM-inS-RS e opt-BL-CAPM-inS-AR estão sobrepostos.

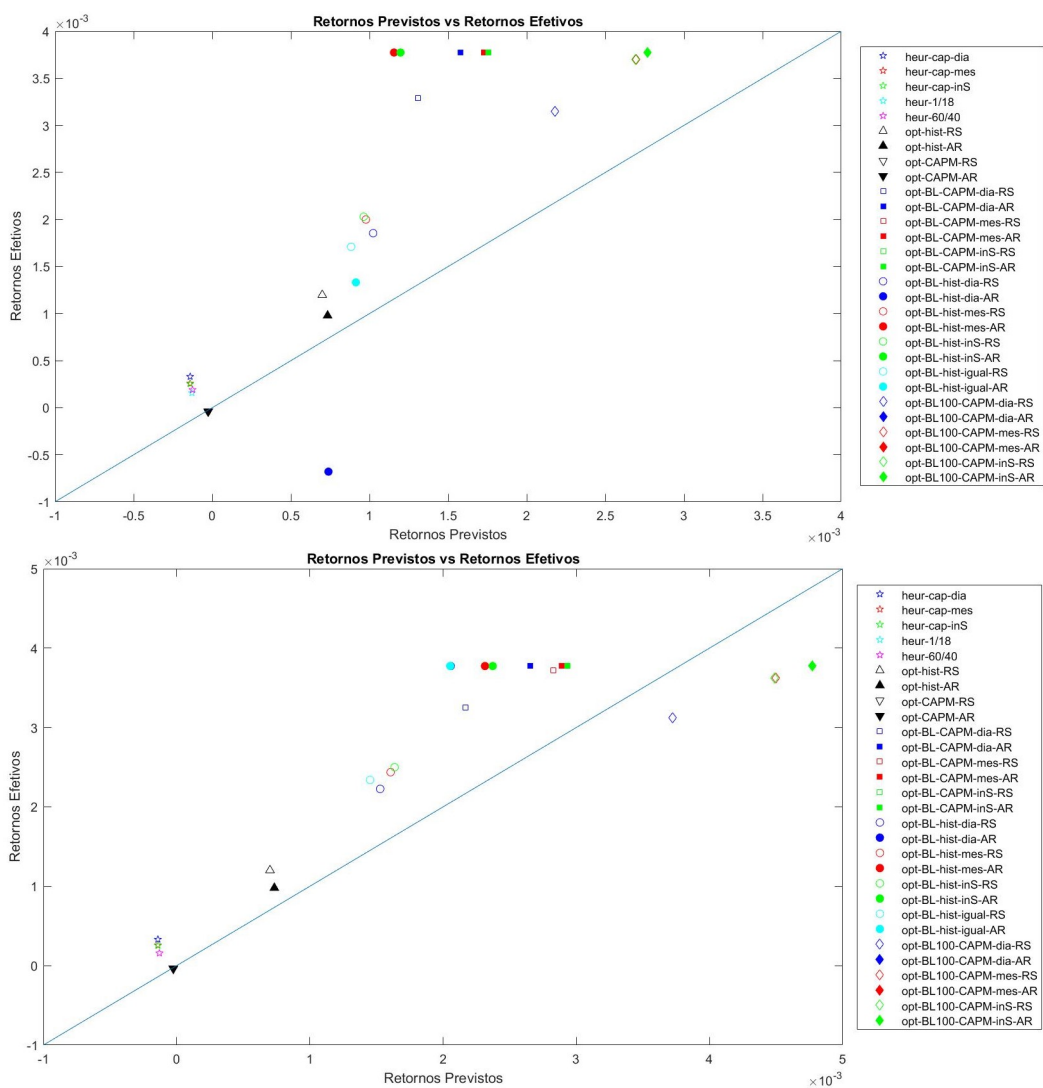


Fig. A.7 Gráficos da relação entre os retornos efetivos e os retornos previstos das diversas soluções com perspectivas subvalorizadas (cima) e com perspectivas sobrevalorizadas (baixo).

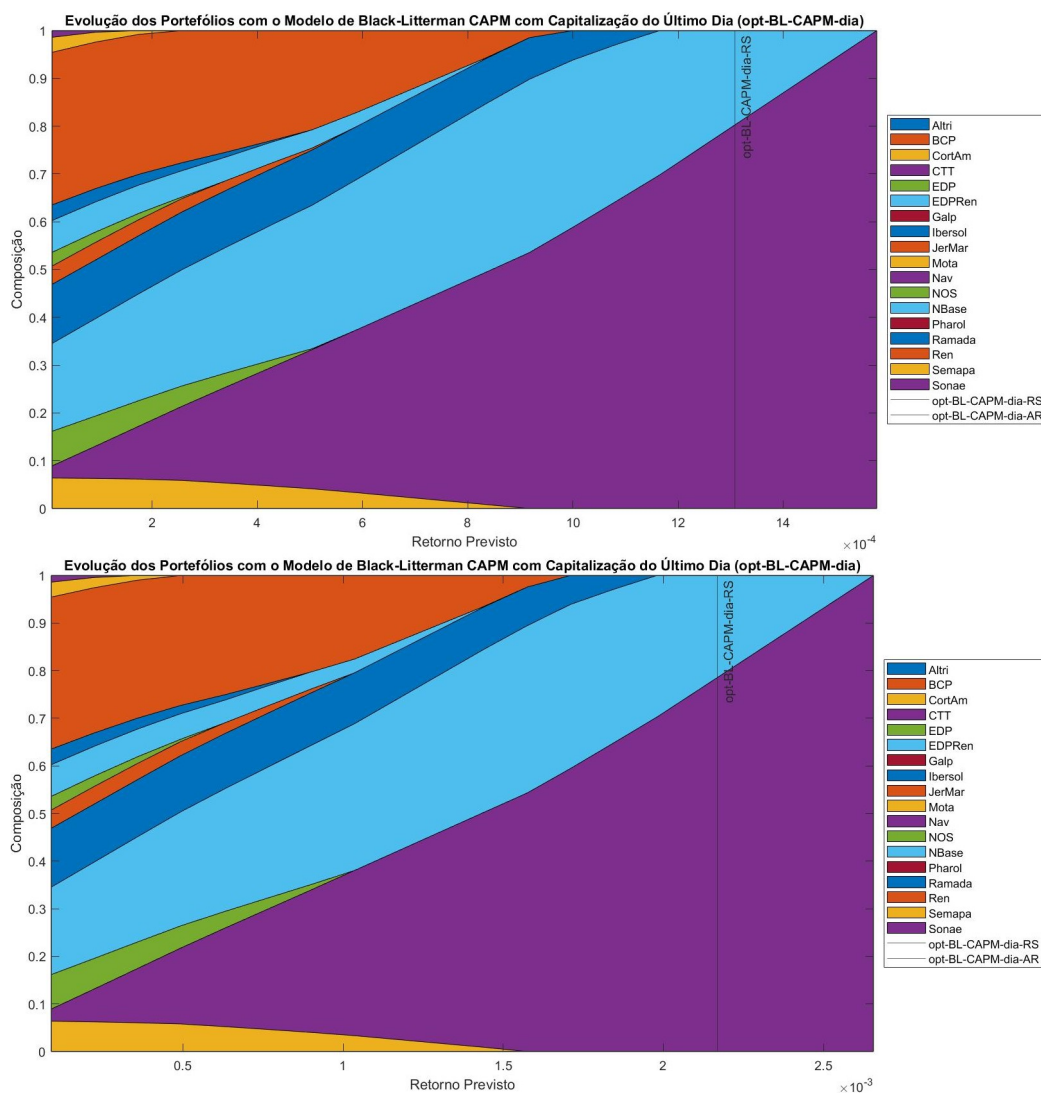


Fig. A.8 Evolução da composição dos portefólios com o aumento do retorno previsto com perspetivas subvalorizadas (cima) e com perspetivas sobrevalorizadas (baixo). O portefólio AR encontra-se sobreposto com o limite superior do retorno previsto, pelo que não é visível no gráfico.

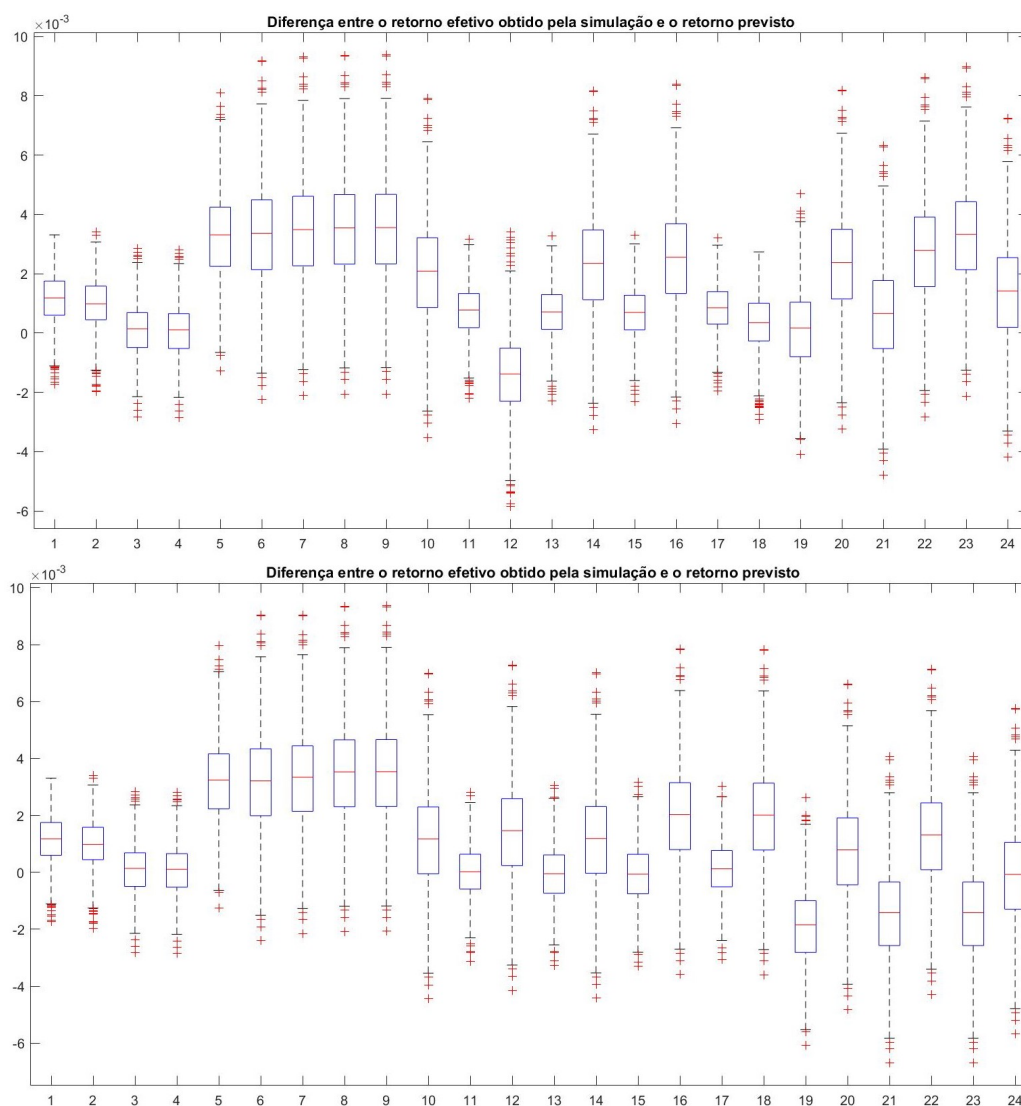


Fig. A.9 Diagramas de extremos e quartis dos portefólios analisados para a diferença entre os retornos efetivos simulados e os retornos previstos obtidos na secção anterior com perspetivas subvalorizadas (cima) e sobrevalorizadas (baixo). Os valores no eixo das abcissas indicam a solução analisada de acordo com a ordenação da Tabela B.10.

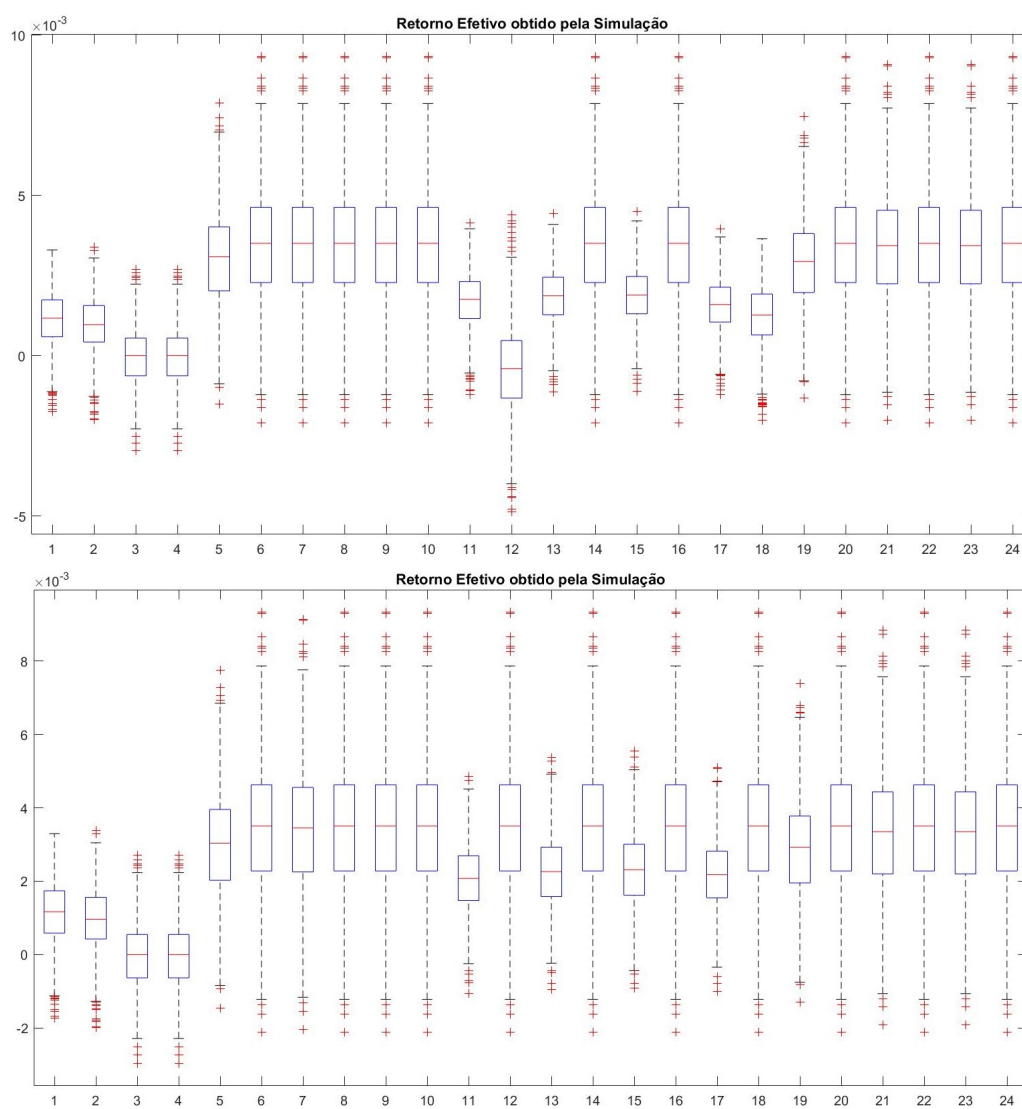


Fig. A.10 Diagramas de extremos e quartis dos portfólios analisados para os retornos efetivos simulados com perspectivas subvalorizadas (cima) e sobrevalorizadas (baixo). Os valores no eixo das abscissas indicam a solução analisada de acordo com a ordenação da Tabela B.10.

Anexo B

Tabelas

Tabela B.1 Pesos dos ativos com igual ponderação e com ponderação 60%/40% em percentagem (%).

	Igual Ponderação	Ponderação 60%/40%
Altri	5,56	5
BCP	5,56	5
CortAm	5,56	6
CTT	5,56	5
EDP	5,56	6
EDPRen	5,56	6
Galp	5,56	6
Ibersol	5,56	6
JerMar	5,56	6
Mota	5,56	5
Nav	5,56	5
NOS	5,56	6
NBase	5,56	5
Pharol	5,56	5
Ramada	5,56	5
Ren	5,56	6
Semapa	5,56	6
Sonae	5,56	6

Tabela B.2 Previsão dos retornos iniciais esperados em percentagem (%).

	Cap. Mercado			1/18	60/40
	Dia	Mês	<i>in-sample</i>		
Altri	-0,0181	-0,0199	-0,0182	-0,2208	-0,2185
BCP	-0,0180	-0,0178	-0,0184	-0,1708	-0,1686
CortAm	-0,0056	-0,0059	-0,0058	-0,0865	-0,0886
CTT	-0,0094	-0,0096	-0,0102	-0,1224	-0,1207
EDP	-0,0119	-0,0120	-0,0111	-0,0746	-0,0766
EDPRen	-0,0056	-0,0052	-0,0051	-0,0559	-0,0575
Galp	-0,0174	-0,0164	-0,0165	-0,1227	-0,1247
Ibersol	-0,0025	-0,0024	-0,0026	-0,0447	-0,0473
JerMar	-0,0109	-0,0118	-0,0128	-0,1073	-0,1105
Mota	-0,0211	-0,0221	-0,0229	-0,2712	-0,2693
Nav	-0,0131	-0,0146	-0,0144	-0,1766	-0,1750
NOS	-0,0079	-0,0085	-0,0087	-0,1028	-0,1043
NBase	-0,0063	-0,0063	-0,0063	-0,0829	-0,0812
Pharol	-0,0147	-0,0153	-0,0163	-0,2393	-0,2332
Ramada	-0,0054	-0,0055	-0,0056	-0,1081	-0,1041
Ren	-0,0047	-0,0047	-0,0048	-0,0488	-0,0502
Semapa	-0,0112	-0,0121	-0,0119	-0,1457	-0,1466
Sonae	-0,0115	-0,0118	-0,0126	-0,1406	-0,1429

Tabela B.3 Pesos dos ativos nos portfólios ótimos sem atualização dos retornos em percentagem (%).

	Ret. Históricos		CAPM	
	Aversão ao Risco	Rácio de Sharpe	Aversão ao Risco	Rácio de Sharpe
Altri	0	5,80	0	0
BCP	0	0	0	0
CortAm	6,44	0	6,42	0
CTT	2,32	0	2,49	0
EDP	7,35	11,98	7,05	0
EDPRen	18,75	82,22	18,43	0
Galp	0,01	0	0,02	0
Ibersol	12,22	0	12,47	100
JerMar	3,85	0	3,77	0
Mota	0	0	0	0
Nav	0	0	0,01	0
NOS	3,02	0	2,84	0
NBase	6,59	0	6,66	0
Pharol	0	0	0	0
Ramada	3,21	0	3,30	0
Ren	31,93	0	32,10	0
Semapa	3,01	0	3,08	0
Sonae	1,31	0	1,35	0

Tabela B.4 Pesos dos ativos nos portfólios ótimos do modelo de Black-Litterman utilizando o CAPM, em percentagem (%).

	Dia		Mês		Todo	
	Av Risco	Rácio Sharpe	Av Risco	Rácio Sharpe	Av Risco	Rácio Sharpe
Altri	0	0	0	0	0	0
BCP	0	0	0	0	0	0
CortAm	0	0	0	0	0	0
CTT	100	79,71	100	100	100	100
EDP	0	0	0	0	0	0
EDPRen	0	20,29	0	0	0	0
Galp	0	0	0	0	0	0
Ibersol	0	0	0	0	0	0
JerMar	0	0	0	0	0	0
Mota	0	0	0	0	0	0
Nav	0	0	0	0	0	0
NOS	0	0	0	0	0	0
NBase	0	0	0	0	0	0
Pharol	0	0	0	0	0	0
Ramada	0	0	0	0	0	0
Ren	0	0	0	0	0	0
Semapa	0	0	0	0	0	0
Sonae	0	0	0	0	0	0

Tabela B.5 Pesos dos ativos nos portfólios ótimos do modelo de Black-Litterman com 100% de confiança nas perspetivas do investidor, em percentagem (%).

	Dia		Mês		Todo	
	Av Risco	Rácio Sharpe	Av Risco	Rácio Sharpe	Av Risco	Rácio Sharpe
Altri	0	0	0	0	0	0
BCP	0	0	0	0	0	0
CortAm	0	0	0	0	0	0
CTT	100	73,79	100	94,96	100	94,96
EDP	0	0	0	0	0	0
EDPRen	0	26,21	0	5,04	0	5,04
Galp	0	0	0	0	0	0
Ibersol	0	0	0	0	0	0
JerMar	0	0	0	0	0	0
Mota	0	0	0	0	0	0
Nav	0	0	0	0	0	0
NOS	0	0	0	0	0	0
NBase	0	0	0	0	0	0
Pharol	0	0	0	0	0	0
Ramada	0	0	0	0	0	0
Ren	0	0	0	0	0	0
Semapa	0	0	0	0	0	0
Sonae	0	0	0	0	0	0

Tabela B.6 Pesos dos ativos nos portfólios ótimos do modelo de Black-Litterman utilizando os retornos históricos, em percentagem (%).

	Dia		Mês		Todo		Igual	
	Av Risco	RSharpe	Av Risco	RSharpe	Av Risco	RSharpe	Av Risco	RSharpe
Altri	0	0	0	0	0	0	0	0
BCP	0	0	0	0	0	0	0	0
CortAm	0	0	0	0	0	0	0	0
CTT	100	30,49	100	38,32	100	40,63	100	33,11
EDP	0	0	0	0	0	0	0	1,71
EDPRen	0	69,51	0	61,68	0	59,37	0	62,88
Galp	0	0	0	0	0	0	0	0
Ibersol	0	0	0	0	0	0	0	0
JerMar	0	0	0	0	0	0	0	0
Mota	0	0	0	0	0	0	0	0
Nav	0	0	0	0	0	0	0	0
NOS	0	0	0	0	0	0	0	2,30
NBase	0	0	0	0	0	0	0	0
Pharol	0	0	0	0	0	0	0	0
Ramada	0	0	0	0	0	0	0	0
Ren	0	0	0	0	0	0	0	0
Semapa	0	0	0	0	0	0	0	0
Sonae	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela B.7 Retornos esperados atualizados calculados com o modelo de Black-Litterman partindo dos retornos iniciais obtidos com o método CAPM (opt-BL-CAPM) e com os retornos históricos do período *in-sample* (opt-BL-hist), em percentagem (%).

	CAPM			Retornos Históricos		
	Dia	Mês	inS	Dia	Mês	inS
Altri	-0,0230	-0,0228	-0,0214	0,0778	0,0778	0,0769
BCP	-0,1851	-0,1562	-0,1430	-0,1431	-0,1307	-0,1195
CortAm	0,0129	0,0148	0,0157	0,0209	0,0223	0,0230
CTT	0,2117	0,2309	0,2344	0,1518	0,1735	0,1785
EDP	-0,0142	-0,0151	-0,0143	0,0421	0,0402	0,0397
EDPRen	0,0297	0,0125	0,0080	0,1136	0,0973	0,0924
Galp	-0,0141	-0,0100	-0,0083	-0,0123	-0,0117	-0,0104
Ibersol	-0,0027	-0,0035	-0,0043	-0,0512	-0,0521	-0,0528
JerMar	-0,0120	-0,0099	-0,0097	-0,0161	-0,0147	-0,0138
Mota	-0,0338	-0,0226	-0,0184	-0,1363	-0,1302	-0,1264
Nav	-0,0414	-0,0340	-0,0313	-0,0689	-0,0636	-0,0619
NOS	0,0098	0,0136	0,0149	0,0487	0,0516	0,0528
NBase	-0,0098	-0,0072	-0,0053	-0,0526	-0,0522	-0,0506
Pharol	-0,2077	-0,1916	-0,1996	-0,2712	-0,2571	-0,2663
Ramada	-0,0438	-0,0419	-0,0414	-0,1228	-0,1233	-0,1232
Ren	-0,0047	-0,0035	-0,0033	0,0026	0,0030	0,0030
Semapa	-0,0334	-0,0275	-0,0250	-0,0967	-0,0932	-0,0915
Sonae	-0,0398	-0,0343	-0,0330	-0,0876	-0,0850	-0,0837

Tabela B.8 Retornos esperados atualizados calculados com o modelo de Black-Litterman com 100% de confiança nas perspectivas do investidor (opt-BL100-CAPM) e com o modelo de Black-Litterman quando se consideram os retornos históricos e com a matriz P definida com igual ponderação dos ativos (opt-BL-hist-igual), em percentagem (%).

	opt-BL100-CAPM			opt-BL-hist
	Dia	Mês	inS	Igual Pond.
Altri	-0,0146	-0,0221	-0,0192	0,0770
BCP	-0,3267	-0,2601	-0,2309	-0,0384
CortAm	0,0274	0,0266	0,0278	0,0263
CTT	0,3770	0,3770	0,3770	0,1515
EDP	-0,0120	-0,0166	-0,0154	0,0439
EDPRen	0,0648	0,0266	0,0185	0,0971
Galp	-0,0116	-0,0087	-0,0053	0,0028
Ibersol	0,0010	-0,0028	-0,0036	-0,0548
JerMar	-0,0115	-0,0097	-0,0083	-0,0083
Mota	-0,0427	-0,0285	-0,0192	-0,1012
Nav	-0,0563	-0,0465	-0,0402	-0,0550
NOS	0,0245	0,0259	0,0283	0,0574
NBase	-0,0165	-0,0114	-0,0079	-0,0362
Pharol	-0,2670	-0,2670	-0,2670	-0,3448
Ramada	-0,0673	-0,0641	-0,0611	-0,1156
Ren	-0,0016	-0,0024	-0,0016	0,0044
Semapa	-0,0476	-0,0389	-0,0332	-0,0808
Sonae	-0,0573	-0,0494	-0,0450	-0,0729

Tabela B.9 Média (a) e desvio padrão (b) dos retornos efetivos (em porcentagem), porcentagem de casos em que os retornos efetivos são superiores aos retornos previstos (c), porcentagem de casos em que os retornos efetivos são negativos (d) e *rank* dos portfólios (e).

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
opt-hist-RS	0,115	0,084	92,1	8,1	3,289
opt-hist-AR	0,096	0,085	88,7	11,7	3,747
opt-CAPM-RS	-0,002	0,089	57,1	50,0	3,726
opt-CAPM-AR	-0,002	0,089	55,3	50,0	3,420
opt-BL-CAPM-dia-RS	0,298	0,147	97,9	2,6	13,805
opt-BL-CAPM-dia-AR	0,344	0,183	95,3	3,7	13,943
opt-BL-CAPM-mes-RS	0,342	0,181	96,3	3,7	12,989
opt-BL-CAPM-mes-AR	0,344	0,183	96,3	3,7	14,621
opt-BL-CAPM-inS-RS	0,344	0,183	96,2	3,7	18,507
opt-BL-CAPM-inS-AR	0,344	0,183	81,3	3,7	6,405
opt-BL-hist-dia-RS	0,192	0,089	69,6	1,6	20,304
opt-BL-hist-dia-AR	0,344	0,183	85,8	3,7	21,754
opt-BL-hist-mes-RS	0,209	0,094	65,8	1,5	8,068
opt-BL-hist-mes-AR	0,344	0,183	83,6	3,7	10,762
opt-BL-hist-inS-RS	0,214	0,096	65,0	1,6	9,307
opt-BL-hist-inS-AR	0,344	0,183	88,7	3,7	15,392
opt-BL-hist-igual-RS	0,191	0,088	68,9	1,7	9,114
opt-BL-hist-igual-AR	0,344	0,183	88,9	3,7	11,440
opt-BL100-CAPM-dia-RS	0,229	0,139	25,5	2,4	12,204
opt-BL100-CAPM-dia-AR	0,344	0,183	80,6	3,7	22,236
opt-BL100-CAPM-mes-RS	0,333	0,174	40,6	3,4	20,849
opt-BL100-CAPM-mes-AR	0,344	0,183	86,8	3,7	17,474
opt-BL100-CAPM-inS-RS	0,333	0,174	40,6	3,4	8,746
opt-BL100-CAPM-inS-AR	0,344	0,183	62,9	3,7	17,898

Tabela B.10 Média (a) e desvio-padrão (b) dos retornos efetivos, em percentagem, percentagem de casos em que os retornos efetivos são superiores aos retornos previstos (c), percentagem de casos em que os retornos efetivos são negativos (d) e *rank* dos portfólios (e) para as perspectivas subvalorizadas e sobrevalorizadas.

	Subvalorizadas					Sobrevalorizadas				
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
opt-hist-RS	0,115	0,084	92,1	8,1	8,905	0,115	0,084	92,1	8,1	3,338
opt-hist-AR	0,096	0,085	88,7	11,7	3,621	0,096	0,085	88,7	11,7	3,845
opt-CAPM-RS	-0,002	0,089	57,1	50,0	7,809	-0,002	0,089	57,1	50,0	4,204
opt-CAPM-AR	-0,002	0,089	55,3	50,0	4,945	-0,002	0,089	55,3	50,0	3,922
opt-BL-CAMP-dia-RS	0,301	0,149	97,9	2,6	5,882	0,297	0,146	97,9	2,5	11,808
opt-BL-CAMP-dia-AR	0,344	0,183	95,7	3,7	13,412	0,344	0,183	94,9	3,7	16,686
opt-BL-CAMP-mes-RS	0,344	0,183	96,3	3,7	15,492	0,339	0,179	96,2	3,7	13,034
opt-BL-CAMP-mes-AR	0,344	0,183	96,4	3,7	11,419	0,344	0,183	96,3	3,7	14,662
opt-BL-CAMP-inS-RS	0,344	0,183	96,3	3,7	13,263	0,344	0,183	96,1	3,7	17,997
opt-BL-CAMP-inS-AR	0,344	0,183	86,7	3,7	14,399	0,344	0,183	74,1	3,7	5,979
opt-BL-hist-dia-RS	0,172	0,086	81,5	2,0	18,444	0,206	0,093	50,7	1,5	19,869
opt-BL-hist-dia-AR	-0,045	0,145	15,4	62,9	6,556	0,344	0,183	78,9	3,7	21,496
opt-BL-hist-mes-RS	0,185	0,087	79,2	1,7	19,954	0,224	0,100	47,9	1,4	7,916
opt-BL-hist-mes-AR	0,344	0,183	89,0	3,7	21,862	0,344	0,183	74,3	3,7	22,142
opt-BL-hist-inS-RS	0,188	0,087	78,3	1,6	14,379	0,230	0,103	47,8	1,3	19,778
opt-BL-hist-inS-AR	0,344	0,183	90,5	3,7	15,108	0,344	0,183	86,0	3,7	21,313
opt-BL-hist-igual-RS	0,158	0,081	84,4	2,1	10,643	0,216	0,097	55,1	1,6	16,967
opt-BL-hist-igual-AR	0,126	0,095	66,1	9,1	8,602	0,344	0,183	85,9	3,7	13,999
opt-BL100-CAMP-dia-RS	0,288	0,140	54,0	2,4	7,149	0,286	0,138	7,7	2,4	15,501
opt-BL100-CAMP-dia-AR	0,344	0,183	89,4	3,7	12,879	0,344	0,183	66,0	3,7	9,395
opt-BL100-CAMP-mes-RS	0,338	0,178	63,1	3,7	20,874	0,330	0,172	19,4	3,4	7,148
opt-BL100-CAMP-mes-AR	0,344	0,183	91,7	3,7	19,358	0,344	0,183	77,1	3,7	8,494
opt-BL100-CAMP-inS-RS	0,338	0,178	96,1	3,7	15,265	0,330	0,172	19,4	3,4	9,695
opt-BL100-CAMP-inS-AR	0,344	0,183	78,2	3,7	9,780	0,344	0,183	48,2	3,7	10,902

Tabela B.11 Descrição das abreviaturas atribuídas aos diversos portfólios ótimos.

	Método	Retornos Iniciais	Solução Ótima	Retorno Atualizado	Janela Temporal	
					Retornos	Matriz P
heur-cap-dia	Heurística	CAPM	_____	_____	<i>in-sample</i>	Último dia
heur-cap-mes	Heurística	CAPM	_____	_____	<i>in-sample</i>	Último mês
heur-cap-ins	Heurística	CAPM	_____	_____	<i>in-sample</i>	<i>in-sample</i>
heur-1/18	Heurística	CAPM	_____	_____	<i>in-sample</i>	_____
heur-60/40	Heurística	CAPM	_____	_____	<i>in-sample</i>	_____
opt-hist-RS	Otimização	Históricos	Rácio de Sharpe	_____	<i>in-sample</i>	_____
opt-hist-AR	Otimização	Históricos	Aversão ao Risco	_____	<i>in-sample</i>	_____
opt-CAPM-RS	Otimização	CAPM	Rácio de Sharpe	_____	<i>in-sample</i>	Último dia
opt-CAPM-AR	Otimização	CAPM	Aversão ao Risco	_____	<i>in-sample</i>	Último dia
opt-BL-CAPM-dia-RS	Otimização	CAPM	Rácio de Sharpe	Black-Litterman	<i>in-sample</i>	Último dia
opt-BL-CAPM-dia-AR	Otimização	CAPM	Aversão ao Risco	Black-Litterman	<i>in-sample</i>	Último dia
opt-BL-CAPM-mes-RS	Otimização	CAPM	Rácio de Sharpe	Black-Litterman	<i>in-sample</i>	Último mês
opt-BL-CAPM-mes-AR	Otimização	CAPM	Aversão ao Risco	Black-Litterman	<i>in-sample</i>	Último mês
opt-BL-CAPM-ins-RS	Otimização	CAPM	Rácio de Sharpe	Black-Litterman	<i>in-sample</i>	Último mês
opt-BL-CAPM-ins-AR	Otimização	CAPM	Aversão ao Risco	Black-Litterman	<i>in-sample</i>	<i>in-sample</i>
opt-BL-hist-dia-RS	Otimização	Históricos	Rácio de Sharpe	Black-Litterman	<i>in-sample</i>	Último dia
opt-BL-hist-dia-AR	Otimização	Históricos	Aversão ao Risco	Black-Litterman	<i>in-sample</i>	Último dia
opt-BL-hist-mes-RS	Otimização	Históricos	Rácio de Sharpe	Black-Litterman	<i>in-sample</i>	Último dia
opt-BL-hist-mes-AR	Otimização	Históricos	Aversão ao Risco	Black-Litterman	<i>in-sample</i>	Último mês
opt-BL-hist-ins-RS	Otimização	Históricos	Rácio de Sharpe	Black-Litterman	<i>in-sample</i>	Último mês
opt-BL-hist-ins-AR	Otimização	Históricos	Aversão ao Risco	Black-Litterman	<i>in-sample</i>	<i>in-sample</i>
opt-BL-hist-igual-RS	Otimização	Históricos	Rácio de Sharpe	Black-Litterman	<i>in-sample</i>	Igual Ponderação
opt-BL-hist-igual-AR	Otimização	Históricos	Aversão ao Risco	Black-Litterman	<i>in-sample</i>	Igual Ponderação
opt-BL100-CAPM-dia-RS	Otimização	CAPM	Rácio de Sharpe	Black-Litterman 100	<i>in-sample</i>	Último dia
opt-BL100-CAPM-dia-AR	Otimização	CAPM	Aversão ao Risco	Black-Litterman 100	<i>in-sample</i>	Último dia
opt-BL100-CAPM-mes-RS	Otimização	CAPM	Rácio de Sharpe	Black-Litterman 100	<i>in-sample</i>	Último mês
opt-BL100-CAPM-mes-AR	Otimização	CAPM	Aversão ao Risco	Black-Litterman 100	<i>in-sample</i>	Último mês
opt-BL100-CAPM-ins-RS	Otimização	CAPM	Rácio de Sharpe	Black-Litterman 100	<i>in-sample</i>	Último mês
opt-BL100-CAPM-ins-AR	Otimização	CAPM	Aversão ao Risco	Black-Litterman 100	<i>in-sample</i>	<i>in-sample</i>