

# ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE FUNDAÇÕES SUPERFICIAIS BASEADOS EM MODELOS DE ESCORAS E TIRANTES

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil na Especialidade de Estruturas

Autor Tony Jordão Relvas

Orientadores Paulo Manuel Mendes Pinheiro da Providência e Costa Ricardo Joel Teixeira Costa

> Esta dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor, não tendo sofrido correções após a defesa em provas públicas. O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer responsabilidade pelo uso da informação apresentada

### AGRADECIMENTOS

Não posso deixar de prestar agradecimentos às várias pessoas que contribuíram para a realização desta dissertação.

Aos Professores Paulo Manuel Mendes Pinheiro da Providência e Costa e Ricardo Joel Teixeira Costa, agradeço pela oportunidade e pelo privilégio de realizar esta dissertação, bem como pela sua sabedoria e disponibilidade demonstrada para acompanhar a realização deste trabalho.

À minha família, em especial à minha mãe, que sempre me apoiou, acreditou em mim e naquilo que faço. Agradeço ainda pela força e a coragem que constantemente me deu ao longo dos anos.

Aos meus amigos, que me aconselharam e ajudaram na realização deste trabalho.

Um agradecimento especial à Isabel, pelo apoio e carinho e pela transmissão de confiança e de força.

### RESUMO

No âmbito do projeto de estruturas, a utilização do método baseado em modelos de escoras e tirantes para a análise e dimensionamento de fundações superficiais de betão armado será a escolha mais apropriada. De facto, dada a geometria destes elementos e o tipo de solicitação a que estão sujeitos, eles têm de ser classificados como zonas D, ou seja, zonas para as quais é totalmente inapropriada a assunção de distribuições lineares (ou planas) de deformação, de modo que a teoria das peças lineares não é aplicável.

O forte desenvolvimento observado nos últimos 30 anos da teoria e métodos ligados a este tipo de modelos, que levaram à sua crescente influência nas especificações técnicas de verificação da segurança das estruturas de betão armado em todo o mundo, pode ser explicado pela conjugação da simplicidade do método, o realismo das hipóteses em que se apoia e a qualidade dos resultados que proporciona.

Porém, para as fundações superficiais, particularmente para sapatas isoladas, os habituais modelos planos (2D) de escoras e tirantes são inadequados, dada a natureza espacial (3D) dos campos de tensões e mecanismos resistentes nestes elementos. Assim, nesta dissertação são utilizados modelos espaciais que resultam duma generalização do modelo trapezoidal plano para regiões de descontinuidade parcial; são modelos simples de estabelecer e de analisar. Esta generalização é basicamente a que uma equipa de projetistas apresentou no Fib Bulletin 61 [6].

Na dissertação exemplifica-se a aplicação deste modelo a sapatas de diferentes tipologias, de modo a demonstrar a versatilidade do modelo bem como a simplicidade de aplicação do método. No entanto, é importante frisar que os passos de definição (geometria) e verificação das regiões nodais ainda requerem investigação fundamental e laboratorial.

O pré-dimensionamento dos exemplos apresentados baseou-se na verificação da tensão máxima admissível no solo; por esse motivo, as dimensões da sapata poderão em alguns casos não ser as ideais, mas essa otimização não foi investigada na dissertação.

## ABSTRACT

In the scope of structural design, the analysis and design of reinforced concrete shallow foundations (footings) should probably be based on methods based on strut and tie models. In fact, having in view the geometry and loading types of these structural elements, they must be classified as D-zones (discontinuity zones), i.e. regions for which the assumption of plane distributions of deformations is completely inappropriate.

The strong development observed in the last 30 years in terms of the theory and methods associated to strut and tie models, which lead to their growing influence in reinforced concrete structural codes all over the world, can be explained by the combination of the method simplicity, the realism of the underlying hypotheses and the quality of the ensuing results.

However, for shallow foundations, particularly for isolated footings, the usual 2D strut and tie models are inappropriate because of the intrinsically 3D nature of the stress fields and strength mechanism in these elements. Therefore, in this thesis, spatial models resulting from the generalization of the trapezoidal plane model for partial discontinuity regions are used; these are simple to establish and analyse. This generalization is mostly that established by a Spanish structural design team in Fib Bulletin 61 [6].

The thesis exemplifies the application of the model to different typologies of foundations, in order to illustrate the versatility of the model as well as the simplicity of the method application. However, it should be stressed that the definition of the geometry of the nodal zones and the verification of their safety still require both fundamental and laboratorial studies.

The predesign of the presented examples is based on the verification of the allowable bearing capacity of the soil; hence, the footing dimensions may in some of the cases not be the optimal, but this topic lays outside the scope of the thesis.

## ÍNDICE

A	GRADE	CIMENTOS	i
R	ESUMO		ii
A	BSTRAC	CT	iii
1	INTRO	DDUÇÃO	1
2	TIPOS	DE FUNDAÇÕES	3
	2.1 Int	rodução	3
	2.2 Fu	ndações superficiais ou diretas	3
	2.2.1	Sapatas isoladas (centradas/excêntricas)	4
	2.2.2	Sapatas combinadas	5
	2.2.3	Sapatas interligadas por lintéis de fundação	5
	2.2.4	Sapatas contínuas	6
	2.3 En	soleiramentos	7
	2.4 Fu	ndações profundas ou indiretas	8
3	PRÉ-D	IMENSONAMENTO DAS FUNDAÇÕES SUPERFICIAIS	9
	3.1 Int	rodução	9
	3.2 De	terminação da tensão admissível do solo	9
	3.3 Pre	-dimensionamento de uma sapata isolada centrada	11
	3.3.1	Primeiro exemplo - sapata isolada centrada sujeita a esforço axial simples	11
	3.3.2	Segundo exemplo – sapata isolada centrada sujeita a flexão composta	15
	3.3.3	Terceiro exemplo – sapata isolada centrada à flexão composta desviada	19
	3.4 Pre	-dimensionamento dos restantes tipos de fundações superficiais	21
	3.4.1	Sapatas excêntricas	21
	3.4.2	Sapatas combinadas	21
	3.4.3	Sapatas ligadas por lintel de fundação	21
	3.4.4	Sapatas contínuas	21
4	MODE	LOS DE ESCORAS E TIRANTES PARA SAPATAS ISOLADAS	25
	4.1 Int	rodução	25
	1.0 114	lização do modelos do esporas o tirentos em fundaçãos superficieis	25
	4.2 Uti	nzação de modelos de escoras e tirántes em fundações superficiais	25
	4.2 Uti 4.3 Saj	pata isolada centrada	25

4.6.1	Geometria da sapata	
<b>4.0 Sa</b>	Geometria da sanata	62
4.5.1	Modelo de escoras e tirantes	60
4.5 Sa	patas combinadas	59
4.4.2	Sapata isolada excêntrica em flexão composta (sentido desfavorável)	
4.4.1	Sapata isolada excêntrica em flexão composta (sentido favorável)	55
4.4 Sa	pata isolada excêntrica	
4.3.2	Sapata isolada centrada à flexão composta desviada	
122	Sanata isolada centrada sujeita a flevão composta	36

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 - a) Sapata isolada centrada; b) Sapata isolada excêntrica	4
Figura 2.2 - Sapatas combinadas, comuns ou associadas	5
Figura 2.3 - Sapatas interligadas por lintéis de fundações	6
Figura 2.4 - Sapata contínua	7
Figura 2.5 - Ensoleiramento	7
Figura 2.6 - Fundação profunda com conjunto de estacas	8
Figura 3.1 - Primerio exemplo – Apenas esforço axial	11
Figura 3.2 - Esquema da sapata: a) Em planta; b) Em corte na direção x	12
Figura 3.3 - Esquema das dimensões da sapata em corte	13
Figura 3.4 - Representação das pressões no solo, para um modelo elástico simples	16
Figura 3.5 - Tensões no solo para diagrama retangular (teoria plasticidade): a) planta; b) o	corte
	18
Figura 3.6 - Terceiro exemplo: vista em planta	19
Figura 3.7 - Sapata contínua sob parede: perspetiva	22
Figura 3.8 - Sapata contínua sob parede: corte e vista lateral	22
Figura 3.9 - Muro de suporte de gravidade	23
Figura 3.10 - Muro de suporte em consola	24
Figura 4.1 - Zonas B e Zonas D (ACI-318)	27
Figura 4.2 - Modelo de escoras e tirantes da sapata em perspetiva	28
Figura 4.3 - Modelo de escoras e tirantes da sapata em planta	29
Figura 4.4 - Modelo de escoras e tirantes: perspetiva e plano vertical que contém escoras	13
	30
Figura 4.5 - Modelo de escoras e tirantes: esquema espacial pormenorizado do nó 3	30
Figura 4.6 - Zona nodal 1: projeção segundo o plano vertical xz	32
Figura 4.7 - Amarração em cotovelo e comprimento de amarração (EC2 1-1[10])	33
Figura 4.8 - Corte do pilar com pormenorização da armadura	34
Figura 4.9 - Planta da sapata com pormenorização da armadura	35
Figura 4.10 - Corte da sapata com pormenorização da armadura	35
Figura 4.11 - a) Planta da sapata e esforços; b) Corte da sapata na direção x	36

Figura 4.12 - Esquema da posição de escoras das resultantes das tensões de (C) e tração	(T) na
base do pilar	
Figura 4.13 - Modelo de escoras e tirantes para a sapata	
Figura 4.14 - Modelo de escoras e tirantes da sapata: planta	
Figura 4.15 - Vistas verticais AA` e BB`	
Figura 4.16 - Diagrama de corpo livre do nó 3	40
Figura 4.17 - Esquema em 3D pormenorizado dos nós 4,5 e 7	41
Figura 4.18 - Vista do nó 1 no plano yz	42
Figura 4.19 - Vista do nó 6 segundo o plano vertical xz	43
Figura 4.20 - Seção do pilar com pormenorização das armaduras	44
Figura 4.21 - Planta da sapata com pormenorização das armaduras	45
Figura 4.22 - Corte da sapata com pormenorização das armaduras	45
Figura 4.23 - Sapata e esforços na base do pilar: a) planta; b) corte na direção y	46
Figura 4.24 - Campo de tensões de compressão na base do pilar: a) corte; b) perspetiva .	47
Figura 4.25 - Posição do eixo neutro da seção da base do pilar	48
Figura 4.26 - Posição das resultantes de tensões em cada quadrante da base da sapata	49
Figura 4.27 - Modelo de escoras e tirantes da sapata (flexão desviada)	50
Figura 4.28 - Modelo de escoras e tirantes para a sapata: vistas AA` e BB`	51
Figura 4.29 - Modelo de escoras e tirantes para a sapata: vista em planta	51
Figura 4.30 - Terceiro exemplo: secção do pilar com pormenorização das armaduras	54
Figura 4.31 - Terceiro exemplo: corte da sapata na direção y com pormenorização das	
armaduras	54
Figura 4.32 - Terceiro exemplo: corte da sapata na direção x com pormenorização das	
armaduras	55
Figura 4.33 - Esquema da sapata: a) planta; b) corte	56
Figura 4.34 - Modelo de escoras e tirantes para sapata isolada excêntrica: perspetiva	56
Figura 4.35 - Modelo de escoras e tirantes para sapata isolada excêntrica: planta	57
Figura 4.36 - Esquema da sapata: a) planta; b) corte na direção x	
Figura 4.37 - Modelo de escoras e tirantes para sapata excêntrica com momento desfavo	orável
$\mathbf{r}^{*} = \mathbf{A} 2 0 \mathbf{M} 1 1 1 1 \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{C} \mathbf{C} \mathbf{C} \mathbf{C} \mathbf{C} \mathbf{C} C$	
Figura 4.58 - Modelo de escoras e tirantes para sapata excentrica (momento inverso):pla	inta
Eisure 4.20. Essence de compte combinedes el startes histories	
Figura 4.59 - Esquema de sapara combinada: a) planta; b) corte	00
Figura 4.40 - Modele de escoras e tirentes para sapata combinada: perspetiva	01
rigura 4.41 - Modelo de escoras e urantes para sapata combinada: corte	

Figura 4.42 - Esquema de sapata contínua: a) longitudinal; b) transversal	63
Figura 4.43 - Modelo de escoras e tirantes da sapata contínua: plano transversal	63

## ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 3.1 - Valores de tensões admissível de solos (LNEC-1968)	10
Quadro 4.1 - Esforço axial nos tirantes e dimensionamento da armadura	31
Quadro 4.2 - Comprimento de amarração	34
Quadro 4.3 - Esforço axial nas escoras	41
Quadro 4.4 - Esforço axial nos tirantes e áreas de armadura	41
Quadro 4.5 - Segundo exemplo: resultados do comprimento de amarração	44
Quadro 4.6 - Terceiro exemplo: resultados	52
Quadro 4.7 - Terceiro exemplo: dimensionamento da armadura	53
Quadro 4.8 - Terceiro exemplo: comprimento de amarração	53
Quadro 4.9 - Esforço axial nas escoras e nos tirantes	57
Quadro 4.10 - Esforço axial nas escoras e nos tirantes	59
Quadro 4.11 - Esforços nos elementos de escoras e tirantes associado ao pilar 1	62
Quadro 4.12 - Esforços nos elementos de escoras e tirantes associado ao pilar 2	62
Quadro 4.13 - Valores do esforço axial nas escoras e nos tirantes	64

## 1 INTRODUÇÃO

O objetivo da presente dissertação é a definição de um modelo espacial de escoras e tirantes para fundações superficiais em betão armado, a análise e otimização desse modelo e a sua aplicação a casos práticos.

A principal função das fundações é a garantia da estabilidade global da estrutura, a transmissão ao solo das cargas aplicadas (e outras forças geradas pelas ações) à estrutura e a garantia de um bom comportamento em serviço.

Na análise e dimensionamento de sapatas de betão armado são usualmente utilizados métodos simplificados, alguns dos quais são baseados em modelos planos, enquanto que outros, heurísticos, não são sustentados por qualquer modelo físico. Tais procedimentos, ou envolvem demasiados riscos ou, então, são excessivamente conservativos. Além disso, o comportamento de muitas sapatas isoladas é intrinsecamente tridimensional, de modo que um modelo plano ficará normalmente bastante aquém do desejável.

O método mais apropriado para a análise e dimensionamento destes elementos estruturais em betão armado é o que se apoia em modelos de escoras e tirantes. De facto, este método é particularmente indicado às regiões de descontinuidade (regiões D), como as do tipo geométrico e estático associadas às sapatas: neste caso, a teoria das peças lineares não é aplicável. Ora, apesar da crescente difusão dos métodos baseados em modelos de escoras e tirantes, tanto na literatura da especialidade, como nos gabinetes de projeto e nas especificações técnicas e normas de projeto estrutural, ainda é escassa a informação relativa aos modelos espaciais e à sua aplicação de forma sistemática a sapatas isoladas. Foi justamente a identificação da relevância deste tema e da existência de poucos trabalhos sobre o mesmo que levaram à sua escolha para esta dissertação.

Apresenta-se seguidamente a estrutura da tese, descrevendo-se os capítulos que se seguem a esta introdução. Começou por se estudar os tipos e constituição das fundações, os quais são apresentados de forma resumida no segundo capítulo.

O dimensionamento dos elementos estruturais é precedido, nas primeiras etapas do projeto, do pré-dimensionamento, onde se tenta determinar qual o tipo mais adequado e se procede à estimativa das suas dimensões. No terceiro capítulo são apresentados procedimentos de prédimensionamento das sapatas isoladas centradas, baseados nas solicitações a que estas estão sujeitas; mas considerando unicamente o nível de tensões no solo. Embora o procedimento desenvolvido na dissertação pretenda ser perfeitamente geral, a sua aplicação é ilustrada com um caso prático apresentado por uma equipa de projetistas espanhóis (S. D. Ballestrino, J. R. Martin, E. G. Diaz e H. C. Peiretti) no Fib Bulletin 61 [6]. Este caso prático tem um papel central para a dissertação porque o modelo de escoras e tirantes para sapatas isoladas centradas por ele proposto é o adotado e desenvolvido na dissertação. Este capítulo apresenta ainda procedimentos para o pré-dimensionamento de os outros tipos de sapatas.

O capítulo 4 é iniciado com uma muito breve história do método baseado em modelos de escoras e tirantes e da sua utilização para a análise e dimensionamento de fundações. Seguidamente, este capítulo apresenta o referido modelo de escoras e tirantes proposto no artigo do Fib Bulletin 61 [6], para sapatas isoladas centradas. Este modelo é discutido e seguido da proposta de um modelo alternativo simplificado. O capítulo inclui os cálculos constantes do procedimento de dimensionamento com base em modelos de escoras e tirantes, incluindo a verificação dos nós e a pormenorização construtiva das armaduras para o exemplo da sapata isolada centrada. Para os restantes tipos de sapatas apresentam-se apenas possíveis modelos de escoras e tirantes otimizados, os quais, deve referir-se, são originais.

O capítulo 5 recorda as principais conclusões dos capítulos que o precedem e deixa algumas propostas para trabalhos futuros.

## 2 TIPOS DE FUNDAÇÕES

#### 2.1 Introdução

As funções principais de uma fundação consistem em assegurar a estabilidade da estrutura e a transmissão das cargas da superestrutura ao terreno. Os tipos de fundações foram-se desenvolvendo ao longo dos tempos de acordo com as próprias estruturas, tipos de solo, comportamento observado das estruturas existentes, experiência dos construtores e, mais recentemente, em resultado de estudos específicos. Atualmente é possível determinar, para uma dada estrutura ou, mais exatamente, para as ações a que ela vai estar habitualmente sujeita, e em função dos tipos e das características do terreno onde ela vai ser erigida qual ou quais os tipos de fundações mais apropriados.

As fundações podem ser classificadas em fundações superficiais ou diretas, incluindo ensoleiramento, e fundações profundas ou indiretas. Nesta dissertação só são consideradas as fundações superficiais ou diretas, particularmente as isoladas e com total exclusão dos ensoleiramentos.

Refira-se ainda que as fundações requerem o dimensionamento dos elementos estruturais propriamente ditos, mas também as verificações geotécnicas, como sejam as relativas à rotura, deslizamento ou assentamento do terreno. Este tipo de verificações estão fora do âmbito da presente dissertação.

#### 2.2 Fundações superficiais ou diretas

As fundações superficiais ou diretas são geralmente escolhidas para solos com boas caraterísticas de resistência e edificios de pequeno a médio porte. Nesta classe podem definirse os seguintes tipos: sapatas isoladas centradas ou excêntricas, sapatas combinadas, sapatas interligadas por lintéis e sapatas contínuas, para além dos ensoleiramentos. As mais frequentes são possivelmente as sapatas isoladas centradas com um pilar, que transmitem as cargas ao terreno exclusivamente pela sua face inferior e a pequenas profundidades (normalmente, até uma profundidade de 2,5m). A classificação das sapatas isoladas de acordo com as suas dimensões relativas é abordada no capítulo 3 relativo ao seu pré-dimensionamento.

#### 2.2.1 Sapatas isoladas (centradas/excêntricas)

As sapatas isoladas recebem normalmente um único pilar, cuja extremidade inferior pode estar localizada, em planta, no centro geométrico da sapata, dizendo-se esta centrada, ou não, dizendo-se então excêntrica (Figura 2.1). Quanto à sua geometria em planta este tipo de sapata é, geralmente, retangular, quadrada ou circular.

A sapata isolada centrada é possivelmente a mais utilizada na construção de edifícios e o seu comportamento pode ser considerado representativo do dos restantes tipos de sapatas. A sapata isolada excêntrica surge normalmente nas fundações situadas junto aos limites do terreno de construção.



Figura 2.1 - a) Sapata isolada centrada; b) Sapata isolada excêntrica

#### 2.2.2 Sapatas combinadas

Caso as dimensões de duas (ou mais) sapatas isoladas colidam ou sejam tais que elas ficam muito próximas, é conveniente fazer uma única sapata combinada. Estas sapatas também são designadas de comuns ou associadas (Figura 2.2). Assim, esta sapata é como que uma junção de duas ou mais sapatas isoladas. Se os pilares não se encontrarem alinhados ou se as cargas transmitidas forem muito diferentes poderá conferir-se à sapata combinada um formato em planta não retangular, por exemplo trapezoidal. [2]



Figura 2.2 - Sapatas combinadas, comuns ou associadas

#### 2.2.3 Sapatas interligadas por lintéis de fundação

Por vezes é necessário ligar as sapatas isoladas por uma viga, designada lintel ou viga de equilíbrio, (Figura 2.3). Este tipo de solução impõe-se quando as cargas transmitidas pelos pilares são elevadas, principalmente os momentos fletores. A viga não só resiste ao momento fletor nos pilares como ainda permite reduzir os assentamentos diferenciais das fundações.



Figura 2.3 - Sapatas interligadas por lintéis de fundações

#### 2.2.4 Sapatas contínuas

As sapatas contínuas apoiam paredes resistentes ou muros de suporte de terras, recebendo os esforços por eles suportados (Figura 2.4). No caso dos muros de suporte de terras, a resistência da sapata não é geralmente o aspeto mais crítico, mas sim o deslizamento, a instabilização ou o assentamento. Como já anteriormente se referiu, todas estas verificações têm de ser efetuadas aplicando os procedimentos e especificações técnicas apropriadas, por exemplo, de acordo com o Eurocódigo 7 [11].



Figura 2.4 - Sapata contínua

### 2.3 Ensoleiramentos

O ensoleiramento é utilizado em solos com capacidade de carga reduzida, ou para evitar assentamentos diferenciais e, por vezes, quando o nível freático está acima do nível de fundação. De uma forma muito simplista pode-se dizer que o seu funcionamento é semelhante ao de uma laje fungiforme invertida.



Figura 2.5 - Ensoleiramento

#### 2.4 Fundações profundas ou indiretas

As fundações profundas ou indiretas são normalmente escolhidas quando a capacidade de carga do terreno à superfície é insuficiente e as cargas nos pilares ou paredes elevadas. É o caso das estacas, que podem ser cravadas ou moldadas in situ, e que o mais habitualmente devem atingir a profundidade de um solo com boas características de resistência (Figura 2.6). Na execução deste tipo de fundação é necessário utilizar equipamento adequado a cada tipo de terreno e à profundidade pretendida. As estacas cravadas podem ser em betão armado, madeira ou de aço. Por outro lado, nas estacas moldadas, podem ser utilizados tubos onde é colocada a armadura e que são preenchidos por betão injetado.



Figura 2.6 - Fundação profunda com conjunto de estacas

## 3 PRÉ-DIMENSONAMENTO DAS FUNDAÇÕES SUPERFICIAIS

#### 3.1 Introdução

O pré-dimensionamento de um elemento estrutural permite estabelecer as suas dimensões a partir do valor estimado para ações e esforços a que vai estar sujeito. Para fazer o prédimensionamento de uma sapata é também necessário saber o valor da tensão admissível do terreno ( $\sigma_{adm}$ ), devendo a tensão máxima na base da sapata devida às ações ser inferior à tensão admissível. Este procedimento é uma verificação da segurança à rotura do terreno mas também uma forma indireta de controlo da deformação.

Neste capítulo, são apresentados exemplos de pré-dimensionamento de sapatas isoladas centradas o primeiro só com esforço axial, outro com flexão composta e um terceiro à flexão composta desviada. Os valores dos esforços são os que constam do exemplo apresentado no Bulletin 61 da Fib [6], uma vez que ele não refere os cálculos de pré-dimensionamento. O pré-dimensionamento de sapatas dos restantes tipos é apresentado nas secções subsequentes.

#### 3.2 Determinação da tensão admissível do solo

Uma fundação superficial é considerada em segurança quando a tensão admissível do terreno for superior à tensão na sua base devida às ações. Para quantificar os valores a considerar nesta verificação deve proceder-se às combinações de ações referentes ao estado limite último.

O valor da tensão admissível do solo pode ser determinado com o apoio do EC 7-1 [11], que é a norma integrante dos eurocódigos relativa ao projeto de geotecnia. O EC7 consta de três partes: na primeira (EC7-1) apresenta regras gerais para um projeto geotecnia, considerando, em particular, a resistência e a estabilidade da estrutura; na segunda apresenta preceitos relativos aos ensaios laboratoriais e na terceira refere os ensaios de campo.

No capítulo 6 do EC7-1 e nos Anexos D, E e G, encontram-se regras gerais e métodos para fundações superficiais. Relativamente aos Anexos, o D representa o método analítico, o E o método semi-empírico e o G o método prescritivo. Esses métodos destinam-se à determinação da capacidade resistente e da tensão admissível do terreno.

O Anexo D apresenta um procedimento genérico, com análises de tensões totais para situações de curto prazo e de tensões efetivas para situações a longo prazo, baseado nas características do terreno e nas dimensões da sapata – ora na fase de pré-dimensionamento estas ainda não são conhecidas.

Para simplificar o processo de estimativa do valor da tensão admissível do terreno, o LNEC [12] fornece um quadro de valores (Quadro 3.1), o qual permite, sob certas condições, evitar a realização dos ensaios específicos (por exemplo, SPT).

Grupos	Tipo de terreno	Tensão admissível de cálculo (kPa)	
	Rochas duras e sãs	10000	
Rochas	Rochas pouco duras ou medianamente	300	00
	alteradas		
	Rochas brandas ou muitos alteradas	100	00
		Solo Seco	Solo Submerso
	Areias e misturas areias-seixo, bem graduadas	400 - 600	200 - 300
	e compactas		
Solos incoerentes	Areias e misturas areias-seixo, bem graduadas	200 - 400	100 - 200
	mas soltas		
	Areia uniforme compactos	200 - 400	100 - 200
	Areia uniforme soltas	100 - 200	50 - 100

Quadro 3.1 - Valores de tensões admissível de solos (LNEC - 1968	8)
--	----

Estes valores baseiam-se no tratamento estatístico dos resultados de ensaios realizados a uma profundidade de meio metro e incluem um fator de segurança de valor 2,0.

O Anexo E apresenta, como exemplo de aplicação de um método semi-empírico, o valor de cálculo da capacidade resistente do terreno em função dos resultados do ensaio pressiométrico

de Ménard, o qual se utiliza normalmente para estruturas de alguma importância. O Anexo G apresenta um método prescritivo para fundações superficiais sobre rocha.

#### 3.3 Pré-dimensionamento de uma sapata isolada centrada

Para pré-dimensionar uma sapata é necessário primeiro caraterizar o tipo de solo sobre o qual ela assenta. Para os dois primeiros exemplos apresentados admitiu-se que se tratava de uma argila de consistência dura e para o terceiro rija. Assim, do Quadro 3.1 retiram-se os valores médios da tensão admissível de 150 kPa para os dois primeiros casos e 500 kPa o terceiro.

#### 3.3.1 Primeiro exemplo – sapata isolada centrada sujeita a esforço axial simples

Considere-se uma sapata isolada centrada sujeita apenas a esforço axial (figura 3.1), que recebe um pilar de secção 30 cm x 30 cm. Normalmente, as fundações superficiais têm profundidade até duas vezes a sua menor dimensão em planta, geralmente até 1,5 m ou 2 m, tendo-se considerado neste exemplo 1,5 m. O valor do esforço axial transmitido pelo pilar para a combinação de estados limites últimos crítica é 500 kN. Como se referiu acima, a tensão admissível do solo é 150 kPa



Figura 3.1 - Primeiro exemplo - Apenas esforço axial

Neste caso, a melhor opção para transmitir o esforço ao terreno é uma sapata quadrada (L = B). Então, ignorando para já o peso próprio da sapata, as dimensões desta sapata são determinadas por:

$$\sigma_{adm} \leq \sigma = \frac{N_{Ed}}{A_{sapata}}$$

$$A_{sapata} = B^2 \ge \frac{500}{150} \iff B \ge 1,83 \text{ m} \approx 1,90 \text{ m}$$

A sapata terá pois largura e comprimento de 1,90m, ou seja, uma área de 3,61 m<sup>2</sup> (Figura 3.2).



Figura 3.2 - Esquema da sapata: a) Em planta; b) Em corte na direção x (dimensões em metros)

#### 3.3.1.1 Altura da sapata

Para finalizar a definição da geometria da sapata falta determinar a sua altura *H*. Na prática a melhor opção é considerar uma sapata rígida, na qual possibilita uma maior regularização do campo de pressões no solo e elimina as possibilidades de rotura por punçoamento. Para tal é suficiente que a altura da sapata seja, pelo menos, metade da distância que vai da face do pilar à face correspondente da sapata em planta, nas duas direções  $(2H \ge a_1)$ . Ou seja, calcula-se o valor nas duas direções, e escolhe-se o maior. Para este exemplo, obtém-se obviamente o mesmo valor em ambas as direções. Tem-se assim, na direção x:

$$a_{1,x} = \frac{1,90 - 0,3}{2} = 0,80 \text{ m} \le 2H_x \iff H_x$$
,  $H_y \ge 0,40 \text{ m}$ 



Figura 3.3 - Esquema das dimensões da sapata em corte (dimensões em metros)

#### 3.3.1.2 Peso próprio da sapata

O peso próprio da sapata, mesmo que irrelevante, já pode ser determinado, possibilitando a verificação da pressão máxima no solo. Considerando para peso volúmico do betão armado o valor 25 kN/m<sup>3</sup>, vem

$$\sigma_{adm} \le \sigma = \frac{(N_{Ed} + 1.5 \text{ vol}_{sap} \text{ betão})}{A_{sapata}},$$
$$A_{sapata} = B^2 \ge [500 + (1,90x1,90x0,40x25x1,5)]/150 \Leftrightarrow B \ge 1,92 \text{ m}$$

O valor obtido não é muito diferente do dos cálculos anteriores, mas deve-se considerar sempre o peso próprio do betão da sapata. Neste caso particular, este peso corresponde a uma majoração do esforço axial no pilar de:

Majoração = 
$$\frac{N_{\rm Ed} + 1.5 \ vol_{\rm sap}}{N_{\rm Ed}} = \frac{500 + 54}{500} \approx 1,10;$$

Há vários autores que referem um valor de majoração 1,05 e outros 1,10. Como estes valores são similares, será considerado nos casos seguintes o valor obtido para este primeiro exemplo

1,10, de modo a incluir uma estimativa do peso próprio da sapata. Ou seja, a equação para o pré-dimensionamento será a seguinte:

$$\sigma_{adm} \le \sigma = \frac{1.1 \, N_{Ed}}{A_{sapata}}$$

#### 3.3.1.3 Determinação da tensão admissível pelo método analítico do Anexo D do EC7

Em alternativa ao procedimento anterior, pode-se utilizar o método analítico do Anexo D do EC7. Este método requer outros parâmetros, como a profundidade da sapata, as condições de drenagem do terreno bem como diversos parâmetros do solo.

Neste caso, utilizou-se para estes parâmetros os valores atribuídos num exercício de Mecânica dos Solos I [3] referente a uma argila dura: valor característico da resistência ao corte não drenada  $c_{u,k}$  = 35 kPa; ângulo de atrito interno  $Ø_u$  =0,0 e o peso volúmico do terreno  $\gamma_k$  = 20,5 kN/m<sup>3</sup>. Como se trata de um solo argiloso admite-se que é não drenado. O método analítico do Anexo D estipula que a carga última é dada por:

$$q_{\text{ult}} = (2 + \pi) \times c_{\text{u}} \times S_{\text{c}} \times i_{\text{c}} \times d_{\text{c}} \times f_{\text{c}} + q$$

onde Sc é o coeficiente relativo à forma da secção (retangular) que vale

$$S_c = 1 + 0.2 \frac{B}{L} = 1 + 0.2 \frac{1.90}{1.90} = 1.20$$

i<sub>c</sub> é o coeficiente relativo à inclinação da carga, que vale um por não haver força horizontal aplicada à sapata; d<sub>c</sub> é o coeficiente de fator de profundidade que, como D/B = 1.5/1.9 = 0,789 < 1,0, vale d<sub>c</sub> =  $1 + 0,4 \times 0,789 = 1,32$ , f<sub>c</sub> é o coeficiente de um estrato rígido, que apresenta valor unitário porque a sapata não está sobre um estrato rígido e q é a tensão total, dada no caso presente por Q =  $1,5 \times 20,5 = 30,75$  MPa. Obtém-se assim para a carga última

$$q_{\rm ult} = (2 + \pi) \times 35 \times 1,20 \times 1,0 \times 1,32 \times 1,0_{\rm c} + 30,75 = 315,8 \,\rm kPa$$

E para a tensão admissível do solo:

$$\sigma_{adm} = q_{ult} / \gamma = 315.8 / 2.0 = 157.9 \text{ kPa}$$

onde  $\gamma$  é um fator de segurança ao qual se atribuiu o valor 2,0 por ser o utilizado no Quadro 3.1.

Tony Jordão Relvas

Ao comparar o valor anteriormente escolhido no Quadro 3.1 com o valor obtido pelo método analítico do Anexo D do EC7, verifica-se que são semelhantes. Pode pois concluir-se que os valores do Quadro 3.1 poderão ser utilizados para pré-dimensionamento. No entanto, convém sempre verificar este valor através do método analítico do EC7.

#### 3.3.2 Segundo exemplo – sapata isolada centrada sujeita a flexão composta

Neste segundo exemplo considera-se uma sapata solicitada por esforço axial e momento fletor numa só direção. A base da sapata pode não estar totalmente comprimida, devido ao momento fletor, situação que será analisada mais à frente. Os valores dos esforços na base do pilar são os do exemplo constante do Fib Bulletin 61 [6]:  $N_{Ed} = 500$  kN e  $M_{y,Ed} = 200$  kNm,<sup>1</sup> o que corresponde a uma excentricidade de e = 0.4 m. No pré-dimensionamento desta sapata, pode considerar-se a teoria da elasticidade ou a teoria da plasticidade (podendo até admitir-se que ambos estes modelos decorrem do teorema estático da teoria da plasticidade).

#### 3.3.2.1 Pré-dimensionamento com modelo "elástico"

A solução elástica depende da modelação do solo, pois que se admite que a sapata é rígida, o que garante que as deformações no solo ficam definidas por um plano. Então, se o solo for modelado por uma série de molas elásticas lineares, o campo de pressões na base da sapata também será definida por um plano desde que a sua resultante esteja dentro do seu núcleo central. Neste caso, e tratando-se de flexão composta, este campo de pressões varia linearmente de uma aresta, onde apresenta valor máximo, à oposta, onde apresenta valor mínimo (Fig. 3.4).

O núcleo central de uma secção retangular é definido por um losango centrado no seu centro, com diagonais paralelas aos lados do retângulo e medindo um terço do comprimento destes, de modo que a excentricidade máxima da resultante vale e = B/6. Uma vez que a excentricidade equivalente do esforço axial no pilar é igual, a menos do peso próprio da sapata, à excentricidade da resultante das pressões na base da sapata, as dimensões desta em planta podem ser sempre escolhidas de modo a que a resultante caia dentro do núcleo central.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Neste exemplo, tal como em toda a dissertação, será ignorado o esforço transverso na base do pilar, admitindose, como é frequente na análise e dimensionamento de sapatas, que a resistência às forças horizontais não é problemática. Porém, facilmente se compreende que um modelo de escoras e tirantes, para ser estaticamente admissível, tem de considerar estas forças. Presume-se, pois, que tal consideração se limitaria a introduzir uma pequena perturbação às geometrias dos modelos de escoras e tirantes propostos e, portanto, aos seus esforços.



Figura 3.4 - Representação das pressões no solo, para um modelo elástico simples.

Considere-se um sistema de eixos com origem no centro da base da sapata e eixos paralelos aos seus lados. A pressão, ou tensão normal, no ponto de coordenadas (x,y) é definida pela relação de equilíbrio estabelecida em Resistência dos Materiais [4]:

$$\sigma = \frac{N_{sd}}{A_{sapata}} + \frac{M_{sdy}}{I_y} x \tag{1}$$

Para pré-dimensionar a sapata, e para atender a alguma redistribuição das pressões no solo (motivo pelo qual também este modelo é efetivamente plástico), admite-se que a tensão admissível seja ultrapassada na aresta mais comprimida e permite-se que seja atingida nos pontos situados a uma distância da aresta mais comprimida igual a um quarto da largura da base (ou seja, com x = B/4), o que corresponde à seguinte condição prescrita na disciplina Betão Armado II da FCTUC [8]:

$$\sigma_{ref} = \frac{\sigma_{min} + 3\sigma_{max}}{4} \le \sigma_{adm} \tag{2}$$

#### Tony Jordão Relvas

Assim, se se admitir que a largura e comprimento da sapata são iguais (L=B), vem

$$I_{y} = \frac{B \times L^{3}}{12} = \frac{B \times (B)^{3}}{12} = \frac{B^{3}}{12}$$

$$\sigma_{max} = \frac{1,1Nsd}{B \times L} \times \left(1 + \frac{6e}{L}\right) = \frac{1,1 \times 500}{B^{2}} \times \left(1 + \frac{6 \times 0,40}{B}\right) = \frac{550 \times (B + 2,40)}{B^{3}}$$

$$\sigma_{min} = \frac{1,1Nsd}{B \times L} \times \left(1 - \frac{6e}{L}\right) = \frac{1,1 \times 500}{B^{2}} \times \left(1 - \frac{6 \times 0,40}{B}\right) = \frac{550 \times (B - 2,40)}{B^{3}}$$

$$\sigma_{ref} = \frac{\left[3\frac{550 \times (B + 2,40)}{B^{3}} + \frac{550 \times (B - 2,40)}{B^{3}}\right]}{4} \le 150$$

$$B = 2,35 \text{ m} \approx 2,40 \text{ m};$$
 então  $L = 2,40 \text{ m}$ 

Estas dimensões correspondem a uma área de 5,76  $m^2$ , ou seja, 37% superior ao valor determinado para o caso de esforço axial simples do exemplo anterior.

#### 3.3.2.2 Pré-dimensionamento com modelo "plástico"

Considere-se agora a aplicação de um modelo plástico, mais especificamente, baseado no princípio estático, ao pré-dimensionamento (embora se tenha observado que o anterior também já o é). Neste caso, admite-se que pode ocorrer a plastificação do solo numa parte da base da sapata, onde se admite que o valor da pressão é uniforme, sendo a pressão nula na parte restante da base (Figura 3.5).

Facilmente se demonstra que este caso pode ser reduzido ao de uma sapata equivalente, sob esforço axial apenas, com dimensões reduzidas  $L^{`} = L - ey$  e  $B^{`} = B - ex$ , onde ex e ey são as excentricidades do esforço axial, às quais corresponde a área reduzida  $A^{`}_{sapata} = L^{`} \times B^{`}$ . Deste modo, considerando novamente L = B, vem:

$$\sigma_{adm} \ge \frac{1.1N_{Ed}}{A^{`}_{sapata}}$$
$$B^{`} = B - 0.40 \text{m}; L^{`} = B; A^{`} = (B - 0.40 \text{m}) \times$$

В

$$150 \geq \frac{1,1\times 500}{(B-0.40)\times B} \iff B \geq 2,12m \approx 2,20m$$



Figura 3.5 - Tensões no solo para diagrama retangular (teoria plasticidade): a) planta; b) corte.

Obtém-se pois para este modelo, um comprimento e uma largura de 2,20m, valor ao qual corresponde a área da base da sapata de 4,84 m<sup>2</sup>. Comparando este valor com o obtido com o modelo "elástico", observa-se que apresentam uma diferença de 8,3%. Assim, como esta diferença é diminuta, optou-se por utilizar o segundo procedimento por ser mais simples e proporcionar uma solução mais económica.

Como se explicou, escolheram-se as dimensões em planta determinadas pelo modelo plástico. Sendo as dimensões da secção do pilar 30 cm x 55 cm, a altura da sapata é determinada pelo critério indicado na secção 3.3.2.2. Assim, na direção x vem:

$$a_{1,x} = (2,20 - 0,55)/2 = 0,825 \text{ m}$$
  
 $2H_x \ge a_{1,x} \Leftrightarrow H_x \ge 0,21 \text{ m}$ 

e, na direção y,

$$a_{1,y} = (2,20 - 0,30)/2 = 0,95 \text{ m}$$

$$2H_y \ge a_{1,y} \Leftrightarrow H_y \ge 0,475 \text{ m}$$

sendo a altura da sapata definida pelo maior destes valores, ou seja, H = 0,50 m.

Os valores obtidos no pré-dimensionamento realizado nesta secção, apresentam uma diferença de 25% relativamente aos apresentados no Fib Bulletin 61 [6], a qual resulta do diferente valor admitido para a tensão admissível do solo. De facto, uma análise inversa aos valores apresentados naquela referência, permite concluir que nela se utilizou uma tensão admissível do solo de aproximadamente 200 kPa, em vez de 150 kPa.

#### 3.3.3 Terceiro exemplo – sapata isolada centrada à flexão composta desviada

Este exemplo é similar ao anterior, a flexão agora é desviada, ou seja, o momento fletor tem componentes tanto em torno de x como de y (figura 3.6):

 $N_{\rm Ed} = 12500 \text{ kN}; M_{\rm y,Ed} = 10000 \text{ kNm}; M_{\rm x,Ed} = 4000 \text{ kNm}$ 

Figura 3.6 - Terceiro exemplo: vista em planta

Neste caso as excentricidades na base do pilar valem:

$$e_y = \frac{M_{x,Ed}}{N_{Ed}} = \frac{4000}{12500} = 0,32 \text{ m}; e_x = \frac{M_{y,Ed}}{N_{Ed}} = \frac{10000}{12500} = 0,80 \text{ m};$$

Pode-se começar por admitir que a relação entre os lados da base da sapata é da ordem de grandeza da raiz quadrada da relação entre as componentes do momento fletor, o que dá L=1,6B. Utilizando de novo o modelo plástico usado no exemplo anterior, vem:

$$B^{`} = B - 0,80; L^{`} = 1,6B - 0,32; \quad A^{`} = (B - 0,80) \times (1,6B - 0,32)$$
$$500 \ge \frac{1,1 \times 12500}{(B - 0,80) \times (1,6B - 0,32)} \iff B \ge 4,66m \approx 5,00 m$$

Vem, então, para o comprimento da sapata 7,46 m  $\approx$  7,50 m e para a área da sua base 37,5 m<sup>2</sup>.

O pilar tem secção 100x200 cm, de modo que na direção x vem

$$a_{1,x} = (7,50 - 2,0)/2 = 2,75 \text{ m}$$
  
 $2H_x \ge a_{1,x} \iff H_x \ge 1,40 \text{ m}$ 

e na direção y:

$$a_{1,y} = (5,0 - 1,0)/2 = 2,0 \text{ m}$$
  
 $2H_y \ge a_{1,y} \Leftrightarrow H_y \ge 1,00 \text{ m}$ 

sendo a altura da sapata dada pelo maior destes valores, H = 1,40 m.

Comparando mais uma vez o resultado agora obtido com o que consta do Fib Bulletin 61 [6], observa-se um desvio de 6% em termos de área da base, o qual se deve ao maior valor da tensão admissível utilizado naquela obra.

#### 3.4 Pré-dimensionamento dos restantes tipos de fundações superficiais

#### 3.4.1 Sapatas excêntricas

No caso de esforço axial simples, sendo o pilar excêntrico em relação à sapata, o campo de pressões no solo não é uniforme. Neste caso, designando aquela excentricidade por *e*, as pressões extremas na base são dada pela expressão:

$$\sigma_{adm} > \sigma = \frac{1,1N_{Ed}}{A_{sapata}} \left(1 \pm \frac{6e}{L}\right)$$

No caso da flexão composta basta calcular a excentricidade equivalente, a qual inclui tanto a excentricidade entre os dois elementos estruturais como o efeito do momento fletor.

#### 3.4.2 Sapatas combinadas

Uma sapata combinada para dois pilares resulta da tentativa de pré-dimensionar a sapata de cada um dos pilares individualmente, do modo ilustrado anteriormente. Se então se verificar sobreposição ou grande proximidade das sapatas individuais pode optar-se pela sapata combinada, se possível uniformizando a sua geometria.

#### 3.4.3 Sapatas ligadas por lintel de fundação

O pré-dimensionamento de sapatas ligadas por lintel de fundação consta de duas fases: na primeira pré-dimensiona-se cada uma das sapatas para o esforço axial apenas; na segunda determinam-se as dimensões da viga de equilíbrio como uma viga normal à flexão, sendo o seu comprimento obviamente definido pela distância entre eixos dos pilares.

#### 3.4.4 Sapatas contínuas

#### 3.4.4.1 Pré-dimensionamento da sapata contínua em edifício

Normalmente, pode considerar-se que as sapatas contínuas para paredes resistentes suportam uma carga distribuída, transmitida pela parede. Esta será aproximadamente uniforme no caso das ações gravíticas, e tenderá a apresentar maior intensidade junto às extremidades no caso das ações horizontais. Já no caso de um muro de suporte a sapata também terá de suportar um momento em torno do seu eixo longitudinal. Para ilustrar o processo do pré-dimensionamento de uma sapata sujeita a uma carga uniforme considera-se o exemplo, definido pelas suas dimensões e esforços aplicados, representado nas Figuras 3.7 e 3.8. De modo a evitar a torção da sapata, a parede deverá estar alinhada com o seu eixo longitudinal, ou seja as

sobrelarguras, medidas da face da sapata à face da parede, são iguais. Assume-se ainda que as sobrelargura nos topos e laterais são iguais.



Figura 3.7 - Sapata contínua sob parede: perspetiva.



Figura 3.8 - Sapata contínua sob parede: corte e vista lateral

De seguida, apresenta-se um procedimento para determinar as dimensões da sapata. Se se admitir que o campo de tensões na sua base é uniforme a área (mínima) da base será definida pelo valor da tensão admissível no solo.

$$\sigma_{adm} \geq \frac{1,1N_{Ed}}{A_{sapata}}$$

Em que a área da sapata é dada por  $A_{sapata} = (L_1 + 2a) \times (2a + b)$ , sendo *b* a espessura da parede e  $L_1$  o comprimento da parede. De uma forma geral, desde que a parede não seja muito curta, pode-se ignorar, pelo menos numa primeira estimativa, o valor da sobrelargura dos topos, o que permite determinar diretamente o seu valor a partir da condição anterior. Quanto à altura da sapata, utiliza-se a regra apresentada para a sapatas isoladas na secção 3.3.1.

Caso as ações horizontais sejam significativas, pode-se considerar apenas a extremidade mais solicitada da sapata, numa extensão de, por exemplo 10 a 15% do seu comprimento, calcular a resultante dos esforços normais, e distribui-la uniformemente nessa extensão, e repetindo-se o procedimento apresentado acima. Neste caso, se a sobrelargura da sapata nas extremidades da parede se revelar significativamente mais larga que na zona interior, poderá revelar-se vantajosa a opção por uma sapata não uniforme.

#### 3.4.4.2 Pré-dimensionamento de sapata contínuas para muros de suporte

As dimensões das sapatas para muros de suporte, dependem da altura do nível de terra até à base da sapata H, ver [7]. Estas estruturas de suporte podem ser flexíveis ou rígidas, incluindo-se no último tipo os muros de gravidade (Figura 3.9) e os muros em consola (Figura 3.10).



Figura 3.9 - Muro de suporte de gravidade



Figura 3.10 - Muro de suporte em consola

## 4 MODELOS DE ESCORAS E TIRANTES PARA SAPATAS ISOLADAS

#### 4.1 Introdução

Neste capítulo são propostos modelos de escoras e tirantes para todos os tipos de fundações superficiais, exceto ensoleiramentos, e com especial detalhe para sapatas isoladas. Para cada tipo é apresentada a otimização do modelo, o dimensionamento, a pormenorização das armaduras e são apresentados três exemplos, que diferem no tipo de solicitação.

Nos exemplos, foram sempre considerados betão de classe de resistência C25/30 e aço A500NR.

Como já se referiu, para sapatas isoladas, tanto há modelos planos (bidimensionais) como espaciais (tridimensionais). Porém, dada a natureza destes elementos estruturais, os espaciais são obviamente os mais adequados, até porque o percurso das cargas é efetivamente espacial.

Nos esquemas que se apresentam para os modelos de escoras e tirantes foram seguidas as seguintes convenções gráficas: as escoras são representadas por linhas de traço interrompido verde e os tirantes por linhas de traço contínuo vermelho; as forças de reação no solo são representadas a cor-de-laranja.

É igualmente importante referir que, embora o esforço axial nas escoras seja sempre de compressão, e portanto negativo, estes valores serão apresentados com o sinal positivo, para aligeirar a escrita (por exemplo,  $C_7 = 53,5$  kN, representa o esforço axial de compressão na escora 7), a menos que haja risco de confusão.

#### 4.2 Utilização de modelos de escoras e tirantes em fundações superficiais

O método baseado em modelos de escoras e tirantes é uma generalização da analogia da treliça para o mecanismo de resistência ao corte de vigas de betão armado, desenvolvida por Ritter [1899] e Mörsch [1912]. Este modelo foi sendo aperfeiçoado e expandido ao longo dos anos acabando por adquirir uma base científica sólida apoiada no teorema estático da análise plástica limite. O ponto de partida para a conceção destes modelos é a trajetória das cargas no

interior do elemento estrutural até aos apoios: quando sé de compressão define a posição das escoras – a posição dos tirantes é definida posteriormente de modo a equilibrar e desviar as escoras, e atendendo ainda à exequibilidade da estrutura. Este método permite resolver qualquer tipo de estrutura de betão armado, constituindo as escoras e os tirantes elementos lineares exibindo campos unidirecionais de tração ou compressão que modelam os campos de tensões pré- e pós-fendilhação na estrutura.

Diversos estudos científicos mostram que os modelos de escoras e tirantes determinam resultados não muito distantes da solução elástica da estrutura. Sendo um método de dimensionamento baseado no princípio estático da análise limite, satisfaz as condições de equilíbrio e resistência, proporcionando ainda um bom comportamento em serviço, se o campo de esforços não se afastar muito do elástico. A complexidade deste método resulta da existência de uma multitude de possibilidades de soluções, devendo o projetista com experiência procurar as mais plausíveis; por outro lado, se for utilizado um modelo hipostático é fundamental garantir a sua estabilidade.

Como se referiu, as escoras representam resultantes de campos de compressão, sendo normalmente ligadas entre si ou com os tirantes em regiões nodais. Os tirantes representam a resultante dos campos de tração no elemento de betão, definindo a posição, dimensões e quantidade de armadura. Graficamente, as primeiras representam-se por linhas a traço interrompido e os segundos por linhas a traço contínuo.

Numa estrutura de betão armado podem distinguir-se dois tipos de zonas, mormente no que à sua caracterização cinemática diz respeito: as zonas B são partes das peças lineares que seguem aproximadamente a hipótese de Bernoulli (ou de Euler-Bernoulli), ou seja, secções planas normais ao eixo mantêm-se planas e normais ao eixo; as zonas D (zona descontinuidade) afastam-se muito daquela hipótese. As zonas D estão normalmente associadas a singularidades do problema, quer do tipo geométrico quer do tipo estático: é o caso das zonas de apoio, das zonas das aberturas em paredes estruturais e em vigas-parede, nas consolas curtas e nas fundações (Figura 4.1). Os modelos de escoras e tirantes representam de forma simplificada o fluxo das tensões nas zonas D, possibilitando que estas sejam analisadas em conjunto com as zonas B em modelos únicos.

As sapatas isoladas rígidas constituem no seu todo zonas D, em que os campos de tensões à compressão podem ser representados em forma de leque, correspondo à transição da base do pilar para o volume e base da sapata, onde as suas componentes verticais equilibram a pressão do terreno. Porém, estas distribuições em leque, não verticais, têm componentes horizontais
que têm naturalmente de ser equilibradas por tirantes, dispostos paralelamente aos lados da sapata junto à sua base. Pela sua simplicidade e pela sua validade, de acordo com o teorema estático da análise limite, a utilização de modelos de escoras e tirantes é o procedimento mais habitual para a análise e dimensionamento de sapatas isoladas [5],[9].



Figura 4.1 - Zonas B e Zonas D (ACI-318)

# 4.3 Sapata isolada centrada

Apresentam-se três exemplos de uma sapata isolada centrada, sujeita no primeiro a esforço axial simples, no segundo a flexão composta e no terceiro a flexão composta desviada. Como já foi referido, são apresentados no Fib Bulletin 61 [6] modelos de escoras e tirantes para os dois últimos casos.

## 4.3.1 Sapata isolada centrada sujeita a esforço axial simples

O valor do esforço axial vale 500 kN e o pilar tem dimensões 30 cm  $\times$  30 cm. As dimensões da sapata são as do pré-dimensionamento realizado na secção 3.3.1, ver figura 3.2. O modelo de escoras e tirantes proposto é uma treliça espacial hipostática e está ilustrado nas figuras 4.2 e 4.3. Os vértices 1 e 2 estão localizados sobre os centros geométricos das duas metades da secção do pilar e os vértices 3 a 6 sobre os centros dos quatro quartos da base (é evidente que

para o pilar também se poderia ter considerado um único vértice ou quatro, sem alteração relevante dos resultados). O ângulo  $\theta_1$  que as escoras fazem com a vertical (z) é dado por:

$$\tan \theta_1 = \frac{0,621}{0,360} \iff \theta_1 = 59,90^\circ$$

e o ângulo  $\theta_2$  que a sua projeção horizontal faz com x é dado por



Figura 4.2 – Modelo de escoras e tirantes da sapata em perspetiva.<sup>2</sup>

### 4.3.1.1 Modelação e dimensionamento das armaduras

Dada a dupla simetria horizontal do modelo proposto, os valores do esforço nas quatro escoras são iguais e, nos tirantes, os valores  $T_{34}$  e  $T_{56}$  são iguais e os valores  $T_{45}$  e  $T_{36}$ 

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Dimensões em m em todas as figuras deste documento, exceto quando indicado de forma diferente.

também (seriam os quatro iguais se se tivesse optado por qualquer das outras duas hipóteses de decomposição da força de compressão no pilar). A figura 4.4 representa o diagrama de corpo livre com os nós 1,3 e 4, resultante de uma superfície de corte que secciona os tirantes 12, 45 e 36. No nó 3, a equação de equilíbrio de forças na direção vertical determina o valor de  $C_{13}$ ,



Figura 4.3 – Modelo de escoras e tirantes da sapata em planta.

Em seguida, no mesmo nó (ver esquema pormenorizado na figura 4.5), as equações de equilíbrio de forças determinam na direção horizontal X o valor de  $T_{34}$ 

$$144^{2} = 125^{2} + T^{2} \iff T = 72 \text{ kN}$$
$$\cos 40,10^{\circ} = \frac{T_{34}}{72} \iff T_{34} = 55 \text{ kN}$$

e na direção horizontal Y o de T<sub>36</sub>,

#### Tony Jordão Relvas



Figura 4.4 – Modelo de escoras e tirantes: perspetiva e plano vertical com a escora 13.





Cada um destes quatro tirantes corresponde a metade da resultante dos varões segundo cada uma das direções horizontais. Assim a quantidade de armadura por unidade de largura necessária segundo cada uma destas direções é dada por  $T/(0.95 \text{m} \cdot f_{yd})$ . O Quadro 4.1 apresenta, para cada tirante, o esforço e a área da secção da armadura. Tanto para este caso como para os restantes tratados neste trabalho, considera-se para o valor máximo do

espaçamento entre varões o indicado para lajes na cláusula 9.3.1.1(3) do EC2 1-1,  $s_{\text{max,slabs}} = 250 \text{ mm}$ . Como o quadro mostra, este máximo conjugado com a restrição a diâmetros superiores 8 mm leva ao sobredimensionamento da solução.

Tirantes	N (kN)	$A_{req}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$A_{,prov.}$ (cm <sup>2</sup> /m)	Armadura	n. de varões total	N <sub>Rd</sub> (kN)
$T_{34} = T_{56}$	55	1,27	3,14	Ø10//0,25	8	273
$T_{36} = T_{45}$	46	1,10	3,14	Ø10//0,25	8	273

Quadro 4.1 – Esforço axial nos tirantes e dimensionamento da armadura.

## 4.3.1.2 Verificação das zonas nodais

Normalmente, as zonas nodais constituem regiões de concentração de tensões que podem ser consideradas críticas. A cláusula 6.5.4 (4) do Eurocódigo 2 Parte 1-1, aborda a verificação da segurança das zonas nodais, apresentando valores máximos admissíveis ( $\sigma_{Rd,max}$ ) para as tensões normais. Neste exemplo, é verificada a zona nodal 1. Em princípio, as zonas nodais situadas na base do pilar seriam mais críticas porque envolvem trações em duas direções, mas deve-se notar que estão muito mais distribuídas (a área da base da sapata é 40 vezes a da secção do pilar!).

A zona nodal 1 encontra-se localizada na base do pilar e é do tipo CCCC. A análise espacial deste nó é muito complexa, mas, admitindo que o nó é hidrostático, basta verificar uma das suas faces, por exemplo, a da base do pilar.



Figura 4.6 - Zona nodal 1: projeção segundo o plano vertical xz.

A tensão normal na base do pilar é dada por (b=0,30m):

$$\sigma_{1cd} = \frac{2C}{b \times b} = \frac{500 \times 10^{-3}}{0,30 \times 0,30} = 5.56 \text{ MPa}$$

Em que a tensão máxima admissível é dada na EN1992 1-1 [11] por (aliás esta norma até permite utilizar um valor muito superior a este, em virtude do estado tri-axial).

$$\sigma_{\text{Rd,max}} = K_1 \nu fcd = 1,0 \times \left(1 - \frac{25}{250}\right) \times 16,67 = 15,00 \text{ MPa}$$

Caso fosse necessário, poderia, de modo bastante simplificado, considerar a projeção da zona nodal segundo certos planos, como ilustra a figura 4.6 para o plano xz (note-se que a componente no plano xz da força nas escoras inclinadas é 93/sin $\theta_2$ ). Nesta projeção, determina-se primeiro o ângulo que as escoras fazem com a horizontal,  $\theta_2 = \theta_3 = 40,10^\circ$  e, seguidamente, a altura das escoras nesta projeção,

$$a_2 = a_3 = \frac{\frac{a_1}{2}}{\sin \theta_2} = 0.233 \text{ m}$$

Um valor (estimado por excesso) da tensão nas escoras seria dado por

$$\sigma_{13 \ cd} = \sigma_{14 \ cd} = \frac{C_{13}}{0.15 \times a_2} = \frac{144 \times 10^{-3}}{0.15 \times 0.233} = 4,120 \text{ MPa} < \sigma_{Rd,máx}$$

### 4.3.1.3 Amarração dos varões

Para além de outros aspetos, uma boa amarração dos varões assegurará a transferência para o betão das tensões nos varões, por aderência. Não sendo utilizados dispositivos especiais, o comprimento de amarração de referência,  $l_{b,rqd}$  é medido ao longo eixo (figura 4.7) do varão. Neste caso, este comprimento será igual nas duas direções.

De acordo com a cláusula 8.4.4 do EC2 1-1, o comprimento da amarração é dado por

$$l_{bd} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \ l_{b,rqd} \ge l_{b,min}$$

em que  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 e \alpha_5$  são coeficientes determinados de acordo com o Quadro 8.2 do EC2 1-1 [10], que têm em conta condições ideais de aderência,  $l_{b,rqd}$  é o comprimento de amarração de referência e  $l_{b,min}$  é o comprimento de amarração mínimo. Neste caso, como  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 = 1$  e  $\alpha_2 = 0.7$  (admitindo recobrimento  $c \ge 5$  cm, seja a amarração reta ou não), obtendo-se os valores que constam do Quadro 4.2.



Figura 4.7 - Amarração em cotovelo e comprimento de amarração (EC2 1-1 [10]).

# Quadro 4.2 - Comprimento de amarração.

$l_{b,rqd}$	$l_{bd}$	$l_{b,min}$	$l_{bd}(adotado)$
403 mm	285 mm	100 mm	300 mm

## 4.3.1.4 Pormenorização das armaduras

As figuras 4.8, 4.9 e 4.10 ilustram a disposição das armaduras. Para a armadura superior adoptou-se 0/0,30, para controlo da fendilhação [8].



Figura 4.8 - Corte do pilar com pormenorização da armadura.



Figura 4.9 - Planta da sapata com pormenorização da armadura.



Figura 4.10 - Corte da sapata com pormenorização da armadura.

## 4.3.2 Sapata isolada centrada sujeita a flexão composta

### 4.3.2.1 Modelação e dimensionamento das armaduras

Considere-se agora uma sapata centrada sujeita a flexão composta, com as dimensões e esforços definidos no Fib Bulletin 61 [6], ver figura 4.11.



Figura 4.11 - a) Planta da sapata e esforços; b) Corte da sapata na direção x.

Comece-se por determinar a posição das resultantes das tensões normais de compressão (C) e de tração (T) na base do pilar. Para a primeira destas, calcula-se primeiro a profundidade do eixo neutro por meio de uma equação de equilíbrio do momento em torno do eixo paralelo a Y e contendo o centro de massa da secção transversal da armadura, ver figura 4.12.

O valor determinado difere do que consta do Fib Bulletin 61[6], porque neste o diagrama retangular de tensões no betão ainda estava afetado do fator 0,85. Atualmente, o próprio Eurocódigo recomenda a utilização do valor 1,0 [10].

Quanto à posição do centro de massa da armadura de tração, admitiu-se que está localizado a 5 cm da face do pilar, de modo a garantir a existência de um recobrimento mínimo de 4cm (período de vida útil de 50 anos, classe de exposição XC4 e classe estrutural S4), dado que a sapata está em contato com o solo, o que poderia causar problemas de corrosão nas armaduras.

$$M_{\rm Ed} + N_{\rm Ed}(0,275 - 0,05) = C \times \left[ (0,55 - 0,05) - \frac{x}{2} \right]$$

ou seja,

$$200 + 500 \times 0.225 = 16.67 \times 10^3 \times 0.3x \left[ (0.55 - 0.05) - \frac{x}{2} \right] \Rightarrow x = 0.15m$$

De modo a resultante das tensões de compressão vale

$$C = 16,67 \times 10^3 \times 0,30 \times 0,15 = 732$$
 kN





Finalmente, por equilíbrio de forças na direção longitudinal, vem

$$T = C - N_{\rm Ed} = 732 - 500 = 232 \,\rm kN$$

Pode agora definir-se o modelo de escoras e tirantes ilustrado nas figuras 4.13 e 4.14. Este é o modelo apresentado em Fib Bulletin 61 [6], onde é analisado de forma detalhada e se conclui que se trata de um modelo ótimo. Note-se que enquanto os nós 4 e 5 foram livremente posicionados no centro dos quartos da sapata, a posição dos nós 2 e 3 é definida pela

excentricidade da carga. As escoras  $C_{12}$  e  $C_{13}$  transmitem a totalidade do esforço axial ao terreno, enquanto a componente vertical do esforço na escora  $C_{16}$  equilibra o esforço no tirante (T) provocado pelo momento fletor atuante. As escoras  $C_{47}$  e  $C_{57}$  equilibram a componente horizontal da escora  $C_{16}$  (a qual é igual à da soma da componente horizontal das escoras  $C_{12}$  e  $C_{13}$ ). Os quatros tirantes horizontais encontram-se 5cm acima da base da sapata, representando as resultantes de tração que equilibram as escoras  $C_{47}$  e  $C_{57}$  e as componentes horizontais de  $C_{12}$  e  $C_{13}$ .



Figura 4.13 - Modelo de escoras e tirantes para a sapata.



Figura 4.14 - Modelo de escoras e tirantes da sapata: planta.

A análise estática do modelo de escoras e tirantes utilizou os métodos conhecidos de análise de treliças, com o auxílio das projeções ortogonais sobre os planos principais representadas na Figura 4.15.



Figura 4.15 - Vistas verticais AA' e BB'.

Começa-se por determinar T<sub>23</sub> com o auxílio da vista BB` nesta figura,

$$\tan \theta_1 = \frac{0,475}{0,54} = \frac{T_{23}}{R} \iff T_{23} = \frac{500}{2} \times \frac{0,475}{0,54} = 220 \text{ kN}$$

Seguidamente, determina-se o valor de T<sub>25</sub>, com o apoio da vista AA`,

$$\tan \theta_2 = \frac{0,20}{0,54} = \frac{T_{25}}{R} \iff T_{25} = 250 \times \frac{0,20}{0,54} = 93 \text{ kN}$$

que é igual ao de  $T_{34}$ , por simetria. Para determinar os valores de  $C_{12}$  e  $C_{13}$ , escreve-se uma equação de equilíbrio no nó 3, por exemplo, a versão espacial do teorema de Pitágoras, ver figura 4.16.

$$C_{13} = \sqrt{R^2 + T_3^2} = \sqrt{R^2 + T_{23}^2 + T_{34}^2} = \sqrt{250^2 + 220^2 + 93^2} = 346 \text{ kN} = C_{12}$$

O valor em C<sub>16</sub> determina-se por equilíbrio de forças na direção vertical no nó 6,

$$\tan \theta_3 = \frac{0,54}{0,425} \Leftrightarrow \theta_3 = 51,80^\circ$$

$$C_{16} = \frac{C}{\sin \theta_3} = \frac{732}{\sin 51,80^\circ} = 931 \text{ kN}$$

$$C_{13}$$

$$T_3$$

$$T_3$$

$$R$$

Figura 4.16 - Diagrama de corpo livre para o nó 3.

Finalmente, para determinar os esforços nas escoras  $C_{47}$  e  $C_{57}$  e no tirante  $T_{45}$  utiliza-se a relação de ângulos ilustrada na figura 4.17 e as equações de equilíbrio no nó 4.





$$\sin \alpha = \frac{T_{25}}{C_{57}} \iff C_{57} = \frac{93}{\sin 45^\circ} = 132 \text{ kN} = C_{47}$$
$$\cos \alpha = \frac{T_{45}}{C_{57}} \iff T_{45} = 132 \cos 45^\circ = 93 \text{ kN}$$

O Quadro 4.3 reúne os valores dos esforços nas escoras e o Quadro 4.4 os esforços nos tirantes e as áreas da secção das armaduras e os tipos de varões.

Escoras	$C_{12} = C_{13}$	C <sub>16</sub>	$C_{47} = C_{57}$
$N(\mathbf{kN})$	346	931	132

Quadro 4.4 - Esforço axial nos tirantes e áreas de armadura.

Tirantes	Direção	<i>N</i> (kN)	Área, <sub>req.</sub> (cm <sup>2</sup> )	Comprimento de influência	Área, <sub>req</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	Área, <sub>prov.</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	Nº de varões	Armadura
T <sub>23</sub>	Х	220	5,06	0,80	6,33	8,04	8	Ø16//0,25
T <sub>45</sub>	Х	93	2,13	0,95	2,24	3,14	8	Ø10//0,25
$T_{25} = T_{34}$	Y	93	2,13	0,95	2,24	3,14	8	Ø10//025

A análise dos valores do Quadro 4.4, permite concluir que o tirante mais desfavorável é o  $T_{23}$ , de modo que o seu valor poderia ser utilizado se se pretendesse uniformizar a armadura. Neste quadro é também indicada o comprimento de influência de cada tirante, com base no qual se

determina a quantidade de armadura por unidade de largura. Cada tirante tem de estar a meio do seu comprimento de influência de modo a garantir que a posição do centro de massa dos varões coincide com a definida no modelo de escoras e tirantes; por isso a área de influência do tirante 23 não cobre totalmente a metade direita da base da sapata. Note-se ainda que, na prática, o sentido do momento fletor na base do pilar pode ser invertido, de modo que a armadura segunda x deve ser a máxima da determinada para os tirantes 23 e 45; assim na direção x a armadura poderia ser superior na zona central (1.60 m) que no resto, mas essa opção não traria uma poupança significativa de material. Estes comentários justificam a pormenorização apresentada na Figura 4.20.

## 4.3.2.2 Verificação das zonas nodais

Apresenta-se a verificação das zonas nodais 1 e 6: a primeira, localizada na base do pilar, é do tipo CCCC enquanto que a segunda, na base da sapata, é um TTC.

A zona nodal 1, tetraédrica, foi considerada hidrostática, bastando verificar uma das suas faces, por exemplo a horizontal (embora, de facto, como esta secção é comum ao pilar, já dimensionado, está automaticamente verificada, até porque o estado de tensão espacial na sapata é mais favorável). O valor da tensão máxima admissível de 15,0 MPa foi determinado na secção 4.3.1.2. A cláusula 6.5.4 (5) do EC2 1-1 permite aumentar este valor de 10% em virtude do estado de compressão triaxial, obtendo-se 16,5 MPa (de facto, sendo um nó CCCC, a cláusula 6.5.4 (6) do EC2 1-1 permite aumentar até 200%!).



Figura 4.18 - Vista do nó 1 no plano yz.

A Figura 4.18 representa a zona nodal 1 projetada no plano vertical yz (a componente no plano yz do esforço nas escoras  $C_{12}$  e  $C_{13}$ , não é o que está indicado na figura – mera soma

algébrica dos valores individuais –, mas sim  $2\sqrt{R^2 + T_{34}^2} = \sqrt{250^2 + 93^2} = 533$  kN). Vem, assim:

$$\sigma_{1cd} = \frac{C}{b \times a_1} = \frac{732 \times 10^{-3}}{0,30 \times 0,15} = 16,27 \text{ MPa} < 16,5 \text{ MPa}$$

A Figura 4.19 representa uma vista da zona nodal 6 segundo o plano yz. Note-se que, no nó 1, a extensão da face horizontal associada à componente vertical da escora 16 é dada por  $a_{1T} = a_1 \frac{T}{c} = a_1 \frac{273}{732} = 0.0559$ m. Assim, a altura da escora 16 no plano YZ é dada por  $a_{1T}/\sin \theta_2 = 0.071$ m. Neste caso, de acordo com a cláusula 6.5.4.(4) do EC2 1-1,a tensão máxima admissível para uma zona nodal TTC, vale,

$$\sigma_{Rd,\max} = K_3 \times \nu fcd = 0,75 \times \left(1 - \frac{25}{250}\right) \times 16,67 = 11,25 \text{ MPa}$$

A escora 16 tem de ser do tipo leque, bastando que alargue para 0.30 m na base (expressão abaixo), o que é perfeitamente possível, dado que a distância do centro de massa da armadura à face da fundação é superior a 5 cm (de outro modo seria necessário aumentar este valor),

$$\sigma_{16cd} = \frac{C_{16}}{b \times a_4} = \frac{931 \times 10^{-3}}{0,30 \times 0,30} = 10,34 \text{ MPa} < 11,25 \text{ MPa}$$

$$T$$

$$C_{16}$$

$$C_{16}$$

$$C_{16}$$

$$C_{16}$$

Figura 4.19 – Vista do nó 6 segundo o plano vertical xz.

### 4.3.2.3 Amarração dos varões

Os resultados relativos ao cálculo do comprimento de amarração da armadura são apresentados no Quadro 4.5.

Quadro 4.5 - Segundo exemplo: resultados do comprimento de amarração.

$l_{bd}$	l <sub>b,rqd</sub>	$l_{b,min}$	l <sub>bd</sub> (adotado)
450 mm	644 mm	195 mm	450 mm

### 4.3.2.4 Pormenorização das armaduras

As figuras 4.20, 4.21 e 4.22 apresentam a disposição das armaduras. Para a armadura superior adoptou-se  $\emptyset 8//0,15$ , para controlo de fendilhação [8]. A armadura nos pilares é definida no enunciado do problema do Fib Bulletin 61[6].



Figura 4.20 - Secção do pilar com pormenorização das armaduras.



Figura 4.21 - Planta da sapata com pormenorização das armaduras.



Figura 4.22 - Corte da sapata com pormenorização das armaduras.

### 4.3.3 Sapata isolada centrada à flexão composta desviada

### 4.3.3.1 Modelação e dimensionamento das armaduras

Este terceiro exemplo trata a sapata isolada centrada à flexão composta desviada apresentada e pré-dimensionada na secção 3.3.3, e representada na figura 4.22. Tratando-se de flexão composta desviada, começou por se estabelecer um primeiro modelo de escoras e tirantes que consistia na aplicação do modelo utilizado para a flexão composta simples, apresentado no modelo anterior, em ambas as direções. Mas a decomposição do campo de tensões na face do pilar segundo as duas direções principais não é trivial, devido à sobreposição da compressão num dos quadrantes da secção, ver figura 4.23. Nesta figura a área da trama de cor cinza é a zona de sobreposição das tensões devidas à flexão nas duas direções. Por isso, o único modelo de escoras e tirantes apresentado desenvolve e justifica o que foi proposto no Fib Bulletin 61[6].



Figura 4.23 - Sapata e esforços na base do pilar: a) planta; b) corte na direção y.



Figura 4.24 - Campo de tensões de compressão na base do pilar: a) corte; b) perspetiva.

Para definir a geometria do modelo de escoras e tirantes na sapata é necessário determinar a posição das resultantes dos campos de compressão no betão e armaduras e das trações nas armaduras. Para tal procede-se à análise da secção, a qual determina a posição da linha neutra da secção do pilar e a extensão na fibra mais comprimida, em função da geometria, propriedades dos materiais e esforços na secção, ver Fig. 4.25. Estes resultados definem o campo de extensões na secção com base no qual se calculam os campos de compressão e tração e suas resultantes. Os valores destas resultantes e suas localizações utilizados para definir o modelo de escoras e tirantes, são os indicados na publicação do Fib [6] que tem vindo a ser referida. De facto estes valores, embora consistentes entre si não estão corretos; porém foram utilizados de modo a possibilitar a comparação dos resultados. Note-se que, como é óbvio, a posição destas resultantes depende do modelo de comportamento assumido para o betão e aço.



Figura 4.25 - Posição do eixo neutro da secção da base do pilar.

Neste caso, designando por  $T_d$  a resultante das trações na armadura longitudinal e por  $C_d$  a resultante de compressão, aquela referência apresenta os seguintes resultados:

$$C_d = 17800$$
 kN;  $d_{cx} = 0,36$  m;  $d_{cy} = 0,13$  m  
 $T_d = 5300$  kN;  $d_{tx} = 0,68$  m;  $d_{ty} = 0,32$  m

O modelo vai depender do campo de tensões normais no solo. Por exemplo, uma solução elástica linear, ou seja admitindo um modelo tipo Winkler [14], garante a compressão em toda a base da sapata se a resultante estiver contida no seu núcleo central, o que facto sucede:

$$e_x = \frac{M_{y,Ed}}{N_{Ed}} = \frac{10000}{12500} = 0,80 \text{ m} \le \frac{a_x}{6} = 1,33 \text{ m}; e_y = \frac{M_{x,Ed}}{N_{Ed}} = \frac{4000}{12500} = 0,32 \text{ m} \le \frac{a_y}{6} = 0,83 \text{ m}$$

Um campo de tensões plano como esse é autorizado pelo teorema estático da análise limite. Este teorema permite que se admita um campo de tensões ainda mais simplificado, ver Fig. 4.26, constante em cada um dos quatro quadrantes da base da sapata, de modo que a posição de cada sub-resultante está no centro geométrico desse quadrante.

#### Tony Jordão Relvas



Figura 4.26 - Posição das resultantes de tensões em cada quadrante da base da sapata. Neste caso, as sub-resultantes são determinadas por simples equilíbrio:

$$V_{1} = \frac{N_{Ed}}{4} + \frac{M_{x,Ed}/4}{1,25} + \frac{M_{y,Ed}/4}{2,00} = \frac{12500}{4} + \frac{4000/4}{1,25} + \frac{10000/4}{2,00} = 5175 \text{ kN};$$

$$V_{2} = \frac{N_{Ed}}{4} + \frac{M_{x,Ed}/4}{1,25} - \frac{M_{y,Ed}/4}{2,00} = \frac{12500}{4} + \frac{4000/4}{1,25} - \frac{10000/4}{2,00} = 2675 \text{ kN};$$

$$V_{3} = \frac{N_{Ed}}{4} - \frac{M_{x,Ed}/4}{1,25} + \frac{M_{y,Ed}/4}{2,00} = \frac{12500}{4} - \frac{4000/4}{1,25} + \frac{10000/4}{2,00} = 3575 \text{ kN};$$

$$V_{4} = \frac{N_{Ed}}{4} - \frac{M_{x,Ed}/4}{1,25} - \frac{M_{y,Ed}/4}{2,00} = \frac{12500}{4} - \frac{4000/4}{1,25} - \frac{10000/4}{2,00} = 1075 \text{ kN};$$

A figura 4.27, representa o modelo de escoras e tirantes da sapata, o qual não é muito diferente do que se utilizou para a flexão não desviada. Porém, como se perdeu a simetria, o

modelo é isostático, tendo-se também optado por amarrar o tirante vertical num nó TCCCC, pois para este caso os ângulos das escoras na base da sapata não são demasiado pequenos (se o fossem poderia considerar-se um nó no centro da base da sapata e amarrar aí essa armadura). As figuras 4.28 e 4.29 apresentam vistas adicionais do modelo.



Figura 4.27 - Modelo de escoras e tirantes para a sapata (flexão desviada).



Figura 4.28 - Modelo de escoras e tirantes para a sapata: vistas AA` e BB`.



Figura 4.29 - Modelo de escoras e tirantes para a sapata: vista em planta.

Escoras	Resultado (kN)	Fib Bulletin 61 (kN)	Diferença (%)
C <sub>16</sub>	8328	8776	5,10
C <sub>26</sub>	5134	5520	7,00
C <sub>36</sub>	6032	6386	5,54
C <sub>46</sub>	2133	2279	6,41
C <sub>56</sub>	6607	6727	1,78
C <sub>25</sub>	2240	2320	3,45
C <sub>45</sub>	4650	4911	5,32
C <sub>35</sub>	1684	1806	6,76
Tirantes	Resultado (kN)	Fib Bulletin 61 (kN)	Diferença (%)
T <sub>12</sub>	5388	5853	7,95
T <sub>13</sub>	3680	3997	7,93
T <sub>34</sub>	5308	5753	7,74
T <sub>24</sub>	3620	3845	5,85

## Quadro 4.6 - Terceiro exemplo: resultados.

Neste caso, a treliça não apresenta qualquer simetria, e é isostática, podendo ser resolvida pelo método dos nós para estruturas espaciais (começando por exemplo pelo nó 1, depois 3, depois 6, etc.), estabelecendo e resolvendo as equações de equilíbrio segundo as direções dos eixos de referência, ou, então, com o auxílio de um programa informático de análise de estruturas. Os resultados estão representados no Quadro 4.6, onde são comparados com os resultados apresentados no Fib Bulletin 61 [6]. As diferenças dos resultados apresentados neste quadro são devidas à diferente cota considerada para o nó 6, correspondendo a uma altura útil de 1.45 m no Fib Bulletin 61 [6] e de 1.58 m no modelo da Figura 4.27.

O Quadro 4.7 apresenta o dimensionamento da armadura.

tirante	direção	Esforço (kN)	compr. de influência	Área, <sub>req</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	Área, <sub>prov</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	nº de varões	Tipos varões e afastamentos
T <sub>12</sub>	Х	5388	2,5	49,57	51.5	16	Ø32//0,15
T <sub>34</sub>	Х	5308	2,5	48,83	51.5	16	Ø32//0,15
T <sub>13</sub>	Y	3680	4,0	21,16	22,1	18	Ø25//0,22
T <sub>24</sub>	Y	3620	4,0	20,82	22,1	18	Ø25//0,22

Quadro 4.7 - Terceiro exemplo: dimensionamento da armadura.

## 4.3.3.2 Verificação dos nós

As verificações das zonas nodais para este exemplo são similares às do exemplo anterior, devendo-se notar que a amarração do tirante vertical faz-se agora numa região mais favorável.

## 4.3.3.3 Amarração dos varões

O comprimento da amarração foi determinado como no primeiro exemplo, apresentando-se os resultados no Quadro 4.8.

Quadro 4.8 - Terceiro exemplo: comprimento de amarração.

$l_{bd}$	$l_{b,rqd}$	$l_{b,min}$	$l_{bd}(adotado)$
450 mm	644 mm	195 mm	450 mm

## 4.3.3.4 Pormenor construtivo das armaduras

Para a armadura superior na sapata adoptou-se Ø10//0,20 [8]. As Figuras 4.30, 4.31 e 4.32 apresentam a disposição da armadura, sendo a dos pilares a indicada no Fib Bulletin 61 [6].



Figura 4.30 - Terceiro exemplo: secção do pilar com pormenorização das armaduras.



Figura 4.31 - Terceiro exemplo: corte da sapata na direção y com pormenorização das armaduras.



Figura 4.32 - Terceiro exemplo: corte da sapata na direção x com pormenorização das armaduras.

Só se representam alguns varões do pilar para não tornar o desenho confuso. Também não se apresenta a planta da sapata com a pormenorização, por não ser possível diferenciar os varões.

# 4.4 Sapata isolada excêntrica

A sapata isolada excêntrica usualmente utilizada para suportar as cargas dos pilares laterais foi referida no Capítulo 2. Nesta secção exemplifica-se a definição de modelos de escoras e tirantes para flexão composta, considerando os dois sentidos para o momento aplicado. O procedimento seguido é muito semelhante ao do terceiro exemplo (secção 4.2).

# 4.4.1 Sapata isolada excêntrica em flexão composta (sentido favorável)

Para a sapata isolada excêntrica considerou-se de novo o exemplo escolar retirado de [9], sendo a geometria e esforços na base do pilar ( $N_{Ed} = 500 \text{ kN} \text{ e } M_{Ed} = 300 \text{ kNm}$ ) os indicados na secção 3.4.1, ver Figura 4.33.



Figura 4.33 - Esquema da sapata: a) planta; b) corte.

As figuras 4.34 e 4.35 apresentam o modelo de escoras e tirantes proposto. Recorde-se que a posição das sub-resultantes no solo é definida por equilíbrio estático.



Figura 4.34 - Modelo de escoras e tirantes para sapata isolada excêntrica: perspetiva.



Figura 4.35 – Modelo de escoras e tirantes para sapata isolada excêntrica: planta.

O percurso das cargas, ou antes das resultantes dos campos de tensões principais de compressão e tração, é similar ao definido nos exemplos anteriores, relativos à sapata isolada centrada. As escoras  $C_{57}$  e  $C_{67}$  equilibram a componente horizontal da escora  $C_{13}$  e transmitem esta força aos nós 5 e 6, que são planos, pois que as reações verticais do solo se concentram nos nós 2 e 4.

Como habitualmente, depois de determinar os esforços nas escoras e dos tirantes, calcula-se a área das armaduras.

Escoras	N (kN)	Tirantes	N (kN)
С	1220	Т	720
C <sub>12</sub>	355	T <sub>24</sub>	174
C <sub>15</sub>	355	T <sub>35</sub>	276
C <sub>13</sub>	2942	$T_{23} = T_{45}$	187
$C_{36} = C_{46}$	330		

Quadro 4.9 – Esforço axial nas escoras e nos tirantes.

# 4.4.2 Sapata isolada excêntrica em flexão composta (sentido desfavorável)

Trata-se do modelo estudado na secção anterior, mas com o sentido do momento fletor inverso, ver Figura 4.36:



Figura 4.36 - Esquema da sapata: a) planta; b) corte na direção x.

## 4.4.2.1 Modelo de escoras e tirantes

As figuras 4.37 e 4.38 representam um possível modelo de escoras e tirantes para este caso, praticamente igual ao definido para a sapata isolada centrada à flexão composta. A única diferença é o prolongamento das escoras  $C_{12}$  e  $C_{15}$ .







Figura 4.38 - Modelo de escoras e tirantes para sapata excêntrica (momento inverso): planta.

Escoras	N (kN)	Tirantes	<i>N</i> (kN)
С	1220	Т	720
C <sub>12</sub>	355	T <sub>25</sub>	174
C <sub>15</sub>	355	T <sub>34</sub>	183
C <sub>16</sub>	4560	$T_{23} = T_{45}$	183
$C_{36} = C_{46}$	293		

Quadro 4.10 – Esforço axial nas escoras e nos tirantes.

# 4.5 Sapatas combinadas

Considera-se o exemplo formado pela junção de duas sapatas isoladas centradas semelhantes à estudada na secção 2.2.2, ver Figura 4.39.

Os pilares têm secção 30 cm  $\times$  55 cm e encontram-se sujeitos a esforços com os valores seguintes:

 $N_{1,Ed} = 500 \text{ kN}; M_{1,Ed} = 300 \text{ kNm}; N_{2,Ed} = 1000 \text{ kN}; M_{2,Ed} = 500 \text{ kNm}.$ 

Estes valores correspondem a uma excentricidade  $e_1 = 0,60$  m no pilar 1 (à esquerdo) e a uma excentricidade  $e_2 = 0,50$  m no pilar 2 (à direita).



Figura 4.39 - Esquema de sapata combinada: a) planta; b) corte.

## 4.5.1 Modelo de escoras e tirantes

O modelo de escoras e tirantes que se propõe para este caso é, naturalmente, uma generalização do modelo para a sapata isolada centrada à flexão composta apresentado anteriormente, ver Figuras 4.40 e 4.41.



Figura 4.40 - Modelo de escoras e tirantes para sapata combinada: perspetiva.



Figura 4.41 - Modelo de escoras e tirantes para sapata combinada: corte.

Os Quadros 4.11 e 4.12 apresentam os valores dos esforços determinados nas escoras e tirantes.

C	Juadro 4.11 – Esfor	co nos elementos	s do modelo de e	escoras e tirantes	associado ao pilar	1.
· ·		•••••••••••••••••••••••••••••••••••••••			model and the prime	

Escoras	Esforço (kN)	Tirantes	Esforço (kN)
$C_1$	1042	$T_1$	542
C <sub>12</sub>	278	T <sub>25</sub>	93
C <sub>15</sub>	278	T <sub>34</sub>	35
C <sub>16</sub>	1086	$T_{23} = T_{45}$	79
$C_{37} = C_{47}$	87		

Escoras	Esforço	Tirantes	Esforço
C2	<u>(KN)</u> 1500	T <sub>2</sub>	<u>(KN)</u> 500
C` <sub>12</sub>	551	T`25	185
C`15	551	T`34	62
C`16	1550	$T_{23} = T_{45}$	139
C` <sub>37</sub> = C` <sub>47</sub>	152		

Quadro 4.12 - Esforço nos elementos do modelo de escoras e tirantes associado ao pilar 2.

# 4.6 Sapatas contínuas para paredes resistentes

## 4.6.1 Geometria da sapata

A sapata contínua para a qual se apresenta em seguida o modelo de escoras e tirantes suporta uma parede resistente estudada na disciplina de Estruturas de Betão [1]. Considera-se porém que a parede transmite apenas uma carga vertical uniformemente distribuída de 400 kN/m (Figura 4.41), porque a consideração das ações horizontais, certamente as mais relevantes no
caso de uma parede resistente, sai fora do âmbito desta dissertação. As dimensões da sapata foram determinadas por um pré-dimensionamento como o descrito na secção 3.4.4.



Figura 4.42 - Esquema de sapata contínua: direção a) longitudinal e b) transversal.

#### 4.6.2 Modelo de escoras e tirantes

O modelo de escoras e tirantes foi realizado no plano transversal à parede, determinando pois apenas a armadura tranversal (Figura 4.43). Na direção longitudinal basta a armadura mínima, para a qual se pode tomar 20 % da transversal, que é o valor utilizado em lajes sujeitas a um modo de deformação cilíndrico.



Figura 4.43 - Modelo de escoras e tirantes da sapata contínua: plano transversal.

Escoras	Esforços	Tirantes	Esforços

Quadro 4.13 - Valores do esforço axial nas escoras e nos tirantes.

Escoras	Estorços (kN)	Tirantes	Estorços (kN)
$C_{12} = C_{13}$	1303	T <sub>23</sub>	622

# 5 CONCLUSÃO

Reúnem-se neste capítulo as principais conclusões estabelecidas ao longo da dissertação bem como algumas propostas de trabalhos futuros, referentes a aspetos que não foram cabalmente tratados.

## 5.1 Principais conclusões

O principal resultado deste estudo foi o estabelecimento de modelos espaciais de escoras e tirantes para a análise e dimensionamento de fundações superficiais, em particular sapatas isoladas, para edifícios. Procurou-se, por um lado, otimizar e, por outro, simplificar esses modelos, de modo a garantir o controlo dos custos e a exequibilidade das soluções propostas.

Com este trabalho também se procurou reunir todos os passos necessários à elaboração do projeto estrutural de sapatas isoladas, mostrando-se ainda que os diversos tipos de sapatas isoladas podem ser tratadas de forma semelhante.

Os exemplos apresentados mostram que muito frequentemente o pré-dimensionamento baseado na tensão admissível do solo é satisfatório e que se pode ter confiança nesse procedimento; porém, é possível que por vezes este pré-dimensionamento fique aquém do ideal, requerendo quantidades totais de armadura que poderiam eventualmente ser reduzidas.

Constituindo as sapatas isoladas elementos D, os modelos de escoras e tirantes serão o procedimento mais aconselhável para a sua análise e dimensionamento. Mostrou-se também que é possível estabelecer modelos espaciais isostáticos (ou até hipostáticos em casos apresentando alguma simetria) muito simples, o que torna injustificável a utilização dos habituais modelos planos. Estes últimos podem facilmente proporcionar violações das relações de equilíbrio, o que é muito grave, porque estes procedimentos de dimensionamento das sapatas se baseiam no princípio estático, ou produzir soluções excessivamente conservativas.

Mostrou-se ainda que a análise estática destas treliças espaciais isostáticas pode ser feita de modo muito simples por mera aplicação do método dos nós para treliças espaciais. É evidente que é também sempre possível utilizar programas de cálculo informáticos para esta análise.

Por último, mostrou-se que as verificações de resistência intrínsecas ao método baseado em modelos de escoras e tirantes são, para estes modelos espaciais, similares às utilizadas em modelos planos, exceto em dois aspetos, um menos importante e outro mais crítico. Por um lado, nos modelos planos, normalmente considerados em estruturas de espessura reduzida, é habitual assumir secção retangular para as escoras; no caso espacial tal restrição é mais dificilmente justificável, embora se compreenda que as suas consequências não são importantes, no âmbito do teorema estático. Já para as regiões nodais espaciais, as quais ligam, no mínimo, quatro elementos lineares totalmente desalinhados, só muito dificilmente pode a sua geometria ser definida com alguma precisão. Por esse motivo, as verificações realizadas neste trabalho têm quase sempre um caráter aproximado. É também por este motivo que este é o principal tópico a considerar em trabalhos futuros.

### 5.2 Trabalhos futuros

De acordo com as considerações apresentadas no corpo da dissertação e recordando algumas das limitações com que este estudo se deparou, é possível elencar as seguintes propostas para trabalhos futuros.

- Caraterização geométrica e análise de nós espaciais em modelos de escoras e tirantes (ver [13]);
- Sapatas contínuas para paredes resistentes sujeitas a ações horizontais;
- Avaliação rigorosa da armadura construtiva a considerar em sapatas;
- Avaliação da validade e possível otimização das dimensões iniciais determinadas por um pré-dimensionamento baseado na tensão admissível no solo;
- Consideração do efeito das forças horizontais nas sapatas e, em particular, seu efeito sobre os modelos de escora e tirantes.

# 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Andrade A. e Providência P. (2015), "Apontamentos de Apoio às aulas de Estruturas de Betão", FCTUC, Coimbra.
- [2] Bastos P. (2012). "Sapatas de fundações". Estruturas de Concreto III, Universidade Estadual Paulista, UNESP Bauru/SP, Brasil.
- [3] Coelho P. e Almeida Sousa J. (2012). "Apontamentos de apoio às aulas de Mecânica dos Solos I do MIEC – Exercícios sobre índices físicos dos solos". Laboratório de Geotecnia do Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra, Coimbra.
- [4] Dias da Silva, V. (2004). "Mecânica e Resistência dos Materiais". 3ª Edição, Coimbra.
- [5] Ferreira J.E.D. (2010). "Seleção de modelos de escoras e tirantes em estruturas de betão". Dissertação de mestrado. Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia Universidade do Porto.
- [6] Fib Bulletin 61 (2011). "Design examples for strut-and-tie models". The International Federation for Structural Concrete, Suiça.
- [7] Lemos, J. L. L. e Venda Oliveira, P. (2013) "Apontamentos de apoio às aulas de Mecânica dos Solos II do MIEC – Dimensionamento de Muros de Suporte", Laboratório de Geotecnia do Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra, Coimbra.
- [8] Lopes, S.R. (2013). "Powerpoint de apoio às aulas de Betão Armado II do MIEC Dimensionamento das fundações". Universidade de Coimbra, Coimbra.
- [9] Marchão C., Appleton J., Câmara J. (2008). "Estruturas de Betão II, Módulo 3 fundações de edifícios", Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, IST, Lisboa.

- [10] NP EN 1992-1-1 (2010). "Eurocódigo 2 Projeto de estruturas de betão. Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios", IPQ.
- [11] NP EN 1997-1 (2010). "Eurocódigo 7 Projeto geotécnico. Parte 1: Regras gerais", IPQ.
- [12] Pinto, P. L. (2012) "Apontamentos de apoio às aulas de Fundações do MIEC. Capacidade de carga". Universidade de Coimbra, Coimbra.
- [13] Rodrigues I. F. S. (2008) "Zonas de Descontinuidade de Betão Estrutural Campos de Tensões Tridimensionais", Dissertação de mestrado, IST, Lisboa.
- [14] Santos J. (2008). "Fundações por estacas, ações horizontais e elementos teóricos", Obras geotécnicas, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura do IST, Lisboa.