

1 2 9 0



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Fátima Antunes Ramos

**ESTUDO COMPARATIVO DE PORTEFÓLIOS DE
INVESTIMENTO NO MERCADO ACIONISTA**

VOLUME 1

**Dissertação no âmbito do Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças,
orientada pela Professora Doutora Marta Margarida Braz Pascoal e apresentada
ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia e à
Faculdade de Economia.**

julho de 2021

Estudo comparativo de portefólios de investimento no mercado acionista

Fátima Antunes Ramos



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças

Master in Quantitative Methods in Finance

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

julho 2021

Agradecimentos

Finalizada mais uma etapa importante da minha vida, não poderia deixar de expressar o mais profundo agradecimento a todos aqueles que me apoiaram nesta longa caminhada e que contribuíram para a realização desta dissertação.

Sendo o encerrar de uma etapa especial da minha vida e significando o culminar dos anos da minha vida académica, resta-me expressar o meu agradecimento a todos os que, direta ou indiretamente, contribuíram para a sua elaboração.

À minha orientadora, Professora Doutora Marta Margarida Braz Pascoal, o meu sincero agradecimento por todo o tempo disponibilizado, por todas as sessões zoom que estes tempos impuseram, pelos conhecimentos transmitidos, pelo apoio, pelo esclarecimento e pela sua dedicação.

Um agradecimento à minha família, em especial, aos meus pais, irmãos e avós, os alicerces da minha vida, pois sem eles não teria chegado até aqui. Obrigada por todo o apoio, sacrifício, esforço e amor.

Ao João, pelo apoio incondicional sempre prestado, pelo carinho, companheirismo, incentivo e motivação constantes. Um obrigada não chega para tamanha dedicação.

Aos meus colegas de Coimbra e amigos, pela partilha de conhecimentos, por todas as experiências partilhadas e por terem sido indispensáveis ao longo destes cinco anos.

Por fim, é de referir que este trabalho foi desenvolvido no âmbito do projeto “MobiWise: from Mobile Sensing to Mobility Advising” (P2020 SAICTPAC/0011/2015), co-financiado pelo COMPETE 2020, Portugal 2020 - Programa Operacional para a Competitividade e Internacionalização, o Fundo Europeu de Desenvolvimento Regional, e a Fundação para a Ciência e Tecnologia.

Cofinanciado por:



Resumo

O processo de seleção de portefólios é um problema clássico e já bastante estudado na área financeira. Neste problema, o investidor procura aplicar o seu dinheiro num mercado de ações em que haja uma boa vinculação entre o retorno esperado e o risco subjacente. A história tem sido marcada por maiores níveis de volatilidade e instabilidade nos mercados financeiros em geral, com reflexo nos mercados acionistas, assim o interesse por estratégias alternativas que visam a minimização do risco e a diversificação do portefólio ganharam relevância.

Nesta dissertação revêem-se alguns modelos clássicos de seleção de portefólios, tais como os métodos de pesos iguais, de variância mínima, de tangência e de contribuições de risco iguais. Seguidamente, propõe-se uma abordagem de seleção de portefólios baseada em dois objetivos: os valores do rácio de Sharpe, utilizado frequentemente como índice de desempenho de portefólios, e um critério de diversificação, em que se impõe que as contribuições dos vários ativos para o risco do portefólio sejam tão próximas quanto possível. As soluções deste problema de otimização biobjetivo permitem ao investidor analisar o compromisso eficiente entre a tangência e a diversificação. Apresenta-se igualmente uma revisão de alguns índices que avaliam os portefólios de mercados em termos de concentração, diversificação e desempenho.

Seguidamente, realiza-se uma análise empírica focada nos índices bolsistas IBEX e NASDAQ, com base em cotações diárias dos ativos de cada um no período de 01-01-2012 até 31-12-2016 e utilizando ferramentas do Excel e do Matlab. Os resultados mostram que os portefólios tangentes e diversificados têm conclusões intermédias quando comparados com os métodos de contribuições de risco iguais e de tangência, ambos modelos de seleção de portefólios. Assim, para este modelo biobjetivo de portefólios, conclui-se empiricamente que a cardinalidade é proporcional à diversificação e inversamente proporcional ao rácio de Sharpe.

Palavras-chave: Otimização de portefólios, Risco, Retorno, Diversificação, Portefólios tangentes e diversificados

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
2 Otimização de portfólios	3
2.1 Modelos de Seleção de Portefólios	4
2.1.1 Portefólio de Média-Variância	4
2.1.2 Portefólio Tangente	7
2.1.3 Portefólio de Pesos Iguais	8
2.1.4 Portefólio de Contribuições de Risco Iguais	9
2.2 Modelo de Seleção de Portefólios Tangentes e Diversificados	11
2.3 Índices de Avaliação de Portefólios	13
3 Estudo Empírico	17
3.1 Conjuntos de Dados	17
3.2 Resultados para Modelos de Seleção de Portefólios	22
3.3 Resultados para Modelos de Seleção de Portefólios Tangentes e Diversificados	25
3.4 Notas Finais	29
4 Conclusão	31
Bibliografia	33
Anexo A Resultados computacionais completos	35
A.1 Análise descritiva dos rendimentos dos ativos	35
A.2 Pesos dos ativos	37
A.3 Retorno e risco total	39
A.4 Contribuições de risco	40
A.5 Índices para os Portefólios Tangentes e Diversificados	49

Lista de Figuras

2.1	Portefólio tangente	8
2.2	Índices de Sharpe e diferenças nas contribuições de risco eficientes	13
3.1	Diagramas de extremos e quartis para IBEX: Análise descritiva dos retornos dos ativos	19
3.2	Diagramas de extremos e quartis para NASDAQ: Análise descritiva dos retornos dos ativos	19
3.3	Pesos dos ativos nos portefólios	22
3.4	Risco e retorno dos portefólios	24
3.5	Rácio de Sharpe e diferenças nas contribuições de risco dos portefólios TD	26
3.6	Risco e retorno dos portefólios TD	27
3.7	Cardinalidade dos portefólios TD	28
3.8	Índices dos portefólios TD	29

Lista de Tabelas

3.1	IBEX: Acrónimo e nome dos ativos	18
3.2	NASDAQ: Acrónimo e nome dos ativos	18
3.3	IBEX: Retornos esperados e variâncias dos ativos	20
3.4	NASDAQ: Retornos esperados e variâncias dos ativos	21
3.5	IBEX: Índices para cada portefólio	24
3.6	NASDAQ: Índices para cada portefólio	25
A.1	IBEX: Análise descritiva dos rendimentos dos ativos	35
A.2	NASDAQ: Análise descritiva dos rendimentos dos ativos	36
A.3	IBEX: Pesos dos ativos para cada portefólio	37
A.4	NASDAQ: Pesos dos ativos para cada portefólio	38
A.5	IBEX: Retorno e risco total dos portefólios	39
A.6	NASDAQ: Retorno e risco total dos portefólios	39
A.7	IBEX: Contribuições de risco para o portefólio $1/n$	40
A.8	IBEX: Contribuições de risco para o portefólio MV	41
A.9	IBEX: Contribuições de risco para o portefólio MS	42
A.10	IBEX: Contribuições de risco para o portefólio ERC	43
A.11	NASDAQ: Contribuições de risco para o portefólio $1/n$	43
A.12	NASDAQ: Contribuições de risco para o portefólio MV	45
A.13	NASDAQ: Contribuições de risco para o portefólio MS	46
A.14	NASDAQ: Contribuições de risco para o portefólio ERC	47
A.15	IBEX: Índices para os portefólios TD	49
A.16	NASDAQ: Índices para os portefólios TD	49

Capítulo 1

Introdução

As estratégias de alocação de recursos em portfólios de investimento são muito variadas, pelo que é uma área de grande importância e estudada por um vasto conjunto de autores. O modelo de seleção de carteiras, também conhecido por teoria de gestão de carteiras, foi apresentado inicialmente em 1952, por Markowitz [20]. Esta metodologia permitiu definir a composição de uma carteira de ativos, através da seleção dos títulos e dos respetivos pesos, tendo por objetivo minimizar o seu risco. O conjunto de carteiras que minimiza o risco, relativamente a um determinado retorno esperado, constitui o conjunto de carteiras ditas eficientes. Deste conjunto de carteiras, aquela que apresenta o menor risco designa-se por carteira de variância mínima e tem sido estudada por diversos autores, tais como Golosnoy [13], Clarke *et al.* [6], entre outros.

Um pouco mais tarde, em 1964, Sharpe [23] utilizou e desenvolveu os conceitos da gestão de carteiras introduzidos por Markowitz e propôs um modelo de precificação de ativos de capital, designado CAPM (abreviatura de *Capital Asset Pricing Model*), modelo também estudado por Lintner [17] e, mais tarde, por Fama [12]. Este modelo é suportado num conjunto alargado e exigente de pressupostos que descrevem a relação entre risco sistemático e retornos esperados. Neste modelo, considera-se que assumir maiores riscos é necessário para aumentar o retorno. Sharpe é, também, conhecido pela introdução do índice de Sharpe, valor este utilizado para medir a relação entre o risco e o retorno de um investimento, ou seja, este índice ajuda os investidores a determinar se os retornos mais elevados são consequência de decisões de investimento inteligentes ou causados devido ao risco excessivo. É de referir que ao longo dos anos, este índice foi tema de diversos estudos, como os trabalhos de Lo [18], Kan [14], Martellini [21], Amenc *et al.* [1], Kourtis [15], entre outros.

Num outro estudo considera-se que a expectativa de retorno não existe. Fala-se então em estratégia de pesos iguais, que consiste em aplicar igual capital em cada ativo que compõe a carteira, Disatnik e Katz [10].

É exatamente no intermédio das duas estratégias, de variância mínima e de pesos iguais, $1/n$, que se encontra a estratégia de contribuições de risco iguais, estudada por Maillard *et al.* [19]. Neste trabalho propõe-se que a contribuição total de cada um dos ativos para o risco seja exatamente a mesma, levando em conta o risco individual de cada ativo e a sua correlação com os outros ativos.

A continuação da presente dissertação está estruturada em três capítulos. No segundo capítulo é feita uma revisão da otimização de portfólios, onde se resumem alguns trabalhos relevantes para o seu estudo. Neste capítulo são descritos os diversos modelos de seleção de portfólios: o portfólio de

média-variância, que engloba o portfólio de variância mínima, o portfólio de tangência, o portfólio de pesos iguais e o portfólio de contribuições de risco iguais. Além disso, apresenta-se um modelo que pretende acrescentar alguma diversificação a portfólios com bons desempenhos, medidos pelo rácio de Sharpe, designados portfólios de tangência e diversificação. Conclui-se este capítulo com a análise de índices que avaliam os portfólios referidos segundo o desempenho, a concentração e a diversidade. Já no terceiro capítulo, apresenta-se um estudo empírico com base em informação de dois índices acionistas, o IBEX e o NASDAQ. Extraíram-se dados, para cada um dos índices, do *site* Investing.com, aos quais foram aplicados os modelos estudados. Os resultados obtidos foram posteriormente analisados e utilizados para cálculos futuros e análises de índices, sendo feita a análise comparativa de resultados para os modelos de seleção de portfólios e, ainda, para os portfólios de tangência e diversificação. A dissertação é concluída no Capítulo 4, com uma discussão sobre os resultados obtidos, limitações e possíveis desenvolvimentos do estudo.

Capítulo 2

Otimização de portefólios

O modelo de Markowitz é sustentado pela tese de que os investidores são avessos ao risco e pretendem construir o seu portefólio de forma a obter o maior retorno possível, com base num nível de risco de mercado estabelecido, ou, em alternativa, pretendem construir uma carteira que minimize o risco, para um determinado nível de retorno esperado. Harry Markowitz [20] foi vanguardista no desenvolvimento da teoria do portefólio com o seu vasto trabalho no modelo média-variância. Esta teoria estabelece que decisões relativas à seleção de investimentos, devem ser tomadas tendo em conta a relação entre o retorno e o risco, não devendo estes dois aspetos serem analisados isoladamente, mas, sim, avaliados pela forma como o investimento afeta o risco e o retorno geral do portefólio. Previamente ao trabalho de Markowitz, era inconcebível analisar os ativos como um todo, sendo expectável que a opção prevalecesse sobre os ativos com melhor retorno ou com menor risco. Todavia, Markowitz conseguiu mostrar que os ativos variam de formas distintas e, assim, será possível empregar esses movimentos distintos (movimentos negativos compensam movimentos positivos e vice-versa), minimizando o risco global e, desta forma, os investidores deveriam começar a analisar carteiras de investimento em conjunto e não ativos de investimento individuais.

Markowitz menciona que deve existir uma carteira de ações em que o investidor tem possibilidade de escolha entre o risco e a rentabilidade, através da qual é possível reduzir o risco desta. Esta metodologia baseia-se no conceito de diversificação, em que um investidor consegue reduzir o risco através de uma combinação de vários títulos, isto desde que a correlação entre estes não seja perfeita. A correlação mede como cada ativo se comporta com a variação de um outro ativo presente na carteira, ou seja, se uma ação tem uma subida ou descida do seu preço, a correlação exprime o que irá acontecer com uma outra ação. Desta forma, há necessidade de se possuir no portefólio ativos com baixa correlação entre si, para que se possam minimizar as perdas.

A metodologia proposta por Markowitz consiste numa seleção de investimentos com base na relação entre risco e retorno. Contudo, geralmente risco e retorno são conflituosos na medida em que nem sempre a composição ideal em termos de risco corresponde a uma composição ideal em termos de retorno. Deste modo, uma estratégia para obter um portefólio tendo em vista melhorar o seu desempenho seria aumentar os ativos que apresentem um maior retorno, dentro do mesmo patamar de risco desejado, substituindo os que tenham menor retorno. Ou seja, melhorar a rentabilidade de uma carteira, sem afetar o seu risco. Outra estratégia seria substituir ativos que tenham maior risco por ativos que apresentem um menor risco, dentro do mesmo patamar de retorno desejado. Desta

forma, melhora-se o risco do portefólio, sem abrir mão do seu retorno, e o investidor não irá investir em determinado portefólio se houver outro com uma relação de retorno/risco mais favorável.

Outro aspeto que pode ser levado em conta ao selecionar uma carteira é a diversidade dos ativos que a compõem. Com efeito, o investidor encontra-se com a possibilidade de privilegiar o retorno do portefólio, alocando a riqueza a uma variedade de ativos com fracas correlações entre eles, o que permite diminuir a probabilidade de haver perdas.

No que se segue apresentamos a formulação matemática de alguns problemas de otimização que permitem a seleção de carteiras com interesse para um investidor.

2.1 Modelos de Seleção de Portefólios

2.1.1 Portefólio de Média-Variância

Conforme referido anteriormente, o desenvolvimento da teoria do portefólio teve por base a metodologia do modelo de média-variância, que descrevemos seguidamente. O pressuposto subjacente ao modelo de média-variância é que as preferências de um investidor podem ser reproduzidas através de uma função utilidade que envolve o retorno esperado e a variância da carteira. Neste método utilizam-se matrizes de covariância entre os vários ativos, uma vez que estas comprovam as volatilidades dos ativos e as correlações entre eles. Como veremos, estes aspetos são igualmente empregues no método de variância mínima.

Considere-se um conjunto de n ativos de investimento i , com $i = 1, 2, \dots, n$, e suponha-se que um investidor pretende aplicar a sua riqueza nestes ativos de investimento. Para este efeito o investidor procura saber a proporção, ou o peso, que deve dar a cada ativo, de modo a alcançar o menor nível de risco para um nível de retorno esperado estabelecido [3].

A rentabilidade esperada dos ativos pertencentes a um portefólio P num determinado período de tempo $[1, T]$, denotada por $E(R_i)$, é definida por

$$E(R_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t},$$

onde $R_{i,t}$ traduz o valor da rentabilidade do ativo i no momento t , para $i = 1, 2, \dots, n$, $t = 1, 2, \dots, T$. Analogamente, as variâncias e as covariâncias dos ativos são dadas por

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - E(R_i))^2$$

e

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T [R_{i,t} - E(R_i)][R_{j,t} - E(R_j)],$$

respetivamente, para $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Considerem-se as variáveis de decisão, w_i , representando cada uma o peso relativo do ativo i relativamente à carteira completa, para $i = 1, 2, \dots, n$. Então, a rentabilidade esperada do portefólio P ,

denotada por $E(R_P)$, é dada por

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i),$$

enquanto que o risco associado ao portefólio P , σ_P , é definido como $\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2}$, onde

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n w_i w_j \sigma_{ij},$$

ou, em notação matricial e considerando a matriz de covariância dos ativos, Σ , de elementos

$$\Sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & \text{se } i \neq j \\ \sigma_i^2, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

donde, $\sigma_P^2 = w^T \Sigma w$.

No portefólio de média-variância deve ter-se uma distribuição de ativos para a qual o risco é mínimo para um dado valor de rentabilidade esperada, igual ou superior a um determinado valor predefinido $k \in \mathbb{R}$. Então, este portefólio é solução do seguinte problema de otimização:

$$\min \quad w^T \Sigma w \tag{2.1}$$

$$\text{s. a.} \quad E(R_P) \geq k \tag{2.2}$$

$$e^T w = 1 \tag{2.3}$$

$$w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.4}$$

onde e é o vetor com n componentes de valor 1. A restrição (2.2) impõe que o retorno esperado do portefólio não seja inferior a k , enquanto que (2.3) pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

e garante que o portefólio é totalmente investido. Além disso, as condições (2.4) definem o domínio das variáveis de decisão e eliminam a possibilidade de vendas a descoberto dos diferentes ativos.

Geralmente, diferentes valores de k resultam em diferentes carteiras e o conjunto das carteiras que minimizam o risco para um determinado nível fixo de rentabilidade é conhecido como o conjunto de carteiras eficientes. O objetivo do problema do portefólio de média-variância é apresentar uma delas ao investidor, para o limite inferior de rentabilidade estabelecido previamente.

Um investidor que pretenda construir uma carteira de investimentos tem várias decisões a tomar. Escolher a composição da carteira e decidir de que forma deve alocar o capital e investir nesse mesmo portefólio. O risco é uma preocupação imediata do investidor. Este nunca optaria por um portefólio em que a relação entre o retorno e o risco seja negativa, ou seja, em que o ganho que possa advir seja insuficiente para o risco envolvido no investimento em causa. Assim, define-se que os investidores são avessos ao risco. Investidores estes que procuram portefólios com investimentos que tenham ativos livres de risco ou, pelo menos, que tenham fatores de relação entre retorno e risco positivos. Intuitivamente, um portefólio é mais apelativo do que outro se o seu risco é inferior e o seu retorno

esperado é superior. Todavia, em geral, a maximização do retorno e a minimização do risco são conflituosas entre si e quando o risco aumenta com o retorno, não é fácil encontrar uma única carteira mais chamativa sem uma análise mais elaborada. Assim sendo, cada investidor pode atribuir uma utilidade aos vários portefólios, com base nos respetivos retornos e riscos esperados, em que valores de utilidade mais altos são atribuídos a portefólios com perfil de retorno/risco considerados mais atrativos. Logo, para um investidor avesso ao risco os portefólios possuem maior utilidade para retornos mais elevados e menor utilidade para volatilidades mais elevadas. Desta forma, para se obter um portefólio ótimo deverão ser utilizados títulos de todas as classes de ativos. Além disso, quando se alteram as proporções do portefólio de risco para um ativo livre de risco, com o objetivo de maximizar a utilidade de cada investidor, não se alteram as proporções relativas dos vários ativos de risco dentro do portefólio de risco, mas sim diminui-se o peso relativo do portefólio como um todo, em favor do ativo isento de risco. As preferências do investidor, expressas pela utilidade, não alteram a constituição de um portefólio ótimo de risco, sendo o conceito de utilidade utilizado para explicar como funciona a aversão ao risco. Deste modo, tudo depende se o investidor quer investir com o mínimo risco possível e se com esse risco mínimo tenciona obter o máximo retorno esperado, ou se, pelo contrário, se interessa em alcançar um dado retorno esperado, independentemente do risco subjacente, mas com o objetivo de para esse dado retorno pretendido do portefólio obter a menor variância possível.

Do conjunto de carteiras eficientes, que pode ser obtido a partir do portefólio de média-variância, aquela que apresenta o menor risco (e, conseqüentemente, a menor rentabilidade), designa-se por carteira de variância mínima. A principal diferença entre estes dois portefólios é o facto de o portefólio de variância mínima não ter em conta a expectativa de retorno, ao contrário do portefólio de média-variância, pois a carteira de variância mínima tem a particularidade de apenas exigir o conhecimento da matriz de covariâncias para a sua determinação.

O objetivo do portefólio de variância mínima (daqui em diante também designado por MV¹) é determinar uma combinação de ativos que proporcione o menor risco possível, ou seja, pretende-se determinar uma carteira em que não se impõem condições relativamente ao retorno esperado. Um tal portefólio pode ser determinado resolvendo o problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & w^T \Sigma w \\ \text{s. a.} \quad & e^T w = 1 \\ & w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde as variáveis de decisão, w , coincidem com as do problema anterior e traduzem o vetor de pesos dos ativos pertencentes ao portefólio. Também como no problema anterior, as restrições asseguram que o investimento seja total e que não sejam admitidas vendas a descoberto.

Novamente, é de notar que o portefólio de variância mínima corresponde a um caso particular do portefólio de média-variância quando k tem um valor pequeno, uma vez que a região admissível do problema (2.5) está contida na do problema (2.1).

¹Do inglês, *minimum variance*.

2.1.2 Portefólio Tangente

O índice de Sharpe é uma das medidas mais comuns de desempenho de um portefólio. Ele foi introduzido em 1966, por William Sharpe [24], com o propósito de avaliar e prever o desempenho de gestores de fundos de investimento, o qual ajuda os investidores a decifrar quais os investimentos que proporcionam os melhores retornos para um dado nível de risco. Tendo por inspiração a medição do risco do portefólio da teoria de Markowitz, este índice, rácio, ou quociente de Sharpe é definido por:

$$\frac{E(R_P) - R_f}{\sigma_P}, \quad (2.6)$$

onde R_f denota a taxa livre de risco. O rácio de Sharpe pode ser entendido como o excedente de retorno acima da taxa livre de risco por unidade de risco. Um ativo livre de risco é aquele em que o investidor sabe exatamente o valor que receberá no final do prazo de investimento. Este ativo facilita, assim, a decisão do investidor relativamente ao investimento, pois representa a opção que oferece menor risco, por isso quando há comparações entre portefólios de investimento e se pretende avaliá-los, convém não ter em conta a taxa livre de risco. Esta taxa livre de risco, também denominada de taxa de retorno livre de risco, possui uma taxa de retorno muito baixa, ou seja, é o mínimo de retorno que um investidor aceita, sabendo que não corre o risco de perder o montante investido. Contudo, em termos práticos, ressalva-se que todos os ativos apresentam risco.

O quociente de Sharpe é uma medida de risco do portefólio, que permite estipular a quantidade de retorno de um portefólio para um dado valor de risco. Este quociente indica se os retornos obtidos pelo portefólio são resultado de investimentos lógicos ou consequência de um risco exagerado, ou seja, a partir deste índice conseguimos perceber que um rendimento será efetivamente benéfico se esses rendimentos não acarretam um risco demasiado elevado. Conclui-se, assim, que quanto mais elevado for o índice de Sharpe, melhor é a execução do portefólio ajustado ao risco. Por sua vez, um índice de Sharpe negativo determina que um ativo sem risco, iria obter um desempenho mais eficaz do que o título que está a ser considerado.

Amenc *et al.* [1] mostraram uma alternativa para minimizar a volatilidade, que seria maximizar o desempenho ajustado ao risco de um portefólio, dado pelo quociente entre o seu retorno e o seu risco. Deste modo, o rácio de Sharpe (2.6) pode ser substituído por:

$$IS = \frac{E(R_P)}{\sigma_P}. \quad (2.7)$$

Esta será a expressão utilizada no presente trabalho, em que o índice de Sharpe é calculado simplesmente dividindo o retorno esperado do portefólio pela sua volatilidade, sem ter em consideração o retorno de um ativo livre de risco, uma vez que o que se pretende é apenas uma comparação entre os vários modelos.

Como se pode observar, o portefólio de tangência ou aquele que possui o máximo índice de Sharpe, daqui em diante designado por MS², obtém o maior retorno esperado por unidade de risco.

²Do inglês, *maximum Sharpe*.

Assim, este portfólio pode determinar-se resolvendo o problema de otimização:

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{\mu^T w}{\sqrt{w^T \Sigma w}} \\ \text{s. a.} \quad & e^T w = 1 \\ & w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.8)$$

Tal como anteriormente, cada w_i representa o peso a aplicar no i -ésimo fundo, $i = 1, 2, \dots, n$ e onde $\mu = E(R_p)$. Note-se que a função objetivo deste problema consiste no quociente entre o retorno e a variância do portfólio.

Tendo abordado a teoria de portfólios de Markowitz, em que se pretende otimizar a seleção de portfólios optando por soluções que se situem na fronteira de eficiência relativamente ao retorno e ao risco, notámos que o portfólio de variância mínima é aquele que apresenta o menor risco. Se um investidor tem outras preferências, por exemplo por um portfólio que lhe forneça o máximo desempenho ajustado ao risco, a solução que procura é o portfólio de tangência. Em termos geométricos, o retorno e o risco deste portfólio correspondem ao ponto de interseção entre a fronteira eficiente e uma reta que passa no ponto $(R_f, 0)$ (ou na origem se ignorando o portfólio livre de risco) e é tangente à fronteira eficiente, conforme ilustrado na Figura 2.1.

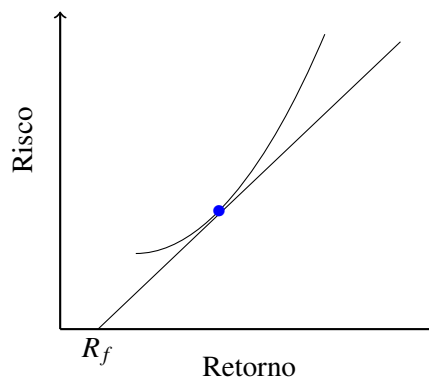


Fig. 2.1 Portfólio tangente

Enquanto que um investidor ao selecionar uma carteira de variância mínima obtém o menor risco possível, nesta carteira de tangência este atingirá a melhor relação entre risco e retorno.

2.1.3 Portfólio de Pesos Iguais

Entre as várias abordagens conhecidas para a constituição de um portfólio de investimento, há estratégias mais complexas do que outras. Entre as mais simples destaca-se a estratégia $1/n$, também conhecida como estratégia de pesos iguais e descrita por DeMiguel *et al.* [9]. Esta estratégia é considerada muito acessível, por ser bastante intuitiva e fácil de implementar. Ela traduz-se na distribuição igualitária dos ativos no portfólio, ou seja, compartilha-se o montante que se tenciona investir uniformemente pelos n ativos pretendidos pelo investidor. O portfólio consiste em manter uma carteira igualmente ponderada em cada um dos fundos de investimento disponíveis para investimento, sendo isto conseguido escolhendo os pesos todos iguais, ou seja, $w_i = \frac{1}{n}$, para cada ativo i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Esta estratégia é de implementação fácil, pois não depende das estimativas dos momentos dos retornos dos ativos nem de técnicas de otimização. Desta forma, é muito utilizada como regra simples de alocação de riqueza entre ativos. Além disso, apesar de ser considerada uma estratégia elementar, ela é um bom indicador comparativo, tendo sido aplicada por vários autores, como Behr *et al.* [2], Duchin [11] e DeMiguel *et al.* [8].

2.1.4 Portefólio de Contribuições de Risco Iguais

Tendo por objetivo aumentar a diversificação relativamente a um portefólio com variância mínima, Maillard *et al.* [19] introduzem o portefólio de contribuições de risco iguais, também conhecido como portefólio de paridade de risco, e que iremos designar por ERC³. Esta abordagem à otimização de carteiras de investimento pretende ir ao encontro de um portefólio que inclua uma variedade de ativos, em que as contribuições de cada um deles para o risco da carteira tenham um peso tão semelhante quanto possível. Desta forma, esta estratégia não tem em conta o retorno esperado da carteira, mas sim a volatilidade dos vários ativos e a correlação do risco entre aqueles que pertencem à carteira em questão. De outro modo, o foco principal desta estratégia é a alocação dos recursos, igualando as contribuições de risco para os ativos que compõem a carteira.

O trabalho [19] apresentou um método para calcular os riscos associados a cada ativo. Considerando que existem n ativos num determinado portefólio, $i = 1, 2, \dots, n$, devem conhecer-se a variância de cada ativo individual, σ_i^2 , bem como a covariância entre cada par de ativos, σ_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$. Então, a volatilidade da carteira é dada por:

$$\sigma(w) = \sqrt{w^T \Sigma w},$$

onde, tal como anteriormente, w é um vetor com n componentes, cada uma representando o peso de um ativo no portefólio com a distribuição w_1, w_2, \dots, w_n . A matriz Σ representa a matriz de covariâncias, definida anteriormente.

A contribuição marginal ao risco para um qualquer ativo i é dada por:

$$\partial_{w_i} \sigma(w) = \frac{\partial \sigma(w)}{\partial w_i} = \frac{w_i \sigma_i^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^n w_j \sigma_{ij}}{\sigma(w)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

e representa a mudança na volatilidade do portefólio relativamente a uma mudança do peso do ativo i . Conhecendo as contribuições marginais de cada ativo, é possível determinar as contribuições totais de cada um, dadas por:

$$\sigma_i(w) = w_i \times \partial_{w_i} \sigma(w), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Como referido anteriormente, a volatilidade pode ser calculada por $\sigma(w) = \sqrt{w^T \Sigma w}$. Além disso, corresponde à soma das contribuições totais ao risco de cada ativo, $\sigma_i(w)$, ou seja,

$$\sigma(w) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(w).$$

³Do inglês, *equally-weighted risk contributions*

Num trabalho de 2012, Bruder e Roncalli [4] exibiram uma fórmula alternativa para o cálculo da contribuição marginal ao risco, nomeadamente,

$$\partial_{w_i} \sigma(w) = \frac{(\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \Sigma w}} = \frac{(\Sigma w)_i}{\sigma(w)}.$$

Utilizando esta notação, a contribuição ao risco de cada ativo pode ser escrita como:

$$\sigma_i(w) = w_i \times \frac{(\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$

e, portanto, para haver igualdade nas contribuições de risco, estas devem satisfazer $\sigma_1(w) = \sigma_2(w) = \dots = \sigma_n(w)$, ou seja,

$$w_i \times \frac{(\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \Sigma w}} = w_j \times \frac{(\Sigma w)_j}{\sqrt{w^T \Sigma w}}, \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n,$$

onde $(\Sigma w)_i$ denota a i -ésima componente do vetor Σw . Daqui se conclui que:

$$w_i \times (\Sigma w)_i = w_j \times (\Sigma w)_j, \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n,$$

e então, um portfólio com a estratégia ERC pode ser definido da seguinte forma:

$$\left\{ w \in [0, 1]^n : \sum_{i=1}^n w_i = 1; \quad w_i \times (\Sigma w)_i = w_j \times (\Sigma w)_j, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Por fim, denota-se por $c_i(w)$ a contribuição ao risco relativa a cada ativo dada por:

$$c_i(w) = \frac{w_i \times \partial_{w_i} \sigma(w)}{\sqrt{w^T \Sigma w}} = \frac{\sigma_i(w)}{\sigma(w)}, \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

As estratégias de pesos iguais, de variância mínima e de contribuições de risco iguais têm ideias base com semelhanças. No primeiro caso impõe-se igualdade de pesos dos ativos,

$$w_i = w_j;$$

no segundo a igualdade é das contribuições marginais ao risco dos ativos

$$\partial_{w_i} \sigma(w) = \partial_{w_j} \sigma(w);$$

e no terceiro a igualdade das contribuições totais ao risco de todos os ativos

$$w_i \times \partial_{w_i} \sigma(w) = w_j \times \partial_{w_j} \sigma(w).$$

Em Maillard *et al.* [19], comparam-se estas três estratégias, obtendo-se a seguinte relação entre as respetivas volatilidades:

$$\sigma_{MV} \leq \sigma_{ERC} \leq \sigma_{\frac{1}{n}}, \quad (2.9)$$

indicando portanto que o risco obtido ao completar a estratégia de diversificação ERC se situa entre os riscos das estratégias de MV e de $1/n$.

Maillard *et al.* [19] propuseram um problema de otimização análogo ao problema da carteira de variância mínima, acrescido de uma restrição adicional dependente de um parâmetro c para determinar o portefólio ERC:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sqrt{w^T \Sigma w} \\ \text{s. a.} \quad & \sum_{i=1}^n \ln w_i \geq c \\ & e^T w = 1 \\ & w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

O parâmetro c , designado por coeficiente de diversificação, pode ser modificado e, dependendo do seu valor, a otimização do portefólio pode originar um dos portefólios anteriores: $\frac{1}{n}$ ou MV. Quando o valor de c é muito pequeno, $-\infty$, obtém-se o portefólio de variância mínima, portefólio este que possibilita a menor volatilidade. Todavia, se $c = -n \ln n$, com n o número de ativos no portefólio, então o portefólio resultante é o de pesos iguais. No entanto, $c \in]-\infty, -n \ln n[$ é demasiado incerto, para se resolver o modelo de otimização, portanto a utilidade deste modelo para a determinação de portefólios é reduzida.

Entende-se que este modelo, pelo aspeto apresentado, não será o mais eficaz a otimizar carteiras de investimento, sendo mais abordado como uma ferramenta didática e não tanto para a resolução de problemas de otimização. Outro motivo, para a não utilização deste modelo, é o facto de que os mercados financeiros que serão expostos e manuseados, nesta dissertação, são de tamanho relativamente pequeno, logo não necessitam de um modelo complexo para grandes dimensões. Em alternativa, o mesmo trabalho propõe a resolução do programa de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i(\Sigma w)_i - w_j(\Sigma w)_j)^2 \\ \text{s. a.} \quad & e^T w = 1 \\ & w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{2.10}$$

cuja função objetivo adquire o valor mínimo, ou seja, o valor 0, quando,

$$w_i(\Sigma w)_i = w_j(\Sigma w)_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

isto é, quando as contribuições ao risco dos diferentes ativos no portefólio se igualam.

2.2 Modelo de Seleção de Portefólios Tangentes e Diversificados

A otimização do rácio de Sharpe tem a vantagem de refletir tanto o retorno como o risco dos diversos ativos. No entanto, tipicamente estes portefólios são pouco diversificados e podem traduzir-se em maus resultados se alguns dos ativos escolhidos tiverem um rendimento efetivo abaixo do esperado. Uma estratégia utilizada para a redução de risco e maximização de ganhos é a diversificação de investimentos, que consiste em alocar recursos em diferentes ativos financeiros, de modo a que o desempenho negativo de um não se traduza em perdas para o investidor. Esta diversificação é uma

tentativa de resistir à imprevisibilidade vinculada aos mercados financeiros e esta é uma das motivações para o estudo do portfólio com contribuições de risco iguais, descrito na secção anterior. Conforme observado nos testes realizados, os portfólios ERC minimizam a diferença entre contribuições de risco dos ativos, mas tendem a distribuir o investimento por todos os ativos disponíveis, o que pode ser pouco desejável na prática.

Conforme descrito na Secção 2.1.2, ao maximizar o índice de Sharpe encontra-se um portfólio com melhor desempenho para um dado risco. Por outro lado, ao minimizar a diferença entre as contribuições de risco, obtêm-se portfólios que apresentam uma diversificação mais elevada do que segundo o modelo anterior (Secção 2.1.4). Pretendemos agora estudar os resultados obtidos ao reunir estas duas características, maximizar o valor do rácio de Sharpe e minimizar a diferença entre as contribuições de risco, aumentando, assim, a diversificação dos portfólios. Daqui em diante este modelo será designado de portfólios tangentes e diversificados, ou TD. O problema pode ser formulado matematicamente como o seguinte problema de otimização biobjetivo:

$$\max \quad \frac{\mu^T w}{\sqrt{w^T \Sigma w}} \quad (2.11a)$$

$$\min \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i(\Sigma w)_i - w_j(\Sigma w)_j)^2 \quad (2.11b)$$

$$\text{s. a.} \quad e^T w = 1 \quad (2.11c)$$

$$w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.11d)$$

Tal como já referido, em geral não existe nenhum portfólio que otimize simultaneamente os dois objetivos, (2.11a) e (2.11b), pelo que, em vez de determinar uma solução para o problema (2.11), procuramos determinar um conjunto de portfólios ditos eficientes, relativamente às duas funções objetivo deste problema, na medida em que não existe nenhum que seja melhor em termos de uma das duas funções objetivo sem piorar a outra. Na prática, fixam-se valores máximos para a diferença entre contribuições de risco e maximizando o índice de Sharpe para cada valor fixado. Ou seja, resolve-se uma sequência de problemas da forma

$$\max \quad \frac{\mu^T w}{\sqrt{w^T \Sigma w}} \quad (2.12a)$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i(\Sigma w)_i - w_j(\Sigma w)_j)^2 \leq \Delta \quad (2.12a)$$

$$e^T w = 1 \quad (2.12b)$$

$$w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.12c)$$

onde $\Delta > 0$ é um parâmetro variável. Em alternativa, pode desagregar-se a restrição (2.12a), substituindo-a pelas n^2 restrições

$$w_i(\Sigma w)_i - w_j(\Sigma w)_j \leq \Delta', \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

com $\Delta' > 0$.

O valor objetivo ótimo do problema (2.10), denotado Δ^* , é o menor valor de Δ' a considerar. Por outro lado, o valor das diferenças de contribuições de risco de uma solução que maximize o rácio de Sharpe, denotado $\hat{\Delta}$, é o maior valor de Δ' a considerar. Como limites intermédios para as diferenças de contribuições de risco, consideram-se valores uniformemente espaçados

$$\Delta' = \Delta^* + k \delta, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

onde $\delta = \frac{\hat{\Delta} - \Delta^*}{n}$. Deste modo, determinam-se $n + 1$ portefólios, que maximizam o índice de Sharpe para cada limite máximo imposto à diferença nas contribuições de risco.

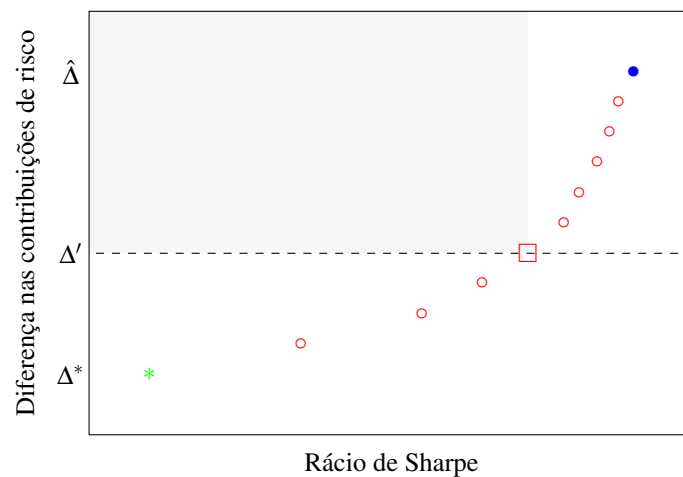


Fig. 2.2 Índices de Sharpe e diferenças nas contribuições de risco eficientes

A Figura 2.2 ilustra os valores do índice de Sharpe e da diferença nas contribuições de risco das soluções obtidas através do processo descrito. O portefólio correspondente à estrela (a verde) é solução ótima do problema (2.10), enquanto que o correspondente ao círculo a cheio (a azul) é solução ótima do problema (2.8). Nota-se, ainda, que qualquer portefólio cujos valores da função objetivo se situem no retângulo sombreado, correspondem a portefólios dominados pela solução representada pelo quadrado, na medida em que apresentam rácio de Sharpe inferior e maior diferença nas contribuições de risco.

2.3 Índices de Avaliação de Portefólios

Uma forma de comparar características de diferentes portefólios, tais como o desempenho, a concentração e a diversidade, baseia-se no cálculo de alguns índices que agora se descrevem.

Tal como referido anteriormente para o portefólio de tangência, William Sharpe introduziu um dos índices mais utilizados na avaliação de desempenho de portefólios, que tem por objetivo analisar e quantificar a relação entre o retorno e o risco associados a um portefólio de ativos. Isto permite ao investidor comparar o valor resultante dos diferentes portefólios em que tem interesse e, assim, tomar a decisão de investir naquele que possua a melhor relação retorno/risco. Essencialmente, um índice de Sharpe elevado significa que a rentabilidade alcançada foi conseguida sofrendo poucos riscos. Por

outro lado, um índice de Sharpe baixo, significa que suportou imensos riscos para conseguir um tal retorno.

Os portfólios podem igualmente ser avaliados relativamente à sua concentração. Por norma um portfólio mais diversificado, ou seja, menos concentrado, é um investimento mais seguro do que um portfólio demasiado concentrado. Para avaliar este aspeto podem aplicar-se, por exemplo, os seguintes índices: a razão de concentração de ordem 4 (CR_4), o índice de Hirschman-Herfindahl (HHI), o índice de entropia de Theil (ET), o índice de Joly (J) e, por fim, o índice de Hill (HI).

O índice de razão de concentração de ordem k (CR_k) avalia a participação dos ativos com maior peso no portfólio. Este é um índice positivo que fornece a parcela do portfólio dos k maiores ativos, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, de acordo com a seguinte expressão:

$$CR_k = \sum_{i=1}^k S_i,$$

onde S_i representa a participação percentual do ativo de ordem i , para $i = 1, 2, \dots, n$, no portfólio. Considera-se apenas a participação dos k ativos com maior peso na carteira. As razões de concentração utilizadas mais frequentemente são o CR_4 e o CR_8 . Quanto maior o valor do índice CR, maior é o poder de mercado exercido pelos k maiores ativos. Os parâmetros de classificação deste índice são estudados no artigo [25].

Em 2007, Cooper [7] apresentou o índice de Hirschman-Herfindahl (HHI), definido por:

$$HHI = \sum_{i=1}^n w_i^2,$$

onde n representa a quantidade de ativos no portfólio e, tal como anteriormente, w_i representa a participação do ativo de ordem i no portfólio, $i = 1, 2, \dots, n$. Consequentemente, quanto mais elevado for o valor de HHI, maior será o nível de concentração entre os ativos pertencentes ao portfólio. Em alternativa, também é utilizado o índice de Joly (J), que corresponde ao índice anterior normalizado, dado por:

$$J = HHI/10^4.$$

O coeficiente de entropia de Theil (ET), também, leva em conta todos os ativos pertencentes ao portfólio. Determina-se este índice através de:

$$ET = \left(\frac{1}{\ln n} \right) \sum_{i=1}^n w_i \log \left(\frac{1}{w_i} \right).$$

Este índice varia entre 0 e 1 e mede o oposto da razão de concentração, diminuindo o seu valor à medida que o grau de concentração dos ativos aumenta. Logo, um resultado do índice ET igual a 0 indica a concentração máxima do mercado, representando uma situação monopolística no portfólio. Pelo contrário, um índice ET igual a 1 indica que a concentração do portfólio é mínima.

Por fim, o índice de Hill (HI) é dado por:

$$HI = \sum_{i=1}^n \sqrt{S_i}.$$

Quanto maior é o valor de HI, maior é a diversidade do portfólio analisado. É de notar que há uma correlação entre o aumento da concentração no portfólio e a redução da sua diversificação, sendo que quanto maior for o valor do índice de HI, maior será a diversificação do portfólio e menor será a concentração deste.

Capítulo 3

Estudo Empírico

Este capítulo é dedicado a um estudo empírico comparativo dos modelos de seleção de portefólios descritos no Capítulo 2. Começamos por descrever os conjuntos de dados utilizados e a forma como foram tratados. Segue-se a análise dos portefólios estudados anteriormente relativamente aos dois conjuntos de dados selecionados: inicialmente para os modelos monobjetivo na Secção 2.1, e mais tarde para o modelo biobjetivo, na Secção 2.2.

3.1 Conjuntos de Dados

O presente estudo incide sobre dois conjuntos de dados: os ativos que compõem o IBEX 35 (abreviatura para *Índice Bursátil Español*), principal índice de referência da bolsa espanhola, constituído por 35 empresas¹; e o NASDAQ (abreviatura de *National Association of Securities Dealers Automated Quotations*), ou NASDAQ 100, um índice que reúne 100 das maiores empresas não financeiras da bolsa eletrónica norte-americana. Este último contém, à data, 102 ações, devido ao facto de a empresa controladora da Google, Alphabet, possuir as ações *GOOGL* e *GOOG* neste índice².

Primeiramente, foram recolhidos os preços diários da base de dados do sítio eletrónico [Investing.com](https://www.investing.com), no período amostral compreendido entre 01-01-2012 e 31-12-2016. Os dados recolhidos foram analisados, por forma a que todos os ativos dos índices referidos anteriormente tivessem cotações nos mesmos dias deste período mencionado. Seguidamente, selecionaram-se aleatoriamente 30 e 50 ativos, para cada um dos índices nos quais incidiu o estudo, estando estes resumidos nas Tabelas 3.1 e 3.2, respetivamente.

Utilizaram-se as ferramentas Excel e Matlab para ordenar dados, efetuar cálculos e determinar as matrizes de covariância necessárias para analisar os dados e expor resultados. Tendo exportado as cotações diárias extraídas do sítio eletrónico [Investing.com](https://www.investing.com) para o Excel, e uma vez definido o período amostral e recolhidos os dados, procedemos à análise descritiva respeitante aos ativos pertencentes aos dois portefólios, assim como o número de observações, os quartis, o máximo e, ainda, o mínimo dos valores apresentados por cada um. Esta informação encontra-se resumida nas Figuras 3.1 e 3.2, e exposta nas Tabelas A.1 e A.2..

¹Informação consultada a 05-01-2021, em <https://www.investing.com/indices/spain-35-components>.

²Informação consultada a 05-01-2021, em <https://www.investing.com/indices/nq-100-components>.

Tabela 3.1 IBEX: Acrónimo e nome dos ativos

Acrónimo	Nome	Acrónimo	Nome	Acrónimo	Nome
ACS	ACS	COL	Inmobiliaria Colonial	MEL	Melia Hotels
ACX	Acerinox	ELE	Endesa	NTGY	Naturgy Energy
ALM	Almirall	ENAG	Enagas	REE	Red Electrica
AMA	Amadeus	FER	Ferrovial	REP	Repsol
ANA	Acciona	GRLS	Grifols	SABE	Banco de Sabadell
BBVA	BBVA	IAG	ICAG	SAN	Santander
BKIA	Bankia	IBE	Iberdrola	SGREN	Gamesa
BKT	Bankinter	IDR	Indra A	SLRS	Solaria
CABK	CaixaBank	ITX	Inditex	TEF	Telefonica
CIEA	Cie Automotive	MAP	Mapfre	VIS	Viscofan

Tabela 3.2 NASDAQ: Acrónimo e nome dos ativos

Acrónimo	Nome	Acrónimo	Nome	Acrónimo	Nome
AAPL	Apple	CSX	CSX	NFLX	Netflix
ADBE	Adobe	CTAS	Cintas	NTES	NetEase
ADI	Analog	EA	Electronic Arts	PAYX	Paychex
ADP	ADP	EBAY	eBay	PEP	PepsiCo
ADSK	Autodesk	FAST	Fastenal	QCOM	Qualcomm
ALXN	Alexion	FISV	Fiserv	ROST	Ross Stores
AMD	AMD	GILD	Gilead	SBUX	Starbucks
ANSS	ANSYS	ILMN	Illumina	SGEN	Seagen
AVGO	Broadcom	INTC	Intel	SWKS	Skyworks
ATVI	Activision Blizzard	ISRG	Intuitive Surgical	TMUS	T-Mobile
BIDU	Baidu	MAR	Marriott	TSLA	Tesla
BIIB	Biogen	MCHP	Microchip	TXN	Texas Instruments
CDNS	Cadence Design	MELI	MercadoLibre	VRTX	Vertex Pharmaceuticals
CERN	Cerner	MNST	Monster Beverage	WBA	Walgreens Boots
CMCSA	Comcast	MRVL	Marvell	XEL	Xcel Energy
CPRT	Copart	MSFT	Microsoft	XLNX	Xilinx
CSCO	Cisco	MXIM	Maxim		

Seguidamente foram calculados os retornos contínuos de cada ativo i no dia j , expressos por:

$$R_{ij} = \ln \left(\frac{P_{ij}}{P_{ij-1}} \right), \quad (3.1)$$

onde P_{ij} denota o preço do ativo i no dia j . A escolha da utilização de retornos contínuos em vez de retornos simples deve-se às suas propriedades matemáticas e de modelação [22], tais como a log-normalidade, a estabilidade numérica e o facto de serem aditivos no tempo.

Os portefólios são constituídos pelos dados de 30 e 50 ativos, respeitantes aos índices IBEX e NASDAQ, respetivamente. Estes dados são 1279 e 1259 preços diários ajustados, relativamente a

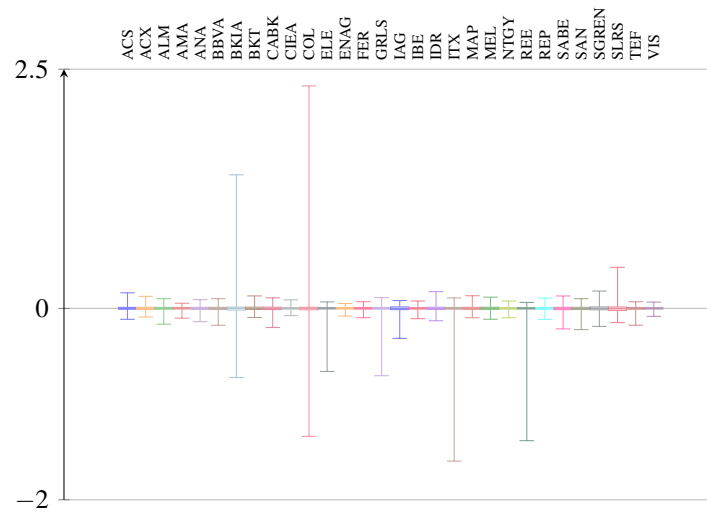


Fig. 3.1 Diagramas de extremos e quartis para IBEX: Análise descritiva dos retornos dos ativos

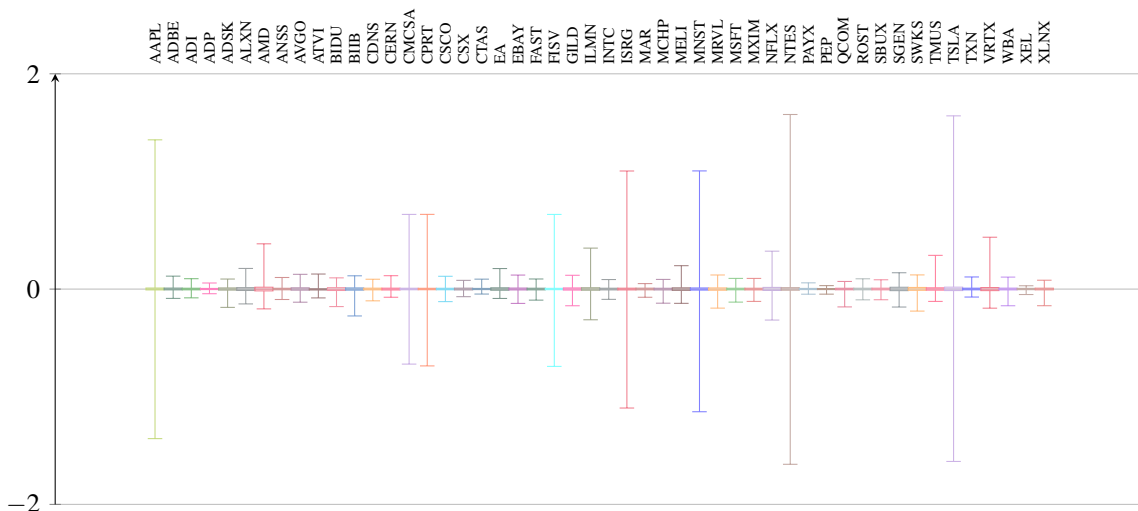


Fig. 3.2 Diagramas de extremos e quartis para NASDAQ: Análise descritiva dos retornos dos ativos

cada portfólio para cada ativo. Conseqüentemente, são calculados 1278 e 1258 retornos diários, respetivamente, através da equação (3.1). Os retornos esperados são dados pela média dos retornos contínuos dos ativos que compõem o portfólio, apresentados nas Tabelas 3.3 e 3.4. Este retorno esperado representa uma expectativa sobre o retorno a atingir no futuro pelo portfólio, já que o retorno efetivo pode ser diferente do esperado.

Tabela 3.3 IBEX: Retornos esperados e variâncias dos ativos

Ativo	Retorno esperado	Variância	Ativo	Retorno esperado	Variância
ACS	0.00021	0.0201	IAG	0.00083	0.0244
ACX	0.00017	0.0202	IBE	0.00016	0.0150
ALM	0.00081	0.0186	IDR	0.00004	0.0226
AMA	0.00097	0.0135	ITX	-0.00053	0.0473
ANA	0.00002	0.0211	MAP	0.00012	0.0201
BBVA	-0.00002	0.0205	MEL	0.00077	0.0201
BKIA	-0.0019	0.0734	NTGY	0.00022	0.0156
BKT	0.00067	0.0217	REE	-0.00049	0.0411
CABK	-0.00009	0.0220	REP	-0.00048	0.0206
CIEA	0.00093	0.0158	SABE	-0.00042	0.0244
COL	0.00078	0.0844	SAN	0.00000	0.0215
ELE	0.00016	0.0234	SGREN	0.0013	0.0292
ENAG	0.0004	0.0133	SLRS	-0.00032	0.0423
FER	0.00042	0.0148	TEF	-0.00033	0.0169
GRLS	0.00031	0.0255	VIS	0.00037	0.0133

Na Tabela 3.3, que apresenta os retornos esperados dos ativos do índice da Bolsa Espanhola, verifica-se que o ativo com o melhor retorno é o ativo SGREN, com um retorno de 0.0013. Seguem-se os ativos AMA e CIEA, com retornos de 0.00097 e 0.00093, respetivamente. Um investidor sem preocupações relativamente ao risco dos ativos, investiria todo o seu capital no ativo com maior retorno, neste caso o ativo SGREN. No entanto, o risco é uma característica relevante quando se abordam portefólios de ativos, conforme se verá em seguida.

A variância dos retornos mede a volatilidade em torno da média, podendo ser empregue como medida de risco. O risco de um ativo é medido pela volatilidade dos retornos, representada pelo desvio padrão da amostra, ou seja, o desvio padrão revela o risco do investimento inerente. Assim, quanto maior é a variância, mais arriscado é o ativo correspondente, ou seja, investidores avessos ao risco investem, preferencialmente, em ativos com risco menor, logo com menor variância.

Os ativos com maiores variâncias no portefólio IBEX são: COL com variância de 0.0844 e BKIA com 0.0734, seguidos dos ativos ITX e SLRS com variâncias de 0.0473 e 0.0423, respetivamente. Por terem maiores variâncias, estes ativos possuem maior risco do que os restantes. Desta forma, serão os ativos preferidos por um investidor que não seja avesso ao risco. Para investidores avessos ao risco, os ativos preferidos serão aqueles que possuem menor variância, tais como o ENAG, VIS e AMA, com variâncias de 0.0133, 0.0133 e 0.0135, respetivamente.

Tabela 3.4 NASDAQ: Retornos esperados e variâncias dos ativos

Ativo	Retorno esperado	Variância	Ativo	Retorno esperado	Variância
AAPL	0.00054	0.0577	INTC	0.00031	0.0141
ADBE	0.00102	0.0153	ISRG	0.00023	0.0476
ADI	0.00056	0.0147	MAR	0.00081	0.0141
ADP	0.00061	0.0100	MCHP	0.00046	0.0147
ADSK	0.00070	0.0198	MELI	0.00051	0.0239
ALXN	0.00044	0.0237	MNST	0.00084	0.0499
AMD	0.00058	0.0363	MRVL	0.00001	0.0218
ANSS	0.00038	0.0138	MSFT	0.00067	0.0147
AVGO	0.0014	0.0209	MXIM	0.00030	0.0157
ATVI	0.00086	0.0178	NFLX	0.0020	0.0339
BIDU	0.00022	0.0231	NTES	0.0012	0.0687
BIIB	0.00073	0.0214	PAYX	0.00055	0.0101
CDNS	0.00071	0.0145	PEP	0.00036	0.0084
CERN	0.00033	0.0157	QCOM	0.00013	0.0157
CMCSA	0.00027	0.0358	ROST	0.00081	0.0143
CPRT	0.00013	0.0364	SBUX	0.00071	0.0139
CSCO	0.00038	0.0143	SGEN	0.00093	0.0267
CSX	0.00039	0.0150	SWKS	0.0012	0.0256
CTAS	0.00095	0.0110	TMUS	0.0012	0.0233
EA	0.0010	0.0214	TSLA	0.0016	0.0714
EBAY	0.00064	0.0170	TXN	0.00071	0.0143
FAST	0.00006	0.0154	VRTX	0.00066	0.0324
FISV	0.0010	0.0301	WBA	0.00073	0.0156
GILD	0.00098	0.0191	XEL	0.00032	0.0099
ILMN	0.0011	0.0267	XLNX	0.00049	0.0151

De acordo com a Tabela 3.4, os ativos com maiores retornos são: NFLX com retorno de 0.0020, TSLA com 0.0016, AVGO com retorno de 0.0014, seguido de NTES, TMUS e SWKS, todos com 0.0012. Em relação aos valores correspondentes das variâncias dos ativos, verifica-se que os ativos com maiores valores são: TSLA, com variância de 0.0714, e NTES, com 0.0687, seguidos dos ativos AAPL e MNST com variâncias de 0.0577 e 0.0499, respectivamente. Uma vez que estes ativos têm maiores variâncias, possuem maior risco e, assim, serão os ativos ótimos para um investidor que não seja avesso ao risco. Para investidores avessos ao risco, os ativos preferenciais serão aqueles que possuem menor variância, tais como o PEP, XEL, ADP e PAYX, com variâncias de 0.0084, 0.0099, 0.0100 e 0.0101, respectivamente.

Deve ter-se em conta que a variância dos retornos não diferencia os ganhos das perdas. Por exemplo, na Tabela 3.3 verifica-se que o ativo COL possui uma variância elevada, de 0.0844, devido aos elevados ganhos ao longo do tempo que provocam um retorno esperado de 0.00078. Todavia, o ativo SLRS possui também uma variância elevada, 0.0423, mas devido às elevadas perdas ao longo do tempo, apresenta um retorno esperado de -0.00032 .

Como referido, um investimento com elevada volatilidade pode representar uma oportunidade de obter ganhos altos num curto período de tempo ou um risco de perder dinheiro nesse período. Assim

sendo, mais do que interessar-se apenas pela variância dos ativos; um investidor deve estudar bem o mercado onde vai aplicar o seu dinheiro, os ativos em que pretende investir e o impacto que podem causar num investimento.

3.2 Resultados para Modelos de Seleção de Portefólios

Com base nos dados já determinados e apresentados na secção anterior é, então, possível calcular a matriz de covariâncias, indispensável para aplicar alguns dos métodos descritos no Capítulo 2, como os portefólios de variância mínima, de tangência e de contribuições de risco iguais. Uma vez conhecidos estes valores, procedeu-se à implementação dos diferentes métodos recorrendo ao Matlab. O portefólio de variância mínima foi obtido através da aplicação da rotina `quadprog`, enquanto que os portefólios de tangência e de contribuições de risco iguais resultaram da aplicação da rotina `fmincon`. As distribuições de pesos dos vários ativos obtidas pelos vários métodos são ilustradas na Figura 3.3 e compiladas nas Tabelas A.3 e A.4 do Apêndice A.2.

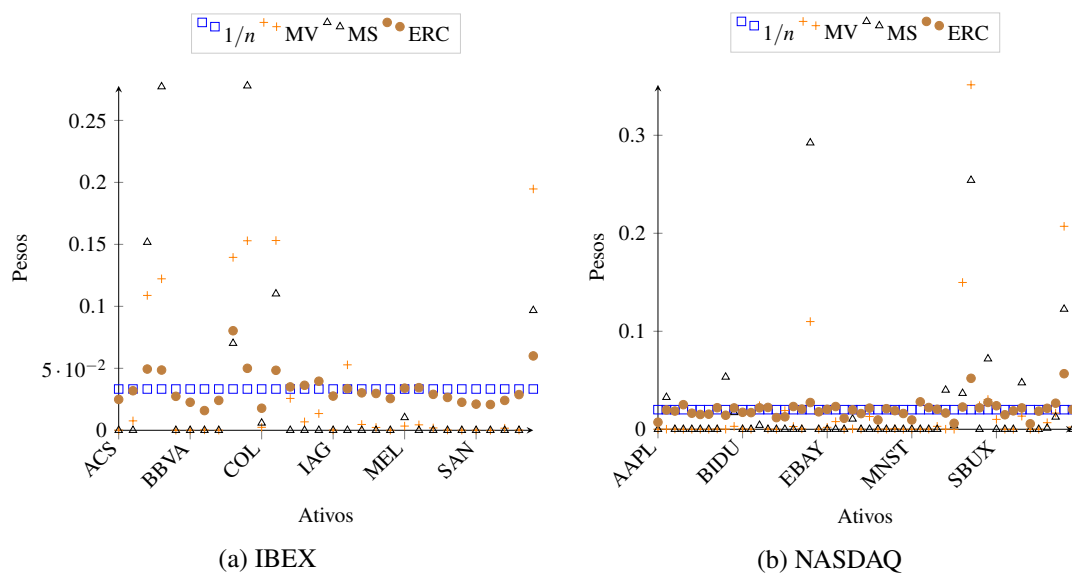


Fig. 3.3 Pesos dos ativos nos portefólios

A Figura 3.3a apresenta os pesos dos ativos do índice IBEX, para cada portefólio. Conforme referido anteriormente, o portefólio de pesos iguais é um portefólio simples onde há igualdade de pesos para todos os ativos e, desta forma, todos os pesos são $1/30$, ou seja, aproximadamente 3.33%.

Outro portefólio abordado, foi o portefólio de variância mínima. De acordo com a Figura 3.3a, o ativo VIS é aquele que possui o maior peso e, isto, deve-se ao facto de este ser o ativo que tem a menor variância. Seguem-se os ativos ENAG e CIEA, igualmente com pesos elevados neste portefólio. Um aspeto relevante, refere-se aos ativos AMA e ENAG. O primeiro possui 0.00097 de retorno e 0.0135 de variância, enquanto que para o segundo os valores são de 0.0004 e 0.0133, respetivamente. De acordo com a Tabela 3.3, conclui-se que o ativo ENAG possui peso maior do que o primeiro, o que se deve ao facto de este ativo possuir menor variância, apesar de ter um retorno maior. Ou seja, neste caso o facto de possuir menor risco é crucial.

No caso do portefólio de tangência ou de Sharpe máximo, MS, observa-se que os ativos com maior peso, quando considerando o índice IBEX são: CIEA, AMA e ALM, ativos estes que possuem retornos elevados e variâncias baixas. Por exemplo, o ativo ENAG possui uma variância baixa, mas como também tem um retorno baixo, relativamente aos restantes, então este ativo possui um peso menor quando comparado com CIEA, AMA ou até com ALM, que são ativos com risco baixo, mas mais elevado do que o do ativo ENAG, e retorno mais alto. Este exemplo mostra que o portefólio MS se concentra na relação entre risco e retorno, não se limitando apenas a observar os dois isoladamente. É de notar que o mesmo se verifica para outros ativos, como é o caso do SGREN, que apesar de ter um retorno ótimo não aparece neste portefólio, devido a possuir um risco elevado.

Por último, consideram-se os pesos respeitantes ao portefólio obtido pelo método de contribuições de risco iguais, ERC. Estes pesos são relativamente próximos uns dos outros e são também muito semelhantes aos obtidos através do portefólio $1/n$, como se verifica na Figura 3.3a.

A Figura 3.3b ilustra os pesos dos ativos do índice NASDAQ, para os mesmos portefólios. Tal como para o resultado obtido para o índice IBEX, no portefólio $1/n$ distribuem-se, de igual forma, o investimento pelos ativos disponíveis, pelo que todos os ativos têm peso de $1/50$, ou seja, de 2%.

Ao minimizar o risco, isto é, no portefólio de variância mínima, verifica-se que o ativo PEP possui o maior peso, o que se deve ao facto de este ser o ativo com a menor variância. Pelo contrário, todos os ativos com um valor de risco elevado têm peso nulo neste portefólio.

Os ativos com maior peso no portefólio de tangência são: o CTAS, o PEP e o XEL, uma vez que possuem simultaneamente retornos elevados e variâncias baixas. Este portefólio foca-se na relação de retorno/risco, não se limitando aos dois valores isoladamente. Além disso, por exemplo os ativos ROST e NTES, têm retornos 0.00081 e 0.0012, e variâncias 0.0143 e 0.0687, respetivamente – Tabela 3.4. O segundo destes ativos não possui apenas um retorno elevado, mas, também, uma variância elevada em comparação com o primeiro. Por este motivo, o ativo ROST possui maior peso, dado que é valorizada esta relação entre retorno e risco e é dada mais importância, neste portefólio, aos ativos que possuem um melhor rácio de Sharpe.

Por fim, a Figura 3.3b mostra novamente que os pesos obtidos para os portefólios $1/n$ e de contribuições de riscos iguais são muito próximos uns dos outros. Por outro lado, o portefólio MV tem valores mais dispersos, ao passo que o portefólio MS tem imensos pesos iguais a 0, enquanto que os restantes pesos são distanciados.

A Figura 3.4 ilustra o retorno e o risco dos portefólios obtidos para os dois índices considerados, enquanto que os valores correspondentes são listados de forma exaustiva nas Tabelas A.5 e A.6, no Apêndice A.3. Uma vez obtidos os valores do retorno e do risco para cada um dos portefólios dos dois índices da bolsa, foram calculadas as contribuições de risco de forma a comprovar se, de facto, os portefólios ERC possuem contribuições de risco com valores próximos. Os valores das contribuições de risco dos diferentes ativos para os quatro portefólios são apresentados no Apêndice A.4.

Relativamente ao índice IBEX, constata-se que é satisfeita a condição (2.9), isto é, que a volatilidade do portefólio MV é a menor e a do portefólio $1/n$ a mais elevada, encontrando-se a volatilidade do portefólio ERC entre as outras duas. A volatilidade do portefólio MS situa-se entre as dos portefólios MV e ERC. Além disso, o portefólio MS é aquele que possui um retorno mais elevado. A Figura 3.4b conduz a uma conclusão semelhante relativamente ao índice NASDAQ. Além disso,

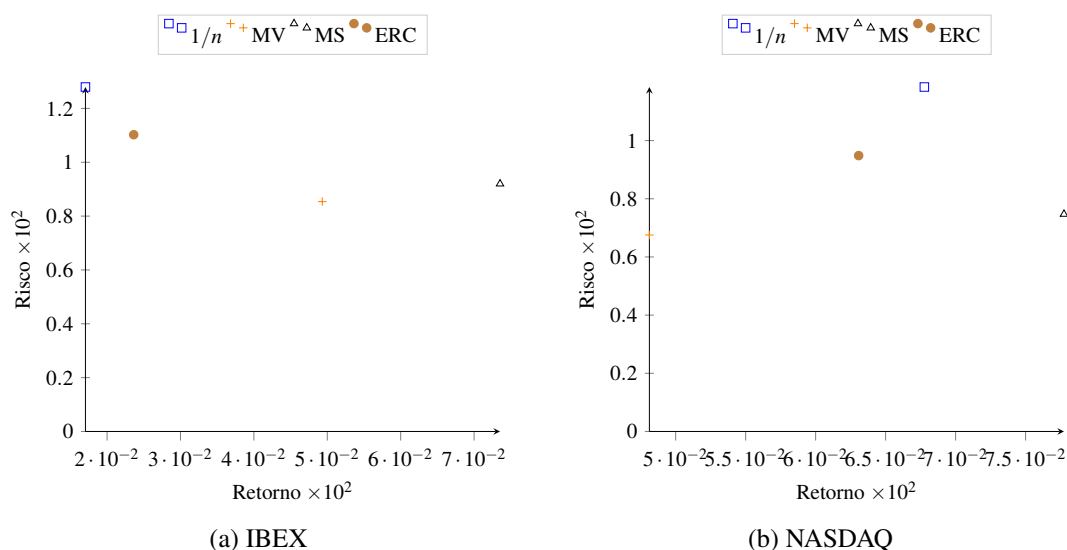


Fig. 3.4 Risco e retorno dos portefólios

apesar de não haver uma relação constante entre os retornos dos vários portefólios, o portefólio MS destaca-se, para ambos os índices, como sendo o de maior retorno.

Tabela 3.5 IBEX: Índices para cada portefólio

	Portefólio 1/n	Portefólio MV	Portefólio MS	Portefólio ERC
IS	0.013329*	0.057753	0.079941*	0.021438
CR ₄	13.3200*	64.0200	81.6900*	20.7430
J	0.0333*	0.1348	0.2036*	0.0389
ET	1*	0.6394	0.5087*	0.9787
HI	54.7449*	34.5711	25.2918*	53.8153

Para completar a comparação dos diferentes portefólios, as Tabelas 3.5 e 3.6 mostram os valores dos índices apresentados no Capítulo 2. O portefólio de tangência, MS, possui maior valor de índice de Sharpe do que os restantes quando aplicado ao IBEX. Este portefólio apresenta um risco baixo, o segundo mais baixo dos cinco métodos, e o melhor retorno, por isso isto perfaz um bom índice de Sharpe, o que por sua vez indica um bom desempenho deste portefólio. Por outro lado, o portefólio de pesos iguais tem índice de Sharpe mais baixo do que os outros, pois apresenta simultaneamente o menor retorno e o maior risco, o que resulta num índice de Sharpe baixo.

Seguidamente analisa-se a concentração do portefólio através dos quatro maiores ativos, segundo o índice CR₄. Relativamente a este índice, verifica-se que o portefólio de MS é, novamente, o que tem o maior valor. De facto, o portefólio tangente é geralmente constituído por poucos ativos com pesos elevados e os restantes nulos. O portefólio 1/n é o que tem o valor mais baixo, indicando ausência de concentração. O próximo índice da tabela, índice Joly, também mede a concentração do portefólio, por isto mesmo, é expectável que as conclusões vão ao encontro das referidas. Isto acontece pois apresenta a seguinte ordem crescente de portefólios: 1/n, ERC, MV e, por fim, MS, sendo que quanto mais elevado for o seu valor, maior é o nível de concentração do portefólio correspondente.

O índice de entropia de Theil varia entre 0 e 1, e tem uma interpretação oposta aos anteriores. No caso do portefólio $1/n$, este apresenta valor igual a 1, o que indica a concentração mínima do portefólio. O portefólio com o valor mais reduzido é o portefólio MS, comprovando que possui uma concentração mais elevada do que os restantes métodos de portefólios.

O índice de Hill mede a diversidade e a concentração dos portefólios, havendo uma correlação inversa entre o aumento da concentração e a redução da diversidade. Neste caso, o portefólio mais diversificado é o $1/n$, seguido pelo portefólio do método ERC, e, por último, os menos diversificados são os portefólios de variância mínima e MS.

Tabela 3.6 NASDAQ: Índices para cada portefólio

	Portefólio $1/n$	Portefólio MV	Portefólio MS	Portefólio ERC
IS	0.057229*	0.071237	0.104067*	0.066815
CR ₄	8*	81.8300*	74.0900	16.4100
J	0.0200*	0.2003*	0.1799	0.0238
ET	1*	0.4133*	0.5216	0.9788
HI	70.7107*	34.9155	31.8850*	69.2561

Para o índice NASDAQ, na Tabela 3.6, conclui-se que o portefólio tangente possui o maior valor de índice de Sharpe. Isto deve-se ao facto de possuir um retorno elevado e um risco que é o segundo mais baixo de entre os restantes. Tal como foi observado no índice IBEX, os portefólios de pesos iguais e de contribuições de risco iguais têm valores baixos de IS, porque, mais uma vez, possuem uma volatilidade demasiado alta para o retorno que advém.

Relativamente à concentração do portefólio, é possível verificar que, por ordem crescente, se têm os portefólios: $1/n$, ERC, MS e, por fim, MV, sendo este último o portefólio com maior concentração. De outro modo, apenas alguns ativos detêm pesos mais elevados no portefólio MV. Pelo contrário, o portefólio de pesos iguais possui uma concorrência perfeita entre os seus ativos. Para o índice ET, verifica-se a ordem contrária, uma vez que o valor 1 para o portefólio $1/n$ traduz uma concentração mínima, ao passo que o portefólio MV é aquele que tem o valor mais baixo. Por fim, de acordo com o índice HI, o portefólio $1/n$ é o mais diversificado e o MS, seguido de MV, é o menos diversificado.

3.3 Resultados para Modelos de Seleção de Portefólios Tangentes e Diversificados

Após a análise dos portefólios isolados obtidos segundo cada método, aborda-se agora o cálculo de portefólios apresentado na Secção 2.2, os portefólios de tangência e diversificação, designados abreviadamente por TD, e que pretendem maximizar o rácio de Sharpe, restringindo a diferença entre as contribuições de cada ativo ao risco da carteira. Novamente, os problemas de otimização foram resolvidos recorrendo às rotinas quadprog e fmincon do Matlab.

Conforme descrito anteriormente, para cada conjunto de n ativos calcularam-se n soluções que se situam “entre” aquela que otimiza o rácio de Sharpe e a que otimiza a diferença das contribuições de risco. Os valores das funções objetivo das soluções correspondentes estão representadas na Figura 3.5.

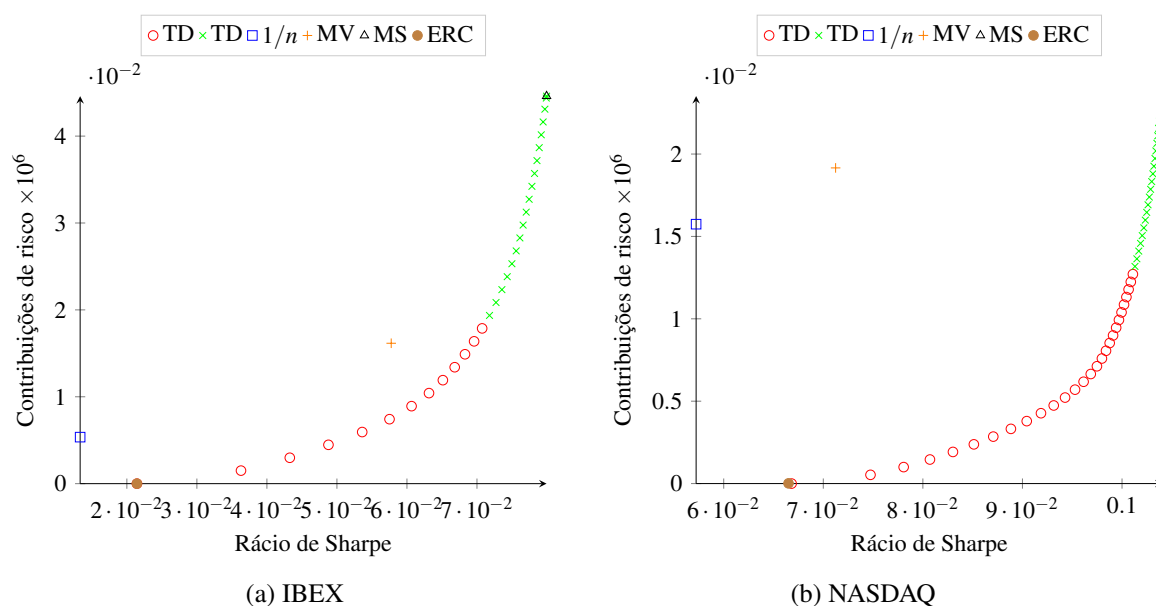


Fig. 3.5 Rácio de Sharpe e diferenças nas contribuições de risco dos portefólios TD

Relativamente ao índice IBEX, Figura 3.5a, a primeira solução, a qual possui o menor rácio de Sharpe, possui este valor pequeno em relação às restantes soluções e as diferenças entre as contribuições de risco são baixas, consistindo num portefólio pouco concentrado, em que todos os ativos presentes no portefólio contribuem de forma quase igual no risco e, por consequente, a diversificação será alta. Observa-se que as soluções sucessivas têm valores crescentes de rácio de Sharpe, assim como das diferenças das contribuições de risco. Isto resulta numa baixa diversificação, pois o portefólio não contém ativos que contribuam de forma igual no risco total, havendo assim um portefólio concentrado que traduz uma baixa diversificação. As conclusões são análogas para o índice NASDAQ, Figura 3.5b. A primeira solução obtida tem diferenças nas contribuições de risco que são baixas e um rácio de Sharpe também ele baixo, sendo que ambos aumentam para os vários portefólios obtidos, características conclusivas de cada vez mais se obterem portefólios com alto desempenho, mas com baixa diversificação, comparativamente com os restantes.

Fazendo uma análise aos valores das diferenças das contribuições de risco dos quatro portefólios descritos anteriormente, para o índice IBEX, conforme era de esperar, observa-se que o portefólio ERC possui um valor quase nulo de diferenças nas contribuições de risco dos ativos e um valor baixo de rácio de Sharpe, enquanto que o portefólio tangente possui os valores mais altos, coincidindo com o último portefólio tangente e diversificado. Estas observações constata-se igualmente para o índice NASDAQ, que se diferencia no facto de o portefólio de pesos iguais possuir diferenças mais elevadas nas contribuições de risco e o portefólio MV possuir, também, diferenças mais elevadas e um rácio de Sharpe mais reduzido, do que o observado para o índice IBEX.

O retorno e o risco não contribuem de forma explícita para a determinação dos portefólios TD, pelo que esses valores são apresentados na Figura 3.6. Considerando estes dois parâmetros podem então distinguir-se dois conjuntos de soluções, assinaladas nas figuras por círculos vermelhos e cruces verdes. Relativamente às segundas, não existe nenhum ponto com maior retorno que tenha simultaneamente um risco melhor, isto é, inferior, enquanto que pelo menos um destes tem melhores

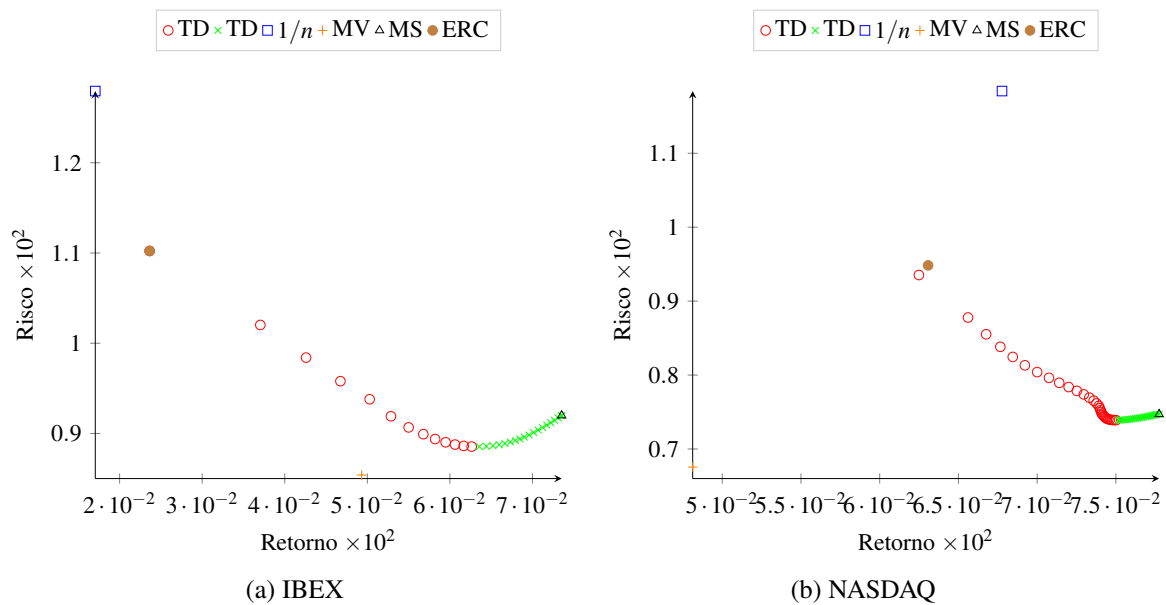


Fig. 3.6 Risco e retorno dos portefólios TD

retorno e risco do que as primeiras. De outro modo, os círculos vermelhos correspondem a soluções dominadas em termos de retorno e risco. Novamente, a análise é semelhante para os dois índices: o risco diminui com o aumento do retorno. A distinção entre pontos descrita acima estende-se à Figura 3.5, verificando-se que as soluções “eficientes” em termos de retorno e risco correspondem a soluções com diversificação média e próximas do ótimo de Sharpe. Isto coincide com o que foi dito acerca do rácio de Sharpe das soluções na Figura 3.5, em que como o risco é alto nas primeiras soluções e o retorno baixo, o que traduz um baixo rácio de Sharpe presente nas soluções iniciais, representadas a vermelho. Já as soluções a verde, correspondem a soluções com um retorno alto e um risco que inicialmente é mais baixo, subindo um pouco logo depois, o que exprime um rácio de Sharpe alto.

Considerando a bolsa espanhola e comparando com os valores do retorno e do risco dos quatro portefólios abordados anteriormente, percebe-se que o portefólio de pesos iguais é aquele que possui menor retorno e maior risco, enquanto que se observa que o portefólio MS possui risco e retorno semelhantes às últimas soluções eficientes e que o portefólio MV é aquele que obtém um retorno médio e um risco mais baixo entre os restantes e entre os portefólios eficientes. Replicando a abordagem para o índice NASDAQ, constata-se que o portefólio MV possui o retorno mais baixo e risco, também, mais reduzido e que o portefólio MS coincide com a última solução obtida pelo método TD.

A Figura 3.7 apresenta a cardinalidade dos portefólios obtidos. Nota-se que as primeiras soluções obtidas, mais diversificadas, possuem uma cardinalidade elevada, fazendo parte da solução quase todos os ativos pertencentes aos portefólios. Estas cardinalidades diminuem para as várias soluções eficientes. Tendo em conta as Figuras 3.5 e 3.6, percebe-se que a cardinalidade das soluções iniciais, representadas por círculos vermelhos, é alta e que essas soluções têm rácio de Sharpe baixo e diversificação é alta. Com efeito, um portefólio com alta cardinalidade, possui mais ativos e, por conseguinte, menor concentração. As soluções representadas por uma cruz verde têm cardinalidade mais baixa e, conseqüentemente, a sua diversificação vai diminuindo. Avaliando a cardinalidade dos

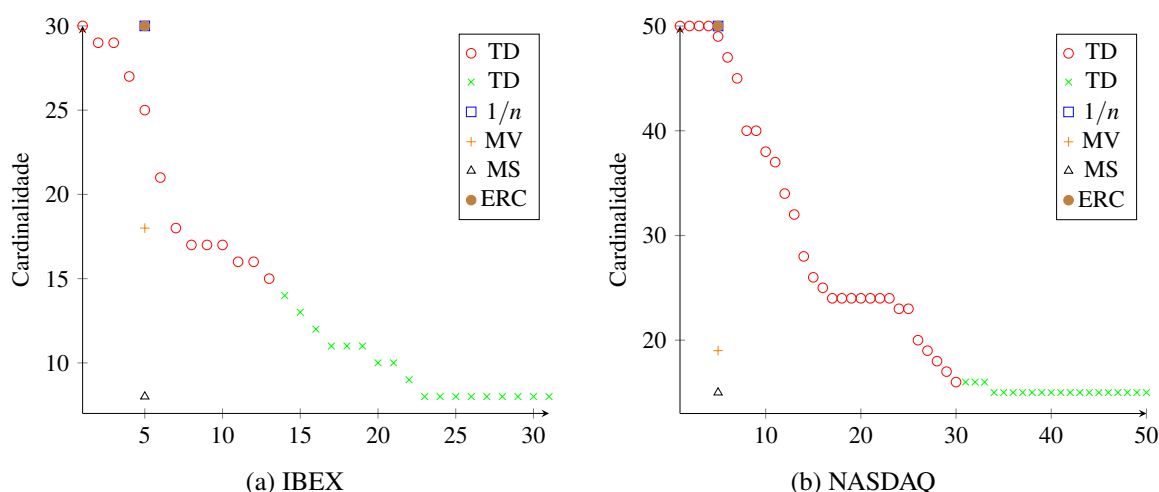


Fig. 3.7 Cardinalidade dos portefólios TD

restantes quatro portefólios estudados, conclui-se que o portefólio que tem a menor cardinalidade é o portefólio MS, o que traduz a sua baixa diversificação. Pelo contrário, os portefólios com pesos iguais e ERC possuem alta cardinalidade, o que resulta da sua alta diversificação. Os portefólios tangentes e diversificados têm cardinalidades intermédias, sendo que a sua cardinalidade diminui gradualmente, como referido anteriormente. Fazendo a análise para o índice NASDAQ, tanto o portefólio de pesos iguais como o portefólio ERC possuem cardinalidades máximas, incluindo todos os ativos, advindo daí a sua alta diversificação. Já o portefólio MS possui a menor cardinalidade, enquanto que o conjunto dos portefólios tangentes e diversificados possuem cardinalidades que vão diminuindo conforme o rácio de Sharpe e as diferenças nas contribuições de risco aumentam, tal como na Figura 3.5.

Em suma, o conjunto de soluções tangentes e diversificadas permite ao investidor conhecer as opções que tem e o que pode esperar de cada uma. Há investimentos para investidores com qualquer perfil. Se valorizando a diversificação da carteira, deve seleccionar-se uma solução em que as diferenças entre as contribuições de risco de cada ativo sejam baixas, sabendo que a probabilidade de haver perdas no seu investimento será muito baixa. Geralmente não existe uma solução ideal, competindo a cada um fazer a escolha do investimento que mais lhe convém.

Na Figura 3.8 mostram-se os vários índices que permitem avaliar os portefólios resultantes do problema de otimização biobjetivo para os índices IBEX e NASDAQ. Nestes gráficos, os índices de concentração, CR4 e o índice Joly, aumentam ao longo das diversas soluções, o que se pode comprovar pelas Tabelas A.15 e A.16. Daqui se conclui que as últimas soluções são as mais concentradas. O índice ET, que também mede a concentração, comporta-se de forma inversa. Finalmente, através do índice de Hill verificamos que as últimas soluções, com menor índice, apresentam menor diversificação, o que, novamente, corrobora as conclusões anteriores. O comportamento dos portefólios para o índice NASDAQ é muito semelhante dos obtidos para a bolsa espanhola.

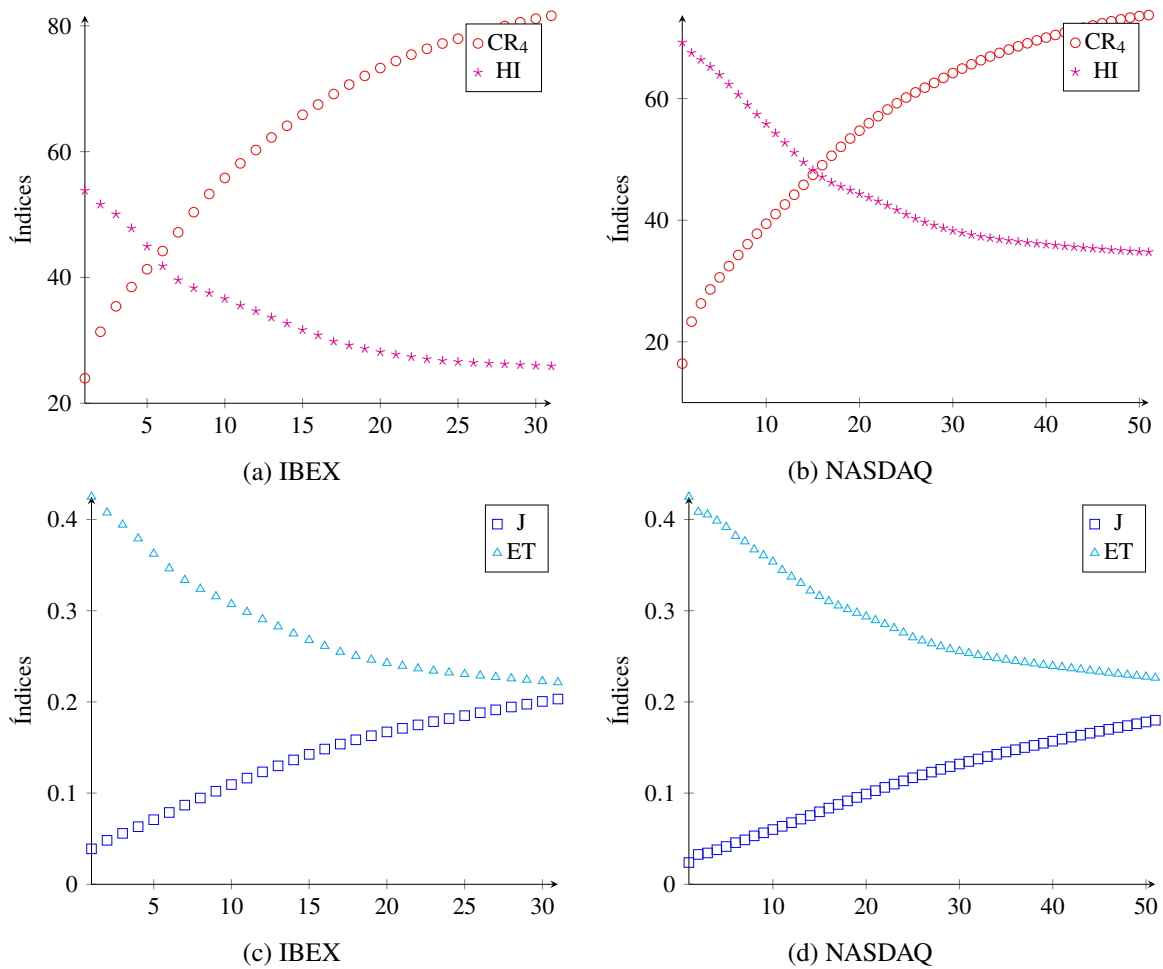


Fig. 3.8 Índices dos portefólios TD

3.4 Notas Finais

Analisando os resultados apresentados anteriormente, comparando os quatro métodos, $1/n$, MV, MS e ERC, constata-se que o método MS é aquele que possui retornos mais elevados, isto deve-se ao facto de serem vários os ativos excluídos do portefólio de MS por não possuírem uma boa relação entre risco e retorno, algo que não se observa, por exemplo, no portefólio MV. Este portefólio perfaz riscos mais baixos, devido às características e objetivos da sua formulação. Desta forma, o portefólio MS produz um maior retorno, incluindo apenas os ativos que lhe são mais favoráveis, ou seja, aqueles que possuem uma boa relação em termos do seu risco e do seu retorno. Comprova-se, também, que o portefólio obtido através do método ERC tem risco intermédio em comparação com os métodos $1/n$ e MV. Observa-se que o portefólio $1/n$ e o ERC são os mais diversificados, devido à ausência de monitoramento dos riscos no portefólio $1/n$, então o seu risco é o mais elevado dos portefólios analisados, algo que o portefólio ERC minimiza.

Estudaram-se também os valores do índice de Sharpe e concluiu-se que o portefólio com melhor desempenho foi o obtido pelo método de tangência, MS. Apresentando este o segundo risco mais

baixo e o retorno mais alto, de entre os demais portefólios, o que resulta num valor ótimo relativamente ao índice de Sharpe.

Em suma, analisando apenas os portefólios dos métodos $1/n$, MV e o método ERC, conclui-se que o portefólio MV é o que possui melhor desempenho, e que este desempenho possui uma menor diversidade. Em comparação com os outros dois portefólios, apesar de este conseguir obter um retorno esperado mais elevado por risco, não é um portefólio que seja diversificado. Por outro lado, analisando globalmente os quatro portefólios, observa-se que o portefólio de MS é que aquele que obtém maior indicação de um bom desempenho.

Relativamente à concentração, conclui-se que o portefólio $1/n$ é o menos concentrado e que o portefólio MS apresenta uma concentração alta, sendo constituído apenas por alguns ativos. Daqui resultam os valores elevados para os índices referidos, sendo os portefólios mais concentrados aqueles que possuem menor diversificação.

Seguidamente, procurou-se maximizar o rácio de Sharpe e minimizar as diferenças que existem nas contribuições de risco dos ativos, desenvolvendo-se os portefólios tangentes e diversificados. Com este problema biobjetivo, conclui-se que o rácio de Sharpe obtido pelos últimos portefólios TD igualam o valor do rácio de Sharpe do portefólio MS. No entanto, os portefólios com menor rácio foram os portefólios de pesos iguais e de ERC, que, mais uma vez, era o esperado, pois estes possuem uma diferença baixa nos valores das contribuições de risco, conclusivas de uma ótima diversificação.

Analisando as cardinalidades, percebemos que os portefólios tangentes e diversificados iniciais apresentam uma cardinalidade alta, significativa de uma boa diversificação tal como os portefólios referidos acima, sendo que, de seguida, observa-se uma descida, em que os últimos portefólios igualam o valor da cardinalidade obtida pelo portefólio de tangência, MS, apresentando a mesma diversificação que este, baixa portanto. Por fim, os índices só vêm confirmar o que foi dito anteriormente, que os portefólios de tangência e de diversificação vão aumentando a sua concentração ao longo das soluções e diminuindo a sua diversificação.

Em suma, com a análise dos gráficos para cada um dos índices conclui-se que há investimentos para cada perfil de investidor. Ou seja, se um investidor procura um portefólio que possua diversificação deve escolher uma solução que lhe permita obter diferenças baixas nas contribuições de risco e, por outro lado, se pretende um bom desempenho do portefólio este tem de optar por uma solução que perfaça um valor elevado de rácio de Sharpe. Não há nenhum portefólio que otimize simultaneamente as duas características a atingir. Desta forma, para alcançar o intermédio dos dois convém ao investidor optar por soluções intermédias que permitam um balanço entre a diversificação e o rácio de Sharpe, características imprescindíveis a um bom investimento.

Capítulo 4

Conclusão

De um modo geral, todos os portfólios de investimento apresentam vantagens e desvantagens, sendo impensável que exista uma única estratégia de otimização de portfólios. Assim, um dos objetivos deste trabalho é apresentar um estudo comparativo entre alguns dos modelos de portfólios existentes. Mais concretamente, compreender o processo de formação de portfólios, apresentar os diversos modelos de portfólios e compará-los, analisando os pontos fortes e fracos de cada um, procurando perceber qual a estratégia de otimização que melhor desempenho e diversificação auferem. Este conhecimento deve permitir a cada investidor optar, segundo as suas preferências, pela opção que mais lhe aprouver. Das conclusões encontradas, destaca-se que o método de Sharpe máximo obteve o maior IS de entre os diferentes métodos analisados, sendo seguido pelo método de variância mínima.

Apesar do melhor desempenho dos portfólios referidos, variância mínima e Sharpe máximo, estas carteiras possuem poucos ativos na sua composição. Estas carteiras são, assim, muito concentradas em poucos ativos, o que resulta na sua baixa diversificação, o que pode conduzir a um aumento do risco. Pelo contrário, os restantes portfólios analisados são diversificados. Em particular, o método de contribuições de risco iguais permite determinar carteiras com um risco intermédio relativamente aos métodos de pesos iguais e de variância mínima, sendo mais diversificadas do que as carteiras obtidas com o método de variância mínima e tão diversificadas quanto as do método de pesos iguais, mas com pesos que permitem que o risco total seja menor do que o risco obtido pela estratégia de pesos iguais. Em suma, quando o portfólio de contribuições de risco iguais é comparado com o de pesos iguais, o primeiro domina o segundo em termos de retorno e de risco, pois possui maiores retornos e menores riscos, algo que se verifica nos resultados apresentados no Capítulo 3, ainda que as distribuições do peso dos ativos de ambos sejam semelhantes.

Ao longo dos anos, tem-se tentado colmatar algumas das desvantagens presentes nos métodos de portfólios que surgiram inicialmente. O portfólio de pesos iguais é de aplicação muito simples, mas possui falta de monitoramento do risco. Já os métodos de variância mínima e de Sharpe máximo possuem as desvantagens de apresentarem carteiras muito concentradas e de não serem equilibrados nas contribuições de risco dos vários ativos. Neste trabalho procurou-se reduzir estas desvantagens incorporando características do modelo de contribuições de risco iguais no modelo de Sharpe máximo, tendo-se apresentado o método de portfólios tangentes e diversificados. Testes realizados com estes portfólios indicaram que a diversificação é resultado das diferenças baixas nas contribuições de risco e pelo índice de Sharpe baixo, devido ao risco alto e ao retorno baixo que as soluções

apresentam. Analisaram-se também as cardinalidades das carteiras tangentes e diversificadas, tendo-se observado que dependem da diversificação, sendo que quanto mais diversificadas as soluções, maior cardinalidade têm.

Uma análise futura do presente trabalho poderia utilizar dados mais completos, ou seja, de um universo mais amplo, com mais ativos, o que permitiria uma melhor visualização em termos da diversificação e do desempenho dos portfólios. Seria igualmente útil verificar os ativos individualmente, eliminando do portfólio aqueles que apresentam retornos negativos, pois estes valores não são benéficos ao seu desempenho.

O cálculo das matrizes de covariância está sujeito a erros de estimação, devido ao seu elevado número de elementos. Alguns autores investigaram este problema e propuseram alternativas para a sua resolução. Por exemplo, Chan *et al.* [5] propõem uma variedade de modelos de risco multi-escala que reduzem o número de parâmetros a serem estimados; Ledoit e Wolf [16] propõem um método bayesiano para estimar a matriz de covariância de modo a eliminar os erros de estimação. Seria interessante implementar estas análises e verificar o impacto das novas estimativas nos resultados.

Por fim, outro aspeto que complementaria este trabalho seria uma análise *out-of-sample* dos dados para cada portfólio, o que permitiria uma comparação mais completa dos resultados.

Bibliografia

- [1] Amenc, N., Goltz, F., Lodh, A., and Martellini, L. (2012). Diversifying the diversifiers and tracking the tracking error: Outperforming cap-weighted indices with limited risk of underperformance. Journal of Portfolio Management, 38(3):72–88.
- [2] Behr, P., Guettler, A., and Miebs, F. (2013). On portfolio optimization: Imposing the right constraints. Journal of Banking & Finance, 37(4):1232–1242.
- [3] Brandt, M. W. (2010). Portfolio choice problems. Handbook of Financial Econometrics, 1:269–336.
- [4] Bruder, B. and Roncalli, T. (2012). Managing risk exposures using the risk budgeting approach. SSRN Electronic Journal.
- [5] Chan, L., Karceski, J., and Lakonishok, J. (1999). On portfolio optimization: Forecasting covariances and choosing the risk model. The review of Financial studies, 12(5):937–974.
- [6] Clarke, R., Silva, H., and Thorley, S. (2011). Minimum-variance portfolio composition. The Journal of Portfolio Management, 37(2):31–45.
- [7] Cooper, M. (2004). When law and social science go hand in glove—usage and importance of local and national news sources: Critical questions and answers for media market analysis. Paper presented at the Telecommunications Policy Research Conference, Arlington, https://research.library.fordham.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1014&context=mcgannon_working_papers&httpsredir=1&referer=, Último acesso a 22 março 2021.
- [8] DeMiguel, V., Garlappi, L., Nogales, F., and Uppal, R. (2009a). A generalized approach to portfolio optimization: Improving performance by constraining portfolio norms. Management Science, 55(5):798–812.
- [9] DeMiguel, V., Garlappi, L., and Uppal, R. (2009b). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/n portfolio strategy? The Review of Financial Studies, 22(5):1915—1953.
- [10] Disatnik, D. and Katz, S. (2012). Portfolio optimization using a block structure for the covariance matrix. Journal of Business Finance & Accounting, 39(5):806–843.
- [11] Duchin, R. and Levy, H. (2009). Markowitz versus the talmudic portfolio diversification strategies. The Journal of Portfolio Management, 35(2):71–74.
- [12] Fama, E. F. and French, K. R. (2004). The capital asset pricing model: Theory and evidence. The Journal of Economic Perspectives, 18(3):25–46.
- [13] Golosnoy, V. (2007). Sequential monitoring of minimum variance portfolio. AStA Advances in Statistical Analysis, 91(1):39–55.
- [14] Kan, R. and Zhou, G. (2007). Optimal portfolio choice with parameter uncertainty. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 42(3):621–656.

- [15] Kourtis, A. (2016). The sharpe ratio of estimated efficient portfolios. Finance Research Letters, 17:72–78.
- [16] Ledoit, O. and Wolf, M. (2003). Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. Journal of empirical finance, 10(5):603–621.
- [17] Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. The Review of Economics and Statistics, 47(1):13–37.
- [18] Lo, A. W. (2002). The statistics of sharpe ratios. Financial Analysts Journal, 58:36–52.
- [19] Maillard, S., Roncalli, T., and Teiletche, J. (2010). On the properties of equally-weighted risk contributions portfolios. The Journal of Portfolio Management, 36(4):60–70.
- [20] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. Journal of Finance, 7(1):77–91.
- [21] Martellini, L. (2008). Toward the design of better equity benchmarks. The Journal of Portfolio Management, 34(4):34–41.
- [22] Nicolau, J. (2009). Econometria financeira. Boletim da Sociedade Portuguesa de Estatística, Outono:23–32.
- [23] Sharpe, W. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. Journal of Finance, 19(3):425–442.
- [24] Sharpe, W. (1994). The sharpe ratio. The Journal of Portfolio Management, 21(1):49–58.
- [25] Silva, J. D. D. (2016). Técnicas para medir concentração de mercado de mídia: modo de usar. Intercom. XVIII Congresso de Ciências da Comunicação na Região Nordeste, Caruaru <https://www.portalintercom.org.br/anais/nordeste2016/resumos/R52-1663-1.pdf>, Último acesso a 22 março 2021.

Anexo A

Resultados computacionais completos

A.1 Análise descritiva dos rendimentos dos ativos

Tabela A.1 IBEX: Análise descritiva dos rendimentos dos ativos

	N.º observações	1.º quartil	Mediana	3.º quartil	Máximo	Mínimo
ACS	1279	-0.0094	0	0.0107	0.1629	-0.1142
ACX	1279	-0.0114	0	0.0115	0.1262	-0.0897
ALM	1279	-0.0087	0	0.0102	0.1017	-0.1653
AMA	1279	-0.0062	0.0011	0.0084	0.0535	-0.1023
ANA	1279	-0.0108	0	0.0107	0.0914	-0.1389
BBVA	1279	-0.0105	0	0.0109	0.1015	-0.1763
BKIA	1279	-0.0174	-0.0007	0.0133	1.3961	-0.7221
BKT	1279	-0.0111	0.0005	0.0131	0.1304	-0.0952
CABK	1279	-0.0120	0	0.0123	0.1110	-0.1997
CIEA	1279	-0.0072	0	0.0083	0.0892	-0.0757
COL	1279	-0.0145	0	0.0121	2.3253	-1.3375
ELE	1279	-0.0066	0.0013	0.0085	0.0681	-0.6591
ENAG	1279	-0.0066	0.0003	0.0080	0.0517	-0.0807
FER	1279	-0.0074	0	0.0088	0.0702	-0.0975
GRLS	1279	-0.0078	0.0002	0.0098	0.1130	-0.7036
IAG	1279	-0.0128	0.001	0.0153	0.0820	-0.3128
IBE	1279	-0.0069	0.0003	0.0073	0.07737	-0.1075
IDR	1279	-0.0111	-0.0003	0.0118	0.1752	-0.1289
ITX	1279	-0.0081	0.0002	0.0097	0.1095	-1.5964
MAP	1279	-0.0107	0.0003	0.0112	0.1322	-0.0976
MEL	1279	-0.0098	0.0008	0.0117	0.1174	-0.1132
NTGY	1279	-0.0082	0.0009	0.0086	0.0777	-0.0978
REE	1279	-0.0064	0.0007	0.0074	0.0626	-1.3825
REP	1279	-0.01	0	0.0099	0.1081	-0.1158
SABE	1279	-0.0129	0	0.0112	0.1299	-0.2143
SAN	1279	-0.0112	0.0006	0.0112	0.1015	-0.2217
SGREN	1279	-0.0141	0.0014	0.0154	0.1813	-0.1883
SLRS	1279	-0.0203	-0.0041	0.0148	0.4293	-0.1484
TEF	1279	-0.009	0	0.0091	0.0693	-0.1757
VIS	1279	-0.0068	0.0005	0.0073	0.0659	-0.0832

Tabela A.2 NASDAQ: Análise descritiva dos rendimentos dos ativos

	N.º observações	1.º quartil	Mediana	3.º quartil	Máximo	Mínimo
AAPL	1259	-0.0075	0.0004	0.0098	1.3866	-1.3891
ADBE	1259	-0.0071	0.0007	0.0093	0.1203	-0.0865
ADI	1259	-0.0068	0.00065	0.0080	0.0966	-0.0813
ADP	1259	-0.0046	0.0007	0.0061	0.0566	-0.0430
ADSK	1259	-0.0092	0.0008	0.0108	0.0934	-0.1699
ALXN	1259	-0.0128	0.0002	0.0134	0.1918	-0.1377
AMD	1259	-0.0166	0	0.0173	0.4206	-0.1838
ANSS	1259	-0.0065	0.0009	0.0076	0.1078	-0.0967
AVGO	1259	-0.0098	0.0013	0.0119	0.1372	-0.1218
ATVI	1259	-0.0084	0.0007	0.0010	0.1399	-0.0819
BIDU	1259	-0.0129	-0.0012	0.0132	0.1044	-0.1625
BIIB	1259	-0.0098	0.0004	0.0110	0.1235	-0.2495
CDNS	1259	-0.0071	0.00047	0.0087	0.0916	-0.1091
CERN	1259	-0.0083	0.0006	0.0087	0.1245	-0.0759
CMCSA	1259	-0.0061	0.0009	0.0079	0.6938	-0.6969
CPRT	1259	-0.0059	0.0006	0.0074	0.6942	-0.7136
CSCO	1259	-0.0063	0	0.0076	0.1190	-0.1165
CSX	1259	-0.0077	0.0006	0.0088	0.0812	-0.0705
CTAS	1259	-0.0046	0.0013	0.0063	0.0924	-0.0461
EA	1259	-0.0102	0.0010	0.0117	0.1909	-0.0870
EBAY	1259	-0.0078	0.0004	0.0097	0.1303	-0.1330
FAST	1259	-0.0072	0.0002	0.0081	0.0939	-0.1026
FISV	1259	-0.0054	0.0012	0.0071	0.6937	-0.7181
GILD	1259	-0.0091	0.0013	0.0109	0.1283	-0.1548
ILMN	1259	-0.0103	0.0011	0.0124	0.3807	-0.2851
INTC	1259	-0.0074	0.0006	0.0081	0.0887	-0.0954
ISRG	1259	-0.0077	0.0003	0.0084	1.0971	-1.1049
MAR	1259	-0.0068	0.0006	0.0086	0.0511	-0.0759
MCHP	1259	-0.0078	0.0005	0.0078	0.0899	-0.1310
MELI	1259	-0.0119	0.0005	0.0119	0.2175	-0.1324
MNST	1259	-0.0091	0	0.0105	1.0979	-1.1394
MRVL	1259	-0.0108	0	0.0111	0.1311	-0.1768
MSFT	1259	-0.0067	0	0.0079	0.0994	-0.1210
MXIM	1259	-0.0075	0	0.0080	0.0992	-0.1144
NFLX	1259	-0.0127	0	0.0156	0.3523	-0.2877
NTES	1259	-0.0102	0.0011	0.0131	1.6220	-1.6276
PAYX	1259	-0.0046	0.0006	0.0063	0.0581	-0.0474
PEP	1259	-0.0045	0.0003	0.0052	0.03217	-0.0470
QCOM	1259	-0.0065	0.0003	0.0078	0.0710	-0.1655
ROST	1259	-0.0066	0.0003	0.0081	0.0957	-0.0998
SBUX	1259	-0.0070	0.0008	0.0085	0.0866	-0.0990
SGEN	1259	-0.0143	0.0009	0.0169	0.1519	-0.1667
SWKS	1259	-0.0114	0.0017	0.0152	0.1318	-0.2044
TMUS	1259	-0.0099	0.0015	0.0121	0.3134	-0.1144
TSLA	1259	-0.0137	0.0011	0.0178	1.6094	-1.6011
TXN	1259	-0.0068	0.0009	0.0084	0.1127	-0.0739
VRTX	1259	-0.0141	0	0.0144	0.4818	-0.1773
WBA	1259	-0.0073	0.0003	0.0089	0.1114	-0.1547

XEL	1259	-0.0053	0.0007	0.0067	0.0310	-0.0505
XLNX	1259	-0.0071	0.0007	0.0085	0.0824	-0.1544

A.2 Pesos dos ativos

Tabela A.3 IBEX: Pesos dos ativos para cada portfólio

Peso dos ativos	Portefólio 1/n	Portefólio MV	Portefólio MS	Portefólio ERC
ACS	0.0333	0.0001	0.0000	0.0249
ACX	0.0333	0.0076	0.0000	0.0319
ALM	0.0333	0.1088	0.1517	0.0494
AMA	0.0333	0.1222	0.2772	0.0486
ANA	0.0333	0.0001	0.0000	0.0274
BBVA	0.0333	0.0001	0.0000	0.0226
BKIA	0.0333	0.0003	0.0000	0.0159
BKT	0.0333	0.0001	0.0000	0.0241
CABK	0.0333	0.1395	0.0702	0.0803
CIEA	0.0333	0.1529	0.2779	0.0500
COL	0.0333	0.0024	0.0059	0.0178
ELE	0.0333	0.0257	0.0000	0.0350
ENAG	0.0333	0.1531	0.1101	0.0484
FER	0.0333	0.0068	0.0000	0.0363
GRLS	0.0333	0.0135	0.0000	0.0396
IAG	0.0333	0.0002	0.0000	0.0276
IBE	0.0333	0.0528	0.0000	0.0336
IDR	0.0333	0.0047	0.0000	0.0302
ITX	0.0333	0.0023	0.0000	0.0297
MAP	0.0333	0.0001	0.0000	0.0256
MEL	0.0333	0.0034	0.0103	0.0340
NTGY	0.0333	0.0044	0.0000	0.0344
REE	0.0333	0.0019	0.0000	0.0290
REP	0.0333	0.0002	0.0000	0.0265
SABE	0.0333	0.0001	0.0000	0.0226
SAN	0.0333	0.0001	0.0000	0.0211
SGREN	0.0333	0.0000	0.0000	0.0208
SLRS	0.0333	0.0017	0.0000	0.0241
TEF	0.0333	0.0002	0.0000	0.0288
VIS	0.0333	0.1947	0.0967	0.0600

Tabela A.4 NASDAQ: Pesos dos ativos para cada portfólio

Peso dos ativos	Portfólio 1/n	Portfólio MV	Portfólio MS	Portfólio ERC
AAPL	0.0200	0.0000	0.0000	0.0072
ADBE	0.0200	0.0001	0.0326	0.0197
ADI	0.0200	0.0002	0.0000	0.0186
ADP	0.0200	0.0000	0.0000	0.0251
ADSK	0.0200	0.0000	0.0000	0.0164
ALXN	0.0200	0.0000	0.0000	0.0151
AMD	0.0200	0.0000	0.0000	0.0154
ANSS	0.0200	0.0003	0.0000	0.0220
AVGO	0.0200	0.0001	0.0533	0.0143
ATVI	0.0200	0.0030	0.0171	0.0218
BIDU	0.0200	0.0004	0.0000	0.0173
BIIB	0.0200	0.0000	0.0000	0.0170
CDNS	0.0200	0.0241	0.0041	0.0219
CERN	0.0200	0.0002	0.0000	0.0223
CMCSA	0.0200	0.0000	0.0000	0.0119
CPRT	0.0200	0.0191	0.0000	0.0127
CSCO	0.0200	0.0028	0.0000	0.0232
CSX	0.0200	0.0004	0.0000	0.0206
CTAS	0.0200	0.1099	0.2923	0.0273
EA	0.0200	0.0001	0.0000	0.0178
EBAY	0.0200	0.0020	0.0000	0.0204
FAST	0.0200	0.0078	0.0000	0.0232
FISV	0.0200	0.0000	0.0000	0.0112
GILD	0.0200	0.0004	0.0105	0.0198
ILMN	0.0200	0.0001	0.0000	0.0160
INTC	0.0200	0.0130	0.0000	0.0216
ISRG	0.0200	0.0001	0.0000	0.0095
MAR	0.0200	0.0001	0.0000	0.0210
MCHP	0.0200	0.0005	0.0000	0.0190
MELI	0.0200	0.0000	0.0000	0.0161
MNST	0.0200	0.0000	0.0000	0.0095
MRVL	0.0200	0.0001	0.0000	0.0280
MSFT	0.0200	0.0001	0.0000	0.0222
MXIM	0.0200	0.0030	0.0000	0.0204
NFLX	0.0200	0.0001	0.0400	0.0166
NTES	0.0200	0.0000	0.0037	0.0061
PAYX	0.0200	0.1498	0.0367	0.0227
PEP	0.0200	0.3515	0.2541	0.0520
QCOM	0.0200	0.0241	0.0000	0.0219

ROST	0.0200	0.0304	0.0719	0.0274
SBUX	0.0200	0.0101	0.0000	0.0240
SGEN	0.0200	0.0000	0.0000	0.0148
SWKS	0.0200	0.0000	0.0000	0.0188
TMUS	0.0200	0.0134	0.0475	0.0218
TSLA	0.0200	0.0000	0.0000	0.0056
TXN	0.0200	0.0000	0.0000	0.0185
VRTX	0.0200	0.0067	0.0012	0.0214
WBA	0.0200	0.0165	0.0125	0.0266
XEL	0.0200	0.2071	0.1226	0.0567
XLNX	0.0200	0.0023	0.0000	0.0201

A.3 Retorno e risco total

Tabela A.5 IBEX: Retorno e risco total dos portfólios

	Portefólio 1/n	Portefólio MV	Portefólio MS	Portefólio ERC
Risco	0.012795	0.008539	0.009199	0.011023
Retorno	0.000171	0.000493	0.000735	0.000236

Tabela A.6 NASDAQ: Retorno e risco total dos portfólios

	Portefólio 1/n	Portefólio MV	Portefólio MS	Portefólio ERC
Risco	0.011842	0.006755	0.007471	0.009353
Retorno	0.000678	0.000481	0.000777	0.000625

A.4 Contribuições de risco

Tabela A.7 IBEX: Contribuições de risco para o portefólio 1/n

$\sigma(w) = 0.01279$	w_i	$\partial_{w_i}\sigma(w)$	$w_i \times \partial_{w_i}\sigma(w)$	$c_i(w)$
ACS	0.0333	0.0148	0.0005	0.0386
ACX	0.0333	0.0114	0.0004	0.0297
ALM	0.0333	0.0068	0.0002	0.0177
AMA	0.0333	0.0068	0.0002	0.0177
ANA	0.0333	0.0135	0.0004	0.0352
BBVA	0.0333	0.0167	0.0006	0.0435
BKIA	0.0333	0.0301	0.0010	0.0784
BKT	0.0333	0.0155	0.0005	0.0404
CABK	0.0333	0.0022	0.0001	0.0057
CIEA	0.0333	0.0068	0.0002	0.0177
COL	0.0333	0.0283	0.0009	0.0737
ELE	0.0333	0.0103	0.0003	0.0268
ENAG	0.0333	0.0069	0.0002	0.0180
FER	0.0333	0.0099	0.0003	0.0258
GRLS	0.0333	0.0084	0.0003	0.0219
IAG	0.0333	0.0132	0.0004	0.0344
IBE	0.0333	0.0109	0.0004	0.0284
IDR	0.0333	0.0120	0.0004	0.0313
ITX	0.0333	0.0126	0.0004	0.0328
MAP	0.0333	0.0145	0.0005	0.0378
MEL	0.0333	0.0106	0.0004	0.0276
NTGY	0.0333	0.0107	0.0004	0.0279
REE	0.0333	0.0112	0.0004	0.0292
REP	0.0333	0.0142	0.0005	0.0370
SABE	0.0333	0.0169	0.0006	0.0440
SAN	0.0333	0.0179	0.0006	0.0466
SGREN	0.0333	0.0182	0.0006	0.0474
SLRS	0.0333	0.0161	0.0005	0.0420
TEF	0.0333	0.0126	0.0004	0.0328
VIS	0.0333	0.0052	0.0002	0.0135

Tabela A.8 IBEX: Contribuições de risco para o portfólio MV

$\sigma(w)=0.0085$	w_i	$\partial_{w_i}\sigma(w)$	$w_i \times \partial_{w_i}\sigma(w)$	$c_i(w)$
ACS	0.0001	0.0111	0.000001	0.0001
ACX	0.0076	0.0086	0.0001	0.0077
ALM	0.1088	0.0092	0.0010	0.1178
AMA	0.1222	0.0083	0.0010	0.1193
ANA	0.0001	0.0102	0.000001	0.0001
BBVA	0.0001	0.0111	0.000001	0.0001
BKT	0.0001	0.0109	0.000001	0.0001
BKIA	0.0003	0.0113	0.000003	0.0004
CABK	0.1395	0.0082	0.0011	0.1346
CIEA	0.1529	0.0094	0.0014	0.1691
COL	0.0024	0.0088	0.00002	0.0025
ELE	0.0257	0.0084	0.0002	0.0254
ENAG	0.1531	0.0082	0.0013	0.1477
FER	0.0068	0.0086	0.0001	0.0069
GRLS	0.0135	0.0087	0.0001	0.0138
IAG	0.0002	0.0101	0.000002	0.0002
IBE	0.0528	0.0089	0.0005	0.0553
IDR	0.0047	0.0090	0.00004	0.0050
ITX	0.0023	0.0088	0.00002	0.0024
MAP	0.0001	0.0105	0.000001	0.0001
MEL	0.0034	0.0087	0.00003	0.0035
NTGY	0.0044	0.0087	0.00004	0.0045
REE	0.0019	0.0088	0.00002	0.0020
REP	0.0002	0.0102	0.000002	0.0002
SABE	0.0001	0.0110	0.000001	0.0001
SAN	0.0001	0.0114	0.000001	0.0001
SGREN	0.0000	0.0138	0	0
SLRS	0.0017	0.0083	0.00001	0.0017
TEF	0.0002	0.0102	0.000002	0.0002
VIS	0.1947	0.0081	0.0016	0.1855

Tabela A.9 IBEX: Contribuições de risco para o portfólio MS

$\sigma(w)=0.0092$	w_i	$\partial_{w_i}\sigma(w)$	$w_i \times \partial_{w_i}\sigma(w)$	$c_i(w)$
ACS	0.0000	0.0101	0	0
ACX	0.0000	0.0084	0	0
ALM	0.1517	0.0104	0.0016	0.1715
AMA	0.2772	0.0101	0.0028	0.3043
ANA	0.0000	0.0090	0	0
BBVA	0.0000	0.0101	0	0
BKIA	0.0000	0.0097	0	0
BKT	0.0000	0.0098	0	0
CABK	0.0702	0.0038	0.0003	0.0290
CIEA	0.2779	0.0119	0.0033	0.3595
COL	0.0059	0.0095	0.0001	0.0061
ELE	0.0000	0.0065	0	0
ENAG	0.1101	0.0068	0.0007	0.0814
FER	0.0000	0.0084	0	0
GRLS	0.0000	0.0082	0	0
IAG	0.0000	0.0101	0	0
IBE	0.0000	0.0074	0	0
IDR	0.0000	0.0090	0	0
ITX	0.0000	0.0084	0	0
MAP	0.0000	0.0100	0	0
MEL	0.0103	0.0094	0.0001	0.0105
NTGY	0.0000	0.0077	0	0
REE	0.0000	0.0080	0	0
REP	0.0000	0.0094	0	0
SABE	0.0000	0.0100	0	0
SAN	0.0000	0.0102	0	0
SGREN	0.0000	0.0135	0	0
SLRS	0.0000	0.0088	0	0
TEF	0.0000	0.0096	0	0
VIS	0.0967	0.0067	0.0006	0.0704

Tabela A.10 IBEX: Contribuições de risco para o portefólio ERC

$\sigma(w) = 0.011023$	w_i	$\partial_{w_i} \sigma(w)$	$w_i \times \partial_{w_i} \sigma(w)$	$c_i(w)$
ACS	0.0249	0.00015364	0.000003826	0.0003471
ACX	0.0319	0.00011436	0.000003648	0.0003310
ALM	0.0494	0.000066214	0.000003271	0.0002967
AMA	0.0486	0.000072747	0.000003536	0.0003207
ANA	0.0274	0.00013747	0.000003767	0.0003417
BBVA	0.0226	0.00017211	0.000003890	0.0003529
BKIA	0.0159	0.00017907	0.000002847	0.0002583
BKT	0.0241	0.00015766	0.000003800	0.0003447
CABK	0.0803	0.0000089581	0.000000719	0.0000653
CIEA	0.0500	0.000069849	0.000003492	0.0003168
COL	0.0178	0.00010589	0.000001885	0.0001710
ELE	0.0350	0.000098039	0.000003431	0.0003113
ENAG	0.0484	0.000073031	0.000003535	0.0003207
FER	0.0363	0.00010419	0.000003782	0.0003431
GRLS	0.0396	0.000077886	0.000003084	0.0002798
IAG	0.0276	0.00013068	0.000003607	0.0003272
IBE	0.0336	0.00011378	0.000003823	0.0003468
IDR	0.0302	0.00011941	0.000003606	0.0003272
ITX	0.0297	0.000077256	0.000002295	0.0002082
MAP	0.0256	0.00014884	0.000003810	0.0003457
MEL	0.0340	0.00010546	0.000003586	0.0003253
NTGY	0.0344	0.00011077	0.000003810	0.0003457
REE	0.0290	0.000082486	0.000002392	0.0002170
REP	0.0265	0.00014308	0.000003792	0.0003440
SABE	0.0226	0.00016769	0.000003790	0.0003438
SAN	0.0211	0.00018287	0.000003859	0.0003500
SGREN	0.0208	0.00018116	0.000003768	0.0003418
SLRS	0.0241	0.00012076	0.000002910	0.0002640
TEF	0.0288	0.00013252	0.000003817	0.0003462
VIS	0.0600	0.000053712	0.000003223	0.0002924

Tabela A.11 NASDAQ: Contribuições de risco para o portefólio 1/n

$\sigma(w) = 0.01184$	w_i	$\partial_{w_i} \sigma(w)$	$w_i \times \partial_{w_i} \sigma(w)$	$c_i(w)$
AAPL	0.0200	0.0414	0.0008	0.0699
ADBE	0.0200	0.0082	0.0002	0.0139
ADI	0.0200	0.0086	0.0002	0.0145
ADP	0.0200	0.0062	0.0001	0.0105

ADSK	0.0200	0.0096	0.0002	0.0162
ALXN	0.0200	0.0108	0.0002	0.0182
AMD	0.0200	0.0122	0.0002	0.0206
ANSS	0.0200	0.0071	0.0001	0.0120
AVGO	0.0200	0.0113	0.0002	0.0191
ATVI	0.0200	0.0072	0.0001	0.0122
BIDU	0.0200	0.0096	0.0002	0.0162
BIIB	0.0200	0.0095	0.0002	0.0160
CDNS	0.0200	0.0072	0.0001	0.0122
CERN	0.0200	0.0071	0.0001	0.0120
CMCSA	0.0200	0.0232	0.0005	0.0392
CPRT	0.0200	0.0226	0.0005	0.0382
CSCO	0.0200	0.0067	0.0001	0.0113
CSX	0.0200	0.0077	0.0002	0.0130
CTAS	0.0200	0.0057	0.0001	0.0096
EA	0.0200	0.0089	0.0002	0.0150
EBAY	0.0200	0.0082	0.0002	0.0139
FAST	0.0200	0.0070	0.0001	0.0118
FISV	0.0200	0.0248	0.0005	0.0419
GILD	0.0200	0.0085	0.0002	0.0144
ILMN	0.0200	0.0104	0.0002	0.0176
INTC	0.0200	0.0073	0.0001	0.0123
ISRG	0.0200	0.0308	0.0006	0.0520
MAR	0.0200	0.0077	0.0002	0.0130
MCHP	0.0200	0.0084	0.0002	0.0142
MELI	0.0200	0.0097	0.0002	0.0164
MNST	0.0200	0.0309	0.0006	0.0522
MRVL	0.0200	0.0048	0.0001	0.0081
MSFT	0.0200	0.0071	0.0001	0.0120
MXIM	0.0200	0.0078	0.0002	0.0132
NFLX	0.0200	0.0102	0.0002	0.0172
NTES	0.0200	0.0480	0.0010	0.0811
PAYX	0.0200	0.0072	0.0001	0.0122
PEP	0.0200	0.0026	0.0001	0.0044
QCOM	0.0200	0.0073	0.0001	0.0123
ROST	0.0200	0.0057	0.0001	0.0096
SBUX	0.0200	0.0065	0.0001	0.0110
SGEN	0.0200	0.0111	0.0002	0.0187
SWKS	0.0200	0.0083	0.0002	0.0140
TMUS	0.0200	0.0072	0.0001	0.0122
TSLA	0.0200	0.0510	0.0010	0.0861
TXN	0.0200	0.0086	0.0002	0.0145

VRTX	0.0200	0.0068	0.0001	0.0115
WBA	0.0200	0.0059	0.0001	0.0100
XEL	0.0200	0.0023	0.0000	0.0039
XLNX	0.0200	0.0079	0.0002	0.0133

Tabela A.12 NASDAQ: Contribuições de risco para o portfólio MV

$\sigma(w) = 0.00675$	w_i	$\partial_{w_i} \sigma(w)$	$w_i \times \partial_{w_i} \sigma(w)$	$c_i(w)$
AAPL	0.0000	0.0109	0	0
ADBE	0.0001	0.0074	0.0000007	0.0001
ADI	0.0002	0.0073	0.000001	0.0001
ADP	0.0000	0.0075	0	0
ADSK	0.0000	0.0086	0	0
ALXN	0.0000	0.0085	0	0
AMD	0.0000	0.0093	0	0
ANSS	0.0003	0.0070	0.000002	0.0003
AVGO	0.0001	0.0078	0.0000008	0.0001
ATVI	0.0030	0.0068	0.00002	0.0030
BIDU	0.0004	0.0072	0.000003	0.0004
BIIB	0.0000	0.0083	0	0
CDNS	0.0241	0.0068	0.0002	0.0296
CERN	0.0002	0.0074	0.000001	0.0001
CMCSA	0.0000	0.0081	0	0
CPRT	0.0191	0.0077	0.0001	0.0148
CSCO	0.0028	0.0068	0.00002	0.0030
CSX	0.0004	0.0071	0.000003	0.0004
CTAS	0.1099	0.0071	0.0008	0.1185
EA	0.0001	0.0076	0.0000008	0.0001
EBAY	0.0020	0.0075	0.00002	0.0030
FAST	0.0078	0.0068	0.0001	0.0148
FISV	0.0000	0.0105	0	0
GILD	0.0004	0.0071	0.000003	0.0004
ILMN	0.0001	0.0075	0.0000008	0.0001
INTC	0.0130	0.0069	0.0001	0.0148
ISRG	0.0001	0.0075	0.0000008	0.0001
MAR	0.0001	0.0071	0.0000007	0.0001
MCHP	0.0005	0.0070	0.000004	0.0006
MELI	0.0000	0.0092	0	0
MNST	0.0000	0.0099	0	0
MRVL	0.0001	0.0074	0.0000007	0.0001

MSFT	0.0001	0.0072	0.0000007	0.0001
MXIM	0.0030	0.0068	0.00002	0.0030
NFLX	0.0001	0.0073	0.0000007	0.0001
NTES	0.0000	0.0107	0	0
PAYX	0.1498	0.0068	0.0010	0.1481
PEP	0.3515	0.0068	0.0024	0.3556
QCOM	0.0241	0.0069	0.0002	0.0296
ROST	0.0304	0.0068	0.0002	0.0296
SBUX	0.0101	0.0067	0.00007	0.0104
SGEN	0.0000	0.0084	0	0
SWKS	0.0000	0.0065	0	0
TMUS	0.0134	0.0068	0.0001	0.0148
TSLA	0.0000	0.0127	0	0
TXN	0.0000	0.0078	0	0
VRTX	0.0067	0.0068	0.00005	0.0074
WBA	0.0165	0.0069	0.0001	0.0148
XEL	0.2071	0.0067	0.0014	0.2074
XLNX	0.0023	0.0068	0.00002	0.0030

Tabela A.13 NASDAQ: Contribuições de risco para o portfólio MS

$\sigma(w) = 0.00747$	w_i	$\partial_{w_i}\sigma(w)$	$w_i \times \partial_{w_i}\sigma(w)$	$c_i(w)$
AAPL	0.0000	0.0088	0	0
ADBE	0.0326	0.0088	0.0003	0.0402
ADI	0.0000	0.0086	0	0
ADP	0.0000	0.0073	0	0
ADSK	0.0000	0.0103	0	0
ALXN	0.0000	0.0099	0	0
AMD	0.0000	0.0110	0	0
ANSS	0.0000	0.0075	0	0
AVGO	0.0533	0.0109	0.0006	0.0803
ATVI	0.0171	0.0079	0.0001	0.0134
BIDU	0.0000	0.0080	0	0
BIIB	0.0000	0.0090	0	0
CDNS	0.0041	0.0071	0.00003	0.0040
CERN	0.0000	0.0080	0	0
CMCSA	0.0000	0.0074	0	0
CPRT	0.0000	0.0059	0	0
CSCO	0.0000	0.0073	0	0
CSX	0.0000	0.0079	0	0

CTAS	0.2923	0.0091	0.0027	0.3614
EA	0.0000	0.0101	0	0
EBAY	0.0000	0.0074	0	0
FAST	0.0000	0.0072	0	0
FISV	0.0000	0.0090	0	0
GILD	0.0105	0.0084	0.0001	0.0134
ILMN	0.0000	0.0096	0	0
INTC	0.0000	0.0071	0	0
ISRG	0.0000	0.0077	0	0
MAR	0.0000	0.0077	0	0
MCHP	0.0000	0.0084	0	0
MELI	0.0000	0.0104	0	0
MNST	0.0000	0.0091	0	0
MRVL	0.0000	0.0062	0	0
MSFT	0.0000	0.0076	0	0
MXIM	0.0000	0.0080	0	0
NFLX	0.0400	0.0140	0.0006	0.0803
NTES	0.0037	0.0096	0.00004	0.0054
PAYX	0.0367	0.0064	0.0002	0.0268
PEP	0.2541	0.0055	0.0014	0.1874
QCOM	0.0000	0.0069	0	0
ROST	0.0719	0.0077	0.0006	0.0803
SBUX	0.0000	0.0075	0	0
SGEN	0.0000	0.0097	0	0
SWKS	0.0000	0.0073	0	0
TMUS	0.0475	0.0099	0.0005	0.0669
TSLA	0.0000	0.0128	0	0
TXN	0.0000	0.0088	0	0
VRTX	0.0012	0.0069	0.000008	0.0011
WBA	0.0125	0.0073	0.0001	0.0134
XEL	0.1226	0.0052	0.0006	0.0803
XLNX	0.0000	0.0079	0	0

Tabela A.14 NASDAQ: Contribuições de risco para o portfólio ERC

$\sigma(w)=0.009353$	w_i	$\partial_{w_i}\sigma(w)$	$w_i \times \partial_{w_i}\sigma(w)$	$c_i(w)$
AAPL	0.0072	0.00022180	0.000001597	0.0001707
ADBE	0.0197	0.000084996	0.000001674	0.0001790
ADI	0.0186	0.000090515	0.000001684	0.0001800
ADP	0.0251	0.000067326	0.000001690	0.0001807

ADSK	0.0164	0.00010038	0.000001646	0.0001760
ALXN	0.0151	0.00010710	0.000001617	0.0001729
AMD	0.0154	0.00011192	0.000001724	0.0001843
ANSS	0.0220	0.000075320	0.000001657	0.0001772
AVGO	0.0143	0.00011670	0.000001669	0.0001784
ATVI	0.0218	0.000073856	0.000001610	0.0001721
BIDU	0.0173	0.000092793	0.000001605	0.0001716
BIIB	0.0170	0.000094190	0.000001601	0.0001712
CDNS	0.0219	0.000075576	0.000001655	0.0001770
CERN	0.0223	0.000074081	0.000001652	0.0001766
CMCSA	0.0119	0.00013504	0.000001607	0.0001718
CPRT	0.0127	0.00012554	0.000001594	0.0001705
CSCO	0.0232	0.000070706	0.000001640	0.0001754
CSX	0.0206	0.000080886	0.000001666	0.0001782
CTAS	0.0273	0.000061317	0.000001674	0.0001790
EA	0.0178	0.00008934	0.000001590	0.0001700
EBAY	0.0204	0.000082521	0.000001683	0.0001800
FAST	0.0232	0.000073238	0.000001699	0.0001817
FISV	0.0112	0.00016529	0.000001851	0.0001979
GILD	0.0198	0.000084160	0.000001666	0.0001782
ILMN	0.0160	0.000098451	0.000001575	0.0001684
INTC	0.0216	0.000076857	0.000001660	0.0001775
ISRG	0.0095	0.00016480	0.000001566	0.0001674
MAR	0.0210	0.000080564	0.000001692	0.0001809
MCHP	0.0190	0.000088581	0.000001683	0.0001799
MELI	0.0161	0.000099208	0.000001597	0.0001708
MNST	0.0095	0.00016408	0.000001559	0.0001667
MRVL	0.0280	0.000048462	0.000001357	0.0001451
MSFT	0.0222	0.000074566	0.000001655	0.0001770
MXIM	0.0204	0.000081732	0.000001667	0.0001783
NFLX	0.0166	0.000089154	0.000001480	0.0001582
NTES	0.0061	0.00025458	0.000001553	0.0001660
PAYX	0.0227	0.000074968	0.000001702	0.0001819
PEP	0.0520	0.000029992	0.000001560	0.0001667
QCOM	0.0219	0.000075676	0.000001657	0.0001772
ROST	0.0274	0.000058295	0.000001597	0.0001708
SBUX	0.0240	0.000068281	0.000001639	0.0001752
SGEN	0.0148	0.00010808	0.000001600	0.0001710
SWKS	0.0188	0.000081935	0.000001540	0.0001647
TMUS	0.0218	0.000069264	0.000001510	0.0001614
TSLA	0.0056	0.00028306	0.000001585	0.0001695
TXN	0.0185	0.000091013	0.000001684	0.0001800

VRTX	0.0214	0.000060265	0.000001290	0.0001379
WBA	0.0266	0.000060555	0.000001611	0.0001722
XEL	0.0567	0.000025178	0.000001428	0.0001526
XLNX	0.0201	0.000082981	0.000001668	0.0001783

A.5 Índices para os Portefólios Tangentes e Diversificados

Tabela A.15 IBEX: Índices para os portefólios TD

Solução	CR ₄	J	ET	HI
1	23.97313	0.03887	0.42495	53.80831
2	31.36315	0.04819	0.40762	51.60670
3	35.40578	0.05582	0.39429	50.06069
4	38.47618	0.06315	0.37920	47.81742
5	41.30955	0.07081	0.36239	44.93943
6	44.19634	0.07875	0.34639	41.80218
7	47.17328	0.08680	0.33358	39.57808
8	50.37250	0.09461	0.32389	38.32414
9	53.27038	0.10207	0.31572	37.53162
10	55.81350	0.10936	0.30718	36.62864
11	58.13265	0.11642	0.29862	35.54773
12	60.26442	0.12326	0.29061	34.66765
13	62.25594	0.12990	0.28270	33.65098
14	64.11121	0.13637	0.27503	32.70017
15	65.86048	0.14249	0.26781	31.65417
16	67.49183	0.14830	0.26134	30.81491
17	69.16098	0.15376	0.25488	29.83092
18	70.66611	0.15846	0.25040	29.21235
19	72.04188	0.16291	0.24627	28.67861
20	73.28478	0.16709	0.24258	28.14698
21	74.40384	0.17102	0.23952	27.75350
22	75.42511	0.17479	0.23666	27.36392
23	76.34885	0.17834	0.23418	27.01652
24	77.18472	0.18170	0.23217	26.76030
25	77.95239	0.18495	0.23045	26.59003
26	78.66852	0.18815	0.22883	26.45268
27	79.34078	0.19130	0.22725	26.32883
28	79.97426	0.19442	0.22571	26.21182
29	80.57259	0.19750	0.22418	26.09866
30	81.13638	0.20053	0.22269	25.98815
31	81.60552	0.20315	0.22140	25.89232

Tabela A.16 NASDAQ: Índices para os portefólios TD

Solução	CR ₄	J	ET	HI
---------	-----------------	---	----	----

1	16.41112	0.02386	0.42493	69.24076
2	23.32052	0.03274	0.40838	67.51233
3	26.29994	0.03435	0.40547	66.38360
4	28.61195	0.03788	0.39868	65.23784
5	30.59546	0.04140	0.39164	63.92232
6	32.45115	0.04565	0.38194	62.32881
7	34.28239	0.04871	0.37591	60.66478
8	36.05743	0.05313	0.36712	58.95855
9	37.77634	0.05646	0.36066	57.38912
10	39.41439	0.06003	0.35376	55.83769
11	41.01137	0.06357	0.34450	54.29527
12	42.58974	0.06759	0.33727	52.74702
13	44.18628	0.07149	0.33036	51.12067
14	45.80886	0.07537	0.32199	49.54199
15	47.45327	0.07949	0.31605	48.23816
16	49.04489	0.08351	0.31036	47.11611
17	50.59968	0.08753	0.30564	46.19942
18	52.06768	0.09144	0.30160	45.51843
19	53.43939	0.09525	0.29761	44.91471
20	54.72850	0.09898	0.29358	44.33061
21	55.94639	0.10265	0.28949	43.73841
22	57.10225	0.10626	0.28526	43.11672
23	58.20083	0.10984	0.28082	42.44417
24	59.23388	0.11337	0.27592	41.70137
25	60.17352	0.11680	0.27070	40.94632
26	61.02240	0.11998	0.26720	40.27821
27	61.80144	0.12303	0.26404	39.69031
28	62.57468	0.12605	0.26085	39.16164
29	63.40362	0.12901	0.25777	38.69325
30	64.19015	0.13187	0.25557	38.28455
31	64.93445	0.13466	0.25341	37.92243
32	65.63622	0.13739	0.25118	37.59833
33	66.29715	0.14003	0.24922	37.31449
34	66.91989	0.14258	0.24774	37.06917
35	67.50798	0.14509	0.24615	36.85381
36	68.06474	0.14754	0.24470	36.66013
37	68.59290	0.14995	0.24329	36.48234
38	69.09530	0.15231	0.24201	36.31679
39	69.57392	0.15464	0.24057	36.16072
40	70.03029	0.15692	0.23927	36.01263
41	70.46654	0.15916	0.23808	35.87088
42	70.88379	0.16138	0.23675	35.73488
43	71.28324	0.16356	0.23553	35.60387
44	71.66564	0.16570	0.23431	35.47714
45	72.03206	0.16782	0.23313	35.35451
46	72.38225	0.16990	0.23199	35.23592
47	72.71593	0.17196	0.23084	35.12183
48	73.03019	0.17398	0.22974	35.01260
49	73.31810	0.17598	0.22863	34.91129
50	73.56209	0.17796	0.22753	34.82447
51	73.73076	0.17989	0.22646	34.76388
