



UNIVERSIDADE D  
COIMBRA

Nuno Ricardo Ferreira Lacximicant

**ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS  
ALTERNATIVOS À SOMA DE QUADRADOS**

**Dissertação no âmbito do Mestrado em Matemática, Ramo da Estatística,  
Otimização e Matemática Financeira orientada pelo Professor Doutor João  
Eduardo da Silveira Gouveia e apresentada ao Departamento de Matemática da  
Faculdade de Ciências e Tecnologia.**

Julho de 2021



# Estudo Comparativo de Métodos Alternativos à Soma De Quadrados

**Nuno Ricardo Ferreira Lacximicant**



UNIVERSIDADE D  
**COIMBRA**

Mestrado em Matemática

Master in Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

July 2021 / Julho 2021



## **Agradecimentos**

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador, o professor João Gouveia, por toda a ajuda que me forneceu, principalmente com todas as dificuldades que advêm de uma pandemia, pela paciência que teve para ouvir e responder a todas as minhas dúvidas e inquietações e por me guiar ao longo deste percurso final.

Gostaria também de fazer referência a todos os professores com quem me cruzei ao longo da minha licenciatura e, posteriormente, do mestrado, já que, para além de excelentes professores, têm competências humanas que tornam esta instituição numa instituição ímpar.

Finalmente e não menos importante, gostaria de agradecer principalmente à minha mãe, ao meu irmão, à minha avó e à minha namorada por toda a preocupação, suporte e paciência que tiveram comigo, não só este ano, mas durante todo o meu percurso até aqui. Gostaria também de mencionar alguns dos meus amigos: Miguel Baptista, Rúben Beirão, Ricardo Silva, Ricardo André, Nuno Freitas, Diogo Soares, João Sanches, João Bernardes, Fátima Ramos e Sofia Ribeiro por também sempre me terem apoiado.

Para concluir e em jeito de dedicatória, gostaria de dedicar esta dissertação à minha mãe e ao meu irmão.



## Resumo

Problemas de otimização polinomial são problemas de elevada importância na área da otimização e a sua resolução equivale a verificar a não negatividade de um polinómio, que é um problema NP-difícil para polinómios com grau pelo menos quatro. Ora a não negatividade de um polinómio pode ser certificada através da escrita do polinómio como soma de quadrados de outros polinómios que, no entanto, não capturam a totalidade dos polinómios não negativos. Uma forma encontrada de contornar esta limitação originou a introdução dos chamados polinómios  $r$ -SOS, que incluem todos os polinómios positivos. Contudo, a verificação desta propriedade das somas de quadrados, efetuada através de programação semidefinida, é dispendiosa e não é praticável para problemas de grande escala.

Devido a esta limitação associada às somas de quadrados, estudos recentes levaram à introdução de dois métodos alternativos de verificação da não negatividade de um polinómio: a soma de binómios quadrados (SOBS ou SDSOS), envolvendo programação cónica de segunda ordem e a soma de circuitos polinomiais não negativos (SONC), envolvendo programação geométrica. O objetivo deste trabalho é explorar as relações entre polinómios que são somas de circuitos polinomiais não negativos e os polinómios  $r$ -SOS e  $r$ -SOBS, para algum  $r$ , duas hierarquias que são variantes mais fortes das somas de quadrados e somas de binómios quadrados, respetivamente.

No decorrer do estudo, para além de darmos resposta ao problema a que nos tínhamos proposto, recuperamos experimentalmente algumas observações já conhecidas e conjecturamos novos resultados que pensamos ainda não serem conhecidos.

**Palavras-chave:** polinómio, somas de quadrados, somas de binómios quadrados, circuitos polinomiais não negativos





# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Cones de matrizes e Programação Cônica</b>	<b>3</b>
2.1 Matrizes Positivas Semidefinidas . . . . .	4
2.2 Largura de Fator . . . . .	5
2.3 Programação Cônica . . . . .	9
2.3.1 Programação Semidefinida . . . . .	9
2.3.2 Programação Cônica de Segunda Ordem . . . . .	11
<b>3 Polinômios Não Negativos e Soma de Quadrados</b>	<b>13</b>
3.1 Somas de Quadrados . . . . .	14
3.2 Polinômios $r$ -SOS . . . . .	17
3.3 Polítopos de Newton . . . . .	19
<b>4 Alternativas à Soma de Quadrados</b>	<b>23</b>
4.1 Somas de Binômios Quadrados ou SDSOS . . . . .	23
4.1.1 Implementação Numérica . . . . .	25
4.2 Polinômios $r$ -SDSOS . . . . .	28
4.3 Polinômios Não Negativos suportados em circuitos . . . . .	30
4.4 Relações entre o cone dos SONC e os outros conjuntos . . . . .	35
<b>5 Experiências Numéricas</b>	<b>37</b>
5.1 Conjuntos $\Delta$ -mediados maximais . . . . .	37
5.1.1 Observações experimentais para $n = 2$ . . . . .	40
5.2 Geração de Circuitos Polinomiais Não Negativos que não são Somas de Quadrados . . . . .	41
5.3 Testes com $r$ -SOS e $r$ -SOBS . . . . .	43
5.3.1 Observações experimentais . . . . .	43
5.4 Conclusão . . . . .	48
<b>Bibliografia</b>	<b>49</b>



# Lista de Figuras

2.1	Região admissível primal truncada. . . . .	11
2.2	Região admissível dual. . . . .	11
3.1	Polítopo de Newton de $p(x) = 1 + xy^3 + x^4y^2 - x^2y^2$ . . . . .	20
3.2	Polítopos de Newton . . . . .	21
4.1	Conjunto $\Delta$ -mediado maximal de um símplice com vértices $(0,0,0)$ , $(2,2,2)$ , $(2,4,0)$ e $(0,2,2)$ . . . . .	32
5.1	Símplices e conjuntos $\Delta$ -mediados maximais para $n = 2$ , $d = 12, 18, 24$ e $42$ e $n = 3$ , $d = 6, 18, 30$ e $36$ . . . . .	39
5.2	Variação do número de símplices cujo conjunto $\Delta$ -mediado maximal não contém todos os inteiros do símplice, para $n = 2$ . . . . .	40
5.3	Dois símplices cujo conjunto $\Delta$ -mediado maximal não é máximo, para $d = 30$ e $d = 54$ . . . . .	41
5.4	Conjunto $\Delta$ -mediado maximal e pontos interiores de um símplice com vértices $(2,0)$ , $(4,0)$ , $(0,6)$ . . . . .	42



# Lista de Tabelas

5.1	Fração dos casos em que o conjunto $\Delta$ -mediado maximal não era constituído por todos os pontos inteiros no símplice em 100 testes aleatórios por par $(n, d)$ . . . . .	38
5.2	Testes de verificação da propriedade r-SOS. . . . .	43
5.3	Testes de verificação da propriedade r-SOS para $n = 3$ . . . . .	44
5.4	Distribuição do número de polinómios que aparentam ter <i>pontos maus</i> . . . . .	46
5.5	Testes de verificação da propriedade r-SOBS. . . . .	47
5.6	Testes de verificação da propriedade r-SOBS para $n = 2$ . . . . .	47



# Capítulo 1

## Introdução

O problema da otimização polinomial tem sido muito discutido, nomeadamente pela sua utilização em vários casos práticos e pela dificuldade de resolução destes mesmos problemas. Daí que, ao longo dos tempos, estes problemas tenham vindo a ser mais estudados, adquirindo maior importância no mundo científico. Sabemos que uma das formas de os resolver é garantir a não negatividade de um polinómio, no entanto, este novo problema, aparentemente mais fácil de resolver, é NP-difícil para polinómios com grau pelo menos quatro. Ora, a não negatividade de um polinómio pode ser certificada através das somas de quadrados (SOS), no entanto, estes certificados não capturam todos os polinómios não negativos. Uma forma encontrada de contornar esta limitação foi multiplicar um polinómio homogéneo que não seja soma de quadrados pelo fator  $(\sum_i x_i^2)^r$  e procurar escrever o novo polinómio como soma de quadrados, certificando assim a não negatividade do polinómio original. Aos polinómios que podem ser certificados desta forma chamamos  $r$ -SOS e prova-se que qualquer polinómio homogéneo positivo é  $r$ -SOS para algum  $r$ . No entanto, a verificação da existência de uma decomposição em soma de quadrados, efetuada através de programação semidefinida, é dispendiosa e não se coaduna bem com problemas de grande escala, o que limita o âmbito da sua utilização prática. Por esse motivo estudos recentes levaram este problema a dois métodos alternativos de verificação da não negatividade de um polinómio: a soma de binómios quadrados (SOBS ou SDSOS), envolvendo programação cónica de segunda ordem e soma de circuitos polinomiais não negativos (SONC), envolvendo programação geométrica. A soma de binómios quadrados funciona como uma espécie de troca entre poder e rapidez comparativamente com a soma de quadrados, uma vez que apesar da sua verificação ser mais eficiente do que a soma de quadrados, perde em termos de abrangência, já que se restringe a um conjunto mais pequeno de polinómios. Analogamente ao que aconteceu nos polinómios que são somas de quadrados, aqui também houve uma tentativa de multiplicar um polinómio que não era soma de binómios quadrados pelo mesmo fator que o indicado nas somas de quadrados, que deu origem aos polinómios  $r$ -SOBS, mas o resultado não foi o mesmo, pois embora seja útil para certos casos, não captura a totalidade dos polinómios positivos. Por exemplo, se o polinómio original for quadrático e não for uma soma de binómios quadrados, o mesmo acontecerá para o polinómio formado pela multiplicação explicitada anteriormente, qualquer que seja o número natural  $r$ . Por outro lado, temos os polinómios que são somas de circuitos polinomiais não negativos, cuja não negatividade pode ser certificada pela desigualdade das médias aritmética e geométrica e que, embora intersetem o conjunto dos polinómios que são somas de quadrados para certos casos, não o contém ou

nele estão contidos, oferecendo assim uma alternativa útil à certificação da não negatividade. O objetivo deste trabalho é verificar numericamente se se pode estabelecer alguma relação entre polinómios que são somas de circuitos polinomiais não negativos e os polinómios  $r$ -SOBS, para algum  $r$ . Pretendemos ainda encontrar exemplos explícitos simples que ilustrem os diversos comportamentos possíveis de polinómios não negativos em relação às várias hierarquias de certificados. Para isso, recorreremos à teoria dos conjuntos delta-mediados maximais, para construir algoritmos que nos permitissem construir circuitos polinomiais não negativos que não sejam somas de quadrados. Posteriormente testámos, com os algoritmos criados para verificar se um polinómio é  $r$ -SOS ou  $r$ -SOBS para um dado  $r$  natural, para procurar algum padrão que nos permitisse tirar conclusões. Os testes permitiram observar alguns comportamentos interessantes, uns cuja explicação já se encontra na literatura, outros que permanecem apenas no campo conjectural. Em particular podemos observar a frequência de polinómios aparentemente com *pontos maus*, obter evidências numéricas para uma conjectura de Reznick e observar que todos os circuitos polinomiais em  $n = 2$  parecem ser 1-SOS.



## Capítulo 2

# Cones de matrizes e Programação Cônica

Neste capítulo vamos apresentar conceitos base relacionados com matrizes que serão fundamentais para o estudo dos polinómios. Consideramos este capítulo como a base teórica dos capítulos seguintes. Começamos com a definição de cone convexo e de cone dual.

**Definição 1.** Chamamos a um conjunto  $C \in \mathbb{R}^n$  um cone convexo se, para todo o  $x_1, x_2 \in C$  e  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ , temos  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$ .

Apresentamos abaixo alguns exemplos simples de cones convexos, bem como de formas de obter novos cones convexos a partir de outros.

**Exemplo 2.0.1.** 1. O conjunto  $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$  é um cone convexo.

2. Qualquer subespaço linear de  $\mathbb{R}^n$  é um cone convexo.

3. A interseção de cones convexos é um cone convexo.

4. O conjunto de polinómios não negativos de grau menor ou igual a  $d$  e  $n$  variáveis (que identificamos com o vetor dos seus coeficientes) é um cone convexo.

Os cones convexos possuem uma teoria de dualidade bastante rica. Em particular eles surgem aos pares, já que a cada cone convexo se associa um cone convexo dual.

**Definição 2.** Chamamos cone dual de um cone  $C \in \mathbb{R}^n$  ao conjunto  $C^* \in \mathbb{R}^n$  definido por  $C^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \geq 0, \forall x \in C\}$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno em  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 2.0.2.** O cone dual do ortante não negativo é o próprio ortante não negativo. Note-se que  $y \in (\mathbb{R}_+^n)^*$  se e só se  $y^T x \geq 0$  para todo o  $x \geq 0$ . Não é difícil de ver que isto acontece se e só se  $y \geq 0$ .

Estes conjuntos em que o cone primal e dual são iguais, ou seja  $C = C^*$ , dizem-se cones auto-duais. Uma outra propriedade importante é que se  $C$  é um cone convexo fechado então  $C = (C^*)^*$ , ou seja,  $C$  é o dual do seu dual.

## 2.1 Matrizes Positivas Semidefinidas

Nesta secção vão ser apresentadas algumas propriedades básicas das matrizes positivas semidefinidas.

**Definição 3.** Uma matriz simétrica  $A$  é positiva semidefinida se  $x^T Ax \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Além disso ela é positiva definida se  $x^T Ax > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ . Denotamos o conjunto das matrizes  $n \times n$  simétricas e positivas semidefinidas, que é um cone, por  $S_+^n$ .

Usamos a notação  $A \succeq 0$  para indicar que uma matriz  $A$  é positiva semidefinida. A seguinte proposição dá-nos algumas propriedades úteis deste tipo de matrizes e as suas demonstrações podem ser encontradas em [9].

**Proposição 1.** Seja  $A \in S^n$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

- 1)  $A \succeq 0$ .
- 2) Os valores próprios de  $A$  são todos não negativos.
- 3) Todas as submatrizes principais de  $A$  (isto é, as submatrizes quadradas de  $A$  cuja diagonal principal está contida na diagonal principal de  $A$ ) têm determinante não negativo.
- 4)  $\exists L \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tal que  $A$  admite uma fatorização  $A = LL^T$ .
- 5)  $A = \sum_{i=1}^k v_i v_i^T$ , para alguns  $v_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, k$ .

A condição 3) tem outras versões úteis, em particular, se todas as submatrizes principais líderes (isto é, as submatrizes quadradas de  $A$  indexadas pelas linhas e colunas  $\{1, 2, \dots, k\}$  para algum  $k$ ) tiverem determinante positivo, a matriz  $A$  é positiva semidefinida (de facto positiva definida) não sendo necessário testar todas as submatrizes principais neste caso.

**Exemplo 2.1.1.** Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Começemos por mostrar que todos os seus valores próprios são não negativos. O seu polinómio característico é

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 2)$$

que se anula em  $\lambda \in \{2, 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$ , todos valores positivos.

As submatrizes principais  $1 \times 1$  de  $A$  são  $A_1 = A_2 = A_3 = [2]$ . As  $2 \times 2$  são  $A_{1,2} = A_{2,3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  e  $A_{1,3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  e a única  $3 \times 3$  é a própria matriz  $A$ . Os determinantes destas matrizes são, respetivamente, 2, 3, 4 e 4, todos positivos.

Além disso,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = LL^T.$$

A proposição seguinte indica uma propriedade importante do cone das matrizes simétricas e positivas semidefinidas. Tal como já vimos atrás para o ortante não negativo, ele é auto-dual. Note-se que vamos pensar no cone das matrizes positivas semidefinidas como vivendo no espaço das matrizes simétricas  $S^n$ . O produto interno considerado é a usual soma dos produtos entrada a entrada, que no caso das matrizes simétricas pode ser reescrito como  $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(XY)$ .

**Proposição 2.** *O cone das matrizes simétricas e positivas semidefinidas é auto-dual.*

*Demonstração.* Queremos provar que para  $Y \in S^n$ , temos  $\text{tr}(XY) \geq 0$  para todo o  $X \succeq 0$  se e só se  $Y \succeq 0$ .

Começemos por provar que se  $\text{tr}(XY) \geq 0$  para todo o  $X \succeq 0$ , então  $Y \succeq 0$ , provando para isso a afirmação contra-recíproca, ou seja, que se  $Y \not\succeq 0$ , então  $\exists X$  de tal forma que  $\text{tr}(XY) < 0$ . Como  $Y \not\succeq 0$  existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x^T Y x < 0$ . Mas pela comutatividade do traço do produto, isto implica  $\text{tr}(xx^T Y) < 0$  pelo que, considerando a matriz  $X = xx^T \succeq 0$ , obtemos  $\text{tr}(XY) < 0$ .

Para provar a outra implicação notemos que, uma vez que  $X \succeq 0$ , este pode ser decomposto na forma  $X = \sum_i v_i v_i^T$  para alguns vetores  $v_i \in \mathbb{R}^n$ . Então  $\text{tr}(XY) = \text{tr}(\sum_i v_i v_i^T Y)$  e apenas temos que mostrar que  $\text{tr}(v_i v_i^T Y) \geq 0$ . Mas,  $\text{tr}(v_i v_i^T Y) = v_i^T Y v_i$  e  $Y \succeq 0$ , logo  $\text{tr}(v_i v_i^T Y) \geq 0$ .  $\square$

## 2.2 Largura de Fator

Uma noção relacionada com matrizes positivas semidefinidas é a noção de largura de fator introduzida por Boman et al. Nesta secção, começamos por definir largura de fator e apresentamos posteriormente caracterizações desta propriedade, baseando-nos em [4] e [7], que serão úteis no estudo desenvolvido.

**Definição 4.** *A largura de fator de uma matriz simétrica e positiva semidefinida  $A$  corresponde ao menor inteiro  $k$  tal que existe uma matriz real  $V$  onde  $A = VV^T$  e cada coluna de  $V$  contém no máximo  $k$  números diferentes de zero.*

Denotamos por  $FW_k^n$  o conjunto das matrizes  $n \times n$  simétricas e positivas semidefinidas com largura de fator menor ou igual a  $k$ .

**Exemplo 2.2.1.** *Considere-se a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

*Ela tem largura de fator 2 uma vez que*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = VV^T \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

onde  $V$  é uma matriz real e em que cada coluna tem no máximo dois números diferentes de zero.

São, a partir da definição anterior, lógicas as seguintes relações:

$$FW_1^n \subset FW_2^n \subset \dots \subset FW_n^n = S_+^n.$$

Note-se que as matrizes com largura de fator 1 são matrizes diagonais com elementos não negativos, enquanto que por uma das caracterizações que vimos de matrizes semidefinidas positivas  $FW_n^n = S_+^n$ .

Apresentamos ainda uma caracterização alternativa das matrizes com largura de fator  $k$ .

**Proposição 3.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  simétrica e positiva semidefinida e  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ .*

*Então  $A \in FW_k^n$  se e só se  $A$  é soma de matrizes  $n \times n$  simétricas e positivas semidefinidas com suportes contidos em conjuntos  $K \times K$  com  $|K| = k$ .*

**Exemplo 2.2.2.** *Revisitemos a matriz  $A$  do exemplo anterior. Podemos de facto observar que*

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

*é uma matriz com largura de fator 2 uma vez que pode ser escrita como uma soma de matrizes simétricas e positivas semidefinidas com zeros em todas as componentes exceto em submatrizes  $2 \times 2$ .*

Facultadas as definições para qualquer  $k$ , no decorrer deste trabalho vamos focar-nos essencialmente em  $k = 2$ . Nesse seguimento, introduzimos uma caracterização de uma matriz com largura de fator 2, demonstrada em [6].

**Teorema 1.** *Uma matriz simétrica  $Q$  tem largura de fator 2 se e só se  $\overline{Q} \succeq 0$ ,*

$$\overline{Q}_{ij} = \begin{cases} Q_{ij} & , \text{ se } i = j \\ -|Q_{ij}| & , \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

**Exemplo 2.2.3.** *Considerando a matriz  $A$  do exemplo anterior,*

$$\overline{A}_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{se } i = j \\ -|A_{ij}| & \text{se } i \neq j \end{cases}, \text{ ou seja, } \overline{A} = \begin{bmatrix} 10 & -5 & -2 \\ -5 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

*Como  $\det(A_1) = 10$ ,  $\det(A_{1,2}) = \det\left(\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\right) = 15$  e  $\det(A_{1,2,3}) = \det(A) = 74$ , temos que  $\overline{A} \succeq 0$  e portanto  $A$  tem largura de fator 2.*

Antes de vermos os resultados seguintes é importante estabelecer o conceito de matriz escalarmente diagonal dominante (SDD).

**Definição 5.** Uma matriz simétrica  $A$  é diagonal dominante (dd) se

$$a_{ii} \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall i.$$

Esta definição vai permitir caracterizar as matrizes escalarmente diagonal dominantes.

**Definição 6.** Dizemos que uma matriz simétrica  $A$  é escalarmente diagonal dominante (SDD) se existe uma matriz diagonal  $D$  com elementos positivos tal que  $DAD$  é diagonal dominante. Denotamos por  $SDD_n$  o cone das matrizes  $n \times n$  escalarmente diagonal dominantes.

**Exemplo 2.2.4.** Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então

$$DAD = \begin{bmatrix} 40 & 30 & 4 \\ 30 & 36 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

é diagonal dominante, pelo que a condição referida na definição anterior é verificada e, como tal,  $A$  é SDD.

Seria agora interessante relacionar as matrizes escalarmente diagonal dominantes com largura de fator, algo que o exemplo anterior já sugere, uma vez que a matriz  $A$  utilizada é a mesma que temos usado como exemplo de matriz com largura de fator 2.

**Teorema 2.** Uma matriz simétrica tem largura de fator no máximo 2 se e só se é escalarmente diagonal dominante.

Outra forma alternativa de verificar que  $SDD_n \subseteq S_+^n$  seria pelo teorema de Gershgorin: todos os valores próprios de uma matriz  $A$  estão em pelo menos um dos discos  $D(a_{ii}, r_i)$ , onde  $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ . Isto implica imediatamente que as matrizes diagonais dominantes são positivas semidefinidas, já que os discos estarão contidos no semiespaço não negativo. Por outro lado, se  $DAD$  é positiva semidefinida,  $A$  também o é.

Para finalizar apresentamos agora, para fixar notação, uma especialização da Proposição 3 ao caso de interesse de largura de factor 2, indicada em [2].

**Proposição 4.** Uma matriz simétrica  $A$  é escalarmente diagonal dominante se e só se  $A = \sum_{i < j} M^{ij}$ ,

onde cada  $M^{ij}$  é uma matriz  $n \times n$  com zeros em todas as componentes exceto na submatriz  $2 \times 2$ ,

$$\begin{bmatrix} M_{ii}^{ij} & M_{ij}^{ij} \\ M_{ij}^{ij} & M_{jj}^{ij} \end{bmatrix} \text{ que é positiva semidefinida.}$$

Por esta proposição, podemos dizer, [1], que qualquer matriz escalarmente diagonal dominante, digamos  $M$ , pode ser escrita na forma:

$$M = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} V_i A_i V_i^T,$$

onde  $V_i$  são matrizes  $n \times 2$  cujas colunas contêm exatamente um elemento não nulo igual a 1 e  $A_i$  são matrizes  $2 \times 2$  simétricas e positivas semidefinidas.

Desta nova caracterização obtemos facilmente o cone dual das matrizes escalarmente diagonal dominantes:

$$SDD_n^* = \{X \in S^n : V_i^T X V_i \succeq 0, i = 1, \dots, \binom{n}{2}\},$$

ou equivalentemente,  $SDD_n^*$  é o cone das matrizes simétricas tais que todas as submatrizes principais  $2 \times 2$  são positivas semidefinidas.

Nesta secção introduzimos caracterizações de matrizes escalarmente diagonal dominantes que permitem otimizar sobre o cone dessas matrizes com recurso à programação semidefinida ou à programação cônica de segunda ordem, o que vai ser fundamental para os certificados de não negatividade que pretendemos introduzir. No entanto, isto pode parecer um excesso de maquinaria: se quisermos verificar se uma matriz fixa é escalarmente diagonal dominante, usando diretamente a definição obtemos um simples programa linear.

Como ilustração deste facto consideremos  $A$ , uma matriz  $3 \times 3$ . Mostrar que  $A$  é escalarmente diagonal dominante é equivalente a mostrar que

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix}$$

é diagonal dominante, para alguns  $D_1, D_2, D_3$  reais positivos. Chegamos a um sistema da forma:

$$\begin{cases} A_{11}D_1^2 \geq |A_{12}D_1D_2| + |A_{13}D_1D_3| \\ A_{22}D_2^2 \geq |A_{12}D_1D_2| + |A_{23}D_2D_3| \\ A_{33}D_3^2 \geq |A_{13}D_1D_3| + |A_{23}D_2D_3| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_{11}|D_1| \geq |A_{12}D_2| + |A_{13}D_3| \\ A_{22}|D_2| \geq |A_{12}D_1| + |A_{23}D_3| \\ A_{33}|D_3| \geq |A_{13}D_1| + |A_{23}D_2| \end{cases}$$

Ou seja, verificar se uma matriz é SDD é equivalente ao problema de exequibilidade para um programa linear, neste caso, o PL

$$\begin{aligned} \text{encontrar } x \in \mathbb{R}^3 \text{ s.a } & A_{11}x_1 \geq |A_{12}|x_2 + |A_{13}|x_3; \\ & A_{22}x_2 \geq |A_{12}|x_1 + |A_{23}|x_3; \\ & A_{33}x_3 \geq |A_{13}|x_1 + |A_{23}|x_2; \\ & x_1, x_2, x_3 > 0. \end{aligned}$$

Esta abordagem funciona bem para verificar se uma dada matriz é SDD, no entanto, se pretendermos considerar a matriz  $A$  como uma variável temos aqui um problema de restrições quadráticas, problemas estes que são em geral extremamente difíceis, pelo que a abordagem que desenvolvemos anteriormente terá de ser usada.

## 2.3 Programação Cónica

Nesta secção vamos apresentar alguns conceitos e definições relacionados com programação cónica, cuja utilização é indispensável na resolução dos problemas que vamos abordar. Essencialmente, devido à limitação da verificação da não negatividade de um polinómio (problema NP-difícil), caminhou-se no sentido de obter essa característica através das somas de quadrados, que tem associada a programação semidefinida. No entanto, esta não escala bem quando o tamanho do polinómio aumenta, o que obrigou a um novo estudo que leva a uma bifurcação de conceitos, as somas de binómios quadrados, que tem associada a programação cónica de segunda ordem e a soma de circuitos polinomiais não negativos que tem associada a programação geométrica.

Um problema de programação cónica tem o seguinte aspeto padrão:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \langle c, x \rangle \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \in K \end{aligned}$$

onde  $c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \langle c, x \rangle = c^T x$  e  $K$  é um cone convexo fechado.

Cada especificação de um cone  $K$  dá origem a um tipo de programação cónica, de entre os quais se salientam a programação linear, a programação semidefinida e a programação cónica de segunda ordem. Neste trabalho, no entanto, focamo-nos apenas nas programações semidefinida e cónica de segunda ordem pelo simples facto de se utilizarem este tipo de programas na resolução, de modo eficiente, de problemas associados à verificação da propriedade da soma de quadrados ou soma de binómios quadrados por parte de um polinómio.

### 2.3.1 Programação Semidefinida

De modo a verificar a decomposição em soma de quadrados de um polinómio utilizaremos uma ferramenta chamada programação semidefinida, que consiste basicamente num programa da forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle C, X \rangle \\ \text{s.a} \quad & \langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & X \in S_+^n \end{aligned}$$

com  $C, A_i \in S^n$  e  $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^T Y)$ .

Além disso, o seu programa dual padrão é expresso na forma:

$$\begin{aligned} \max_y \quad & b^T y \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^m y_i A_i \preceq C \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \max_y \quad & b^T y \\ \text{s.a} \quad & C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \in S_+^n \end{aligned}$$

**Exemplo 2.3.1.** Consideremos o seguinte problema de otimização semidefinida:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_{11} + x_{22} + x_{33} \\ \text{s.a} \quad & 2x_{12} = 2 \\ & 2x_{13} = 4 \\ & 2x_{23} = 6 \\ & X \in S_+^n \end{aligned}$$

Claramente se observa que  $C = I$ ,  $A_1 = E_{12}$ ,  $A_2 = E_{13}$ ,  $A_3 = E_{23}$ , onde  $E_{ij}$  são matrizes com zero em todas as posições exceto em  $(i, j) = (j, i)$  onde tomam o valor 1 e  $b = [2 \ 4 \ 6]^T$ . Portanto, as restrições são satisfeitas quando

$$\begin{bmatrix} x_{11} & 1 & 2 \\ 1 & x_{22} & 3 \\ 2 & 3 & x_{33} \end{bmatrix} \succeq 0.$$

Neste caso, o programa tem como solução  $x_{11} = 1$ ;  $x_{22} = 2$ ;  $x_{33} = 5$ , que dão o valor ótimo da função objetivo 8.

O seu dual toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2y_1 + 4y_2 + 6y_3 \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} 1 & -y_1 & -y_2 \\ -y_1 & 1 & -y_3 \\ -y_2 & -y_3 & 1 \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned}$$

Mostra-se neste caso que a solução ótima é obtida em  $y_1 = -1$ ;  $y_2 = 1$ ;  $y_3 = 1$ , onde o valor da função objetivo é 8. Nas Figuras 2.1 e 2.2 podemos observar as regiões admissíveis de cada um dos problemas.

Um resultado importante são os teoremas de dualidade fraca e forte que relacionam os programas primal e dual. A teoria da dualidade da programação semidefinida é um pouco mais complicada que a da programação linear e não é fundamental para o trabalho desenvolvido nesta dissertação, pelo que fica apenas uma versão simples do principal Teorema da dualidade.

**Proposição 5** (Dualidade de programação semidefinida). *Dados um par primal-dual de programas semidefinidos, o valor ótimo do primal é sempre maior ou igual que o do dual. Mais ainda, se o primal tiver uma solução admissível positiva definida então eles são iguais.*





Figura 2.1 Região admissível primal truncada.

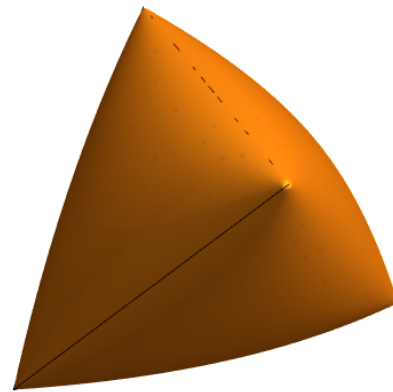


Figura 2.2 Região admissível dual.

### 2.3.2 Programação Cônica de Segunda Ordem

De modo a verificar a decomposição em soma de binômios quadrados de um polinômio pode ser usada uma ferramenta denominada programação cônica de segunda ordem.

Primeiramente definimos cone de segunda ordem,  $Q^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_n, \bar{x}), x_n \geq \|\bar{x}\|\}$  onde  $\bar{x}$  é um subvetor do vetor  $x$  com entradas de 1 a  $n - 1$  e  $\|\cdot\|$  é a norma euclidiana definida por:

$$\|\bar{x}\| = \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Então, um problema de programação cônica de segunda ordem é, tipicamente, um problema da forma

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1^T x_1 + \cdots + c_r^T x_r \\ \text{s.a} \quad & A_1 x_1 + \cdots + A_r x_r = b \\ & x_i \in Q^{n_i}, \quad i = 1, \dots, r \end{aligned}$$

onde  $A_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$ . Note-se que é possível reescrever qualquer problema de programação de segunda ordem como um programa semidefinido, mas pode perder-se eficiência numérica com essa transformação.



## Capítulo 3

# Polinómios Não Negativos e Soma de Quadrados

Ao longo desta secção vamos apresentar uma breve introdução à teoria clássica dos polinómios não negativos e somas de quadrados. Esta exposição é guiada maioritariamente por [3]. Começamos antes de mais por definir monómio e polinómio.

**Definição 7.** Chamamos monómio com grau  $\sum_{i=1}^n \alpha_i$  a um produto  $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ , com  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  e  $x$  um vetor de  $n$  variáveis formais.

Um polinómio (real) é uma combinação linear finita de monómios,  $p = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$  onde  $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  e  $c_{\alpha} \in \mathbb{R}$ .

Consideramos  $\mathbb{R}[x]_n^d$  como sendo o conjunto dos polinómios reais com  $n$  variáveis e grau menor ou igual a  $d$ . Quando todos os monómios têm o mesmo grau dizemos que o polinómio é homogéneo ou uma forma.

Tendo como objetivo a minimização de polinómios, interessa-nos saber quando um polinómio é não negativo.

**Definição 8.** Um polinómio  $p \in \mathbb{R}[x]_n^d$  é não negativo se  $p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Denotamos por  $POS_n^{2d}$  o cone convexo de todos os polinómios não negativos de  $n$  variáveis e grau menor ou igual a  $2d$ , isto é

$$POS_n^{2d} = \left\{ p \in \mathbb{R}[x]_n^{2d} : p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

O problema de minimizar um polinómio globalmente em  $\mathbb{R}^n$  é um problema NP-difícil, que pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \min p(x) \\ \text{s.a } &x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Reformulando, podemos escrevê-lo usando a não negatividade de um polinómio,

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \max \lambda \\ \text{s.a. } & p(x) - \lambda \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Mas simplesmente verificar se um polinómio é não negativo é em si NP-difícil. Assim introduziu-se uma forma mais simples de averiguar a não negatividade, chamada soma de quadrados (SOS).

### 3.1 Somas de Quadrados

Abrimos a subsecção com a definição do certificado de não-negatividade mais utilizado, as somas de quadrados.

**Definição 9.** Um polinómio  $p \in \mathbb{R}[x]_n^{2d}$  é soma de quadrados (SOS) se existem  $q_1, \dots, q_m \in \mathbb{R}[x]_n^d$  tal que  $p(x) = \sum_{i=1}^m q_i^2(x)$ .

Denotamos por  $SOS_n^{2d}$  o cone dos polinómios de grau  $2d$  com  $n$  variáveis que são soma de quadrados, isto é,

$$SOS_n^{2d} = \left\{ p(x) = \sum_i q_i^2(x), q_i \in \mathbb{R}[x]_n^d \right\}.$$

**Exemplo 3.1.1.** O polinómio

$$p(x) = 5x^4 + 8x^3y + 17x^2y^2 + 6xy^3 + 9y^4$$

é soma de quadrados, podendo ser decomposto na forma

$$p(x) = (x^2 + 2xy)^2 + (2x^2 + xy + 3y^2)^2.$$

Uma observação trivial é que ser soma de quadrados é uma condição suficiente para um polinómio ser não negativo. A verificação da existência de um tal certificado pode ser resolvida usando programação semidefinida. Para isso, escrevemos como vetor coluna os monómios até ao grau  $d$ ,

$$\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_d = z(x)_d := \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n & x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_n^d \end{bmatrix}^T,$$

e utilizamos o seguinte Teorema.

**Teorema 3.** Um polinómio  $p$  de grau  $2d$  é soma de quadrados se e só se  $p(x) = z(x)_d^T Q z(x)_d$  onde  $Q$  é uma matriz simétrica e positiva semidefinida.

*Demonstração.* Suponhamos que  $p$  é soma de quadrados, ou seja  $p(x) = \sum_{i=1}^n q_i^2$ . Sendo  $v_i$  o vetor dos coeficientes de  $q_i$ , podemos escrever equivalentemente

$$p(x) = \sum_{i=1}^n (v_i^T z(x)_d)^2,$$

ou ainda,

$$p(x) = \sum_{i=1}^n z(x)_d^T v_i v_i^T z(x)_d.$$

Isto por sua vez pode ser representado na forma  $p(x) = z(x)_d^T Q z(x)_d$ , em que  $Q = \sum_{i=1}^n v_i v_i^T \succeq 0$ .  $\square$

Chamamos a atenção para o facto de que quando  $p$  é um polinómio homogéneo, podemos escolher o vetor dos monómios  $z(x)_d$  de modo que este seja também homogéneo de grau exatamente  $d$ , enquanto que quando o polinómio  $p$  não é homogéneo, o vetor dos monómios  $z(x)_d$  é de grau no máximo  $d$ .

Podemos então relaxar o problema de averiguar a não negatividade de  $p$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{SOS} = \max \lambda \\ \text{s.a } p(x) - \lambda \text{ é SOS.} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \lambda_{SOS} = \max \lambda \\ \text{s.a } p(x) - \lambda = z(x)_d^T Q z(x)_d \\ Q \succeq 0. \end{aligned}$$

Como  $SOS_n^{2d} \subseteq POS_n^{2d}$  vem que  $\lambda_{SOS} \leq \lambda^*$  é um minimizante para o problema de averiguar a não negatividade de um polinómio.

Este problema pode ser resolvido de modo eficiente para matrizes  $Q$  pequenas, porque é um programa semidefinido, no entanto, a matriz  $Q$  é  $\binom{n+d}{d} \times \binom{n+d}{d}$  para polinómios não homogéneos e  $\binom{n+d-1}{d} \times \binom{n+d-1}{d}$  para polinómios homogéneos, pelo que a dimensão do problema cresce muito rapidamente.

Para melhor perceber este conceito e de que forma a sua utilização nos ajuda a verificar a caracterização de somas de quadrados de um dado polinómio, tomemos como exemplo um polinómio  $p$  de grau seis com três variáveis. Vimos que mostrar que este polinómio era soma de quadrados era equivalente a mostrar que

$$p = \begin{bmatrix} x^2y & xy^2 & z^3 & xyz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2y \\ xy^2 \\ z^3 \\ xyz \end{bmatrix}$$

com  $A$  uma matriz positiva semidefinida. Expandindo o produto anterior, obtemos

$$\begin{aligned} p = & A_{11}x^4y^2 + 2A_{12}x^3y^3 + 2A_{13}x^2yz^3 + 2A_{14}x^3y^2z + A_{22}x^2y^4 + 2A_{23}xy^2z^3 + 2A_{24}x^2y^3z \\ & + A_{33}z^6 + 2A_{34}xyz^4 + A_{44}x^2y^2z^2 \end{aligned}$$

e comparando os coeficientes chegamos a um sistema de equações lineares onde as variáveis são os  $A_{ij}$ . Ou seja, verificar se um polinômio é soma de quadrados é equivalente a determinar se existe alguma matriz positiva semidefinida que verifique as equações lineares, o que pode ser efetuado computacionalmente uma vez que existem algoritmos eficientes para esse propósito, e os comandos seguintes, utilizando o pacote Yalmip corrido em Matlab, ilustram isso mesmo para o problema de minimizar  $\lambda$  tal que  $x^2y^4 + x^4y^2 + z^6 + \lambda x^2y^2z^2$  é não negativo ou, mais precisamente, soma de quadrados.

```

sdpvar x y z lambda;
p = x ^ 2*y ^ 4 + x ^ 4*y ^ 2 + z ^ 6 + lambda*x ^ 2*y ^ 2*z ^ 2;
d = 3;
v = monolist([x y z], d, d);
n = length(v);
A = sdpvar(n);
G = [coefficients(p - v'*A*v, [x y z]) == 0];
G = [G, A >= 0];
solvesdp(G,lambda);
double(lambda)
Output: 0

```

No programa, começamos por definir as variáveis e introduzir um polinômio, neste caso homogêneo, de grau  $2d$  que queremos verificar para que  $\lambda$  este é soma de quadrados. De seguida obtemos um vetor, usando a função *monolist*, com todos os monômios de grau  $d$  (daí o segundo  $d$ ) com três variáveis e o tamanho desse mesmo vetor indexado em  $n$  que vai ser precisamente o tamanho da matriz simétrica  $A$ . Posteriormente apenas acrescentamos as restrições de igualdade dos coeficientes de  $p$  e  $v^T Av$ , assim como a restrição de  $A \succeq 0$ . Finalmente, utilizando o comando *solvesdp* obtemos o menor  $\lambda$  para o qual o polinômio introduzido é soma de quadrados.

**Exemplo 3.1.2.** Consideremos  $p(x) = 2x_1^4 + 2x_1^3x_2 - x_1^2x_2^2 + 5x_2^4$ , queremos verificar se o polinômio é SOS. O objetivo é:

$$\begin{aligned}
 & \max 0 \\
 & \text{s.a } z(x)_d^T Q z(x)_d \\
 & \quad Q \succeq 0
 \end{aligned}$$

Para isso temos que escrever  $p$  da forma:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \\
 &= q_{11}x_1^4 + q_{33}x_2^4 + (q_{22} + 2q_{13})x_1^2x_2^2 + 2q_{12}x_1^3x_2 + 2q_{23}x_1x_2^3
 \end{aligned}$$

para alguma matriz  $Q \succeq 0$ . Logo, através da igualdade entre as duas expressões de  $p$ , sabemos que

$$q_{11} = 2; q_{33} = 5; q_{22} + 2q_{13} = -1; 2q_{12} = 2; q_{23} = 0.$$

Por conseguinte,  $p$  é SOS se e só se existe  $z$  tal que

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & z \\ 1 & -1-2z & 0 \\ z & 0 & 5 \end{bmatrix} \succeq 0,$$

o que ocorre para  $z \in \left[-3, \frac{5-\sqrt{65}}{4}\right]$ , uma vez que os determinantes das submatrizes principais de  $Q$  são todos maiores ou iguais que 0.

### 3.2 Polinómios r-SOS

Intuitivamente, podemos questionar-nos quando a condição anterior também é necessária, ou seja, quando é que um polinómio não negativo pode ser escrito como soma de quadrados, o que foi verificado por Hilbert [8], nos três casos seguintes:

- Polinómios com uma variável ( $n = 1$ );
- Polinómios quadráticos ( $2d = 2$ );
- Polinómios de quarto grau com duas variáveis ( $n = 2, 2d = 4$ ).

Para todos os outros casos existem polinómios não negativos que não são soma de quadrados. Um exemplo disso é o polinómio de Motzkin,

$$p(x) = x^4y^2 + x^2y^4 + z^6 - 3x^2y^2z^2,$$

que é não negativo. Para ver isso repare-se que, a partir da desigualdade aritmética-geométrica, temos  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ . Ora fazendo  $a = x^4y^2, b = x^2y^4, c = z^6$  obtemos a não negatividade.

Por outro lado, este polinómio não é soma de quadrados. Supondo que o seria, isto é,  $p(x) = \sum_i q_i^2$  e, sendo  $p$  homogéneo, podemos à partida dizer que cada  $q_i$  tem que ser uma forma de grau 3. Isto é,  $p$  seria da forma:

$$p(x) = \sum_i (A_i x^3 + B_i x^2 y + C_i x^2 z + D_i x y^2 + E_i x y z + F_i x z^2 + G_i y^3 + H_i y^2 z + I_i y z^2 + J_i z^3)^2.$$

Assim, como  $p$  não possui os termos  $x^6, x^4 z^2, x^2 z^4, y^6, y^4 z^2, y^2 z^4$ , podemos concluir sequencialmente que

$$A_i = C_i = F_i = G_i = H_i = I_i = 0,$$

para todo o  $i$ , logo  $p(x) = \sum_i (B_i x^2 y + D_i x y^2 + E_i x y z + J_i z^3)^2$  e portanto, o coeficiente de  $x^2 y^2 z^2$  em  $p$  é

$$\sum_i E_i^2 \geq 0$$

o que origina uma contradição.

Vimos assim explicitamente que nem todos os polinómios não negativos são soma de quadrados. No

entanto, o 17º Problema de Hilbert, resolvido por Artin em 1927, garante que todo o polinómio não negativo é soma de quadrados de frações racionais. Por essa razão, tentou averiguar-se se existiria algum fator uniforme que, multiplicado ao polinómio original, o tornaria SOS, chegando-se aos polinómios  $r$ -SOS, isto é, polinómios que quando multiplicados por um fator da forma  $(\sum_{i=1}^n x_i^2)^r$  são SOS. Temos claramente as inclusões

$$SOS \subseteq 1-SOS \subseteq 2-SOS \subseteq \dots \subseteq r-SOS.$$

Este alargamento da condição de soma de quadrados é efetivo, uma vez que qualquer polinómio positivo pertence a algum  $r$ -SOS, para  $r$  suficientemente grande, como demonstrado por Reznick em [14].

**Teorema 4.** *Seja  $p \in \mathbb{R}[x]$  um polinómio homogéneo. Se  $p > 0$  em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , então existe  $r \in \mathbb{N}$  para o qual o polinómio  $p \times (\sum_{i=1}^n x_i^2)^r$  é soma de quadrados.*

Apresentamos agora um exemplo ilustrativo deste Teorema que demonstra que o polinómio de Motzkin é 1-SOS.

**Exemplo 3.2.1.** *O polinómio de Motzkin, que já foi visto não ser soma de quadrados, quando multiplicado pelo fator  $(x^2 + y^2 + 1)$  passa a verificar essa condição, uma vez que,*

$$(x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2)(x^2 + y^2 + 1) = x^6y^2 + 2x^4y^4 - 2x^4y^2 + x^2 + x^2y^6 - 2x^2y^4 + y^2 - 3x^2y^2 + 1$$

*pode ser decomposto como soma de quadrados na forma*

$$2(\frac{1}{2}x^3y + \frac{1}{2}xy^3 - xy)^2 + (x^2y - y)^2 + (xy^2 - x)^2 + \frac{1}{2}(x^3y - xy)^2 + \frac{1}{2}(xy^3 - xy)^2 + (x^2y^2 - 1)^2$$

*sendo portanto 1-SOS.*

Contemplamos ainda outro exemplo verificativo deste teorema.

**Exemplo 3.2.2.** *Consideremos o polinómio*

$$p(x) = x^2y^4 + y^2z^4 + x^4z^2 - 3x^2y^2z^2.$$

*Este polinómio não é soma de quadrados. Para ver isto notemos primeiro que usando um raciocínio semelhante ao usado para o polinómio de Motzkin (e que sistematizaremos mais tarde) podemos mostrar que a ser soma de quadrados, os termos teriam de usar apenas os monómios  $xy^2, yz^2, x^2z$  e  $xyz$ . Teríamos de encontrar  $Q$  tal que  $Q \succeq 0$  e, considerando  $z(x)_d = [xy^2 \ yz^2 \ x^2z \ xyz]$  como o vetor dos monómios,  $z(x)_d^T Q z(x)_d = p(x)$ . Mas a única matriz que satisfaz o pretendido é a matriz*

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

*que claramente não é positiva semidefinida.*

*Em contrapartida, multiplicando  $p$  por  $(x^2 + y^2 + z^2)$  obtemos*



$$p(x) \times (x^2 + y^2 + z^2) = x^4y^4 + x^2y^6 - 2x^2y^4z^2 - 2x^2y^2z^4 + y^4z^4 + y^2z^6 + x^6z^2 - 2x^4y^2z^2 + x^4z^4.$$

Considerando  $z(x)_d = [x^2y^2 \quad xy^3 \quad xy^2z \quad xyz^2 \quad y^2z^2 \quad yz^3 \quad x^3z \quad x^2yz \quad x^2z^2]$ , obtemos a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que é positiva semidefinida (Teorema de Gershgorin), pelo que  $p$  é 1-SOS.

**Observação:** O fator multiplicativo que aparece neste tipo de polinómios r-SOS, e posteriormente em r-SOBS também, é  $(\sum_{i=1}^n x_i^2)^r$  se o polinómio considerado for homogéneo e é  $(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^r$  caso contrário.

No entanto, a soma de quadrados apesar de ser mais facilmente verificável que a não negatividade, não lida bem com o aumento do tamanho do polinómio (quer em grau, quer em variáveis), além de ter problemas de condicionamento. Surge então um dos métodos alternativos às somas de quadrados, que são as somas de binómios quadrados, que iremos abordar no próximo capítulo, que embora não englobem todos os polinómios SOS, são mais fáceis de calcular e cobrem uma vasta gama de problemas. Existe aqui uma troca entre poder (somas de quadrados) e rapidez (somas de binómios quadrados).

### 3.3 Polítopos de Newton

Para finalizar as noções básicas de polinómios que precisaremos no decorrer do trabalho, introduziremos agora a noção de polítopo de Newton, um objeto geométrico associado a cada polinómio e que nos permitirá deduzir propriedades algébricas do polinómio a partir de propriedades geométricas e combinatórias deste objeto. Em particular vamos ver como o podemos usar para simplificar a busca por somas de quadrados, sistematizando as simplificações que fizemos nos exemplos da secção anterior.

**Definição 10.** Consideremos o polinómio

$$p(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathbb{R}[x].$$

O polítopo de Newton de  $p$ , denotado por  $New(p)$  é o invólucro convexo do suporte de  $p$ , isto é,

$$New(p) = \text{conv}(\{\alpha \in \mathbb{N}^n : c_{\alpha} \neq 0\})$$

e  $\text{vert}(p)$  é o conjunto dos vértices de  $\text{New}(p)$ . Além disso,  $\text{int}(p)$  é o conjunto dos pontos do suporte de  $p$  que estão no interior de  $\text{New}(p)$ .

**Exemplo 3.3.1.** Consideremos o polinómio  $p(x) = 1 + xy^3 + x^4y^2 - x^2y^2$ .

O  $\text{New}(p)$  é o invólucro convexo constituído pelos pontos  $(0,0)$ ;  $(1,3)$ ;  $(4,2)$ ;  $(2,2)$ , sendo os seus vértices os pontos  $(0,0)$ ;  $(1,3)$ ;  $(4,2)$  e o seu ponto interior  $(2,2)$ . Na Figura 3.1 podemos observar a sua ilustração.

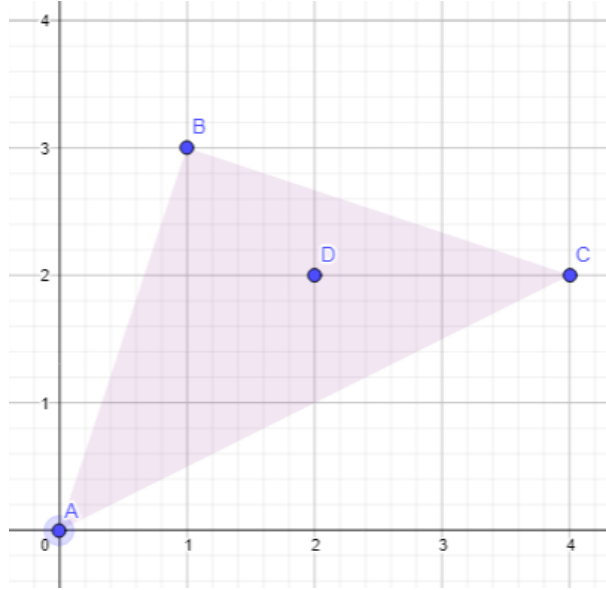


Figura 3.1 Polígono de Newton de  $p(x) = 1 + xy^3 + x^4y^2 - x^2y^2$

O Teorema que apresentamos a seguir, demonstrado por Reznick em [13], vai ajudar a tornar o problema de otimização mais eficiente em termos práticos pois vai permitir reduzir o vetor de todos os monómios de grau no máximo  $d$  apenas ao vetor dos monómios cujo dobro do expoente está contido no polígono de Newton do polinómio original. Assim, ao procurar uma matriz  $Q$  tal que  $z(x)_d^T Q z(x)_d = p(x)$  podemos potencialmente reduzir a dimensão da matriz que procuramos de forma substancial. Não só isso permitirá a computação numérica de mais exemplos mas trás também vantagens teóricas, permitindo as simplificações do tipo das que usámos no Exemplo 3.2.2.

**Teorema 5.** Seja  $\text{New}(p)$  o polígono de Newton de  $p$ . Se  $p(x) = \sum_{i=1}^N q_i^2$ , então  $2\text{New}(q_i) \subseteq \text{New}(p)$ , para cada  $q_i$ .

*Demonstração.* Seja cada  $q_i = \sum_{j=1}^{M_i} c_{ij} x^{a_{ij}}$  e denotemos por  $K$  o invólucro convexo da união dos polígonos de Newton de cada  $q_i$ . Para provar a inclusão pretendida basta mostrar que para cada  $a_{ij}$  um vértice de  $K$ ,  $2a_{ij}$  está em  $\text{New}(p)$ . Vamos mostrar mais concretamente que  $2a_{ij}$  aparece como expoente em  $p$ . Temos

$$p = \sum_{i=1}^N q_i^2 = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^{M_i} c_{ij} x^{a_{ij}} \right)^2 = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^{M_i} c_{ij}^2 x^{2a_{ij}} + 2 \sum_{k=1}^{M_i} \sum_{l=k+1}^{M_i} c_{ik} c_{il} x^{a_{ik} + a_{il}} \right).$$

Para  $c_{ij}^2 x^{2a_{ij}}$  ser cancelado, como os  $c_{ij}^2 x^{2a_{ij}}$  são todos positivos, terá de haver um  $c_{ik}c_{il} < 0$  com  $x^{a_{ik}}x^{a_{il}} = x^{2a_{ij}}$ , pelo que,  $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ik} + a_{il})$ , mas, dessa forma, como  $a_{ik}$  e  $a_{il} \in K$ ,  $a_{ij}$  não seria vértice de  $K$ , o que por conseguinte nos levaria a uma contradição, pelo que obtemos assim o resultado.  $\square$

**Exemplo 3.3.2.** Consideremos o polinómio

$$p(x) = x^8 y^{10} + 2x^8 y^5 + x^8 + x^4 y^{10} + 4x^4 y^5 + 3x^4 + 2x^2 y^{10} + 4x^2 y^5 + 2x^2 + y^{10} + 2y^5 + 2$$

O  $\text{New}(p)$  é o invólucro convexo dos pontos:

$$(8, 10), (8, 5), (8, 0), (4, 10), (4, 5), (4, 0), (2, 10), (2, 5), (2, 0), (0, 10), (0, 5), (0, 0);$$

que é o retângulo  $R = [0, 8] \times [0, 10]$ . Isto significa que se  $p$  for soma de quadrados, cada termo terá de usar apenas monómios da forma  $x^a y^b$  com  $0 \leq a \leq 4$  e  $0 \leq b \leq 5$ . De facto temos

$$p(x) = (1 + x^4 + x^4 y^5)^2 + (1 + x^2 + y^5 + x^2 y^5)^2 =: q_1(x)^2 + q_2(x)^2$$

onde se vê claramente que  $q_1$  e  $q_2$  obedecem a essas condições, como ilustrado na Figura 3.2.

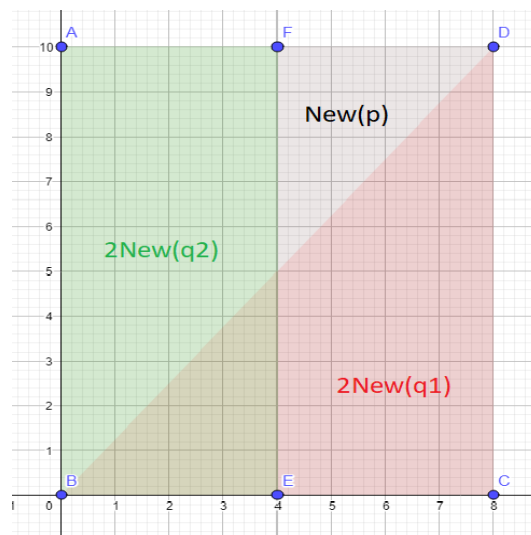


Figura 3.2 Polítopos de Newton



## Capítulo 4

# Alternativas à Soma de Quadrados

Neste capítulo apresentamos dois métodos alternativos à soma de quadrados recentemente propostos: a soma de binómios quadrados (SOBS), que envolve programação cónica de segunda ordem e a soma de circuitos polinomiais não negativos (SONC), que envolve programação geométrica.

### 4.1 Somas de Binómios Quadrados ou SDSOS

Tendo por base o artigo de Amir Ali Ahmadi e Anirudha Majumdar [2] ao longo desta secção vamos apresentar uma versão mais restritiva mas mais leve em termos computacionais das somas de quadrados. Começamos por apresentar a definição de SDSOS ou soma de binómios quadrados ilustrando-a com um exemplo simples, para posteriormente apresentarmos certificados relacionados com este tipo de polinómios.

**Definição 11.** *Um polinómio  $p$  é soma de quadrados escalarmente diagonal dominante (SDSOS) ou soma de binómios quadrados (SOBS) se puder ser escrito na forma*

$$p = \sum_{i,j} (\alpha_{ij}m_i + \beta_{ij}m_j)^2$$

onde  $m_i, m_j$  são monómios e  $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$ . Denotamos por  $SDSOS_n^{2d}$  o conjunto dos polinómios de grau  $2d$  com  $n$  variáveis que são SDSOS.

**Exemplo 4.1.1.** *Consideremos o polinómio homogéneo de grau 4 e duas variáveis*

$$p(x) = x^4 + 1.6x^3y + 4.2x^2y^2 + 2.8xy^3 + 2y^4,$$

*este polinómio é soma de binómios quadrados já que pode ser decomposto na forma*

$$p(x) = 0.4(x^2 + 2xy)^2 + 0.6(x^2 + y^2)^2 + 1.4(xy + y^2)^2.$$

Claramente qualquer polinómio que seja soma de binómios quadrados é soma de quadrados pelo que temos as seguintes inclusões:

$$SDSOS_n^{2d} \subseteq SOS_n^{2d} \subseteq POS_n^{2d}.$$

Ao passar de certificados usando somas de quadrados para certificados usando apenas somas de binômios quadrados, perdemos potencialmente a capacidade de certificar muitos polinômios. Isto será compensado pelos ganhos na eficiência do procedimento, que nos permitirão procurar certificados com maior número de variáveis ou maior grau do que podíamos alcançar com a soma de quadrados clássica. Para isso precisamos de começar por estabelecer uma ferramenta que nos permita otimizar sobre os polinômios SDSOS.

**Teorema 6.** *Seja, novamente,  $z(x)_d$  o vetor dos monômios de grau no máximo  $d$ . Um polinômio  $p$  de grau  $2d$  é uma soma de quadrados escalarmente diagonal dominante (SDSOS) se e só se admitir a representação*

$$p(x) = z(x)_d^T Q z(x)_d$$

onde a matriz  $Q$  é escalarmente diagonal dominante (SDD).

*Demonstração.* A demonstração é muito semelhante à usada para demonstrar o resultado análogo para soma de quadrados. Seja  $p$  um polinômio que é soma de binômios quadrados, ou seja,  $p = \sum_i p_i^2$ , com  $p_i$  binômios de grau no máximo  $d$ . Identificando os polinômios  $p_i$  com os vetores dos seus coeficientes  $\tilde{p}_i$ , isto equivale a dizer

$$p(x) = \sum_i (z(x)_d^T \tilde{p}_i)^2,$$

onde os  $\tilde{p}_i$  têm no máximo duas entradas não nulas. Reescrevendo de novo, isto é o mesmo que dizer

$$p(x) = z(x)_d^T Q z(x)_d$$

para algum  $Q = \sum_i \tilde{p}_i \tilde{p}_i^T$ . Mas  $\tilde{p}_i \tilde{p}_i^T$  são quaisquer matrizes simétricas e positivas semidefinidas de suporte  $2 \times 2$ , pelo que  $Q$  ser decomponível desta forma equivale, pela Proposição 4, a ser SDD, como pretendido.  $\square$

**Exemplo 4.1.2.** *Consideremos o polinômio  $p(x) = 10x^4 + 10x^3y + 8x^2y^2 + 2xy^3 + 8y^4$ . Este polinômio é SDSOS, uma vez que existe uma matriz simétrica  $Q, \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,*

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

tal que  $p(x) = z(x)_d^T Q z(x)_d$ , onde  $z(x)_d = [x^2 \quad xy \quad y^2]^T$  e  $Q$  é SDD como visto anteriormente no Exemplo 2.2.1. Além disso, uma decomposição possível pode ser lida a partir da decomposição da matriz apresentada nesse exemplo:

$$p(x) = (x^2 + 2y^2)^2 + (3x^2 + \frac{5}{3}xy)^2 + (xy + y^2)^2 + \frac{2}{9}(xy)^2 + 3(y^2)^2.$$

### 4.1.1 Implementação Numérica

Recordemos que o nosso objetivo é a minimização de um polinómio  $p$ , que já vimos poder escrever como

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \max \lambda \\ \text{s.a } p(x) - \lambda &\geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

No capítulo anterior vimos que podíamos relaxar a não negatividade substituindo-a pela condição de ser soma de quadrados. Temos agora então uma nova relaxação do problema, obtida substituindo a não negatividade pela condição de ser soma de binómios quadrados. Em termos matriciais temos a formulação seguinte.

$$\begin{aligned} \lambda_{SDSOS} &= \max \lambda \\ \text{s.a } p(x) - \lambda &= z(x)_d^T Q z(x)_d \\ Q &\in SDD. \end{aligned}$$

Usando a Proposição 4, podemos reescrever esta formulação na forma

$$\begin{aligned} \lambda_{SDSOS} &= \max \lambda \\ \text{s.a } p(x) - \lambda &= z(x)_d^T Q z(x)_d \\ Q &= \sum_{i < j} M_{2 \times 2}^{ij} \\ M_{2 \times 2}^{ij} &\succeq 0. \end{aligned}$$

Passamos de uma restrição semidefinida envolvendo matrizes  $N \times N$  para  $\binom{N}{2}$  restrições  $2 \times 2$ , que podem ser reescritas como restrições de segunda ordem, como se mostra explicitamente abaixo.

$$\begin{aligned} \lambda_{SDSOS} &= \max \lambda \\ \text{s.a } p(x) - \lambda &= z(x)_d^T Q z(x)_d \\ Q &= \sum_{i < j} M_{2 \times 2}^{ij} \\ M_{ii}^{ij} + M_{jj}^{ij} &\geq 0. \\ \left\| \begin{pmatrix} 2M_{ij}^{ij} \\ M_{ii}^{ij} - M_{jj}^{ij} \end{pmatrix} \right\| &\leq M_{ii}^{ij} + M_{jj}^{ij}. \end{aligned}$$

Para utilizar este resultado vamos usar a formulação que usa as matrizes  $2 \times 2$  por facilidade de implementação. De novo recorreremos ao Matlab, com recurso ao pacote Yalmip. Abaixo apresenta-se uma versão do algoritmo utilizado para verificar se um polinómio é soma de binómios quadrados. Note-se que a formulação é linear nos coeficientes do polinómio  $p$  a testar, pelo que podemos considerá-los como variáveis e otimizar qualquer combinação linear deles no conjunto dos polinómios SDSOS e, em particular, calcular  $\lambda_{SDSOS}$ .

```

sdpvar variáveis;
p = polinómio homogéneo de grau 2d;
d = metade do grau do polinómio;
v = monolist([vetor com as variáveis], d, d);
n = length(v);
A = sdpvar(n);
G = [coefficients(p - v'*A*v, [vetor com as variáveis]) == 0];
X11 = sdpvar(n)
X22 = sdpvar(n)
for i = 1 : n
    l = 0
    for k = 1 : i - 1
        l = l + X22(k,i);
    end
    for k = i + 1 : n
        l = l + X11(i,k);
    end
    G = [G, A(i,i) == l];
end
for i = 1 : n
    for j = i + 1 : n
        G = [G, [X11(i,j) A(i,j); A(i,j) X22(i,j)] >= 0];
    end
end
solvesdp(G,0);

```

Neste programa, começamos por definir as variáveis e introduzir o polinómio  $p$  que queremos verificar se é soma de binómios quadrados. De seguida obtemos um vetor, usando a função *monolist*, com todos os monómios de grau  $d$  e o tamanho desse mesmo vetor que vai ser precisamente o tamanho da matriz simétrica  $A$ . Posteriormente apenas acrescentamos a restrição de igualdade dos coeficientes de  $p$  e  $v^T A v$  e as restrições associadas à largura de fator. Se queremos escrever  $A$  como soma de matrizes positivas semidefinidas com suporte  $2 \times 2$ , podemos assumir que a matriz de suporte nas linhas  $\{i, j\}$  é da forma

$$\begin{bmatrix} X11(i, j) & A(i, j) \\ A(i, j) & X22(i, j) \end{bmatrix}$$

pelo que basta impor que estas matrizes sejam positivas semidefinidas e que a soma delas dê de facto a matriz  $A$ . Como fora da diagonal isso está já garantido pela forma das matrizes, basta garantir o mesmo na diagonal, ou seja, que

$$A(i, i) = \sum_{k>i} X11(i, k) + \sum_{k<i} X22(k, i) = l$$



para todo o  $i$ . Finalmente, utilizando o comando *solvesdp* verificamos o pretendido, ou seja, se o polinómio introduzido é soma de binómios quadrados, o que acontecerá se o problema for admissível.

Apesar da eficiência da formulação acima apresentada, por questões que se prendem com estabilidade numérica dos *solvers* gerais que estamos a usar e facilidade de leitura dos resultados, vamos por vezes utilizar o Teorema 1 para este cálculo, o que resulta numa formulação equivalente do ponto de vista teórico mas mais pesada do ponto de vista prático e um pouco mais robusta a erros. Como vamos essencialmente considerar nos nossos resultados problemas de pequena dimensão, a adoção desta versão faz muitas vezes sentido. Ficamos assim com o problema seguinte.

$$\begin{aligned} \lambda_{SDSOS} = \max \lambda \\ \text{s.a } p(x) - \lambda = z(x)_d^T Q z(x)_d \\ \bar{Q} \in S_+^n \end{aligned}$$

em que  $\bar{Q}$  é uma matriz com elementos diagonais iguais aos de  $Q$  mas fora da diagonal os elementos são da forma  $-|Q_{ij}|$ . Antes de mais, vamos explicar a razão pela qual este programa é ainda um programa semidefinido, uma vez que não apresenta a sua forma padrão, já que envolve valores absolutos.

**Teorema 7.** *Dada uma matriz  $X$  simétrica com diagonal não negativa, a matriz  $\bar{X}$  dada por*

$$\bar{X}_{ij} = \begin{cases} X_{ii}, & i = j \\ -|X_{ij}|, & i \neq j \end{cases}$$

*é positiva semidefinida se e só se existirem valores  $t_{ij} \geq |x_{ij}|$  tais que se tenha*

$$X' = \begin{bmatrix} x_{11} & -t_{12} & -t_{13} & \cdots & -t_{1n} \\ -t_{12} & x_{22} & -t_{23} & \cdots & -t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -t_{1n} & -t_{2n} & -t_{3n} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \succeq 0.$$

*Demonstração.* Começemos por provar a primeira implicação. Se  $\bar{X}$  é positiva semidefinida, podemos fazer  $t_{ij} = |x_{ij}|$  e temos o pretendido.

Para provar a implicação recíproca, suponhamos que existe  $X'$  nas condições pretendidas. Então  $X'$  é escalarmente diagonal dominante pelo Teorema 1 e, em particular, existe uma matriz diagonal positiva  $D$  tal que  $X'' = DX'D$  é diagonal dominante. Mas então, decrescer, em módulo, as entradas de  $X''$  fora da diagonal ainda a mantém diagonal dominante, pelo que todas as matrizes em

$$[X''] = \{X \in S^n : X_{ii} = X''_{ii} \text{ e } -|X''_{ij}| \leq X_{ij} \leq |X''_{ij}|\}$$

são diagonal dominantes. Logo

$$D^{-1} [X''] D^{-1} = [X'] := \{X \in S^n : X_{ii} = X'_{ii} \text{ e } -|X'_{ij}| \leq X_{ij} \leq |X'_{ij}|\}$$

ainda possui apenas matrizes SDD e, como tal, positivas semidefinidas e, como  $\bar{X} \in [X']$ , temos o resultado.  $\square$

Isto significa que o problema acima pode ser reescrito na forma de um programa semidefinido usual adicionando variáveis adicionais  $t_{ij}$ . Obtemos o problema seguinte.

$$\begin{aligned} \lambda_{SDSOS} = \max \lambda \\ \text{s.a. } p(x) - \lambda = z(x)_d^T Q z(x)_d \\ t_{ij} \geq Q_{ij} \\ t_{ij} \geq -Q_{ij} \\ \begin{bmatrix} Q_{11} & -t_{12} & -t_{13} & \cdots & -t_{1n} \\ -t_{12} & Q_{22} & -t_{23} & \cdots & -t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -t_{1n} & -t_{2n} & -t_{3n} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

Na prática o Yalmip é capaz de fazer a transformação descrita acima automaticamente pelo que usaremos a formulação com valores absolutos, adaptando a formulação anterior para obter o seguinte *script*.

```
sdpvar variáveis;
p = polinómio homogéneo de grau 2d;
d = metade do grau do polinómio;
v = monolist([vetor com as variáveis], d, d);
n = length(v);
A = sdpvar(n);
G = [coefficients(p - v'*A*v, [vetor com as variáveis]) == 0];
M = 2*diag(diag(A)) - abs(A);
G = [G, M >= 0];
solvesdp(G,0);
```

## 4.2 Polinómios r-SDSOS

Tal como no caso das somas de quadrados, podemos tentar alargar a classe de polinómios SDSOS com recurso à utilização de multiplicadores. Por analogia ao caso da soma de quadrados, podemos considerar o produto do polinómio a certificar pelo fator  $(\sum_{i=1}^n x_i^2)^r$ , no caso do polinómio ser homogéneo e  $(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^r$  caso contrário, para algum  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , e verificar se o produto resultante é SDSOS.

**Definição 12.** Para um inteiro  $r \geq 0$ , dizemos que o polinómio homogéneo  $p(x) = p(x_1, \dots, x_n)$  é *r-SDSOS* se

$$p(x) \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^r \text{ é SDSOS.}$$

Denotamos por  $r\text{SDSOS}_n^{2d}$  os polinômios de grau  $2d$  com  $n$  variáveis que são  $r$ -SDSOS.

**Exemplo 4.2.1.** Consideremos, novamente, o polinômio de Motzkin

$$p(x) = x^4y^2 + x^2y^4 + z^6 - 3x^2y^2z^2.$$

Sabemos à partida que este polinômio não é SOS e, como tal, também não é SOBS. Vejamos a sua expressão quando multiplicado pelo fator  $(x^2 + y^2 + z^2)^2$ :

$$\begin{aligned} q(x) := p(x)(x^2 + y^2 + z^2)^2 = & x^8y^2 + 3x^6y^4 + 3x^4y^6 - x^6y^2z^2 - 2x^4y^4z^2 - 5x^4y^2z^4 + x^2y^8 - x^2y^6z^2 \\ & - 5x^2y^4z^4 + x^4z^6 - x^2y^2z^6 + y^4z^6 + 2x^2z^8 + 2y^2z^8 + z^{10}. \end{aligned}$$

Provemos que o polinômio de Motzkin é 2-SDSOS. Seja

$$z(x) = [x^4y \ x^3y^2 \ x^2y^3 \ x^3yz \ x^2y^2z \ x^2yz^2 \ xy^4 \ xy^3z \ xy^2z^2 \ x^2z^3 \ xyz^3 \ y^2z^3 \ xz^4 \ yz^4 \ z^5]$$

um vetor de monômios.

A matriz,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & -2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é diagonal dominante e, conseqüentemente, escalarmente diagonal dominante. Como  $q(x) = z(x)^T Q z(x)$  obtemos o pretendido. Além disso, a sua expressão escrita como soma de binômios quadrados é a seguinte:

$$\begin{aligned} q(x) = & \frac{1}{2}(z^5 - y^2z^3)^2 + \frac{1}{2}(xy^4 - xz^4)^2 + \frac{1}{2}(xy^4 - xy^2z^2)^2 + \frac{1}{2}(z^5 - x^2z^3)^2 + \frac{1}{2}(x^2z^3 - y^2z^3)^2 \\ & + \frac{5}{2}(x^2y^3 - yz^4)^2 + \frac{1}{2}(x^2y^3 - x^2yz^2)^2 + \frac{5}{2}(x^3y^2 - xz^4)^2 + \frac{1}{2}(x^3y^2 - xy^2z^2)^2 \\ & + \frac{1}{2}(x^4y - yz^4)^2 + \frac{1}{2}(x^4y - x^2yz^2)^2. \end{aligned}$$

Obviamente, se  $r = 0$  regressamos à definição de SDSOS vista anteriormente e além disso, temos a seguinte sequência de inclusões

$$\text{SDSOS}_n^{2d} = 0\text{SDSOS}_n^{2d} \subseteq 1\text{SDSOS}_n^{2d} \subseteq 2\text{SDSOS}_n^{2d} \subseteq \dots \subseteq r\text{SDSOS}_n^{2d} \subseteq \text{POS}_n^{2d}.$$

Por outro lado temos ainda  $r\text{SDSOS}_n^{2d} \subseteq r\text{SOS}_n^{2d}$ .

Ao contrário do que acontece no caso das somas de quadrados os certificados não funcionam para todos os polinômios positivos. Para formas quadráticas, por exemplo, o seguinte teorema, provado em [7], mostra que a multiplicação por este fator nunca pode ajudar.

**Teorema 8.** *Seja  $q$  uma forma quadrática real e  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Então, se  $q$  não é SDSOS, também não é  $r$ -SDSOS, para qualquer  $r$ .*

Assim se começarmos com  $p(x) = [1 \ x_1 \ \cdots \ x_n]Q[1 \ x_1 \ \cdots \ x_n]^T$  onde  $Q$  é positiva definida mas não SDD,  $p$  é positivo e soma de quadrados, mas não é  $r$ -SDSOS para nenhum  $r$ .

### 4.3 Polinómios Não Negativos suportados em circuitos

Nesta secção apresentamos, seguindo maioritariamente [10] e [15], um outro certificado alternativo de não negatividade de um polinómio. Este é um pouco mais distante dos algoritmos de soma de quadrados já que baseia a certificação de não negatividade na utilização da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. O papel de quadrados vai ser desempenhado nestes certificados por um tipo especial de polinómios não negativos, os polinómios não negativos suportados em circuitos.

Tendo por base as definições de polítopo de Newton, vértices e pontos interiores vistas anteriormente, dizemos que um polinómio é suportado num circuito se o seu polítopo de Newton for um símlice, sendo que apenas aparecem como expoentes os vértices do símlice, além de um ponto interior. Começemos por recordar a definição de simplíce.

**Definição 13.** *Um símlice de dimensão  $k$  é o invólucro convexo  $\Delta^k \subset \mathbb{R}^n$  de  $k+1$  pontos  $p_1, \dots, p_{k+1}$  que não estão contidos em nenhum plano de dimensão menor que  $k$ .*

Formalizemos então agora a definição de circuito polinomial.

**Definição 14.** *Um circuito polinomial é um polinómio da forma*

$$p(x) = \sum_{j=0}^r c_{\alpha(j)} x^{\alpha(j)} + c_{\beta} x^{\beta}$$

com  $0 \leq r \leq n$ , coeficientes  $c_{\alpha(j)} \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $c_{\beta} \in \mathbb{R}$  e expoentes  $\alpha(j) \in (2\mathbb{Z})^n$  que são os vértices de um símlice e  $\beta \in \mathbb{Z}^n$  no interior relativo desse símlice.

Desta definição resulta que  $\beta$  pode ser escrito de forma única como  $\beta = \sum_{j=0}^r \lambda_j \alpha(j)$  com  $\lambda_j > 0$  e  $\sum_{j=0}^r \lambda_j = 1$ . Temos ainda, que se  $c_{\beta} = 0$  ou  $c_{\beta} > 0$  e  $\beta \in (2\mathbb{Z})^n$ , o polinómio  $p$  é uma soma de monómios quadrados (e como tal não negativo) uma vez que  $\alpha \in (2\mathbb{Z})^n$  e  $c_{\alpha(j)} \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Para todo o circuito polinomial definimos um número de circuito,

$$\Theta_p = \prod_{j=0}^r \left( \frac{c_{\alpha(j)}}{\lambda_j} \right)^{\lambda_j}$$

que será necessário para a caracterização de circuitos polinomiais não negativos, como podemos observar no teorema seguinte.

**Teorema 9.** *Seja  $p$  um circuito polinomial da forma  $p(x) = \sum_{j=0}^r c_{\alpha(j)} x^{\alpha(j)} + c_{\beta} x^{\beta}$ . Então  $p$  é não negativo se e só se  $p$  é soma de monómios quadrados ou o coeficiente  $c_{\beta}$  satisfaz  $|c_{\beta}| \leq \Theta_p$ .*

**Exemplo 4.3.1.** Queremos verificar para que  $d$ 's é que o polinómio

$$p(x) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + w^4 + dxyzw$$

é não negativo. Seguindo a notação adotada acima temos

$$\alpha(1) = (2, 2, 0, 0); \alpha(2) = (2, 0, 2, 0); \alpha(3) = (0, 2, 2, 0); \alpha(4) = (0, 0, 0, 4); \beta = (1, 1, 1, 1).$$

Assim, podemos escrever  $\beta$  da forma

$$\beta = \frac{1}{4}(\alpha(1) + \alpha(2) + \alpha(3) + \alpha(4)),$$

obtendo,  $\lambda_i = \frac{1}{4}$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Logo

$$\Theta_p = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = 4.$$

Portanto,  $p$  é não negativo se e só se  $|d| \leq 4$ .

Apresentamos agora a definição de conjunto  $\Delta$ -mediado que nos vai permitir, em conjunto com a definição de circuito polinomial, relacionar os polinómios não negativos suportados em circuitos com os polinómios que são somas de quadrados.

**Definição 15.** Sejam  $\Delta = \{\alpha(0), \dots, \alpha(r)\} \subseteq (2\mathbb{N})^n$  os vértices de um símlice e  $L \subseteq \text{conv}(\Delta) \cap \mathbb{Z}^n$  um conjunto dos pontos inteiros no seu interior. Seja ainda

$$\bar{A}(L) = \left\{ \frac{1}{2}(s+t) \in \mathbb{Z}^n : s \neq t \text{ e } s, t \in L \cap (2\mathbb{Z})^n \right\}.$$

Dizemos que  $L$  é  $\Delta$ -mediado se  $\Delta \subseteq L \subseteq \bar{A}(L) \cup \Delta$ , isto é, todo o ponto em  $L \setminus \Delta$  é média de dois pontos distintos com coordenadas pares em  $L$ .

Na proposição seguinte, apresentada em [13], introduzimos o conceito de conjunto  $\Delta$ -mediado maximal e provamos que ele existe.

**Proposição 6.** Sejam  $\Delta = \{\alpha(0), \dots, \alpha(r)\} \subseteq (2\mathbb{N})^n$  os vértices de um símlice. Existe um conjunto  $\Delta$ -mediado maximal, que denotaremos por  $\Delta^*$ , um conjunto  $\Delta$ -mediado que contém todos os conjuntos  $\Delta$ -mediados.

*Demonstração.* Começemos por definir uma sequência de conjuntos  $\{\Delta^k\}$  recursivamente por  $\Delta^0 = C(\Delta)$ , onde  $C(\Delta) = \text{conv}(\Delta) \cap \mathbb{Z}^n$ , ou seja,  $C(\Delta)$  é o conjunto de pontos inteiros no símlice, e  $\Delta^{k+1} = \bar{A}(\Delta^k) \cup \Delta$  para  $k \geq 0$ , isto é,  $\Delta^{k+1}$  é o conjunto dos vértices juntamente com os pontos de  $\Delta^k$  que são média de outros dois pontos de  $\Delta^k$ . Por definição esta é uma sequência monótona com  $\Delta^{k+1} \subseteq \Delta^k$  pelo que tem que estabilizar, já que, no pior dos casos, o conjunto é igual a  $\Delta$ . Seja então  $\Delta^r = \Delta^{r+1}$  e denotemos esse limite por  $\Delta^*$ . Como

$$\Delta^* = \Delta^{r+1} = \bar{A}(\Delta^r) \cup \Delta = \bar{A}(\Delta^*) \cup \Delta,$$

$\Delta^*$  é  $\Delta$ -mediado. Provemos agora que contém todos os conjuntos  $\Delta$ -mediados.

Seja  $\delta$  um qualquer conjunto  $\Delta$ -mediado, por definição  $\delta \subseteq C(\Delta) = \Delta^0$ . Como  $\delta$  é  $\Delta$ -mediado, temos então que se  $\delta \subseteq \Delta^i$  então

$$\delta \subseteq \bar{A}(\delta) \cup \Delta \subseteq \bar{A}(\Delta^i) \cup \Delta = \Delta^{i+1},$$

donde segue por indução que  $\delta \subseteq \Delta^*$  como pretendido.  $\square$

Na Figura seguinte ilustramos um conjunto  $\Delta$ -mediado maximal (a azul) de um símplice com vértices  $(0,0,0)$ ,  $(2,2,2)$ ,  $(2,4,0)$  e  $(0,2,2)$  (a preto) e ponto interior não pertencente ao conjunto delta-mediado maximal  $(1,2,1)$  (a vermelho).

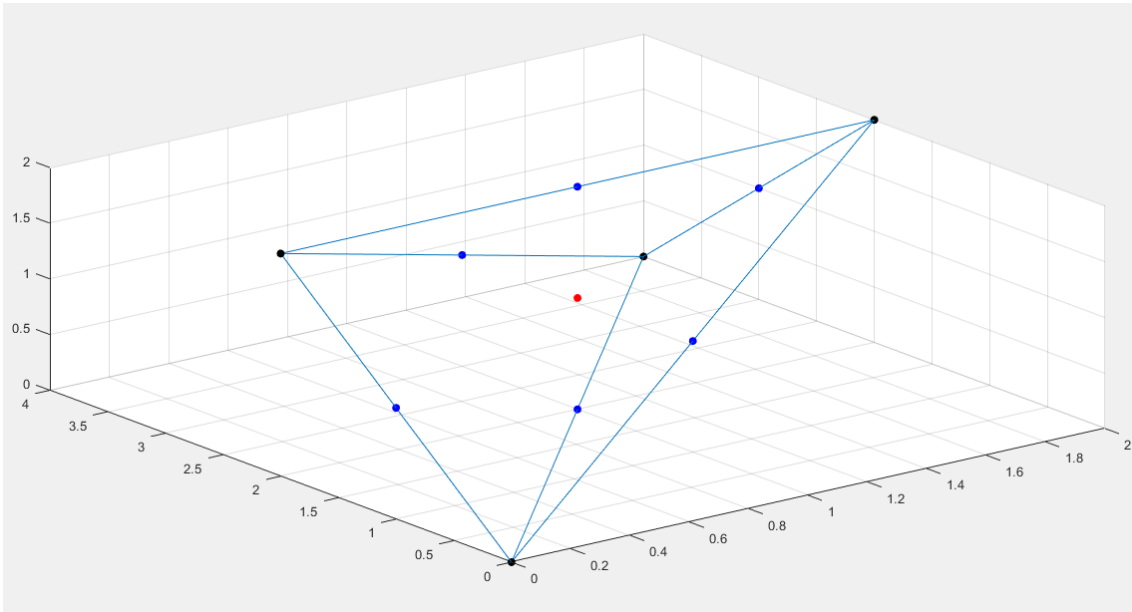


Figura 4.1 Conjunto  $\Delta$ -mediado maximal de um símplice com vértices  $(0,0,0)$ ,  $(2,2,2)$ ,  $(2,4,0)$  e  $(0,2,2)$ .

Finalmente temos então um teorema, provado por Reznick em [13], que relaciona polinómios não negativos suportados em circuitos com polinómios que são somas de quadrados.

**Teorema 10.** *Seja  $p(x) = \sum_{j=0}^r c_{\alpha(j)} x^{\alpha(j)} + c_{\beta} x^{\beta}$  um circuito polinomial não negativo e  $\Delta = \{\alpha(0), \dots, \alpha(r)\}$ . Então,  $p \in \text{SOS}_n^{2d}$  se e só se  $\beta \in \Delta^*$  ou  $p$  for soma de monómios quadrados. Mais ainda,  $p$  é SOS se e só se for SOBS.*

*Demonstração.* Para qualquer  $\xi \in \mathbb{Z}^n$  no interior de  $\text{conv}(\Delta)$ , definimos o polinómio

$$p_{\xi}(x) = \sum_i \lambda_i x^{\alpha(i)} - x^{\xi},$$

onde os  $\lambda_i$  são os coeficientes não negativos unicamente determinados pela relação linear  $\xi = \sum_i \lambda_i \alpha(i)$ . Note-se que fazendo uma mudança de variável  $x_i \rightarrow \gamma_i y_i$  este polinómio transforma-se em

$$p_\xi(y) = \sum_i y^{\alpha(i)} - \Theta_p y^\xi.$$

Como para qualquer circuito polinomial não negativo  $p$ , que não seja soma de monómios quadrados,  $|c_\beta| \leq \Theta_p$ , se provarmos que  $p_\beta$  é SOS ou SOBS, o mesmo será válido para  $p$ . Para ver isto basta notar que efetuando a combinação linear entre  $p_\beta$ , que provaremos ser SOS, com o polinómio  $\sum_i y^{\alpha(i)}$ , que é obviamente soma de quadrados, obtemos uma combinação linear convexa de polinómios que são somas de quadrados pelo que  $p$  também é soma de quadrados. Por fim o último caso a considerar é o caso em que  $c_\beta > 0$  e  $\beta$  é ímpar ( caso seja par,  $p$  é soma de monómios quadrados), mas caso isto aconteça basta efetuar uma transformação linear que torne  $c_\beta < 0$  e efetuamos o procedimento anterior uma vez que a condição de somas de quadrados mantém-se com as transformações lineares. Assim para provar a implicação de que  $\beta \in \Delta^*$  implica  $p$  SOBS, basta mostrar que  $p_\beta$  é SOBS para qualquer  $\beta \in \Delta^*$ .

Indexemos os pontos de  $\delta = \Delta^* \setminus \Delta$  como  $\beta_1, \dots, \beta_T$ . Como  $\Delta^*$  é  $\Delta$ -mediado, pelo menos uma das seguintes afirmações é válida para cada  $\beta_i \in \delta$ :

- $\beta_i = \frac{1}{2}(\alpha(s) + \alpha(t))$ , para algum  $s$  e  $t$ ;
- $\beta_i = \frac{1}{2}(\alpha(s) + \beta_k)$  para algum  $s$  e  $k$ ;
- $\beta_i = \frac{1}{2}(\beta_j + \beta_k)$ , para algum  $j, k \neq i$ .

Suponhamos que  $\mu$  e  $\nu$  são pontos também no símplice tais que  $\beta = \frac{1}{2}(\mu + \nu)$  e ainda  $\mu = \sum_i \sigma_i \alpha(i)$  e  $\nu = \sum_i \tau_i \alpha(i)$ . Note-se que isto implica  $\lambda_i = \frac{1}{2}(\tau_i + \sigma_i)$ , e é então fácil verificar que temos a identidade polinomial

$$2p_\beta(x) = p_\mu(x) + p_\nu(x) + (x^{\frac{\mu}{2}} - x^{\frac{\nu}{2}})^2.$$

De facto

$$p_\mu(x) + p_\nu(x) = \sum_{i=0}^r (\sigma_i + \tau_i) x^{\alpha(i)} - x^\mu - x^\nu = 2 \sum_{i=0}^r \lambda_i x^{\alpha(i)} - x^\mu - x^\nu$$

e

$$(x^{\frac{\mu}{2}} - x^{\frac{\nu}{2}})^2 = x^\mu + x^\nu - 2x^\beta.$$

Somando as duas igualdades vem o pretendido. Daqui e revisitando as condições anteriores vemos que para qualquer  $\beta_i$  é válida uma das seguintes identidades polinomiais:

- $2p_{\beta_i}(x) = (x^{\frac{\alpha(s)}{2}} - x^{\frac{\alpha(t)}{2}})^2$
- $2p_{\beta_i}(x) = p_{\beta_k}(x) + (x^{\frac{\alpha(s)}{2}} - x^{\frac{\beta_k}{2}})^2$
- $2p_{\beta_i}(x) = p_{\beta_k}(x) + p_{\beta_j}(x) + (x^{\frac{\beta_j}{2}} - x^{\frac{\beta_k}{2}})^2$

De notar que para um vértice  $\alpha$ , por definição  $p_\alpha = 0$ . Estas identidades transformam cada  $p_\beta$  na soma de outros  $p_\beta$ 's e binómios quadrados. A ideia é decompor sucessivamente usando estas expressões e

mostrar que podemos reduzir tudo aos vértices, obtendo assim uma expressão para  $p_\beta$  como soma de binómios quadrados.

Definimos a matriz  $A_{T \times T}$  fazendo  $a_{ii} = 2$  para todo o  $i$  e

- se  $\beta_i$  for média de dois vértices, então as outras entradas da  $i$ -ésima linha são zero;
- se  $\beta_i$  for média de um vértice e outro ponto qualquer de  $\delta$ , colocamos  $-1$  na posição  $a_{ik}$  e todas as outras entradas não diagonais da matriz na  $i$ -ésima linha são zero;
- se  $\beta_i$  for média de dois pontos quaisquer de  $\delta$ , colocamos  $a_{ik} = a_{ij} = -1$  e todas as outras entradas não diagonais na  $i$ -ésima linha são zero.

Consideremos para cada  $i = 1, \dots, T$  o binómio quadrado  $h_i(x) = (x^{\frac{s_i}{2}} - x^{\frac{t_i}{2}})^2$  como sendo o que aparece na decomposição escolhida de  $2p_{\beta_i}(x)$  e sejam  $H, F$  os vetores coluna em que as  $i$ -ésimas componentes são  $h_i(x)$  e  $p_{\beta_i}$ , respetivamente. As relações polinomiais que vimos anteriormente correspondem em linguagem matricial a  $AF = H$ . Se conseguirmos mostrar que  $A$  é invertível e que a inversa de  $A$  tem entradas não negativas, então a igualdade  $F = A^{-1}H$  mostra que cada  $p_\beta$  é uma combinação linear, com coeficientes não negativos, de binómios quadrados, concluindo o pretendido.

Comecemos por mostrar que  $A$  é não singular. Suponhamos que  $A$  é singular, então existe  $z \neq 0$  tal que  $Az = 0$ . Consideremos  $I$  o conjunto dos índices em que  $|z_i|$  é máximo. Existem três possibilidades para a entrada  $i$  de  $Az$ , ou é  $2z_i$  ou  $2z_i - z_k$  ou  $2z_i - z_j - z_k$ . A única que se pode anular tendo em conta que  $i \in I$  é a terceira, e apenas se  $z_j$  e  $z_k$  forem também máximas, ou seja, se  $j, k \in I$ . Mas então a submatriz principal de  $A$  indexada por  $I$  tem dois  $-1$  em cada linha, o que significa que se considerarmos o conjunto  $B = \{\beta_i : i \in I\}$ , cada elemento desse conjunto é média de dois dos outros elementos do conjunto. Isto é impossível, já que os vértices de  $\text{conv}(B)$  não podem verificar essa propriedade, pelo que concluímos que  $A$  é não-singular. Mas  $A$  tem também diagonal positiva e é diagonal dominante, o que implica que todos os valores próprios têm parte real não negativa pelo Teorema de Gershgorin. Assim  $A$  é uma  $M$ -matriz não singular e é um facto conhecido, [12], que as inversas destas matrizes são não negativas.

Para concluir a demonstração do Teorema é necessário provar que se  $\beta \notin \Delta^*$  então  $p$  não é soma de quadrados. Mas basta para isso observar que se  $p = \sum q_i^2$  então o conjunto  $\Gamma$  dos expoentes que aparecem em algum  $q_i^2$  é  $\Delta$ -mediado. Em primeiro lugar note-se que  $\Delta \subseteq \Gamma$  já que os expoentes aparecem em  $p$ . Por outro lado, se  $q_i = \sum a_i^j x^{\delta_j}$  então vai contribuir para  $\Gamma$  com os elementos  $2\delta_i$  e  $\delta_i + \delta_j$ . Os  $\delta_i + \delta_j$  são média de  $2\delta_i$  e  $2\delta_j$  por isso não contradizem o facto de  $\Gamma$  ser  $\Delta$ -mediado. Os da forma  $2\delta_i$  ou pertencem a  $\Delta$  ou, como têm coeficiente positivo terão de ser cancelados por algum monómio com o mesmo expoente mas coeficiente negativo. Estes monómios só poderão aparecer num  $q_j^2$  como expoentes da forma  $\delta_k + \delta_l$  para algum  $k$  e  $l$ , logo também serão média de dois elementos em  $\Gamma$ . Assim  $\Gamma$  é  $\Delta$ -mediado e logo  $\beta \in \Delta^*$ , concluindo a demonstração.  $\square$

**Exemplo 4.3.2.** Consideremos o polinómio

$$p(x) = 1 + x^6 y^2 + x^2 y^6 - x^2 y^2$$

que é um circuito polinomial não negativo. Queremos mostrar que ele é soma de quadrados usando o Teorema anterior. Para isso vejamos que  $d < 0$  pelo que não é soma de monómios quadrados, no



entanto,  $\beta = (2, 2) \in \Delta^*$  uma vez que podemos verificar neste caso que  $\Delta^*$  corresponde ao conjunto de todos os pontos inteiros do triângulo de vértices  $\{(0, 0), (6, 2), (2, 6)\}$ . Assim  $p$  é SOS e de facto é até SOBS.

Finalmente definimos então o conjunto de polinómios

$$SONC_n^{2d} = \left\{ f \in \mathbb{R}[x]_n^{2d} : f = \sum_i a_i p_i, p_i \text{ é um circuito polinomial não negativo, } a_i \geq 0 \right\}$$

como sendo o conjunto dos polinómios que são combinações não negativas de circuitos polinomiais não negativos de grau  $2d$ , com  $n$  variáveis. Este cone de polinómios é claramente não negativo e oferece outra alternativa para a verificação da não negatividade de um polinómio. A verificação de que um polinómio é SONC é mais delicada que a de SOBS ou SOS, e utiliza um tipo de otimização denominado por programação geométrica. Nesta dissertação não necessitaremos de encontrar certificados deste tipo, já que estaremos mais interessados em analisar as propriedades dos circuitos não negativos em si mesmos, pelo que não exploraremos a vertente numérica destes certificados.

## 4.4 Relações entre o cone dos SONC e os outros conjuntos

Esta secção serve para apresentar as relações entre os conjuntos estudados anteriormente e o conjunto dos polinómios SONC. Mais concretamente temos as seguintes relações:

- $SONC_n^{2d} \subseteq POS_n^{2d}, \forall n, d \in \mathbb{N}$ ;
- $SONC_n^{2d} \subseteq SOS_n^{2d}$  se e só se  $(n, 2d) \in \{(1, 2d); (n, 2); (2, 4)\}$ ;
- $SOS_n^{2d} \not\subseteq SONC_n^{2d}, \forall (n, 2d)$  com  $n \geq 2$  e  $2d \geq 2$ .

Um exemplo ilustrativo desta última não inclusão é o polinómio  $p(x) = (1 - x_1 - x_2)^2$  que é, obviamente, soma de quadrados, mas não é soma de circuitos não negativos, como ilustrado em [11], no Lema 3.2. O segundo ponto envolve apenas os casos apresentados devido à existência de símlices onde o conjunto  $\Delta$ -mediado maximal não contém todos os pontos inteiros do símlice em todas as outras combinações de  $n$  e  $d$ . Por exemplo no seguinte polinómio de Motzkin,  $p(x) = 1 + x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4 - 3x_1^2 x_2^2$ ,  $\beta = (2, 2)$  e  $\Delta^* = \{(0, 0), (2, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}$  pelo que  $\beta \notin \Delta^*$ , no entanto é um circuito não negativo.

Finalmente obtemos um resultado simples que relaciona de forma trivial os polinómios SDSOS com os SONC, retirado de [11].

**Teorema 11.** *Todo o polinómio SDSOS é soma de circuitos polinomiais não negativos, isto é,  $SDSOS \subseteq SONC$ .*

*Demonstração.* Vimos anteriormente que  $SDSOS = SOBS$  pelo que um polinómio  $p$  que é SDSOS pode ser escrito como

$$p(x) = \sum_i p_i(x) = \sum_i (a_i s_i(x) + b_i q_i(x))^2$$

com  $s_i, q_i$  monómios e  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ . Expandindo obtemos

$$p(x) = \sum_i [(a_i s_i(x))^2 + (b_i q_i(x))^2 - 2a_i s_i(x) b_i q_i(x)].$$

Seja  $p_i$  cada termo desta soma. Temos que  $New(p_i)$  é um símplice de uma dimensão com dois vértices com coordenadas pares,  $\alpha(0)$  e  $\alpha(1)$ , os expoentes de  $s_i(x)^2$  e  $q_i(x)^2$  respetivamente, e o ponto interior  $\beta = \frac{1}{2}\alpha(0) + \frac{1}{2}\alpha(1)$  dado pelo termo  $-2a_i s_i(x) b_i q_i(x)$ . Finalmente o número de circuito,  $\Theta_{p_i}$ , é dado por

$$\left(\frac{a_i^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b_i^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = (2a_i^2)^{\frac{1}{2}} (2b_i^2)^{\frac{1}{2}} = 2a_i b_i$$

pelo que  $p_i$  é um circuito polinomial não negativo.  $\square$

Vamos apresentar agora um exemplo que espelha a condição descrita no teorema anterior.

**Exemplo 4.4.1.** Consideremos o polinómio  $p(x) = x^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + y^4$ . Este polinómio é SDSOS porque, considerando  $z(x) = \begin{bmatrix} x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix}$ , é fácil observar que  $p(x) = z(x)^T Q z(x)$  para a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que é diagonal dominante, logo SDD.

Para mostrar que ele é SONC basta observar que é a soma dos dois circuitos polinomiais não negativos:

$$q(x) = x^4 + 2x^3y + x^2y^2 \quad e \quad s(x) = x^2y^2 + 2xy^3 + y^4.$$

A condição descrita no teorema anterior não se trata de uma dupla inclusão. Basta ter em consideração que provámos anteriormente que o polinómio de Motzkin,  $p(x) = 1 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2$  não era soma de quadrados e como tal não é SDSOS, no entanto, também foi visto que este é SONC. Considerando que já vimos que o polinómio de Motzkin, apesar de não ser soma de quadrados e portanto, não ser soma de binómios quadrados, é 2-SDSOS, isto leva-nos a questionar se haverá sempre algum  $r$  suficientemente grande para o qual os polinómios SONC, ou alguma subclasse deles, são  $r$ -SDSOS.

## Capítulo 5

# Experiências Numéricas

Neste capítulo vamos reportar experiências e resultados numéricos obtidos com vista alcançar e explorar algumas questões sobre a relação entre polinómios não negativos suportados em circuitos e somas de quadrados e binómios quadrados. Entre as várias questões que queremos explorar estão a força relativa entre somas de quadrados e somas de binómios quadrados para capturar a não negatividade de circuitos, a procura de algum  $r$  dependendo apenas de  $n$  ou  $d$  para o qual um polinómio de  $n$  variáveis e grau  $d$  que é soma de circuitos polinomiais não negativos seja também  $r$ -SOS ou  $r$ -SOBS, e a exploração em geral do comportamento dos certificados. Para este propósito foi utilizado o programa MATLAB R2019b com o software Yalmip e o solver SDPT-3.

### 5.1 Conjuntos $\Delta$ -mediados maximais

O primeiro passo para podermos realizar qualquer experiência numérica é a geração de exemplos para testar. Interessa-nos testar polinómios que não sejam somas de quadrados, pelo que recorreremos à teoria desenvolvida na secção anterior para gerar circuitos polinomiais não negativos que não sejam somas de quadrados. A ideia é gerar aleatoriamente polinómios não negativos suportados em circuitos

$$p(x) = \sum_{j=0}^r c_{\alpha(j)} x^{\alpha(j)} + c_{\beta} x^{\beta}$$

e utilizar a teoria de Reznick para eliminar aqueles que sejam somas de quadrados e manter apenas os restantes.

Para isso temos de conseguir gerar os conjuntos  $\Delta$ -mediados maximais para um dado símplice. A demonstração da existência de tais conjuntos que apresentámos é ela própria algorítmica, pelo que pode ser diretamente transposta para um algoritmo que calcule esse conjunto, começando com todos os pontos inteiros pares no símplice e mantendo iterativamente apenas aqueles que são média de dois outros pontos desse conjunto. Obtemos o seguinte algoritmo.

**Algoritmo para encontrar o conjunto  $\Delta$ -mediado maximal**

- 1) Input: Vértices do símplice
- 2) Obter o conjunto  $U_0$  de todos os pontos inteiros pares no símplice
- 3) Iterar:
  - Definir  $U_{k+1}$  como a união dos vértices com o conjunto de pontos de  $U_k$  que são média de dois pontos distintos em  $U_k$ .
  - até que  $U_{k+1} = U_k$ .
- 4) Obter o conjunto  $U$  de pontos inteiros que são média de dois pontos em  $U_k$  juntamente com os vértices.
- 5) Output: O conjunto  $U$ .

Na Figura 5.1 podemos ver alguns exemplos de símplices e respectivos conjuntos  $\Delta$ -mediados maximais para 2 e 3 variáveis e diversos graus. Os pontos a vermelho representam os pontos interiores dos símplices que não pertencem ao conjunto  $\Delta$ -mediado maximal, os pontos pretos são os vértices dos símplices e os pontos a azul são os pontos pertencentes ao conjunto  $\Delta$ -mediado maximal.

A primeira experiência realizada foi a de determinar qual a frequência com que dado um símplice de vértices inteiros pares  $\Delta$ , o seu conjunto  $\Delta$ -mediado maximal não é constituído pela totalidade dos pontos inteiros do símplice. Para gerar símplices aleatórios para testar procedemos da seguinte forma: para  $n$  e  $d$  inteiros fixos, gerámos todos os pontos não negativos em  $(2\mathbb{Z})^n$  cuja soma era menor ou igual que  $d$  e escolhemos independentemente com probabilidade uniformemente distribuída  $n + 1$  deles, garantindo apenas que eram linearmente independentes.

Os valores apresentados na tabela seguinte correspondem à fração de casos em que o conjunto  $\Delta$ -mediado maximal não era constituído por todos os pontos inteiros no símplice em 100 instâncias geradas aleatoriamente para cada par  $(n, d)$ .

$\frac{d}{n}$	6	12	18	24	30	36	42	48	54
2	0.06	0.16	0.13	0.09	0.07	0.05	0.06	0.02	0.02
3	0.23	0.45	0.61	0.68	0.91	0.89	0.84	0.89	0.87
4	0.38	0.69	0.90	0.96	0.99	0.99	1	1	-
5	0.39	0.84	0.99	0.98	1	1	-	-	-
6	0.52	0.85	0.96	0.99	0.99	-	-	-	-

Tabela 5.1 Fração dos casos em que o conjunto  $\Delta$ -mediado maximal não era constituído por todos os pontos inteiros no símplice em 100 testes aleatórios por par  $(n, d)$

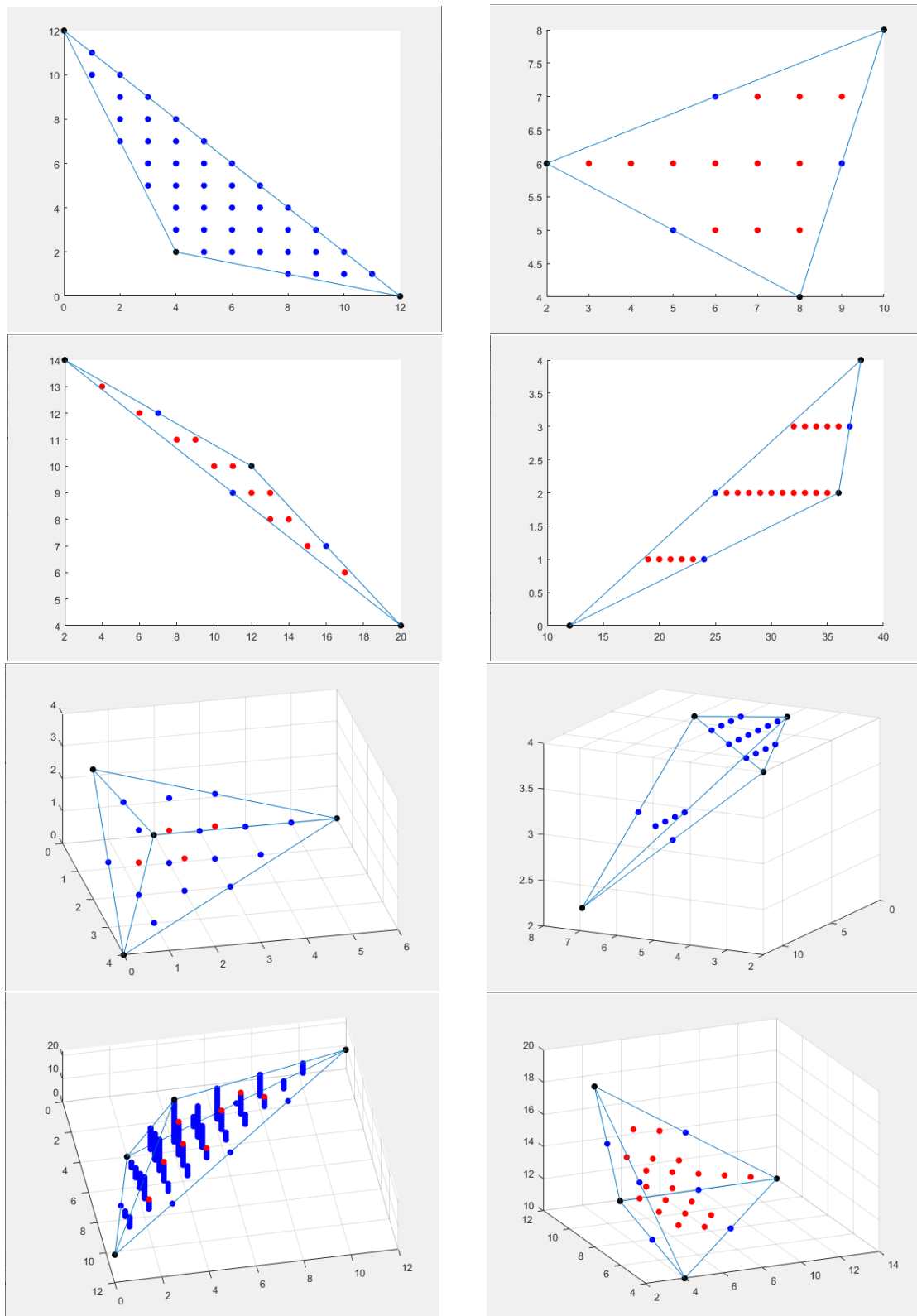


Figura 5.1 Símplices e conjuntos  $\Delta$ -mediados maximais para  $n = 2, d = 12, 18, 24$  e  $n = 3, d = 6, 18, 30$  e  $36$

Por observação direta do output, e apesar do baixo número da amostra, percebemos que para polinómios com duas variáveis, a grande maioria destes possui o conjunto  $\Delta$ -mediado maximal constituído por todos os pontos inteiros no símplice. Ora tal não ocorre para polinómios com mais do que duas variáveis, uma vez que o número de polinómios com conjunto  $\Delta$ -mediado maximal constituído por todos os pontos inteiros no símplice parece diminuir com o aumento do grau e do número de variáveis. Para finalizar referir ainda que os testes foram realizados para este número de variáveis e graus apenas porque para números superiores (de graus e variáveis) o tempo de execução dos comandos não era praticável e os dados obtidos parecem já deixar claro este comportamento.

### 5.1.1 Observações experimentais para $n = 2$

Esta subsecção visa mostrar algumas observações experimentais recolhidas aquando dos testes de verificação se o conjunto  $\Delta$ -mediado maximal de um símplice englobava todos os pontos interiores, para  $n = 2$ .

A primeira observação é que para  $n = 2$ , e ao contrário de outros  $n$ 's, o número de símplices cujo conjunto  $\Delta$ -mediado maximal não é constituído por todos os pontos inteiros do símplice variava de forma irregular, isto é, existia um aumento desse número de símplices até certo  $d$  e depois esse número voltava a cair, parecendo aproximar-se de zero quando  $d$  aumenta.

Testámos então este caso particular, com 1000 amostras para cada  $d$ , entre 6 e 54, com o objetivo de descobrir aproximadamente onde se atingia o número máximo de símplices cujo conjunto  $\Delta$ -mediado maximal não era constituído por todos os pontos inteiros do símplice, e confirmar as observações que haviam sido efetuadas com amostras mais pequenas e obtivemos os seguintes resultados.

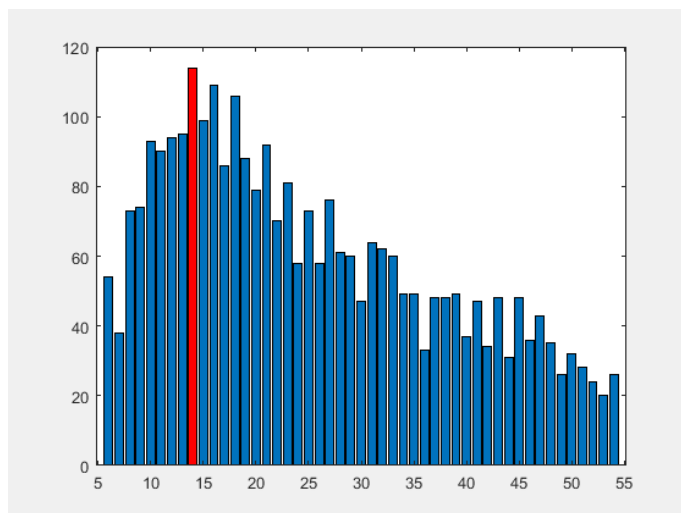


Figura 5.2 Variação do número de símplices cujo conjunto  $\Delta$ -mediado maximal não contém todos os inteiros do símplice, para  $n = 2$

Concluimos então que para  $n = 2$ , o número de símplices cujo conjunto  $\Delta$ -mediado maximal não é constituído por todos os pontos inteiros do símplice parece crescer até cerca de  $d = 14$ , onde na nossa experiência atingiu o seu valor máximo de 114 em 1000, e posteriormente observa-se um decréscimo desse número. Um problema interessante seria tentar estudar mais rigorosamente a distribuição destes símplices.

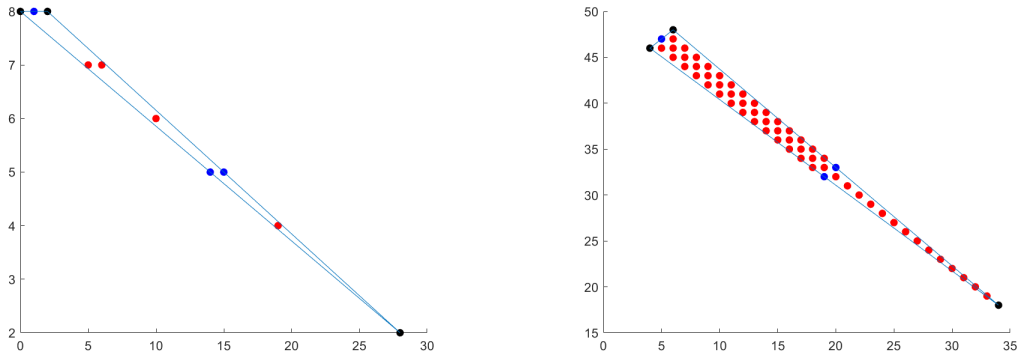


Figura 5.3 Dois símlices cujo conjunto  $\Delta$ -mediado maximal não é máximo, para  $d = 30$  e  $d = 54$ .

O segundo fenómeno que observámos foi que, em todos os símlices cujo conjunto  $\Delta$ -mediado maximal não continha todos os pontos inteiros no símlice, o conjunto  $\Delta$ -mediado maximal era constituído por apenas os seus vértices e pontos médios dos lados, como podemos observar em dois exemplos particulares na Figura 5.3.

Esta observação não é nova, sendo a base para uma conjectura apresentada por Reznick em [13], onde ele pergunta se para  $n = 2$ , é verdade que os conjuntos  $\Delta$ -mediados maximais são sempre ou o conjunto de pontos inteiros no símlice ou o conjunto dos vértices e pontos médios dos lados. Esta conjectura, apesar de avanços significativos, mantém-se ainda aberta na sua forma mais geral.

## 5.2 Geração de Circuitos Polinomiais Não Negativos que não são Somas de Quadrados

Baseando-nos na secção anterior, podemos agora gerar circuitos polinomiais não negativos que não são somas de quadrados. Começamos por gerar símlices aleatórios e obter uma lista dos pontos inteiros presentes no mesmo. Posteriormente, obtemos o conjunto  $\Delta$ -mediado maximal e o conjunto de pontos no interior relativo do símlice que não pertencem a esse conjunto  $\Delta$ -mediado maximal. Se existir pelo menos um ponto no interior relativo do símlice que não pertença ao conjunto  $\Delta$ -mediado maximal podemos assegurar que existe um circuito polinomial não negativo que não é soma de quadrados, apenas temos que escolher  $\beta$  como sendo esse ponto. Geramos seguidamente o polinómio

$$p(\Delta, \beta) = \sum_{j=0}^r c_{\alpha(j)} x^{\alpha(j)} - \Theta_{\Delta, \beta} x^{\beta}$$

onde os  $\alpha(i)$  são os vértices do símlice e  $\Theta_{\Delta, \beta}$  é o número de circuito associado a  $\beta$ . Este é o polinómio cuja não negatividade não é capturada por somas de quadrados e para o qual queremos estudar a eficiência dos certificados  $r$ -SOS e  $r$ -SOBS. Na prática, por questões de estabilidade numérica vamos considerar um parâmetro  $t$  e procurar o  $t$  mínimo para o qual podemos certificar a

existência de uma representação como soma de quadrados de

$$\sum_{j=0}^r c_{\alpha(j)} x^{\alpha(j)} + tx^{\beta}$$

e verificar se  $t = -\Theta_{\Delta, \beta}$ , em cujo caso temos que  $p(\Delta, \beta)$  é certificável. A vantagem deste método é que  $t = 0$  é sempre certificável, pelo que o problema tem sempre solução, mas por vezes pode ser difícil decidir se essa solução numérica é igual a  $-\Theta_{\Delta, \beta}$  devido aos artefactos numéricos inerentes a este tipo de problemas de otimização.

**Exemplo 5.2.1.** *O objetivo deste exemplo é ilustrar a estratégia utilizada para obter circuitos polinomiais não negativos que não são somas de quadrados. Suponhamos que os vértices do símplice, gerados de forma aleatória, foram  $(2, 0), (4, 0), (0, 6)$ . Facilmente obtemos os pontos inteiros do símplice:*

$$(2, 0), (3, 0), (4, 0), (2, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 4), (0, 6)$$

donde podemos, pegando apenas nos pares:  $(2, 0), (4, 0), (2, 2), (0, 6)$ , fazer as médias dos mesmos de modo iterativo até chegarmos a um conjunto em que todos os pontos são média de outros dois pontos nesse conjunto ou são vértices:  $(2, 0), (4, 0), (0, 6)$ . Posteriormente precisamos apenas de fazer as médias desses pontos pares restantes para obtermos o conjunto  $\Delta$ -mediado maximal:  $(2, 0), (4, 0), (0, 6), (3, 0), (1, 3), (2, 3)$ , como podemos observar na Figura 5.4.

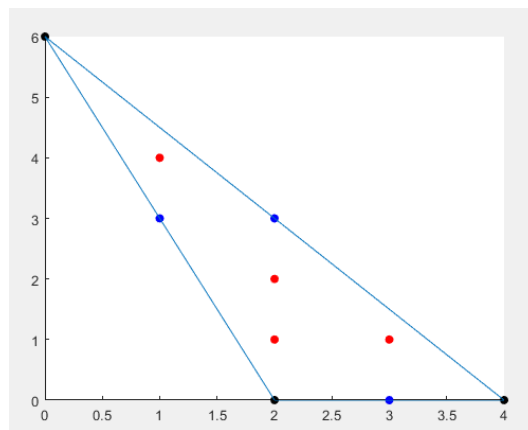


Figura 5.4 Conjunto  $\Delta$ -mediado maximal e pontos interiores de um símplice com vértices  $(2, 0), (4, 0), (0, 6)$ .

Tendo agora o conjunto  $\Delta$ -mediado maximal, precisamos apenas de ver quais os pontos na lista de pontos inteiros do símplice que não estão nesse conjunto:  $(2, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 4)$  e determinar os que não estão na fronteira:  $(2, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 4)$ .

Finalmente podemos então escolher  $\beta \in \{(2, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 4)\}$  e calcular os respectivos números de circuito

$$\Theta_{\Delta, \beta} = 2.3811; 2.3811; 3; 2,3811$$



para termos os circuitos polinomiais não negativos que não são somas de quadrados,

$$\begin{array}{ll} x^2 + x^4 + y^6 - 2.3811x^2y & x^2 + x^4 + y^6 - 2.3811x^3y \\ x^2 + x^4 + y^6 - 3x^2y^2 & x^2 + x^4 + y^6 - 2.3811xy^4 \end{array}$$

### 5.3 Testes com $r$ -SOS e $r$ -SOBS

Nesta secção, pretendemos estudar o comportamento dos certificados  $r$ -SOS e  $r$ -SOBS para os polinómios não negativos suportados em circuitos que não são somas de quadrados. Multiplicando um destes polinómios pelo fator

$$\left(1 + \sum_i x_i^2\right)^r$$

ele deixa de ser suportado num circuito, mas é ainda soma de polinómios não negativos suportados em circuitos. Queremos saber se será soma de quadrados e de binómios quadrados. Já vimos que no caso do polinómio de Motzkin, que é um polinómio não negativo suportado num circuito,  $r = 1$  é suficiente para obter uma soma de quadrados enquanto que  $r = 2$  nos dá uma soma de binómios quadrados. Pretendemos explorar os exemplos obtidos na secção anterior para perceber quais os comportamentos usuais para estes certificados.

#### 5.3.1 Observações experimentais

Descrevemos de seguida os resultados obtidos para  $r$ -SOS e mais à frente para  $r$ -SOBS.

##### Observações para $r$ -SOS

O primeiro teste que fizemos foi testar os polinómios gerados na secção anterior que, sendo não negativos, não eram somas de quadrados, para saber se eram 1-SOS ou 2-SOS. Obtivemos os resultados da Tabela 5.2.

n	1-SOS	2-SOS	outros
2	85	0	0
3	68	3	29
4	6	1	3
5	7	0	3

Tabela 5.2 Testes de verificação da propriedade  $r$ -SOS.

Antes de concluir algo sobre os resultados note-se que para  $n = 2$  e  $n = 3$  fizemos bastante mais testes do que para  $n = 4$  ou  $n = 5$ , principalmente pelo tempo necessário a correr cada um dos testes quando os  $d$ 's são altos. Isso tem implicações em termos da nossa capacidade de concluir algo sobre a frequência de polinómios 1-SOS. É de esperar que essa frequência decaia com o aumento do  $n$ , mas precisaríamos de mais testes e um controlo sobre os  $d$ 's usados para poder tirar conclusões nesse sentido, já que os resultados da tabela são necessariamente inconclusivos quanto a esse facto.

Um resultado bastante interessante que se observa claramente nestes testes com polinómios para  $n = 2$ , traduziu-se na seguinte conjectura: todos os circuitos polinomiais não negativos de duas variáveis são no máximo 1-SOS. Posto de outra forma conjecturamos que

$$SONC_2^{2d} \subseteq 1SOS_2^{2d}.$$

Esta conjectura surge, uma vez que todos os circuitos polinomiais não negativos que testámos foram sempre 1-SOS. É de salientar que foram efetuados 85 testes correspondentes a 85 circuitos polinomiais não negativos que não eram, à partida, somas de quadrados, para  $d$ 's compreendidos entre 6 e 54, pelo que a conjectura é suportada por bastantes dados numéricos. Uma possível abordagem a esta conjectura seria saber se a conseguimos provar partindo da conjectura de Reznick para os conjuntos  $\Delta$ -mediados maximais em  $n = 2$ , mas não houve tempo para explorar esta questão.

Por fim, damos um pouco mais de contexto para a coluna *outros*. Recordemos que a forma como testamos a propriedade é minimizando  $t$  tal que  $\sum x^{\alpha(i)} + tx^\beta$  é  $r$ -SOS, e comparando a resposta com o número de circuito. Seria de esperar que há medida que  $r$  sobe, os valores de  $t$  fossem descendo, convergindo (no limite ou num número finito de passos) para o valor pretendido. Isto aparenta ocorrer em apenas dois casos em  $n = 3$  (coluna  $\notin$  2-SOS da Tabela 5.3), podendo o polinómio considerado nestes casos nem ser  $r$ -SOS para nenhum  $r$ . Em todos os outros o  $t$  parece ficar sempre fixo em zero, independentemente do valor de  $r$  utilizado, parecendo sugerir que estes polinómios não são  $r$ -SOS para nenhum  $r$ .

$n = 3$	1-SOS	2-SOS	$\notin$ 2-SOS
$d = 6$	10	0	0
$d = 8$	7	0	3
$d = 10$	9	1	0
$d = 12$	6	1	3
$d = 14$	7	0	3
$d = 16$	5	0	5
$d = 18$	7	0	3
$d = 20$	6	0	4
$d = 22$	4	1	5
$d = 24$	7	0	3

Tabela 5.3 Testes de verificação da propriedade  $r$ -SOS para  $n = 3$

Isto suscitou-nos algumas questões e, após algum estudo complementar, observámos que este fenómeno já havia sido estudado por Delzell em [5] no qual estudou um fenómeno que denominou por *pontos maus*, que impede polinómios de serem  $r$ -SOS. O estudo de Delzell parte do 17º Problema de Hilbert, que implica que existe sempre um multiplicador polinomial,  $h$ , para o qual  $h^2 f$  é soma de quadrados. Delzell observou que para alguns polinómios  $f$ , existem pontos  $p \in \mathbb{R}^n$  tais que qualquer polinómio  $h$  que torne  $h^2 f$  numa soma de quadrados terá de se anular em  $p$ . Ele denominou estes

pontos por *pontos maus*. Como o multiplicador  $1 + \sum x_i^2$  e todas as suas potências não se anulam em qualquer ponto, a existência de *pontos maus* inviabiliza a certificação por  $r$ -SOS. A nossa suspeita é que o que estamos a observar é que uma parte significativa dos polinómios não negativos suportados em circuitos possui *pontos maus*. Contudo, demonstrar a existência de *pontos maus* é notoriamente difícil não existindo nenhuma forma sistemática conhecida de o fazer. Como exemplo demonstrativo fica um exemplo retirado de [5] de um polinómio não negativo suportado num circuito com um *ponto mau* na origem.

**Exemplo 5.3.1.** *Consideremos o polinómio*

$$f(x, y, z) = z^6 + x^6 y^2 + y^{10} - 3x^2 y^4 z^2$$

e seja  $h$  um polinómio tal que  $h^2 f$  é soma de quadrados. Suponhamos por absurdo que  $h$  não se anula na origem, então podemos assumir sem perda de generalidade que  $h(0) = 1$  o que significa  $h = (1 + h_1 + h_2 + \dots)$  onde os  $h_i$  são homogéneos de grau  $i$  (ou polinómios nulos). Então temos

$$\begin{aligned} h^2 f &= (1 + h_1 + h_2 + \dots)^2 \times (z^6 + x^6 y^2 - 3x^2 y^4 z^2 + y^{10}) \\ &= z^6 + 2h_1 z^6 + [(h_1^2 + 2h_2)z^6 + x^6 y^2 - 3x^2 y^4 z^2] + \text{componentes de maior grau.} \end{aligned}$$

Como  $h^2 f$  é soma de quadrados temos  $h^2 f = \sum_i g_i^2$  e considerando  $g_{ij}$  a componente de grau  $j$  de  $g_i$  temos

$$h^2 f = \sum_i g_i^2 = \sum_i [g_{i3}^2 + 2g_{i3}g_{i4} + (g_{i4}^2 + 2g_{i3}g_{i5} + \dots)]$$

e igualando as expressões, obtemos que  $g_{i3} = a_i z^3$  para algum  $a_i \in \mathbb{R}$  e

$$\sum_i g_{i4}^2 = x^6 y^2 - 3x^2 y^4 z^2 + (h_1^2 + 2h_2)z^6 - 2 \sum_i a_i g_{i5} z^3$$

mas, sendo  $g_{i4}$  da forma:

$$g_{i4} = \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=4 \\ \alpha, \beta, \gamma \geq 0}} a_{i\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

e usando o resultado  $2\text{New}(q_i) \subseteq \text{New}(f)$  observamos que o único termo sem  $z$  é  $x^3 y$  pelo que  $g_{i4}$  não possui os termos  $y^4$ ,  $xy^3$ ,  $x^4$  e  $x^2 y^2$ . Além disso,  $y^6$  também não aparece na expressão pelo que  $g_{i4}$  também não pode possuir termos com  $y^3$ , isto é,  $g_{i4}$  não possui o termo  $y^3 z$ . Então, para originar o termo  $-3x^2 y^4 z^2$  em  $\sum_i g_{i4}^2$  só podem ser usados os seguintes termos:

- $x^2 z^2$  com  $y^4$ , mas  $g_{i4}$  não possui o termo  $y^4$ ;
- $x^2 y^2$  com  $y^2 z^2$ , mas  $g_{i4}$  não possui o termo  $x^2 y^2$ ;
- $y^3 z$  com  $x^2 yz$ , mas  $g_{i4}$  não possui o termo  $y^3 z$ ;
- $xy^3$  com  $xyz^2$ , mas  $g_{i4}$  não possui o termo  $xy^3$ ;
- $xy^2 z$  com ele próprio.

chegamos à conclusão que  $-3 = \sum (a_k)_{121}^2$ , o que é impossível. Concluimos que se  $h^2 f$  for soma de quadrados, temos que ter  $h(0) = 0$ .

O nosso estudo levou-nos a encontrar alguns polinómios que pressupomos terem *pontos maus*, entre os quais:

- $p = x^6 + y^6 + x^4 z^4 + x^2 + \lambda x^2 y^2 z$ ;
- $p = x^2 y^2 z^8 + y^4 z^8 + x^4 + y^{10} z^2 + \lambda x^2 y^4 z^3$ ;
- $p = s^2 + z^4 + x^2 w^2 + x^2 y^2 + y^2 w^2 + y^2 + \lambda xyzw$ ;
- $p = z^2 w^2 + s^2 + w^2 s^2 + z^2 s^2 + x^2 + y^4 + \lambda yzws$ .

A demonstração de que têm de facto esta propriedade é uma questão interessante, sendo que alguns testes numéricos parecem indicar que é de facto verdade. Na tabela seguinte encontra-se a distribuição do número de polinómios encontrados (foram efetuados 10 testes por cada  $d$ ) que parecem conter *pontos maus*, embora não cheguemos a nenhuma conclusão quanto à forma da sua variação.

$\frac{d}{n}$	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	-	0	3	0	3	3	5	3	3	4	3
4	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 5.4 Distribuição do número de polinómios que aparentam ter *pontos maus*.

**Observação:** Considerámos polinómios com *pontos maus* apenas os polinómios em que o  $t$  parecia ficar sempre fixo em zero independentemente do valor de  $r$  utilizado. Os outros dois casos em que o  $t$  diminuía à medida que o valor de  $r$  era aumentado considerámos que  $t$  atingiria o valor — número de circuito num número finito de passos ou no limite.

Estes polinómios com *pontos maus* são a resposta à questão mais geral colocada inicialmente no final do capítulo anterior, uma vez que não importa o expoente  $r$  do fator  $\left(1 + \sum_i x_i^2\right)^r$  pelo qual multipliquemos o circuito polinomial não negativo (que não é soma de quadrados à partida), ele nunca será soma de quadrados e conseqüentemente não será soma de binómios quadrados, pelo que o limite dos conjuntos de polinómios  $r$ -SOS (e conseqüentemente o de  $r$ -SOBS) não contém o conjunto dos polinómios SONC.

### Observações para $r$ -SOBS

Os testes executados com os circuitos polinomiais testados anteriormente nas somas de quadrados (excetuando, obviamente, os polinómios com *pontos maus*) resultaram na Tabela 5.5.

n	1-SOBS	2-SOBS	$\notin$ 2-SOBS
2	51	8	26
3	17	11	25
4	1	0	6
5	0	0	7

Tabela 5.5 Testes de verificação da propriedade  $r$ -SOBS.

Donde ressaltamos essencialmente que o número de polinómios que são somas de binómios quadrados para  $r \geq 3$ , ou que não são somas de binómios quadrados de todo, parece aumentar com o aumento do número de variáveis ao contrário do número de polinómios que são 1-SOBS que parece diminuir com o aumento do número de variáveis embora precisássemos de executar mais testes com polinómios de três, quatro e cinco variáveis para o confirmar (que não foi efetuado porque começam a ser programas incompatíveis para o computador).

No entanto, focámos o nosso estudo essencialmente em  $n = 2$  uma vez que tínhamos encontrado um resultado interessante para os polinómios  $r$ -SOS (todos os circuitos polinomiais não negativos com duas variáveis parecem ser no máximo 1-SOS), queríamos verificar se algum resultado igualmente interessante surgiria também para os polinómios  $r$ -SOBS e testámos então, para que  $r$  os polinómios 1-SOS que encontrámos anteriormente eram somas de binómios quadrados.

n=2	1-SOBS	2-SOBS	3-SOBS	$\notin$ 3-SOBS
d = 6	4	1	0	0
d = 12	7	1	0	2
d = 18	9	0	0	1
d = 24	5	2	1	2
d = 30	5	1	0	4
d = 36	5	3	1	1
d = 42	3	0	0	7
d = 48	7	0	1	2
d = 54	6	0	1	3

Tabela 5.6 Testes de verificação da propriedade  $r$ -SOBS para  $n = 2$ .

Pela tabela podemos afirmar que a variação não ocorre de forma monótona, isto é, os polinómios com duas variáveis que são sempre no máximo 1-SOS variam muito quanto ao  $r$  que os torna soma de binómios de quadrados, com particular relevância para  $r = 1$  onde a maioria dos polinómios 1-SOS parece estar enquadrada (excetuando o caso  $d = 42$ , que aparenta ser um caso que foge à "normalidade"). Além disso, podemos notar na tabela que parecem existir mais polinómios que são soma de binómios quadrados para  $r \geq 4$ , ou que não são somas de binómios quadrados de todo, do que para  $r = 2$  ou  $r = 3$ .

## 5.4 Conclusão

Os testes efetuados permitiram observar alguns fenómenos interessantes, alguns dos quais já haviam sido estudados na literatura, como a conjectura de Reznick e os *pontos maus* de Delzell, e outros que parecem ser novos, como o facto conjecturado de  $SONC_2^{2d} \subseteq 1SOS_2^{2d}$ . A falta de tempo impediu uma exploração teórica mais aprofundada das questões levantadas.

# Bibliografia

- [1] Ahmadi, A. A. and Hall, G. (2017). Sum of squares basis pursuit with linear and second order cone programming. *Algebraic and Geometric Methods in Discrete Mathematics*, 685:27–53.
- [2] Ahmadi, A. A. and Majumdar, A. (2019). DSOS and SDSOS optimization: more tractable alternatives to sum of squares and semidefinite optimization. *SIAM J. Appl. Algebra Geom.*, 3(2):193–230.
- [3] Blekherman, G., Parrilo, P. A., and Thomas, R. R. (2012). *Semidefinite optimization and convex algebraic geometry*. SIAM.
- [4] Boman, E. G., Chen, D., Parekh, O., and Toledo, S. (2005). On factor width and symmetric  $H$ -matrices. *Linear Algebra Appl.*, 405:239–248.
- [5] Delzell, C. N. (1980). *A constructive, continuous solution to Hilbert’s 17th problem, and other results in semi-algebraic geometry*. PhD thesis, Stanford University.
- [6] Fidalgo, C. and Kovačec, A. (2011). Positive semidefinite diagonal minus tail forms are sums of squares. *Math. Z.*, 269(3-4):629–645.
- [7] Gouveia, J., Kovačec, A., and Saeed, M. (2022). On sums of squares of  $k$ -nomials. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 226(1):106820.
- [8] Hilbert, D. (1888). Über die darstellung definitiver formen als summe von formenquadraten. *Mathematische Annalen*, 32(3):342–350.
- [9] Horn, R. A. and Johnson, C. R. (2012). *Matrix analysis*. Cambridge university press.
- [10] Ilıman, S. and de Wolff, T. (2016). Amoebas, nonnegative polynomials and sums of squares supported on circuits. *Res. Math. Sci.*, 3:Paper No. 9, 35.
- [11] Kurpisz, A. and de Wolff, T. (2019). New dependencies of hierarchies in polynomial optimization. In *ISSAC’19—Proceedings of the 2019 ACM International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 251–258. ACM, New York.
- [12] Plemmons, R. (1977).  $M$ -matrix characterizations. i—nonsingular  $m$ -matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 18(2):175–188.
- [13] Reznick, B. (1989). Forms derived from the arithmetic-geometric inequality. *Math. Ann.*, 283(3):431–464.
- [14] Reznick, B. (1995). Uniform denominators in hilbert’s seventeenth problem. *Mathematische Zeitschrift*, 220(1):75–97.
- [15] Seidler, H. and de Wolff, T. (2018). An experimental comparison of sonc and sos certificates for unconstrained optimization. *arXiv preprint arXiv:1808.08431*.