1 2 9 0

UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Maria Inês Patrício Paiva

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA MODELOS DE PREÇOS DE OPÇÕES BASEADOS EM PROCESSOS DE LÉVY

VOLUME 1

Dissertação no âmbito do Mestrado em Matemática, Ramo Estatística, Otimização e Matemática Financeira orientada pela Professora Doutora Ercília Sousa e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Julho de 2021

Métodos numéricos para modelos de preços de opções baseados em processos de Lévy

Maria Inês Patrício Paiva

1 2 9 0

UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Julho 2021

Agradecimentos

Aos meus pais, que sem eles não tinha conquistado este grau académico. Ensinaram-me a ser resiliente, persistente e lutadora. À minha mãe, que me deu força quando os desafios pareciam demasiado difíceis de ultrapassar e que festejou comigo os meus sucessos. Ao meu pai, que à sua maneira, se esforçou para que nada me faltasse e que me incentivou a ter ambição.

À minha irmã Catarina, que teve paciência e tolerância quando eu me sentia cansada e ansiosa com o trabalho.

Aos meus avós, à minha tia e ao Pedro que me ajudaram mesmo sem se darem conta disso.

À Mel e ao Zé, os meus primeiros amigos da faculdade e que com uma felicidade muito grande posso dizer, que são os meus melhores amigos. Deram-me motivação, celebraram comigo e aligeiraram esta fase da minha vida. Em especial, à Mel, que muitas vezes se zangava comigo e me dizia o que eu precisava de ouvir e que de forma muito convicta me assegurava de que ia conseguir, mesmo quando eu duvidava de mim própria.

Aos meus amigos da faculdade, que de uma forma em geral, tornaram o meu percurso académico inesquecível. Em particular, ao Augusto e ao Nuno, fizémos uma boa equipa de trabalho nestes últimos dois anos, tanto pela partilha de conhecimentos e material de estudo como pelo apoio emocional que demos uns aos outros.

À Professora Ercília Sousa, pela paciência, dedicação, pelas críticas construtivas e constante ajuda no desenvolvimento desta tese. A sua orientação, o seu gosto e conhecimento pela matemática foram uma grande inspiração para mim.

Por fim, a todos os Professores do Departamento de Matemática que tive o privilégio de ser aluna, e que me incutiram espírito crítico e uma curiosidade ilimitada pela ciência, em especial pela matemática.

Abstract

The Black-Scholes model was one of the first european-style option pricing models to be accepted. This model, plays a fundamental role due to the easiness that exists in its implementation. However, this model has some limitations, that is, it cannot describe all situations in the financial markets. Hence, other models were developed to circumvent these limitations, such as the option pricing model based on a Lévy process.

In this dissertation, we will deduce representative differential equations for each one of these models, and we will study, in detail, the equation of the option pricing model based on a Lévy process.

The differential equation representing these models based on Lévy processes is a fractional partial differential equation because of the Riemann-Liouville fractional operator. The methodologies used in solving this equation, require us to find an approximation for this operator, so that we can apply numerical methods. Thus, by a theoretical result, which relates the Riemann-Liouville fractional operator with the Grünwald-Letnikov fractional operator, we are able to discretize an equation according to the implicit Euler method and according to the Crank-Nicolson method. So that we can later find numerical solutions for these european-style option pricing models, taking into account certain boundary conditions, and withdraw conclusions about the properties of each numerical method.

Resumo

O modelo de Black-Scholes foi um dos primeiros modelos de preços de opções europeias a ser aceite. Este, desempenha um papel fundamental devido à facilidade que existe na sua implementação. No entanto, também apresenta algumas limitações, ou seja, não consegue descrever todas as situações dos mercados financeiros. Daí que, foram desenvolvidos outros modelos que contornassem estas limitações, como é o caso do modelo de preços de opções baseado num processo de Lévy.

Nesta dissertação, iremos deduzir equações diferencias representativas de cada um destes modelos e iremos estudar em pormenor a equação do modelo de preços de opções baseado num processo de Lévy.

A equação diferencial representativa destes modelos baseados em processos de Lévy, é uma equação diferencial parcial fracionária por conter o operador fracionário de Riemann-Liouville. As metodologias usadas na resolução desta equação, requerem que encontremos uma aproximação para este operador, de forma a que, possamos aplicar métodos numéricos. Assim, por um resultado teórico, que relaciona o operador fracionário de Riemann-Liouville com o operador fracionário de Grünwald-Letnikov, somos capazes de discretizar uma equação segundo o método implícito de Euler e segundo o método de Crank-Nicolson. De forma a que, possamos posteriormente, encontrar soluções numéricas para estes modelos de preços de opções de estilo Europeu, tendo em conta determinadas condições de fronteira, e retirar conclusões quanto às propriedades de cada método numérico.

Conteúdo

1 Introdução **1**

2 Processos de Lévy e transformadas de Fourier **5**

2.1 Processos de Wiener *versus* processos de Lévy 5

2.2 Transformadas de Fourier 7

3 Modelos de preços para opções **11**

3.1 Preços de opções baseados em processos de Wiener 11

3.2 Preços de opções baseados em processos de Lévy 15

3.3 Aproximação do operador fracionário 18

4 Métodos Numéricos **25**

4.1 Consistência, estabilidade e convergência 25

4.2 Discretização do operador fracionário 27

4.3 Método das diferenças finitas 33

4.4 Estabilidade e convergência 35

4.5 Extrapolação de Richardson 43

5 Testes numéricos **45**

5.1 Ordem de convergência 45

5.2 Opção call Europeia 48

6 Conclusões **51**

Bibliografia **53**

Capítulo 1

Introdução

Desenvolver metodologias para atribuição de preços a derivados financeiros, como por exemplo opções, tem sido um dos pontos focais no campo da Matemática Financeira. Muitos dos modelos matemáticos elaborados neste contexto baseiam-se em processos estocásticos.

Um derivado financeiro é um contrato a prazo relativo a um ativo subjacente. Daí que, um dos primeiros passos a tomar na idealização deste tipo de modelos é modelar o preço do seu ativo subjacente. Tendo em conta que um ativo corresponde a um bem que alguém possui e que pode gerar rendimentos, um ativo é financeiro quando existe apenas como um direito económico e o seu valor é obtido de um direito contratual.

Uma opção é um contrato entre dois intervenientes. Um dos intervenientes corresponde ao vendedor, que é quem fixa os termos do contrato e quem vende a opção. O outro interveniente é o comprador, que é quem adquire a opção, pagando o preço do mercado e que, posteriormente pode decidir exercer ou não a opção nos termos estabelecidos. Desta forma, esta é opcional, isto é, corresponde ao direito mas não à obrigação de venda ou compra de um ativo, a um preço pré-estabelecido K e num período de tempo determinado T. As opções também podem ser vistas como um instrumento financeiro que permite apostar no aumento ou diminuição do valor de um determinado ativo S_t.

O modelo de Black-Scholes foi um dos primeiros modelos desenvolvidos para determinar os preços de opções europeias. Estas opções dizem respeito a situações em que o seu detentor apenas tem permissão de exercer o seu direito na data de vencimento T, isto é, na maturidade do contrato.

As opções europeias dividem-se em dois tipos, opções de compra - opções call, que dão o direito a quem adquire a opção, de comprar o ativo financeiro ao preço de exercício K e no período de tempo determinado; e opções de venda - opções put, que dão o direito de vender o ativo financeiro no período de tempo determinado. As opções call geralmente são adquiridas por compradores que acreditam que o mercado está em crescimento enquanto que as opções put são adquiridas por compradores que especulam uma descida no mercado. Por exemplo, uma pessoa compra 1000 ações da *Amazon*. Para proteger variações de mercado dessas ações o Banco Mundial vendeu-lhe um contrato com o direito de compra (opção call) dessas ações por

20 euros daqui a 2 meses. Se nessa altura as ações valerem 100 euros, essa pessoa apenas vai pagar 20 euros por elas, podendo, posteriormente, vendê-las ao preço do mercado. No entanto, se o preço do mercado for inferior a 20 euros, a pessoa em causa decide não exercer o seu contrato, perdendo apenas o valor investido. Deste modo, um contrato pode funcionar como um seguro.

Inspirado nos modelos físicos que descreviam movimentos aleatórios de partículas suspensas num fluído, o modelo de Black-Scholes descreve a dinâmica do preço de um ativo como sendo um movimento browniano. O comportamento de um ativo financeiro resulta do facto de os mercados reagirem imediatamente a qualquer nova informação, quer seja sobre o próprio ativo ou sobre o mercado em geral. Ainda hoje, este modelo desempenha um papel fundamental na previsão dos preços de uma opção, devido à facilidade que existe na sua implementação e ao facto da sua fórmula só depender de um único parâmetro não observável. No entanto, também apresenta algumas limitações devido às suposições estritas ou pouco realistas que lhe estão subjacentes. Por exemplo, o facto de ter trajetórias quase certamente contínuas o que o impede de descrever situações em que os preços dos ativos apresentem ter saltos, como podemos ver na figura seguinte.

Fig. 1.1 Preço das ações da Google na NASDAQ no dia 29/08/2014 [9].

Outra limitação corresponde ao facto de ser baseado num mercado completo, isto é, um mercado onde existem informações suficientes para atender a todas as transações e onde os recursos são utilizados com o intuito de se obter um retorno elevado.

A equação de Black-Scholes é uma equação diferencial parcial da forma,

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + (r-\nu)\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = r\,V(x,t)$$

onde a função $V(x,t)$ corresponde aos preços da opção europeia, para $x = \ln S$, com S o preço do ativo subjacente e $\nu = \frac{1}{2}\sigma^2$, onde r é a taxa de juro, e σ corresponde à volatilidade de S, para $0 < t \leq T$.

Para superar algumas das limitações do modelo de Black-Scholes, foram propostos modelos alternativos, mais realísticos mas também mais complexos. Um desses modelos é descrito pela equação seguinte [22]:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + (r-\nu)\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + \nu_{-\infty}D_x^{\alpha}V(x,t) = rV(x,t) \tag{1.1}$$

onde $V(x,t)$ corresponde aos preços da opção europeia, para $x = \ln S$, com S o preço do ativo, $\nu = -\frac{\sigma^{\alpha}}{2}\sec(\alpha\frac{\pi}{2})$ para $1 < \alpha \leq 2$, r a taxa de juro e σ é a volatilidade de S. Notemos ainda que nesta equação, o preço do ativo S é descrito por um processo estocástico diferente do que o considerado para obter a equação diferencial de Black-Scholes.

Um modelo de Lévy pode ser visto como tendo uma combinação de uma componente *drift* (taxa de retorno esperada) e com uma combinação de dois processos independentes, um que segue um movimento browniano e outro que descreve saltos. Portanto, um modelo de Lévy tem subjacente o modelo de Black-Scholes. Para além disso, a equação (1.1), é uma equação diferencial parcial fracionária devido ao operador fracionário de Riemann-Liouville ${}_{-\infty}D_x^{\alpha}V(x,t)$.

Nesta dissertação, iremos deduzir as equações diferenciais do modelo de Black-Scholes e do modelo de Lévy, através das propriedades das martingalas e das transformadas de Fourier. Posteriormente, será feito um estudo da aproximação do operador de Riemann-Liouville, utlizando uma relação com o operador fracionário de Grünwald-Letnikov, com o intuito de podermos discretizar a equação (1.1) segundo dois métodos das diferenças finitas.

No fim, pretendemos encontrar soluções numéricas desta equação, através de métodos estáveis e convergentes, de forma a que, os resultados computacionais apresentem erros de aproximação pequenos e ordens de convergência aproximadas aos dados teóricos. E ainda, pela introdução de um método de extrapolação, pretendemos diminuir os erros de aproximação e aumentar a ordem de convergência, obtendo resultados computacionais melhorados.

Deste modo, este trabalho expressa bem como os diferentes ramos da matemática se conjugam, para solucionar problemas cada vez mais complexos, impostos pelos desafios dos mercados financeiros.

Capítulo 2

Processos de Lévy e transformadas de Fourier

Neste capítulo começaremos por apresentar conceitos fundamentais relativos a processos estocásticos, mais especificamente a processos de Wiener que são a base do modelo de Black-Scholes e a processos de Lévy. Posteriormente, introduziremos a definição e propriedades relevantes das transformadas de Fourier, ferramentas essenciais no estudo de modelos sujeitos a processos de Lévy, nos quais, dificilmente, se tem o conhecimento da função densidade.

2.1 Processos de Wiener *versus* processos de Lévy

Um processo estocástico é considerado, de grosso modo, como o oposto de um processo determinístico, isto é, mesmo que se conheça o valor inicial, apenas é possível saber se algumas trajetórias são mais prováveis do que outras.

As definições e propriedades apresentadas em seguida podem ser encontradas em [5, 14, 17].

Definição 2.1.1 *Um processo estocástico é uma família* $(W_t, t \in I)$ *de variáveis aleatórias* W_t*, definidas para um conjunto de parâmetros* t*, sobre o mesmo espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$*, onde* $t \in \mathbb{R}$ *varia continuamente num intervalo de tempo* I*, com* $0 \leq t \leq T$*.*

Como os preços dos ativos financeiros evoluem ao longo do tempo, podem ser modelados por processos estocásticos. Um conjunto destes preços observados, pode ser considerado como uma trajetória de um processo estocástico.

Observação 2.1.1 *A trajectória do processo é uma função de* t *que se obtém concretizando todas as variáveis do processo para o mesmo* $\omega \in \Omega :\ (W_t(\omega), t \in I) \equiv (x_t, t \in I)$*.*

Seja a tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, o espaço de probabilidade. No contexto financeiro Ω corresponde ao espaço amostral, que representa todos os cenários possíveis. A $\sigma - algebra\ \mathcal{F}$, corresponde a uma classe de subconjuntos de Ω, isto é, representa os eventos que são observáveis no mercado. Considerando t o tempo, todos os dados até t podem ser vistos como uma $\sigma - algebra\ \mathcal{F}_t$, pelo

que, se um espaço de probabilidades é filtrado tem-se, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ para $t < s$.

Os conjuntos em $\mathcal{F}$ são conjuntos mensuráveis e uma medida nestes conjuntos é a medida de probabilidade $\mathbb{Q}$.

Uma classe importante de processos estocásticos é a das martingalas. De forma simplificada, um processo estocástico W_t é considerado uma martingala se a melhor previsão que se tem do seu valor futuro W_s, com $t < s$, é o seu valor passado.

Definição 2.1.2 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ um espaço de probabilidade e $(\mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ uma filtração. O processo estocástico $(W_t, t \in [0,T])$ definido em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ é uma martingala em relação a $(\mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ se para todo o $t \in [0,T]$,*

- $E^{\mathbb{Q}}(|W_t|) < \infty$,
- $E^{\mathbb{Q}}(W_t|\mathcal{F}_s) = W_s$, *para todo o* $s \in [0,t[$.

Os modelos a serem descritos nesta dissertação dizem respeito a modelos de preços de opções baseados em processos de Wiener e processos de Lévy. Deste modo, um processo de Wiener admite as propriedades que se seguem.

Definição 2.1.3 (Processo de Wiener) *O processo de Wiener ou movimento Browniano W_t, para $t \geq 0$, satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $W_0 = 0$ *q.c*
2. $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, $\forall\, t \geq 0$
3. *É um processo de incrementos independentes, isto é, para $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ as variáveis aleatórias $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ são independentes.*
4. *W_t depende continuamente do tempo t.*

E um processo de Lévy é caracterizado pelas propriedades que a seguir se enunciam.

Definição 2.1.4 (Processo de Lévy) *O processo estocástico de Lévy L_t, para $t \geq 0$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $L_0 = 0$ *q.c.*
2. *É um processo de incrementos independentes, isto é, para $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ as variáveis aleatórias $L_{t_0}, L_{t_1} - L_{t_0}, \ldots, L_{t_n} - L_{t_{n-1}}$ são independentes.*
3. *É um processo de incrementos estacionários de forma a que, para qualquer $s < t$, $L_t - L_s$ tem a mesma distribuição que L_{t-s}.*
4. *É estocasticamente contínuo tal que $\forall\, \epsilon > 0$, $\lim_{h \to 0} P\big(|L_{t+h} - L_t| \geq \epsilon\big) = 0$*
5. *Apresenta continuidade à direita com limites à esquerda em função de t.*

Este processo também pode ser considerado como um processo homogéneo pois é definido por incrementos estacionários e independentes.

Observação 2.1.2 *A condição (4) não implica que o processo de Lévy tenha trajectórias contínuas.*

Nesta dissertação iremos dar ênfase aos processos estáveis à Lévy, uma vez que estas distribuições, por poderem gerar caudas pesadas e permitir assimetria, isto é, por poderem descrever situações mais aproximadas da realidade, são essenciais na modelação de preços para opções.

De modo genérico, uma variável aleatória estável pode ser vista como o limite da soma de variáveis independentes e identicamente distribuídas.

Definição 2.1.5 (Variável aleatória estável) *Uma variável aleatória L é estável se existem duas sequências reais $(c_n,\ n \in \mathbb{N})$ e $(d_n,\ n \in \mathbb{N})$, com $c_n > 0$ tal que*

$$L_1 + \cdots + L_n \stackrel{d}{=} c_n L + d_n$$

onde $L_1, \ldots, L_n$ são cópias independentes de L e onde $\stackrel{d}{=}$ denota-se por uma distribuição equivalente. E ainda, as únicas escolhas possíveis para c_n são na forma $\sigma n^{1/\alpha}$, com $\alpha \in (0, 2]$.

Como veremos nas próximas secções, o parâmetro α tem um papel fundamental no estudo deste tipo de processos de Lévy, e é denominado como o índice de estabilidade.

Um processo estável à Lévy é um processo cuja distribuição finita é estável à Lévy.

Definição 2.1.6 (Processo estável à Lévy) *Seja L_t uma variável aleatória dependente de t. Então, o processo estocástico L_t, com $0 < t < \infty$, é um processo estável à Lévy se a distribuição finita de L_t é estável. Isto é, se a distribuição finita do processo estocástico L corresponde às distribuições finitas dos vetores $\big(L(t_1), \ldots, L(t_n),\ \ t_1 < \cdots < t_n < \infty\big)$.*

Em geral é difícil aceder às distribuições dos processos de Lévy pelo que muitas das suas propriedades são conhecidas através de funções características, funções essas a serem discutidas na próxima secção.

2.2 Transformadas de Fourier

As propriedades das transformadas de Fourier discutidas nesta secção, são baseadas em [6, 8, 15, 16].

Definição 2.2.1 *Define-se $L_1(X)$ como o conjunto dos espaços de funções integráveis à Lebesgue tais que,*

$$\int_X |f| < \infty.$$

É neste espaço de funções que serão definidas as transformdas de Fourier.

Definição 2.2.2 (Transformada de Fourier) *Para toda a função $f \in L_1(\mathbb{R})$, a transformada de Fourier $\hat{f}$ de f é definida por*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x)\, dx$$

para todo o $\xi \in \mathbb{R}$.

E a existência de transformada de Fourier inversa é garantida pelo seguinte resultado.

Teorema 2.2.1 *Sejam $f \in L_1(\mathbb{R})$ e $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ então,*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \hat{f}(\xi)\, d\xi,$$

para quase todo o $x \in \mathbb{R}$.

Notemos que se f for contínua em $\mathbb{R}$ então a fórmula da inversão é válida para todo o $\mathbb{R}$.

Motivado pelo Teorema anterior podemos então definir a transformada inversa de Fourier.

Definição 2.2.3 (Transformada inversa de Fourier) *Para toda a função $g \in L_1(\mathbb{R})$, a transformada inversa de Fourier $\breve{g}$ de g é definida por,*

$$\breve{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} g(\xi)\, d\xi,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

A função característica de uma variável aleatória X_t descreve o comportamento dessa variável e permite determinar várias propriedades da sua distribuição. Assim, esta função apresenta a seguinte definição.

Definição 2.2.4 *Seja X_t uma variável aleatória com função de densidade $f_{X_t}(x)$. A função característica de X_t é definida pela seguinte esperança matemática,*

$$E(e^{itX_t}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_{X_t}(x)\, dx.$$

Como foi referido anteriormente, para o caso dos processos de Lévy dificilmente obtemos uma expressão da função densidade. No entanto, a expressão da sua função característica está disponível e consiste na transformada de Fourier da função densidade,

$$\hat{f}_{X_t}(\xi) := E(\, e^{i\xi X_t}\,).$$

Se uma variável aleatória admite função de densidade então a função característica é dual, isto é, uma delas é a transformada de Fourier da outra. No entanto, a função característica de uma distribuição existe sempre, mesmo que a função de densidade não exista.

No seguinte resultado, observamos as expressões das funções características dos processos estocásticos em estudo. E para além disso, indica-nos a definição de expoente característico, que será essencial na dedução de uma equação diferencial de um modelo de preços de opções sujeito a um processo de Lévy.

Teorema 2.2.2 *Para todo o processo de Lévy L_t, e para todo o $\xi \in \mathbb{R}$, com $t \in \mathbb{R}^+$ tem-se que*

$$E(e^{i\xi L_t}) = e^{t\psi(\xi)}, \tag{2.1}$$

onde $\psi(\xi)$ é o expoente característico dado por:

1. *se L_t for um processo de Wiener,*

$$\psi(\xi) = \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2,$$

   com $\sigma \in (0, +\infty)$ um parâmetro de escala.

2. *se L_t for um processo de Lévy α- estável então*

$$\psi(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sigma^\alpha|\xi|^\alpha\{1 - i\beta sign(\xi)\tan(\alpha\pi/2)\} + im\xi, & \text{para } \alpha \neq 1, \\ -\frac{1}{2}\sigma|\xi|\{1 + (2i\beta/\pi)sign(\xi)\ln|\xi|\} + im\xi, & \text{para } \alpha = 1. \end{cases}$$

   onde $\alpha \in (0, 2]$ corresponde ao parâmetro de estabilidade, $\beta \in [-1, 1]$ corresponde ao parâmetro de assimetria, σ é um parâmetro de escala e m é um parâmetro de localização.

Para além da função característica ser expressa como uma transformada de Fourier, existem outras propriedades que são úteis referir.

Proposição 2.2.1 *Seja $f \in L_1(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{R}$. Então,*

$$\widehat{f(. - p)}(\xi) = e^{i\xi \cdot p}\hat{f}(\xi).$$

Para estabelecer determinadas propriedades relacionadas com as transformadas de Fourier necessitamos ainda de definir o espaço das funções absolutamente contínuas [16].

Definição 2.2.5 (Função absolutamente contínua) *Uma função $f(x)$ é absolutamente contínua em Ω se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para qualquer conjunto de intervalos não intercetáveis $[a_k, b_k] \subset \Omega$, $k = 1, 2, \ldots, n$, com $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, a inequação $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$ verifica-se. O espaço destas funções denota-se por $AC(\Omega)$*

Ainda, o espaço $AC(\Omega)$ coincide com o espaço das funções de primitivas de Lebesgue da forma,

$$f(x) \in AC(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x f'(t)\, dt, \quad \int_a^b |f'(t)|\, dt < \infty,$$

com c uma constante arbitrária.

Desta forma, $AC^m([a, b])$, com $m = 1, 2, \ldots$, corresponde ao espaço de funções $f(x)$ que

têm derivadas contínuas até à ordem $m-1$ em $[a,b]$, com $f^{(m-1)} \in AC([a,b])$.

Portanto, dentro do espaço das funções absolutamente contínuas decorre de [1] a seguinte Proposição para um n inteiro positivo.

Proposição 2.2.2 *Seja $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap AC^{n-1}$ e $f^{(n)} \in L_1(\mathbb{R})$. Então,*

$$[\widehat{f^{(n)}(x)}](\xi) = (-i\xi)^{(n)}\hat{f}(\xi),$$

para todo o $\xi \in \mathbb{R}$.

Por fim, resta-nos definir a derivada fracionária de Riemann-Liouville que relaciona o Teorema 2.2.3 com a transformada de Fourier.

Definição 2.2.6 *[21] Seja $f \in AC^m[a,b]$, com $-\infty < a < b$. A derivada fracionária à esquerda de Riemann-Liouville de ordem $\alpha > 0$ é definida por*

$${}_aD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dx^m}\int_a^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-m+\alpha}}\,dy,$$

com $m-1 < \alpha \leq m$, para um inteiro positivo m.

E ainda, a transformada de Fourier da derivada fracionária de Riemann-Liouville pode ser expressa pelo seguinte resultado.

Teorema 2.2.3 *Seja $f \in AC^m(\mathbb{R})$. Para $m-1 < \alpha \leq m$, tem-se que*

$$[\widehat{{}_{-\infty}D_x^\alpha f(x)}](\xi) = (-i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi).$$

Este Teorema tem um papel importante na dedução da equação diferencial de um modelo de Lévy, como iremos ver no próximo capítulo.

Capítulo 3

Modelos de preços para opções

Com o intuito de deduzirmos equações diferenciais dos modelos de preços de opções Europeias, baseados em processos de Wiener e processos de Lévy, iremos inicialmente encontrar uma martingala equivalente, para posteriormente, aplicarmos propriedades das transformadas de Fourier. E por fim, iremos propor uma aproximação para o operador fracionário, contido na equação diferencial de um modelo baseado num processo de Lévy.

3.1 Preços de opções baseados em processos de Wiener

Os processos de Wiener são mecanismos estocásticos que estão na base de modelos de difusão, como por exemplo o modelo de Black-Scholes. Este modelo é caracterizado pelas seguintes hipóteses: não apresenta oportunidades de arbitragem, o mercado é sem atrito, o preço do ativo segue um movimento Browniano, a taxa de retorno e a volatilidade são constantes e é um modelo constituído por opções europeias.

Consideremos a equação estocástica de Black-Scholes que descreve o preço de um ativo financeiro,

$$d(\ln S_t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dB_t, \tag{3.1}$$

onde μ é a taxa de retorno esperada, σ é a volatilidade e dB_t corresponde aos incrementos de um processo de Wiener no espaço $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sob a medida de probabilidade $\mathbb{P}$. Esta, tem como solução,

$$S_T = S_t\, exp\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \int_t^T dB_u\}.$$

Para além disso, a equação (3.1) pode ainda ser reescrita na forma

$$d(\ln S_t) = (r - \nu)dt + \sigma[\gamma dt + dB_t] = (r - \nu)dt + \sigma dB_t^\gamma, \tag{3.2}$$

fazendo $\mu = r$, $\gamma = \frac{\mu - r}{\sigma}$ e $\nu = \frac{1}{2}\sigma^2$. Se $\gamma \neq 0$ o movimento Browniano dB_t^γ, tal que $dB_t^\gamma = \gamma dt + dB_t$, não é um processo de Wiener sujeito a $\mathbb{P}$.

No entanto, sob determinadas condições impostas em γ, pelo Teorema de Girsanov [10],

existe uma medida de probabilidade $\mathbb{Q}$, tal que dB_t^γ é um processo de Wiener relativo a $\mathbb{Q}$.

Tendo em conta o teorema fundamental do preço de um ativo [17], um mercado é livre de arbitragem se e só se existe pelo menos uma medida de probabilidade neutra face ao risco que é equivalente à medida de probabilidade original $\mathbb{P}$. Isto é, se e só se existe uma medida de probabilidade $\mathbb{Q}$, tal que os preços dos ativos descontados à taxa livre de risco são martingalas relativamente a $\mathbb{Q}$.

Como pretendemos deduzir uma equação diferencial que descreva o comportamento de preços de opções baseados em processos de Wiener, sob a medida $\mathbb{Q}$, a solução da equação (3.2) é,

$$S_T = S_t \, exp\{ \, (r-\nu)(T-t) + \sigma \int_t^T dB_u^\gamma \, \}. \tag{3.3}$$

Consideremos a mudança de variável referida anteriormente $x_t = \ln S_t$. Seja $\Pi(x_T, T)$ o valor da payoff na maturidade de um ativo x_T, isto é, da função que corresponde ao lucro do ativo na data de vencimento T. Os preços das opções podem ser calculados pela expressão [14],

$$V(x,t) = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}}[\Pi(x_T, T)|\mathcal{F}_t], \tag{3.4}$$

onde $E^{\mathbb{Q}}[A|\mathcal{F}_t]$ denota a esperança condicional de uma variável aleatória A, com respeito à filtração $\mathcal{F}_t$, sob a medidade de probabilidade $\mathbb{Q}$.

A vantagem de se modelar determinado processo estocástico através de uma martingala está na facilidade de reconstituir todo o processo a partir do seu valor no instante terminal, tomando a esperança condicionada em relação ao passado.

Omitindo a filtração para simplificarmos a notação, tendo em conta a Definição 2.2.4 e supondo, usando o Teorema 2.2.1, que $\Pi(x_T, T)$ admite transformada de Fourier, de (3.4) vem que,

$$\begin{aligned} V(x,t) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x_T, T) f_{x_T}(x) \, dx \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x_T} \, \hat{\Pi}(\xi, T) \, d\xi \right] f_{x_T}(x) \, dx. \end{aligned}$$

Assumindo que o Teorema de Fubini [16] é válido, isto é, que pelo menos um dos integrais é absolutamente convergente, podemos trocar a ordem de integração e escrever a função dos preços das opções como,

$$\begin{aligned} V(x,t) &= \frac{e^{-r(T-t)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x_T} \, f_{x_T}(x) \, dx \right] \hat{\Pi}(\xi, T) \, d\xi \\ &= \frac{e^{-r(T-t)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E^{\mathbb{Q}}(e^{-i\xi x_T}) \, \hat{\Pi}(\xi, T) \, d\xi. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Aplicando a mudança de variável $x_t = \ln S_t$, à solução (3.3) obtemos a seguinte igualdade,

$$x_T = x_t + (r-\nu)(T-t) + \sigma \int_t^T dB_u^\gamma.$$

Substituindo na expressão da esperança matemática, em (3.5), ficamos com,

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{Q}}(e^{-i\xi x_T}) &= E^{\mathbb{Q}}\left(e^{-i\xi x_t - \xi i(r-\nu)(T-t) - \xi i\sigma \int_t^T dB_u^\gamma}\right) \\ &= E^{\mathbb{Q}}\left(e^{-i\xi x_t - \xi i(r-\nu)(T-t) - \xi i\sigma \left(B_T^\gamma - B_t^\gamma\right)}\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Notemos que esta esperança é relativa à filtração $\mathcal{F}_t$ e uma vez que $\sigma(x_t) \subset \mathcal{F}_t$ podemos considerar que x_t é constante relativamente à esperança. Ainda, sob $\mathbb{Q}$, $(B_T^\gamma - B_t^\gamma)$ é independente de $\mathcal{F}_t$. Portanto de (3.6) temos,

$$E^{\mathbb{Q}}(e^{-i\xi x_T}) = e^{-i\xi x_t - \xi i(r-\nu)(T-t)} E^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\xi i\sigma \left(B_T^\gamma - B_t^\gamma\right)}\right).$$

E de (2.1) vem que, $E^{\mathbb{Q}}(e^{-i\xi x_T}) = e^{-i\xi x_t - \xi i(r-\nu)(T-t) + \psi(-\xi)(T-t)}$.

Do Teorema 2.2.2, sabemos que para um processo de Wiener $\psi(-\xi) = -\xi^2\,\nu$, com $\nu = \frac{1}{2}\sigma^2$. Deste modo, substituindo em (3.5) obtemos,

$$\begin{aligned} V(x,t) &= \frac{e^{-r(T-t)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E^{\mathbb{Q}}(e^{-i\xi x_T})\, \hat{\Pi}(\xi,T)\, d\xi \\ &= \frac{e^{-r(T-t)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x_t} e^{-\xi i(r-\nu)(T-t) - \xi^2\nu(T-t)}\, \hat{\Pi}(\xi,T)\, d\xi. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Seja $g(\xi) = e^{-\xi i(r-\nu)(T-t) - \xi^2\nu(T-t)}\, \hat{\Pi}(\xi,T)$, pela definição de transformada inversa de Fourier, podemos escrever,

$$V(x,t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x_t} g(\xi) d\xi = e^{-r(T-t)} \check{g}(x). \tag{3.8}$$

Calculando a transformada de Fourier de (3.7) vem que,

$$\hat{V}(\xi,t) = e^{-r(T-t)} e^{-\xi i(r-\nu)(T-t) - \xi^2\nu(T-t)}\, \hat{\Pi}(\xi,T) = e^{[-r - \xi i(r-\nu) - \xi^2\nu](T-t)}\, \hat{\Pi}(\xi,T).$$

Então $\hat{V}(\xi,t)$ é solução da seguinte equação,

$$\frac{\partial \hat{V}(\xi,t)}{\partial t} = [r + \xi i(r-\nu) + \xi^2\nu]\hat{V}(\xi,t).$$

Pelo que obtemos,

$$\frac{\partial \hat{V}(\xi,t)}{\partial t} + (r-\nu)(-i\xi)\hat{V}(\xi,t) + \nu(-i\xi)^2\hat{V}(\xi,t) = r\,\hat{V}(\xi,t),$$

com condição final, $\hat{\Pi}(\xi,T) = \hat{V}(\xi,T)$.

Novamente, aplicando a transformada inversa de Fourier, a equação anterior é escrita na forma,

$$\widehat{\left[\frac{\partial \hat{V}(\xi,t)}{\partial t}\right]}(x,t) + \nu\,\widehat{\left[(-i\xi)^2\hat{V}(\xi,t)\right]}(x,t) + (r-\nu)\,\widehat{\left[(-i\xi)\hat{V}(\xi,t)\right]}(x,t) = r\,\widehat{\left[\hat{V}(\xi,t)\right]}(x,t).$$

Pelo Teorema 2.2.1 e pela Proposição 2.2.2, chegamos à equação diferencial de um modelo de preços de opções baseado num processo de Wiener,

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + (r-\nu)\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = r\,V(x,t),$$

onde $\nu = \frac{1}{2}\sigma^2$.

Por fim, falta discutir as condições de fronteira e a condição final desta equação. Assim, tomemos o caso de uma opção call.

Tendo em conta preço do ativo subjacente S, o preço de exercício K descontado à taxa de juro r, uma opção call é tal que as condições de fronteira correspondem a [17],

$$\begin{aligned} &\lim_{S\to\infty} S - V(S,t) = Ke^{-r(T-t)}, \qquad t \le T \\ &\lim_{S\to 0} V(S,t) = 0. \end{aligned}$$

Isto é, quando S tende para 0 é trivial concluir que o preço da sua opção também irá tender para 0, mesmo que estejamos longe de T. Pois, se o preço do ativo subjacente for 0, então o detentor da opção nunca vai escolher exercer a opção ao preço K.

E quando S é muito grande, ou seja $S \to +\infty$, o preço da opção exercida aproxima-se da diferença entre S e o preço de exercício descontado à taxa de juro, $V(S,t) \approx S - Ke^{-r(T-t)}$.

Considerando a mudança de variável, $x_t = \ln S_t$, temos que as condições de fronteira quando $S \to 0^+$ e quando $S \to \infty$ são agora dadas quando $x \to \pm\infty$ por,

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty} V(x,t) = 0, \qquad t \ge 0 \\ &\lim_{x\to+\infty} e^x - V(x,t) = Ke^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

Nestas mesmas circunstâncias, a condição final é tal que

$$V(x,T) = \left(e^x - K\right)^+.$$

Para uma opção put o raciocínio é análogo.

3.2 Preços de opções baseados em processos de Lévy

De acordo com (2.1.4) um processo de Lévy é um processo com acréscimos estacionários e independentes que não apresenta trajetóricas contínuas, isto é, o processo L_t é apenas contínuo à direita e o limite à esquerda existe. Para além disso, um modelo baseado neste processo é insento de um mercado completo.

Assim, à semelhança do que aconteceu para os processos de Wiener, a equação estocástica que descreve o preço de um ativo sujeito a um processo de Lévy é dado por [2],

$$d(\ln S_t) = \mu dt + dL_t^{\mathbb{P}},$$

onde μ é à taxa de retorno esperada e $dL_t^{\mathbb{P}}$ corresponde aos incrementos de um processo de Lévy, no espaço $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sob a medida de probabilidade $\mathbb{P}$.

Do teorema fundamental do preço de um ativo referido na secção anterior, existe uma medida de probabilidade $\mathbb{Q}$ que é quivalente a $\mathbb{P}$ tal que os preços destes ativos são martingalas relativamente a $\mathbb{Q}$. Portanto, é necessário expressar a dinâmica de S_t sob uma medida neutra face ao risco ou sob uma martingala equivalente.

Notamos, no entanto, que uma condição necessária para a existência de uma martingala equivalente é que o modelo seja livre de arbitragem. E ainda, a existência de uma martingala equivalente única num modelo implica que este apresente um mercado completo [5]. Então, relativamente ao processo em causa, existe uma martingala equivalente $\mathbb{Q}$ não única, tal que o modelo é agora representado pela seguinte equação,

$$d(\ln S_t) = (r - \nu)dt + dL_t,$$

onde r é a taxa livre de risco, ν corresponde a um ajuste na convexidade de forma a que $E^{\mathbb{Q}}(S_T) = e^{r(T-t)}S_t$ e dL_t corresponde aos incrementos de um processo de Lévy sujeitos $\mathbb{Q}$. Deste modo, a respetiva solução é dada pela expressão,

$$S_T = S_t \, exp\{ \, (r - \nu)(T - t) + \int_t^T dL_u \, \}. \tag{3.9}$$

Como temos por objetivo deduzir uma equação diferencial que descreva um modelo baseado num processo de Lévy, voltamos a repetir o raciocínio da secção anterior. Consideremos a mudança de variável $x_t = \ln S_t$ e seja $\Pi(x_T, T)$ o valor da payoff na maturidade de um ativo x_T. Então os preços das opções podem ser calculados em $\mathbb{Q}$ usando a expressão [14],

$$V(x, t) = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}}[\Pi(x_T, T)|\mathcal{F}_t].$$

Supondo que $\Pi(x_T, T)$ admite transformada de Fourier e pelo mesmo raciocínio usado em (3.5) vem que,

$$\begin{aligned} V(x,t) &= \frac{e^{-r(T-t)}}{2\pi} E^{\mathbb{Q}}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x_T}\ \hat{\Pi}(\xi,T)\ d\xi\Big] \\ &= \frac{e^{-r(T-t)}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E^{\mathbb{Q}}(e^{-i\xi x_T})\ \hat{\Pi}(\xi,T)\ d\xi. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ao aplicarmos a mudança de varável $x_t = \ln S_t$, à solução (3.9) chegamos à seguinte igualdade,

$$x_T = x_t + (r-\nu)(T-t) + \int_t^T dL_u.$$

Podemos substituir esta expressão na esperança matemática, tendo em conta que x_t é relativo à filtração $\mathcal{F}_t$ e portanto, é constante no que respeita à esperança e que, sob $\mathbb{Q}$, $(L_T - L_t)$ é independente de $\mathcal{F}_t$,

$$E^{\mathbb{Q}}(e^{-i\xi x_T}) = E^{\mathbb{Q}}\left(e^{-i\xi x_t - \xi i(r-\nu)(T-t) - \xi i\int_t^T L_u}\right) = e^{-i\xi x_t - \xi i(r-\nu)(T-t) + \psi(-\xi)(T-t)}.$$

Assim, substituindo esta expressão em (3.10) temos,

$$V(x,t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x_t} e^{-\xi i(r-\nu)(T-t)+\psi(-\xi)(T-t)}\ \hat{\Pi}(\xi,T)\ d\xi. \tag{3.11}$$

Seja $g(\xi) = e^{-\xi i(r-\nu)(T-t)+\psi(-\xi)(T-t)}\ \hat{\Pi}(\xi,T)$, pela definição de transformada inversa de Fourier obtemos,

$$V(x,t) = \ e^{-r(T-t)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x_T} g(\xi) d\xi = \ e^{-r(T-t)}\check{g}(x)$$

Aplicando ainda a transformada de Fourier em (3.11) vem que,

$$\hat{V}(\xi,t) = e^{[-r-\xi i(r-\nu)+\psi(-\xi)](T-t)}\ \hat{\Pi}(\xi,T).$$

Pelo que observamos que $\hat{V}(\xi,t)$ é solução da equação,

$$\frac{\partial \hat{V}(\xi,t)}{\partial t} = [r + \xi i(r-\nu) - \psi(-\xi)]\hat{V}(\xi,t), \tag{3.12}$$

com condição final $\hat{\Pi}(\xi,T) = \hat{V}(\xi,T)$.

O Teorema 2.2.2, relativo a um processo de Lévy α-estável e ao ramo $\alpha \neq 1$, indica-nos a expressão do expoente característico para este processo. No entanto, esta expressão pode ser manipulada e simplificada.

Consideremos as seguintes propriedades dos complexos, para $1 < \alpha \leq 2$,

$$(i\xi)^\alpha = |\xi|^\alpha e^{i\alpha\frac{\pi}{2}sign(\xi)} \qquad (-i\xi)^\alpha = |\xi|^\alpha e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}sign(\xi)}.$$

E tendo em conta que a função cosseno é uma função par, podemos descartar a expressão $sign(\xi)$ do seguinte modo,

$$\begin{aligned}
\psi(\xi) &= -\frac{1}{2}\sigma^\alpha|\xi|^\alpha\Big\{1 - i\beta sign(\xi)\tan(\alpha\pi/2)\Big\} + im\xi \\
&= -\frac{\sigma^\alpha}{2cos(\alpha\pi/2)}|\xi|^\alpha\Big\{cos(\alpha\pi/2) - i\beta sign(\xi)\sin(\alpha\pi/2)\Big\} + im\xi \\
&= -\frac{\sigma^\alpha}{2cos(\alpha\pi/2)}|\xi|^\alpha\Big\{\frac{e^{i\alpha\frac{\pi}{2}} + e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}}{2} - \beta isign(\xi)\frac{e^{i\alpha\ \frac{\pi}{2}sign(\xi)} - e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}sign(\xi)}}{2isign(\xi)}\Big\} + im\xi \\
&= -\frac{\sigma^\alpha}{4cos(\alpha\pi/2)}|\xi|^\alpha\Big\{e^{i\alpha\frac{\pi}{2}sign(\xi)} + e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}sign(\xi)} - \beta e^{i\alpha\ \frac{\pi}{2}sign(\xi)} + \beta e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}sign(\xi)}\Big\} + im\xi \\
&= -\frac{\sigma^\alpha}{4cos(\alpha\pi/2)}\Big\{(1-\beta)|\xi|^\alpha e^{i\alpha\frac{\pi}{2}sign(\xi)} + (1+\beta)|\xi|^\alpha e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}sign(\xi)}\Big\} + im\xi \\
&= -\frac{\sigma^\alpha}{4cos(\alpha\pi/2)}\Big\{(1-\beta)(i\xi)^\alpha + (1+\beta)(-i\xi)^\alpha\Big\} + im\xi.
\end{aligned}$$

De acordo com esta dedução e por [2], fazendo $\beta = -1$, $\nu = -\frac{\sigma^\alpha}{2}\sec(\alpha\frac{\pi}{2})$ e $m = 0$, vem que

$$\psi(-\xi) = \nu(-i\xi)^\alpha.$$

Substituindo esta expressão em (3.12) obtemos,

$$\frac{\partial\hat{V}(\xi,t)}{\partial t} + (r-\nu)(-\xi i)\hat{V}(\xi,t) + \nu(-i\xi)^\alpha\hat{V}(\xi,t) = r\hat{V}(\xi,t).$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier, podemos escrever a equação anterior na forma,

$$\widehat{\Big[\tfrac{\partial\hat{V}(\xi,t)}{\partial t}\Big]}(x,t) + (r-\nu)\ \widehat{\Big[(-\xi i)\hat{V}(\xi,t)\Big]}(x,t) + \nu\ \widehat{\Big[(-i\xi)^\alpha\hat{V}(\xi,t)\Big]}(x,t) = r\ \widehat{\Big[\hat{V}(\xi,t)\Big]}(x,t).$$

Por fim, pela Proposição 2.2.2 e pelo Teorema 2.2.3 chegamos à expressão da equação pretendida,

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + (r-\nu)\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + \nu\,{}_{-\infty}D_x^\alpha V(x,t) = rV(x,t), \tag{3.13}$$

para $1 < \alpha \leq 2$, onde $\nu = -\frac{\sigma^\alpha}{2}\sec(\alpha\frac{\pi}{2})$.

É interessante notar que a equação de Black-Scholes pode ser recuperada da equação de Lévy fazendo $\alpha = 2$.

Ainda, as condições de fronteira e final deste modelo são análogas ao do modelo anterior, isto é, as conclusões são as mesmas para o mesmo tipo de opção.

3.3 Aproximação do operador fracionário

Tendo em conta o operador fracionário de Riemann-Liouville,

$$ {}_{-\infty}D_x^{\alpha}V(x,t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\int_{-\infty}^{x}\frac{V(y,t)}{(x-y)^{1-m+\alpha}}dy, $$

com $m-1<\alpha\leq m$, nesta secção, iremos definir um segundo operador fracionário que se relaciona com este e que possamos usar na discretização da equação (3.13).

Os resultados teóricos que se seguem dizem respeito a uma função de uma variável real por questões de simplificação. No entanto, a generalização para uma função de duas variáveis é trivial. Deste modo, notemos a seguinte definição.

Definição 3.3.1 *Seja $\alpha>0$. A derivada fracionária de Grünwald-Letnikov é definida por,*

$$ D_{GL}^{\alpha}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{[\frac{x-a}{h}]}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x-kh) \tag{3.14} $$

com $x\in(a,b)$, onde,

$$ \binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} $$

para um complexo k qualquer e com $\binom{\alpha}{0}=1$, $\binom{\alpha}{1}=\alpha$.

Com a intenção de relacionarmos a derivada fracionária de Riemann-Liouville e a de Grünwald-Letnikov, é necessário indicar primeiro duas Proposições [15].

Proposição 3.3.1 *Seja $\alpha>0$ e $f(x)\in AC^m([a,b])$ então,*

$$ \begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m\int_a^x f(y)(x-y)^{m-1-\alpha}\,dy \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{-\alpha+k}f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^x (x-y)^{m-1-\alpha}f^{(m)}(y)\,dy. \end{aligned} $$

De forma ilustrativa, vejamos esta Proposição para o caso $m=1$, sendo válida quando $0<\alpha<1$. Assim, fazendo duas integrações por partes e uma derivação no final, obtemos a

expressão esperada para o caso referido,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)\left[-\int_a^x -(x-y)^{-\alpha}f(y)\,dy\right] = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)\left[-\left.\frac{(x-y)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\,f(y)\right|_a^x + \int_a^x \frac{(x-y)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\,f'(y)\,dy\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)\left[\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\,f(a) + \int_a^x \frac{(x-y)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\,f'(y)\,dy\right] \\
&= \frac{(x-a)^{-\alpha}f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} + \left(\frac{d}{dx}\right)\int_a^x \left[\frac{(x-y)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\,f'(y)\,dy\right] \\
&= \frac{(x-a)^{-\alpha}f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x (x-y)^{-\alpha}\,f'(y)\,dy.
\end{aligned}
$$

No caso geral m, através do mesmo raciocínio, isto é, através de sucessivas integrações por partes e derivações chegamos à igualdade pretendida.

Proposição 3.3.2 *Considere-se a sequência β_k, com $(k = 1, 2, \dots)$ e suponha-se que*

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \beta_k = 1 \\
&\lim_{n\to\infty} \eta_{n,k} = 0, \\
&\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \eta_{n,k} = A, \\
&\sum_{k=1}^{n} |\eta_{n,k}| < K,
\end{aligned}
$$

então,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \eta_{n,k}\beta_k = A$$

Esta Proposição é importante para justificar a existência dos limites usados na demonstração do Teorema seguinte.

Deste modo, as derivadas fracionárias Riemann-Liouville e de Grünwald-Letnikov de uma função absolutamente contínua, associam-se da seguinte forma.

Teorema 3.3.1 *Seja $f(x) \in AC^m([a,b]))$ Então, para cada $m-1 < \alpha < m$ tem-se que*

$$D^{\alpha}_{GL} f(x) = D^{\alpha}_{RL} f(x), \quad a \le x \le b. \tag{3.15}$$

Demonstração: Pretendemos provar o seguinte limite,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{[\frac{x-a}{h}]}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x-kh)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dx^m}\int_a^x\frac{f(y)}{(x-y)^{1-m+\alpha}}\,dy.$$

Assim, seja

$$D^{\alpha}_{GL}f(x)=\lim_{\substack{h\to 0\\ nh\to x-a}}f_h^{(\alpha)}(x),\quad \text{onde}\quad f_h^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x-kh).$$

Tendo em conta a seguinte relação,

$$\binom{\alpha}{k}=\binom{\alpha-1}{k}+\binom{\alpha-1}{k-1}\tag{3.16}$$

para $nh=x-a$, temos sucessivamente,

$$\begin{aligned}
f_h^{(\alpha)}(x)&=h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}f(x-kh)+h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k-1}f(x-kh)\\
&=h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}f(x-kh)+h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{\alpha-1}{k}f(x-(k+1)h)\\
&=h^{-\alpha}(-1)^n\binom{\alpha-1}{n}f(x-(x-a))+h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}f(x-kh)-\\
&\qquad -h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}f(x-(k+1)h).
\end{aligned}\tag{3.17}$$

Atendendo a que se pode definir $\Delta f(x)=f(x)-f(x-h)$, indutivamente podemos escrever que,

$$\Delta^n f(x)=\Delta^{n-1}\Big(f(x)-f(x-h)\Big)=\Delta^{n-1}f(x)-\Delta^{n-1}f(x-h).\tag{3.18}$$

Ainda, de (3.17) temos que,

$$\begin{aligned}
f_h^{(\alpha)}(x)&=h^{-\alpha}(-1)^n\binom{\alpha-1}{n}f(a)+h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}\Big[f(x-kh)-f(x-(k+1)h)\Big]\\
&=h^{-\alpha}(-1)^n\binom{\alpha-1}{n}f(a)+h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}\Delta f(x-kh).
\end{aligned}$$

Usando as relações (3.16) e (3.18) m vezes obtemos,

$$
\begin{aligned}
f_h^{(\alpha)}(x) = h^{-\alpha}(-1)^n \binom{\alpha-1}{n} f(a) + \\
+ h^{-\alpha}(-1)^{n-1}\binom{\alpha-2}{n-1}\Delta f(a+h) + h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\binom{\alpha-2}{k}\Delta f(x-kh) + \\
- h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\binom{\alpha-2}{k}\Delta f(x-(k+1)h) \\
= h^{-\alpha}(-1)^n\binom{\alpha-1}{n} f(a) + h^{-\alpha}(-1)^{n-1}\binom{\alpha-2}{n-1}\Delta f(a+h) + \\
+ h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\binom{\alpha-2}{k}\Delta^2 f(x-kh) \\
= \dots \\
= h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{n-r}\binom{\alpha-r-1}{n-r}\Delta^r f(a+rh) + \qquad (3.19) \\
+ h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{\alpha-m}{k}\Delta^m f(x-kh). \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Resta-nos agora saber o que acontece quando $\lim_{\substack{h\to 0\\ nh\to x-a}} f_h^{(\alpha)}(x)$.
Relativamente ao somatório (3.19), o limite do r-ésimo termo é,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\substack{h\to 0\\ nh\to x-a}} h^{-\alpha}(-1)^{n-r}\binom{\alpha-r-1}{n-r}\Delta^r f(a+rh) = \\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh\to x-a}} (-1)^{n-r}\binom{\alpha-r-1}{n-r}(n-r)^{\alpha-r}\left(\frac{n}{n-r}\right)^{\alpha-r}(nh)^{r-\alpha}\ \frac{\Delta^r f(a+rh)}{h^r} \\
&=(x-a)^{-\alpha+r}\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-r}\binom{\alpha-r-1}{n-r}(n-r)^{\alpha-r}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-r}\right)^{\alpha-r}\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^r f(a+rh)}{h^r} \\
&=(x-a)^{-\alpha+r} f^{(r)}(a)\ \frac{1}{\Gamma(-\alpha+r+1)}.
\end{aligned}
$$

Visto que a função Gamma pode ser representada por,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(-\alpha+r+1)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(-\alpha+r+1)(-\alpha+r+2)\dots(-\alpha+n)}{(n-r)!(n-r)^{-\alpha+r}} \\
&= \lim_{n\to\infty}(-1)^{n-r}\binom{\alpha-r-1}{n-r}(n-r)^{\alpha-r}, \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

e os seguintes limites são válidos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-r}\right)^{\alpha-r}=1, \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\Delta^r f(a+rh)}{h^r}=f^{(r)}(a).$$

Então,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh\to x-a}} h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{n-r}\binom{\alpha-r-1}{n-r}\Delta^r f(a+rh)=\sum_{r=0}^{m-1}(x-a)^{-\alpha+r}\frac{f^{(r)}(a)}{\Gamma(-\alpha+r+1)}. \tag{3.22}$$

Falta agora calcular o limite do somatório (3.20) de $f_h^{(\alpha)}(x)$. Para este caso, vamos necessitar de usar a Proposição 3.3.2. Assim, temos de fazer primeiro uma manipulação na expressão do somatório da seguinte forma,

$$\begin{aligned}&h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{\alpha-m}{k}\Delta^m f(x-kh)=\\ =&\frac{1}{\Gamma(-\alpha+m)}\sum_{k=0}^{n-m}\Gamma(-\alpha+m)(-1)^k\binom{\alpha-m}{k}k^{-(m-1)+\alpha}\times h(kh)^{(m-1)-\alpha}\ \frac{\Delta^m f(x-kh)}{h^m}.\end{aligned}$$

Consideremos as expressões,

$$\beta_k=(-1)^k\Gamma(-\alpha+m)\binom{\alpha-m}{k}k^{-(m-1)+\alpha}, \qquad \eta_{n,k}=h(kh)^{(m-1)-\alpha}\ \frac{\Delta^m f(x-kh)}{h^m}.$$

Pela igualdade (3.21), vem imediatamente que

$$\lim_{k\to\infty}\beta_k=\lim_{k\to\infty}(-1)^k\Gamma(-\alpha+m)\binom{\alpha-m}{k}k^{-(m-1)+\alpha}=1, \tag{3.23}$$

e se $m-\alpha<1$ temos que,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-m}\eta_{n,k}&=\lim_{\substack{h\to 0\\ nh\to x-a}}\sum_{k=0}^{n-m}h(kh)^{(m-1)-\alpha}\ \frac{\Delta^m f(x-kh)}{h^m}\\ &=\int_a^x(x-y)^{(m-1)-\alpha}f^{(m)}(y)\,dy.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Tendo em conta (3.23) e (3.24), pela Proposição 3.3.2 obtemos o seguinte resultado,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-m}\eta_{n,k}\beta_k=\int_a^x(x-y)^{(m-1)-\alpha}f^{(m)}(y)\,dy.$$

Então, finalmente chegamos à expressão do limite do somatório (3.20),

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh\to x-a}} h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{\alpha-m}{k}\Delta^m f(x-kh)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha+m)}\int_a^x (x-y)^{m-1-\alpha}f^{(m)}(y)\,dy. \tag{3.25}$$

Portanto, de (3.22) e (3.25) conclui-se que, para $m-1<\alpha\leq m$,

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{GL}f(x) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh\to x-a}} \frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x-kh)\\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{-\alpha+k}f^{(k)}(a)}{\Gamma(-\alpha+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(-\alpha+m)}\int_a^x (x-y)^{m-1-\alpha}f^{(m)}(y)\,dy. \end{aligned}$$

Logo, da Proposição 3.3.1 podemos estabelecer a igualdade com a derivada fracionária de Riemann-Liouville, isto é, para $m-1<\alpha\leq m$,

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{GL}\ f(x) &= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{-\alpha+k}f^{(k)}(a)}{\Gamma(-\alpha+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(-\alpha+m)}\int_a^x (x-y)^{m-1-\alpha}f^{(m)}(y)dy\\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m\int_a^x f(y)(x-y)^{m-1-\alpha}\,dy\\ &= D^{\alpha}_{RL}\ f(x). \end{aligned}$$

□

Observação 3.3.1 *Este resultado é válido mesmo quando $a=-\infty$, tendo para isso que serem consideradas condições adicionais, tais como,* $\lim_{a\to-\infty}(x-a)^{m-\alpha}f^{(m)}(a)=0$.

Analisemos agora uma aproximação em $\mathbb{R}$, para o operador fracionário, quando $1<\alpha\leq 2$. Temos que,

$$D^{\alpha}_{GL}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x-kh).$$

Podemos especular sobre uma aproximação que retira o limite tal que,

$$D^{\alpha}_{GL}f(x)\approx\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x-kh). \tag{3.26}$$

Esta aproximação é importante uma vez que será utilizada no capítulo seguinte na aplicação de métodos numéricos.

Capítulo 4

Métodos Numéricos

No sentido de dar continuidade ao trabalho realizado nos capítulos anteriores, neste capítulo, temos como objetivo desenvolver métodos numéricos que nos forneçam soluções aproximadas da equação diferencial que descreve modelos de preços para opções baseados num processo de Lévy.

Na primeira secção iremos introduzir conceitos essenciais relativos à análise numérica, como a consistência, estabilidade e convergência de um método [12]. Em seguida discutiremos a discretização do operador fracionário e as secções posteriores corresponderão à discretização da equação diferencial em estudo, segundo o método implícito de Euler, segundo o método de Crank-Nicolson e segundo o método da extrapolação de Richardson.

4.1 Consistência, estabilidade e convergência

Existem diferentes métodos para aproximar soluções de equações diferenciais, sendo uma delas por exemplo, o método das diferenças finitas. No entanto, independentemente dos métodos que se escolham, existem conceitos fundamentais que são relevantes para todos eles tais como, a definição de erro global e de truncatura, conceitos de consistência, estabilidade e convergência.

Nesta secção, serão introduzidos estes conceitos relativos a uma solução obtida pelo método das diferenças finitas e tendo em conta a solução exata do problema diferencial.

Deste modo, consideremos a equação diferencial, definida em $[x_R, x_L] \times (0, T_F)$,

$$\mathcal{L}V = f, \tag{4.1}$$

onde $\mathcal{L}$ é um operador diferencial, f o termo fonte e V a solução a determinar da equação.

Suponhamos que discretizamos esta equação por um operador discreto

$$\mathcal{L}_\Delta \tilde{V} = f, \tag{4.2}$$

onde $\tilde{V}$ é a solução numérica obtida pelo método das diferenças finitas.

Relacionando as soluções destas duas equações é nos possível introduzir os conceitos acima

referidos.

No sentido de definir um método consistente é necessário primeiro indicar o que é o erro de truncatura. Este erro, relaciona a solução exata do problema diferencial com a equação das diferenças finitas.

Definição 4.1.1 *Consideremos o conjunto discreto de pontos* (x_i, t_n)*, nos quais* $x_i = x_L + ih$*, onde* $h = \frac{x_R - x_L}{M}$*, com* $i = 0, 1, \ldots, M$ *e* $t_n = n\tau$*, onde* $\tau = \frac{T_F}{N}$*, com* $n = 1, 2, \ldots, N$*.*
Seja V_i^n *a solução exata da equação (4.1), nos pontos indicados, então o erro de truncatura define-se como,*

$$T_i^n = \mathcal{L}_\Delta V_i^n - f_i^n.$$

A consistência de um método, responde à questão de se saber se a solução exata do problema diferencial satisfaz a equação discretizada proposta.

Definição 4.1.2 *Seja* $T^n = \left(T_1^n, T_2^n, \ldots, T_{M-1}^n\right)^T$ *o vetor dos erros de truncatura, com* $n = 1, 2, \ldots, N$*. O método das diferenças finitas (4.2) é consistente com o problema diferencial (4.1) se*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \tau \to 0}} \|T^n\| = 0,$$

onde $\|.\|$ *corresponde a uma norma.*

Outro conceito importante no contexto dos métodos numéricos é o conceito de estabilidade. Este, diz respeito à sensibilidade do método a perturbações. Isto é, pequenas perturbações nos dados, terão de provocar pequenas perturbações na solução do método numérico.

Definição 4.1.3 *Sejam* $\tilde{V}^n$ *e* $\hat{V}^n$ *duas soluções numéricas do método das diferenças finitas nos pontos* (x_i, t_n)*, onde* $x_i = x_L + ih$*, com* $h = \frac{x_R - x_L}{M}$*, para* $i = 0, 1, \ldots, M$ *e* $t_n = n\tau$*, onde* $\tau = \frac{T_F}{N}$*, com* $n = 1, 2, \ldots, N$*.*
Consideremos o vetor $e^n = \tilde{V}^n - \hat{V}^n$*. O método das diferenças finitas é estável se,*

$$\|e^n\| \leq C\|e^0\|$$

para um C *qualquer independente de* h *e de* τ*.*

Tendo estabelecido as noções de consistência e estabilidade podemos então enunciar o Teorema da equivalência de Lax.

Teorema 4.1.1 (Teorema da equivalência de Lax) *[11] Um método das diferenças finitas da forma (4.2), consistente com o problema diferencial, é convergente se e só se é estável.*

Deste modo, um método numérico é considerado convergente se o erro global converge para zero de forma independente.

Definição 4.1.4 *Seja* $\tilde{V}^n$ *uma solução numérica do método das diferenças finitas e* V^n *a solução exata da equação (4.1). Consideremos* $E_i^n = V_i^n - \tilde{V}_i^n$*, com* $i = 0, 1, \ldots, M$ *e* $n = 1, 2, \ldots, N$ *tal*

que $E^n = \left(E_1^n, E_2^n, \ldots, E_{M-1}^n\right)^T$ *corresponde ao vetor dos erros globais. O método das diferenças finitas é convergente se*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \tau\to 0}} \|E^n\| = 0.$$

O erro global também pode ser escrito de forma matricial, isto é, para o vetor $E^n = V^n - \tilde{V}^n$, temos que [19],

$$E^n = \mathbf{M}E^{n-1} + \tau T^{n-1}$$

onde $\mathbf{M}$ é a matriz dos coeficientes da discretização do método das diferenças finitas e T^{n-1} corresponde ao erro de truncatura.

Indutivamente obtemos,

$$E^n = \mathbf{M}^{n-1}E^0 + \tau \sum_{k=0}^{n-1} T^k \mathbf{M}^{n-k}$$

Ainda,

$$\|E^n\| \leq \|\mathbf{M}^{n-1}\|\|E^0\| + \tau \sum_{k=0}^{n-1} \|T^k\|\|\mathbf{M}^{n-k}\|.$$

Se $\|\mathbf{M}^{n-1}\| \leq C$, para todo o $0 \leq k \leq n-1$ temos que

$$\|E^n\| \leq C\|E^0\| + \tau n\, C \max_{0\leq k\leq n-1} \|T^k\|, \quad \text{onde} \quad T_F = \tau n.$$

Por fim, um parâmetro que é frequentemente avaliado na análise numérica de um método, durante o processo de cálculos computacionais, e que é indicativo de um método bem construído, é a ordem de convergência.

Definição 4.1.5 *Um método numérico diz-se de ordem de convergência espacial* p *e temporal* q*, com* $p, q > 0$ *se,*

$$\|E^n\| = O(h^p + \tau^q).$$

4.2 Discretização do operador fracionário

Os problemas financeiros são trabalhados num contexto finito $[0, T_F]$, onde T_F corresponde à maturidade do contrato da opção. Consideremos a equação,

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + (r-\nu)\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + \nu_{x_L} D_x^{\alpha} V(x,t) = rV(x,t) + f(x,t). \tag{4.3}$$

com condições inicial e de fronteira tais que:

$$\begin{aligned} &V(x,T_F) = \varphi(x), \;\; x_L \leq x \leq x_R \\ &V(x_L,t) = 0, \; V(x_R,t) = \phi(t), \;\; 0 < t < T_F. \end{aligned}$$

O sinal de $(r-\nu)$ tanto pode ser positivo como negativo, e visto que este afeta a escolha da discretização de $\frac{\partial V}{\partial x}$, admitimos que $(r-\nu)<0$.

Os dados do problema anterior referem-se à maturidade do contrato, isto é, temos informação de $V(x,T_F)$, no entanto, interessa-nos ter o problema no caso em que os dados começam em $V(x,0)$. Assim, tendo em conta a mudança de variável $\bar{t}=T_F-t$ a equação (4.3) pode ser reescrita como,

$$\frac{\partial V(x,\bar{t})}{\partial \bar{t}}-(r-\nu)\frac{\partial V(x,\bar{t})}{\partial x}-\nu\,{}_{x_L}D_x^{\alpha}V(x,\bar{t})+rV(x,\bar{t})+f(x,\bar{t})=0, \tag{4.4}$$

onde as condições inicial e de fronteira são dadas por,

$$\begin{aligned}&V(x,0)=\varphi(x),\quad x_L\leq x\leq x_R\\&V(x_L,\bar{t})=0,\ V(x_R,\bar{t})=\phi(T_F-\bar{t}),\quad 0<\bar{t}<T_F.\end{aligned}$$

É para este problema, que nas próximas secções, serão deduzidos métodos numéricos.

Deste modo, um dos primeiros passos a tomar, é o de discretizar o domínio do problema diferencial. Sejam M, N números inteiros, tal que $h=\frac{x_R-x_L}{M}$ corresponde ao tamanho da malha no espaço e $\tau=\frac{T_F}{N}$ corresponde ao tamanho da malha no tempo. O conjunto de pontos da malha $(x_i,\bar{t}_n)$ definem-se como, $x_i=x_L+ih$, com $i=0,1,2,\ldots,M$ que são os pontos espaciais e $\bar{t}_n=n\tau$, com $n=1,2,\ldots,N$ os pontos temporais da malha.

Para podermos fazer uma discretização correta da equação em causa, necessitamos de estudar com mais cuidado a discretização do operador fracionário. Como foi visto no capítulo anterior, ao retirarmos o limite da derivada fracionária de Grünwald-Letnikov temos que,

$$D_{GL}^{\alpha}f(x)\approx\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x-kh),$$

para uma função f real de variável real.

Usando esta aproximação para o operador $D_x^{\alpha}V(x,\bar{t})$, num contexto finito, obtemos,

$${}_{x_L}D_x^{\alpha}V(x,\bar{t})\approx\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{M}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}V(x-kh,\bar{t}). \tag{4.5}$$

Suponhamos que usamos o método implícito de Euler para discretizar a equação (4.4), tendo em conta a aproximação do operador anterior. Interessa-nos então saber se esta aproximação permite obter um método numérico estável.

Assim, nesta secção iremos apresentar um resultado que prova a instabilidade do método numérico na presença da aproximação (4.5). No final, indicaremos uma alternativa que permite obter um método estável.

Notemos inicialmente a seguinte Proposição.

Proposição 4.2.1 *[18] Para $1 < \alpha \leq 2$, os coeficientes $g_k^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}$, com $k = 0, 1, \ldots$ satisfazem as seguintes propriedades:*

1. $g_0^{(\alpha)} = 1,\ g_1^{(\alpha)} = -\alpha,\ g_2^{(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}$ *e* $g_k^{(\alpha)} > 0,\ k \geq 3.$

2. $\sum_{k=2}^{\infty} g_k^{(\alpha)} = \alpha - 1.$

3. *Para qualquer inteiro positivo N, $\sum_{k=0}^{N} g_k^{(\alpha)} < 0$ verifica-se.*

Estes coeficientes e as suas propriedades serão cruciais na demonstração da próxima Proposição assim como dos resultados teóricos das secções seguintes.

Proposição 4.2.2 *[13] Seja V_i^n a aproximação numérica de $V(x_i, \bar{t}_n)$, e $f_i^{n+1} = f(x_i, \bar{t}_{n+1})$, com condições de fronteira tais que,*

$$\begin{aligned} V_i^0 &= \varphi(x_i) = \varphi_i, \quad i = 1, \ldots, M-1 \\ V_0^n &= 0,\ V_M^n = \phi_M^n, \quad n = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

O método implícito de Euler, dado por

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} - (r-\nu)\frac{V_i^{n+1} - V_{i-1}^{n+1}}{h} - \frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i} g_k^{(\alpha)} V_{i-k}^{n+1} + rV_i^{n+1} + f_i^{n+1} = 0 \tag{4.6}$$

é instavel.

Demonstração: Tendo em conta a Proposição 4.2.1, a equação (4.6) pode ser escrita como,

$$V_i^{n+1} - V_i^n - \tau\left[(r-\nu)\frac{V_i^{n+1} - V_{i-1}^{n+1}}{h} + \frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i} g_k^{(\alpha)} V_{i-k}^{n+1} - rV_i^{n+1}\right] = -\tau f_i^{n+1}.$$

E podemos reescrevê-la ainda da seguinte forma,

$$V_i^{n+1} = \mu V_i^n + \mu\tau\left[\frac{(\nu - r)}{h} V_{i-1}^{n+1} + \frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=1}^{i} g_k^{(\alpha)} V_{i-k}^{n+1} - f_i^{n+1}\right]$$

onde,

$$\mu = \frac{1}{1 - \tau((r-\nu)/h) - \tau(\nu/h^\alpha) + \tau r} = \frac{1}{1 + \tau((\nu - r)/h - \nu/h^\alpha + r)}.$$

Consideremos agora que V_i^0 é o único termo que apresenta erro, de forma a que o seu valor perturbado é tal que $\underline{V}_i^0 = V_i^0 + \varepsilon_i^0$. Esta perturbação provoca uma perturbação no valor de V_i^1 dada por, $\underline{V}_i^1 = V_i^1 + \varepsilon_i^1$.

Para avaliar a estabilidade do método, V_i^0 é substituído por $\underline{V}_i^0$ tal que,

$$\underline{V}_i^1 = \mu\,\underline{V}_i^0 + \mu\tau\left[\frac{(\nu - r)}{h}V_{i-1}^1 + \frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=1}^{i} g_k^{(\alpha)}V_{i-k}^1 - f_i^1\right]$$

pois os V_{i-1}^1 não sofrem com a perturbação.

Uma vez que $\underline{V}_i^0 = V_i^0 + \varepsilon_i^0$ podemos escrever,

$$\underline{V}_i^1 = \mu(V_i^0 + \varepsilon_i^0) + \mu\tau\left[\frac{(\nu - r)}{h}V_{i-1}^1 + \frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=1}^{i} g_k^{(\alpha)}V_{i-k}^1 - f_i^1\right].$$

E ainda,

$$V_i^1 + \varepsilon_i^1 = \mu(V_i^0 + \epsilon_i^0) + \mu\tau\left[\frac{(\nu - r)}{h}V_{i-1}^1 + \frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=1}^{i} g_k^{(\alpha)}V_{i-k}^1 - f_i^1\right]. \tag{4.7}$$

Como,

$$V_i^1 = \mu\,V_i^0 + \mu\tau\left[\frac{(\nu - r)}{h}V_{i-1}^1 + \frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=1}^{i} g_k^{(\alpha)}V_{i-k}^1 - f_i^1\right], \tag{4.8}$$

substituindo (4.8) em (4.7) vem que,

$$\mu V_i^0 + \varepsilon_i^1 = \mu(V_i^0 + \varepsilon_i^0).$$

Portanto o efeito da propagação do erro ε_i^0 no tempo $\bar{t}_1$ é igual a $\varepsilon_i^1 = \mu\epsilon_i^0$. Repetindo sucessivamente este raciocínio, a propagação do erro no tempo $\bar{t}_n$ é $\varepsilon_i^n = \mu^n\varepsilon_i^0$.

Desta forma, para que a formulação do método implícito de Euler seja estável é necessário que $|\mu| \leq 1$. No entanto, para qualquer h suficientemente pequeno temos $|\mu| > 1$, o que implica que o método é instável, isto é, a solução numérica não converge para a solução exata da equação diferencial. □

Para contornar esta situação, existe uma versão da fórmula de Grünwald que pode ser usada, na qual a função sofre uma translação para a direita. Comecemos por mostrar que esta nova fórmula é consistente.

Assim, novamente, no sentido de simplificarmos as notações, para uma função f real de variável real temos o seguinte resultado.

Teorema 4.2.1 *Sejam $1 < \alpha \leq 2$ e $f \in AC^{m+3}(\mathbb{R})$ tal que todas as derivadas até à ordem $m+3$ pertencem a $L_1(\mathbb{R})$. Seja,*

$$A_h f(x) = \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}f(x-(k-p)h), \tag{4.9}$$

com p um inteiro não negativo. Então, $A_h f(x) =_{-\infty} D_x^\alpha f(x) + O(h)$, quando $h \to 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Pela Proposição 2.2.1 a transformada de Fourier de $f(x-h)$ é,

$$[\widehat{f(x-h)}] = e^{i\xi h}\hat{f}(\xi).$$

Para além disso,

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k, \tag{4.10}$$

converge para qualquer complexo $|z| \leq 1$ e para qualquer $\alpha > 0$. Notemos, ainda, que a seguinte igualdade é válida,

$$\binom{\alpha}{k}(-1)^k = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}. \tag{4.11}$$

Tomando a transformada de Fourier de (4.9) e tendo em conta as igualdades (4.10) e (4.11) temos que,

$$\begin{aligned}
[\widehat{A_h f(x)}](\xi) &= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} e^{i\xi(k-p)h}\, \hat{f}(\xi) = \frac{1}{h^\alpha}\, (1-e^{i\xi h})^\alpha e^{-i\xi p h}\, \hat{f}(\xi) \\
&= \frac{1}{h^\alpha}(-i\xi h)^\alpha \left(\frac{1-e^{i\xi h}}{-i\xi h}\right)^\alpha e^{-i\xi p h}\, \hat{f}(\xi) = (-i\xi)^\alpha \left(\frac{1-e^{i\xi h}}{-i\xi h}\right)^\alpha e^{-i\xi p h}\, \hat{f}(\xi) \\
&= (-i\xi)^\alpha w(-i\xi h)\, \hat{f}(\xi),
\end{aligned}$$

para $w(-i\xi h) = \left(\frac{1-e^{i\xi h}}{-i\xi h}\right)^\alpha e^{-i\xi h p}$.

Usando o desenvolvimento em série de Taylor,

$$\begin{aligned}
w(z) &= \left(\frac{1-e^{-z}}{z}\right)^\alpha e^{zp} = \left(\frac{1-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^k}{k!}}{z}\right)^\alpha e^{zp} \\
&= \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} - \dots\right)^\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zp)^k}{k!}\right) = \left(1 - \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{k-1}}{k!}\right)^\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zp)^k}{k!}\right) \\
&= 1 + zp - z\frac{\alpha}{2} + \frac{(zp)^2}{2} - \alpha\frac{z^2 p}{2} + \dots = 1 + \left(p - \frac{\alpha}{2}\right)z + \mathcal{O}(|z|^2).
\end{aligned}$$

Então, existe uma constante $C > 0$, para $z = -i\xi h$ tal que,

$$|w(z) - 1| \leq \left|(p - \frac{\alpha}{2})z\right| + C\, |z|^2.$$

Para h suficientemente pequeno temos,

$$|w(-i\xi h) - 1| \leq C\, |\xi h|. \tag{4.12}$$

Pelo Teorema 2.2.3 obtemos então,

$$\begin{aligned}[\widehat{A_h f(x)}](\xi) &= (-i\xi)^\alpha w(-i\xi h)\,\hat{f}(\xi)\\ &= (-i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) + (-i\xi)^\alpha (w(-i\xi h)-1)\hat{f}(\xi)\\ &= [\widehat{{}_{-\infty}D_x^\alpha f(x)}](\xi) + \hat{\varphi}(\xi,h),\end{aligned}$$

com $\hat{\varphi}(\xi,h) = (-i\xi)^\alpha (w(-i\xi h)-1)\hat{f}(\xi)$. Como $f \in AC^{m+3}(\mathbb{R})$, pelo Lema de Riemann-Lesbesgue usado em [20] a seguinte relação é válida,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|)^{\alpha+1} |\hat{f}(\xi)|\, d\xi < \infty.$$

Logo, podemos escrever as desigualdades,

$$\begin{aligned}|\hat{\varphi}(\xi,h)| &\leq |(-i\xi)^\alpha|\,|(w(-i\xi h)-1)|\,|\hat{f}(\xi)|\\ &\leq |-i\xi|^\alpha\, C|\xi h|\;\; |\hat{f}(\xi)|\\ &= |\xi|^\alpha\, C|\xi h|\;\; |\hat{f}(\xi)|\\ &\leq |\xi|^{\alpha+1}\, C|h|\;\; |\hat{f}(\xi)|.\end{aligned}$$

Sabemos que a transformada de Fourier de $\hat{\varphi}(\xi,h)$ é

$$\varphi(x,h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\hat{\varphi}(\xi,h)\, d\xi.$$

Então, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$|\varphi(x,h)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\xi x}||\xi|^{\alpha+1}\, C|h|\;\; |\hat{f}(\xi)|\, d\xi \;\leq\; ICh.$$

O que prova a ordem de convergência da aproximação estudada. □

Este resultado e a sua demonstração, podem ser generalizados para o operador $D_x^\alpha V(x,\bar{t})$.

Então, tomando $p=1$ no Teorema anterior, para a função $V(x,\bar{t})$ chegamos à aproximação de Grünwald-Letnikov,

$$\frac{\partial^\alpha V(x,\bar{t})}{\partial x^\alpha} \approx \frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{M} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)} V(x-(k-1)h,\bar{t}), \tag{4.13}$$

e como iremos ver nas próximas secções, esta aproximação, gera estabilidade nos métodos das diferenças finitas.

4.3 Método das diferenças finitas

O método das diferenças finitas consiste em, aproximar o operador diferencial ao substituir as derivadas, pelo desenvolvimento em Taylor das mesmas, numa determinada equação. O domínio é particionado no espaço e no tempo e são calculadas aproximações das soluções nos pontos desse domínio.

Nesta secção, vamos discretizar a equação (4.4) pelo método implícito de Euler e pelo método de Crank-Nicolson, tendo em conta a aproximação (4.13). As nomenclaturas destes métodos numéricos estão associadas à discretização no tempo, uma vez que a discretização no espaço é igual para os dois, como iremos ver.

Comecemos a desenvolver primeiro, a discretização pelo método ímplicito de Euler. Deste modo, consideremos a seguite equação,

$$\frac{V_i^{n+1}-V_i^n}{\tau}-(r-\nu)\frac{V_i^{n+1}-V_{i-1}^{n+1}}{h}-\frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i+1}g_k^{(\alpha)}V_{i-k+1}^{n+1}+rV_i^{n+1}=-f_i^{n+1}+O(h+\tau) \tag{4.14}$$

onde $V_i^n \approx V(x_i,\bar{t}_n)$ e $f_i^{n+1}=f(x_i,\bar{t}_{n+1})$.

Com condições inicial e finais discretizadas da seguinte forma,

$$\begin{aligned} &V_i^0=\varphi(x_i)=\varphi_i, \quad i=1,\dots,M-1\\ &V_0^n=0,\ V_M^n=\phi_M^n, \quad n=1,\dots,N. \end{aligned}$$

Multiplicando por τ a equação (4.14) e considerando $\tilde{V}_i^n$ a solução numérica de V_i^n omitindo o erro de truncatura, a equação pode ser escrita na forma,

$$\tilde{V}_i^{n+1}-\tau\left[(r-\nu)\frac{\tilde{V}_i^{n+1}-\tilde{V}_{i-1}^{n+1}}{h}+\frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i+1}g_k^{(\alpha)}\tilde{V}_{i-k+1}^{n+1}-r\tilde{V}_i^{n+1}\right]=\tilde{V}_i^n-\tau f_i^{n+1} \tag{4.15}$$

com,

$$\begin{aligned} &\tilde{V}_i^0=\varphi_i, \quad i=1,\dots,M-1\\ &\tilde{V}_0^n=0,\ \tilde{V}_M^n=\phi_M^n, \quad n=1,\dots,N. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Se denotarmos $\xi=\frac{\tau(r-\nu)}{h}$, $\zeta=\frac{\tau\nu}{h^\alpha}$ e $\eta=\tau r$ podemos desenvolver esta equação para diferentes valores de i, com $n=1,\dots,N$. Assim, para $i=1$ obtemos a equação,

$$\tilde{V}_1^{n+1}(1+\eta-\xi-\zeta g_1^{(\alpha)})-\zeta g_0^{(\alpha)}\tilde{V}_2^{n+1}=\tilde{V}_1^n-\tau f_1^{n+1},$$

para $i=2$ chegamos à equação,

$$\tilde{V}_2^{n+1}(1+\eta-\xi-\zeta g_1^{(\alpha)})+\xi\tilde{V}_1^{n+1}-\zeta g_0^{(\alpha)}\tilde{V}_3^{n+1}=\tilde{V}_2^n-\tau f_2^{n+1},$$

e de forma sucessiva, quando $i = M-1$ vem que,

$$\tilde{V}_{M-1}^{n+1}(1+\eta-\xi-\zeta g_1^{(\alpha)}) + \xi\tilde{V}_{M-2}^{n+1} - \zeta(g_1^{(\alpha)}\tilde{V}_{M-1}^{n+1} + \cdots + g_{M-1}^{(\alpha)}\tilde{V}_1^{n+1}) = \\ = \tilde{V}_{M-1}^{n} + \zeta g_0^{(\alpha)} V_M^{n+1} - \tau f_{M-1}^{n+1}.$$

Então a equação do método implícito de Euler (4.15) na forma matricial é,

$$[(1+\eta)I - \zeta A - \xi B]\tilde{V}^{n+1} = \tilde{V}^n + C^n - \tau F^{n+1} \tag{4.17}$$

onde as matrizes A e B são tal que

$$A = \begin{bmatrix} g_1^{(\alpha)} & g_0^{(\alpha)} & \dots & 0 & 0 \\ g_2^{(\alpha)} & g_1^{(\alpha)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{M-2}^{(\alpha)} & g_{M-3}^{(\alpha)} & \dots & g_1^{(\alpha)} & g_0^{(\alpha)} \\ g_{M-1}^{(\alpha)} & g_{M-2}^{(\alpha)} & \dots & g_2^{(\alpha)} & g_1^{(\alpha)} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

com $\tilde{V}^n = (\tilde{V}_1^n, \tilde{V}_2^n, \dots, \tilde{V}_{M-1}^n)^T$, $C^n = (0, \dots, 0, \zeta g_0^{(\alpha)}\tilde{V}_M^{n+1})_{M-1}^T$ e $F^{n+1} = (f_1^{n+1}, f_2^{n+1}, \dots, f_{M-1}^{n+1})^T$.

Relativamente ao método de Crank-Nicolson, a discretização da equação (4.4) é tal que,

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} - \frac{1}{2}\left[(r-\nu)\frac{V_i^{n+1} - V_{i-1}^{n+1}}{h} + \frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i+1} g_k^{(\alpha)} V_{i-k+1}^{n+1} - rV_i^{n+1}\right] - \\ -\frac{1}{2}\left[(r-\nu)\frac{V_i^{n} - V_{i-1}^{n}}{h} + \frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i+1} g_k^{(\alpha)} V_{i-k+1}^{n} - rV_i^{n}\right] = -f_i^{n+\frac{1}{2}} + O(h+\tau^2) \tag{4.19}$$

onde $V_i^n \approx V(x_i, \bar{t}_n)$ e $f_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f(x_i, \bar{t}_{n+1}) + f(x_i, \bar{t}_n))$.

De forma análoga, ao que foi feito para o método anterior, o método de Crank-Nicolson, para as mesmas condições inicial e de fronteira (4.16), omitindo o erro de truncatura, pode ser escrito como,

$$\tilde{V}_i^{n+1} - \frac{\tau}{2}\left[(r-\nu)\frac{\tilde{V}_i^{n+1} - \tilde{V}_{i-1}^{n+1}}{h} + \frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i+1} g_k^{(\alpha)} \tilde{V}_{i-k+1}^{n+1} - r\tilde{V}_i^{n+1}\right] = \\ = \tilde{V}_i^n + \frac{\tau}{2}\left[(r-\nu)\frac{\tilde{V}_i^{n} - \tilde{V}_{i-1}^{n}}{h} + \frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i+1} g_k^{(\alpha)} \tilde{V}_{i-k+1}^{n} - r\tilde{V}_i^{n}\right] - \tau f_i^{n+\frac{1}{2}}. \tag{4.20}$$

E a sua forma matricial é a seguinte,

$$\left[(1+\frac{\eta}{2})I - \frac{\zeta}{2}A - \frac{\xi}{2}B\right]\tilde{V}^{n+1} = \left[(1-\frac{\eta}{2})I + \frac{\zeta}{2}A + \frac{\xi}{2}B\right]\tilde{V}^n + \tilde{V}^n + C_1^n - \tau F^{n+\frac{1}{2}} \tag{4.21}$$

onde $C_1^n = (0, \ldots, 0, \frac{\zeta}{2} g_0^{(\alpha)} (\tilde{V}_M^{n+1} + \tilde{V}_M^n))^T$, $F^{n+\frac{1}{2}} = (f_1^{n+\frac{1}{2}}, f_2^{n+\frac{1}{2}}, \ldots, f_{M-1}^{n+\frac{1}{2}})^T$ e as matrizes A e B são as mesmas que as do método implícito de Euler.

Deste modo, a fase seguinte será verificar se estes métodos são convergentes. Para que, posteriormente, possamos calcular de forma computacional, soluções aproximadas para o problema diferencial e avaliar os erros destas aproximações.

4.4 Estabilidade e convergência

Nesta secção será feita uma análise da estabilidade e convergência dos métodos numéricos propostos anteriormente, através de resultados teóricos. As normas usadas nesta parte da dissertação, dizem respeito às normas L_∞. Deste modo, para $i = 1, 2, \ldots, M-1$ e $j = 1, 2, \ldots, N$ a norma infinito, de uma matriz A qualquer, define-se como,

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq M-1} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|$$

e a norma infinito para um vetor x qualquer, é,

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq M-1} |x_i|.$$

Notemos então, inicialmente, dois lemas que serão úteis nas provas dos resultados que se seguirão.

Lema 4.4.1 *[4, 22] Seja A uma matriz de dimensão $M-1$, positiva definida. Para um parâmetro $\theta \geq 0$, as seguintes desigualdades verificam-se,*

$$\|(I + \theta A)^{-1}\| \leq 1, \qquad \|(I + \theta A)^{-1}(I - \theta A)\| \leq 1.$$

É interessante observar que o valor de θ neste Lema, para uma mesma matriz A, toma o valor de $\theta = 1$ para o método implícito de Euler e $\theta = 1/2$ para o método de Crank-Nicolson, como veremos nos próximos desenvolvimentos.

Lema 4.4.2 *Uma matriz real D de dimensão $M-1$ é positiva definida se e só se $H = \frac{D+D^T}{2}$ for positiva definida. Para além disso, uma matriz H é positiva definida se e só se os seus valores próprios são positivos.*

No que diz respeito ao método implícito de Euler consideremos a seguinte matriz,

$$D_I = \eta I - \zeta A - \xi B \tag{4.22}$$

onde $\eta = \tau r$, $\zeta = \frac{\tau \nu}{h^\alpha}$, $\xi = \frac{\tau(r-\nu)}{h}$ e as matrizes A e B estão definidas em (4.18).

Pretendemos provar que este método é incondicionalmente estável (i.e, a estabilidade não depende de nenhum parâmetro) e é convergente. Para isso, é necessário antes ter em conta

alguns resultados e as suas demonstrações. Assim, seja a matriz H definida por

$$H = \frac{D_I + D_I^T}{2}. \tag{4.23}$$

Vamos provar que esta matriz é positiva definida, para conseguirmos tecer conclusões relativas à matriz D_I, no sentido de podermos, usar o Lema 4.4.1, para provarmos a estabilidade e convergência do método implícito de Euler.

Definição 4.4.1 *[7] Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é estritamente diagonal dominante se,*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.24}$$

Notemos inicialmente que a matriz H pode ser vista como uma matriz estritamente diagonal dominante.

Teorema 4.4.3 *Seja $1 < \alpha < 2$ e H definido como em (4.23). Então, os coeficientes H_{ij} satisfazem a relação (4.24), isto é, a matriz H é estritamente diagonal dominante.*

Demonstração: Uma vez que $H = \frac{D_I + D_I^T}{2}$ podemos definir esta matriz por ramos do seguinte modo,

$$H_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\zeta g_{j-i+1}^{(\alpha)}, & j > i+1 \\ -\frac{1}{2}\zeta(g_0^{(\alpha)} + g_2^{(\alpha)}) + \frac{1}{2}\xi, & j = i+1 \\ \eta - \zeta g_1^{(\alpha)} - \xi, & j = i \\ -\frac{1}{2}\zeta(g_0^{(\alpha)} + g_2^{(\alpha)}) + \frac{1}{2}\xi, & j = i-1 \\ -\frac{1}{2}\zeta g_{j-i+1}^{(\alpha)}, & j < i-1 \end{cases} \tag{4.25}$$

Uma vez que $(r - \nu) < 0$, implica que $\xi < 0$ e ζ, $\eta > 0$. De acordo com a Proposição 4.2.1, notamos que H é positiva quando $j = i$ e negativa nos restantes ramos, uma vez que $g_0^{(\alpha)} = 1$, $g_1^{(\alpha)} = -\alpha$ e $g_k^{(\alpha)} > 0$, $k = 2, 3, \ldots$ Assim, vejamos a que corresponde a soma destes ramos, excluindo a diagonal.

De (4.25), para $i = 1, 2, \ldots, M-1$ temos que,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M-1} |H_{ij}| &= \sum_{j=1}^{i-2} |H_{ij}| + |H_{ii-1}| + |H_{ii+1}| + \sum_{j=i+2}^{M-1} |H_{ij}| \\
&= \sum_{j=1}^{i-2} \frac{1}{2}\zeta g_{j-i+1}^{(\alpha)} + \zeta(g_0^{(\alpha)} + g_2^{(\alpha)}) + \xi + \sum_{j=i+2}^{M-1} \frac{1}{2}\zeta g_{j-i+1}^{(\alpha)} \\
&< \sum_{j=-\infty}^{i-2} \frac{1}{2}\zeta g_{j-i+1}^{(\alpha)} + \sum_{j=i+2}^{+\infty} \frac{1}{2}\zeta g_{j-i+1}^{(\alpha)} + \zeta + \zeta g_2^{(\alpha)} + \xi \\
&= \sum_{k=3}^{+\infty} \zeta g_k^{(\alpha)} + \zeta + \zeta g_2^{(\alpha)} + \xi
\end{aligned}$$

Novamente, pela Proposição 4.2.1 sabemos que $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k^{(\alpha)} = 0$ então, manipulando os valores do somatório temos ainda que,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M-1} |H_{ij}| &< \sum_{k=3}^{+\infty} \zeta g_k^{(\alpha)} + \zeta + \zeta g_2^{(\alpha)} + \xi \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta g_k^{(\alpha)} - \zeta g_0^{(\alpha)} - \zeta g_1^{(\alpha)} - \zeta g_2^{(\alpha)} + \zeta + \zeta g_2^{(\alpha)} + \xi \\
&= -\zeta g_1^{(\alpha)} + \xi \\
&< \eta - \zeta g_1^{(\alpha)} + \xi \\
&= |H_{ii}|.
\end{aligned}$$

Como foi dito anteriormente, ζ, $\eta > 0$ e $g_1^{(\alpha)} = -\alpha$, isto é, podemos estabelecer a seguinte desigualdade,

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M-1} |H_{ij}| < -\zeta g_1^{(\alpha)} + \xi \ < \eta - \zeta g_1^{(\alpha)} + \xi = |H_{ii}|.$$

Portanto, $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M-1} |H_{ij}| < |H_{ii}|$, para $i = 1, 2, \ldots, M-1$. □

Tendo demonstrado que H é estritamente diagonal dominante podemos provar ainda, que esta matriz é positiva definida. Mas para isso, é preciso indicar primeiro o Terorema do círculo de Gerschgorin, que será importante na demonstração que faremos a seguir.

Teorema 4.4.4 (Terorema do círculo de Gerschgorin) *[7] Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e seja $R_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$, com $i = 1, \ldots, n$. Então, os valores próprios de A pertencem à união dos $Z_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i\}$.*

Deste modo, conseguimos demonstrar que H é positiva definida.

Corolário 4.4.4.1 *A matriz H, definida em (4.23), é simétrica positiva definida.*

Demonstração: Pela definição da matriz H (4.25), observamos que é simétrica. Então, resta-nos provar que H tem exclusivamente valores próprios positivos.

Seja λ um valor próprio de H, de acordo com o Teorema 4.4.4 obtemos a seguinte desigualdade,

$$|\lambda - H_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M-1} |H_{ij}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, M-1.$$

E podemos ainda escrever,

$$H_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M-1} |H_{ij}| \leq \lambda \leq \; H_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M-1} |H_{ij}|.$$

Uma vez que H_{ii} é positiva, pelo Teorema 4.4.3 podemos concluir que $\lambda > 0$ e portanto H é positiva definida. □

Pelo Lema 4.4.2 concluímos ainda que a matriz D_I é positiva definida. Para além disso, a matriz $(I + D_I)$ é estritamente diagonal dominante. Conseguimos verificar isso usando o mesmo raciocínio que na demonstração do Teorema 4.4.3.

Assim, para facilitar as notações, consideremos a matriz $Q = (I + D_I)$. Esta matriz pode ser definida do seguinte modo,

$$Q_{ij} = \begin{cases} 0, & j > i+1 \\ -\zeta g_0^{(\alpha)}, & j = i+1 \\ 1 + \eta - \zeta g_1^{(\alpha)} - \xi, & j = i \\ -\zeta g_2^{(\alpha)} + \xi, & j = i-1 \\ -\zeta g_{i-j+1}^{(\alpha)}, & j < i-1 \end{cases} \tag{4.26}$$

Novamente, como $(r - \nu) < 0$, temos que $\xi < 0$ e ζ, $\eta > 0$.

E de acordo com a Proposição 4.2.1, a matriz Q é positiva quando $j = i$ e negativa nos restantes ramos, uma vez que $g_0^{(\alpha)} = 1$, $g_1^{(\alpha)} = -\alpha$ e $g_k^{(\alpha)} > 0$, $k = 2, 3, \ldots$. Então, vejamos se

$$|Q_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M-1} |Q_{ij}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, M-1.$$

Da definição (4.26), para $i = 1, 2, \ldots, M-1$, podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M-1} |Q_{ij}| &= \sum_{j=1}^{i-2} |Q_{ij}| + |Q_{ii-1}| + |Q_{ii+1}| \\
&= \sum_{j=1}^{i-2} \zeta g_{i-j+1}^{(\alpha)} + \zeta g_2^{(\alpha)} + \xi + \zeta g_0^{(\alpha)} \\
&= \sum_{j=1}^{i-2} \zeta g_{i-j+1}^{(\alpha)} + \zeta g_0^{(\alpha)} + \zeta g_1^{(\alpha)} - \zeta g_1^{(\alpha)} + \zeta g_2^{(\alpha)} + \xi \\
&= \zeta \sum_{k=0}^{M-1} g_k^{(\alpha)} - \zeta g_1^{(\alpha)} + \xi.
\end{aligned}$$

Da Proposição 4.2.1 retiramos que $\sum_{k=0}^{M-1} g_k^{(\alpha)} < 0$. Então, para $i = 1, 2, \ldots, M-1$, podemos estabelecer a seguinte desigualdade,

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M-1} |Q_{ij}| = \zeta \sum_{k=0}^{M-1} g_k^{(\alpha)} - \zeta g_1^{(\alpha)} + \xi \ < \ 1 + \eta - \zeta g_1^{(\alpha)} + \xi \ = |Q_{ii}|.$$

Portanto, a matriz $(I + D_I)$ também é estritamente diagonal dominante. Então podemos concluir que $(I + D_I)$ é invertível, isto é, a equação (4.17) tem solução.

Para além disso, ainda nos é possível fazer uma analogia com o Lema 4.4.1 e estabelecer as seguintes relações, uma vez que a matriz D_I é definida positiva.

$$\|(I + D_I)^{-1}\| \leq 1, \qquad \|(I + D_I)^{-1}(I - D_I)\| \leq 1. \tag{4.27}$$

Deste modo, estamos aptos para demonstrar o teorema da estabilidade do método em estudo.

Teorema 4.4.5 *O método ímplicito de Euler (4.15) é incondicionalmente estável.*

Demonstração: Seja V_i^n a solução exata da equação diferencial (4.4) e $\tilde{V}_i^n$ a solução aproximada nos pontos da malha $(x_i, \bar{t}_n)$, onde $x_i = x_L + ih$, com $i = 0, 1, \ldots, M$ e $\bar{t}_n = n\tau$, com $n = 1, 2, \ldots, N$. O erro global define-se como $e_i^n = V_i^n - \tilde{V}_i^n$ e o vetor dos erros é tal que $E^n = \left(e_1^n, e_2^n, \ldots, e_{M-1}^n\right)^T$.

O que nos interessa saber é se perturbações nas condições iniciais do método $\tilde{V}_0^n$, com $n = 1, 2, \ldots, N$, provocam perturbações nas soluções aproximadas, ou neste caso, no vetor dos erros globais.

Seja $P_I = (I + D_I)^{-1}$, a equação do erro é tal que,

$$E^n = P_I E^{n-1}.$$

O que implica que, indutivamente, podemos escrever $E^n = P_I^n\, E^0$, para $n = 1, 2, \ldots, N$.

Ao aplicarmos normas e as suas propriedades a esta equação, tendo em conta as relações estabelecidas em (4.27), vem que $\|P_I\| \leq 1$, então

$$\|E^n\| = \|P_I^n E^0\| \leq \|P_I^n\|\|E^0\| \leq \|P_I\|^n\|E^0\| \leq \|E^0\|.$$

Portanto, o método implícito de Euler é incondicionalmente estável. □

Finalmente, resta-nos verificar a convergência deste método, através da prova do seguinte teorema.

Teorema 4.4.6 *A solução numérica $\tilde{V}^n$ do método implícito de Euler, converge incondicionalmente para a solução exata V^n, à medida que h e τ se aproximam de zero e verifica,*

$$\|V^n - \tilde{V}^n\| = O(\tau + h),$$

onde $V^n = \left(V_1^n, V_2^n, \ldots, V_{M-1}^n\right)^T$.

Demonstração: Seja V_i^n a solução exata da equação diferencial (4.4) e $\tilde{V}_i^n$ a solução aproximada do método implícito de Euler, nos pontos da malha (x_i, t_n), onde $x_i = x_L + ih$, com $i = 0, 1, \ldots, M$ e $\bar{t}_n = n\tau$, com $n = 1, 2, \ldots, N$. O erro global define-se como $e_i^n = V_i^n - \tilde{V}_i^n$ e o vetor dos erros é tal que $E^n = \left(e_1^n, e_2^n, \ldots, e_{M-1}^n\right)^T$.

A equação do erro pode ser escrita como,

$$\frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{-\tau} + (r - \nu)\frac{e_i^{n+1} - e_{i-1}^{n+1}}{h} + \frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i+1} g_k^{(\alpha)} e_{i-k+1}^{n+1} - r e_i^{n+1} = T_i^n,$$

ou ainda como,

$$e_i^{n+1} - \tau\left[(r - \nu)\frac{e_i^{n+1} - e_{i-1}^{n+1}}{h} + \frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i+1} g_k^{(\alpha)} e_{i-k+1}^{n+1} - r e_i^{n+1}\right] = e_i^n + \tau T_i^n, \tag{4.28}$$

onde T_i^n diz respeito ao erro de truncatura, para $i = 1, 2, \ldots, M-1$ e $n = 1, 2, \ldots, N$.

A equação (4.28) também pode ser escrita na sua forma matricial,

$$(I + D_I)E^n = E^{n-1} + T^n,$$

ou ainda, $E^n = (I + D_I)^{-1}E^{n-1} + \tau(I + D_I)^{-1}T^n$, onde $T^n = \left(T_1^n, T_2^n, \ldots, T_{M-1}^n\right)^T$ é o vetor dos erros de truncatura, para $n = 1, 2, \ldots, N$.

Se considerarmos que $x = \tau\, P_I\, T^n$ e $P_I = (I + D_I)^{-1}$, vem que

$$E^n = P_I E^{n-1} + x.$$

E indutivamente temos que, $E^n = (P_I^n + P_I^{n-1} + \cdots + I)x$, para $n = 1, 2, \ldots, N$.

Aplicando normas e suas propriedades a esta igualdade e tendo em conta que $\|P_I\| \leq 1$ das relações estabelecidas em (4.27), obtemos as seguintes desigualdades,

$$\begin{aligned}
\|E^n\| &= \|(P_I^n + P_I^{n-1} + \cdots + \ldots I)x\| \\
&\leq (\|P_I^n\| + \|P_I^{n-1}\| + \cdots + 1)\|x\| \\
&\leq (1 + 1 + \cdots + 1)\tau \, \|P_I \, T^n\| \\
&\leq N\tau \, \|T^n\|.
\end{aligned}$$

Uma vez que $N\tau = T_F$ e $\|T^n\| = O(h + \tau)$ como vimos na discretização do método, basta escrever então,

$$\|E^n\| = O(h + \tau).$$

O que prova a convergência do método implícito de Euler e a sua ordem de convergência. □

Deste modo, a discretização da equação (4.4) segundo o método implícito de Euler, é estável e convergente.

Relativamente ao método de Crank-Nicolson consideremos a seguinte matriz,

$$D_{CN} = \frac{\eta}{2} I - \frac{\zeta}{2} A - \frac{\xi}{2} B, \tag{4.29}$$

onde $\eta = \tau r$, $\zeta = \frac{\tau\nu}{h^\alpha}$, $\xi = \frac{\tau(r-\nu)}{h}$ e as matrizes A e B estão definidas em (4.18).

Uma vez que $D_{CN} = \frac{1}{2} D_I$, onde D_I corresponde à matriz considerada em (4.22), as conclusões relativas à matriz H (4.23), são análogas para o método de Crank-Nicolson. Isto é, $H_{CN} = \frac{D_{CN} + D_{CN}^T}{2}$ é estritamente diagonal dominante, é simétrica positiva definida, o que implica que D_{CN} é positiva definida. Então, $(I + D_{CN})$ é estritamente diagonal dominante, logo é invertível e a equação (4.21) tem solução.

Para além disso, as relações estabelecidas em (4.27) também são válidas para a matriz D_{CN} e portanto apenas nos resta provar a estabilidade e convergência do método de Crank-Nicolson.

Teorema 4.4.7 *O método de Crank-Nicolson (4.20) é incondicionalmente estável.*

Demonstração: De forma similar ao que foi feito anteriormente, seja V_i^n a solução exata da equação diferencial (4.4) e $\tilde{V}_i^n$ a solução aproximada do método de Crank-Nicolson, nos pontos da malha $(x_i, \bar{t}_n)$, onde $x_i = x_L + ih$, com $i = 0, 1, \ldots, M$ e $\bar{t}_n = n\tau$, com $n = 1, 2, \ldots, N$. O erro global define-se como $e_i^n = V_i^n - \tilde{V}_i^n$ e o vetor dos erros é tal que $E^n = \left(e_1^n, e_2^n, \ldots, e_{M-1}^n\right)^T$.

Consideremos que $P_{CN} = (I + D_{CN})^{-1}(I - D_{CN})$, a equação do erro é tal que,

$$E^n = P_{CN} E^{n-1}.$$

O que implica que, indutivamente, podemos escrever $E^n = P_{CN}^n\, E^0$, para $n = 1, 2, \ldots, N$.

Aplicando normas a esta equação e tendo em atenção que, de (4.27) vem que $\|P_{CN}\| \leq 1$, obtemos as seguintes desigualdades,

$$\|E^n\| \leq \ \|P_{CN}^n\|\|E^0\| \leq \ \|P_{CN}\|^n\|E^0\| \leq \ \|E^0\|.$$

Então o método de Crank-Nicolson é incondicionalmente estável. □

Por fim, a convergência deste método é comprovada pelo seguinte teorema.

Teorema 4.4.8 *A solução numérica $\tilde{V}^n$ do método de Crank-Nicolson, converge incondicionalmente para a solução exata V^n à medida que h e τ se aproximam de zero e verifica,*

$$\|V^n - \tilde{V}^n\| = O(h + \tau^2),$$

onde $V^n = \left(V_1^n, V_2^n, \ldots, V_{M-1}^n\right)^T$.

Demonstração: Seja V_i^n a solução exata da equação diferencial (4.4) e $\tilde{V}_i^n$ a solução aproximada pelo método de Crank-Nicolson, nos pontos da malha $(x_i, \bar{t}_n)$, onde $x_i = x_L + ih$, com $i = 0, 1, \ldots, M$ e $\bar{t}_n = n\tau$, com $n = 1, 2, \ldots, N$. O erro global define-se como $e_i^n = V_i^n - \tilde{V}_i^n$ e o vetor dos erros é tal que $E^n = \left(e_1^n, e_2^n, \ldots, e_{M-1}^n\right)^T$.

Análogo ao que foi feito anteriormente, a equação do erro pode ser discretizada do seguinte modo,

$$\begin{aligned} & e_i^{n+1} - \frac{\tau}{2}\left[(r-\nu)\frac{e_i^{n+1} - e_{i-1}^{n+1}}{h} + \frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i+1} g_k^{(\alpha)} e_{i-k+1}^{n+1} - r e_i^{n+1}\right] \\ = & e_i^n + \frac{\tau}{2}\left[(r-\nu)\frac{e_i^n - e_{i-1}^n}{h} + \frac{\nu}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i+1} g_k^{(\alpha)} e_{i-k+1}^n - r e_i^n\right] + \tau T_i^n. \end{aligned}$$

onde T_i^n diz respeito ao erro de truncatura definido em (4.1.1), para $i = 1, 2, \ldots, M-1$ e $n = 1, 2, \ldots, N$.

Esta equação também pode ser escrita na sua forma matricial,

$$(I + D_{CN})E^n = (I - D_{CN})E^{n-1} + T^n,$$

onde $T^n = \left(T_1^n, T_2^n, \ldots, T_{M-1}^n\right)^T$ é o vetor dos erros de truncatura, com $n = 1, 2, \ldots, N$.

Para $x = \tau\, P_{CN}\, T^n$ e $P_{CN} = (I + D_{CN})^{-1}(I - D_{CN})$ vem que,

$$E^n = P_{CN}E^{n-1} + x.$$

E iterativamente obtemos, $E^n = (P_{CN}^n + P_{CN}^{n-1} + \cdots + \ldots I)x$, para $n = 1, 2, \ldots, N$.

Aplicando normas a esta equação e tendo em consideração que $\|P_{CN}\| \leq 1$ podemos

estabelecer as seguintes relações,

$$\begin{aligned}\|E^n\| &= \|(P_{CN}^n + P_{CN}^{n-1} + \cdots + \ldots I)x\| \\ &\leq (\|P_{CN}^n\| + \|P_{CN}^{n-1}\| + \cdots + 1)\|\tau\, P_{CN}\, T^n\| \\ &\leq N\tau\, \|P_{CN}\, T^n\| \\ &\leq T_F \|T^n\|\end{aligned}$$

Uma vez que $\|T^n\| = O(h + \tau^2)$ como vimos anteriormente, basta escrever então que,

$$\|E^n\| = O(h + \tau^2).$$

O que prova a convergência do método em causa. □

Portanto, a discretização da equação (4.4) pelo método de Crank- Nicolson é estável e convergente.

4.5 Extrapolação de Richardson

Dos resultados teóricos provados na secção anterior, sabemos que a taxa de convergência do método implícito de Euler é da ordem $O(\tau+h)$ e que a do método de Crank-Nicolson é $O(\tau^2+h)$. Com o intuito de melhorarmos a ordem de convergência destes métodos numéricos, podemos fazer uma extrapolação, neste caso, uma extrapolação de Richardson [3]. Esta, apresenta diferenças consoante o método em causa, no entanto, vejamos inicialmente em que consiste utilizando um raciocínio simplificado.

Seja A^* a solução exata de um problema diferencial e seja $A(h)$ uma aproximação numérica dessa solução, segundo um determinado método numérico, para um h que corresponde ao tamanho dos saltos no espaço. O erro global é tal que,

$$A^* - A(h) = a_0 h + a_1 h^2 + a_2 h^3 + \cdots = O(h)$$

onde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ são constantes arbitárias.

Ao substituirmos h por $h/2$ obtemos,

$$A^* - A\left(\frac{h}{2}\right) = a_0\left(\frac{h}{2}\right) + a_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_2\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \cdots = O\left(\frac{h}{2}\right).$$

Aplicando a fórmula da extrapolação no cálculo do erro, podemos então verificar que a ordem de convergência 1 aumenta para 2,

$$\begin{aligned} 2 \times \left(A^* - A\left(\frac{h}{2}\right)\right) - \left(A^* - A(h)\right) &= -a_1\frac{h^2}{2} - \frac{3}{4}a_2h^3 - \cdots - (1-2^{(-k-1)})a_kh^k - \ldots \\ &= \hat{a_1}h^2 + \hat{a_2}h^3 + \ldots \\ &= O(h^2) \end{aligned}$$

com $k > 0$ uma constante.

Deste modo, esta ideia pode ser aplicada a métodos numéricos que apresentem convergência no tempo e no espaço, que é o caso dos métodos em estudo neste capítulo. Para o método implícito de Euler, iremos ajustar a convergência no tempo e no espaço e para o método de Crank-Nicolson apenas iremos ajustar a convergência no espaço.

Assim, relativamente ao método implícito de Euler, consideremos duas soluções numéricas, $\bar{V}_i^n$ calculada na malha $(x_i, \bar{t}_n)$, onde $x_i = x_L + ih$, $\bar{t}_n = n\tau$, e $\tilde{V}_{2i}^{2n}$ calculada na malha $(x_{2i}, \bar{t}_{2n})$, onde $x_{2i} = x_L + i\frac{h}{2}$ e $\bar{t}_{2n} = n\frac{\tau}{2}$, com $i = 0, 1, \ldots, M$ e $n = 1, 2, \ldots, N$.

A solução da extrapolação $\hat{V}_i^n$ é então definida pela operação,

$$\hat{V}_i^n \approx 2\tilde{V}_{2i}^{2n} - \bar{V}_i^n,$$

para $i = 1, 2, \ldots, M-1$ e $n = 1, 2, \ldots, N$.

E desta forma, a equação (4.14) passa a apresentar uma ordem de convergência $O(\tau^2 + h^2)$.

No que diz respeito ao método de Crank-Nicolson, escolhemos uma solução numérica $\bar{V}_i^n$ calculada na malha $(x_i, \bar{t}_n)$, onde $x_i = x_L + ih$, $\bar{t}_n = n\tau$, e $\tilde{V}_{2i}^n$ calculada na malha $(x_{2i}, \bar{t}_n)$, onde $x_{2i} = x_L + i\frac{h}{2}$, $\bar{t}_n = n\tau$, com $i = 0, 1, \ldots, M$ e $n = 1, 2, \ldots, N$.

Então, a solução da extrapolação de Richardson resulta da seguinte operação,

$$\hat{V}_i^n \approx 2\tilde{V}_{2i}^n - \bar{V}_i^n,$$

para $i = 1, 2, \ldots, M-1$ e $n = 1, 2, \ldots, N$.

Portanto, a equação (4.19) passa a apresentar uma ordem de convergência de $O(\tau^2 + h^2)$.

O facto da ordem de convergência de um método numérico aumentar, significa que conseguimos, através da extrapolação, aproximar de forma mais eficiente as soluções numéricas, obtendo erros inferiores. Este aspecto poderá ser observado no próximo capítulo, quando calcularmos de forma computacional soluções dos métodos em estudo.

Capítulo 5

Testes numéricos

Atendendo ao estudo teórico, feito no capítulo anterior, relativo aos métodos numéricos implícido de Euler, de Crank-Nicolson e da extrapolação de Richardson, vamos neste capítulo, exibir dois exemplos numéricos dos métodos referidos.

Desta forma, o primeiro exemplo diz respeito a um problema diferencial que contém a solução exata correspondente, para que, através de cálculos computacionais, possamos tecer conclusões relativas aos erros globais e às ordens de convergência de cada método numérico.

O segundo exemplo diz respeito a uma opção call Europeia, descrita pela equação diferencial (3.13) calculada segundo o método implícito de Euler.

Os métodos numéricos foram implementados usando o software MATLAB.

5.1 Ordem de convergência

Consideremos a seguinte equação,

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{t}} - (r-\nu)\frac{\partial V}{\partial x} - \nu\, {}_0D_x^{\alpha} V = -rV - f, \quad (x, \bar{t}\,) \in (0,1) \times (0,1) \tag{5.1}$$

com condições de fronteira

$$V(0, \bar{t}\,) = 0, \quad V(1, \bar{t}\,) = e^{\bar{t}}$$

e condição inicial

$$V(x, 0) = x^3.$$

Para $\alpha = 1.7$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.25$, $\nu = -\frac{1}{2}\sigma^{\alpha}\sec(\frac{\alpha\pi}{2})$, a solução exata do problema é $V(x, \bar{t}\,) = x^3 e^{\bar{t}}$, então facilmente deduzimos o termo fonte, $f(x, \bar{t}\,) = e^{\bar{t}}[3(r-\nu)x^2 + \nu\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)}x^{3-\alpha} - (1+r)x^3]$.

Os resultados obtidos são apresentados nas tabelas das próximas páginas. Nelas, os erros calculados dizem respeito à norma L_∞ e as ordens de convergência no espaço foram deduzidas

usando a relação,

$$\|V^n - \tilde{V}^n\| \leq C\, h^p,$$

onde V^n corresponde ao vetor da solução exata, $\tilde{V}^n$ corresponde ao vetor das soluções aproximadas, C é uma constante positiva independente de h e p diz respeito à ordem do método. Para o caso do cálculo das ordens no tempo, o raciocínio é análogo a este, mas feito para τ em vez de h.

Deste modo, para $h = h_1$ e $h = h_2$ obtemos dois erros globais, $\text{erro}_1 = Ch_1^p$ e $\text{erro}_2 = Ch_2^p$. Então a ordem p pode ser obtida através do seguinte cálculo,

$$p = \frac{\log(\text{erro}_1/\text{erro}_2)}{\log(h_2/h_1)}.$$

A Tabela 5.1 diz respeito às ordens de convergência espacial do método implícito de Euler e do método de Crank-Nicolson quando fixamos $N = 4000$, e quando variamos a malha no espaço. Os valores obtidos dos dois métodos indicam ordens de convergência espacial aproximadas de 1.

h	Erro L_∞ Euler	Ordem	Erro L_∞ CN	Ordem
1/8	1.0600E-02	-	1.0600E-02	-
1/16	5.4000E-03	0.97	5.3000E-03	1.00
1/32	2.7000E-03	1.00	2.7000E-03	0.97
1/64	1.4000E-03	0.95	1.3000E-03	1.05
1/128	7.4206E-04	0.92	6.6831E-04	0.96
1/256	4.1065E-04	0.85	3.3424E-04	1.00

Tabela 5.1 Convergência espacial dos métodos implícito de Euler e de Crank- Nicolson (CN) quando $N = 4000$.

A Tabela 5.2 corresponde às ordens de convergência temporal do método implícito de Euler e do método de Crank-Nicolson. Esta tabela é diferente da anterior na medida em que notamos que o erro espacial domina o erro temporal do método de Crank-Nicolson, quando temos valores de M relativamente pequenos. Assim, para podermos observar a ordem de convergência temporal deste método, foi necessário refinar imenso a malha no espaço, calculando os erros para dois valores temporais apenas. Deste modo, o método implícito de Euler apresenta uma ordem de convergência temporal aproximada de 1 e o método de Crank-Nicolson apresenta uma ordem de convergência temporal de aproximadamente 2.

M	τ	Erro L_∞ Euler	Ordem	Erro L_∞ CN	Ordem
	0.1	3.5000E-02		6.6861E-04	
1000	0.05	1.7700E-02	0.98	2.2646E-04	1.56
	0.1	3.5000E-02		6.3007E-04	
2000	0.05	1.7600E-02	0.99	1.8679E-04	1.75
	0.1	3.4900E-02		6.1090E-04	
4000	0.05	1.7600E-02	0.99	1.6726E-04	1.87
	0.1	3.4900E-02		6.0453E-04	
6000	0.05	1.7600E-02	0.99	1.6081E-04	1.91
	0.1	3.4900E-02		6.0135E-04	
8000	0.05	1.7600E-02	0.999	1.5759E-04	1.93

Tabela 5.2 Convergência temporal dos métodos implícito de Euler e de Crank- Nicolson (CN).

Por fim, os valores da Tabelas 5.3 mostram que quando $\tau = h$, a ordem de convergência dos dois métodos é de aproximadamente 1. Para além disso, o método da estrapolação de Richardson apresenta erros inferiores comparativamente com os restantes métodos e com uma ordem de convergência maior, isto é, aproximadamente 2.

$\tau = h$	Erro L_∞ Euler	Ordem	Erro REM Euler	Ordem	Erro L_∞ CN	Ordem	Erro REM CN	Ordem
1/8	4.7600E-02	-	3.3000E-03	-	1.1100E-02	-	1.1000E-03	-
1/16	2.5600E-02	0.89	7.6279E-04	2.11	5.5000E-03	1.01	2.8362E-04	1.96
1/32	1.3200E-02	0.96	1.8015E-04	2.08	2.7000E-03	1.03	6.9452E-05	2.03
1/64	6.7000E-03	0.98	4.3642E-05	2.05	1.3000E-03	1.05	1.7219E-05	2.01
1/128	3.4000E-03	0.98	1.0699E-05	2.03	6.7120E-04	0.95	4.2778e-06	2.01

Tabela 5.3 Erros da norma L_∞, da extrapolação (REM) e taxa de convergência do método de implícito de Euler e de Crank-Nicolson (CN)

Portanto, os resultados numéricos estão de acordo com a análise teórica feita no capítulo anterior, o que é indicativo, de que os códigos computacionais desenvolvidos são eficientes.

5.2 Opção call Europeia

Seja $V(x,\bar{t})$ a função dos preços de uma opção call europeia, onde $x_{\bar{t}} = \ln S_{\bar{t}}$ diz respeito à mudança de variável considerada no início desta dissertação. A equação diferencial de um modelo de preços de opções, deste estilo, baseado num processo de Lévy é,

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{t}} - (r-\nu)\frac{\partial V}{\partial x} - \nu\, {}_{x_L}D_x^{\alpha} V = -rV, \quad (x,\bar{t}\,) \in (x_L, x_R) \times (0, T_F) \tag{5.2}$$

com condições de fronteira,

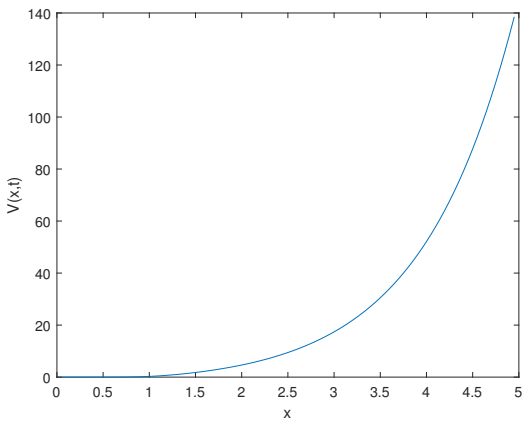
$$V(x_L,\bar{t}\,) = 0, \quad V(x_R,\bar{t}\,) = e^{x_R} - Ke^{-r\bar{t}}$$

e condição inicial, $V(x,0) = \max(e^x - K, 0)$.

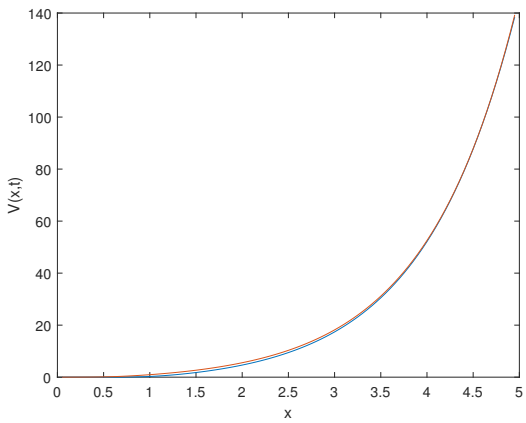
Sejam $x_L = 0$, $x_R = 5$, $\nu = -\frac{1}{2}\sigma^{\alpha}\sec(\frac{\alpha\pi}{2})$ onde $\alpha = 1.3$, a volatilidade é $\sigma = 0.25$, a taxa de juro é $r = 0.05$, a maturidade do contrato é $T_F = 1$ e o preço de exrcício é $K = 3$.

Nesta secção, iremos variar algum destes parâmetros e tecer conclusões relativamente aos preços da opção e à sensibilidade de α relativamente a estas variações.

Nas Figuras 5.1 observamos o comportamento dos preços de uma opção call europeia para os valores indicados em cima e no caso da Figura 5.1b vemos a diferença de quando alteramos a taxa de risco.



(a) Preços da opção quando $r = 0.05$.



(b) Preços da opção para $r = 0.05$ a azul e $r = 0.5$ a vermelho.

Fig. 5.1 Preços da opção quando $\alpha = 1.3$, a volatilidade é $\sigma = 0.25$, o preço de exercício $K = 3$ e a maturidade da opção é $T_F = 1$.

Deste modo, a distinção das linhas não é muito notória, sendo que a modificação dos valores da taxa de risco não influencia de forma significativa os preços da opção.

Na Figura 5.2, para os valores $\alpha = 1.3$, $\sigma = 0.25$, $r = 0.05$ e $T_F = 1$ observamos os preços da opção para diferentes preços de exercício K.

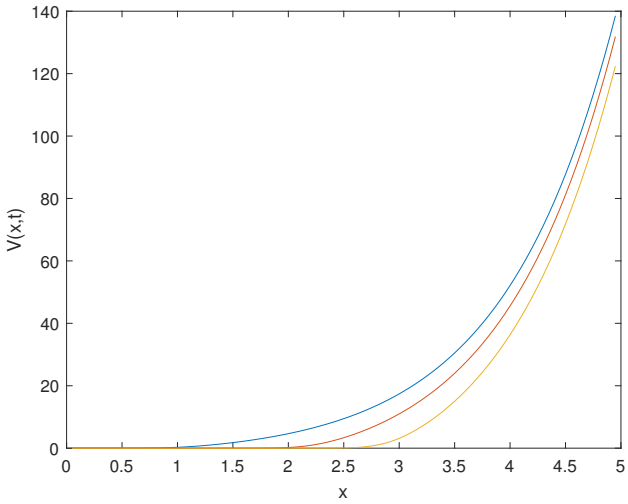
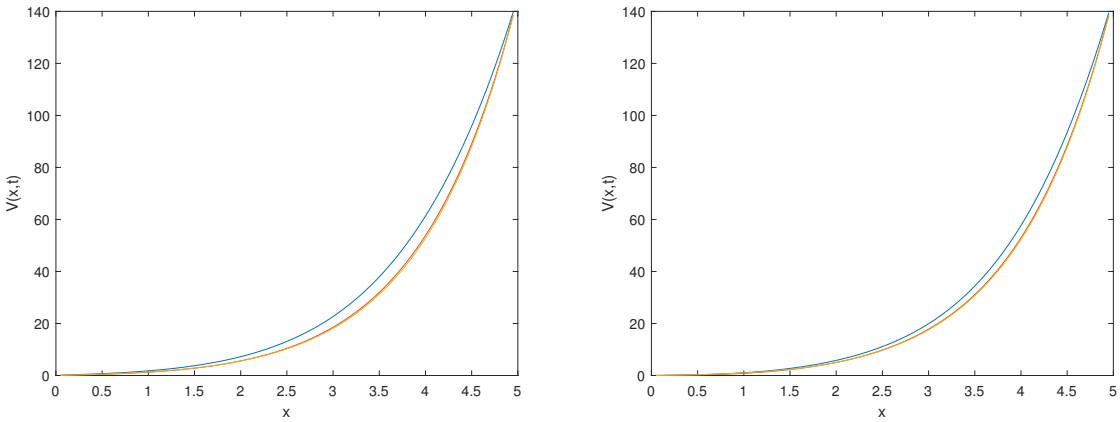


Fig. 5.2 Preços da opção para $K = 3$ a azul, $K = 10$ a vermelho e $K = 20$ a amarelo.

Assim, quanto maior for o preço de exercício mais achatada será a curva, isto é, menor serão os preços da opção.

Analisemos agora, a sensibilidade de α. Para as figuras seguintes escolhemos, $\sigma = 1.5$ e $r = 0.05$, pois tivémos de aumentar a volatilidade, em comparação com os casos anteriores, de forma a que a diferença das linhas dos gráfico fosse mais notória.

No caso das Figuras 5.3 para $K = 3$, observamos que os preços da opção são maiores quanto menor for o α e para uma data de maturidade mais longa.



(a) Preços da opção quando $T_F = 1$.

(b) Preços da opção quando $T_F = 0.5$.

Fig. 5.3 Variação de $\alpha = 1.1$ a linha a azul, $\alpha = 1.5$ a vermelho e $\alpha = 1.9$ a amarelo.

Por fim, assumindo $K = 20$ e fixando os parâmetros $\sigma = 1.5$, $r = 0.05$, $T_F = 1$. Para $\alpha = 1.1$ a azul, $\alpha = 1.5$ a vermelho e $\alpha = 1.9$ a amarelo, obtivemos a Figura seguinte.

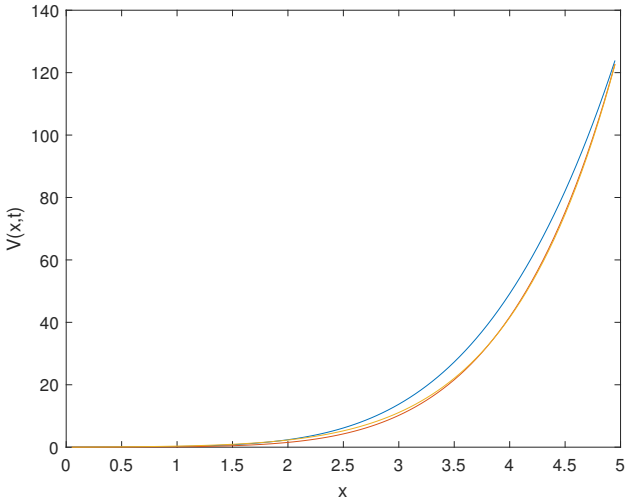


Fig. 5.4 Preços da opção para $K = 20$.

Comparando a Figura 5.4 com a 5.3a, notamos que α é mais sensível à alteração do preço de exercício do que à alteração da maturidade.

Capítulo 6

Conclusões

Os modelos de preços de opções baseados em processos de Lévy têm-se tornado muito úteis no ramo da matemática financeira devido à sua aptidão de descrever de forma mais realista os mercados financeiros. Para além disso, a capacidade de se interligar os processos de Lévy com martingalas e com transformadas de Fourier deu-nos a possibilidade de deduzir a equação diferencial parcial fracionária representativa destes modelos.

Através de um estudo detalhado desta equação e após encontrarmos um operador fracionário que aproximasse o operador de Riemann-Liouville, fomos capazes de a discretizar, segundo dois métodos numéricos das diferenças finitas, estáveis e convergentes.

Os resultados computacionais obtidos, indicam que o método que apresentou menores erros de aproximação foi o de Crank-Nicolson e ainda, que o parâmetro α desempenha um papel determinante nos valores dos preços das opções. Para além disso, com a implementação da extrapolação de Richardson fomos capazes de obter dados mais precisos. Deste modo, estes resultados numéricos estão em concordância com os dados teóricos.

O campo da análise numérica de equações diferenciais parciais fracionárias está em constante expansão, e como tal, os métodos que usámos para resolver a equação diferencial destes modelos, podem ser aperfeiçoados. E existem ainda, outros métodos que nos poderão fornecer resultados melhorados, como por exemplo o método estabilizado pelo gradiente biconjugado [22].

No entanto, os métodos das diferenças finitas propostos podem mesmo assim, ser aplicados na precificação de opções europeias, devido aos bons resultados que obtivemos.

Bibliografia

[1] Butzer, P. L. and Nessel, R. J. (1971). *Fourier Analysis and Approximation*, volume I of *Monographs and Textbooks*. Academic Press.

[2] Cartea, A. and del Castillo-Negrete, D. (2007). Fractional diffusion models of options prices in markets with jumps. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 374:749–763.

[3] Fawang, L., Turner, I., Zhuang, P., and V, A. (2008). New solution and analytical techniques of the implicit numerical method for the anomalous subdiffusion equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46:1079–1095.

[4] Feng, L., Zhuang, P., Liu, F., Turner, I., and Li, J. (2020). High-order numerical methods for the Riesz space fractional advection-dispersion equations. *ArXiv*, abs/2003.13923.

[5] Fonseca, F. M. D. M. E. J. D. (2019). Fractional diffusion models and option pricing in jump models. Master's thesis, Lisbon School of economics and management.

[6] Han, Q. (2011). *A Basic Course in Partial Differential Equations*, volume 120 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society.

[7] Horn, R. A. and Johnson, C. R. (1985). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press.

[8] Itkin, A. (2010). *Pricing Derivatives Under Lévy Models. Modern Finite-Difference and Pseudo-Differential Operators Approach*. Birkhäuser.

[9] Junior, S. A. A. P. (2014). Teorema de decomposição de Lévy-Itô. Master's thesis, Universidade Federal do Espírito Santo.

[10] Kuo, H.-H. (2006). *Introduction to stochastic integration*. Springer-Verlag.

[11] LeVeque, R. J. (2007). *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, US.

[12] Li, C. and Zeng, F. (2015). *Numerical Methods for Fractional Calculus*. Numerical Analysis and Scientific Computing. Chapman and Hall/CRC.

[13] Meerschaert, M. and Tadjeran, C. (2004). Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 172:65–77.

[14] Mikosch, T. (1998). *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, volume 6 of *Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

[15] Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press.

[16] Samko, S., Kilbas, A., and Marichev, O. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications.* Gordon and Breach Science Publishers.

[17] Seydel, R. U. (2009). *Tools for computational finance.* Springer.

[18] Sousa, E. (2009). Finite difference approximations for a fractional advection diffusion problem. *Journal of Computational Physics*, 228:4038–4054.

[19] Sousa, E. (2012). A second order explicit finite difference method for the fractional advection diffusion equation. *Computers and mathematics with aplications*, 64:3141–3152.

[20] Tadjeran, C., Meerschaert, M. M., and Scheffler, H.-P. (2006). A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation. *Journal of Computational Physics*, 213:205–213.

[21] Teodoro, G. S., Oliveira, D. S., and Capelas de Oliveira, E. (2018). Sobre derivadas fracionárias. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 40(2).

[22] Xingyu, A. and Fawang, L. and Shanzhen, C. and Vo V. A. (2020). Novel numerical techniques for the finite moment log stable computacional model with a european call option. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 36:1537–1554.