

1 2 9 0



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Filipe Silva Monnerat

**OTIMIZAÇÃO DE RECURSOS PARA
ATENDIMENTO DE DEMANDAS DE
VIAGENS RODOVIÁRIAS EM
ORGANIZAÇÕES**

**Tese de Doutoramento em Gestão - Ciência Aplicada à Decisão, orientada
pela Prof^a Doutora Maria João Teixeira Gomes Alves e Prof^a Doutora Joana
Maria Pina Cabral Matos Dias e apresentada à Faculdade de Economia da
Universidade de Coimbra.**

Dezembro de 2020



FACULDADE DE ECONOMIA
UNIVERSIDADE DE
COIMBRA

Filipe Silva Monnerat

OTIMIZAÇÃO DE RECURSOS PARA ATENDIMENTO DE DEMANDAS DE VIAGENS RODOVIÁRIAS EM ORGANIZAÇÕES

Tese de Doutoramento em Gestão - Ciência Aplicada à
Decisão, apresentada à Faculdade de Economia para
obtenção do grau de Doutor

Orientadoras: Maria João Teixeira Gomes Alves e Joana Maria Pina Cabral Matos Dias

Coimbra, Dezembro/2020

DEDICATÓRIA

PORQUE DELE, E POR ELE, E PARA ELE, SÃO TODAS AS COISAS; GLÓRIA, POIS, A ELE ETERNAMENTE. AMÉM.

Romanos 11:36

AGRADECIMENTOS

Sei que que todas as coisas contribuem juntamente para o bem daqueles que amam a Deus, daqueles que são chamados segundo o Seu propósito. Mas todo o percurso de desenvolvimento deste trabalho não seria possível sem as pessoas maravilhosas que estiveram próximas de mim.

Sou muito grato...

... às minhas orientadoras Maria João Alves e Joana Dias, que sempre em conjunto estiveram presentes e me incentivaram durante todo este trabalho, com conhecimento, profissionalismo e paciência.

... à FEUC, na pessoa do seu Diretor e dos doutores João Paulo Costa e Pedro Godinho, que me abriram as portas e juntamente com os outros professores forneceram-me acesso ao conhecimento.

... ao CeBER que proporciona a partilha de conhecimentos científicos que para mim foram muito importantes para o meu crescimento acadêmico.

... à UFV, que me proporcionou a oportunidade de sair da minha zona de conforto.

... à CAPES, que financiou os quatro primeiros anos deste projeto.

... à minha esposa Janaína e às minhas filhas, Elena, Elisa e Aline (e agora Mariana). Eu vos amo!

... aos meus pais e sogros pelo apoio e carinho.

... aos meus amigos e irmãos pela compreensão e apoio.

Obrigado!

FINANCIAMENTO

O autor foi apoiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Nível Superior (CAPES) através do processo 009345/2013-02 BEX e pela Universidade Federal de Viçosa.

RESUMO

Este trabalho dedicou-se ao estudo do problema de otimização da afetação de dois recursos distintos a um conjunto de tarefas, onde a afetação de um dos recursos depende da afetação do outro recurso, sendo que os recursos podem ser partilhados entre as tarefas. Este problema pode ser interpretado como uma extensão do problema de afetação generalizada.

O interesse por este problema surgiu pela identificação, numa organização, de dificuldades existentes na determinação da afetação de recursos (veículos e motoristas) à realização de viagens de trabalho, por forma a que se fizesse a melhor utilização possível dos recursos existentes. O objetivo principal do trabalho foi o de desenvolver modelos e algoritmos de otimização que permitissem determinar a afetação destes recursos às requisições de viagem, minimizando o custo total. Considera-se possível a partilha de recursos entre viagens, se os seus períodos de realização e rotas forem compatíveis. Admite-se ainda a possibilidade de utilização de recursos externos (*outsourcing*), caso os recursos internos se esgotem ou seja mais vantajoso selecionar o *outsourcing*.

Um dos aspetos inovadores dos modelos desenvolvidos prende-se com a consideração implícita da dimensão temporal, o que permite que o número de variáveis do modelo não seja dependente de nenhum tipo de discretização do horizonte temporal considerado. Também este aspeto pode ser considerado em outro tipo de problemas, em que seja necessário considerar o tempo de realização das tarefas para uma correta atribuição de recursos.

Os modelos e algoritmos desenvolvidos foram testados considerando quer um estudo de caso, em que foram usados dados reais, quer algumas instâncias geradas a partir destes dados reais, que permitiram compreender o comportamento dos modelos e das correspondentes soluções. Tendo em conta que os modelos desenvolvidos dão lugar a instâncias de grande dimensão, foi desenvolvida uma heurística híbrida (*matheurística*), tendo por base algoritmos genéticos e um *solver* de programação inteira. Foi ainda desenvolvido um método determinístico de decomposição do problema em subproblemas. Os modelos desenvolvidos conduzem a soluções que permitem melhorar a gestão de recursos e diminuir os custos, em comparação com as soluções que eram calculadas manualmente na organização. A resolução usando um *solver* genérico para programação

inteira apresentou, em muitas das instâncias, *gaps* significativos. A *matheurística* também apresentou dificuldades na resolução do problema, tendo sido o método de decomposição a melhor alternativa, dentro dos desenvolvimentos algorítmicos testados. Foi possível verificar que a possibilidade de partilha de recursos entre tarefas permite uma redução dos custos envolvidos, permitindo uma racionalização da sua utilização. No caso particular do problema estudado, a partilha de viaturas por requisições diferentes, mas compatíveis entre si, permite diminuir o número de lugares não utilizados nos veículos atribuídos às requisições.

ABSTRACT

This work studies the optimization problem of assigning two distinct resources to a set of tasks, where the assignment of one of the resources depends on the assignment of the other resource, and the resources can be shared between tasks.

This work was motivated by the identification, in an organization, of existing difficulties in determining the allocation of resources (vehicles and drivers) to the realization of work trips, to make the best possible use of existing resources. The main objective of the work was to develop models and optimization algorithms that allow determining the assignment of these resources to travel requests, minimizing total cost. It is considered that resources can be shared among trips as long as their realization time periods and routes are compatible. The possibility of using external resources (outsourcing) is also allowed, either because the internal resources are not sufficient to assure the realization of all the trips, or because it is more advantageous to select outsourcing from cost perspective.

One of the innovative aspects of the developed models is related to the implicit consideration of the temporal dimension, which allows the size of the model to be independent of any kind of discretization of the time horizon. This aspect can also be considered in other types of problems, in which it is necessary to consider the time to carry out the tasks for a correct allocation of resources.

The models and algorithms developed in this work were tested considering a case study with real data and some other instances generated from these data, which allow to understand the behavior of the models and the corresponding calculated solutions. The developed models originate large dimension instances, which can be challenging to solve using general solvers. This observation motivated the development of a hybrid heuristic (*matheuristic*) based on genetic algorithms and an integer programming solver. A deterministic method of decomposing the problem into subproblems was also developed.

The models lead to solutions that improve resource management and decrease costs, in comparison to solutions that were manually calculated in the organization. The resolution using a general solver yielded significant gaps in many instances. The *matheuristic* also presented some difficulties in solving the problem. The decomposition method was the best alternative, considering the alternative algorithmic developments tested. The

possibility of sharing resources between tasks allows a reduction in the costs involved, allowing a rationalization of their use. In the particular case of the problem studied, sharing vehicles among different compatible requests reduces the number of unused seats in the vehicles assigned to the requests.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dados do exemplo 1	24
Tabela 2 - Resultado das afetações no exemplo 1	25
Tabela 3 – Dados do exemplo 2.....	25
Tabela 4 - Resultado das afetações para instância 2.....	26
Tabela 5 – Quantidade e distribuição de motoristas afetos	27
Tabela 6 - Dados do Exemplo 3 (parte 1)	37
Tabela 7 - Dados do Exemplo 3 (parte 2)	37
Tabela 8 - Dados do Exemplo 3 (parte 3)	38
Tabela 9 - Resultado das afetações no Exemplo 3	39
Tabela 10 - Capacidade das viaturas na instância A.....	42
Tabela 11 - Resumo da solução obtida para a instância A.....	42
Tabela 12 - Exemplos de requisições que partilham recursos na solução ótima encontrada para a instância A	45
Tabela 13 - Resumo da solução obtida para a instância B	46
Tabela 14 - Características das instâncias aleatórias criadas a partir da instância B.....	49
Tabela 15 - Resultado da otimização das instâncias de teste	49
Tabela 16 - Exemplo de um cromossoma	57
Tabela 17 – Exemplo de cruzamento entre s' e s'' com linha do cruzamento $k = 1$	59
Tabela 18 - Percentagem de requisições compatíveis (R_C) e de requisições com sobreposições (R_S), nas diferentes instâncias geradas	67
Tabela 19 - Resultados da otimização das instâncias do grupo 1 pelo CPLEX e pelo método de decomposição.....	91
Tabela 20 - Resultados da otimização da instância 1K pelo método original (CPLEX) e de decomposição (Figura 21)	91

Tabela 21 - Resultados da otimização das instâncias do grupo 2 pelo CPLEX e pelo método de decomposição	94
Tabela 22 - Resultados da otimização da instância 2G pelo método original (CPLEX) e de decomposição (Figura 25)	95

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Comparação de diferentes soluções para o problema real (instância A) em termos do respetivo custo total.....	44
Figura 2 — Valores da função objetivo para a instância A usando a heurística.....	61
Figura 3 - <i>Gap</i> para as instâncias do grupo 1	69
Figura 4 – Comparação do valor da FO e o melhor limite para cada instância do grupo 1	69
Figura 5 – Distribuição de requisições entre instâncias do grupo 1. Comparação do número de solicitações partilhadas, não partilhadas e <i>outsourcing</i> entre as instâncias	71
Figura 6 – Quantidade de passageiros em cada classe de requisição nas instâncias do grupo 1	71
Figura 7 – Comparação das afetações de viaturas e motoristas às requisições do grupo 1	72
Figura 8 – Afetações de viaturas em requisições com e sem partilha de recursos nas instâncias do grupo 1.....	73
Figura 9 – Afetações de motoristas em requisições com e sem partilha de recursos nas instâncias do grupo 1.....	73
Figura 10 – Comparação da quantidade de assentos vazios nas viaturas afetas entre requisições com e sem partilhas	74
Figura 11 – Comparação do <i>gap</i> nas instâncias do grupo 2.....	75
Figura 12 - Comparação da melhor FO e o melhor <i>bound</i> para cada instância do grupo 2	76
Figura 13 - Distribuição das requisições entre as instâncias do grupo 2. Comparação do número de solicitações compartilhadas, não compartilhadas e <i>outsourcing</i>	76
Figura 14 - Quantidade de passageiros em cada classe de requisição nas instâncias do grupo 2	77
Figura 15 - Comparação das afetações de viaturas e motoristas às requisições do grupo 2	78

Figura 16 - Afetações de viaturas em requisições com e sem partilha de recursos nas instâncias do grupo 2	79
Figura 17 – Afetações de motoristas em requisições com e sem partilha de recursos nas instâncias do grupo 2	80
Figura 18 - Comparação da quantidade de assentos vazios nas viaturas afetas entre requisições com e sem partilhas	80
Figura 19 - Comparação do gap na resolução pelo método matemático com o método heurístico para as instâncias do grupo 1.....	82
Figura 20 - Comparação do <i>gap</i> na resolução pelo CPLEX e <i>matheurística</i> para as instâncias do grupo 2	82
Figura 21 - Árvore de decomposição da instância K do grupo 1 (1K - apresentada no Capítulo 5). Cada caixa representa um conjunto de requisições	88
Figura 22 - Árvore de decomposição da instância T do grupo 1 (1T - apresentada no Capítulo 5).....	89
Figura 23 - Comparação do <i>gap</i> entre as otimizações das instâncias originais e das instâncias decompostas do grupo 1.....	92
Figura 24 - Comparação da melhor FO entre as otimizações das instâncias originais e das instâncias decompostas do grupo 1.....	93
Figura 25 - Árvore de decomposição da instância G do grupo 2 (1G) (apresentada no Capítulo 5). Cada caixa representa um conjunto de requisições.....	94
Figura 26 - Comparação das variações dos valores da função objetivo entre o método de decomposição e a resolução do problema original para as instâncias do grupo 2	96
Figura 27 - Comparação das variações dos gaps entre o método de decomposição e a resolução do problema original para as instâncias do grupo 2	96

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Descrição do problema	1
1.2. Revisão de Literatura	6
2. MODELO INICIAL.....	19
2.1. Exemplos ilustrativos	23
3. MODELO 2.....	29
3.1. Exemplo ilustrativo.....	36
3.2. Estudo de caso.....	40
3.3. Outras instâncias testadas	45
3.4. Equidade na afetação de motoristas	51
4. DESENVOLVIMENTO DE HEURÍSTICA HÍBRIDA.....	55
4.1. Resultados.....	60
5. MODELO COM <i>OUTSOURCING</i>.....	63
5.1. Experiências computacionais	65
5.1.1. Otimização das instâncias do grupo 1.....	69
5.1.2. Otimização das instâncias do grupo 2.....	75
5.1.3. Heurística híbrida	81
6. DECOMPOSIÇÃO DO PROBLEMA.....	85
6.1. Experiências computacionais	90
6.1.1. Instâncias do Grupo 1.....	90
6.1.2. Instâncias do Grupo 2.....	93
7. CONCLUSÕES.....	99
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	105

1. INTRODUÇÃO

1.1. Descrição do problema

Este trabalho dedica-se a um problema de otimização que considera a afetação de viaturas e motoristas a requisições de viagens que devem ser realizadas num dado horizonte temporal e cujo objetivo é minimizar o custo total. A complexidade do problema torna a sua resolução não trivial, o que motivou o desenvolvimento de novos modelos matemáticos e algoritmos de otimização. O foco do trabalho não se detém, portanto, na questão de rotas ou de escalas de motoristas e viaturas, mas considera a afetação global de recursos, sejam estes internos ou externos (*outsourcing*).

O autor, enquanto funcionário de uma organização pública (Universidade Federal de Viçosa - UFV), deparou-se com necessidades existentes no âmbito da gestão do transporte de passageiros nesta organização, no que concerne à falta de otimização, constatando que o problema se repetia em outras organizações públicas brasileiras. Muitas destas organizações dispõem quer de recursos internos quer de recursos externos passíveis de serem afetados a deslocações de passageiros, com custos e disponibilidades diferentes.

A UFV utiliza suas viaturas próprias para diversos fins, sendo as viaturas distribuídas de acordo com a sua utilização:

- viagens de trabalho técnico, de pesquisa e viagens de médio e longo curso para aulas práticas;
- deslocação para aulas práticas de curta distância;
- deslocação interna de trabalhadores (técnicos);
- transporte de doentes para tratamento na Capital do Estado;
- transporte de doentes e feridos (ambulâncias).

O presente trabalho trata apenas das viagens de trabalho técnico e pesquisa que não possuem carácter periódico. A UFV utiliza alguns recursos internos que possibilitam realizar uma parte das viagens, como viaturas, motoristas, mecânicos e auxiliares, lavadores e pessoal técnico administrativo. Com a extinção de cargos no âmbito da Administração

Pública Federal direta, autárquica e fundacional (Lei Nº 9.632, de 7 de maio de 1998) que gerou a impossibilidade legal de contratação de motoristas (e outros cargos) por concurso público e a constante redução desses cargos por reformas, transferências e exonerações, bem como o direito a folga dos profissionais quando realizam trabalho aos fins de semana e feriados, fez com que a Universidade ficasse constantemente sem motoristas disponíveis para as viagens requeridas. Por esse motivo, a Organização passou a contratar motoristas através de uma Fundação, o que obriga ao pagamento de encargos associados à contratação que elevam muito o custo. Isso motivou a Universidade a adotar também o *outsourcing* na forma de contratação de serviço de transporte de passageiros por km e tipo de viaturas.

Atualmente, na UFV, os usuários (funcionários, professores e alunos) enviam as requisições de viagem de acordo com as demandas pessoais de trabalho de forma descentralizada. Essas requisições são então enviadas para um departamento centralizado que tenta identificar demandas compatíveis com base nas rotas, destinos, data e hora de partida e retorno.

Duas ou mais requisições são compatíveis se suas origens e destinos forem compatíveis (o que significa que as viagens têm a mesma origem/destino ou uma viagem é uma sub-rota de outra), e suas agendas também podem ser conciliadas, permitindo que os recursos sejam partilhados.

Atualmente, a Universidade não usa qualquer procedimento de otimização para gerenciar a afetação de recursos para viagens planejadas, embora alguma redução de custos seja alcançada por ajustes manuais que permitem que algumas requisições compatíveis sejam agrupadas.

As requisições de viagens a serem atendidas com os recursos próprios são compatibilizadas pelo órgão central e direcionadas para o setor responsável pela gestão das viaturas que realiza alguns ajustes, tendo em vista a disponibilidade de viaturas e motoristas. Por norma, as viagens que atingem finais de semana e/ou feriados são preferencialmente atendidas pelo *outsourcing*. As requisições direcionadas ao *outsourcing*, depois de compatibilizadas, são encaminhadas diretamente para atendimento pela prestadora contratada.

Os custos associados às viagens podem variar significativamente. Dependem não só dos requisitos (origem/destino, número de passageiros, número de motoristas necessários por viatura), mas também dos recursos afetos a cada viagem (uma viatura de grande capacidade versus várias viaturas, partilha de recursos com outras viagens).

Um dos primeiros objetivos do trabalho desenvolvido foi o de tentar desenvolver um modelo de otimização que permitisse representar o problema descrito, e permitisse automatizar o cálculo de uma solução de afetação de recursos às requisições de viagens existentes.

Para ser possível construir este modelo, seria preciso considerar um elevado número de variáveis de decisão e de restrições, o que dificultaria a formulação matemática. Assim, decidiu-se considerar um conjunto de pressupostos e algumas simplificações, a fim de iniciar o desenvolvimento de um modelo preliminar. Este modelo foi primeiro testado num exemplo do problema de pequena dimensão e depois numa instância real, e corresponde ao primeiro modelo (Modelo 1) de otimização desenvolvido, que está descrito no Capítulo 2.

Esse modelo apresentava soluções coerentes para todos os casos testados, no entanto não atendia a algumas características do problema real, como por exemplo:

- algumas viagens podem exigir mais do que uma viatura devido ao número de passageiros e mais do que um motorista por viatura (para viagens longas);
- viagens compatíveis podem partilhar viaturas e motoristas.

Assim, para poder incorporar estas características do problema real, foi desenvolvido um segundo modelo (Modelo 2) muito mais flexível. Embora a dimensão do tempo tenha de ser considerada (cada viagem tem um tempo de início e de fim e a afetação dos recursos tem de ter em consideração este período), foi possível incorporar no novo modelo esta dimensão do tempo sem a refletir explicitamente nas variáveis de decisão. Isso é uma vantagem, porque a dimensão das instâncias deste modelo (em termos de variáveis e restrições) não é uma função do número de períodos temporais que são considerados no horizonte de planeamento. Este novo modelo, que é detalhado no Capítulo 3, pode ser considerado como uma extensão do *problema generalizado de afetação (generalized*

assignment problem - GAP) e foi testado em diversas instâncias com características distintas, com a finalidade de se perceber o seu comportamento.

Apesar de o solucionador (*solver*) de programação linear inteira utilizado (o CPLEX¹) ter sido capaz de calcular as soluções ótimas das instâncias testadas em tempos computacionais razoáveis, a natureza combinatória do problema faz com que, em problemas de maiores dimensões, a otimalidade seja alcançada à custa de elevados tempos computacionais ou, até mesmo, que não sejam alcançadas soluções ótimas. Assim, seria interessante dispor de uma heurística que permitisse calcular soluções de boa qualidade num tempo computacional razoável, para aplicação nos problemas de maior dimensão.

As relações entre as múltiplas variáveis do problema, traduzidas por um conjunto grande de restrições, levanta muitas dificuldades ao desenvolvimento de heurísticas ou meta-heurísticas dedicadas ao problema em causa. Foram equacionadas e discutidas várias possibilidades usando meta-heurísticas com diferentes tipos de pesquisa (pesquisa de vizinhança, como por exemplo usando *pesquisa tabu*, versus algoritmos populacionais), sendo que a maior dificuldade se prendia sempre com o cumprimento das restrições; dadas as características do problema, a admissibilidade das soluções dificilmente seria mantida durante o processo de pesquisa. Por isso, optou-se pelo desenvolvimento de uma meta-heurística híbrida (*matheurística*), que combina um algoritmo genético com um solucionador de programação matemática (CPLEX) e que assegura o cumprimento das restrições. Esta meta-heurística está descrita no Capítulo 4.

Como descrito no início desta secção, a utilização de recursos externos às organizações também pode ser considerada como mais um recurso a ser utilizado. Já que nenhum dos modelos desenvolvidos contemplava a possibilidade de utilização de *outsourcing* como um recurso extra ao atendimento das requisições de viagem, foi desenvolvido um novo modelo matemático que inclui esta possibilidade. A extensão do Modelo 2 de modo a incluir também *outsourcing* está descrita no Capítulo 5. Neste capítulo, a meta-heurística híbrida é novamente utilizada com o novo modelo, fazendo-se uma comparação dos resultados obtidos pela meta-heurística com os do *solver*. No entanto, os resultados da meta-

¹ CPLEX®: IBM ILOG CPLEX Optimization Studio - Solucionador de programação matemática de alto desempenho para programação linear, programação inteira mista e programação quadrática.

heurística apenas se revelaram competitivos em alguns casos particulares, nomeadamente quando a frota de veículos disponíveis é maioritariamente constituída por veículos de pequena dimensão. Nestes casos, há um aumento do número de combinações possíveis de afetação, o que torna os problemas mais difíceis de resolução pelo CPLEX, apresentando por vezes *gaps* elevados.

No sentido de se procurar reduzir os *gaps* apresentados pelo *solver* e os tempos computacionais, e uma vez que a meta-heurística não se revelou uma alternativa viável para todos os casos, foi desenvolvido um método de resolução baseado na decomposição do problema em subproblemas. Estes subproblemas, também eles de programação linear inteira, são resolvidos de forma separada usando o *solver* (CPLEX). Este método garante o cálculo da solução ótima do problema original se todos os subproblemas forem resolvidos até à otimalidade. Caso contrário, é possível calcular-se um limite para o *gap* da solução do problema original. Essa metodologia está descrita no Capítulo 6 e é aplicada ao Modelo 2 com *outsourcing*. Os resultados obtidos através deste método de decomposição do problema, em diferentes instâncias, foram comparados com os obtidos através da resolução do problema original sem decomposição.

O trabalho desenvolvido no âmbito desta tese possibilitou uma comparação entre a metodologia clássica de resolução de problemas de programação linear inteira e uma meta-heurística híbrida num problema altamente combinatório e com muitas restrições. O estudo de caso de um problema real permitiu desenvolver um trabalho de investigação com contributos para além do estado da arte, uma vez que a maioria dos modelos existentes na literatura estão focados na otimização de rotas e/ou afetação de um único conjunto de recursos. No problema abordado nesta tese pretende-se otimizar a afetação de dois tipos de recursos diferentes (viaturas e motoristas) a um conjunto de tarefas (requisições de viagens), em que a afetação de um dos recursos depende da afetação do outro recurso. O foco está na otimização da afetação dos diferentes recursos considerando que pode haver partilha de viaturas e motoristas, bem como possíveis formas de contratação de serviços externos à organização (*outsourcing*). Na próxima secção é apresentada uma revisão na literatura onde são considerados temas relacionados com a gestão de frotas, problemas de afetação generalizada, e outros relacionados com o trabalho apresentado nesta tese.

1.2. Revisão de Literatura

Na literatura científica observam-se muitos artigos que abordam problemas relacionados com o transporte de pessoas e/ou cargas por via aérea, ferroviária, rodoviária, marítima, fluvial, etc. Muitos destes trabalhos tratam da afetação de viaturas e motoristas a viagens, da gestão de frotas, bem como da otimização de rotas. No entanto, não foi encontrado nenhum estudo que abordasse diretamente o tema que é objeto de estudo nesta tese. Por este motivo foram consideradas, nesta revisão de literatura, algumas temáticas que, indiretamente, se relacionam com o problema aqui tratado. Neste trabalho assume-se que as viagens e as respectivas rotas são conhecidas previamente. A principal preocupação da instituição é otimizar a afetação de diferentes recursos (afetar viaturas a viagens, e motoristas a essas viaturas), tendo em conta que não podem ser afetados os mesmos recursos a viagens que se sobrepõem no tempo e, por outro lado, que pode haver partilha de recursos em viagens compatíveis, contribuindo para uma diminuição dos custos. Os diferentes recursos não podem ser afetados independentemente uns dos outros, uma vez que o número de viaturas utilizadas e as características da viagem determinarão o número de motoristas necessários.

Os problemas relacionados com a Gestão de Frotas (*Fleet Management Problem*) são comuns quer em empresas privadas quer em órgãos públicos que se dedicam a serviços de transporte de carga e passageiros. A Gestão de Frotas representa uma atividade relevante a nível tático e a nível operacional. Neste sentido, têm sido desenvolvidos muitos modelos matemáticos e métodos quantitativos para otimização e simulação de operação das frotas de transporte, a fim de atender a demanda de clientes. Esses modelos, e a sua análise através de ferramentas computacionais, fornecem um apoio valioso para os decisores e gestores. No entanto, vários modelos são idealizados ou simplificados de forma não realista para aplicações práticas, porque as situações do mundo real possuem, quase sempre, aspetos que ultrapassam a estruturação matemática (Bielli et al., 2011).

Os problemas de gestão de frota são estudados há muito tempo, existindo uma vasta literatura relacionada com estes problemas. A gestão de frotas é um conceito amplo, que incorpora decisões sobre dimensionamento e configuração de frotas, alocação de frotas, roteamento de veículos, considerando viaturas homogêneas ou heterogêneas, em problemas que podem ser determinísticos ou estocásticos. Abara (1989) formulou e

resolveu um problema de atribuição de frota usando um modelo de programação linear inteira (PLI) cuja função objetivo pode assumir uma variedade de formas, como maximização do lucro, minimização do custo ou utilização ótima de um tipo específico de frota. O modelo foi aplicado como ferramenta de decisão para uma grande empresa aérea. Hane et al. (1995) resolveram e compararam um problema de PLI de grande escala com uma formulação semelhante a Abara (1989), mas sem as restrições relacionadas com a manutenção e planejamento da equipe. Os autores afirmam que o modelo desenvolvido por Abara utiliza variáveis extras para calcular a sequência de voos que uma aeronave irá voar e determinar a decisão de voo, variáveis que causam um grande crescimento no tamanho do modelo conforme o número de voos aumenta. Os autores usaram diferentes técnicas para atenuar o problema de existência de muitas variáveis inteiras que podem tornar difícil e demorada a obtenção de soluções ótimas. Estas técnicas incluem um algoritmo de ponto interior, *dual steepest edge simplex*, perturbação de custo, ramificação em restrições de particionamento de conjunto e priorização da ordem de ramificação.

A atribuição de recursos à realização de viagens em uma unidade/organização requer primeiramente que haja uma gestão de frotas já implementada. Martinez et al. (2011), ao estudarem a gestão de frotas de viaturas 4 x 4 em quatro grandes Organizações Humanitárias Internacionais (OHI), concluíram que havia necessidade de implementar modelos de otimização para gestão das frotas. Porém, os autores identificaram que, nas OHI estudadas, a gestão de frotas era centralizada e incompleta, porque a gestão terminava quando a viatura chegava ao país de operação. Além disso, os autores perceberam que os problemas de gestão (a falta de alinhamento das estruturas de gestão, a falta de sistemas de incentivo à gestão e a falta dos indicadores chave de desempenho) reduziam fortemente a capacidade dessas organizações em implementar modelos de otimização eficientes.

Farahani et al. (2013), em uma revisão sobre problemas de *design* de redes de transportes urbanos, apontam como objetivos interessantes para trabalhos de investigação futuros a definição de problemas que sejam mais realistas (tendo em conta, por exemplo, exigência de políticas de transporte, comportamento dos viajantes, etc.) e a criação de métodos de resolução mais eficientes, depois de se ter em conta o desenvolvimento e as limitações das tecnologias computacionais e a aplicabilidade dos métodos de resolução na prática.

Bruns & Knust (2012) utilizaram três formulações diferentes de PLI para o planeamento de cargas em comboios. Os modelos pretendem determinar como afetar unidades de carga a vagões de um determinado comboio de modo que sua utilização seja maximizada e os custos de organização e transporte no terminal sejam minimizados.

Uma afetação de tarefas a motoristas no contexto de movimentação de contentores, com janelas temporais e incerteza na duração da tarefa, é descrita em Cheung e Hang (2003). Presume-se que as decisões de afetação podem mudar no decorrer do tempo, se novas informações chegarem. Num trabalho subsequente (Cheung et al., 2005), os autores abordaram um problema semelhante, que foi resolvido por uma abordagem de rotulagem adaptativa.

O problema de gestão de frota na indústria de transporte de camiões é abordado por Coslovich et al. (2006), onde o objetivo é minimizar o custo total (de roteamento, atribuição de recursos e custos de reposicionamento), satisfazendo restrições de janelas temporais. Cada motorista é modelado como uma combinação do motorista e da viatura. Os autores resolvem o problema dividindo-o em três subproblemas mais simples.

A gestão dinâmica de frotas em tempo real é abordada por Billhardt et al., (2014) na alocação e redistribuição de ambulâncias. Os autores descrevem um quadro baseado em eventos discretos capaz de lidar com o aparecimento de novas tarefas ou mudanças imprevistas na atual situação da frota. Esta estrutura pressupõe que as viaturas são capazes de enviar informações sobre a sua posição atual e o seu estado para um sistema rastreador de frota.

A importância de otimizar simultaneamente a afetação de viaturas e recursos humanos tem sido reconhecida por vários autores. Freling et al. (2003) apresentam diferentes formulações matemáticas para o problema de agendamento integrado de viaturas e tripulações quando há um único depósito, e desenvolvem algoritmos baseados em abordagens de geração de colunas em combinação com relaxação Lagrangeana. Os autores concluem que esta integração é mais útil quando não é permitida a mudança da viatura ou motorista e os custos da tripulação são significativos em comparação com os custos da viatura. Laurent e Hao (2007) também consideram o problema de agendamento simultâneo de viaturas e motoristas no contexto de uma empresa de locação de limusines. Uma característica diferenciadora de seu trabalho é a consideração explícita das

competências dos motoristas. Um motorista só pode ser associado a uma viagem se as suas competências correspondem às necessárias para essa viagem (como, por exemplo, ser capaz de falar um determinado idioma). Os autores desenvolvem um algoritmo de duas fases, baseado em programação por restrições (*constraint programming*) e na meta-heurística *simulated annealing*. As competências dos motoristas também são levadas em consideração em Peters et al. (2007). Os autores consideram um único depósito com frotas de autocarros de três categorias diferentes e com um conjunto de motoristas com características diferentes, que determinam os trabalhos primários e secundários do motorista (as categorias de ônibus às quais o motorista pode ser afeto, e uma preferência associada com esta afetação). O problema é resolvido por uma combinação de relaxação Lagrangeana e pesquisa tabu.

A gestão de frotas tem sido estudada com objetivos diversos. Redmer (2014, 2015) elaborou uma série de estudos dedicados ao tema estratégico de gestão de frotas de veículos. Num dos trabalhos o autor considera formas de satisfazer as necessidades de transporte da empresa - *MAKE-or-BUY (MoB) problem* - onde se faz a escolha entre a empresa utilizar frota própria ou externa (*outsourcing* - comprando serviços de transporte no mercado). O mesmo concluiu que os métodos de solução MoB são descritos muito superficialmente na literatura, havendo apenas aqueles que conduzem a soluções 100% *MAKE* ou 100% *BUY*. No entanto, segundo o autor, a chave para resolver os problemas MoB reside nas soluções *MAKE-and-BUY* mistas. No trabalho Redmer (2015), o autor discute formas de as empresas construírem frotas de veículos, decidindo o número e tipo de veículos que devem ter na sua frota.

Loxton et al. (2012) consideram um problema de formação de uma nova frota heterogênea de veículos. Esses autores desenvolvem um algoritmo de minimização de custos que combina programação dinâmica e o método da secção áurea (*golden section method*) para determinar a composição ótima da frota.

Park e Kim (2010) alertam para a importância de se definir a heterogeneidade ou homogeneidade da frota no contexto de problemas de otimização. Os autores também sugeriram a utilização de uma meta-heurística para facilitar a resolução de problemas em instâncias reais de maior dimensão.

Outro tema muito abordado em pesquisas recentes envolve a partilha de viaturas e/ou viagens (*car-sharing, ride-sharing, bike-sharing, etc.*). Nestes estudos, a otimização em tempo real foi considerada a principal ferramenta utilizada. Em uma revisão sobre sistemas dinâmicos de partilha de viaturas, Agatz et al. (2012) encontraram um interesse crescente na abordagem de questões relacionadas com a otimização de partilha dinâmica de viagens. Os autores sugeriram o desenvolvimento de abordagens rápidas de otimização para instâncias de tamanho real e que permitam realizar escolhas. Para tal, consideraram que o desenvolvimento de uma tecnologia de combinação de partilha de viagens descentralizada, no caso de uma metrópole, por exemplo, torna-se importante, uma vez que, dada a dimensão dos dados, fica quase impossível que um único sistema faça toda a otimização.

Um problema de agendamento multi-período de viaturas e tripulantes considerando a possibilidade de *outsourcing* quer para viaturas, quer para motoristas, é estudado por Zäpfel e Bögl (2008). O modelo é aplicado no contexto da definição de rotas para empresas postais, onde as janelas temporais e as capacidades das viaturas foram consideradas. Os autores apresentam uma estrutura de algoritmo que pode ser adaptada a diferentes meta-heurísticas.

Simão et al. (2009) abordam o problema de transporte de carga por camião (*truckload trucking*), onde um conjunto de motoristas tem de ser afetado a um conjunto de cargas que precisam de ser transportadas, onde o tempo do transporte é geralmente longo. Se a distância de transporte for longa, às vezes pode ser necessário afetar mais do que um motorista a uma carga, para que os motoristas possam ter períodos de descanso sem atrasar o transporte. O estudo é baseado em um problema real de grande escala que envolve mais de 6.000 motoristas. Os autores tratam o problema usando uma abordagem algorítmica baseada na programação dinâmica aproximada, combinada com técnicas de programação matemáticas e de *machine learning*.

Outro problema de gestão de frotas pode ser encontrado em problemas de logística de aluguer de automóveis (Fink & Reinert, 2006; Oliveira et al., 2014, 2017). As decisões que têm de ser tomadas nestes casos estão relacionadas não só com a composição da frota, mas também com a afetação de viaturas aos pedidos dos clientes e o reposicionamento das viaturas em diferentes estações de locação. Este tipo de restrições pode também ser encontrado em outras áreas de aplicação, como por exemplo no modelo desenvolvido por

Detti et al. (2017) na área da saúde, onde são incluídas restrições de compatibilidade de viaturas e clientes. Os autores consideram explicitamente a condição do paciente para se certificar de que a viatura escolhida é compatível com essa condição (pacientes que necessitam de uma cadeira de rodas, por exemplo). As preferências dos pacientes também são explicitamente tidas em consideração. O problema é, então, resolvido por uma abordagem heurística baseada em pesquisa tabu e pesquisa de vizinhança variável.

Um problema da classe de gestão dinâmica de frota é estudado por Shi et al. (2014). Os autores propõem o primeiro modelo e algoritmo para o problema de gerenciamento dinâmico de frota com demanda e níveis de serviço incertos escolhidos pelo cliente.

Embora haja uma extensa literatura relacionada com problemas de gestão de frotas, uma grande parte foca-se no roteamento de veículos. Os problemas de roteamento de veículos (*Vehicle Routing Problem* - VRP) são muito estudados em Investigação Operacional, pois possuem uma grande importância prática. Tal como a maior parte dos problemas relacionados com a gestão de frotas, trata-se de problemas de otimização combinatória notoriamente difíceis de resolver, mesmo em um contexto estático (Irnich et al., 2014).

De forma geral, o VRP consiste em definir um conjunto de rotas de menor custo, sujeitas a um conjunto de restrições (capacidade do veículo, tempo de viagem, etc.), de forma a servir clientes geograficamente dispersos (Christofides, 1976; Kumar, 2012). Dependendo da tipologia e das características do problema, a função objetivo pode assumir o papel de minimizar o custo total da operação, minimizar a distância total percorrida, minimizar o tempo total de transporte, minimizar o tempo de espera, minimizar a utilização de veículos, maximizar o benefício, maximizar o serviço ao cliente, equilibrar a utilização dos recursos, etc. (Bräysy e Haske, 2014).

Hoff et al. (2010) apresentaram uma revisão da literatura que incide sobre a composição da frota e problemas de roteamento para o transporte marítimo e rodoviário de mercadorias. Os autores afirmam que, a menos que o roteamento e agendamento de viagem já sejam predeterminados, é crucial considerar as decisões de roteamento e composição da frota simultaneamente. Ertogral et al. (2017) apresentaram uma nova revisão da literatura, resumindo o estado-da-arte em relação ao problema de dimensionamento da frota. A maioria dos artigos citados são baseados em modelos para problemas de roteamento de veículos.

Markov et al. (2016) descrevem um sistema de gestão de uma frota heterogênea utilizada para coleta de resíduos. Cada rota pode começar e terminar em depósitos diferentes. O autor propõe um modelo matemático, uma heurística de pesquisa de vizinhança múltipla, uma extensão do problema de roteamento de veículos com instalações intermediárias com uma frota heterogênea fixa e afetação de depósitos de destino fixos.

Hertz et al. (2012) estudaram o problema de determinação de rotas, criando modelos de PLI em que consideraram uma frota heterogênea de veículos que realizavam várias entregas de pedidos a partir de vários depósitos. O problema de roteamento de veículos com entrega fracionada, com algumas restrições adicionais, foi modelado e resolvido em duas fases sequenciais, primeiro solucionando a afetação dos veículos e, em seguida, definindo as rotas. Os autores consideram, depois, um único problema de PLI baseado nestes dois, e compararam as soluções do modo combinado com o modo em duas fases. Apesar de as duas resoluções se terem mostrado eficientes para as instâncias testadas, sugeriram uma meta-heurística para instâncias de maior dimensão.

Uma identificação dos problemas mais relevantes na gestão de frotas para diferentes meios de transporte foi realizada por Bielli et al. (2011), abordando problemas de roteamento e programação de veículos, gestão dinâmica de frotas interpretada como um problema de roteamento de veículos em tempo real, urbano e privado, transporte, transporte *dial-to-ride* e problemas específicos relacionados com o transporte aéreo, marítimo, ferroviário e intermodal. Os autores concluem que as pesquisas futuras apontam para o desenvolvimento de novos modelos eficazes para gestão de frotas e em combinar métodos de análise de dados e previsão, modelos de otimização e simulação, heurísticas, integrando as diferentes abordagens em sistemas de apoio à decisão.

Uma visão geral das abordagens de gestão de frotas no contexto de problemas de roteamento de veículos heterogêneos é mostrada em Baldacci et al. (2008).

Há também problemas de roteamento de veículos em que a maneira como a afetação de motoristas se relaciona com a garantia de qualidade do serviço ao cliente é tida explicitamente em conta. Em Kovacs et al. (2014) é possível encontrar uma revisão de literatura que se debruça sobre problemas que incorporam, explicitamente, as questões de coerência do serviço (evitando que existam grandes alterações nos horários de chegada, ou motorista, quando se fazem várias entregas ao mesmo cliente).

Um exemplo que considera o tempo de chegada e a preocupação com o cliente pode ser encontrada em Groër et al. (2009). Os autores consideram as relações estabelecidas entre os motoristas e os clientes. Cada cliente deve, portanto, ser visitado pelo mesmo motorista sempre que o cliente solicita o serviço e, aproximadamente, no mesmo período horário. Os autores desenvolveram um modelo de programação matemática e um algoritmo que foram testados num problema real envolvendo 3.715 locais de clientes. Coelho et al. (2012) abordam estas questões no contexto dos sistemas de inventário gerenciados pelo fornecedor. Os autores desenvolveram uma meta-heurística baseada em pesquisa de vizinhança adaptativa. A coerência na escolha do motorista nos problemas *dial-ride* é abordada por Braekers e Kovacs (2016). Os autores examinam a possibilidade de vários usuários partilharem a mesma viatura, apesar de terem diferentes localizações de recolha e de entrega. A qualidade do serviço também foi considerada com imposição de janelas temporais e limitando o tempo máximo de viagem de cada usuário. É imposto um limite superior ao número máximo de motoristas diferentes que atenderão os mesmos clientes em um determinado horizonte de planeamento. Os autores apresentam duas formulações e aplicam duas abordagens algorítmicas, a saber, o *branch-and-cut* e pesquisa de vizinhança alargada. A consistência do motorista nos problemas de encaminhamento de viaturas com demandas desconhecidas é descrita em Spliet e Dekker (2016). A demanda estocástica é representada por meio de cenários. O procedimento para o cálculo de soluções resolve sequencialmente os problemas de afetação e roteamento.

Outro campo de pesquisa que pode ser visto como relacionado com problemas de gestão de frotas e de roteamento é o problema de estabelecimento de percursos de autocarros escolares. Park e Kim (2010) apresentam uma revisão da literatura sobre este tópico. Li e Fu (2002) consideram um estudo de caso em Hong Kong para o qual é formulado um problema de programação multiobjetivo. Os objetivos incluem a minimização dos custos e a minimização dos tempos de viagem, tanto para os estudantes quanto para os autocarros. Não são explicitamente consideradas as afetações de motoristas. Em Park et al. (2012) é descrito um problema de roteamento de autocarros escolares que considera explicitamente que alunos de diferentes escolas podem partilhar o mesmo autocarro (carga mista). Os autores desenvolvem uma abordagem heurística construtiva que utiliza como solução inicial um cronograma que não considera a possibilidade de uma carga mista

e, em seguida, melhora-o, considerando a possibilidade de carga mista. Um problema semelhante é descrito em Lima et al. (2016), onde os autores assumem a existência de uma frota heterogênea e o mesmo horário de partida para todas as origens. Os autores comparam cinco meta-heurísticas, para além de integrarem quatro tipos de pesquisas locais de vizinhança especialmente adaptadas para lidar com cargas mistas. Os autores chegam à conclusão de que a pesquisa local iterada (uma pesquisa local de descida em vizinhança determinada aleatoriamente) supera as outras abordagens. O roteamento de autocarros escolares em contextos urbanos motivou o desenvolvimento, em Riera-Ledesma e Salazar-González (2012), de um modelo que otimiza simultaneamente as rotas e a escolha de paragens de autocarros dos alunos. Considerando uma formulação em PLI, os autores apresentam um conjunto de desigualdades válidas que fortalecem a relaxação do problema em programação linear e que são utilizadas no algoritmo *branch-and-cut* proposto.

O ponto de vista do trabalho nesta tese é diferente do de outros trabalhos publicados na literatura. Considera-se que existe um conjunto de viaturas disponíveis, pertencentes a uma frota heterogênea, para a realização de uma série de viagens já agendadas e com rotas predefinidas. Trata-se de viagens de trabalho feitas por membros de uma instituição. Assim, o agendamento da viagem é definido pelos viajantes e cada viagem é uma rota que começa e termina na instituição, com paradas predefinidas (geralmente apenas um destino). O objetivo é otimizar a afetação da frota às viagens planeadas num determinado horizonte temporal com possibilidade de *outsourcing* (na forma de aquisição de serviço completo de transporte para uma viagem), de forma que os custos sejam os menores possíveis. A instituição tem de considerar tanto a afetação de viaturas a viagens como a afetação de motoristas a essas viaturas. Este trabalho foca-se num problema de afetação de recursos, onde dois recursos diferentes têm de ser atribuídos a uma determinada tarefa. Estes recursos não podem ser afetados independentemente um do outro porque o número de viaturas afetadas e as características da viagem determinarão o número de motoristas necessários.

O problema apresentado nesta tese pode, assim, ser considerado como uma extensão do problema de afetação generalizada (GAP). O GAP pode ser definido como o problema de encontrar a afetação ótima de n tarefas (itens) a m agentes, onde as tarefas e os agentes

têm uma capacidade limitada e um agente pode ser afetado a mais do que uma tarefa (desde que a sua capacidade máxima não seja excedida). O GAP é conhecido por ser NP-difícil e o correspondente problema de admissibilidade NP-completo (Öncan, 2007). Existem várias extensões e variantes do GAP (para uma revisão ver, por exemplo, Morales e Romeijn (2004), Öncan (2007) e Pentico (2007)).

Kogan et al. (2005) descrevem um GAP dinâmico, onde um agente pode desempenhar muitas tarefas e uma tarefa também pode ser desempenhada por muitos agentes; as tarefas são interpretadas como sendo compostas por um conjunto de unidades com demandas estocásticas. Os autores apresentam várias propriedades matemáticas do modelo e reduzem-no a uma série de problemas determinísticos de afetação, desenvolvendo um algoritmo pseudo-polinomial para aproximar a solução ótima. Moccia et al. (2009) apresentam três formulações em PLI para o GAP dinâmico, e desenvolvem um algoritmo de geração de colunas capaz de calcular os limites inferiores para a função objetivo, incorporado num procedimento heurístico.

Uma versão dinâmica do GAP é descrita por Mazzola e Neebe (2012). A afetação de tarefas aos agentes deve ser garantida em cada período temporal de um determinado horizonte de planeamento, assumindo que há custos de transição sempre que uma tarefa é reatribuída a um agente diferente em dois períodos consecutivos. Os autores propõem duas formulações e duas abordagens algorítmicas, que são uma heurística baseada em relaxação Lagrangeana e um algoritmo *branch-and-bound*. Mais recentemente, Xu et al. (2018) consideraram um GAP com agentes cooperativos num sistema multiagente escalonável (GAP distribuído). Os autores assumem a existência de um grande número de agentes heterogêneos distribuídos, que devem ser afetados às tarefas no sentido de cumprir um objetivo comum. Os autores propõem uma heurística, que designam por algoritmo inteligente de roteamento para resolver o problema, com base na modelagem de agentes. Os agentes usam informações locais, inferidas de pesquisas anteriores, para decidir quais agentes são mais capazes de contribuir para o melhoramento da solução atual.

O GAP multi-recurso é uma variante do GAP onde cada agente tem de usar não apenas um, mas uma variedade de recursos, para executar as tarefas que lhe são atribuídas (Gavish e Pirkul, 1991). Esse problema é estendido em Shtub e Kogan (1998) incluindo a possibilidade

de variação de demanda ao longo do tempo e afetações de capacidade dinâmica. Karsu e Azizoğlu (2014) consideraram uma versão bi-objetivo do problema que, simultaneamente, minimiza a carga de trabalho total afetada a todos os agentes e minimiza a carga de trabalho máxima afetada entre os agentes.

Vários autores propuseram procedimentos heurísticos e meta-heurísticos para o GAP, GAP dinâmico e GAP multi-recurso. O GAP multi-recurso é abordado em Mazzola e Wilcox (2001) pelo uso de uma heurística construtiva estruturada em três fases. A heurística começa por encontrar uma solução admissível, que é depois submetida a procedimentos adicionais de melhoramento. É também testado um procedimento híbrido, combinando a heurística anterior e um procedimento de otimização de sub-gradiente. Uma heurística baseada em pesquisa de vizinhança de grande escala, incluindo um mecanismo adaptativo para ajustar os parâmetros de busca, é apresentada em Yagiura et al. (2004). Alguns anos mais tarde, Mitrović-Minić e Punnen (2009) usaram a pesquisa de vizinhança em grande escala e pesquisa de vizinhança variável aplicadas ao mesmo problema. Os autores puderam encontrar a melhor solução conhecida naquele momento para algumas instâncias de referência. Kiraz e Topcuoglu (2010) aplicaram métodos hiper-heurísticos ao GAP dinâmico. As heurísticas de baixo nível apoiam-se em procedimentos de pesquisa local baseados em operadores de mutação. Uma pesquisa tabu incorporando um procedimento *branch-and-bound* é proposta por Woodcock e Wilson (2010) para o GAP. Um algoritmo genético paralelo desenvolvido para GAP é descrito em Liu e Wang, (2015), aproveitando as possibilidades de computação inerentemente paralelas dos algoritmos genéticos. Este algoritmo experimenta diferentes estratégias de migração. Algoritmos baseados na evolução diferencial e incorporação de três técnicas distintas de pesquisa local são apresentados em Sethanan e Pitakaso (2016). O desempenho dos algoritmos é comparado com um algoritmo baseado no comportamento das abelhas (*bee-based algorithm*) e pesquisa tabu. Souza et al. (2017) descrevem um método híbrido baseado em pesquisa por dispersão (*scatter search*) e usam uma lista tabu para gerar um conjunto de soluções. Os autores foram capazes de melhorar as melhores soluções conhecidas até ao momento para 21 problemas de referência para o GAP, e provar a otimalidade de outras 15 soluções.

O modelo que desenvolvemos nesta tese é uma extensão do GAP, mas difere do GAP multi-recurso uma vez que, neste trabalho, uma tarefa (viagem) precisa de dois recursos

separados (viaturas e motoristas), e os requisitos de um dos recursos (motoristas) dependerá do número de unidades utilizadas do outro recurso (viaturas). Além disso, as tarefas não são desempenhadas todas ao mesmo tempo, pelo que os tempos em que ocorrem têm de ser tidos em conta quando se consideram as limitações de capacidade dos recursos e as possibilidades de partilha.

O problema a ser tratado possui particularidades que fazem com que ele não se enquadre, nem nos problemas típicos de afetação de frotas e roteamento como os citados anteriormente, nem nos problemas de construção ou rearranjo de frotas de veículos.

Dada a importância da gestão dos recursos associados à realização de viagens em diversas organizações, nomeadamente pelos custos que comportam, e verificando-se que existem problemas semelhantes com características específicas que não são capazes de serem solucionados com os modelos existentes, o estudo do problema de afetação de motoristas e viaturas a um conjunto de requisições de viagens foi o tema escolhido para o presente trabalho.

2. MODELO INICIAL

A primeira fase do trabalho de investigação iniciou-se com o contacto direto com os agentes de decisão da Universidade Federal de Viçosa (UFV), sendo seguido pela recolha de dados, análise e definição do problema (que constitui o estudo de caso).

Em 2014 a Pró-Reitoria de Administração (órgão responsável pela gestão de transportes), bem como a Pró-Reitoria de Planejamento e Orçamento (órgão responsável pela gestão dos dados) foram contatadas no sentido de autorizarem a cedência dos dados relativos às requisições de viagens efetuadas na Universidade, referentes ao ano de 2013. Foi obtida a respetiva autorização, sendo os dados devidamente anonimizados. Assim, apenas foram recebidos os dados estritamente necessários para o estudo deste problema, nomeadamente a indicação das origens, destinos e períodos de realização das viagens. Os dados recebidos foram analisados com a finalidade de se compreender as particularidades do problema. Foram consideradas as viagens realizadas ao longo de um ano, e analisados o número de viagens requeridas, a disponibilidade de viaturas e motoristas e ainda a utilização de *outsourcing*. Para a definição do estudo de caso, foram tidos em conta os dados de um mês que apresentava, em termos de viagens e necessidades de recursos, um padrão partilhado pela maior parte dos restantes meses.

Inicialmente decidiu-se definir e testar um modelo que considerasse explicitamente a dimensão temporal do problema a tratar (i.e., são incluindo variáveis que definem os períodos temporais de cada viagem). Tendo em conta a complexidade do problema, foi considerado um conjunto de pressupostos que o simplificaram, e que permitiram a construção deste modelo, nomeadamente:

- Cada requisição corresponde a uma única viagem de ida e volta.
- A cada requisição é atribuída uma só viatura em um determinado período, ou seja, assume-se que não há necessidade de mais do que uma viatura por requisição.
- Cada requisição necessita de um único motorista.
- Todas as requisições são atendidas.
- O mesmo motorista está afeto à requisição durante todo o tempo da viagem.

- Considera-se apenas a existência de recursos internos (viaturas e motoristas pertencendo à organização, sem se considerar a possibilidade de *outsourcing*).
- Os custos com os motoristas são fixos, havendo apenas custos com as viaturas.

O problema foi formulado como um modelo de programação inteira, que é apresentado a seguir.

Defina-se a seguinte notação:

$i = 1, \dots, V$ é o índice que representa as viaturas, sendo V o número total de viaturas existentes.

$j = 1, \dots, J$ é o índice que representa as requisições de viagem, sendo J o número total de requisições existentes.

$m = 1, \dots, M$ é o índice que representa os motoristas, sendo M o número total de motoristas existentes.

$t = 1, \dots, T$ é o índice que representa cada período temporal a considerar num horizonte de planeamento T (os períodos podem ser meios-dias, dias, horas, etc.).

C_{ij} = custo de afetar a viatura i à requisição j , $\forall i, j$

tA_j = tempo inicial da requisição j , $\forall j$

tB_j = tempo final da requisição j , $\forall j$

P_j = número de passageiros da requisição j , $\forall j$

Q_i = capacidade (em número de assentos disponíveis) da viatura i , $\forall i$

As variáveis de decisão consideram as afetações de viaturas e motoristas às requisições.

$$X_{ijt} = \begin{cases} 1 & \text{se a viatura } i \text{ está afeta à requisição } j \text{ no período } t \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i, j, t$$

$$X1_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a viatura } i \text{ está afeta à requisição } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i, j$$

$$Y_{mit} = \begin{cases} 1 & \text{se o motorista } m \text{ está afeto à viatura } i \text{ no período } t \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall m, i, t$$

A função objetivo (FO) Representa a minimização dos custos das viagens, tendo por base os custos de afetação das diferentes viaturas às requisições.

$$\text{Min} \sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^J C_{ij} X1_{ij} \quad (1)$$

Apresentam-se em seguida as restrições que foram consideradas.

O conjunto de restrições (2) assegura que a viatura i está afeta à requisição j (ou seja $X1_{ij} = 1$) apenas se esta afetação existir em algum período temporal (ou seja, se não existir nenhum período temporal t para o qual $X_{ijt} = 1$, então o somatório é 0 e $X1_{ij}$ também terá de ser 0);

$$X1_{ij} \leq \sum_{t=1}^T X_{ijt} \quad \forall i, j \quad (2)$$

O conjunto de restrições (3) garante a coerência entre as variáveis $X1_{ij}$ e X_{ijt} . Basta que a viatura i esteja afeta a uma requisição j num determinado período temporal t , ou seja, X_{ijt} igual a um para algum t , para que se considere que a viatura i está afeta à requisição j , ou seja, $X1_{ij} = 1$;

$$X1_{ij} \geq X_{ijt} \quad \forall i, j, t \quad (3)$$

O conjunto de restrições (4) assegura que a viatura i , que for afeta à requisição j , tem de ter uma capacidade compatível com o número de passageiros da requisição j ;

$$P_j X1_{ij} \leq Q_i \quad \forall i, j \quad (4)$$

O conjunto de restrições (5) garante que cada requisição j tem uma viatura i afeta durante todo o intervalo de tempo em que se realiza a viagem dessa requisição, ou seja $[tA_j, tB_j]$;

$$\sum_{i=1}^V \sum_{t=tA_j}^{tB_j} X_{ijt} = tB_j - tA_j + 1, \quad \forall j \quad (5)$$

O conjunto de restrições (6) assegura que um motorista m não pode estar associado a mais do que uma viatura i no mesmo período temporal t ;

$$\sum_{i=1}^V Y_{mit} \leq 1, \quad \forall t, m \quad (6)$$

O conjunto de restrições (7) garante que cada requisição j tem afeto um motorista m ;

$$\sum_{m=1}^M Y_{mit} \geq X_{ijt} \quad \forall i, j, t \quad (7)$$

O conjunto de restrições (8) assegura que há, no máximo, um motorista m afeto a uma determinada viatura i em cada período temporal t

$$\sum_{m=1}^M Y_{mit} \leq 1, \quad \forall i, t \quad (8)$$

O conjunto de restrições (9) garante que a mesma viatura i está afeta a uma requisição j desde o início até o fim da viagem;

$$X_{ij(t+1)} \geq X_{ijt}, \quad \forall i, j, (tA_j \leq t \leq tB_j - 1) \quad (9)$$

O conjunto de restrições (10) assegura que cada viatura i atende somente uma requisição j em cada período t .

$$\sum_j^J X_{ijt} \leq 1, \quad \forall i, t \quad (10)$$

O conjunto de restrições (11) assegura que o motorista m está afeto à viatura i e à requisição j desde o início até o fim da viagem.

$$Y_{mi(t+1)} \geq Y_{mit} + X_{ijt} - 1, \quad \forall m, i, j, (tA_j \leq t \leq tB_j) \quad (11)$$

O modelo apresentado resultou de várias experiências com formulações mais simples, cujas resoluções mostraram que não estavam a ser calculadas soluções capazes de assegurar todas as restrições do problema. As restrições (11), por exemplo, foram inseridas após se verificar que, sem elas, não se assegurava que o motorista m estivesse afeto à viatura i e à requisição j até o fim da viagem (ou seja, a solução poderia indicar troca de motorista no meio de uma viagem, o que não poderia ocorrer).

O número de variáveis deste modelo é: $V \times J$ para variáveis $X1_{ij}$, $V \times J \times T$ para variáveis X_{ijt} e $M \times V \times T$ para variáveis Y_{mit} . Assim, o número total de variáveis é $V(J(1 + T) + M \times T)$, sendo todas binárias. O número total de restrições é, no máximo, $V \times J(2 + T(3 + M)) + T(2V + M) + J$ (o valor total depende do período temporal de realização de cada viagem devido às restrições (9) e (11)).

2.1. Exemplos ilustrativos

Para se verificar se este modelo conseguia representar corretamente o problema, tendo em conta os pressupostos assumidos, foram realizados alguns testes considerando algumas instâncias do problema de pequena dimensão. Os dados dessas instâncias foram gerados aleatoriamente.

Utilizou-se a ferramenta de modelação algébrica do software AMPL² e os problemas foram resolvidos usando o *solver* CPLEX (incorporado no AMPL).

² AMPL®: O sistema AMPL é uma ferramenta de modelagem sofisticada que oferece suporte a todo o ciclo de vida da modelagem de otimização: desenvolvimento, teste, implantação e manutenção.

Em todos os casos testados foi possível verificar que a solução ótima encontrada estava em consonância com o problema que se pretendia formular.

Para ilustrar as soluções obtidas pelo modelo desenvolvido, apresentam-se aqui dois exemplos com dois problemas de pequena dimensão. O exemplo 1 considera os dados descritos na Tabela 1. Para este exemplo foram consideradas três requisições, duas viaturas, três motoristas e quatro períodos temporais. Além disso, foram gerados aleatoriamente os custos para cada requisição, bem como o número de passageiros, a capacidade de cada viatura e o período temporal em que deve ocorrer cada viagem. Os dados para essa instância foram gerados através de distribuições uniformes, calculando limites máximo e mínimo a partir dos dados reais.

Tabela 1 - Dados do exemplo 1

Viaturas (i)	vA	vB			Pass. Req. (P_j)	rA	5
Requisições (j)	rA	rB	rC			rB	2
Motoristas (m)	mA	mB	mC			rC	10
Tempo (T)	4				T. Início (tA_j)	rA	1
Custo (C_{ij})		rA	rB	rC		rB	2
	vA	150	250	350		rC	3
	vB	300	400	620			
Cap. Pass. (Q_i)	vA	4			T. Fim (tB_j)	rA	2
	vB	16				rB	3
						rC	4

A Tabela 2 mostra os resultados das afetações obtidas na resolução do exemplo 1. A solução ótima encontrou o menor custo possível (1.170 unidades monetárias (u. m.)) e os resultados das afetações garantem que todas as requisições recebem os recursos necessários. Observa-se que todas as viaturas e motoristas estão afetos a alguma requisição e somente uma viatura está afeta a uma requisição e a não mais do que uma em um determinado período temporal.

Tabela 2 - Resultado das afetações no exemplo 1

	Tempo			
	1	2	3	4
r_A	vB	vB		
	mC	mC		
r_B		vA	vA	
		mB	mB	
r_C			vB	vB
			ma	mA

No segundo exemplo considera-se um problema ligeiramente maior, composto por 13 requisições de viagem, seis viaturas, quatro motoristas e 15 períodos temporais. Os custos das viagens foram gerados aleatoriamente, bem como o número de passageiros de cada requisição e os períodos em que cada viagem é realizada e a capacidade de cada viatura, à semelhança do exemplo anterior. A Tabela 3 descreve os dados deste exemplo.

Tabela 3 – Dados do exemplo 2

i	vA	vB	vC	vD	vE	vF								
j	rA	rB	rC	rD	rE	rF	rG	rH	rl	rJ	rK	rL	rM	
m	mA	mB	mC	mD										
T	15													
C_{ij}		rA	rB	rC	rD	rE	rF	rG	rH	rl	rJ	rK	rL	rM
	vA	150	250	350	250	150	350	150	250	350	250	150	350	150
	vB	300	500	620	500	300	620	300	500	620	500	300	620	300
	vC	180	280	380	280	180	380	180	280	380	280	180	380	180
	vD	100	200	300	200	100	300	100	200	300	200	100	300	100
	vE	150	250	350	250	150	350	150	250	350	250	150	350	150
	vF	300	500	620	500	300	620	300	500	620	500	300	620	300
Q_i	vA	4		vC	4		vE	4						
	vB	16		vD	3		vF	16						
P_j	rA	8		rD	3		rG	15		rJ	8		rM	3
	rB	4		rE	4		rH	3		rK	4			
	rC	10		rF	4		rl	4		rL	10			
tA_j	rA	1		rD	4		rG	7		rJ	10		rM	14
	rB	2		rE	6		rH	7		rK	10			
	rC	3		rF	6		rl	8		rL	13			
tB_j	rA	2		rD	6		rG	12		rJ	13		rM	15
	rB	3		rE	7		rH	7		rK	11			
	rC	4		rF	8		rl	9		rL	15			

A Tabela 4 mostra a solução ótima obtida para o exemplo 2. O menor custo possível para o problema é de 4.090 u. m.

Tabela 4 - Resultado das afetações para instância 2

Tempo															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
rA	vB mD	vB mD													
rB		vE mA	vE mA												
rC			vB mD	vB mD											
rD				vD mB	vD mB	vD mB									
rE						vA mD	vA mD								
rF						vE mC	vE mC	vE mC							
rG							vF mA	vF mA	vF mA	vF mA	vF mA	vF mA			
rH							vD mB								
rI								vA mD	vA mD						
rJ										vB mD	vB mD	vB mD	vB mD		
rK											vE mC	vE mC			
rL													vF mA	vF mA	vF mA
rM														vD mC	vD mC

Os períodos temporais atribuídos a cada viatura e a cada motorista são mostrados na Tabela 5. Todos os motoristas foram afetados a pelo menos uma viatura e uma requisição. A viatura (vC) não foi atribuída a nenhuma requisição.

Tabela 5 – Quantidade e distribuição de motoristas afetos

Viatura	Tempos	Motorista	Tempos
vA	4	mA	11
vB	6	mB	4
vC	0	mC	7
vD	6	mD	10
vE	5		
vF	9		

A partir dos pressupostos inicialmente definidos para a definição do problema, o modelo foi capaz de encontrar as soluções ótimas para as situações apresentadas. O *software* AMPL permitiu a construção do modelo através de uma linguagem algébrica. O solucionador CPLEX incorporado no AMPL demonstrou ser eficaz na resolução dos problemas.

Este modelo permite representar o problema de afetação de motoristas e viaturas a requisições, mas considera um conjunto alargado de pressupostos que acabam por afastar o modelo do problema real que se pretende tratar. Além disso, a inclusão explícita da dimensão temporal nas variáveis de decisão e restrições do modelo faz aumentar muito a dimensão do problema e a dificuldade da sua resolução, tornando-se impraticável para instâncias de grande dimensão.

Assim, como consequência dos resultados computacionais obtidos através deste primeiro modelo, e tendo em conta as limitações impostas pelos pressupostos assumidos, surgiu a necessidade de modelar o problema de uma forma diferente. Foi então desenvolvido um modelo que acaba por ser uma extensão do problema de afetação generalizada.

Este novo modelo considera a dimensão temporal presente no problema, mas representa-a de forma implícita, através de um adequado tratamento e representação dos dados do problema. Deste forma, deixa de ser necessário considerar de forma explícita o índice t nas variáveis de decisão e nas restrições do modelo. Trata-se, assim, de uma abordagem diferente para a modelação do problema. O Modelo 2 será apresentado no próximo capítulo.

3. MODELO 2

Conforme mencionado, o modelo apresentado no capítulo anterior não considera alguns aspectos do problema real, tais como a possibilidade de mais do que uma viatura ser afeta a uma requisição e mais do que um motorista por viatura (por exemplo, no caso de viagens mais longas). Além disso, o modelo anterior também não possibilita que requisições compatíveis sejam agrupadas, podendo partilhar recursos como se tratasse de uma única viagem.

No modelo agora proposto (Modelo 2), passa a ser possível tirar partido desta compatibilidade entre diferentes requisições para a partilha de recursos. Garante-se, desta forma, o melhor uso possível dos recursos, aproveitando a existência de requisições que poderão partilhar quer motoristas quer viaturas. Para que essa partilha de recursos possa ser feita, tem de existir compatibilidade entre as requisições tanto nos tempos de início e fim de viagem, quanto aos pares origem/destino.

A ideia base para o desenvolvimento do novo modelo assenta na construção de matrizes binárias que indicam a simultaneidade no tempo de realização das viagens a que dizem respeito as requisições (duas requisições cujas viagens tenham algum período temporal em comum não poderão utilizar as mesmas viaturas e motoristas) e, além disso, possibilite o agrupamento de requisições tendo em consideração destinos (e/ou rotas) e tempos de saída e chegada compatíveis. Assim, mesmo que o modelo considere que cada requisição corresponde a uma única viagem de ida e volta, a viatura poderá estar a atender a mais do que uma requisição. Essa compatibilização prévia permitirá, também, que em viagens muito longas possa haver mais do que um motorista afeto à viagem, a fim de cumprir com a legislação vigente. Neste novo modelo considera-se também a possibilidade de mais do que uma viatura poder ser afeta à mesma viagem (tendo em vista a capacidade das mesmas), se tal se mostrar vantajoso do ponto de vista da redução dos custos, ou caso haja indisponibilidade das viaturas de maior capacidade.

Neste modelo, as requisições de viagens continuam a ser o ponto central. Cada requisição exigirá a afetação simultânea de viaturas e motoristas. Para cada requisição é necessário afetar viaturas garantindo que a capacidade total (número de assentos disponíveis) seja maior ou igual ao número total de passageiros. O número de motoristas exigidos por cada requisição dependerá do número de viaturas afetas, bem como das características da

própria requisição. Assim, os motoristas não são afetados diretamente às viaturas, mas sim às requisições, dependendo do número de viaturas atribuídas simultaneamente a cada requisição e do número de motoristas necessários por viatura para essa requisição.

Os períodos temporais e as origens/destinos de viagem não precisam de ser explicitamente representados no modelo. Na realidade, existem apenas duas situações em que duas requisições diferentes podem estar associadas à mesma viatura e ao mesmo motorista. Uma situação verifica-se quando as requisições são compatíveis. Neste caso, uma viatura que seja simultaneamente associada a duas ou mais requisições compatíveis poderá ser partilhada entre estas requisições. A outra situação verifica-se quando as requisições correspondem a viagens cujos períodos temporais de realização não se interseccionam. Neste caso, a afetação da mesma viatura a estas requisições não acarreta nenhum problema de incompatibilidade temporal.

Desta forma, recorre-se a uma representação dos dados que se adequa à identificação das duas situações descritas. Os dados necessários para garantir que as soluções calculadas são admissíveis no que diz respeito a estas afetações são representados em duas matrizes de elementos binários. Essas matrizes podem ser criadas automaticamente a partir das informações existentes sobre as requisições, antes da otimização. A matriz de *não-sobreposição* ($B = [b_{jj'}]$) indica, para cada par de requisições jj' , se não têm nenhum período temporal em comum ($b_{jj'}=1$) ou, pelo contrário, se existe interseção entre os intervalos temporais em que as respetivas viagens têm lugar ($b_{jj'}=0$). A outra matriz é a *matriz de compatibilidade* ($A = [a_{jj'}]$) e indica se duas requisições são compatíveis ($a_{jj'}=1$), ou não ($a_{jj'}=0$). Se duas requisições são compatíveis, então elas podem partilhar recursos (viaturas e motoristas). Se as requisições não forem compatíveis, então a mesma viatura/motorista só pode ser afeta simultaneamente a estas requisições se elas ocorrerem em diferentes períodos temporais, ou seja, se não se sobrepuserem de acordo com a matriz de *não-sobreposição*.

Para simplificar as restrições do modelo, assume-se que as viagens compatíveis podem ser sempre ordenadas por ordem crescente de custo de viagem e assume-se que esta ordenação é coerente quer se considerem custos por viatura, quer se considerem custos por motorista ou mesmo o número de motoristas necessários para cada requisição. Esta suposição não implica perda de generalidade porque duas requisições apenas são

compatíveis se as viagens correspondem à mesma rota ou uma das viagens é uma sub-rota da outra. Uma vez que os custos associados à afetação de motoristas e viaturas estão relacionados, principalmente, com a distância e o tempo de viagem, é realista supor-se que a mesma ordem se aplica aos custos da viatura e aos custos do motorista, e até mesmo ao número de motoristas exigidos por cada requisição. Deve notar-se que os custos fixos, tais como o salário base dos motoristas, não são considerados porque são independentes das requisições e das viagens efetuadas, não afetando a solução ótima do problema. Assim, se duas requisições j e j' , com $j < j'$, são compatíveis, então $C_{ij} \leq C_{ij'}$, $D_{mj} \leq D_{mj'}$ e $n_j \leq n_{j'}$, em que, para a requisição j , C_{ij} refere-se ao custo da viatura i , D_{mj} refere-se ao custo do motorista m e n_j é o número de motoristas necessários.

Os parâmetros do modelo e as variáveis de decisão são agora detalhados. Considere-se a seguinte notação (a mesma que foi definida para o Modelo 1 nos parâmetros comuns aos dois modelos):

$i = 1, \dots, V$ é o índice que representa as viaturas, sendo V o número total de viaturas existentes.

$j = 1, \dots, J$ é o índice que representa as requisições de viagem, sendo J o número total de requisições existentes.

$m = 1, \dots, M$ é o índice que representa os motoristas, sendo M o número total de motoristas existentes.

C_{ij} = custo de afetar a viatura i a requisição j , $\forall i, j$

D_{mj} = custo de afetar o motorista m a requisição j , $\forall m, j$

P_j = número de passageiros da requisição j , $\forall j$

Q_i = capacidade (em número de assentos disponíveis) da viatura i , $\forall i$

n_j = número de motoristas necessários para cada viatura alocada à requisição j , $\forall j$

Matriz de compatibilidade: $A = [a_{jj'}]$, $\forall j, j': j < j'$

$a_{jj'} = \begin{cases} 1, & \text{se as requisições } j \text{ e } j' \text{ são compatíveis (i.e., elas podem partilhar recursos)} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Matriz de não-sobreposição: $B = [b_{jj'}], \forall j, j': j < j'$

$$b_{jj'} = \begin{cases} 1, & \text{se não há nenhum período de tempo em comum} \\ & \text{para as requisições } j \text{ e } j' \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Deve notar-se que, por definição, $a_{jj'} + b_{jj'} \leq 1, \forall j, j'$.

As variáveis de decisão consideram as afetações de viaturas e motoristas às requisições.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a viatura } i \text{ está afeta à requisição } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i, j$$

$$z_{ijj'} = \begin{cases} 1, & \text{se as requisições } j \text{ e } j' \text{ partilham a viatura } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i, j, j': j < j'$$

$$z'_{jj'} = \begin{cases} 1, & \text{se as requisições } j \text{ e } j' \text{ partilham alguma viatura} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall j, j': j < j'$$

$$X'_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a viatura } i \text{ está afeta à requisição } j \\ & \text{e às requisições compatíveis com } j \\ & \text{partilhando recursos com } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i, j$$

$$Y'_{mj} = \begin{cases} 1, & \text{se o motorista } m \text{ está afeto à requisição } j \\ & \text{e às requisições compatíveis com } j \\ & \text{que se realizam utilizando a mesma viatura} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall m, j$$

A função objetivo formulada em (12) considera a minimização do custo total. Para esta função contam apenas os custos mais elevados (de viaturas e de motoristas) no caso de partilha de recursos entre viagens compatíveis, pois o custo maior certamente será o da rota mais longa. Os custos totais resultam dos custos das viaturas (primeiro termo) e dos custos dos motoristas (segundo termo). É incluída ainda uma perturbação (terceiro termo), que tem por finalidade forçar a que as variáveis $z_{ijj'}$ sejam iguais a 0 quando as requisições

j e j' , apesar de compatíveis, não partilham a viatura i . Nesta perturbação, ε é um número positivo suficientemente pequeno. Sem esta perturbação, a solução obtida poderia considerar partilhas mesmo quando não são necessárias. Se, por exemplo, duas viaturas estão afetas a duas requisições que são compatíveis, e se essas viaturas têm a capacidade necessária para transportarem, de forma independente, os passageiros de cada uma das requisições, então não será necessário partilha apesar de estas requisições cumprirem as condições que lhes permitiriam partilhar recursos. Em termos de custos, será indiferente considerar a partilha ou não. No entanto, em termos práticos, não se iriam distribuir os passageiros das duas requisições pelas duas viaturas. Esta situação pode ser evitada através da inclusão desta pequena perturbação na função objetivo, que eliminará todas as partilhas desnecessárias. Os testes computacionais permitiram concluir que a introdução desta perturbação na função objetivo contribui ainda para a diminuição do tempo computacional necessário para resolver o problema (usando o CPLEX), construindo soluções mais fáceis de interpretar.

$$\text{Min} \sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^J C_{ij} X'_{ij} + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J D_{mj} Y'_{mj} + \varepsilon \sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^J \sum_{j':j < j'} Z_{ijj'} \quad (12)$$

Apresentam-se, em seguida, as restrições do problema.

As restrições (13) garantem a coerência entre as variáveis X'_{ij} e x_{ij} : a viatura i pode ser atribuída à requisição j e às requisições compatíveis com ela que partilham a mesma viatura ($X'_{ij} = 1$) somente se a viatura i for atribuída à requisição j ($x_{ij} = 1$).

$$X'_{ij} \leq x_{ij} \quad \forall i, j \quad (13)$$

As restrições (14) e (15) asseguram a coerência entre as variáveis $Z'_{jj'}$ e $z_{ijj'}$: $Z'_{jj'}$ deve ser igual a 1 se as requisições j and j' partilharem alguma viatura, mas deve ser igual a 0 se as requisições j and j' não partilharem nenhuma viatura.

$$Z'_{jj'} \geq \frac{1}{V} \sum_{i=1}^V z_{ijj'}, \quad \forall j, j': j < j' \quad (14)$$

$$Z'_{jj'} \leq \sum_{i=1}^V z_{ijj'}, \quad \forall j, j': j < j' \quad (15)$$

Cada requisição tem de ter um número de viaturas com capacidade suficiente para garantir que todos os passageiros viajarão sem exceder a capacidade de cada viatura. Os passageiros de uma requisição podem ser distribuídos por várias viaturas e uma viatura pode transportar passageiros de diferentes requisições; ambas as situações podem ocorrer simultaneamente. As restrições (16) consideram todas estas situações.

$$\sum_{i=1}^V Q_i x_{ij} \geq P_j + \sum_{j': j < j'} P_{j'} Z'_{jj'}, \quad \forall j \quad (16)$$

As restrições (17) garantem que uma viatura só pode ser afeta a mais do que uma requisição se as requisições forem compatíveis ou não tiverem nenhum período de tempo comum (correspondendo a uma viatura que é usada em duas requisições em diferentes períodos de tempo).

$$x_{ij} + x_{ij'} \leq (a_{jj'} + b_{jj'}) + 1, \quad \forall i, j, j': j < j' \quad (17)$$

As restrições (18) garantem a afetação de um número suficiente de motoristas a cada requisição. O número de motoristas a afetar a uma requisição depende do número de motoristas por viatura exigido por esta requisição e do número de viaturas a afetar à requisição. Se requisições compatíveis partilharem viaturas, então é considerado o número de motoristas exigidos pela requisição mais exigente (a de mais longo curso).

$$\sum_{m=1}^M Y'_{mj} \geq n_j \sum_{i=1}^V X'_{ij}, \quad \forall j \quad (18)$$

Dois requisições não podem partilhar uma viatura se ocorrerem em períodos de tempo com sobreposição ou não forem compatíveis. As restrições (19) modelam esta condição.

$$z_{ijj'} \leq (1 - b_{jj'})a_{jj'} \frac{x_{ij} + x_{ij'}}{2}, \quad \forall i, j, j': j < j' \quad (19)$$

As restrições (20) obrigam a que $z_{ijj'} = 1$ se duas requisições são compatíveis e usam a mesma viatura, ou seja, impõem a partilha dessa viatura.

$$z_{ijj'} \geq a_{jj'} + x_{ij} + x_{ij'} - 2, \quad \forall i, j, j': j < j' \quad (20)$$

As restrições (21) asseguram que um determinado motorista só pode estar afeto a duas requisições se elas partilharem a mesma viatura (porque são compatíveis) ou ocorrerem em intervalos de tempo não sobrepostos.

$$Y'_{mj} + Y'_{mj'} \leq \sum_{i=1}^V z_{ijj'} + b_{jj'} + 1, \quad \forall m, j, j': j < j' \quad (21)$$

Se uma determinada viatura é usada por apenas uma requisição, então o seu custo será considerado na função objetivo: no entanto, se a viatura é partilhada por diversas requisições compatíveis, então somente o custo mais elevado deve ser incluído. Portanto, se $\sum_{j': j < j'} z_{ijj'} = 0$ para um dado j ou seja, não há requisições que partilham a viatura i com a requisição j , então os custos individuais de j devem ser considerados. Caso contrário, os custos associados com a requisição mais dispendiosa serão considerados e esta requisição é a que tiver o maior índice j entre as requisições que partilham a viatura i (de acordo com o pressuposto de que as requisições são ordenadas por ordem crescente de custos e há coerência no crescimento dos custos C_{ij} e D_{mj}). Assim, a última requisição j de viagens que são agrupadas é a que corresponde à viagem mais longa, considerando os custos C_{ij} e D_{mj} para esta viagem como sendo superiores aos anteriores. Portanto, para as requisições que partilham a mesma viatura i , a variável X'_{ij} será igual a 1 somente para a requisição com a viagem mais longa, ou seja, para o último índice j . Esta condição é formulada através das restrições (22).

$$X'_{ij} \geq x_{ij} - \sum_{j': j < j'}^J z_{ijj'}, \quad \forall i, j \quad (22)$$

As restrições (23) asseguram que cada variável Y'_{mj} (que indica se o motorista m está afeto à requisição j) só pode ser igual a 1 se j for a requisição com a viagem mais longa (entre requisições compatíveis j e j' que partilham a mesma viatura i , i.e. $z_{ijj'} = 1$) ou se não houver uma viatura a ser partilhada entre a requisição j e outras requisições.

$$Y'_{mj} \leq 2 - z_{ijj'} - Y'_{mj'} , \quad \forall i, m, j, j': j < j' \quad (23)$$

O número de variáveis deste modelo é: $V \times J$ para variáveis x_{ij} e X'_{ij} , $V \times \frac{J(J-1)}{2}$ para variáveis $z_{ijj'}$, $\frac{J(J-1)}{2}$ para variáveis $Z'_{ijj'}$ e $M \times J$ para Y'_{mj} . Assim, o número total de variáveis é $2(V \times J) + (V + 1) \times \frac{J(J-1)}{2} + M \times J$, sendo todas binárias. O número total de restrições é $2J(V + 1) + (2 + 3V + M + V \times M) \times \frac{J(J-1)}{2}$.

Apesar de o modelo ter um elevado número de variáveis e restrições, o CPLEX consegue reduzir de forma significativa este número na fase de pré-resolução.

3.1. Exemplo ilustrativo

Com a finalidade de se verificar se o Modelo 2 é capaz de caracterizar de forma correta o problema, considerando as alterações no modelo, foram realizados testes com instâncias do problema de pequena dimensão.

De forma semelhante ao que ocorreu com o primeiro modelo, foi utilizado o AMPL e os problemas foram otimizados com o software solucionador CPLEX, incorporado no AMPL.

Para todos os casos o Modelo 2 foi capaz de encontrar uma solução ótima em conformidade com o problema que se pretendia formular.

Nas Tabelas 6, 7 e 8 são apresentados os dados de um problema de pequena dimensão (Exemplo 3) com a finalidade de ilustrar as soluções obtidas pelo modelo desenvolvido.

Tabela 6 - Dados do Exemplo 3 (parte 1)

Viaturas (i)												
vA	vB	vC	vD	vE	vF							
Requisições (j)												
rA	rB	rC	rD	rE	rF	rG	rH	rl	rJ	rK	rL	rM
Motoristas												
mA	mB	mC	mD									
Capacidade Viaturas (Q_i)												
vA=4	vB=16	vC=4	vD=3	vE=4	vF=16							
Passageiros por requisição (P_j)												
rA=8	rB=4	rC=10	rD=3	rE=4	rF=4	rG=15	rH=3	rl=4	rJ=8	rK=4	rL=10	rM=3
Motoristas necessários por requisição (n_j)												
rA=1	rB=1	rC=1	rD=1	rE=1	rF=1	rG=1	rH=1	rl=1	rJ=1	rK=2	rL=2	rM=2

Tabela 7 - Dados do Exemplo 3 (parte 2)

Custo viatura (C_{ij})													
	rA	rB	rC	rD	rE	rF	rG	rH	rl	rJ	rK	rL	rM
vA	150	150	150	150	150	250	250	250	250	350	350	350	350
vB	300	300	300	300	300	500	500	500	500	620	620	620	620
vC	180	180	180	180	180	280	280	280	280	380	380	380	380
vD	100	100	100	100	100	200	200	200	200	300	300	300	300
vE	150	150	150	150	150	250	250	250	250	350	350	350	350
vF	300	300	300	300	300	500	500	500	500	620	620	620	620
Custo motorista (D_{mj})													
	rA	rB	rC	rD	rE	rF	rG	rH	rl	rJ	rK	rL	rM
mA	105	105	105	105	105	175	175	175	175	245	245	245	245
mB	210	210	210	210	210	350	350	350	350	434	434	434	434
mC	126	126	126	126	126	196	196	196	196	266	266	266	266
mD	70	70	70	70	70	140	140	140	140	210	210	210	210

Tabela 8 - Dados do Exemplo 3 (parte 3)

Matriz de compatibilidade (a_{jj})													
	rA	rB	rC	rD	rE	rF	rG	rH	rI	rJ	rK	rL	rM
rA	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
rB	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
rC	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
rD	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
rE	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
rF	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
rG	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
rH	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
rI	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
rJ	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
rK	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
rL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
rM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Matriz de não-sobreposição (b_{jj})													
	rA	rB	rC	rD	rE	rF	rG	rH	rI	rJ	rK	rL	rM
rA	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
rB	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
rC	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
rD	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
rE	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
rF	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
rG	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
rH	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
rI	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
rJ	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
rK	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
rL	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
rM	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0

A Tabela 9 mostra a solução ótima obtida, com um custo de 5.366 u. m. O tempo de otimização foi de 0,519 segundos quando executado em um computador com processador Intel Core i5-6200U CPU @ 2.30GHZ com 8GB de RAM.

Na primeira parte da Tabela 9, a cor, estão as requisições que compartilharam recursos formando três grupos de viagens. Nesses grupos está a ser garantida a contabilização dos custos associados à requisição de maior custo sempre que existe partilha de recursos. Dessa forma, fica garantido que os custos são os que suportaram a viagem de maior distância/tempo. No primeiro grupo foi selecionada uma viatura com 16 lugares (vB) para

atender o total de 15 passageiros, sobrando um lugar vazio. Algo semelhante ocorre nos outros dois grupos. Destaca-se, também, a seleção de dois motoristas para a requisição rK, cumprindo a exigência desta requisição em termos de número de motoristas necessários. Por ser a viagem mais longa deste grupo, são os custos desta requisição que foram selecionados para entrarem na contabilização do custo total, dentro do seu grupo de partilha (rH, rJ e rK). As requisições a branco no final da Tabela 9 não partilharam recursos e foram atendidas, quer em termos de número de motoristas quer relativamente à quantidade de assentos necessários. Uma viatura não foi utilizada (vC), mas os demais recursos foram utilizados.

Tabela 9 - Resultado das afetações no Exemplo 3

Requisição			Viatura						Motorista				
			vA	vB	vC	vD	vE	vF	Q	mA	mB	mC	mD
	P	N	4	16	4	3	4	16					
rA	8	1	vB						16	mA			
rD	3	1	vB										
rE	4	1	vB										
rB	4	1							vF				
rC	10	1							vF				
rH	3	1							vF				
rJ	8	1							vF				
rK	4	2							vF				

Requisição			Viatura						Motorista				
			vA	vB	vC	vD	vE	vF	Q	mA	mB	mC	mD
	P	N	4	16	4	3	4	16					
rF	4	1	vA						4				
rG	15	1	vB						16	mB			
rI	4	1							vE	4	mC		
rL	10	2	vB						16	mA		mD	
rM	3	2	vD						3	mA		mD	

Nas próximas secções deste capítulo serão discutidos os testes realizados com uma instância real do problema, com 122 requisições, e outra de dimensão menor, com 40 requisições. Este último conjunto de dados foi também usado como o ponto de partida para a criação de um conjunto de instâncias que foram geradas aleatoriamente considerando diferentes configurações da frota de viaturas, nº total de lugares disponíveis, nº de motoristas e variação dos custos, permitindo uma melhor compreensão do comportamento deste modelo.

3.2. Estudo de caso

Tendo em conta que este trabalho foi motivado pelo reconhecimento da existência de um problema no contexto de uma organização, optou-se por aplicar o modelo matemático apresentado na secção anterior (Modelo 2) a um estudo de caso, tirando partido da possibilidade de ter acesso a dados reais. Este estudo de caso envolve a otimização de recursos internos para a realização de viagens planeadas que são solicitadas pelos funcionários de uma universidade brasileira (UFV), tal como descrito na Secção 1.1.

Foram disponibilizados pela UFV os dados de transporte referentes ao ano completo de 2013. Nesse conjunto de dados as requisições estão distribuídas em classificações relacionadas com zona de alcance da viagem da seguinte forma:

- RQT1 – Requisições para viagens no município de Viçosa – 6.418 requisições solicitadas (2013).
- RQT2 – Requisições para viagens às demais localidades – 3.346 requisições solicitadas (2013).

Neste estudo de caso foram consideradas somente as requisições do tipo RQT2. Destas solicitações foram atendidas 2.969 (as demais foram canceladas ou transferidas para o ano seguinte por solicitação dos requerentes). Entretanto, somente 1.856 requisições correspondem às viagens de caráter não-periódico (que são as que interessam para este estudo). Estas requisições foram analisadas mês a mês e os percursos, referentes a essas viagens, foram organizados de forma a se definir as rotas e sub-rotas.

Cada requisição possui uma data de partida. A hora também é definida como hora desejada de partida, pois permite alguma flexibilidade para que possa haver um ajuste manual que possibilite a partilha das viagens pela Organização. Essas datas e horas são importantes para a definição da compatibilidade e da sobreposição temporal entre as requisições. Por norma interna da UFV, as viagens só podem ser iniciadas a partir das 05:00. Como a hora de partida possui alguma flexibilidade, foi definido que requisições com hora prevista de partida até às 12:00 são classificadas como “manhã” (M) e as demais por “tarde” (T). Esta classificação permite, juntamente com a data, definir a sobreposição temporal das requisições. De forma semelhante, a classificação temporal, juntamente com as rotas e sub-rotas, permite definir a compatibilidade entre as requisições.

Para este estudo de caso, foram utilizados os dados correspondentes a um período de um mês típico de trabalho. No mês considerado, um total de 122 requisições de transporte foram atendidas e 28 viaturas com nove capacidades diferentes estavam disponíveis para este atendimento. Deve-se esclarecer que a UFV possuía, em 2013, um total de 117 viaturas de passageiros. Desse número total de viaturas, foram excluídas as viaturas não pertencentes ao *campus* sede, as que estavam em manutenção, as de atendimento exclusivo a aulas práticas de rotina e as dedicadas a setores que apenas fazem viagens locais (RQT1). Desta forma, apenas 28 viaturas estavam disponíveis e foram destacadas para atendimento exclusivo de viagens longas com caráter não-periódico. De forma semelhante, os motoristas foram contabilizados considerando uma média de disponibilidade de 24 motoristas para o tipo de viagem selecionada para o estudo. Estes motoristas foram separados em dois grupos, tendo em conta o respetivo tipo de contrato de trabalho, pois o tipo de contrato tem influência no custo de viagem por quilómetro associado a cada motorista.

Esses dados foram obtidos a partir de informações sobre viagens com o mesmo ponto de partida, destinos num raio até 600 quilómetros da origem, e regresso ao ponto de origem. As viagens têm uma distância média (ida e volta) de cerca de 440 quilómetros e variam de 97 a 1067 quilómetros. As requisições de viagem, representadas por $\{r_1, \dots, r_{122}\}$, consideram um número diferente de passageiros (P) que varia entre 1 e 52. O número de motoristas (N) exigidos por viatura pode ser 1 ou 2, de acordo com a legislação vigente, que considera tanto a distância como a duração de cada viagem. A frota de 28 viaturas (representada por $\{v_1, \dots, v_{28}\}$) inclui todas as viaturas que estavam disponíveis neste período. Estas viaturas têm características diferentes, tais como o custo por quilómetro e capacidade, em número máximo de assentos para passageiros (Q), que varia entre 3 e 46, conforme se apresenta na Tabela 10. Os 24 motoristas são representados por $\{m_1, \dots, m_{24}\}$.

Com base nas características conhecidas das viagens, nomeadamente dia, hora e destino, foram criadas as duas matrizes de compatibilidade e não-sobreposição (conforme explicado na Secção 3).

Tabela 10 - Capacidade das viaturas na instância A

Viatura	v01	v02	v03	v04	v05	v06	v07	v08	v09	v10	v11	v12	v13	v14
Q	26	26	26	42	42	46	4	4	4	4	4	4	16	16

Viatura	v15	v16	v17	v18	v19	v20	v21	v22	v23	v24	v25	v26	v27	v28
Q	16	3	18	19	20	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Os dados completos deste estudo de caso – que será referido como *instância A* – estão disponíveis no material suplementar de Monnerat et al. (2019).

O problema da instância A possui 189.224 variáveis, 4.867.408 restrições e foi resolvido usando o *solver* CPLEX (versão 12.7) num computador Intel Xeon Silver 4116, 2.1 GHz, processador 12-core, 128 GB de RAM. O CPLEX foi capaz de encontrar a solução ótima em 852,54 segundos. A Tabela 11 apresenta informação resumida acerca dessa solução.

Tabela 11 - Resumo da solução obtida para a instância A

		%
Valor da função objetivo (Custo Total)	43.309,92	
Total de requisições	122	
Total de passageiros	837	
Total de afetações de viaturas a requisições	97	
Total de motoristas afetos a requisições	107	
Total de assentos disponíveis nas viaturas usadas	980	
% assentos vazios nas viaturas usadas		14,59
Nº de requisições que partilham recursos	91	74,59
Nº de requisições que não partilham recursos	31	25,41
Passageiros nas requisições que partilham recursos	513	61,29
Passageiros nas requisições que não partilham recursos	324	38,71
Nº de viaturas afetas às requisições que partilham recursos	52	53,61
Viaturas afetas às requisições que não partilham recursos	45	46,39
Nº de motoristas afetos às requisições que partilham recursos	57	53,27
Nº de motoristas afetos às requisições que não partilham recursos	50	46,73
% Assentos vazios em viaturas de viagens partilhadas		8,23
% Assentos vazios em viaturas de viagens não partilhadas		23,04

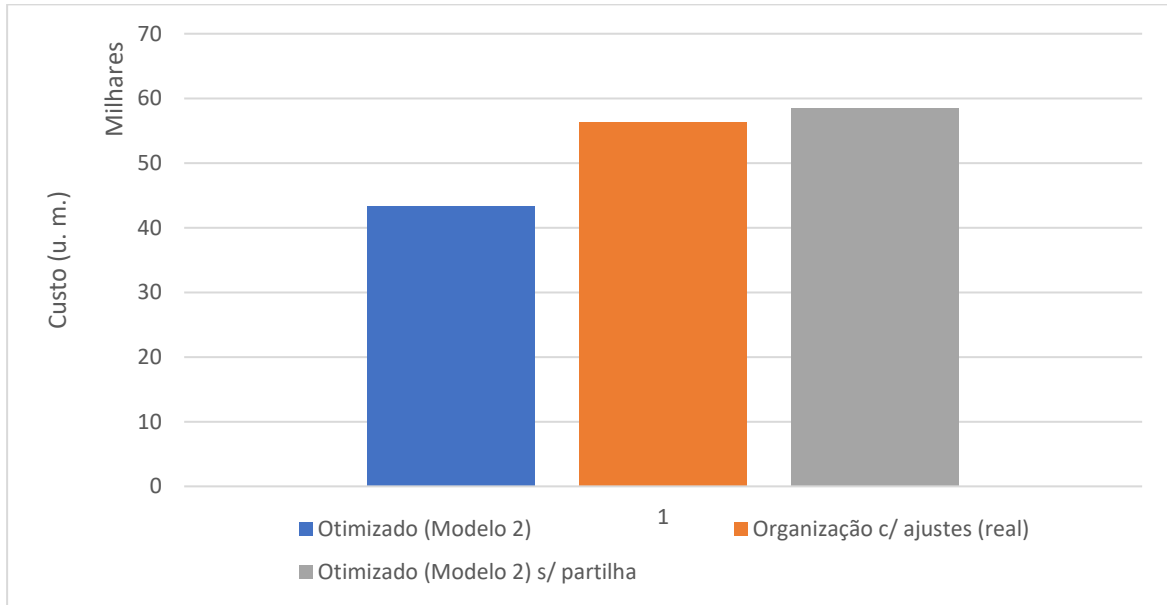
Foi possível garantir o cumprimento de todas as requisições solicitadas. O modelo permitiu que os passageiros de uma determinada requisição fossem distribuídos por mais do que uma viatura, mesmo nos casos em que as viaturas são compartilhadas. Como pode ser observado na Tabela 11, a utilização de viaturas compartilhadas revela-se uma opção vantajosa. Existe um grande número de viagens a partilhar viaturas, o que contribui para uma redução de custos. Apenas 31 das 122 requisições de viagem não partilham nenhuma viatura.

Um total de 91 requisições de viagem partilha viaturas e motoristas em diferentes proporções. A partilha de viaturas também permite aumentar o nível de ocupação dos assentos nas viaturas utilizadas: as viaturas compartilhadas usam 91,77% da sua capacidade total, enquanto que nas viaturas não compartilhadas este número é de apenas 76,96%.

Para verificar qual o impacto de se considerar explicitamente a possibilidade de partilha de recursos em termos do custo total obtido, este mesmo modelo foi aplicado ao mesmo conjunto de dados, impedindo, no entanto, a existência de partilha de recursos. Isso é conseguido alterando a matriz de compatibilidade entre requisições ($a_{jj'} = 0, \forall j, j'$).

A solução ótima encontrada pelo *solver* para o Modelo 2 com este conjunto de dados foi, assim, comparada com duas outras soluções: a solução ótima encontrada para o mesmo problema, utilizando o mesmo modelo, mas sem a possibilidade de partilha de viaturas e motoristas e as afetações das viaturas e dos motoristas feitas pela instituição após ajustes manuais. A comparação entre estas soluções, em termos de custo, é mostrada na Figura 1. A primeira coluna desta figura mostra o custo total da solução ótima encontrada com o Modelo 2. A segunda coluna mostra o custo total da solução implementada pela organização (sem otimização, mas com ajustes manuais). A terceira coluna mostra o custo total de otimização com o Modelo 2, mas sem que seja permitida a partilha de viaturas nem motoristas. É interessante notar que a solução implementada pela instituição é melhor do que aquela encontrada com o modelo de otimização que não permite a partilha de recursos. Isso pode ser explicado pelo fato de os ajustes manuais recorrerem à partilha de viagens em algumas requisições. Neste caso, o uso do modelo de otimização proposto alcançaria uma redução de custos de 23,18% em relação à solução implementada. Torna-se assim evidente a importância da partilha de recursos na diminuição dos custos totais associados aos recursos necessários que asseguram a realização das viagens.

Figura 1 – Comparação de diferentes soluções para o problema real (instância A) em termos do respectivo custo total



A Tabela 12 detalha parte da afetação dos recursos na solução ótima encontrada, para efeitos de ilustração das características desta solução. As requisições r35 e r38 têm um total de 3 passageiros (coluna P). Estas requisições têm viagens compatíveis, por isso é possível afetar a mesma viatura às duas requisições e isso é vantajoso em termos de custo. São selecionados dois motoristas porque a viagem mais longa (r38) requer dois motoristas (coluna N). Um exemplo de partilha um pouco mais complexo pode ser visto nas requisições r39, r40 e r41. Estas requisições são todas compatíveis, e incluem 51 passageiros no total. Todos os passageiros da requisição r41 usam a viatura v15. Como a viatura ficaria com quatro assentos vazios, um deles é usado pelo único passageiro de r40. Os três assentos restantes são usados por r39, que precisa de viaturas adicionais para acomodar todos os seus 38 passageiros. Consegue-se, desta forma, atingir 100% de ocupação em todas as viaturas utilizadas para as requisições r39, r40 e r41. Outro exemplo pode ser visto nas requisições r34, r36 e r37. Neste caso, não há partilha entre r37 e r36, uma vez que usam diferentes viaturas, mas partilham cada uma das suas viaturas com r34. No entanto, para completar o número de assentos necessários, r34 precisa de mais uma viatura.

Tabela 12 - Exemplos de requisições que partilham recursos na solução ótima encontrada para a instância A

Requisição		Viaturas						Motorista							
Principal	P	N	v08	v13	v14	v15	v16	Q	m13	m14	m15	m16	m20	m23	m24
r34	33	1	s08		s14	v15		16				m16			
r36	1	1			v14			16	m13						
r37	1	1	v08				-	4					m20		
r35	2	1					s16								
r38	1	2					v16	3		m14				m23	
r41(39)	38	1		v13	v14	s15	v16	35	m13	m14					m24
r39(40)	1	1				s15									
r40(41)	12	1				v15		16			m15				

Nota: Cada cor de sombreado representa um grupo que está a partilhar recursos. P é o número de passageiros para cada requisição; N é o número de motoristas necessários em cada requisição; as viaturas afetadas estão em negrito (v); Q é o número total de lugares nas viaturas afetadas. Adaptado de (Monnerat et al., 2019).

Na Tabela 12, manteve-se a numeração original das requisições, tal como em (Monnerat et al., 2019), que deriva da identificação das requisições nos dados originais. Para facilitar a interpretação, colocou-se entre parêntesis os índices de ordenação das requisições dentro do modelo (39, 40 e 41). Assim, no último grupo de requisições, a requisição r40 refere-se a uma viagem mais longa do que r41 e r39 e, por isso, dentro do modelo ela tem o índice 41.

De modo a verificar o comportamento das soluções encontradas pelo modelo em diferentes situações, bem como as dificuldades na sua aplicação, foi definida uma instância reduzida a partir da instância A e que serviu também de base ao desenvolvimento de um conjunto de novas instâncias com características específicas. A próxima secção apresenta este novo conjunto de instâncias.

3.3. Outras instâncias testadas

Para além do estudo de caso apresentado na secção anterior, é importante testar o comportamento do modelo em conjuntos de dados com características diferentes. Para o efeito, foi considerada uma instância de menor dimensão que serviu de base à criação de novas instâncias e que permitiu a comparação dos resultados obtidos. Esta instância, que será referida como instância B, teve como base a instância A. O número total de requisições foi reduzido para 40. A quantidade de motoristas e viaturas não foi alterada.

Esta instância do problema possui 25.820 variáveis, 612.280 restrições e foi otimizada com os mesmos recursos computacionais utilizados para a instância A. O CPLEX necessitou de 50,39 segundos de tempo computacional para a resolução do problema. Um resumo dos resultados é apresentado na Tabela 13.

Como pode ser observado, há muitas viagens a partilhar recursos (77,5%). Outra característica interessante da solução ótima é o uso eficiente dos assentos disponíveis, atingindo quase 100% no caso de viaturas partilhadas e 74% para viaturas não partilhadas. A instância B apresentou números semelhantes aos encontradas para a instância A no que diz respeito à partilha de viaturas.

Tabela 13 - Resumo da solução obtida para a instância B

		%
Valor da função objetivo (Custo Total)	16.054,40	
Total de requisições	40	
Total de passageiros	311	
Total de afetações de viaturas a requisições	35	
Total de afetação de motoristas a requisições	39	
Total de assentos disponíveis nas viaturas usadas	349	
% assentos vazios nas viaturas usadas		10,89
Nº de requisições que partilham recursos	31	77,50
Nº de requisições que não partilham recursos	9	22,50
Passageiros nas requisições que partilham recursos	227	71,38
Passageiros nas requisições que não partilham recursos	89	28,62
Viaturas afetas às requisições que partilham recursos	22	62,86
Viaturas afetas às requisições que não partilham recursos	13	37,14
Motoristas afetos às requisições que partilham recursos	23	58,97
Motoristas afetos às requisições que não partilham recursos	16	41,03
% Assentos vazios em viaturas de viagens partilhadas		2,63
% Assentos vazios em viaturas de viagens não partilhadas		26,45

Como o número de viaturas e de motoristas disponíveis na instância B permaneceu o mesmo da instância A, e o número de requisições diminuiu, o percentual de assentos vazios do total de viaturas usadas diminuiu (de 14,59% para 10,89%). Isto pode ser explicado por existir um maior conjunto de viaturas disponíveis para afetar a uma dada requisição, e ser

possível selecionar a que melhor se adequa ao número de passageiros. Esta característica também permite explicar o aumento na proporção de viaturas e motoristas afetos às requisições que partilham recursos.

Para uma melhor percepção do comportamento do modelo em diferentes situações, e da necessidade de eventuais ajustes na sua formulação, optou-se por criar instâncias com diversas características, tendo como base a instância B.

Os resultados das instâncias aqui testadas são analisados quanto ao impacto no valor da função objetivo (custo) e no tempo de execução do *solver* perante a existência de diferentes configurações da frota disponível (viaturas de pequeno, médio ou grande porte), da redução do número total de assentos, da redução do número de motoristas e da variação dos custos das viaturas e dos motoristas.

A instância B tem 40 requisições e considera todos as viaturas e motoristas do caso real (instância A), ou seja, 28 viaturas (com 376 assentos disponíveis) e 24 motoristas. A frota de viaturas inclui 16 viaturas pequenas (com 3 ou 4 assentos), 9 viaturas médias (16 a 26 assentos) e 3 viaturas grandes (dois com 42 assentos e um com 46 assentos). Em todas as instâncias geradas para esta análise, o número de requisições manteve-se constante e igual a 40.

O primeiro grupo de instâncias (caso 1 a caso 4) visou estudar o efeito da redução da capacidade total de assentos, considerando diferentes configurações da frota de viaturas, mantendo as requisições e os motoristas da instância B. Considerámos uma frota com uma capacidade total próxima de 100 assentos:

- caso 1: foram consideradas apenas viaturas pequenas;
- caso 2: foram consideradas apenas viaturas médias;
- caso 3: foram consideradas apenas viaturas de grande porte;
- caso 4: foi considerada uma frota diversificada, como na instância B, mas com menos viaturas.

As viaturas foram selecionadas aleatoriamente a partir dos dados da instância B, com reposição, e tendo em conta a respetiva categoria (pequena, média ou grande). Isto significa que é possível ter uma frota com várias viaturas idênticas resultantes de uma

seleção múltipla da mesma viatura original. O caso 3 tem um número mais elevado de assentos (172) porque somente as viaturas grandes foram consideradas e pelo menos 4 viaturas são necessárias para assegurar que o problema tenha soluções admissíveis.

O segundo grupo de instâncias (caso 5 a caso 7) visou estudar o efeito da redução do número de motoristas disponíveis, mantendo as requisições da instância B e a frota original de 28 viaturas:

- caso 5: 20 motoristas;
- caso 6: 15 motoristas;
- caso 7: 12 motoristas.

Para cada caso, os motoristas foram selecionados aleatoriamente a partir do conjunto de motoristas da instância B.

O terceiro grupo de instâncias (caso 8 a caso 12) visou estudar o efeito da alteração dos custos. Estas cinco instâncias consideram a frota original de viaturas e todos os motoristas. Para todos esses casos, os custos foram gerados aleatoriamente a partir da instância B e usando regras semelhantes: os custos individuais C_{ij} (custo de afetação de viaturas i à requisição j) e D_{mj} (custo de afetação do motorista m à requisição j) sofreram uma variação positiva ou negativa até 25% em relação ao seu valor original. Assim, cada C_{ij} foi substituído por um valor aleatório pertencente ao intervalo $[0,75C_{ij}, 1,25C_{ij}]$; uma vez que os custos de requisições compatíveis devem ser não-decrescentes, depois de serem gerados todos os C_{ij} e D_{mj} , houve necessidade de garantir valores coerentes. Assim, se a requisição j' é compatível com $j, j' > j$, então $C_{ij'} \leftarrow \max\{C_{ij}, C_{ij'}\}$ e $D_{mj} \leftarrow \max\{D_{mj}, D_{mj'}\}$.

As características que distinguem essas instâncias da instância B estão resumidas na Tabela 14. Os dados completos e as soluções calculadas estão disponíveis no material suplementar de Monnerat et al. (2019).

Tabela 14 - Características das instâncias aleatórias criadas a partir da instância B

Grupo	Caso	Características
1	caso 1	26 viaturas pequenas → 103 assentos
	caso 2	5 viaturas médias → 106 assentos
	caso 3	4 viaturas grandes → 172 assentos
	caso 4	6 viaturas: 3 pequenas, 2 médias, 1 grande → 96 assentos
2	caso 5	20 motoristas
	caso 6	15 motoristas
	caso 7	12 motoristas
3	caso 8	
	...	Variações aleatórias nos custos individuais até 25%
	caso 12	

A Tabela 15 apresenta um resumo dos resultados obtidos utilizando o CPLEX. Para facilitar a comparação, os resultados da instância B são repetidos nesta tabela. Como se pode observar, o CPLEX conseguiu obter soluções ótimas para todas as instâncias. O tempo computacional necessário para o cálculo da solução ótima foi muito variável entre as diferentes instâncias (todas com o mesmo nº de requisições: 40): o tempo variou entre menos de 1 segundo (caso 3) e quase 2 horas (caso 1).

Tabela 15 - Resultado da otimização das instâncias de teste

Grupo	Caso	Custo (u.m.)	Gap	Tempo (sec)	Assentos vazios em viaturas partilhadas (%)	Assentos vazios em viaturas não partilhadas (%)
	Instância B	16.054,40	0%	50,39	0,44	26,45
1	caso 1	24.699,45	0%	6.405,63	1,54	6,06
	caso 2	26.712,65	0%	2,45	16,28	62,16
	caso 3	56.113,90	0%	0,52	43,81	83,33
	caso 4	23.628,17	0%	3,42	9,17	37,18
2	caso 5	16.269,13	0%	43,75	2,16	26,45
	caso 6	16.269,13	0%	26,00	2,16	26,45
	caso 7	16.269,13	0%	23,00	2,16	26,45
3	caso 8	14.840,77	0%	55,01	2,45	10,47
	caso 9	14.933,50	0%	52,44	3,24	24,51
	caso 10	15.110,39	0%	51,98	3,82	25,58
	caso 11	15.316,97	0%	54,20	2,28	21,54
	caso 12	14.682,40	0%	51,34	2,58	21,93

A análise dos resultados conduziu a uma série de conclusões, que se resumiam a seguir:

- No primeiro grupo de instâncias, o caso 1 (que considera apenas viaturas pequenas) foi muito mais difícil de resolver do que os outros casos. Esta constatação está de acordo com o que seria esperado, uma vez que, considerando apenas viaturas pequenas, é necessário afetar mais viaturas e motoristas ao mesmo conjunto de requisições para garantir o número de assentos necessário, havendo muito mais combinações possíveis de afetação de recursos.
- Quanto à dificuldade de resolução do problema, estas experiências sugerem que a composição da frota tem um impacto maior no tempo computacional necessário para resolver o problema do que o número total de assentos disponíveis.
- No segundo grupo, todas as instâncias têm um comportamento semelhante, obtendo-se soluções semelhantes entre si e que são também semelhantes à solução para a instância B. Portanto, a redução do número de motoristas nessas instâncias não altera a estrutura da solução. Há algumas variações nos tempos computacionais, mas sem se conseguir estabelecer nenhum padrão.
- No terceiro grupo, no qual todos os custos foram alterados, não há diferenças substanciais nos resultados dos cinco casos, tanto no custo/estrutura da solução, como nos tempos computacionais. Portanto, os custos unitários não parecem ter muita influência na dificuldade de resolução do problema.
- No que diz respeito às taxas de ocupação em viaturas partilhadas e não partilhadas, todas as soluções para estes casos envolvem uma percentagem de assentos vazios que é menor em viaturas partilhadas por várias requisições do que em viaturas não partilhadas. Esta observação está de acordo com os resultados das instâncias A e B, confirmando uma maior eficiência no uso da capacidade de viaturas partilhadas.

Como conclusão principal, podemos indicar que estes resultados sugerem que a composição da frota é a questão que mais influencia o tempo computacional necessário para resolver o problema quando o número de requisições se mantém constante e são

testadas várias alterações na configuração da frota, no número de motoristas ou na estrutura de custos.

Apesar de os resultados destes testes terem demonstrando a capacidade do CPLEX em calcular soluções ótimas para instâncias do modelo com diferentes características, pela natureza combinatória do problema, o problema torna-se de difícil resolução para instâncias de grandes dimensões. Por essa razão, foi considerado o desenvolvimento de uma heurística para ser testada e comparada com a otimização em programação matemática em instâncias de maior dimensão. Este assunto é abordado no próximo capítulo.

3.4. Equidade na afetação de motoristas

A principal preocupação de uma instituição em relação à afetação de recursos às viagens planejadas é a minimização de custos. No entanto, existem outros aspetos identificados nas soluções que devem ser analisados e considerados na otimização, designadamente a equidade na afetação de motoristas às viagens. Com o modelo proposto, é possível que alguns motoristas realizem muito mais viagens do que outros. Isto pode ser visto na solução ótima encontrada para o conjunto de dados completo (instância A), onde o motorista com o maior número de requisições atribuídas estará conduzindo em 16 viagens, enquanto alguns motoristas não efetuam qualquer viagem. Essas preocupações motivaram a análise do problema do ponto de vista multiobjetivo, considerando, no Modelo 2, para além da minimização do custo, uma função de equidade dos motoristas. A segunda função objetivo tem por intenção minimizar o maior número de serviços que algum motorista tem de fazer.

A segunda função objetivo é uma função min-max, em que se pretende minimizar W , com $W = \max_{m=1,\dots,M} (\sum_{j=1}^J Y'_{mj})$. Recorde-se que as variáveis binárias Y'_{mj} indicam se um motorista m está afeto ou não à requisição j .

Esta função pode ser expressa em programação linear inteira através da função objetivo

(24)

$$\min W \tag{24}$$

acrescentando-se as restrições (25) ao grupo das restrições do problema.

$$W \geq \sum_{j=1}^J Y'_{mj} \quad \forall m \quad (25)$$

Assim, o modelo multiobjetivo inclui duas funções objetivo: a função custo (12) e a função de equidade dos motoristas (24); o conjunto de todas as restrições do problema é constituído pelas restrições (13)-(23), (25) e as restrições que impõem que todas as variáveis são binárias exceto W .

Para análise deste modelo, foi utilizada a instância B descrita na secção 3.3. Nesta instância, na solução ótima obtida através da aplicação do Modelo 2 e considerando apenas a minimização do custo, o motorista atribuído a mais requisições foi afeto a 6 requisições, enquanto que o motorista atribuído a menos requisições apenas é utilizado em uma requisição, o que demonstra a falta de equidade que pode existir nas soluções calculadas pelo modelo.

Para o cálculo de soluções eficientes para o modelo multiobjetivo, foram utilizadas somas pesadas das funções objetivo com pesos $\gamma_1, \gamma_2 > 0, \gamma_1 + \gamma_2 = 1$, em que γ_1 corresponde ao peso atribuído à minimização do custo e γ_2 é o peso atribuído à minimização do maior número de afetações a um motorista específico. Uma vez que as duas funções objetivo têm escalas muito diferentes, a variável W foi multiplicada por 1.000 na soma pesada para que haja normalização das duas funções. A intenção é não enviesar os pesos de modo a que estes possam traduzir, de alguma forma, a importância relativa que se atribui a cada uma das funções objetivo.

Nas experiências da utilização deste modelo (Modelo 2 com equidade) na instância B, foram considerados pesos desde $\gamma_1 = 0$ ($\gamma_2 = 1$) até $\gamma_1 = 1$ ($\gamma_2 = 0$) com uma progressão de 0,1 em 0,1, e substituindo as configurações de pesos extremas por $\gamma_1 = 0.01$ ($\gamma_2 = 0.99$) e $\gamma_1 = 0.99$ ($\gamma_2 = 0.01$), respetivamente, para garantir eficiência das soluções obtidas.

Percebeu-se que a otimização de somas pesadas das duas funções objetivo é muito mais exigente computacionalmente do que o modelo mono-objetivo (Modelo 2) de minimização

do custo. O problema admite, em geral, várias soluções ótimas alternativas para o mesmo custo com diferentes W e, por isso, intui-se que, no modelo multiobjetivo, a pesquisa na árvore de *branch-and-bound* tem de ser mais extensa para obter a solução com menor W . As experiências foram realizadas apenas com a instância B porque o CPLEX não conseguiu finalizar a otimização da instância A por questões de memória. Para os cálculos foi utilizado um computador com processador Intel Core i5-6200U CPU @ 2.30GHZ com 8GB de RAM. O tempo de execução foi limitado a 1.200 segundos, mas foram realizados também testes para algumas combinações de pesos com um limite máximo de 18.000 segundos. O *solver* continuou sem conseguir atingir a solução ótima em nenhum caso, havendo apenas redução do *gap*. Se apenas a função objetivo custo (12) for minimizada, neste computador são necessários cerca de 100 segundos para atingir a solução ótima, com um custo de 16.054,40 u. m. e $W = 6$.

Se for definido algum peso positivo para W , os 1.200 segundos são sempre consumidos e o *gap* fica na ordem dos 5%.

Percebe-se, com estes testes, que a solução anterior obtida com o Modelo 2 não é eficiente para o problema multiobjetivo, pois ao atribuir um pequeno peso a W , a solução obtida atinge o menor custo (16.054,40), mas com $W = 4$ (e *gap* igual a 5,8%). Relativamente às outras soluções obtidas, não temos garantia que elas sejam eficientes do problema multiobjetivo, uma vez que o *gap* nunca foi zero e, por isso, as soluções podem não otimizar as respectivas somas pesadas.

Estes testes mostraram que é importante a inclusão da equidade, podendo ser obtidas soluções de baixo custo e maior equidade, revelando-se estas experiências úteis para desenvolvimentos futuros de melhoramento do modelo. Além disso, vieram evidenciar mais ainda a necessidade de se dispor de ferramentas alternativas à utilização de um *solver* genérico de programação inteira. Dada a complexidade do problema, o *solver* tem dificuldades em encontrar a solução ótima de problemas com configurações ligeiramente diferentes (como aconteceu nestes testes), mesmo em instâncias médias, bem como em instâncias de maior dimensão do Modelo 2.

No próximo Capítulo será descrito o desenvolvimento de uma heurística para o problema (mono-objetivo) e feita a comparação com o CPLEX em diferentes instâncias.

4. DESENVOLVIMENTO DE HEURÍSTICA HÍBRIDA

Os resultados até agora apresentados foram obtidos através da utilização de um *solver* genérico, o CPLEX. Foi possível calcular as soluções ótimas considerando o Modelo 2, tanto para a instância A (122 requisições) como para a instância B (40 requisições). No entanto, como o problema possui uma natureza combinatória, é expectável que, para instâncias de dimensões maiores, a solução ótima não seja alcançada, situação que já foi observada na otimização de somas pesadas do problema com duas funções objetivo (secção 3.4) para a instância B. Assim, o desenvolvimento de uma meta-heurística pode revelar-se um trabalho interessante e necessário para o cálculo de soluções em instâncias de grande dimensão.

O desenvolvimento de uma meta-heurística para resolver este problema é uma tarefa altamente complexa. As meta-heurísticas baseiam-se numa representação adequada das variáveis de decisão do problema, que devem, dentro do possível, garantir à partida a admissibilidade das soluções. É possível considerar a possibilidade de soluções não admissíveis serem também representadas. Neste caso, ou se faz uso de procedimentos de reparação de soluções, que as tragam para o espaço de procura admissível, ou se penalizam estas soluções em termos do cálculo da sua aptidão tendo em conta o objetivo considerado.

Relativamente ao problema estudado neste trabalho, é muito difícil encontrar uma representação de soluções para o problema que garanta a admissibilidade, ou que permita o desenho de métodos de reparação destas soluções.

Foram realizadas algumas experiências com este propósito e as principais dificuldades encontradas estão, realmente, relacionadas com a admissibilidade das soluções. Estas dificuldades são sentidas na definição da representação das soluções, construção de soluções iniciais e, inclusivamente, na definição de operadores que não tornem inadmissíveis as soluções que resultam das combinações de solução admissíveis. A combinação de soluções (em métodos com populações de soluções) ou a alteração de uma única solução (em métodos de pesquisa de vizinhança), para a produção de novas soluções, faz com que apareçam problemas de admissibilidade, quer com a partilha de viaturas e motoristas, quer com a compatibilidade de afetação de recursos em termos de interseção dos períodos temporais de realização das viagens. Outra questão que aumenta a complexidade do desenho da meta-heurística prende-se com as restrições de capacidade

das viaturas associadas a uma restrição: deve ser assegurado que a viatura (ou conjunto de viaturas) atribuída a uma requisição (ou conjunto de requisições que partilhem os recursos) tenha capacidade suficiente para atender a requisição (ou conjunto de requisições).

Várias meta-heurísticas têm sido aplicadas ao GAP. No entanto, a generalização aqui considerada fez com que a conceção de uma meta-heurística para este problema seja muito mais difícil do que é para o GAP, principalmente devido à necessidade de afetar dois recursos diferentes, mas interdependentes.

Foram testadas diferentes representações possíveis para as soluções (nomeadamente recorrendo a matrizes binárias multidimensionais), mas em nenhum caso foi possível convergir para soluções de boa qualidade. A maior parte das soluções geradas eram, efetivamente, soluções não admissíveis.

Assim, pesadas todas as dificuldades descritas, optou-se pelo desenvolvimento de uma abordagem híbrida, habitualmente designada por *matheurística* (*matheuristic*), combinando um algoritmo genético com um solucionador de programação matemática.

Nos primeiros testes efetuados, que tiveram como objetivo concluir acerca da exequibilidade da aplicação desta metodologia, a heurística foi implementada usando o ambiente de desenvolvimento Delphi³ para Windows, recorrendo ao AMPL (através de chamada de uma aplicação externa) para resolução dos subproblemas usando o CPLEX.

Na abordagem desenvolvida, em vez de se considerar uma representação das soluções que determina, à partida, o valor de todas as variáveis de decisão, optou-se por assumir que esta representação define um subconjunto de todo o conjunto de soluções admissíveis existentes. Assim, no algoritmo genético, os cromossomas não codificam a solução completa, mas apenas definem regras na afetação de viaturas às requisições. Os cromossomas não representam explicitamente uma solução completa. Eles definem conjuntos de variáveis de decisão cujo valor está fixo à partida, e conjuntos de variáveis de decisão cujo valor será determinado aquando da resolução do subproblema que cada

³ Delphi®: Embarcadero Delphi (<https://www.embarcadero.com>) é uma ferramenta de desenvolvimento de software utilizando uma linguagem de programação baseada em *Object Pascal*.

cromossoma representa (estas variáveis serão deixadas livres na otimização, enquanto que as primeiras são fixas).

Um cromossoma s é uma matriz binária $s = [s_{ij}]$, $i = 1, \dots, V$ (número de viaturas), $j = 1, \dots, J$ (número de requisições), que representa um padrão para a obtenção de uma solução: $s_{ij} = 0$ significa que $x_{ij} = 0$, ou seja, a viatura i não pode ser afetada à requisição j e $s_{ij} = 1$ significa que x_{ij} é livre para ser 0 ou 1 (a viatura pode ou não ser afetada à requisição j). Para cada cromossoma s , o modelo de afetação generalizada (12)-(23) com x_{ij} fixado a 0 para todos os pares (i, j) tal que $s_{ij} = 0$ é resolvido usando o CPLEX. Quanto mais graus de liberdade o cromossoma tem (número de variáveis cujo valor não está fixo a 0), mais tempo será necessário para se encontrar a solução ótima. Por esse motivo, e para que seja possível controlar o tempo total de execução da *matheurística*, foi definido um tempo limite para a otimização destes subproblemas que resultam de cada um dos indivíduos existentes na população. Definir um limite de tempo significa que o CPLEX pode ou não alcançar a solução ótima para o subproblema representado pelo cromossoma.

Nesta *matheurística*, os cromossomas podem ser interpretados como representando sub-espacos de pesquisa, menores do que toda a região admissível. Como se utiliza um solucionador genérico para definição dos valores de todas as variáveis de decisão que não estão fixas, garante-se automaticamente a admissibilidade das soluções, caso uma solução seja encontrada. Se o CPLEX não conseguir encontrar uma solução admissível, dentro do limite de tempo imposto, esse indivíduo será penalizado, pela atribuição de um valor de aptidão muito baixo, o que corresponde, no presente caso, a um valor de custo muito alto.

As várias gerações do algoritmo genético farão as soluções evoluir e progredir para espaços de procura mais interessantes, onde será mais fácil o CPLEX encontrar soluções ótimas para os subproblemas e que se revelem soluções de boa qualidade para o problema inicial.

A Tabela 16 mostra um exemplo de um cromossoma para o tipo de problema em questão.

Tabela 16 - Exemplo de um cromossoma

		req.1	req.2	req.3	req.4	req.5
$s' =$	v1	1	0	0	1	1
	v2	0	0	1	0	1

v3	1	1	0	1	0
v4	0	1	1	0	0

O cromossoma s' representa um padrão em que a viatura v1 não pode ser afeta à requisição req.2 nem à requisição req.3; as requisições req.1, req.2 e req.4 não podem contar com a viatura v2; etc. Isto significa que se fixa $x_{12} = 0, x_{13} = 0, x_{21} = 0, x_{22} = 0, x_{24} = 0$, etc., na resolução do subproblema definido por este cromossoma. As variáveis x_{ij} a que corresponde um valor $s_{ij} = 1$ continuam a ser livres, podendo tomar o valor 0 ou 1.

Depois de gerar uma população inicial P de N cromossomas $P = \{s^n, n = 1, \dots, N\}$, o CPLEX resolve (com um tempo limitado) o subproblema de programação linear inteira, para cada padrão s^n . O valor da função objetivo (custo) da solução é a aptidão de s^n . Utilizam-se os operadores tradicionais de reprodução e mutação de algoritmos genéticos. O funcionamento da *matheurística* pode ser descrito, de forma simplificada, da seguinte maneira:

1. Gerar uma população inicial P com N indivíduos.
2. A partir da população P seleciona-se, por torneio binário, dois progenitores s' e s'' . Gera-se aleatoriamente $k \in \{1, \dots, V - 1\}$, por forma a determinar as componentes de cada indivíduo s' e s'' que irão ser transmitidas aos seus descendentes.
3. Geram-se dois descendentes, o' e o'' de tal forma que:

$$o' = \begin{bmatrix} s'_{ij}, i = 1, \dots, k \\ s''_{ij}, i = k + 1, \dots, V \end{bmatrix} j = 1, \dots, J$$

e

$$o'' = \begin{bmatrix} s'_{ij}, i = 1, \dots, k \\ s''_{ij}, i = k + 1, \dots, V \end{bmatrix} j = 1, \dots, J.$$

A Tabela 17 mostra um exemplo desta operação.

4. O operador de mutação é aplicado a o' e o'' com uma probabilidade P_{mut} de mudar cada gene o_{ij} (tendo sido definido $P_{mut} = 0.1/V$).

5. Repete-se 2 a 4 até se encontrar uma nova população com o mesmo número de indivíduos da população inicial, designada por O .
6. Resolvem-se os problemas de programação linear inteira definidos por cada indivíduo pertencente a O , e calculam-se as respectivas aptidões (valor da função objetivo (custo) com penalização elevada para indivíduos não admissíveis).
7. O cromossoma mais apto entre todos os pertencentes a $P \cup O$ é automaticamente considerado na nova população P' . Por torneios binários, em que participam um elemento de P e um elemento de O , selecionam-se os outros $N - 1$ indivíduos que irão constituir P' . Seleciona-se o cromossoma com mais baixo custo (melhor aptidão), não sendo considerado em outras seleções.
8. A nova população P é definida por P' .
9. Repete-se 2 a 8 até ser satisfeito um critério de paragem.

Tabela 17 – Exemplo de cruzamento entre s' e s'' com linha do cruzamento $k = 1$

		req.1	req.2	req.3	req.4	req.5			req.1	req.2	req.3	req.4	req.5
$s' =$	v1	1	0	0	1	1	$s'' =$	v1	0	0	1	0	0
	v2	0	0	1	0	1		v2	1	1	0	0	1
	v3	1	1	0	1	0		v3	0	0	1	1	1
	v4	0	1	1	0	0		v4	1	0	1	0	1
$o' =$	v1	1	0	0	1	1	$o'' =$	v1	0	0	1	0	0
	v2	1	1	0	0	1		v2	0	0	1	0	1
	v3	0	0	1	1	1		v3	1	1	0	1	0
	v4	1	0	1	0	1		v4	0	1	1	0	0

Na *matheurística* considerada, o critério de paragem foi o número máximo de gerações G .

Os parâmetros principais que devem ser definidos para esta *matheurística* são: o número de indivíduos na população (N); o número máximo de gerações (G); o tempo limite dado ao CPLEX para resolução dos subproblemas definidos por cada indivíduo; o número de variáveis livres que cada cromossoma codifica na população inicial. Os três primeiros parâmetros estão diretamente vinculados ao tempo computacional: mais indivíduos, mais gerações e um maior limite de tempo para o CPLEX significam um aumento do tempo

computacional total da *matheurística*. Por isso, é importante encontrar um compromisso entre o tempo computacional permitido e a qualidade da solução.

Os graus de liberdade que o CPLEX terá no cálculo da solução, bem como o tempo computacional máximo, estão relacionados com o número de 1's e 0's permitidos em cada cromossoma. Nos casos extremos, se se definir como 1 todos os s_{ij} , então não há nenhuma redução no número de variáveis livres, e o subproblema correspondente tem a mesma dimensão que o problema original. No caso oposto, o subproblema correspondente pode ser impossível se $s_{ij} = 0$ para todos (ou muitos) i, j . Assim, foi considerada uma probabilidade predefinida $Prob_1$ de gerar o valor 1 e $1-Prob_1$ a probabilidade de gerar o valor 0, para cada gene de cada cromossoma na solução inicial. Se $Prob_1$ for um valor perto de 0, o número de 0's em cada cromossoma será elevado e o subproblema correspondente ou será impossível ou a sua resolução será rápida (porque tem apenas um número reduzido de variáveis livres). Se $Prob_1$ estiver próximo de 1, há uma maior probabilidade de que uma solução de menor custo seja obtida, mas a resolução do subproblema pode exigir um tempo computacional mais longo (provavelmente, o CPLEX usará todo o tempo permitido).

Um aumento em $Prob_1$ sem que haja um aumento no limite de tempo máximo para o CPLEX diminuirá a diversidade da população, e o algoritmo convergirá prematuramente. O tempo computacional total é fortemente impactado por um aumento no número de indivíduos ou no número de gerações.

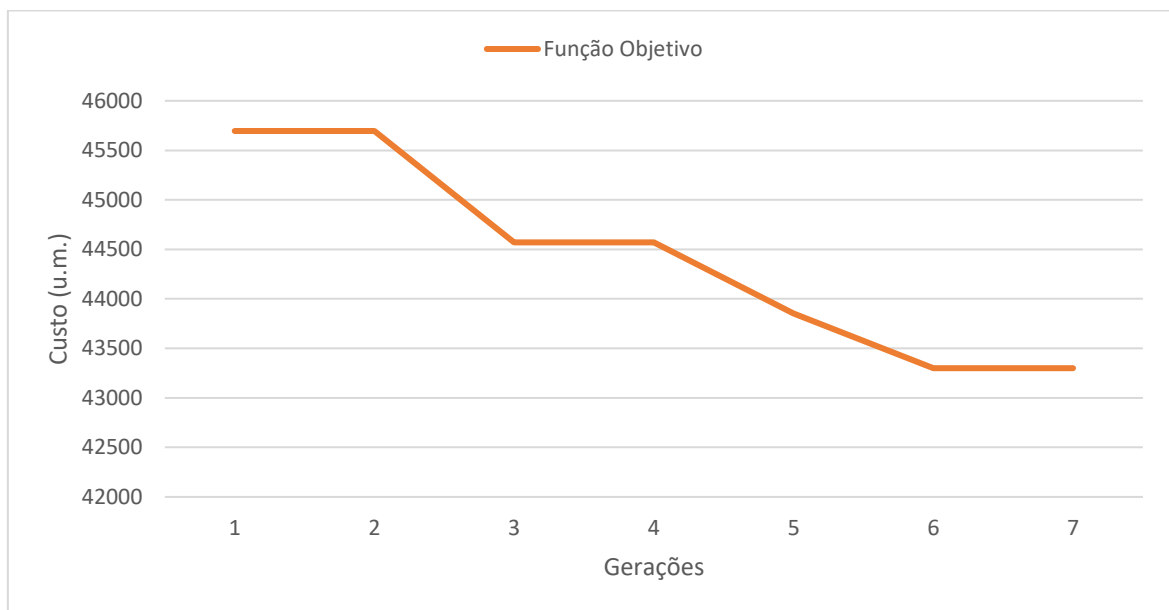
Observou-se ainda que a inclusão, na população inicial, de uma solução subótima para o problema pode melhorar o processo de busca do algoritmo genético. Esta solução subótima é calculada através de um indivíduo com todos os genes iguais a 1.

4.1. Resultados

A *matheurística* foi testada na instância A. Foram utilizadas várias combinações dos parâmetros que é necessário definir para executar a *matheurística*. Os melhores resultados, considerando o compromisso entre o tempo computacional e a qualidade da solução obtida, bem como a evolução do valor da função objetivo do melhor indivíduo de cada população, foram obtidos considerando $Prob_1$ igual a 10%, populações de 10 indivíduos, um máximo de 10 gerações e um limite máximo de tempo para CPLEX igual a 60 segundos. Como a *matheurística* tem uma componente de aleatoriedade, repetiu-se a

sua execução 10 vezes. O tempo computacional total médio foi de 1 hora e a solução ótima foi encontrada em 5 das 10 execuções. O *gap* médio para o valor da função objetivo foi de 0,24%, e o pior *gap* foi de 3,64%. A Figura 2 apresenta a evolução do valor da função objetivo ao longo das gerações, numa das execuções que permitiram calcular a solução ótima. O comportamento observado é o esperado: observa-se a capacidade do algoritmo em encontrar indivíduos que vão obtendo melhores valores para a função objetivo.

Figura 2 — Valores da função objetivo para a instância A usando a heurística



Também foi testado o aumento do número de indivíduos, diminuindo o limite de tempo para o CPLEX, mas os resultados foram piores, especialmente em termos do pior *gap* obtido. Comparando os tempos computacionais e a qualidade das soluções, pode-se afirmar que, para esta instância, a *matheurística* não apresenta vantagens quando comparada com a opção de resolver o problema recorrendo exclusivamente ao CPLEX.

Uma outra instância foi gerada aleatoriamente a partir da instância A, aumentando o número de requisições para 200 e mantendo-se inalterados todos os recursos. Esta instância apresenta-se como um maior desafio para o CPLEX, como se demonstra pelo facto de, considerando um limite de tempo de 4 horas, não ter sido possível encontrar a solução ótima. A melhor solução encontrada apresentou um *gap* de 1,14%.

A *matheurística* foi também testada nesta instância, para verificar possíveis vantagens na sua utilização em problemas de maiores dimensões. Considerou-se um limite de tempo de

90 segundos para a resolução dos problemas definidos por cada indivíduo, 20 indivíduos na população e um número total de gerações iguais a 8. Isto significa que o tempo total é semelhante ao limite de tempo imposto ao CPLEX para resolver o problema original. Para esta instância o *gap* da *matheurística* foi maior do que o do CPLEX. A média do *gap* na *matheurística* foi de 2,09% (uma vez que a solução ótima não é conhecida, o *gap* foi calculado em relação ao melhor limite dado pelo CPLEX).

Entre os 12 casos de instâncias geradas aleatoriamente e que foram testadas na Secção 3.3, o caso 1 tinha sido particularmente difícil de resolver pelo CPLEX. Este é o exemplo caracterizado por ter apenas viaturas pequenas. O CPLEX necessitou de 6.405,63 segundos (aproximadamente 106,7 minutos) para encontrar a solução ótima. A *matheurística* foi também testada neste caso, tendo sido executada 10 vezes, com um limite de tempo de 60 segundos para resolução dos subproblemas no CPLEX, 10 indivíduos na população e um número total de 10 gerações. *Prob*₁ foi mantida a 10%. A solução ótima foi sempre encontrada. O tempo médio computacional foi de 50 minutos. A solução ótima foi encontrada, em média, na segunda geração e, no pior dos casos, na terceira geração. Para este problema em particular, a *matheurística* apresenta melhores resultados do que o CPLEX.

Assim, os resultados apontam para uma vantagem na utilização do solucionador geral (CPLEX) na maioria dos casos, podendo a *matheurística* apresentar melhores resultados nas instâncias em que a frota é maioritariamente composta por viaturas pequenas.

A implementação desta *matheurística* feita em Delphi não permite tirar o maior partido de consecutivas otimizações pelo CPLEX de problemas iguais entre si a menos da fixação ou não de algumas variáveis, (uma vez que cada um dos subproblemas é resolvido de forma totalmente independente dos restantes). É possível que se consiga diminuir o tempo computacional total da *matheurística*, ou aumentar o número de gerações dentro do mesmo tempo computacional, se se partir da solução de um problema para resolver o seguinte. Esta alteração à implementação da *matheurística* foi feita para ser utilizada no Modelo 3 (Modelo 2 com *outsourcing*), mudando-se o ambiente de desenvolvimento para Matlab. O modelo e os respetivos resultados computacionais serão apresentados na secção seguinte.

5. MODELO COM *OUTSOURCING*

O Modelo 2, apresentado no Capítulo 3, considerava apenas a possibilidade de serem usados recursos internos à organização, não ponderando a possibilidade de os recursos existentes não serem suficientes para garantirem a realização de todas as viagens dentro dos períodos temporais definidos. Para eliminar esta limitação, o modelo foi adaptado por forma a incluir a possibilidade de seleção de serviço de *outsourcing*, quer em situações de falta de recursos, quer mesmo em casos em que tal opção se revele mais vantajosa (em termos de custos) do que a utilização de recursos internos. Esta alteração torna o modelo mais próximo das situações reais. Um exemplo seria haver um conjunto de requisições em um dado período temporal a que são afetas todas as viaturas de pequena capacidade, e existir ainda uma requisição com poucos passageiros, mas a única alternativa ser a de afetação de uma viatura de grande capacidade. Neste caso, e tendo em conta os custos envolvidos na afetação de uma viatura de grande capacidade, o custo de recorrer ao *outsourcing* pode ser menor. Este novo modelo desenvolvido será referido como Modelo 3.

Assumiu-se que o *outsourcing* consiste na contratação de serviços que garantem a realização das viagens previstas nas requisições, ou seja, consideram a disponibilização da(s) viatura(s) e motorista(s) necessários, com custos unitários definidos por quilómetro percorrido.

Para testar este novo modelo, houve a necessidade de gerar novas instâncias que permitissem estudar o impacto que algumas características do problema, nomeadamente sobreposição de requisições, têm nas soluções encontradas. A sobreposição de requisições pode ser um dos aspetos que mais influencia a necessidade de recorrer ao *outsourcing*, pela impossibilidade de se usarem os mesmos recursos internos em requisições que considerem tempos de realização simultâneos.

Foram consideradas três alternativas para o cálculo da solução deste modelo: a utilização da *matheurística* já descrita, a utilização do *solver* CPLEX, e ainda a utilização de uma nova abordagem baseada na decomposição do problema original.

Começa-se por apresentar o modelo desenvolvido, realçando-se as alterações relativamente ao Modelo 2 já apresentado anteriormente.

Considere-se a notação e variáveis já definidas no Modelo 2.

Para além das variáveis do Modelo 2, definem-se as seguintes variáveis:

$$O_j = \begin{cases} 1, & \text{se o serviço de } \textit{outsourcing} \text{ está afeto a requisição } j \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases} \quad \forall j$$

A função objetivo (26) considera a minimização do custo total, de forma semelhante ao já apresentado na secção 3. Neste caso, o custo total resulta dos custos das viaturas (primeiro termo), dos custos dos motoristas (segundo termo) e do custo do *outsourcing* (terceiro termo). Manteve-se a perturbação na função objetivo, para que se evitem partilhas desnecessárias, como já referido anteriormente.

$$\text{Min} \sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^J C_{ij} X'_{ij} + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J D_{mj} Y'_{mj} + \sum_{j=1}^J F_j O_j + \varepsilon \sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^J \sum_{j':j < j'} Z_{ijj'} \quad (26)$$

De todas as restrições (13) – (26) do Modelo 2, mantêm-se as restrições (13) – (15), (17) e (19) – (23), sendo alteradas as restrições (16) e (18) para (27) e (28), respetivamente, e acrescentadas as restrições (29). Apresentam-se a seguir as restrições que sofreram alteração ou foram acrescentadas, relativamente ao Modelo 2.

As restrições (27) asseguram que um número de viaturas com capacidade suficiente deve ser afeto a cada requisição, para garantir que todos os passageiros se deslocarão sem exceder a capacidade de cada viatura. Os passageiros podem ser distribuídos por várias viaturas e uma viatura pode transportar passageiros de diferentes requisições, e ambas as situações podem ocorrer simultaneamente. No entanto, apenas é preciso garantir a afetação de viaturas com um número suficiente de lugares se a realização da viagem não for garantida através de *outsourcing*.

$$\sum_{i=1}^V Q_i x_{ij} + M O_j \geq P_j + \sum_{j':j < j'} P_{j'} Z'_{jj'} \quad \forall j \quad (27)$$

A variável binária O_j será igual a 1 se o *outsourcing* for a alternativa escolhida, o que faz com que esta restrição seja redundante neste caso. Uma situação semelhante é

considerada nas restrições que dizem respeito ao número de motoristas necessários (restrições (28)). Nas restrições (27) e (28), M representa um número positivo suficientemente grande.

$$\sum_{m=1}^M Y'_{mj} \geq n_j \sum_{i=1}^V X'_{ij} - M O_j, \quad \forall j \quad (28)$$

As restrições (29) asseguram que, se o *outsourcing* é utilizado, então não há necessidade de afetação de recursos próprios.

$$x_{ij} + O_j \leq 1, \quad \forall i, j \quad (29)$$

O número de variáveis deste modelo é: $V \times J$ para variáveis x_{ij} e X'_{ij} , $V \times \frac{J(J-1)}{2}$ para variáveis $z_{ijj'}$, $\frac{J(J-1)}{2}$ para variáveis $Z'_{ijj'}$, $M \times J$ para Y'_{mj} e J para as variáveis O_j . Assim, o número total de variáveis é $\frac{1}{2}(J \times V + 3 \times V + 2 \times M + J + 1)$, sendo todas binárias. O número total de restrições é $\frac{1}{2}(J \times M \times V - M \times V + 3 \times J \times V + 3 \times V + J \times M - M + 2 \times J + 2)$. Apesar de o modelo ter um elevado número de variáveis e restrições, o CPLEX consegue reduzir de forma significativa este número na fase de pré-resolução.

5.1. Experiências computacionais

Foram geradas 40 novas instâncias divididas em dois grupos principais (grupo 1 e grupo 2). O grupo 1 possui as mesmas características da Instância A, ou seja, 122 requisições, 28 viaturas e 24 motoristas, tendo a estrutura desta como base. O grupo 2 foi criado a partir do grupo 1, tendo como única alteração a disponibilidade exclusiva de viaturas de menor capacidade (16 viaturas). A importância dessa escolha deveu-se ao facto de, como constatado nos resultados apresentados na secção 3.3, ser necessário afetar mais viaturas e motoristas caso se considerem apenas viaturas pequenas, havendo muito mais combinações possíveis de afetação e, caso haja uma maior sobreposição e pouca compatibilidade entre as requisições haverá mais oportunidades para que o *outsourcing* se apresente como vantajoso.

Dentro de cada grupo, procurou-se que o conjunto de instâncias variasse nos parâmetros de compatibilidade e de não-sobreposição, mas sempre de forma a que as suas matrizes fizessem sentido em conjunto. A geração destas instâncias teve como base a utilização de 14 destinos diferentes, e de diferentes combinações de rotas compatíveis organizadas em grupos. Todas as instâncias foram construídas considerando requisições de viagens para os mesmos destinos.

As instâncias de cada grupo (1A a 1T; 2A a 2T), foram construídas por forma a que a sobreposição entre as requisições fosse aumentando. Sendo assim, as instâncias A (do grupo 1 e do grupo 2) possuem menor sobreposição do que as restantes, e esta sobreposição vai aumentando até às instâncias T, que possuem a maior sobreposição dentro de todas as instâncias.

A compatibilidade entre requisições depende quer da compatibilidade temporal quer da compatibilidade espacial: as requisições têm de corresponder a viagens que se realizam no mesmo período temporal, e com destinos compatíveis. O aumento da sobreposição temporal que ocorre de A para T, não havendo alteração nos destinos, faz com que se aumente a possibilidade de existir compatibilidade entre requisições. Este aumento de sobreposição faz-se em quatro degraus, significando que existe uma maior diferença entre o número de requisições com sobreposições quando se passa da instância E para a F, do que da instância J para a K ou da instância O para a P. A tabela 18 resume esta informação, tendo em conta as instâncias geradas.

A construção de instâncias deste modo tem como objetivo observar se o comportamento da heurística e do CPLEX é influenciado pelos parâmetros que definem a compatibilidade entre requisições.

Os períodos temporais associados a cada requisição foram gerados aleatoriamente, existindo um distanciamento temporal entre requisições que vai diminuindo, dentro de cada grupo, da instância A para a instância T. Desta forma, consegue-se aumentar a sobreposição entre requisições, e verificar qual o efeito destas sobreposições na capacidade de partilha de recursos entre viagens, respetivos custos e necessidade de recorrer ao *outsourcing*.

Tabela 18 - Percentagem de requisições compatíveis (R_C) e de requisições com sobreposições (R_S), nas diferentes instâncias geradas

Instância	R_C	R_S
A	2,4%	6,00%
B	2,7%	6,00%
C	3,3%	5,90%
D	3,8%	9,50%
E	3,9%	9,80%
F	5,7%	13,50%
G	6,4%	16,40%
H	7,1%	17,40%
I	7,1%	16,40%
J	7,9%	21,90%
K	9,6%	22,60%
L	9,8%	24,70%
M	10,9%	28,30%
N	10,9%	30,10%
O	11,3%	32,20%
P	14,3%	37,60%
Q	14,7%	37,10%
R	16,7%	43,70%
S	19,9%	55,40%
T	22,1%	59,80%

Para geração dos dados de cada instância, foram tomadas as seguintes opções:

- A cada viatura está associado um custo por km, calculado aleatoriamente a partir de valores estimados por classe de viaturas, tendo por base os valores estimados para uma cidade como São Paulo obtidos a partir de fontes⁴ disponíveis na internet que calculam os custos variáveis com base nas tabelas dos órgãos competentes.
- O custo por km de cada motorista foi gerado aleatoriamente, tendo em conta os dados da instância base. Os motoristas foram divididos em dois grupos de custos, de acordo com o tipo de contrato que possuíam.

⁴ As tabelas estão disponíveis com os dados dos problemas.

- A capacidade de cada viatura foi calculada aleatoriamente, considerando a tipologia de viaturas definida na instância de base, com variações entre +1 ou -1 lugares. No grupo 2, apenas foram utilizadas as viaturas com menor capacidade.
- O número de passageiros a transportar em cada requisição foi também gerado aleatoriamente, considerando uma variação de +1 ou -1 passageiros, a partir dos dados da instância base.
- O número de motoristas necessários por viatura para cada requisição foi fixado de acordo com a instância base para todos os casos gerados, uma vez que este número deriva da distância e tempo total de viagem.
- As matrizes de não sobreposição foram construídas tendo em conta os períodos de realização das viagens e a compatibilidade dos respetivos destinos.
- Para geração do custo de *outsourcing* associado a cada requisição, considera-se o custo médio das viaturas de menor capacidade (\bar{c}_{vp}) mais o custo médio dos motoristas (\bar{D}_m) multiplicado pelo número de motoristas necessários para a requisição (n_j) dividido pelo número médio de passageiros das viaturas pequenas (Q_{vp}). Em seguida, multiplica-se o resultado por um número aleatório (σ), gerado no intervalo $[-0,10; +0,30]$. Este valor é multiplicado pelo número de passageiros de cada requisição (P_j). Portanto, a geração dos custos de *outsourcing* foi definida da seguinte forma:

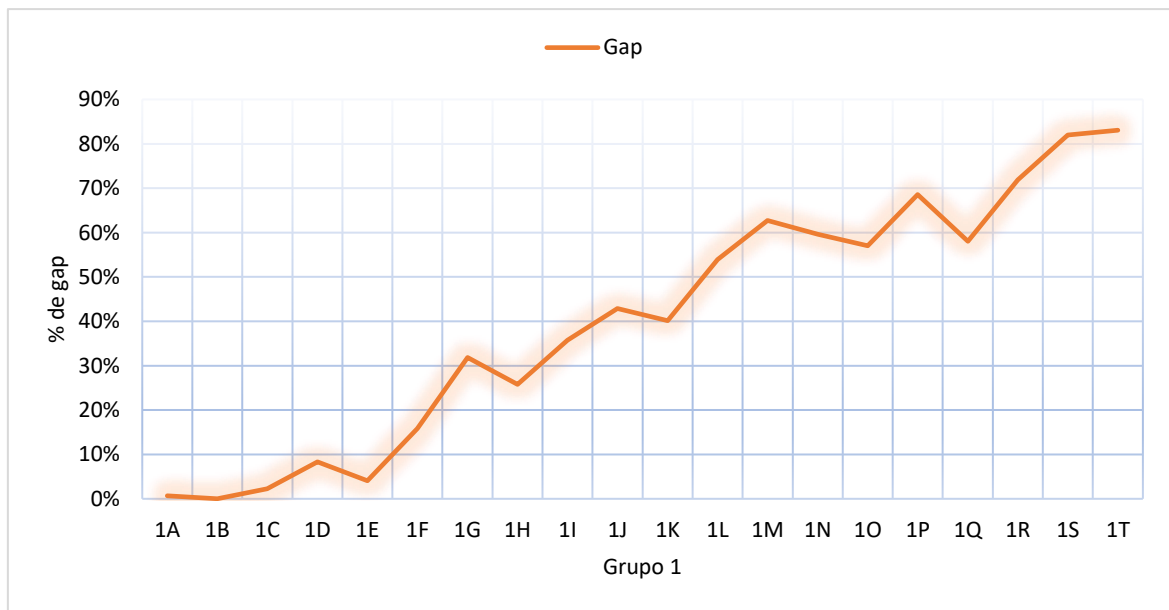
$$\left(\frac{\bar{c}_{vp} + \bar{D}_m \times n_j}{Q_{vp}} \right) \times \sigma \times P_j \quad \forall j \quad (39)$$

O CPLEX foi utilizado para encontrar soluções para todas as instâncias geradas, num computador Intel Xeon Silver 4116, 2.1 GHz, processador 12-core, 128 GB de RAM, e assumindo um tempo computacional máximo de 18000 segundos.

5.1.1. Otimização das instâncias do grupo 1

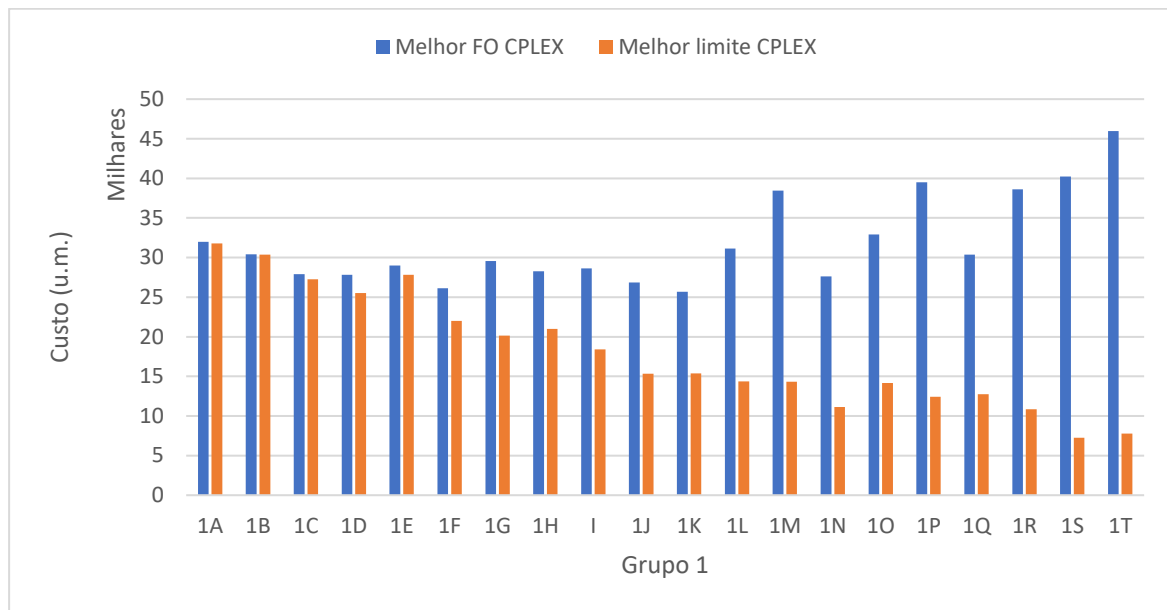
O solucionador apenas conseguiu encontrar a solução ótima para uma das 20 instâncias testadas (instância 1B). De uma análise global dos resultados, em termos de qualidade da solução encontrada, é possível concluir que o CPLEX encontra maior dificuldade na otimização à medida que a sobreposição aumenta, com o *gap* a aumentar desde 0,66% (1A) até atingir um valor ligeiramente superior a 80% (1T). O *gap*, para as instâncias do grupo 1, é mostrado na Figura 3.

Figura 3 - *Gap* para as instâncias do grupo 1



Os valores obtidos para a função objetivo apresentam uma tendência de aumento nos valores à medida que a sobreposição aumenta, e os melhores limites diminuem (Figura 4). No entanto, importa sublinhar que não será possível tirar conclusões acerca do custo mínimo associado a cada instância, uma vez que os valores de *gap* encontrados são muito elevados, não sendo possível saber a que distância estamos dos valores ótimos.

Figura 4 – Comparação do valor da FO e o melhor limite para cada instância do grupo 1



Da análise das soluções obtidas, podemos classificar as requisições em três classes (Figura 5): as que partilham recursos, as que não partilham e as que são atendidas pelo *outsourcing*. Em média, no grupo 1, houve 83,44% de requisições a partilharem recursos, variando a partilha de recursos entre 69,67% a 94,26% por instância. A percentagem de requisições que não partilharam recursos variou de 0% a 30,33% por instância, com uma média de 10,98% neste grupo. O *outsourcing* foi utilizado em um máximo de 28,69% do total de requisições, com uma média de 5,7% de utilização por instância. Com exceção das instâncias 1F e 1H, que tiveram apenas uma requisição a selecionar o *outsourcing*, a utilização deste recurso aumentou a partir da requisição 1L. Tal facto pode ser explicado pelo aumento da sobreposição esgotar ou diminuir de forma mais acentuada os recursos internos disponíveis (viaturas e motoristas). A relação entre as requisições que partilham recursos e as que não partilham manteve-se. Como o aumento da sobreposição é muito mais acentuado que o aumento da compatibilidade, em um determinado ponto (1K) as viaturas não são suficientes para atender todas as requisições e o *outsourcing* começa a ser mais vantajoso. Portanto, quando não existe possibilidade de partilha de recursos, e o número de viaturas disponíveis é limitado, pode muitas vezes ser vantajoso recorrer ao *outsourcing*, e este é menos atrativo quando essa partilha é possível.

Figura 5 – Distribuição de requisições entre instâncias do grupo 1. Comparação do número de solicitações compartilhadas, não compartilhadas e *outsourcing* entre as instâncias

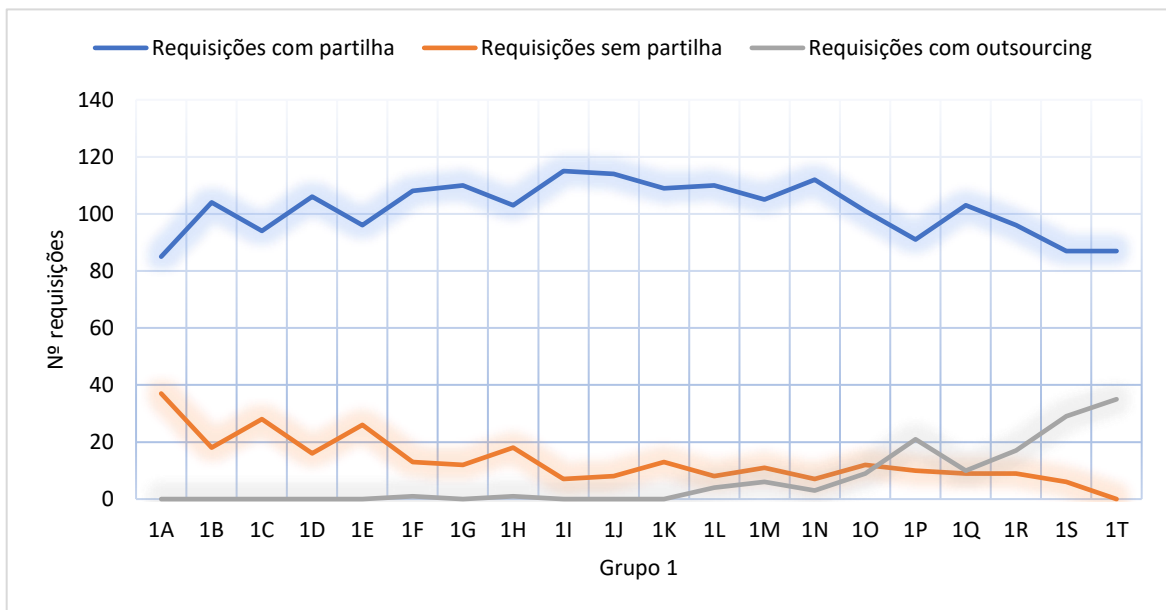
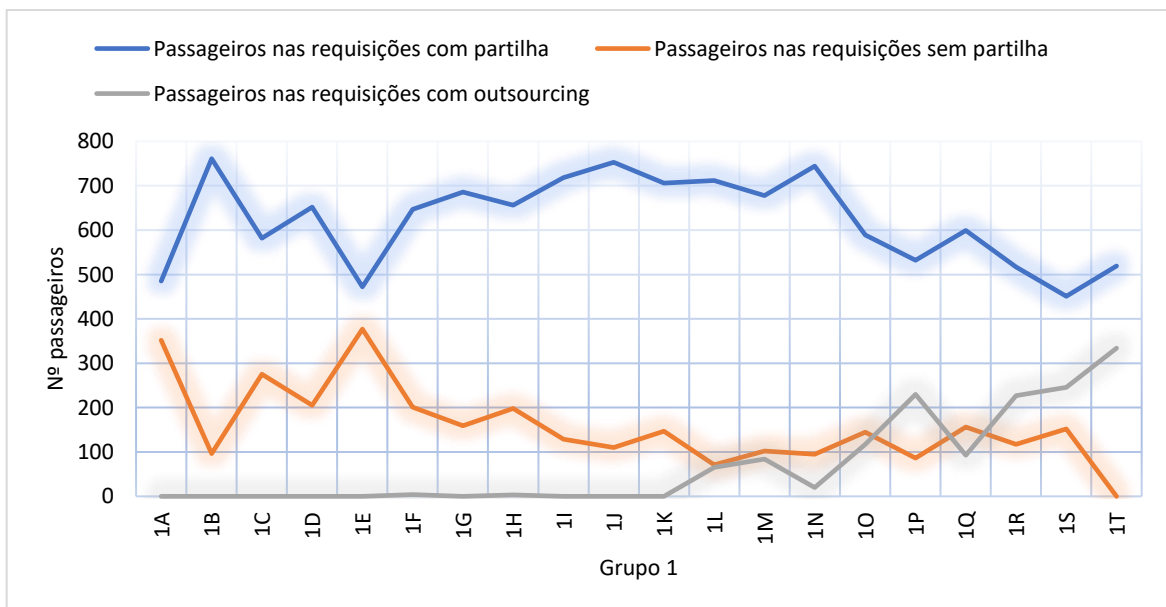


Figura 6 – Quantidade de passageiros em cada classe de requisição nas instâncias do grupo 1

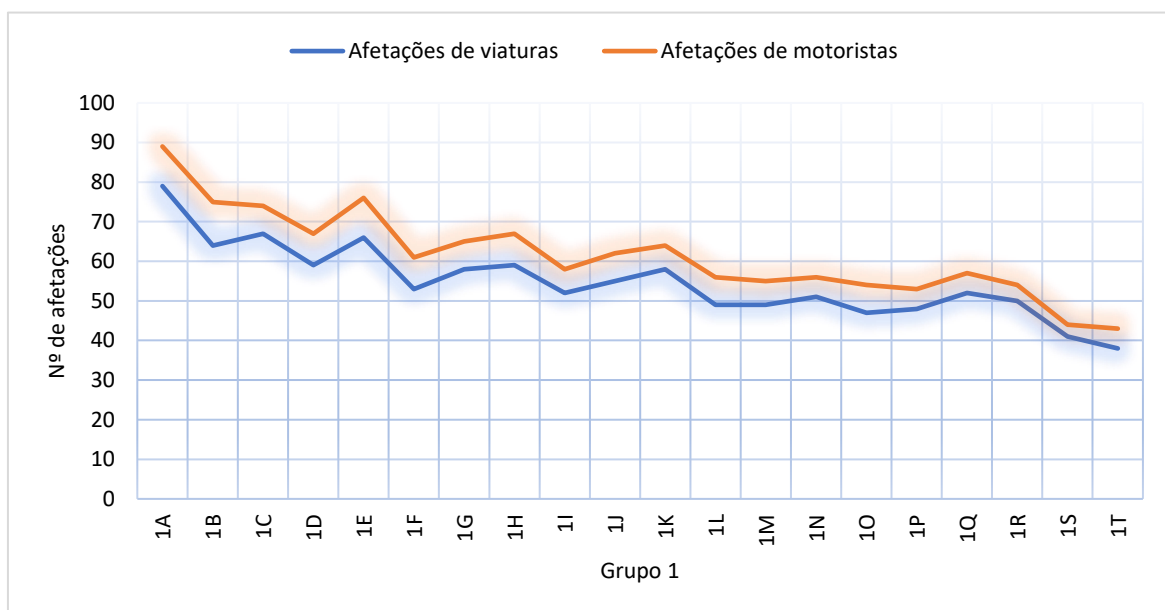


A quantidade de passageiros das requisições que não compartilharam recursos variaram de nenhum (1T onde só houve requisições com partilha e *outsourcing*) a 44,41% (1E) do total de passageiros da instância (Figura 6). A partir do momento em que o *outsourcing* se

apresenta como uma opção vantajosa, o número de passageiros em requisições garantidas através do outsourcing aproxima-se do número de passageiros em viaturas partilhadas, havendo uma redução do número de passageiros em viagens sem recursos partilhados.

O aumento da sobreposição temporal entre as requisições não garante, por si só, o aumento da possibilidade de partilha de recursos. Assim, quando esta sobreposição temporal é imposta, mas não resulta, proporcionalmente, num aumento semelhante de compatibilidade entre requisições então existe um aumento real da procura (menos viaturas podem ser usadas como recursos partilhados), o que pode levar ao aumento do recurso ao *outsourcing*. A Figura 7 mostra que o maior número de utilização de viaturas foi de 79 (instância 1A) e o menor de 38 (instância 1T). O número máximo de motoristas afetos foi obtido na instância 1A (89) e mínimo na 1T (43).

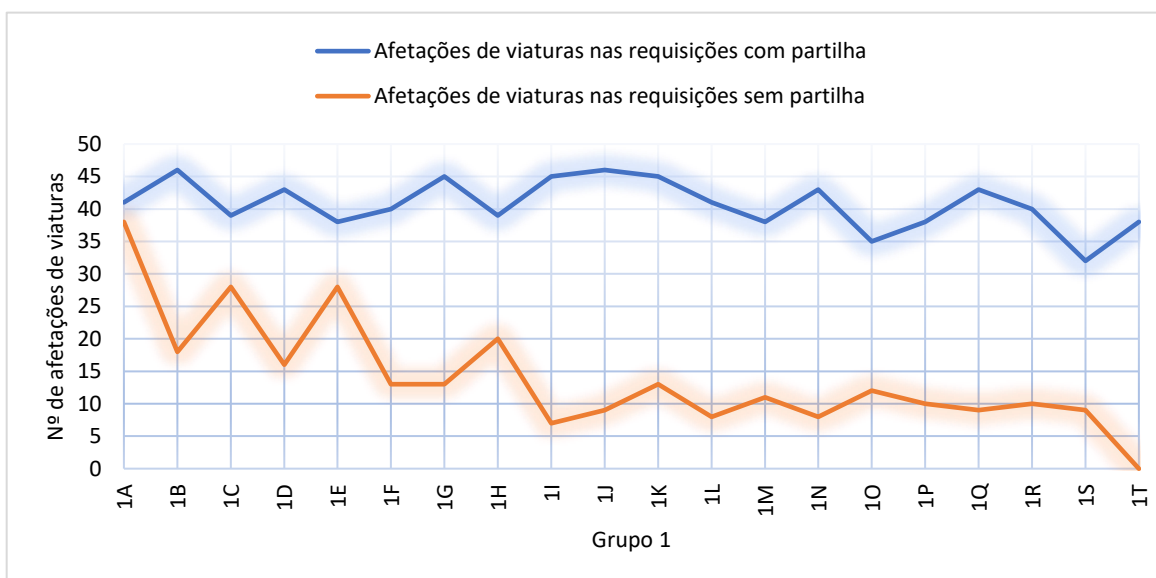
Figura 7 – Comparação das afetações de viaturas e motoristas às requisições do grupo 1



As afetações das viaturas às requisições sofreram uma pequena redução no sentido do aumento da sobreposição, sendo a redução mais acentuada nas requisições sem partilha. Na Figura 8 observa-se que, na comparação das viaturas afetas entre as requisições com e sem partilha, 100% das afetações na instância 1T ocorreram nas requisições com partilha. A menor diferença pode ser observada na instância 1A onde 48,1% das afetações foram nas requisições sem partilha. Os valores mínimos de afetações de viaturas foram

observados na instância 1C (49,37%, para instâncias que partilharam recursos) e na instância 1T (nenhuma viatura afeta a requisições sem partilha de recursos).

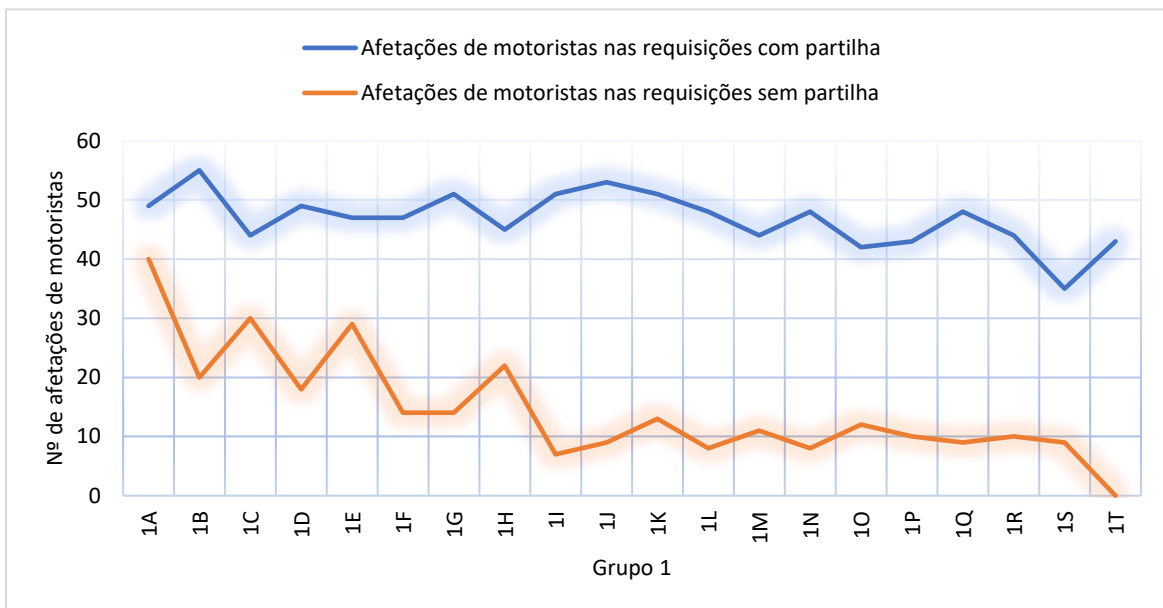
Figura 8 – Afetações de viaturas em requisições com e sem partilha de recursos nas instâncias do grupo 1



É possível observar na Figura 9 uma maior tendência de diminuição nas afetações de motoristas em requisições sem partilha com o aumento da sobreposição em comparação com as afetações nas requisições com partilha de recursos. Isso pode ser explicado pelo facto de a sobreposição exigir um maior número de recursos o que leva ao *outsourcing*. A afetação nas requisições que não partilham recursos será reduzida por serem de maior custo em comparação com as requisições que partilham recursos.

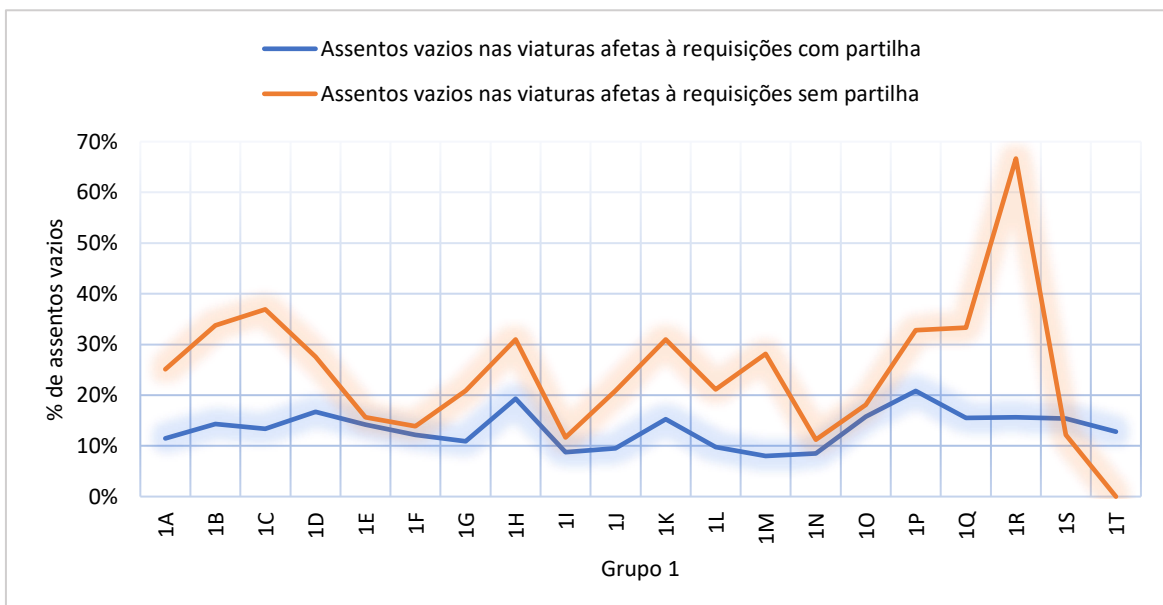
Uma das medidas que podemos usar para concluirmos acerca da utilização que está a ser feita dos recursos existentes é considerar o número de lugares não utilizados nas viaturas que são afetadas às requisições. É possível concluir que sobram mais assentos nas requisições que não partilham recursos, ou seja, a partilha de recursos permite uma maior utilização das capacidades de cada viatura. No grupo 1 apenas duas instâncias não apresentam este comportamento, as instâncias 1T e 1S. O percentual de assentos vazios nas requisições sem partilha de recursos destas duas instâncias é baixo devido ao pequeno número, ou até mesmo a ausência de afetações nestes tipos de requisições que possuem uma grande quantidade de requisições usando *outsourcing*, como mostra a Figura 10.

Figura 9 – Afetações de motoristas em requisições com e sem partilha de recursos nas instâncias do grupo 1



A maior quantidade de assentos vazios nas requisições sem partilha da instância 1R é explicada pela existência de viaturas com capacidades superiores com custos ligeiramente inferiores ao de viaturas com menor capacidade.

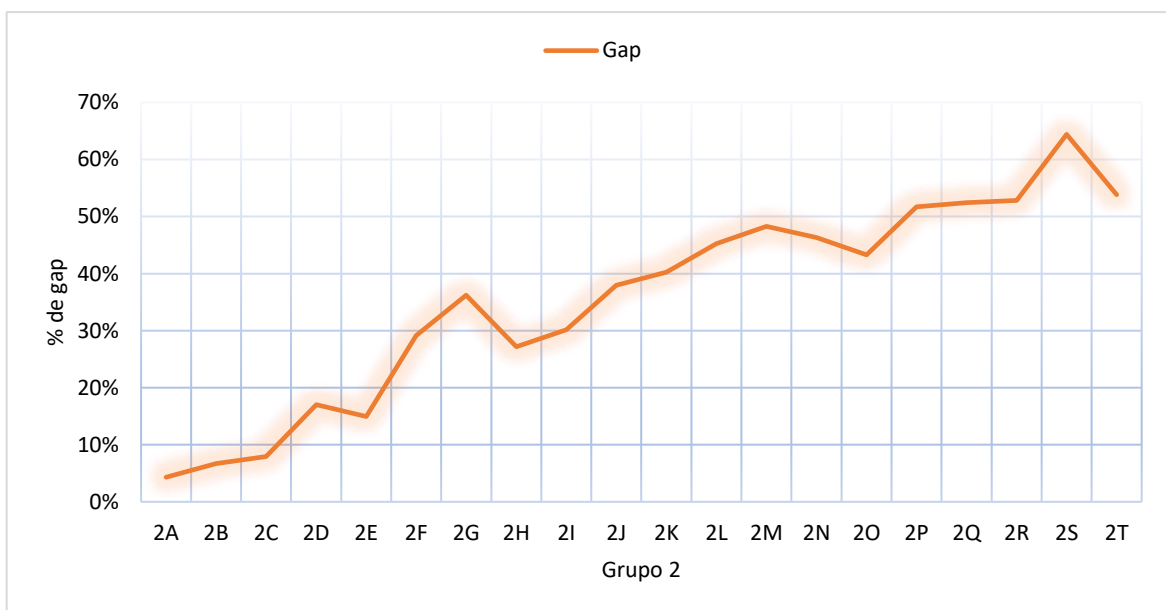
Figura 10 – Comparação da quantidade de assentos vazios nas viaturas afetas entre requisições com e sem partilhas



5.1.2. Otimização das instâncias do grupo 2

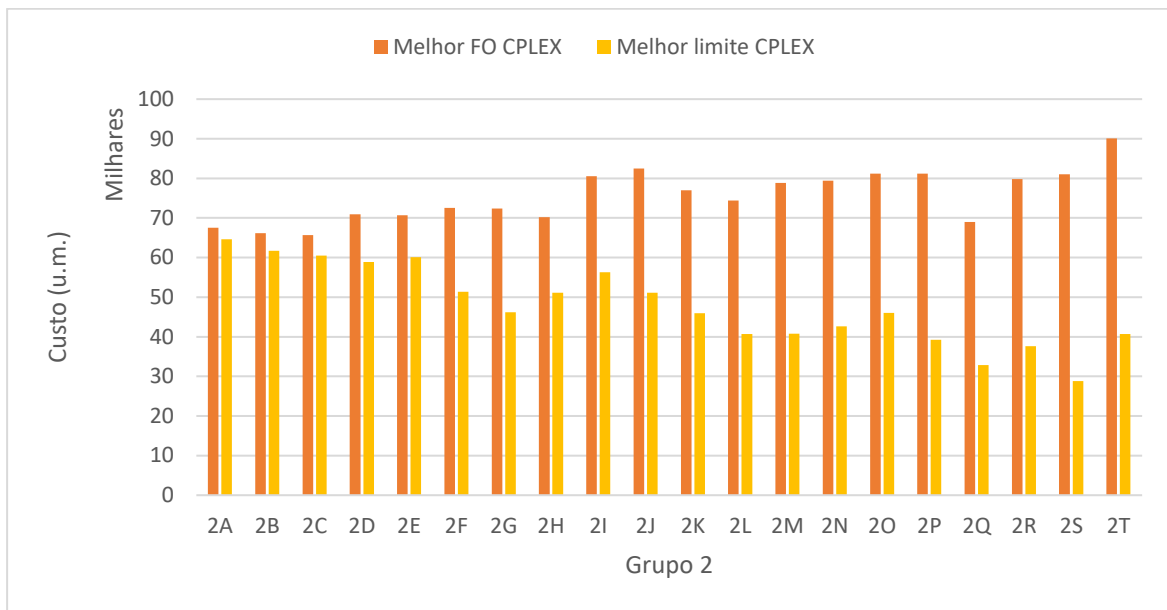
O CPLEX não conseguiu encontrar a solução ótima para nenhuma das 20 instâncias do grupo 2. O CPLEX apresenta maior dificuldade na otimização deste grupo de instâncias à medida que a sobreposição aumenta, com o *gap* a aumentar, como é mostrado na Figura 11. No entanto, observa-se que o *gap* neste grupo é significativamente menor em comparação com as instâncias homónimas do grupo 1, atingindo um valor máximo de 64,41% na instância 2S.

Figura 11 – Comparação do *gap* nas instâncias do grupo 2



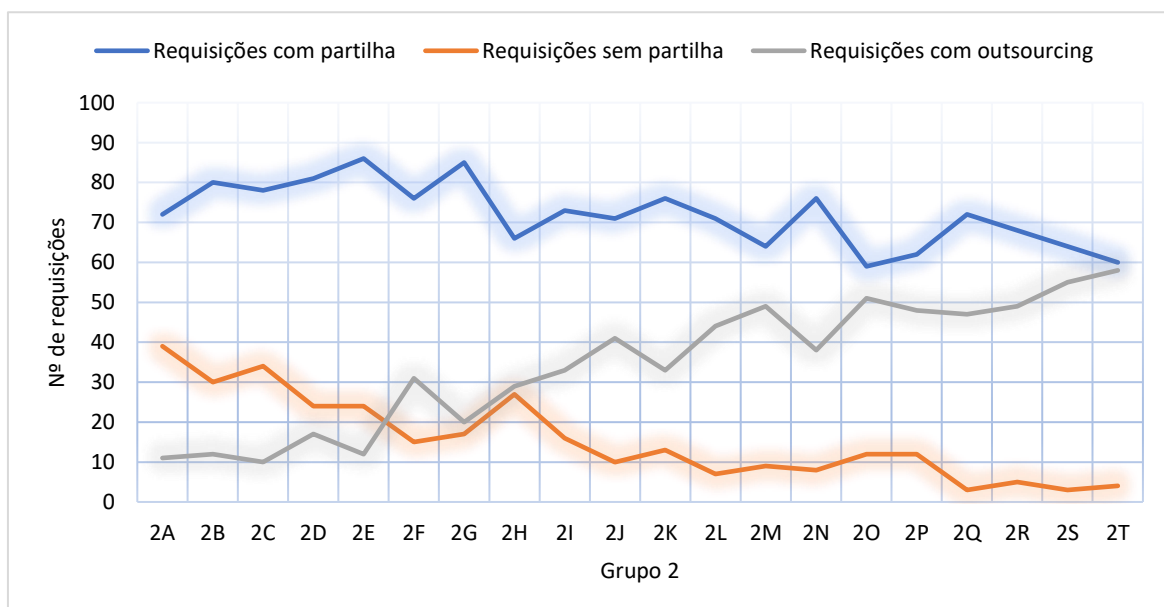
O *gap* mínimo foi encontrado na instância 2A (4,31%). O custo mais baixo verificou-se na instância 2C. O custo mais alto foi encontrado na instância 2T com o melhor valor encontrado para a função objetivo de 90.042,97 e o melhor limite igual a 40.712,68. A Figura 12 mostra os melhores valores da FO e do respetivo melhor limite conhecido para as instâncias do grupo 2.

Figura 12 - Comparação da melhor FO e o melhor *bound* para cada instância do grupo 2



Na Figura 13 observa-se que, para este grupo, o máximo de requisições com partilha de recursos foi de 70,49% (2E) e o mínimo de 48,36% (2T) do total de requisições. Na instância 2S observa-se a menor proporção das requisições que não partilharam recursos (2,46%), enquanto o maior valor foi encontrado na instância 2A (31,97%).

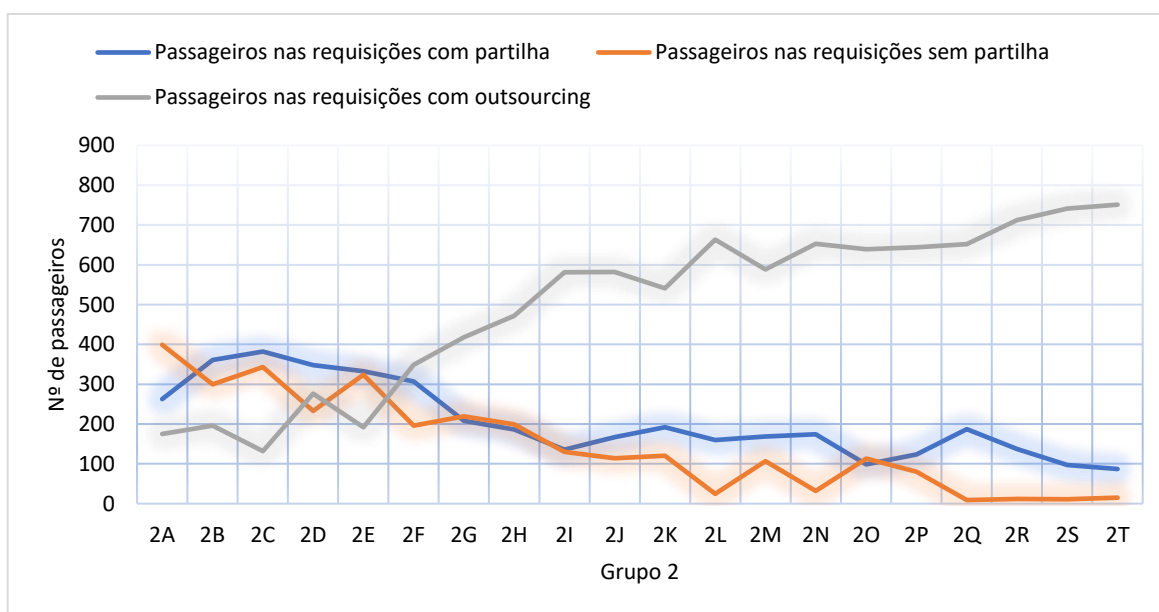
Figura 13 - Distribuição das requisições entre as instâncias do grupo 2. Comparação do número de solicitações compartilhadas, não compartilhadas e outsourcing



Como se pode observar na Figura 13, o *outsourcing* apresenta-se como uma alternativa mais frequente com o aumento da sobreposição das requisições, devido à indisponibilidade de viaturas próprias. A menor percentagem de requisições em *outsourcing* pode ser observada na instância 2C (8,20%) e a maior percentagem na instância 2T (47,54%), sendo a média de requisições em que se optou pelo *outsourcing* de 28,20%.

Como neste grupo só são consideradas 16 viaturas, sendo todas de pequena capacidade, o aumento da sobreposição de A para T faz com que *outsourcing* seja de facto selecionado. Com a seleção do *outsourcing* a partir da instância 2F, observa-se um elevado número de passageiros associados a este recurso externo, como se vê na Figura 14.

Figura 14 - Quantidade de passageiros em cada classe de requisição nas instâncias do grupo 2

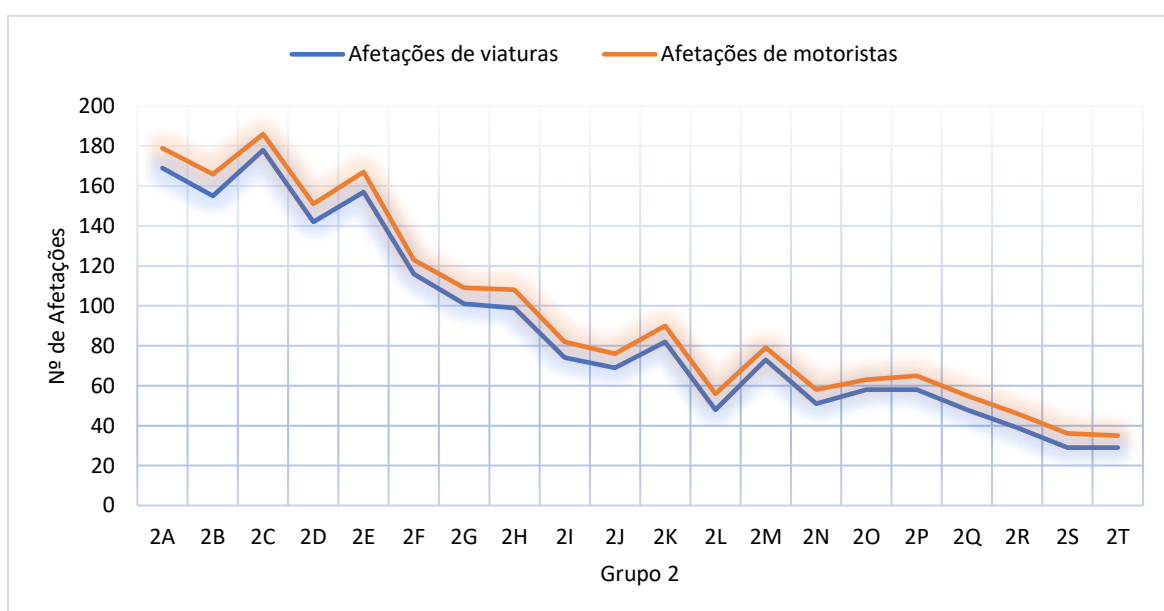


É possível verificar na análise das afetações que o *outsourcing* foi selecionado por requisições com grande número de passageiros. Neste grupo, como a partilha fica limitada pela presença exclusiva de viaturas de pequena capacidade, a quantidade de passageiros nas requisições sem partilha é muito mais próxima da quantidade de passageiros nas requisições com partilha, sendo maior em quatro instâncias (2A, 2G, 2H e 2O). Ou seja, as partilhas entre requisições foram principalmente de requisições com reduzido número de passageiros e o custo de se utilizar várias viaturas para atender uma requisição se mostrou mais elevado do que o *outsourcing*.

A quantidade total de passageiros nas requisições com partilha de recursos variou, nas diferentes instâncias, entre 10,20% e 44,57%. Nas requisições sem partilha, a percentagem máxima de passageiros foi de 47,67% e a mínima de 1,06% do total de passageiros. No *outsourcing* o maior número de passageiros é observado na instância 2T (88,04%) e o menor na instância 2C (15,4%).

Como se vê na Figura 15, uma análise da afetação das viaturas neste grupo mostrou que, de forma semelhante ao que ocorreu no grupo 1, as afetações de viaturas e motoristas têm comportamentos similares. Existe recurso a um maior número de motoristas em relação às viaturas porque há requisições que exigem 2 motoristas por viagem. O maior número de viaturas afetas foi de 178 (instância 2C) e a menor de 29 viaturas (instância 2S). Em média, utilizam-se 89 viaturas, considerando a totalidade de instâncias neste grupo. Quanto aos motoristas a média de afetações foi de 110, com um máximo em 2C (186) e um mínimo em 2T (35).

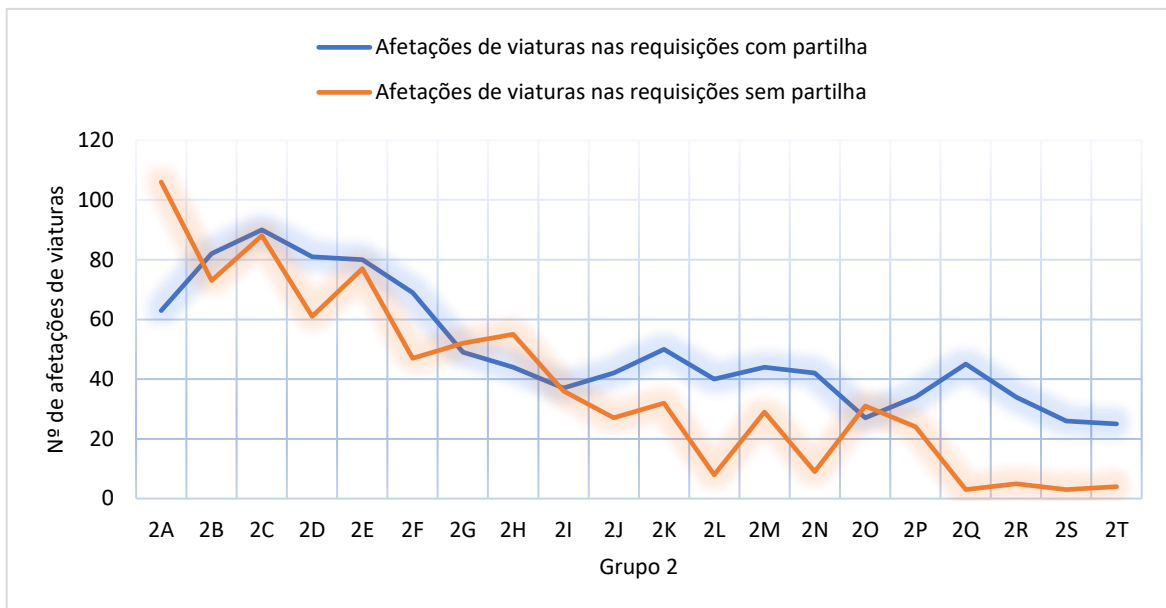
Figura 15 - Comparação das afetações de viaturas e motoristas às requisições do grupo 2



A Figura 16 mostra que a quantidade de afetações de viaturas nas requisições com partilha é ligeiramente maior do que as afetações em requisições sem partilha, com exceção nas instâncias 2A, 2G, 2H e 2O. De forma semelhante ao ocorrido no grupo 1, a tendência de queda no número de viaturas afetas é mais acentuada nas requisições sem partilha em

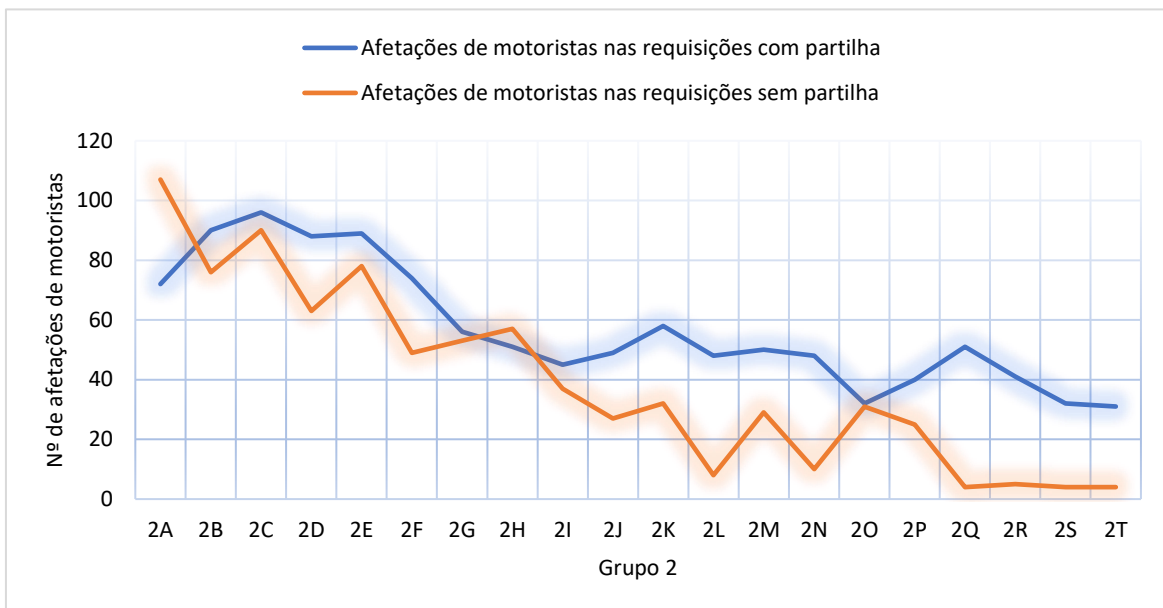
comparação com as requisições com partilha de recursos, ocorrendo pelo mesmo motivo, a falta de recursos causada pelo aumento da sobreposição temporal das requisições e consequente aumento do *outsourcing*.

Figura 16 - Afetações de viaturas em requisições com e sem partilha de recursos nas instâncias do grupo 2



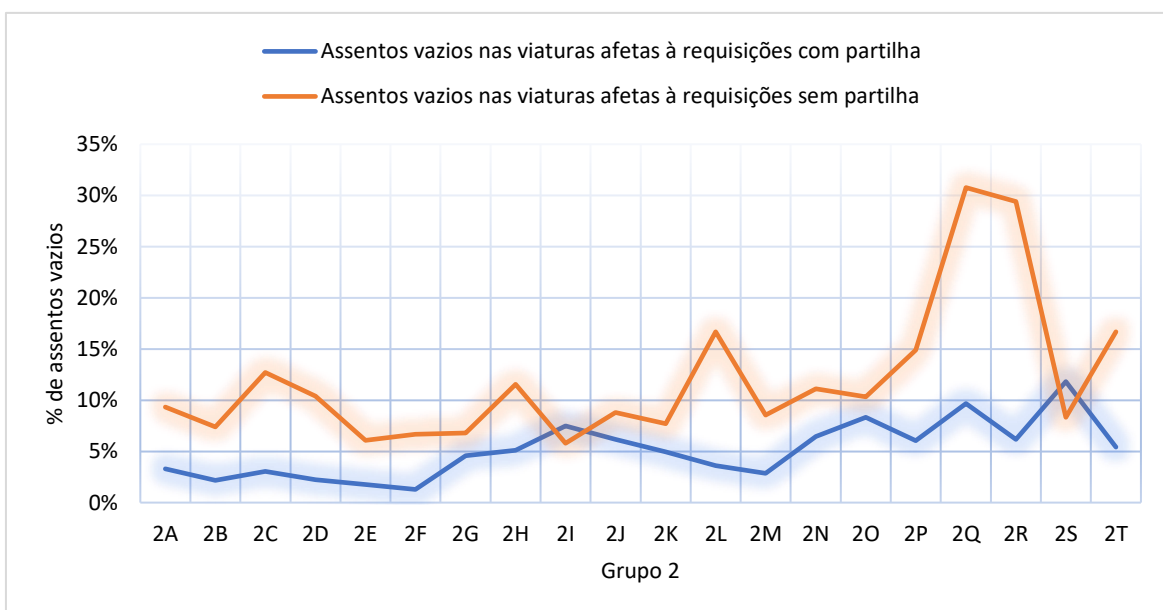
Semelhante às afetações de viaturas, as afetações de motoristas nas requisições com partilha de recursos foram ligeiramente superiores às afetações em requisições sem partilha, à exceção das instâncias 2A e 2H (Figura 17). A tendência de queda da quantidade de afetações de motoristas em direção ao aumento da sobreposição também foi verificada, o que se justifica com o aumento do *outsourcing*.

Figura 17 – Afetações de motoristas em requisições com e sem partilha de recursos nas instâncias do grupo 2



No grupo 2 é possível verificar que a partilha de recursos permite uma maior utilização das capacidades de cada viatura, pois sobram menos assentos vazios nas requisições que partilham recursos. Na Figura 18 pode-se ver que há duas instâncias em que esta observação não se verifica (2I e 2S).

Figura 18 - Comparação da quantidade de assentos vazios nas viaturas afetas entre requisições com e sem partilhas



A ocorrência dessas exceções foi explicada pela seleção de viaturas com capacidades ligeiramente superiores com custos ligeiramente menores do que o de viaturas com menor capacidade.

Os testes realizados com o Modelo 3 permitiram atingir soluções ótimas em somente uma (do grupo 1) das 40 instâncias testadas. O *outsourcing* é utilizado principalmente quando há mais sobreposição de tempo entre as requisições, sem um aumento equivalente na compatibilidade entre requisições, o que faz com que exista um aumento real de procura de recursos. Caso haja, juntamente com o aumento da sobreposição, um aumento da compatibilidade, haverá uma maior partilha de viaturas e o *outsourcing* não será muito utilizado. É evidente que o número de recursos internos (viaturas/motoristas) disponíveis também irá influenciar a seleção do *outsourcing*, tal como pode ser constatado no grupo 2, onde o número de viaturas foi reduzido e o *outsourcing* foi mais utilizado.

Como o modelo foi alterado para a inclusão do *outsourcing*, e o CPLEX mostrou ter dificuldades na resolução destes problemas, optou-se por se testar o comportamento da *matheurística* já desenvolvida no Modelo 3.

5.1.3. Heurística híbrida

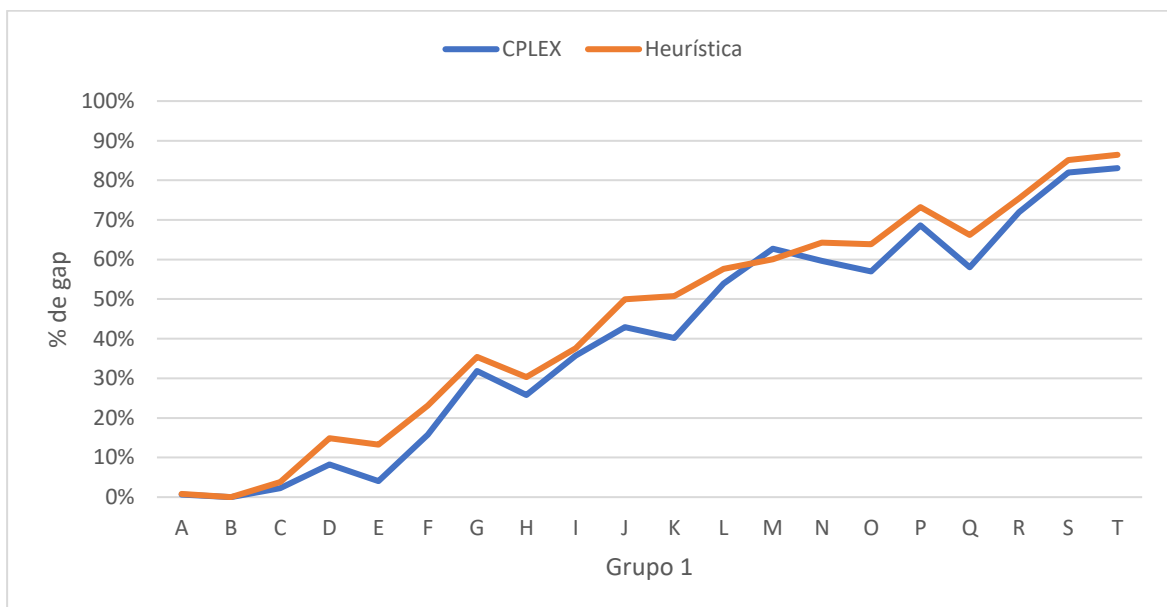
Tendo em conta a dificuldade do solucionador geral (CPLEX) conseguir calcular soluções com *gaps* aceitáveis, considerando tempos computacionais razoáveis, equacionou-se a possibilidade de utilizar a heurística descrita no Capítulo 4 neste novo modelo. Para testar a heurística, foi feita uma nova implementação, recorrendo ao *software* Matlab, integrando o CPLEX. Desta forma, é possível aproveitar a última solução encontrada pelo CPLEX como solução inicial para o problema subsequente, visto que só diferem na fixação ou não do valor de um subconjunto de variáveis de decisão.

Foram testadas várias combinações dos parâmetros da heurística, nomeadamente a probabilidade de um determinado gene ser 1 na população inicial ($Prob_1$), o limite máximo de tempo do solucionador (t_{CPLEX}), o número de indivíduos na população (n_{pop}) e o número de gerações (n_{ger}). A probabilidade de mutação foi definida como $0,1/V$ (sendo V o número total de viaturas disponíveis) e a probabilidade de cruzamento foi fixada em 0,8.

Os parâmetros das experiências realizadas que permitiram os melhores resultados foram $Prob_1 = 0,10$, $t_{CPLEX} = 60 \text{ segundos}$, $n_{pop} = 10$ e $n_{ger} = 30$.

Na Figura 19 pode-se observar que a heurística foi melhor do que o CPLEX em somente uma instância (1M) do grupo 1. Nas instâncias do grupo 2, os resultados do CPLEX e da *matheurística* foram muito semelhantes, como se pode observar na Figura 20.

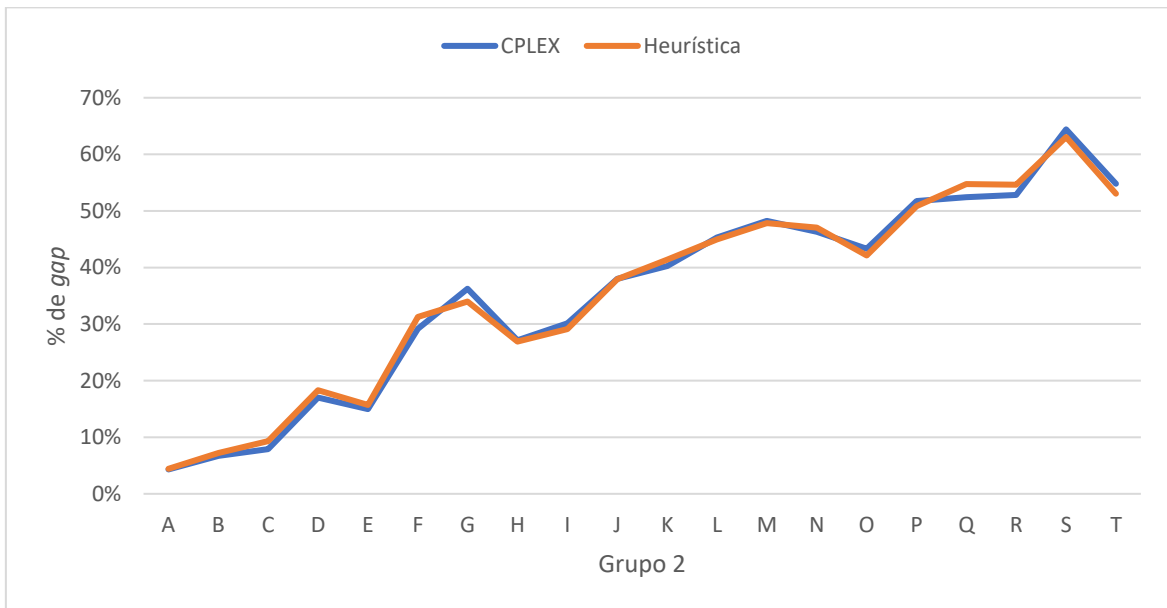
Figura 19 - Comparação do gap na resolução pelo método matemático com o método heurístico para as instâncias do grupo 1



Como pode ser observado na Figura 20, no grupo 2, apesar de a heurística apresentar um *gap* menor para algumas instâncias, essa melhoria não é significativa.

Estas experiências vieram confirmar as ilações já retiradas no Capítulo 4 sobre o desempenho da heurística. Assim, apesar de todas as tentativas, incluindo uma segunda implementação computacional para melhorar os tempos de execução, a heurística não conseguiu melhorar as soluções em comparação com o CPLEX, quer no Modelo 2 (sem *outsourcing*) quer no Modelo 3.

Figura 20 - Comparação do *gap* na resolução pelo CPLEX e *matheurística* para as instâncias do grupo 2



Na secção seguinte apresenta-se uma outra abordagem para resolver o Modelo 3, tendo por base as características deste modelo que permitem que seja decomposto em conjuntos de subproblemas.

6. DECOMPOSIÇÃO DO PROBLEMA

Observa-se, até este ponto, que o solucionador genérico apresenta soluções com *gaps* muito elevados para várias instâncias do Modelo 3 (Modelo 2 com *outsourcing*). Além disso, a heurística não se apresentou como alternativa viável por não conseguir resultados melhores do que as obtidas pela resolução do modelo de programação matemática usando o CPLEX.

De forma a tentar obter melhores soluções do que aquelas já calculadas para as instâncias construídas para o Modelo 3, optou-se por tentar decompor o problema em subproblemas mais pequenos que possam ser resolvidos separadamente, de modo que a solução ótima resulte da junção das soluções ótimas dos subproblemas. Para tal, as requisições consideradas num subproblema não podem ter qualquer sobreposição, em termos de tempo, com as requisições consideradas noutra subproblema. Garante-se, desta forma, que não há partilhas que poderiam ser feitas no problema global e que não são possíveis na resolução separada (o que levaria a soluções subótimas para o problema global), tal como se garante que não existem recursos a serem simultaneamente associados a requisições que ocorrem em períodos simultâneos (o que levaria a soluções não admissíveis para o problema global). Este método de resolução permite que se consiga obter limites válidos para o valor da função objetivo, permitindo assim calcular o *gap*. Essa possibilidade é uma enorme mais-valia em comparação com a utilização da *matheurística* desenvolvida, que não permite saber o quão longe se está da solução ótima.

Para efetuar esta decomposição do problema, foi desenvolvido um procedimento que divide, iterativamente, o conjunto das requisições em dois subconjuntos da forma mais equilibrada possível em termos do número de requisições, assegurando que não há qualquer sobreposição de tempo entre duas requisições de conjuntos diferentes. Esta divisão de um conjunto de requisições em dois subconjuntos é efetuada recorrendo à resolução de um problema auxiliar de programação linear binária de rápida resolução. O procedimento repete-se para cada subconjunto até não ser possível subdividi-lo mais (ou se considerar que possui um conjunto suficientemente pequeno de requisições). Desenvolve-se, assim, uma árvore de decomposição do problema.

Os subproblemas correspondentes às folhas da árvore são resolvidos usando, por exemplo, o CPLEX. Estes subproblemas resultam do modelo anteriormente proposto (Capítulo 5) considerando apenas as requisições do respetivo conjunto.

O valor da função objetivo do problema original (custo total) é a soma dos custos parciais obtidos pela resolução de cada subproblema. Tendo em conta o modo como estes conjuntos são construídos, se for possível calcular a solução ótima dos subproblemas, é trivial constatar-se que se obtém, deste modo, a solução ótima do problema inicial. Caso os subproblemas não sejam resolvidos de forma ótima, é possível calcular-se o máximo *gap* relativamente à solução ótima (conforme se explica mais à frente).

A soma dos tempos computacionais associados à resolução de cada um dos subproblemas que correspondem às folhas da árvore dá o tempo computacional gasto na resolução do problema original (os tempos computacionais necessários para resolver os problemas auxiliares que definem a decomposição são negligenciáveis). O método de decomposição é descrito a seguir.

Considere-se R o conjunto de todas as requisições do problema original. Queremos decompor R em dois subconjuntos, $R1$ e $R2$. De acordo com a matriz B de não-sobreposição do problema, $b_{ij} = 1$ significa que não há sobreposição de tempo entre as requisições $i, j \in R$, e $b_{ij} = 0$ significa que há sobreposição de tempo entre estas requisições. Havendo sobreposição (podendo ou não partilhar recursos), as requisições têm de ser consideradas no mesmo subproblema. Assim, b_{ij} tem de ser igual a 1 para qualquer par de requisições (i, j) tal que $i \in R1$ e $j \in R2$. Se $b_{ij} = 0$, então as requisições i e j terão de ser colocadas juntas em $R1$ ou em $R2$.

Seja $|R1| = \alpha$ e $|R2| = \beta$, em que $\alpha + \beta$ é o número total de requisições em R . Seja x_i uma variável binária que indica se a requisição i é colocada em $R1$ ou em $R2$. Sem perda de generalidade, considere-se que $x_i = 1$ se $i \in R1$ e $x_i = 0$ se $i \in R2$.

O Problema da Decomposição (PD) apresentado abaixo tem como intenção definir as requisições que compõem $R1$ e $R2$, tentando equilibrar as dimensões destes dois subconjuntos.

$$\text{Min } (\alpha - \beta) \quad (40)$$

s. a:

$$x_i \leq x_j + b_{ij} \quad \forall i < j \quad (41)$$

$$x_i \geq x_j - b_{ij} \quad \forall i < j \quad (42)$$

$$\sum_{i \in R} x_i = \alpha \quad (43)$$

$$\sum_{i \in R} (1 - x_i) = \beta \quad (44)$$

$$\alpha \geq \beta$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in R$$

$$\alpha, \beta \geq 0$$

As requisições que irão pertencer ao conjunto $R1$ são as que correspondem a variáveis x_i que resultarem iguais a 1. As restantes requisições constituirão o conjunto $R2$.

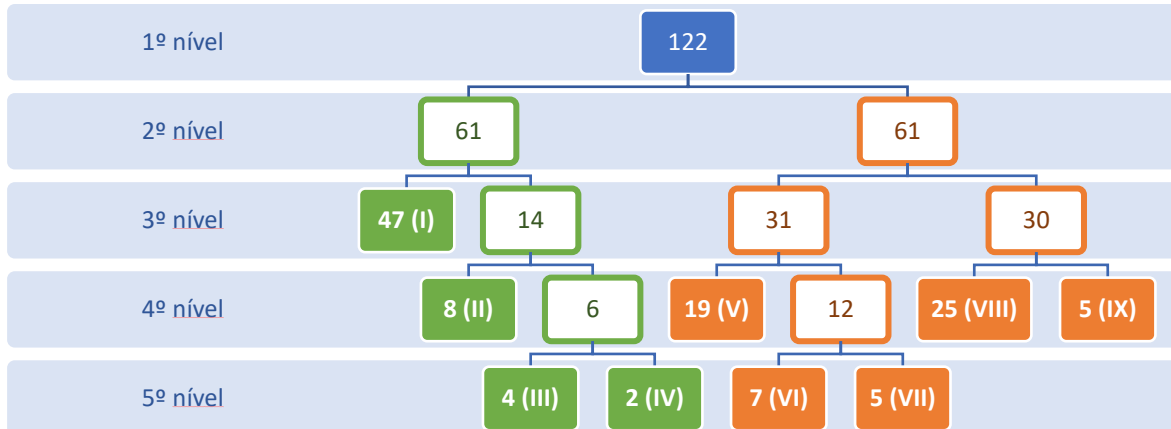
Considera-se que $\alpha \geq \beta$, mas obteríamos um problema igualmente válido se considerássemos o contrário ($\alpha \leq \beta$). O objetivo é tentar equilibrar os conjuntos, por isso se minimiza a diferença ($\alpha - \beta$), em que α é o número de requisições de $R1$ ($\sum x_i = \alpha$) e β é o número de requisições de $R2$, ou seja, o número de variáveis x_i que são iguais a zero ($\sum (1 - x_i) = \beta$). Os valores de α e de β são definidos, respetivamente, nas equações (43) e (44).

As restrições (41) e (42) asseguram a não-sobreposição de tempo entre requisições de conjuntos diferentes. Assim, $b_{ij} = 0 \Rightarrow x_i = x_j$. Ou seja, se há sobreposição entre duas requisições i e j , então as duas requisições têm de ficar no mesmo conjunto: ou ficam as duas em $R1$ ($x_i = x_j = 1$), ou ficam as duas em $R2$ ($x_i = x_j = 0$). Se $b_{ij} = 0$, as restrições (41) e (42) resultam, respetivamente, em $x_i \leq x_j$ e $x_i \geq x_j$; portanto $x_i = x_j$. Se $b_{ij} = 1$, as restrições i e j tanto podem ficar no mesmo conjunto como em conjuntos separados.

Neste caso, as restrições (41) e (42) não impõem nenhuma limitação porque $x_i \leq x_j + 1$ e $x_i \geq x_j - 1$ verificam-se sempre (neste caso serão restrições redundantes).

O problema de decomposição (PD) pode ser resolvido repetidamente numa estrutura em árvore, que permite a partição sucessiva dos conjuntos das requisições em subconjuntos mais pequenos, até que os subconjuntos não possam ser mais divididos ou contêm um número reduzido de requisições (por exemplo, cinco). A Figura 21 mostra o resultado da decomposição de uma das instâncias para ilustrar o processo. Cada conjunto é dividido em dois conjuntos, como já mencionado. Cada conjunto final de cada ramo (destacado com um fundo a cor) é resolvido como um único problema. Por exemplo, ao tentar decompor o conjunto do 3º nível com 47 requisições, verificou-se que $|R1|=47$ e $|R2|=0$, o que significa que este conjunto não pode ser mais decomposto. Consequentemente, o subproblema com 47 requisições representa um nó terminal da árvore de decomposição.

Figura 21 - Árvore de decomposição da instância K do grupo 1 (1K - apresentada no Capítulo 5). Cada caixa representa um conjunto de requisições



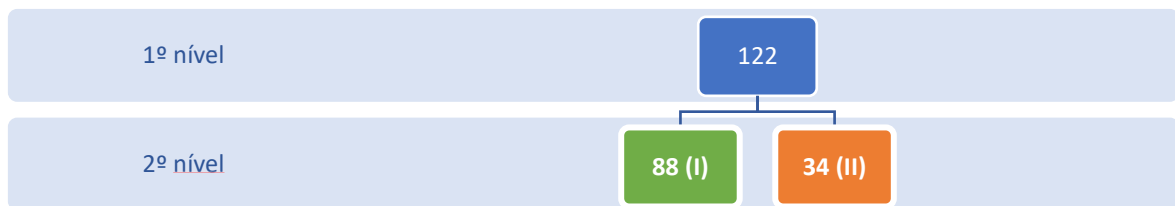
As requisições ficaram assim distribuídas em cada ramo final da árvore de decomposição:

- I: (r003, r004, r006, r007, r009, r010, r021, r022, r025, r026, r032, r034, r035, r037, r040, r041, r042, r043, r044, r045, r046, r047, r049, r050, r051, r052, r060, r061, r062, r063, r064, r065, r066, r067, r071, r073, r075, r076, r082, r083, r084, r101, r103, r115, r116, r117, r121)
- II: (r011, r027, r028, r053, r085, r086, r087, r105)
- III: (r057, r058, r096, r097)
- IV: (r012, r104)

- V: (r013, r014, r016, r029, r030, r031, r039, r048, r054, r055, r088, r089, r090, r093, r094, r095, r107, r108, r122)
- VI: (r015, r038, r091, r092, r106, r109, r119)
- VII: (r001, r002, r019, r056, r110)
- VIII: (r005, r008, r023, r024, r033, r036, r068, r069, r070, r072, r074, r077, r078, r079, r080, r081, r098, r099, r100, r102, r111, r112, r114, r118, r120)
- IX: (r017, r018, r020, r059, r113)

O efeito do aumento da sobreposição na decomposição dos problemas é ilustrado na Figura 22, com a apresentação do resultado da decomposição de uma instância com maior sobreposição (T). Como se pode observar a decomposição só atinge um nível resultando em dois subproblemas.

Figura 22 - Árvore de decomposição da instância T do grupo 1 (1T - apresentada no Capítulo 5).



Se os subproblemas não forem resolvidos até à otimalidade, o cálculo do *gap* para a solução do problema original é feito da seguinte forma:

Seja K o número de subproblemas resolvidos (nós terminais da árvore) e $Custo_k$ o valor da função objetivo obtido para o subproblema $k = 1, \dots, K$ com um gap_k . Sabendo que o *gap* devolvido pelo CPLEX é dado por $\frac{|best\ bound - best\ integer|}{best\ integer}$, então $gap_k = \frac{Custo_k - MelhorLimite_k}{Custo_k} \Leftrightarrow MelhorLimite_k = (1 - gap_k)Custo_k$.

O custo da solução do problema original é $Custo = \sum_{k=1}^K Custo_k$, com um *gap* máximo de $gap = \frac{Custo - \sum_{k=1}^K MelhorLimite_k}{Custo}$ relativamente ao custo ótimo.

6.1. Experiências computacionais

Este método, que se baseia na decomposição do problema original, foi aplicado a cada uma das 40 instâncias geradas e descritas na Seção 5.2. Os subproblemas definidos em cada folha da árvore foram resolvidos usando o CPLEX, estabelecendo como critério de paragem a obtenção de um *gap* igual ou menor do que 0,01%, mas nunca podendo ultrapassar um tempo computacional de 18000 segundo. Os resultados são comparados com as otimizações de cada instância original (usando o CPLEX) realizadas conforme descrito no Capítulo 5. Como o limite de tempo imposto é por subproblema, e não para a totalidade do tempo computacional necessário à resolução de todos os subproblemas, houve algumas situações em que este tempo total ultrapassou os 18000 segundos definidos para a resolução do problema original pelo CPLEX. Um exemplo são as instâncias 1D a 1T no grupo 1 e todas as instâncias do grupo 2. Para que fosse possível fazer uma comparação não enviesada dos resultados, voltou a resolver-se as instâncias usando o CPLEX e definindo um limite de tempo igual ao consumido pelo método de decomposição, sempre que necessário.

6.1.1. Instâncias do Grupo 1

Os resultados dos subproblemas oriundos de cada instância do grupo 1 foram comparados com os resultados da otimização realizada para cada instância deste mesmo grupo e são apresentados na Tabela 19.

Para demonstrar de forma pormenorizada os resultados da otimização pelo processo de método de decomposição, na Tabela 20 estão inseridos os resultados obtidos para a instância 1K, cuja decomposição foi apresentada na Figura 21. Esta tabela apresenta o tempo de resolução, o *gap*, o custo da solução obtida e o limite inferior para este custo para a instância original e para a mesma instância após a decomposição. Como podemos observar, houve uma ligeira melhoria da solução em termos de redução de custos e *gap* quando se mantém o tempo computacional total.

Tabela 19 - Resultados da otimização das instâncias do grupo 1 pelo CPLEX e pelo método de decomposição

	CPLEX (novo limite de tempo)				Método de decomposição			
	Tempo	Gap	Melhor FO (u. m.)	Melhor limite	Tempo	Gap	Melhor FO (u. m.)	Melhor limite
1A	18.000	0,66%	31.976,48	31.764,85	141	0,00%	31.976,48	-
1B	276	0,01%	30.391,12	30.388,09	63	0,00%	30.391,12	-
1C	18.000	2,29%	27.894,15	27.256,47	15.083	0,00%	27.894,15	-
1D	25.522	8,20%	27.803,40	25.524,00	25.519	4,35%	27.898,92	26.686,07
1E	20.021	4,30%	29.064,64	27.813,72	20.017	1,76%	31.192,36	30.643,50
1F	54.233	14,53%	25.893,51	22.130,57	54.225	10,32%	25.417,85	22.795,84
1G	72.707	24,43%	27.115,35	20.491,62	72.695	18,53%	26.186,32	21.335,22
1H	54.011	22,98%	27.291,70	21.021,09	54.005	16,52%	25.867,43	21.594,41
1I	55.315	27,97%	25.802,17	18.585,39	55.314	19,86%	24.632,85	19.740,05
1J	37.909	41,87%	26.409,92	15.352,56	37.907	36,94%	25.667,31	16.186,59
1K	48.158	40,09%	25.699,41	15.396,74	48.156	31,64%	23.786,58	16.259,87
1L	67.915	46,71%	28.061,11	14.953,62	67.913	41,13%	27.567,88	16.229,40
1M	54.025	47,45%	27.329,03	14.361,62	54.010	44,18%	27.461,56	15.329,47
1N	83.545	51,03%	23.328,49	11.424,56	83.534	42,76%	22.378,80	12.810,28
1O	36.038	55,02%	31.715,10	14.265,60	36.036	51,14%	29.391,53	14.361,17
1P	36.048	66,94%	37.803,61	12.497,98	36.048	62,37%	35.402,92	13.320,81
1Q	36.038	55,29%	29.231,47	13.069,63	36.035	54,10%	28.746,54	13.194,22
1R	36.007	70,27%	36.607,29	10.884,84	36.007	68,49%	34.716,50	10.939,08
1S	36.007	80,72%	38.410,77	7.403,76	36.002	83,82%	44.618,06	7.217,68
1T	36.005	82,53%	44.704,04	7.811,10	36.004	82,37%	45.873,14	8.089,70

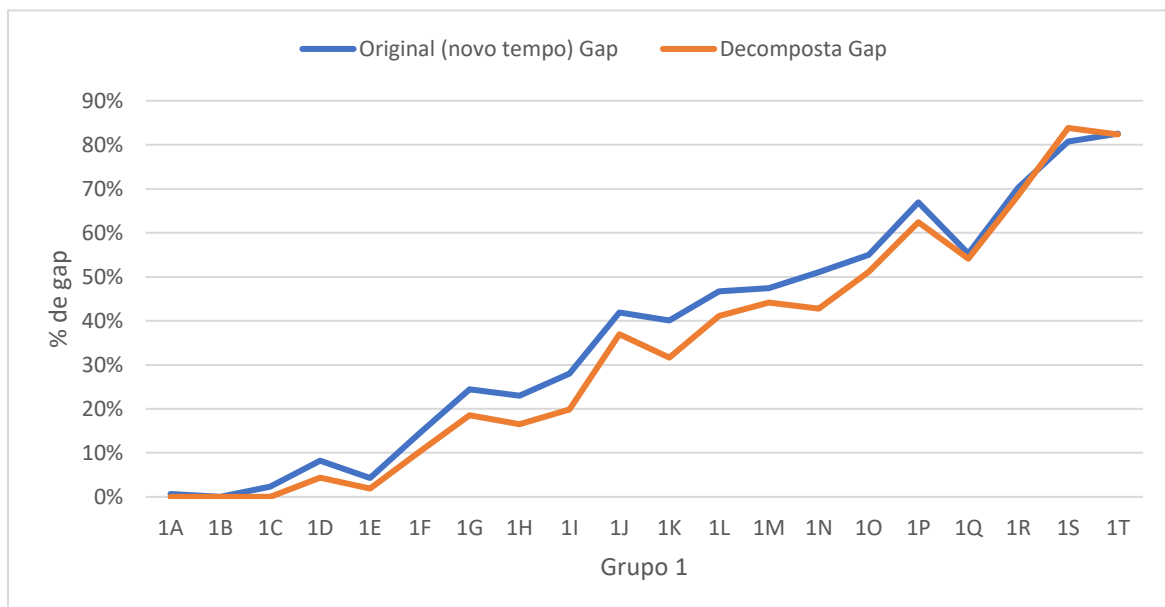
Tabela 20 - Resultados da otimização da instância 1K pelo método original (CPLEX) e de decomposição (Figura 21)

CPLEX (novo tempo)	Tempo (s)	Gap	Função Objetivo (u. m.)	Melhor limite (u. m.)
Total	48.158,48	40%	25.699,41	15.396,74
Método de Decomposição	Tempo	Gap	Função Objetivo (u. m.)	Melhor limite (u. m.)
I	18.003,81	71,30%	7.719,47	2.215,27
II	3,17	0,00%	1.333,17	1.333,15
III	0,09	0,00%	786,07	786,07
IV	0,02	0,00%	507,18	507,18
V	12.148,53	0,01%	4.337,44	4.337,01
VI	0,33	0,00%	1.473,65	1.473,65
VII	0,25	0,00%	1.558,33	1.558,33
VIII	18.000,88	44,86%	4.507,41	2.485,36
IX	0,41	0,00%	1.563,86	1.563,86
Total	48.156,49	31,64%	23.786,58	16.259,87

Com a utilização da decomposição e tendo em conta o limite de tempo considerado, neste grupo apenas foi possível calcular a solução ótima em três das 20 instâncias decompostas (1A, 1B e 1C). Em 12 instâncias do grupo 1, o método de decomposição foi capaz de calcular soluções com um menor valor para a função objetivo.

A Figura 23 mostra que, semelhante ao ocorrido com a resolução do problema original pelo CPLEX, em todos os casos do grupo 1 o *gap* obtido no método de decomposição aumenta com o aumento da sobreposição. A otimalidade foi obtida nas primeiras três instâncias do grupo 1, nas restantes o *gap* foi sempre positivo e com tendência crescente. Mas, em comparação com a resolução do problema original pelo CPLEX, o *gap* reduz significativamente em praticamente todas as instâncias quando os problemas são otimizados pelo método da decomposição. A redução maior foi de 8,45%. Somente na instância 1S o *gap* aumentou em 3,1% em relação à otimização da instância original pelo CPLEX.

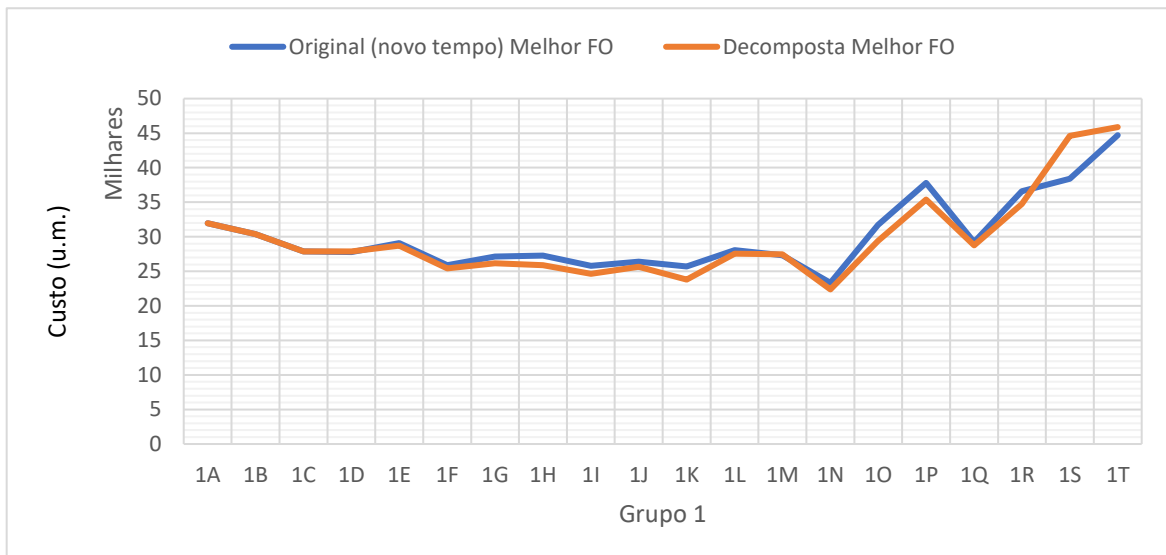
Figura 23 - Comparação do *gap* entre as otimizações das instâncias originais e das instâncias decompostas do grupo 1



Conforme mostra a Tabela 19 e a Figura 24, para a maioria das instâncias houve redução nos custos quando foi aplicada a decomposição. Assim, a diminuição do *gap* ocorreu quer pelo aumento do melhor limite conhecido quer pela descoberta de melhores soluções. No entanto, em cinco instâncias houve um aumento do custo com a decomposição, com um

destaque para a instância 1S que, com o método decomposto, atingiu um valor quase 14% maior em comparação com a otimização da instância original. Mesmo nestes casos, o método de decomposição permitiu o cálculo de melhores limites inferiores.

Figura 24 - Comparação da melhor FO entre as otimizações das instâncias originais e das instâncias decompostas do grupo 1



Assim, em 12 das 20 instâncias houve redução do custo, três mantiveram o valor e cinco pioraram ligeiramente. O custo melhorou 1,23% em média entre as instâncias do grupo 1 quando se utilizou o método decomposto. A redução máxima do custo foi de 7,44% e, por outro lado, houve um aumento do custo em 16,16% na instância 1S.

6.1.2. Instâncias do Grupo 2

Os resultados das otimizações pelo método de decomposição no grupo 2 foram também comparados com a otimização realizada pelo CPLEX para as instâncias originais do mesmo grupo, e estão apresentadas na Tabela 21. O tempo limite para a resolução de cada subproblema foi mantido nos 18000 segundos. O tempo limite para resolução do problema original pelo Cplex foi definido de acordo com o tempo total obtido para o método de decomposição, tal como descrito para o grupo 1.

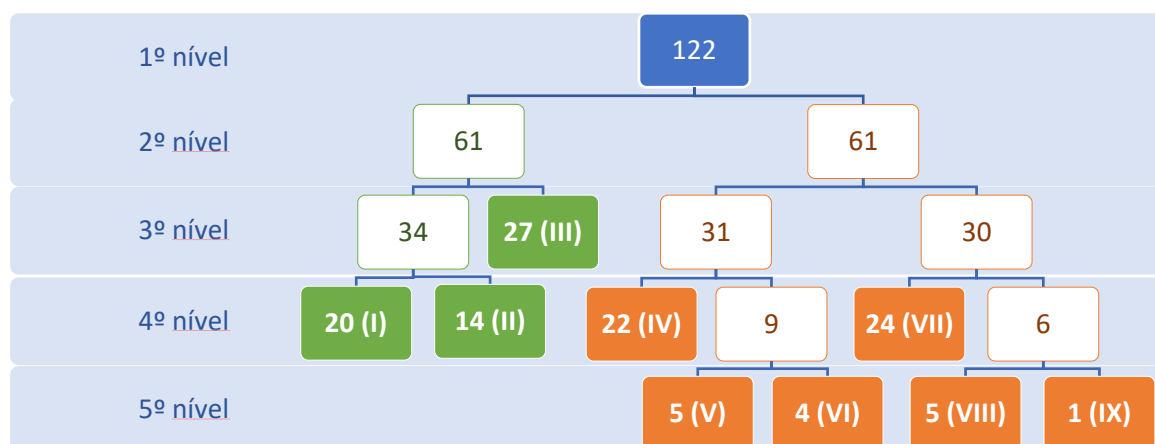
Tabela 21 - Resultados da otimização das instâncias do grupo 2 pelo CPLEX e pelo método de decomposição

	CPLEX (novo limite de tempo)				Método de decomposição			
	Tempo (s)	Gap	Melhor FO (u. m.)	Melhor limite	Tempo (s)	Gap	Melhor FO (u. m.)	Melhor limite
2A	16.482	4,43%	67.568,92	64.575,00	18.766	0,35%	67.465,00	67.232,10
2B	15.582	6,76%	66.131,35	61.663,83	37.200	0,66%	66.085,90	65.646,57
2C	37.474	7,77%	65.707,65	60.603,58	37.443	4,06%	65.622,18	62.959,46
2D	30.898	16,95%	70.947,14	58.924,48	73.070	8,20%	70.162,15	64.408,76
2E	52.159	13,97%	70.250,19	60.436,07	52.140	8,73%	70.097,85	63.980,04
2F	108.093	26,66%	71.599,11	52.508,05	108.076	16,26%	70.797,88	59.283,14
2G	72.484	31,29%	68.156,21	46.829,34	72.468	20,18%	67.327,06	53.742,24
2H	54.035	24,77%	69.505,31	52.291,42	54.033	22,50%	68.654,86	53.205,79
2I	90.530	28,29%	79.655,33	57.124,12	90.505	20,03%	76.243,93	60.970,80
2J	72.304	34,65%	80.162,45	52.384,68	72.302	26,36%	78.503,18	57.809,16
2K	36.772	38,70%	75.930,69	46.542,57	36.767	30,06%	74.588,05	52.165,52
2L	72.122	43,72%	74.247,11	41.783,63	72.120	33,39%	71.520,26	47.641,03
2M	54.056	45,73%	78.290,20	42.488,90	54.055	39,52%	74.851,17	45.273,35
2N	72.038	45,07%	79.071,17	43.436,64	72.035	32,01%	76.591,46	52.074,12
2O	36.168	41,87%	80.247,75	46.644,70	36.166	34,39%	76.516,20	50.204,98
2P	36.093	46,92%	80.112,62	42.521,84	36.092	41,61%	77.427,41	45.207,15
2Q	37.002	51,29%	69.498,76	33.854,70	37.002	43,52%	68.482,77	38.681,25
2R	36.030	50,89%	80.475,72	39.520,84	36.005	46,58%	78.894,72	42.146,03
2S	36.006	63,21%	79.986,84	29.423,82	36.002	60,26%	79.859,43	31.738,97
2T	36.043	53,86%	88.228,40	40.712,68	36.001	47,49%	87.748,68	46.080,04

Nota: Nas instâncias 2A e 2B, a vermelho, o CPLEX terminou prematuramente por falta de memória o que explica o tempo total mais baixo relativamente ao método de decomposição. Os melhores valores da FO para cada instância estão a negrito.

A Figura 25 ilustra o método de decomposição para uma instância (instância 2G).

Figura 25 - Árvore de decomposição da instância G do grupo 2 (1G) (apresentada no Capítulo 5). Cada caixa representa um conjunto de requisições.



As requisições ficaram assim distribuídas em cada ramo final da árvore de decomposição:

- I: (r001, r002, r003, r018, r019, r022, r023, r041, r050, r058, r060, r068, r070, r072, r096, r098, r110, r113, r114, r120)
- II: (r014, r015, r029, r030, r038, r054, r087, r090, r091, r092, r093, r105, r107, r122)
- III: (r004, r005, r017, r020, r021, r032, r033, r040, r042, r043, r049, r057, r059, r061, r062, r063, r064, r065, r066, r067, r069, r071, r073, r097, r111, r112, r115)
- IV: (r006, r007, r012, r026, r027, r037, r045, r046, r047, r051, r052, r075, r076, r079, r081, r083, r084, r085, r086, r101, r117, r121)
- V: (r031, r048, r094, r108, r109)
- VI: (r016, r039, r095, r119)
- VII: (r008, r009, r010, r011, r024, r025, r028, r034, r035, r036, r044, r053, r074, r077, r078, r080, r082, r099, r100, r102, r103, r104, r116, r118)
- VIII: (r013, r055, r088, r089, r106)
- IX: (r056)

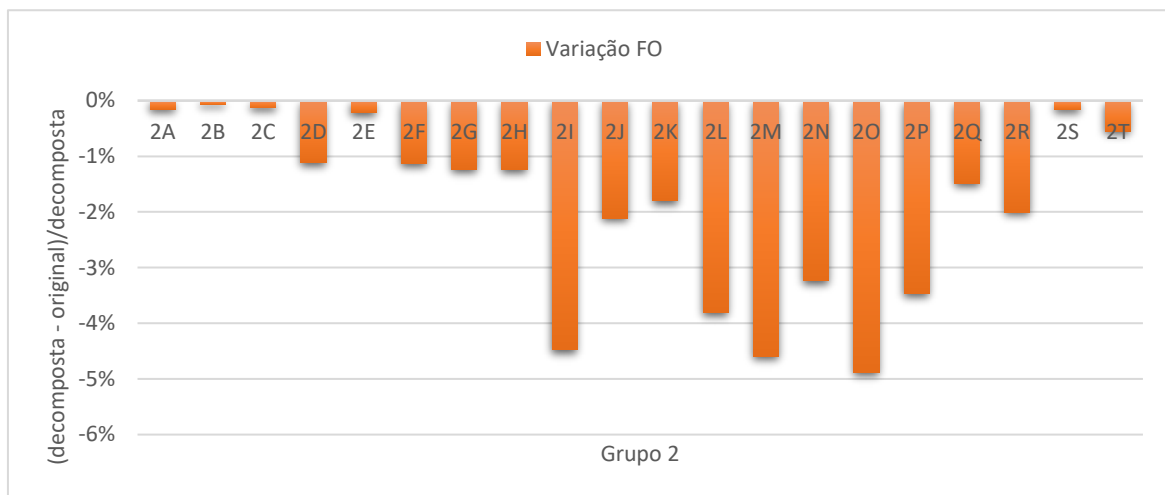
Na Tabela 2 estão os resultados obtidos para a instância 2G. Esta tabela apresenta o tempo de resolução, o *gap*, o custo da solução obtida e o limite inferior para este custo para a instância otimizada pelo método original e pelo método de decomposição. Como podemos observar, houve uma melhoria da solução em termos de redução do valor da FO e *gap* quando se mantém o tempo computacional total.

Tabela 22 - Resultados da otimização da instância 2G pelo método original (CPLEX) e de decomposição (Figura 25)

CPLEX (novo tempo)	Tempo (s)	Gap	Função Objetivo (u. m.)	Melhor limite (u. m.)
Total	72.484	31.29%	68.156,21	46.829,34
Método de Decomposição	Tempo	Gap	Função Objetivo (u. m.)	Melhor limite (u. m.)
I	18.036	22,91%	11.116,89	8.570,03
II	379	0,01%	14.960,13	14.958,64
III	18.002	34,73%	15.818,01	10.324,58
IV	18.014	41,49%	6.490,24	3.797,30
V	2,19	0,00%	1.414,48	1.414,48
VI	0,49	0,00%	3.714,97	3.714,97
VII	18.034	28,56%	9.980,27	7.130,17
VIII	0,36	0,00%	859,52	859,52
IX	0,06	0,00%	2.972,55	2.972,55
Total	72.468,10	20,18%	67.327,06	53.742,24

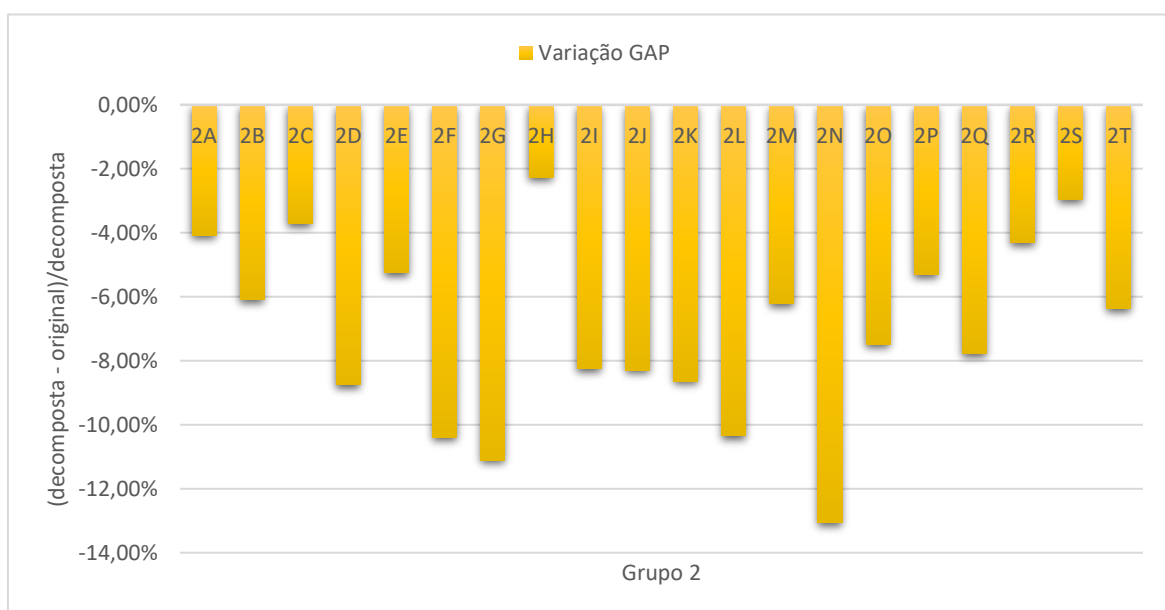
A Figura 26 mostra as variações da FO para o grupo 2. Pode-se observar que em todas as instâncias deste grupo foi obtida uma solução melhor com a aplicação da decomposição. Houve uma melhoria de, no máximo, 4,65% e no mínimo de 0,07%.

Figura 26 - Comparação das variações dos valores da função objetivo entre o método de decomposição e a resolução do problema original para as instâncias do grupo 2



No grupo 2, o *gap* diminui em todas as instâncias quando se aplica o método de decomposição (Figura 27), com uma redução entre 2,26% e 13,06%.

Figura 27 - Comparação das variações dos gaps entre o método de decomposição e a resolução do problema original para as instâncias do grupo 2



Neste capítulo foram comparadas duas abordagens diferentes de otimização para o Modelo 3: a utilização do CPLEX e o método de decomposição desenvolvido especificamente para este problema. No método de decomposição, o problema original é decomposto em subproblemas que são resolvidos separadamente. Desta comparação é possível concluir que, em geral, a decomposição do problema apresenta melhores soluções do que as obtidas pela utilização do Cplex.

7. CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentou-se um problema de afetação de dois recursos distintos a um conjunto de tarefas onde a afetação de um dos recursos depende da afetação do outro recurso. Esse problema foi motivado por um caso real de afetação de viaturas e motoristas a viagens planeadas numa organização. Inicialmente, o problema foi definido recorrendo a várias simplificações para se conseguir desenvolver um primeiro modelo que fosse capaz de resolver os problemas apresentados para duas instâncias fictícias. Como este modelo não considerava muitas das características do problema real, nomeadamente a partilha de viaturas e motoristas, foram depois desenvolvidos outros modelos que apresentam, como vantagem adicional, o facto de não ser necessário trabalhar explicitamente com a dimensão temporal.

Nestes modelos, a dimensão temporal é tratada previamente, através da construção de matrizes que indicam se as requisições se sobrepõem ou não no tempo e, nos casos em que há sobreposição, se são compatíveis nos destinos (e/ou rotas) e tempos de saída e chegada, possibilitando o agrupamento de requisições. As tarefas (neste caso, viagens) podem partilhar recursos, se forem compatíveis. Os novos modelos apresentados podem ser interpretados como uma extensão do problema de afetação generalizada. Tanto quanto se sabe, esta é a primeira vez que é abordado um problema com estas características. Apesar de estes modelos terem sido aplicados a uma situação concreta de afetação de viaturas e motoristas a requisições de viagem, podem ser facilmente adaptados a muitas outras situações em que dois tipos distintos de recursos têm de ser afetados a um conjunto de tarefas, com restrições que condicionam a afetação de um dos recursos ao outro recurso.

O primeiro modelo desenvolvido com estas propriedades, chamado neste trabalho de Modelo 2, foi aplicado a uma instância real do problema (com dados referentes a 1 mês) em um estudo de caso. A solução ótima (obtida com um *solver* genérico, o CPLEX) foi comparada com a solução aplicada na instituição de origem dos dados. A redução nos custos foi de cerca de 23% relativamente ao plano aplicado pela instituição.

Tendo em vista a possibilidade de considerar problemas de maior dimensão, foram investigadas várias possibilidades de desenvolvimento de uma heurística ou meta-heurística para o problema. Após várias tentativas de desenvolvimento de uma

heurística que trabalhasse com codificações de soluções completas, todas elas sem sucesso uma vez que é muito difícil encontrar uma representação das soluções que garanta a admissibilidade ou permita desenhar processos adequados de reparação das soluções, optou-se pelo desenvolvimento de uma heurística híbrida. Esta heurística combina um algoritmo genético (onde cada cromossoma codifica um espaço de busca, em vez de uma solução individual) com a resolução de problemas de programação inteira de dimensão menor usando um *solver* genérico. Apesar de esta *matheurística* não ter sido capaz de melhorar as soluções na maior parte das instâncias em que o CPLEX não obteve a solução ótima, os resultados computacionais sugerem que a heurística é competitiva e pode obter bons resultados em casos particulares, nomeadamente quando a frota é composta, principalmente, por viaturas de pequena capacidade (os problemas que apresentam maiores dificuldades para o solucionador genérico).

O recurso a serviços de *outsourcing* para satisfazer requisições de viagens profissionais é cada vez mais frequente em instituições públicas Brasileiras. Por essa razão, foi incluída também essa possibilidade no modelo anterior, para que este se aproximasse ainda mais das situações reais. Este novo modelo, designado neste trabalho por Modelo 3, foi testado num conjunto alargado de novas instâncias com características distintas, principalmente em termos da compatibilidade e sobreposição temporal entre as requisições. Nestes testes, foi feita uma comparação dos resultados obtidos através do CPLEX e da *matheurística*. A *matheurística* não foi capaz de atingir soluções substancialmente melhores do que as obtidas pelo *solver*, tal como já tinha sido observado no Modelo 2.

Considerando o Modelo 3, optou-se por desenvolver um método diferente que partisse o problema em subproblemas (método de decomposição). A intenção principal foi diminuir o esforço computacional e, assim, diminuir os *gaps* ou até mesmo atingir soluções ótimas. O método de decomposição proposto divide o problema em subproblemas com as mesmas características que o original, mas de menor dimensão, que são otimizados separadamente, permitindo obter a solução ótima do problema original sempre que os subproblemas sejam resolvidos até à otimalidade. Os resultados obtidos por este método foram comparados com os resultados da otimização do problema original. Com o método de decomposição houve redução do *gap* e obtenção de melhores soluções, no mesmo tempo computacional,

para a maior parte das instâncias testadas, mostrando que este método agiliza o processo de otimização, tornando-o mais eficiente.

Outra conclusão que podemos obter deste trabalho é que a permissão do uso de recursos partilhados é muito importante em termos de redução de custos. O uso do modelo de otimização proposto para o caso real, que é capaz de acomodar a partilha de viaturas entre requisições, contribuiu para um custo significativamente mais baixo do que o fornecido pela solução não assistida por computador determinada pela instituição. A solução ótima para o conjunto de dados completo é significativamente melhor do que aquele implementado pela instituição.

Uma análise mais aprofundada, em que várias instâncias geradas aleatoriamente foram testadas, sugere que a composição da frota de viaturas (ou seja, o número de viaturas dentro de cada categoria de número de assentos) tem uma influência significativa no tempo computacional necessário para resolver o problema.

O *outsourcing* representa uma mais-valia, especialmente quando não existe disponibilidade de uma frota heterogénea com viaturas de maior capacidade. Se a compatibilidade entre os destinos se mantiver constante ou com pouco crescimento, o aumento da sobreposição temporal entre as requisições leva ao aumento do *outsourcing* devido à menor possibilidade de partilha. Este aumento da sobreposição entre as requisições também eleva o *gap* em todos os casos, mostrando que o problema se torna cada vez mais difícil de resolver. Se o aumento da sobreposição vier acompanhado de um aumento proporcional na compatibilidade dos destinos das requisições, haverá um aumento na possibilidade de partilha de recursos.

Foram ainda efetuados alguns testes com um modelo multiobjetivo que considera, para além do custo, preocupações de equidade no serviço dos motoristas. Apesar de terem sido apenas testes preliminares, com pouca extensão, estes evidenciaram a importância de tratar a questão da equidade da utilização de recursos. Mesmo em relação a viaturas, algumas preocupações poderiam ser incluídas no modelo. Com efeito, a frequência da utilização das viaturas e das milhas percorridas pode implicar condições de uso e desgaste muito diferentes, podendo, por conseguinte, ter um impacto a longo prazo nos custos associados à frota (nomeadamente no caso de viaturas próprias). De modo semelhante, medidas de equidade que levem em conta não apenas o número de viagens, mas também

as distâncias percorridas e outras afetações de trabalho ordinárias para motoristas, não foram consideradas neste trabalho, mas são aspetos a considerar na investigação futura.

Outro aspeto que não foi abordado na tese é a incerteza associada às requisições. As viagens consideradas neste trabalho são as viagens planeadas, que obrigam a uma requisição prévia. Foi assumido que todos os dados associados às viagens, incluindo o seu tempo de realização, eram conhecidos com certeza. Na realidade, o tempo de realização de uma viagem está sujeito a incerteza (vários fatores podem estar envolvidos em atrasos de viagem, como problemas de trânsito e condições meteorológicas), e essa incerteza pode ter impacto na informação que é considerada nas matrizes de sobreposição e compatibilidade e, conseqüentemente, na atribuição de recursos que é feita pelo modelo. Para além desta incerteza associada às requisições planeadas, existe ainda a possibilidade do aparecimento inesperado de requisições que correspondam a viagens urgentes. O tratamento destas questões poderá passar por diferentes abordagens, incluindo a representação desta incerteza recorrendo a cenários e usando modelos de programação estocástica.

Tendo em conta a dificuldade que o solucionador genérico apresentou na resolução das instâncias testadas, foi desenvolvida uma *matheurística* que opta por codificar espaços de procura de soluções, em vez de codificar a solução completa. Apesar de os resultados não apontarem a heurística como sendo, inequivocamente, melhor do que o solucionador genérico, a ideia que está na base desta heurística pode ser ainda explorada, tendo também em conta a influência que a definição dos seus parâmetros tem no comportamento e resultados obtidos.

Um parâmetro que influencia muito o comportamento da *matheurística* é o limite de tempo dado ao solucionador genérico; este parâmetro pode ser ajustado de forma dinâmica, com valores mais baixos no início, para promover a diversificação, e tempos mais elevados à medida que as gerações progridem, pelo menos para os indivíduos mais promissores. Também ainda nesta heurística, o parâmetro que define a probabilidade de uma variável ser fixa a 1 na população inicial ($Prob_1$) pode ser definido de forma diferente para diferentes pares de requisições e viaturas. Pode ser benéfico definir $Prob_1$ em função da relação entre o número total de passageiros da requisição e a capacidade da viatura.

Este trabalho contribuiu para o avanço do estado da arte no que diz respeito ao problema de afetação generalizada, mostrando que é possível automatizar o processo de tomada de decisão relativamente à afetação de recursos, tirando o maior partido possível da partilha destes recursos, quando essa partilha apresenta vantagens em termos do custo envolvido. Essa contribuição foi feita quer na parte de desenvolvimento de novos modelos, quer na parte de desenvolvimento de abordagens algorítmicas.

Abre também diferentes linhas de investigação futura, que valerá a pena seguir, nomeadamente no que diz respeito a abordagens multiobjetivo e que considerem de forma explícita a incerteza associada às tarefas a serem realizadas (neste caso particular, as viagens). Estes novos modelos a serem desenvolvidos colocarão novos desafios em termos das opções algorítmicas de resolução.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abara, J. (1989). Applying Integer Linear Programming to the Fleet Assignment Problem. *Interfaces*, 19(4), 20–28. <https://doi.org/10.1287/inte.19.4.20>
- Agatz, N., Erera, A., Savelsbergh, M., & Wang, X. (2012). Optimization for dynamic ride-sharing: A review. *European Journal of Operational Research*, 223(2), 295–303. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.05.028>
- Baldacci, R., Battarra, M., & Daniele, V. (2008). Routing a heterogeneous fleet of vehicles. In L. B. Golden, S. Raghavan, & E. A. Wasil (Eds.), *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges* (pp. 3–37). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-77778-8_1
- Bielli, M., Bielli, A., & Rossi, R. (2011). Trends in models and algorithms for fleet management. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 20, 4–18. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.08.004>
- Billhardt, H., Fernández, A., Lemus, L., Lujak, M., Osman, N., Ossowski, S., & Sierra, C. (2014). Dynamic coordination in fleet management systems: Toward smart cyber fleets. *IEEE Intelligent Systems*, 20, 70–76. <https://doi.org/10.1109/MIS.2014.41>
- Braekers, K., & Kovacs, A. A. (2016). A multi-period dial-a-ride problem with driver consistency. *Transportation Research Part B: Methodological*, 94, 355–377. <https://doi.org/10.1016/j.trb.2016.09.010>
- Bräysy, O., & Haske, G. (2014). Software Tools and Emerging Technologies for Vehicle Routing and Intermodal Transportation. In P. Toth & D. Vigo (Eds.), *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications* (Second, pp. 351–380). SIAM. <https://doi.org/10.1137/1.9781611973594.ch12>
- Bruns, F., & Knust, S. (2012). Optimized load planning of trains in intermodal transportation. *OR Spectrum*, 36(3), 631–668. <https://doi.org/10.1007/s00291-010-0232-1>
- Cheung, R. K., & Hang, D. D. (2003). A time-window sliding procedure for driver-task assignment with random service times. *IIE Transactions*, 35(5), 433–444. <https://doi.org/10.1080/07408170304388>
- Cheung, R. K., Hang, D. D., & Shi, N. (2005). A labeling method for dynamic driver-task

- assignment with uncertain task durations. *Operations Research Letters*, 33, 411–420.
<https://doi.org/10.1016/j.orl.2004.08.006>
- Christofides, N. (1976). The vehicle routing problem. *R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle*, 10(2), 55–70. <https://www.rairo-ro.org/articles/ro/pdf/1976/01/ro197610V100551.pdf>
- Coelho, L. C., Cordeau, J. F., & Laporte, G. (2012). Consistency in multi-vehicle inventory-routing. *Transportation Research Part C*, 24, 270–287.
<https://doi.org/10.1016/j.trc.2012.03.007>
- Coslovich, L., Pesenti, R., & Ukovich, W. (2006). Minimizing fleet operating costs for a container transportation company. *European Journal of Operational Research*, 171, 776–786. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.09.005>
- Detti, P., Papalini, F., & Lara, G. de. (2017). A multi-depot dial-a-ride problem with heterogeneous vehicles and compatibility constraints in healthcare. *Omega*, 70, 1–14.
<https://doi.org/10.1016/j.omega.2016.08.008>
- Ertogral, K., Akbalik, A., & González, S. (2017). Modelling and analysis of a strategic fleet sizing problem for a furniture distributor. *European J. of Industrial Engineering*, 11(1), 49–77. <https://doi.org/10.1504/EJIE.2017.081428>
- Farahani, R. Z., Miandoabchi, E., Szeto, W. Y., & Rashidi, H. (2013). A review of urban transportation network design problems. *European Journal of Operational Research*, 229(2), 281–302. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.01.001>
- Fink, A., & Reiners, T. (2006). Modeling and solving the short-term car rental logistics problem. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 42, 272–292. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2004.10.003>
- Freling, R., Huisman, D., & Wagelmans, A. P. M. (2003). Models and algorithms for integration of vehicle and crew scheduling. *Journal of Scheduling*, 6, 63–85.
<https://doi.org/10.1023/A:1022287504028>
- Gavish, B., & Pirkul, H. (1991). Algorithms for the multi-resource generalized assignment problem. *Management Science*, 37(6), 695–713.
<https://doi.org/10.1287/mnsc.37.6.695>

- Groër, C., Golden, B., & Wasil, E. (2009). The Consistent Vehicle Routing Problem. *Manufacturing & Service Operations Management*, 11(4), 630–643. <https://doi.org/10.1287/msom.1080.0243>
- Hane, C. A., Barnhart, C., Johnson, E. L., Marsten, R. E., Nemhauser, G. L., & Sigismondi, G. (1995). The fleet assignment problem: Solving a large-scale integer program. *Mathematical Programming*, 70(1–3), 211–232. <https://doi.org/10.1007/BF01585938>
- Hertz, A., Uldry, M., & Widmer, M. (2012). Integer linear programming models for a cement delivery problem. *European Journal of Operational Research*, 222(3), 623–631. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.04.039>
- Hoff, A., Andersson, H., Christiansen, M., Hasle, G., & Løkketangen, A. (2010). Industrial aspects and literature survey: Fleet composition and routing. *Computers & Operations Research*, 37(12), 2041–2061. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2010.03.015>
- Irnich, S., Toth, P., & Vigo, D. (2014). The Family of Vehicle Routing Problems. In Paulo Toth & D. Vigo (Eds.), *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications*. (Second, pp. 1–33). SIAM. <https://doi.org/10.1137/1.9781611973594.ch1>
- Karsu, Ö., & Azizoğlu, M. (2014). Bicriteria multiresource generalized assignment problem. *Naval Research Logistics (NRL)*, 61(8), 621–636. <https://doi.org/10.1002/nav.21607>
- Kiraz, B., & Topcuoglu, H. R. (2010). Hyper-heuristic approaches for the dynamic generalized assignment problem. *10th IEEE International Conference on Intelligent Systems Design and Applications (ISDA)*, 1487–192. <https://doi.org/10.1109/ISDA.2010.5687121>
- Kogan, K., Khmelnitsky, E., & Ibaraki, T. (2005). Dynamic Generalized Assignment Problems with Stochastic Demands and Multiple Agent–Task Relationships. *Journal of Global Optimization*, 31(1), 17–43. <https://doi.org/10.1007/s10898-004-4273-3>
- Kovacs, A. A., Golden, B. L., Hartl, R. F., & Parragh, S. N. (2014). Vehicle routing problems in which consistency considerations are important: A survey. *Networks*, 64(3), 192–213. <https://doi.org/10.1002/net.21565>
- Kumar, S. N. (2012). A Survey on the Vehicle Routing Problem and Its Variants. *Intelligent Information Management*, 04(03), 66–74. <https://doi.org/10.4236/iim.2012.43010>

- Laurent, B., & Hao, J.-K. (2007). Simultaneous vehicle and driver scheduling: A case study in a limousine rental company. *Computers & Industrial Engineering*, *53*(3), 542–558. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2007.05.011>
- Li, L. Y. O., & Fu, Z. (2002). The school bus routing problem: a case study. *Journal of the Operational Research Society*, *53*(5), 552–558. <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2601341>
- Lima, F. M. S., Pereira, D. S., Conceição, S. V., & Nunes, N. T. R. (2016). A mixed load capacitated rural school bus routing problem with heterogeneous fleet: Algorithms for the Brazilian context. *Expert Systems with Applications*, *56*, 320–334. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2016.03.005>
- Liu, Y. Y., & Wang, S. (2015). A scalable parallel genetic algorithm for the generalized assignment problem. *Parallel Computing*, *46*, 98–119. <https://doi.org/10.1016/j.parco.2014.04.008>
- Loxton, R., Lin, Q., & Teo, K. L. (2012). A stochastic fleet composition problem. *Computers and Operations Research*, *39*(12), 3177–3184. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2012.04.004>
- Markov, I., Varone, S., & Bierlaire, M. (2016). Integrating a heterogeneous fixed fleet and a flexible assignment of destination depots in the waste collection VRP with intermediate facilities. *Transportation Research Part B*, *84*, 256–273. <https://doi.org/10.1016/j.trb.2015.12.004>
- Martinez, A. J. P., Stapleton, O., & Van Wassenhove, L. N. (2011). Field vehicle fleet management in humanitarian operations: A case-based approach. *Journal of Operations Management*, *29*(5), 404–421. <https://doi.org/10.1016/j.jom.2010.11.013>
- Mazzola, J. B., & Neebe, A. W. (2012). A generalized assignment model for dynamic supply chain capacity planning. *Naval Research Logistics (NRL)*, *59*(6), 470–485. <https://doi.org/10.1002/nav.21501>
- Mazzola, J. B., & Wilcox, S. P. (2001). Heuristics for the Multi-Resource Generalized Assignment Problem. *Naval Research Logistics (NRL)*, *48*, 468–483. <https://doi.org/10.1002/nav.1029>

- Mitrović-Minić, S., & Punnen, A. P. (2009). Local search intensified: Very large-scale variable neighborhood search for the multi-resource generalized assignment problem. *Discrete Optimization*, 6(4), 370–377. <https://doi.org/10.1016/j.disopt.2009.04.004>
- Moccia, L., Cordeau, J. F., Monaco, M. F., & Sammarra, M. (2009). A column generation heuristic for a dynamic generalized assignment problem. *Computers and Operations Research*, 36(9), 2670–2681. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2008.11.022>
- Monnerat, F., Dias, J., & Alves, M. J. (2019). Fleet management: A vehicle and driver assignment model. *European Journal of Operational Research*, 278(1), 64–75. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.03.021>
- Morales, D. R., & Romeijn, H. E. (2004). The Generalized Assignment Problem and Extensions. In D.-Z. Du & P. M. Pardalos (Eds.), *Handbook of Combinatorial Optimization* (pp. 259–311). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-387-23830-1_6
- Oliveira, B. B., Carravilla, M. A., & Oliveira, J. F. (2017). Fleet and revenue management in car rental companies : A literature review and an integrated conceptual framework \$. *Omega*, 71, 11–26. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2016.08.011>
- Oliveira, B. B., Carravilla, M. A., Oliveira, J. F., & Toledo, F. M. B. (2014). A relax-and-fix-based algorithm for the vehicle-reservation assignment problem in a car rental company. *European Journal of Operational Research*, 237(2), 729–737. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.02.018>
- Öncan, T. (2007). A Survey of the Generalized Assignment Problem and Its Applications. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 45(3), 123–141. <https://doi.org/10.3138/infor.45.3.123>
- Park, J., & Kim, B. (2010). The school bus routing problem: A review. *European Journal of Operational Research*, 202(2), 311–319. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2009.05.017>
- Park, J., Tae, H., & Kim, B. I. (2012). A post-improvement procedure for the mixed load school bus routing problem. *European Journal of Operational Research*, 217, 204–213. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.08.022>
- Pentico, D. W. (2007). Assignment problems: A golden anniversary survey. *European*

- Journal of Operational Research*, 176(2), 774–793.
<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.09.014>
- Peters, E., de Matta, R., & Boe, W. (2007). Short-term work scheduling with job assignment flexibility for a multi-fleet transport system. *European Journal of Operational Research*, 180(1), 82–98. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.02.032>
- Redmer, A. (2014). Strategic Vehicle Fleet Management - The MAKE or BUY Problem. *Scientific Journal of Logistics*, 10(2), 205–212.
<https://www.logforum.net/volume10/issue2/abstract-9.html>
- Redmer, A. (2015). Strategic Vehicle Fleet Management - The Composition Problem. *Scientific Journal of Logistics*, 11(1), 119–126.
<https://www.logforum.net/volume9/issue1/abstract-11.html>
- Riera-Ledesma, J., & Salazar-González, J. J. (2012). Solving school bus routing using the multiple vehicle traveling purchaser problem: A branch-and-cut approach. *Computers & Operations Research*, 39(2), 391–404. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2011.04.015>
- Sethanan, K., & Pitakaso, R. (2016). Improved differential evolution algorithms for solving generalized assignment problem. *Expert Systems with Applications*, 45, 450–459.
<https://doi.org/10.1016/j.eswa.2015.10.009>
- Shi, N., Song, H., & Powell, W. B. (2014). The dynamic fleet management problem with uncertain demand and customer chosen service level. *International Journal of Production Economics*, 148(2014), 110–121.
<https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2013.09.010>
- Shtub, A., & Kogan, K. (1998). Capacity planning by the dynamic multi-resource generalized assignment problem (DMRGAP). *European Journal of Operational Research*, 105, 91–99. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(97\)00035-0](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00035-0)
- Simão, H. P., Day, J., George, A. P., Gifford, T., Nienow, J., & Powell, W. B. (2009). An Approximate Dynamic Programming Algorithm for Large-Scale Fleet Management: A Case Application. *Transportation Science*, 43(2), 178–197.
<https://doi.org/10.1287/trsc.1080.0238>
- Souza, D. S., Santos, H. G., & Coelho, I. M. (2017). A Hybrid Heuristic in GPU-CPU Based on

- Scatter Search for the Generalized Assignment Problem. *Procedia Computer Science*, 108C, 1404–1413. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2017.05.188>
- Spliet, R., & Dekker, R. (2016). The driver assignment vehicle routing problem. *Networks*, 68(3), 212–223. <https://doi.org/10.1002/net.21694>
- Woodcock, A. J., & Wilson, J. M. (2010). A hybrid tabu search/branch & bound approach to solving the generalized assignment problem. *European Journal of Operational Research*, 207, 566–578. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.05.007>
- Xu, Y., Wang, X., & Sun, T. (2018). Heuristic routing algorithm toward scalable distributed generalized assignment problem. *Soft Computing*, 22, 845–859. <https://doi.org/10.1007/s00500-016-2388-3>
- Yagiura, M., Iwasaki, S., Ibaraki, T., & Glover, F. (2004). A very large-scale neighborhood search algorithm for the multi-resource generalized assignment problem. *Discrete Optimization*, 1(1), 87–98. <https://doi.org/10.1016/j.disopt.2004.03.005>
- Zäpfel, G., & Bögl, M. (2008). Multi-period vehicle routing and crew scheduling with outsourcing options. *International Journal of Production Economics*, 113(2), 980–996. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2007.11.011>