UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Pedro Rafael de Matos Conde

A Teoria de Polinómios Ortogonais na Análise Transitória de Processos de Nascimento e Morte

Dissertação no âmbito do Mestrado em Matemática, Ramo de Análise Aplicada e Computação orientada pelo Professor Doutor Amílcar Branquinho e Professor Doutor João Soares e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Outubro de 2020

A Teoria de Polinómios Ortogonais na Análise Transitória de Processos de Nascimento e Morte

Pedro Conde

UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mestrado em Matemática

Master in Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Outubro 2020

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Professor Doutor Amílcar Branquinho e ao Professor Doutor João Soares pela orientação prestada na realização desta Dissertação. Aproveito também para agradecer à minha família (incuindo aqueles que infelizmente já não estão presentes), amigos e em especial à minha companheira de vida Patrícia Coelho.

O trabalho aqui desenvolvido foi parcialmente realizado no âmbito do projeto MobiWise: From mobile sensing to mobility advising (P2020 SAICTPAC / 0011/2015), co-financiado pelo COMPETE 2020, Portugal 2020 - Programa Operacional de Competitividade e Internacionalização (POCI), do ERDF (Fundo Europeu de Desenvolvimento Regional) da União Europeia e da Fundação portuguesa para a Ciência e Tecnologia (FCT).

FCT
Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR

Cofinanciado por:

COMPETE 2020

PORTUGAL 2020

UNIÃO EUROPEIA
Fundo Europeu
de Desenvolvimento Regional

Resumo

A presente dissertação estuda como a Teoria de Polinómios Ortogonais pode ser utilizada na análise transitória de Processos de Nascimento e Morte. O primeiro capítulo irá introduzir o leitor à Teoria de Polinómios Ortogonais. No capítulo 2 é possível perceber como esta teoria se relaciona com os estudo de Processos de Nascimento e Morte e será apresentada uma solução da probabilidade de transição dos mesmos, neste contexto. Por fim, no terceiro e último capítulo, serão analisados modelos de fila de espera com 1 e 2 servidores, utilizando novamente ferramentas da Teoria de Polinómios Ortogonais; serão ainda apresentadas soluções na forma integral para as probabilidades de transição destes modelos.

Conteúdo

Introdução

Uma das principais características da *Teoria de Polinómios Ortogonais* é a sua é a sua ubiquidade; desde a sua relação com áreas fundamentais da matemática, como a *Teoria de Operadores* ou os *Problemas de Momentos*, até à sua aplicação a àreas do conhecimento como a física quântica e, tal como neste caso, à análise de certos tipos de processos estocásticos. O presente trabalho focar-se-á, especificamente, na linguagem do polinómios ortogonais como ferramenta na análise transitória de *Processos de Nascimento e Morte*, um caso particular de uma *Cadeia de Markov a tempo contínuo*.

O primeiro capítulo terá como objectivo fornecer ao leitor uma bagagem sólida no que diz respeito aos conceitos introdutórios e resultados clássicos da teoria de polinómios ortogonais, assim como construir as fundações para o trabalho subsequente. Com base no trabalho efectuado em [1], o conceito de ortogonalidade de polinómios será dado relativamente a um funcional linear e muitos dos resultados clássicos, como os teoremas de Favard e Christoffel-Darboux, serão discutidos neste contexto. Ainda neste capítulo, esta abordagem será relacionada com aquela utilizado por exemplo em [2], onde o conceito de ortogonalidade de polinómios é trabalhado relativamente a uma função de distribuição, o que será útil nos capítulos seguintes.

No capítulo 2 começaremos por analisar o conceito de *Cadeia de Markov a tempo contínuo*, com base em [3], demonstrando como é possível estudar as probabilidades de transição entre estados, deste tipo de processos estocásticos, através dos sistemas de equações diferenciais lineares de Chapmann-Kolmogorov e, mais concretamente, como podemos decrevê-los no contexto de um processo de nascimento e morte. Assim, será possível introduzir o leitor às secções seguintes deste mesmo capítulo, onde finalmente a teoria de polinómios ortogonais será utilizada como ferramenta na análise destes mesmo sistemas; este trabalho consistirá numa versão mais detalhada (e com pequenas correções) do trabalho efectuado em [2]. Neste contexto, começaremos por identificar os polinómios que iremos associar a um processo de nascimento e morte genérico e apresentar uma candidata a solução sistemas de Chapmann-Kolmogorov, com base nestes mesmos polinómios. Discutir-se-á ainda a existência de ortogonalidade para os polinómios com que escolhemos trabalhar e por fim será apresentado, com todo o detalhe, o processo pelo qual as probabilidades de transição de um processo de nascimento e morte podem ser dadas neste contexto.

O capítulo 3 irá, de certa forma, concretizar o trabalho previamente realizado. Teremos assim como objectivo determinar as probabilidades de transição de casos concretos de processos de nascimento e morte, mais especificamente de modelos de fila de espera como 1 ou 2 servidores. Este trabalho consistirá essencialmente, graças ao que concluímos no capítulo 2, no estudo da ortogonalidade dos polinómios que associaremos a estes mesmos modelos. Para tal, será importante ter em consideração alguns conceitos teóricos adicionais, como o *Teorema de Markov*, e analizaremos ainda o trabalho efectuado em [4], no contexto dos polinómios de Chebychev, como ponto de partida para o raciocínio subsequente. O percurso será a partir daí análogo para os dois modelos que nos propusémos a estudar, com naturais distinções a partir do momento em que é possível concretizar uma candidata a função peso de ortogonalidade para cada um dos casos. Serão, ao longo deste capítulo, discutidos alguns resultados teóricos (devidamente referenciados) cujas demonstrações serão omitidas, mantendo assim o foco do trabalho aqui realizado nas especificidades dos casos em estudo.

Capítulo 1

Polinómios Ortogonais

Neste capítulo iremos explorar o conceito de ortogonalidade num contexto polinomial. Ao contrário do conceito amplamente conhecido de ortogonalidade para espaços vectorias, que faz uso da construção de um *produto interno*, iremos neste contexto trabalhar com um tipo específico de funcionares lineares, que começaremos por introduzir. O conceito de *polinómios ortogonais* será então posteriormente dado relativamente a estes mesmos funcionais.

1.1 Funcional de momentos

Definição 1 *Dada uma sequência de números complexos* (u_n), $n \in \mathbb{N}_0$, *dizemos que* $L\colon \mathbb{P}[x] \to \mathbb{C}$ *é um* ***funcional de momentos****, determinado pela sequência* (u_n)*, que neste contexto se diz uma* ***sequência de momentos****, se* L *for linear e*

$$L[x^n] = u_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0$$

Ao n-ésimo elemento da sequência de momentos chamamos ***momento de ordem*** n*.*

Desta forma, um funcional de momentos L está unicamente determinado pela respetiva sequência de momentos (u_n), $n \in \mathbb{N}_0$.

Em certos casos, como veremos no capítulo 3, será até possível escrever o funcional L à custa de um simples integral de Riemann e de uma função peso ω, da forma

$$L[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \omega(x)\, dx,$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. No entanto, usualmente, o funcional de momentos L, é definido à custa de um integral de Riemann-Stieltjes e uma função de distribuição ψ (dissertaremos sobre este tema com mais profundidade mais à frente neste capítulo). Neste caso o funcional será então denotado, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, da forma

$$L[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, d\psi(x).$$

1.1.1 Integral de Riemann-Stieltjes

Seja $[a,b] \in \mathbb{R}$ um intervalo fechado e limitado. Uma função $\psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ diz-se de *variação limitada* se existir um escalar real C tal que

$$V_a^b(\psi) \equiv \sup_{P\in\mathscr{P}} \sum_{k=1}^{n} |\psi(x_k) - \psi(x_{k-1})| \leq C$$

onde P denota, genericamente, uma partição de $[a,b]$ determinada por algum $n \in \mathbb{N}$ e por algum conjunto de $n+1$ pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, tais que $a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, e $\mathscr{P}$ denota o conjunto de todas essas partições. Ao valor de $V_a^b(\psi)$ chama-se *variação total* de ψ. Ao valor de

$$|P| \equiv \max_{i=1,2,\ldots,n} (x_{i+1} - x_i)$$

chamamos amplitude de P.

Note-se que uma função ψ definida em toda a recta real $(-\infty,\infty)$ diz-se de variação limitada se e só se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$V_a^b(\psi) \leq C,$$

para todo o par de números reais a, b $(a < b)$. Nestas condições, a variação total da função ψ é denotada por

$$V_{-\infty}^{\infty}(\psi) \equiv \lim_{(a,b)\to(-\infty,\infty)} V_a^b(\psi).$$

Seja $[a,b]$ um intervalo fechado e limitado. Seja $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função de variação limitada em $[a,b]$. Dizemos que uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é *integrável à Riemann-Stieltjes* (relativamente a ψ) se existir um número real A tal que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P_\varepsilon \in \mathscr{P}$ tal que se $P \in \mathscr{P}$ e

$$|P| < |P_\varepsilon|,$$

então

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,[\psi(x_{i+1}) - \psi(x_i)] - A \right| < \varepsilon, \quad \text{para todo } \xi_i \in [x_{i+1}, x_i]\,,\ i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Diremos, então, que o integral de Riemann-Stieltjes de f em $[a,b]$ (relativamente a ψ) é A, e denota-se matematicamente por

$$\int_a^b f(x)\, d\psi(x) = A.$$

Se as funções f e ψ estiverem definidas em toda recta real e ψ for de variação limitada em $\mathbb{R}$, então podemos generalizar definição anterior, denotando o integral impróprio de Riemann-Stieltjes por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\psi(x) = \lim_{(a,b)\to(-\infty,\infty)} \int_a^b f(x)\, d\psi(x).$$

1.2 Introdução à Teoria de Polinómios Ortogonais

Definição 2 *Dado um funcional de momentos L, dizemos que a sequência de polinómios $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é uma* ***sequência de polinómios ortogonais*** *relativamente a L se, para todo $n,m \in \mathbb{N}_0$:*

$$L[P_m(x)P_n(x)] = 0, \ \ \textit{para todo } m \neq n, \qquad\qquad L[P_n(x)P_n(x)] = K_n \neq 0.$$

Diremos, ainda, que uma sequência de polinómios ortogonais $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é ortonormada se $K_n = 1$, para todo n.

Observação 1 *Caso o funcional de momento L possa ser escrito à custa de um integral de Riemann-Stieltjes e uma função de distribuição ψ, dizemos que a sequência de polinómios em causa é ortogonal relativamente à função de distribuição ψ. Por outro lado quando é possível possível escrever o funcional L à custa de um integral de Riemann e de uma função peso ω, a sequência de polinómios em causa é dita ser ortogonal relativamente à função peso ω.*

Se $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é uma sequência de polinómios ortogonais relativamente a um funcional de momentos L e denotarmos por a_n o coeficiente do termo de maior grau de cada polinómio P_n, então, como é simples de ver, $(Q_n \equiv P_n/a_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é uma sequência de polinómios ortogonais mónicos relativamente ao mesmo funcional linear. Além disso, $L[Q_n(x)Q_n(x)] = K_n/a_n^2$, para todo n.

Teorema 1 *Se $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é uma sequência de polinómios ortogonais relativamente a um funcional de momentos L, então, para todo $P \in \mathbb{P}[x]$, de grau genérico m, existem escalares complexos $c_0, c_1, \dots, c_m$, com $c_m \neq 0$, tais que*

$$P(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + \cdots + c_mP_m(x) \equiv \sum_{k=0}^{m} c_kP_k(x). \tag{1.1}$$

Além disso, esses escalares são únicos e definidos por

$$c_k = \frac{L[P(x)P_k(x)]}{L[P_k^2(x)]}, \quad k = 0,1,\dots,m.$$

Prova: A sequência (finita) de polinómios $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)\}$ é uma base do subespaço vectorial composto pelos polinómios de grau igual ou inferior a m. Assim, para qualquer polinómio $P(x)$ de grau m, existem coeficientes c_k, tais que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} c_kP_k(x), \quad c_m \neq 0, \tag{1.2}$$

Note-se ainda que, para $i = 1, 2, \ldots, m$, multiplicando (1.2) por $P_i(x)$ e aplicando o funcional linear L,

$$L[P(x)P_i(x)] = \sum_{k=0}^{m} c_k L[P_k(x)P_i(x)] = c_i L[P_i^2(x)].$$

Dado que $L[P_i^2(x)] \neq 0$, obtemos finalmente,

$$c_i = \frac{L[P(x)P_i(x)]}{L[P_i^2(x)]}, \quad i = 0, 1, \ldots, m,$$

concluindo assim a prova. ■

O próximo teorema permite-nos, por um lado obter uma forma mais simples de provar a existência de ortogonalidade para o uma dada sequência de polinómios e, por outro, extrair fortes consequências da existência deste tipo de relações de ortogonalidade.

Teorema 2 *Seja $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ uma sequência de polinómios e seja L um funcional de momentos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é uma sequência de polinómios ortogonais relativamente a L.*
2. *Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e para todo $P \in \mathbb{P}[x]$, de grau $m \leq n$,*

$$L[P(x)P_n(x)] = 0, \ \text{se } m < n, \qquad L[P(x)P_n(x)] \neq 0, \ \text{se } m = n.$$

3. *Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e para todo $m \leq n$,*

$$L[x^m P_n(x)] = 0, \ \text{se } m < n, \qquad L[x^n P_n(x)] \neq 0, \ \text{se } m = n.$$

Prova: Suponhamos que (1) se verifica. Fixado $n \in \mathbb{N}_0$, seja $P \in \mathbb{P}[x]$, qualquer, de grau $m \leq n$. Pelo Teorema 1 existem escalares existem escalares complexos $c_0, c_1, \ldots, c_m$, com $c_m \neq 0$, tais que (1.1) se verifica. Então,

$$L[P(x)P_n(x)] = c_0 L[P_0(x)P_n(x)] + c_1 L[P_1(x)P_n(x)] + \cdots + c_m L[P_m(x)P_n(x)].$$

Portanto, pela definição de ortogonalidade para polinómios: (i) se $m < n$, $L[P(x)P_n(x)] = 0$; (ii) se $m = n$, $L[P(x)P_n(x)] = c_n L[P_n(x)P_n(x)] \neq 0$. Portanto, (2) verifica-se. Claramente, (2) implica (3), em particular.

Suponhamos que (3) se verifica. Sejam $m, n \in \mathbb{N}_0$, quaisquer. Sem perda de generalidade, $m \leq n$. Então,

$$\begin{aligned} L[P_m(x)P_n(x)] &= L[(a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m)\, P_n(x)] \\ &= a_0 L[P_n(x)] + a_1 L[x P_n(x)] + \cdots + a_m L[x^m P_n(x)], \end{aligned}$$

pelo que, $L[P_m(x)P_n(x)] = 0$ se $m < n$, e $L[P_m(x)P_n(x)] = a_m L[x^m P_n(x)] \neq 0$ se $m = n$. ■

Vamos agora averiguar que condições impôr à sequência de números complexos (u_n), $n \in \mathbb{N}_0$, para que possa existir uma sequência de polinómios ortogonais relativamente ao funcional de momentos determinado por (u_n).

Teorema 3 *Dada uma sequência de números complexos* (u_n)*,* $n \in \mathbb{N}_0$*, existe uma sequência de polinómios ortogonais relativamente ao funcional linear determinado por esses momentos se, e somente se,*

$$\Delta_n \equiv \det(A_n) \neq 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0,$$

onde

$$A_n \equiv \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n} \end{bmatrix}.$$

Prova: Suponhamos que $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é uma sequência de polinómios ortogonais relativamente ao funcional de momentos L, determinado pela sequência de números complexos (u_n), $n \in \mathbb{N}_0$. Seja $n \in \mathbb{N}_0$, qualquer, e assuma-se que

$$P_n(x) \equiv a_{n,0} + a_{n,1}x + \ldots + a_{n,n}x^n \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \tag{1.3}$$

Para cada $m = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$0 = L[x^m P_n(x)] = L\left[x^m \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} L\left[x^{m+k}\right] = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} u_{m+k}, \tag{1.4}$$

e, para $m = n$,

$$0 \neq K_n \equiv L[x^n P_n(x)] = L\left[x^n \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} L\left[x^{n+k}\right] = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} u_{n+k}, \tag{1.5}$$

Matricialmente, (1.4)-(1.5) correspondem a afirmar que $(a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots, a_{n,n})$ é solução do seguinte sistema de equações lineares nas variáveis $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$

$$\begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Seguidamente, demonstramos por indução em n que $\Delta_n \neq 0$. Quando $n = 0$, (1.6) reduz-se a

$$\begin{bmatrix} u_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \end{bmatrix} = K_0 \neq 0.$$

Como este sistema tem solução, $\Delta_0 = \mu_0 \neq 0$. Suponhamos, por hipótese de indução, que $\Delta_{n-1} \neq 0$, para algum $n \geq 1$ O sistema (1.6) pode ser reescrito da forma

$$\begin{bmatrix} A_{n-1} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}' \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ K_n \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

onde K_n denota um escalar não nulo e

$$\mathbf{b} \equiv \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{2n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}' = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad c = u_{2n}.$$

Como, por hipótese de indução, A_{n-1} é invertível, o sistema de equações (1.7) é equivavelente a

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & c - \mathbf{b}^T A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}' \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ K_n \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

Como, por hipótese, (1.8) tem solução e $K_n \neq 0$, concluímos que $c - \mathbf{b}^T A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \neq 0$. Por outro lado, como

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} & A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & c - \mathbf{b}^T A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

concluímos que

$$\Delta_n \equiv \det(A_n) = \det(A_{n-1})\left(c - \mathbf{b}^T A_{n-1}^{-1}\mathbf{b}\right) \neq 0,$$

pela hipótese de indução.

Reciprocamente, suponhamos agora que $\Delta_n \neq 0$, para todo n. Construa-se uma sequência de polinómios $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ em que, para n genérico, $P_n(x)$ é da forma (1.3) com os escalares $(a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots, a_{n,n})$ definidos pela única solução do sistema de equações (1.6), em que K_n é um escalar não nulo escolhido arbitrariamente.

Seja $n \in \mathbb{N}_0$ fixo. Para todo $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $m < n$,

$$L[x^m P_n(x)] = L\left[x^m \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^k\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} L\left[x^{m+k}\right] = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} u_{m+k} = 0.$$

porque corresponde à verificação da $(m+1)$-ésima equação de (1.6) em $(a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n})$. Por outro lado,

$$L[x^n P_n(x)] = L\left[x^n\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} L\left[x^{n+k}\right] = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} u_{n+k} = K_n \neq 0.$$

porque corresponde à verificação da $(n+1)$-ésima equação de (1.6) em $(a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n})$. Pelo Teorema 2, $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é uma sequência de polinómios ortogonais relativamente a L. ■

Corolário 1 *[1] Seja $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ uma sequência de polinómios ortogonais relativamente um funcional de momentos L determinado por uma sequência de números complexos (u_n), $n \in \mathbb{N}_0$. Então, $u_0 a_0 = K_0$ e*

$$\Delta_n a_n = \Delta_{n-1} K_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde a_n denota o coeficiente do termo de maior grau de $P_n(x)$ e K_n denota $L[x^n P_n(x)]$. Além disso, se $P \in \mathbb{P}[x]$, de grau n, então

$$L[P(x)P_n(x)] = a_n b_n \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

onde b_n denota o coeficiente do termo de maior grau de $P(x)$.

1.3 Favard, Christoffle-Darboux e os zeros dos polinómios

Seja $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ uma sequência de polinómios definida pela relação de recorrência

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.9}$$
$$P_{-1}(x) = 0, \; P_0(x) = 1, \tag{1.10}$$

onde $(\alpha_n), (\beta_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, denotam duas sequências de números complexos.

Teorema 4 (Teorema de Favard) *Seja $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ uma sequência de polinómios definida pela relação de recorrência (1.9). Se $\beta_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ então existe uma funcional de momentos relativamente à qual $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é uma sequência de polinómios ortogonais.*

Prova: Por construção, cada um dos polinómios $P_n(x)$ definidos pela relação de recorrência (1.9) é um polinómio de grau n. Por isso, $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é uma base do espaço vetorial $P[x]$. Defina-se um funcional linear $L\colon P[x] \to \mathbb{C}$ através dos seus valores nessa base de $P[x]$, nomeadamente,

$$L[P_0(x)] = 1, \qquad L[P_n(x)] = 0, \text{ para todo } n = 1, 2, \dots$$

Vamos agora provar por indução em m que

$$L[x^m P_n(x)] = 0 \text{ para todo } n > m, \qquad L[x^m P_m(x)] = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m \neq 0, \tag{1.11}$$

para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Para $m = 0$, temos $L[x^0 P_n(x)] = L[P_n(x)] = 0$, para todo $n > m$, e $L[x^0 P_0(x)] = L[P_0(x)] = 1 \neq 0$. Por hipótese de indução (forte) suponhamos que (1.11) é verdade para $m \in \mathbb{N}_0$ e todos os inferiores. Então, para todo $n > m+1$,

$$\begin{aligned} L\left[x^{m+1} P_n(x)\right] &= L\left[x^m \left(x P_n(x)\right)\right] \\ &= L\left[x^m \left(\beta_n P_{n-1}(x) + P_{n+1}(x) + \alpha_n P_n(x)\right)\right] \\ &= \beta_n L\left[x^m P_{n-1}(x)\right] + L\left[x^m P_{n+1}(x)\right] + \alpha_n L\left[x^m P_n(x)\right] \end{aligned}$$

que, pela hipótese de indução, é igual a zero. Finalmente,

$$\begin{aligned} L\left[x^{m+1} P_{m+1}(x)\right] &= L\left[x^m \left(x P_{m+1}(x)\right)\right] \\ &= L\left[x^m \left(\beta_{m+1} P_m(x) + P_{m+2}(x) + \alpha_{m+1} P_{m+1}(x)\right)\right] \\ &= \beta_{m+1} L\left[x^m P_m(x)\right] + L\left[x^m P_{m+2}(x)\right] + \alpha_{m+1} L\left[x^m P_{m+1}(x)\right] \\ &= \beta_{m+1} L\left[x^m P_m(x)\right], \\ &= \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{m+1}, \end{aligned}$$

que, pela hipótese de indução, é diferente de zero. ■

Teorema 5 (recíproco do Teorema de Favard) *Seja $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ uma sequência de polinómios ortogonais mónicos relativamente a um funcional de momentos L, com sequência de momentos $(u_n), n \in \mathbb{N}_0$. Então, existem escalares $\alpha_n, n \in \mathbb{N}_0$, e $\beta_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, tal que $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é definida por* (1.9).

Prova: Como $P_0(x) \equiv 1$, então $u_0 = L[1] = L[P_0] = L[P_0^2] \neq 0$. Por outro lado,

$$0 = L\left[P_1 \cdot P_0\right] = L\left[(x-\alpha) \cdot 1\right] = L[x] - L[\alpha] = u_1 - \alpha L[1] = u_1 - \alpha u_0,$$

pelo que, $\alpha = u_1/u_0$. Portanto, $P_1(x) \equiv x - \alpha_0$, para $\alpha_0 = u_1/u_0$. Para $n = 1$, atendendo à ortogonalidade da sequência $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ e ao Teorema 1,

$$x P_1(x) \equiv \left(\frac{L\left[x P_1 P_0\right]}{L\left[P_0^2\right]}\right) P_0(x) + \left(\frac{L\left[x P_1 P_1\right]}{L\left[P_1^2\right]}\right) P_1(x) + \left(\frac{L\left[x P_1 P_2\right]}{L\left[P_2^2\right]}\right) P_2(x),$$

com

$$\left(\frac{L\left[x P_1 P_2\right]}{L\left[P_2^2\right]}\right) = 1,$$

pois $x P_1(x)$ é um polinómio mónico de grau 2. Note-se ainda que, pelo Teorema 2,

$$\left(\frac{L\left[x P_1 P_0\right]}{L\left[P_0^2\right]}\right) = \left(\frac{L\left[P_1 \left(x P_0\right)\right]}{L\left[P_0^2\right]}\right) \neq 0.$$

Considere-se agora $n \geq 2$, arbitrário. Pelo Teorema 1,

$$xP_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{L[xP_nP_k]}{L\left[P_k^2\right]} \right) P_k(x).$$

Ora, atendendo à ortogonalidade da sequência $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$,

$$L[xP_nP_k] = L[P_n(xP_k)] = 0, \qquad \text{para } k = 0, 1, \ldots, n-2,$$

pelo que

$$xP_n(x) \equiv \beta_n P_{n-1}(x) + \alpha_n P_n(x) + P_{n+1}(x),$$

com

$$\beta_n \equiv \frac{L[xP_nP_{n-1}]}{L\left[P_{n-1}^2\right]}$$

e

$$\alpha_n \equiv \frac{L[xP_nP_n]}{L(P_n^2]},$$

porque $xP_n(x)$ é um polinómio mónico de grau $n+1$. Note-se que, pelo Teorema 2,

$$\beta_n \equiv \left(\frac{L[xP_nP_{n-1}]}{L\left[P_{n-1}^2\right]} \right) = \left(\frac{L[P_n(xP_{n-1})]}{L\left[P_{n-1}^2\right]} \right) \neq 0.$$

Portanto, por construção, existem escalares $\alpha_n, n \in \mathbb{N}_0$, e $\beta_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, tal que a sequência de polinómios $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é definida pela relação de recorrência (1.9). ■

Teorema 6 (Teorema de Christoffel-Darboux) *Seja $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ uma sequência de polinómios definida pela relação de recorrência (1.9). Se $\beta_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então, para todo $x \neq y$,*

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{P_k(x)P_k(y)}{h_k} = \frac{1}{h_{N-1}} \frac{P_N(x)P_{N-1}(y) - P_N(y)P_{N-1}(x)}{(x-y)}. \tag{1.12}$$

onde $h_k = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_k$ para $k \geq 1$ e $h_0 = 1$.

Prova: Por (1.9), para todo $x \neq y$ e para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$xP_k(x) = P_{k+1}(x) + \alpha_k P_k(x) + \beta_k P_{k-1}(x) \tag{1.13}$$

$$yP_k(y) = P_{k+1}(y) + \alpha_k P_k(y) + \beta_k P_{k-1}(y), \tag{1.14}$$

pelo que, após multiplicar ambos os membros da igualdade (1.13) por $P_k(y)$ e ambos os membros da igualdade (1.14) por $P_k(x)$, obtemos

$$xP_k(x)P_k(y) = P_{k+1}(x)P_k(y) + \alpha_k P_k(x)P_k(y) + \beta_k P_{k-1}(x)P_k(y)$$

$$yP_k(y)P_k(x) = P_{k+1}(y)P_k(x) + \alpha_k P_k(y)P_k(x) + \beta_k P_{k-1}(y)P_k(x).$$

Após subtrair estas duas igualdades, obtemos

$$(x-y)P_k(x)P_k(y) = \Delta_k(x,y) - \beta_k \Delta_{k-1}(x,y), \tag{1.15}$$

para $\Delta_{k-1}(x,y) \equiv P_k(x)P_{k-1}(y) - P_k(y)P_{k-1}(x)$. Após dividir ambas as igualdades em (1.15) por h_k, obtemos

$$\frac{(x-y)P_k(x)P_k(y)}{h_k} = \frac{\Delta_k(x,y)}{h_k} - \frac{\Delta_{k-1}(x,y)}{h_{k-1}}, \tag{1.16}$$

pelo que

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{(x-y)P_k(x)P_k(y)}{h_k} = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\Delta_k(x,y)}{h_k} - \frac{\Delta_{k-1}(x,y)}{h_{k-1}} \right) = \frac{\Delta_{N-1}(x,y)}{h_{N-1}} - \frac{\Delta_0(x,y)}{h_0},$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{P_k(x)P_k(y)}{h_k} &= \frac{P_N(x)P_{N-1}(y) - P_N(y)P_{N-1}(x)}{(x-y)h_{N-1}} - \frac{P_1(x)P_0(y) - P_1(y)P_0(x)}{(x-y)h_0} + \frac{P_0(x)P_0(y)}{h_0} \\ &= \frac{P_N(x)P_{N-1}(y) - P_N(y)P_{N-1}(x)}{(x-y)h_{N-1}}, \end{aligned}$$

uma vez que $P_1(x)P_0(y) - P_1(y)P_0(x) = x - y$ e $P_0(x)P_0(y) = 1$. ■

Atendendo a que o membro do lado direito da igualdade em (1.12) é igual a

$$\frac{1}{h_{N-1}} \left[P_{N-1}(x) \frac{P_N(y) - P_N(x)}{y-x} - P_N(x) \frac{P_{N-1}(y) - P_{N-1}(x)}{y-x} \right]$$

facilmente se conclui que, para todo x,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{P_k^2(x)}{h_k} = \frac{P_{N-1}(x)P_N'(x) - P_N(x)P_{N-1}'(x)}{h_{N-1}}, \tag{1.17}$$

bastando para isso tomar o limite, quando y tende para x. A expressão (1.17) é também conhecida como *fórumula confluente de Christoffel-Darboux*

Teorema 7 *Seja $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ uma sequência de polinómios definida pela relação de recorrência (1.9). Se os escalares $\alpha_n, n \in \mathbb{N}_0$, $\beta_n, n \in \mathbb{N}$, são todos números reais e $\beta_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então os* *zeros de cada polinómio P_n, com $n \in \mathbb{N}$, são reais e de multiplicidade um. Além disso, as raízes de P_n e P_{n-1}, para $n \geq 2$, entrelaçam-se.*

Prova: Como os escalares $\alpha_n, n \in \mathbb{N}_0$, e $\beta_n, n \in \mathbb{N}$, são todos números reais, todos os polinómios $P_n, n \in \mathbb{N}$, têm coeficientes reais. Em particular, isso implica que, para todo $z \in \mathbb{C}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{P_n(z)} = P_n(\bar{z}),$$

onde $\bar{z}$ denota o conjugado complexo do complexo z. Portanto, se um dos polinómios P_n tiver uma raiz complexa não real u, então $\bar{u}$ é uma outra raiz de P_n, distinta de u. Pelo Teorema 6 (de Christoffel-Darboux),

$$0 = \frac{1}{h_{n-1}} \frac{P_n(u)P_{n-1}(\bar{u}) - P_n(\bar{u})P_{n-1}(u)}{(u-\bar{u})} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(u)P_k(\bar{u})}{h_k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|P_k(u)|}{h_k} \geq 1,$$

o que é absurdo. Assim, concluímos que nenhum dos polinómios P_n tem alguma raiz complexa não real.

Provamos agora que, nenhum dos polinómios P_n tem alguma raiz de multiplicidade maior do que um. Se um dos polinómios P_n tiver uma raiz u de multiplicidade maior do que 1, então $P(u) = P_n'(u) = 0$. Por (1.17), que decorre do Teorema 6 (de Christoffel-Darboux),

$$0 = \frac{P_{n-1}(u)P_n'(u) - P_n(u)P_{n-1}'(u)}{h_{n-1}} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k(u)^2}{h_k} \geq 1,$$

o que é absurdo. Portanto, todas as raízes de todos os polinómios $P_n, n \in \mathbb{N}$ são reais e simples.

Finalmente, seja $n \geq 2$, qualquer. Vamos provar que as raízes dos polinómios P_n e P_{n-1} se entrelaçam. Denotem-se as raízes de P_n por $u_{n,1}, u_{n,2}, \ldots, u_{n,n}$, indexadas de modo que

$$u_{n,1} > u_{n,2} > \ldots > u_{n,n}$$

(ordem crescente também serviria), pelo que os sinais da sequência

$$P_n'(u_{n,1}), \; P_n'(u_{n,2}), \; \ldots, \; P_n'(u_{n,n})$$

alternam entre positivo e negativo[1]. Por (1.17), que decorre do Teorema 6 (de Christoffel-Darboux), para todo $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{P_n'(u_{n,j})P_{n-1}(u_{n,j})}{h_{n-1}} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{P_k^2(u_{n,j})}{h_k} = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{P_k^2(u_{n,j})}{h_k} > 0,$$

o que, em particular, implica que

$$P_n'(u_{n,j})P_{n-1}(u_{n,j}) > 0, \text{ para todo } j = 1, 2, \ldots, n,$$

[1] Para qualquer função contínua, os valor das derivadas em duas raízes simples consecutivas tem sinais contrários.

Portanto,os sinais da sequência

$$P_{n-1}(u_{n,1}),\ P_{n-1}(u_{n,2}),\ \ldots,\ P_{n-1}(u_{n,n})$$

alternam entre positivo e negativo. Por isso, as $n-1$ raízes de P_{n-1} encontram-se nos intervalos

$$(u_{n,1},u_{n,2}),\quad (u_{n,2},u_{n,3}),\quad \ldots,\quad (u_{n,n-1},u_{n,n}),$$

uma em cada um. ∎

1.4 Funcional de momentos definido positivo

Iremos agora estudar um tipo específico de funcional de momentos bastante recorrente no estudo da ortogonalidade de polinómios, que denominaremos funcional de momentos *definido positivo*. Perceberemos na secção seguinte que este tipo de funcional de momentos poderá ser sempre caracterizado por um intergral de Riemann-Stieltjes, o que claramente justifica dissertar brevemente sobre algumas das suas propriedades.

Definição 3 *Um funcional de momentos L: $\mathbb{P}[x] \to \mathbb{C}$ diz-se* ***definido positivo*** *se $L[P(x)] \in \mathbb{R}$ e $L[P(x)] > 0$, para todo o polinómio $P(x)$, não identicamente nulo, que seja não negativo para todo o $x \in \mathbb{R}$.*

Teorema 8 *Se L é definido positivo, então os seus momentos são reais e existe uma sequência de polinómios ortogonais relativamente a L, composta por polinómios de coeficientes reais.*

Prova: Seja L um funcional de momentos definido positivo, comcemos por provar que os momentos de L são reais. Da Definição 3 decorre trivialmente que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ par,

$$u_n = \mathrm{L}[x^n] \in \mathbb{R}.$$

Resta então provar o mesmo resultado para $n \in \mathbb{N}$ ímpar. Consideremos então $n = 2k+1$, com $k \in \mathbb{N}_0$. De forma a contruir uma prova por indução, comecemos por tomar $k = 0$. Note-se que

$$L\left[(x+1)^2\right] = L\left[x^2\right] + 2L[x] + L[1].$$

Assim, tendo mais uma vez em conta que L é definido positivo,

$$L[x] = \frac{1}{2}\left(L\left[(x+1)^2\right] - L\left[x^2\right] - L[1]\right) \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos então que o resultado é válido para $n < 2k+1$. Note-se agora que

$$L\left[(x+1)^{2k+2}\right] = \sum_{i=0}^{2k+2} \binom{2k+2}{i} L\left[x^i\right].$$

Logo, como o L é definido positivo,

$$L\left[x^{2k+1}\right] = L\left[(x+1)^{2k+2}\right] - \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k+2}{i} L\left[x^i\right] - L\left[x^{2k+2}\right] \in \mathbb{R}.$$

Conluímos assim finalmente que os momentos de L são todos reais.

Pretendemos agora mostrar que existe uma sequência de polinómios ortogonais relativamente a L, composta por polinómios de coeficientes reais. Consideremos então $P_0(x)$,$P_1(x)$,...,$P_n(x)$, de forma a que $P_i(x)$ seja um polinómio real de grau i e

$$L[P_i^2(x)] = 1, \tag{1.18}$$
$$L[P_i(x)P_j(x)] = 0 \quad i \neq j, \tag{1.19}$$

para $i, j = 0, 1, \ldots n$. Defina-se agora P_{n+1} da forma

$$P_{n+1} = x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x), \qquad c_k = L[x^{n+(x)1} P_k(x)].$$

Note-se que P_{n+1} é um polinómio real de grau $n+1$. Temos então que, para $i = 0, 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} L[P_i(x)P_{n+1}(x)] &= L[x^{n+1}P_i(x)] - \sum_{k=0}^{n} c_k L[P_i(x)P_k(x)] \\ &= c_i - c_i = 0 \end{aligned}$$

Note-se que que no segundo passo é utilizada a definição de c_k e (1.18). É claro ainda $P_{n+1}^2 \geq 0$, logo, como L é definido positivo,

$$L[P_{n+1}^2] = K_n$$

para algum $K_n > 0$. Note-se que tomando $P_0(x) = u_0^{-1}$, então

$$L[P_0^2(x)] = u_0^{-2} L[1] = u_0^{-1} \neq 0,$$

pelo que o raciocínio anterior pode ser aplicado por indução, demonstrando a existência de uma sequência de polinómios ortogonais relativamente a L, de polinómios reais. ∎

Lema 1 *Se $\pi(x)$ um polinómio que é não negativo para todo $x \in \mathbb{R}$, então existem polinómios $p(x)$ e $q(x)$ tais que*

$$\pi(x) = p^2(x) + q^2(x).$$

Prova: $\pi(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo os seus zeros são reais de multiplicidade par ou complexos em pares conjugados. Assim, sendo m o número de pares conjugados de zeros complexos de $\pi(x)$, este pode ser escrito da forma

$$\pi(x) = r^2(x)\prod_{k=1}^{m}(x-\alpha_k-\beta_k i)(x-\alpha_k+\beta_k i),$$

com $r(x)$ um polinómio real e números reais α_k, β_k. Tomando

$$\prod_{k=1}^{m}(x-\alpha_k-\beta_k i) = A(x)+iB(x),$$

com $A(x)$ e $B(x)$ polinómios reais, obtemos

$$\pi(x) = r^2(x)[A^2(x)+B^2(x)] = [A(x)r(x)]^2+[B(x)r(x)]^2.$$

Finalmente, tomando

$$p(x) = A(x)r(x), \quad q(x) = B(x)r(x),$$

fica demonstrado o resultado. ■

Teorema 9 *Um funcional de momentos L é definido positivo se e só se os seu momentos forem reais e* $\Delta_n > 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}_0$.

Prova: Comecemos por supor que os momentos de L são reais e $\Delta_n > 0$. Pelo Teorema 3 é possível afirmar que existe uma sequência se polinómios ortogonais, $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$, relativamente a L. Sem perda de generalidade e para simplificação dos cálculos podemos assumir que a sequência de polinómios $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é composta por polimónios mónicos. Pelo Corolário 1 e pela hipótese é claro que

$$L[P_n^2] = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > 0.$$

Assim, de forma análoga ao que foi feito na prova do Teorema 8 é possível provar que os polinómios $P_n(x)$ são reais. Desta forma, tomando um polinómio real $p(x)$ de grau m qualquer, este pode escrito da forma

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k P_k(x),$$

com c_k, $k = 1,\ldots,m$, reais e $c_m \neq 0$. Utilizando este facto e recorrendo à ortogonalidade de $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é verdade que

$$L[p^2(x)] = \sum_{j,k=0}^{m} c_j c_k L[P_j(x)P_k(x)] = \sum_{k=0}^{m} c_k^2 L[P_k^2(x)] > 0. \tag{1.20}$$

Finalmente, pelo Lema 1, seja $\pi(x)$ um polinómio que é não negativo para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\pi(x) = p^2(x) + q^2(x),$$

logo

$$L[\pi(x)] = L[p^2(x)] + L[q^2(x)] > 0,$$

pelo que L é definido positivo.

Suponhamos agora que L é definido positivo. Pelo Teorema 8, os seus momentos são reais e existe uma sequência de polinómios ortogonais, $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$, relativamente a L. Sem perda de generalidade, podemos novamente supor que os polinómios P_n são mónicos. Assim, tendo novamente em conta o Corolário 1,

$$0 < L[P_n^2] = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

com $\Delta_{-1} = 1$. Finalmente podemos então concluir que $\Delta_n > 0$, para $n \geq 0$. ■

1.5 Representação por uma função de distribuição

Nesta secção pretendemos ilustrar as condições em que é possível caracterizar um funcional de momentos definido positivo através de um integral de Riemann-Stieltjes, à custa de uma *função de distibuição*:

Definição 4 *Uma **função de distribuição** é uma função $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitada, não decrescente e tal que, para todo $n = 0, 1, \ldots$,*

$$u_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, d\psi(x)$$

é finito. Chamamos a u_n o momento de ordem n de ψ.

Esta caracterização terá como ponto de partida a *fórmula de quadratura de Gauss.*

Teorema 10 (Fórmula de Quadratura de Gauss) *Seja L um funcional de momentos definido positivo e seja $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ uma sequência de polinómios ortogonais relativamente a L. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existem n reais positivos $w_{n,1}, w_{n,2}, \ldots, w_{n,n}$ tal que, para todo polinómio $P(x)$, de grau não superior a $2n-1$,*

$$L[P(x)] = \sum_{i=1}^{n} w_{n,i} P(x_{n,i}), \tag{1.21}$$

onde $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,n}$ denotam as n raízes de $P_n(x)$, ordenadas por ordem crescente.

Prova: Seja $P(x)$ um qualquer polinómio de grau igual ou inferior a $2n-1$ e seja $\mathscr{L}_n(x)$ o polinómio interpolador de Lagrange nos pontos

$$(x_{n,i}, P(x_{n,i}))\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

que é definido por

$$\mathscr{L}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} P(x_{n,i}) l_{n,i}(x),$$

para

$$l_{n,i}(x) \equiv \frac{P_n(x)}{(x - x_{n,i}) P_n'(x_{n,i})}.$$

Como $\mathscr{L}_n(x)$ tem grau igual ou inferior a $n-1$ e $P(x)$ tem grau igual ou inferior a $2n-1$, o polinómio $Q_(x) = P(x) - \mathscr{L}_n(x)$ tem grau inferior ou igual a $2n-1$. Além disso, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$Q(x_{n,k}) = P(x_{n,k}) - \mathscr{L}_n(x_{n,k}) = P(x_{n,k}) - P(x_{n,k}) = 0.$$

Por isso, existe um polinómio $R(x)$, de grau igual ou inferior a $n-1$, tal que $Q(x) = R(x)P_n(x)$. Então, dada a ortogonalidade da sequência de polinómios $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ e o grau do polinómio $R(x)$ ser inferior ao de $P_n(x)$, pelo Teorema 2,

$$L[R(x)P_n(x)] = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} L[P(x)] &= L[\mathscr{L}_n(x) + Q(x)] = L[\mathscr{L}_n(x)] + L[R(x)P_n(x)] = L[\mathscr{L}_n(x)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(x_{n,i}) L[l_{n,i}(x)]. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Tomando então, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, $w_{n,i} \equiv L[l_{n,i}(x)]$, obtemos (1.21). Falta mostrar que estas quantidades são positivas.

Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, o polinómio $l_{n,k}^2(x)$ tem grau inferior ou igual a $2n-2$. Por (1.22), e como L é Definido Positivo,

$$0 < L\left[l_{n,k}^2(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} l_{n,k}^2(x_{n,i}) L[l_{n,i}(x)] = l_{n,k}^2(x_{n,k}) L[l_{n,k}(x)] = w_{n,k}.$$

Por isso, $w_{n,k} > 0$, concluíndo a prova. ∎

Note-se que, os escalares $w_{n,1}, w_{n,2}, \ldots, w_{n,n}$, que o Teorema 10 assegura existirem, satisfazem

$$w_{n,1} + w_{n,2} + \ldots + w_{n,n} = u_0, \tag{1.23}$$

o momento de ordem 0 do funcional L.

Seja L um funcional de momentos definido positivo, com sequência de momentos (u_n), e consideremos a sequência de polinómios $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$, ortogonais relativamente a L. Vamos construir uma função distribuição à custa de L e de $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$. Denote-se por $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,n}$ os n zeros de $P_n(x)$ (que, pelo Teorema 7, são reais e todas distintas), indexados de modo a estarem por ordem crescente. Denote-se também por $w_{n,1}, w_{n,2}, \ldots, w_{n,n}$ os n escalares reais que o Teorema 10 assegura existirem. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina-se $\psi_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ através de

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < x_{n,1} \\ w_{n,1}, & \text{se} \quad x_{n,1} \leq x < x_{n,2} \\ w_{n,1} + w_{n,2}, & \text{se} \quad x_{n,2} \leq x < x_{n,3} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ w_{n,1} + w_{n,2} + \cdots + w_{n,n-1} & \text{se} \quad x_{n,n-1} \leq x < x_{n,n} \\ w_{n,1} + w_{n,2} + \cdots + w_{n,n-1} + w_{n,n} & \text{se} \quad x_{n,n} \leq x \end{cases} . \tag{1.24}$$

Calaramente, ψ_n é uma função seccionalmente constante, limitada e não decrescente. Além disso,

$$L\left[x^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\psi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} w_{n,i} x_{n,i}^k, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-1. \tag{1.25}$$

Observe-se ainda, reciprocamente ao que foi já estudado nesta secção, que, devido à positividade dos valores $w_{n,1}, w_{n,2}, \ldots, w_{n,n}$, qualquer funcional de momentos definido desta forma será por sua vez um funcional de momentos definido positivo, para o qual valem as propriedades estudas na secção anterior.

1.5.1 Teoremas de Helly e a função ψ

Procuremos agora, como se irá perceber, generalizar o raciocínio acima efectuado. Para tal comecemos com um Lema de carácter técnico, que será útil na demonstração do teorema seguinte.

Lema 2 *Seja Ω um conjunto numerável (i.e., finito ou enumerável) e considere-se a sucessão de funções $(\psi_n \colon \Omega \to \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Se, para cada $x \in \Omega$, a sucessão de números reais $(\psi_n(x))$ for limitada, então a sucessão de funções (ψ_n) contém uma subsucessão convergente em todo Ω.*

Prova: Seja Ω um conjunto numerável. Sem perda de generalidade, podemos escrever

$$\Omega = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots\}.$$

Como (ψ_n) é uniformemente limitada,

$$|\psi_n(\gamma_1)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e portanto, pelo *Teorema de Bolzano-Weirstrass*, existe uma subsucessão de funções $(\phi_n^{(1)})$, de (ψ_n), que é convergente em γ_1. Da mesma forma,

$$\left|\phi_n^{(1)}(\gamma_2)\right| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

logo existe uma subsucessão $(\phi_n^{(2)})$, de $(\phi_n^{(1)})$, que é convergente em γ_1 e γ_2. Prosseguindo com este o raciocínio é possível encontrar, para todo $j \in \mathbb{N}$, uma subsucessão $(\phi_n^{(j)})$, de $(\phi_n^{(j-1)})$, que é convergente em $\Omega_j = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_j\}$. Assim, podemos tomar a "sucessão diagonal"

$$(\phi_n) = (\phi_n^{(n)}),$$

que será uma subsucessão de (ψ_n). Como, excepto possivelmente para os primeiros $k-1$ termos, (ϕ_n) é uma subsucessão de $\phi_n^{(j)}$, para $j < n$, então (ϕ_n) é convergente em todos os pontos de $\cup_{j=1}^{\infty}\Omega_j = \Omega$. Assim, (ϕ_n) é uma subsucessão de (ψ_n) convergente em todo Ω. ■

Teorema 11 (Princípio de Selecção de Helly) *Seja $(\psi_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, uma sucessão de funções não decrescentes e limitadas, tal que*

$$|\psi_n(x)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},$$

para algum M (i.e., a sucessão é uniformemente limitada). Então existe uma função $\psi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ e uma subsucessão (ϕ_n), de (ψ_n), tal que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \psi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \psi.$$

Prova: Comecemos por tomar uma sucessão (ψ_n), uniformemente limitada, de funções não decrescentes $\psi_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Consideremos o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$. Como este conjunto é numerável, a aplicação do lema 2 permite-nos concluir que existe um subsequência (ϕ_n^*), de (ψ_n), convergente em todo $\mathbb{Q}$. Defina-se então

$$\psi^*(r) = \lim_{n\to\infty} \phi_n^*(r), \quad r \in \mathbb{Q}.$$

O domínio de ψ^* pode ser extendido a toda a recta real, considerando

$$\psi^*(x) = \sup\{\psi^*(r) : r \in \mathbb{Q},\ r < x\}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Pelas hipóteses consideradas sobre a sequência de funções (ψ_n), é claro que ψ^* é uma função limitada e não decrescente.

Seja $\Omega' \in \mathbb{R}$ o conjunto dos pontos em que a função ψ^* é contínua. Iremos agora provar que $(\phi_n(x))$ converge para $\psi^*(x)$, para todo $x \in \Omega'$. Comecemos então por tomar $y \in \Omega' \setminus \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, então para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $r_1 \in \mathbb{Q}$, tal que $r_1 < y$ e

$$\psi^*(r_1) \geq \psi^*(y) - \varepsilon.$$

De forma análoga, existe $r_2 \in \mathbb{Q}$, tal que $r_2 > y$ e

$$\psi^*(r_2) \leq \psi^*(y) + \varepsilon.$$

É claro ainda que

$$\phi_n^*(r_1) \leq \phi_n^*(y) \leq \phi_n^*(r_2),$$

logo,

$$\psi^*(r_1) \leq \liminf_{n\to\infty} \phi_n^*(y) \leq \limsup_{n\to\infty} \phi_n^*(y) \leq \psi^*(r_2),$$

de onde concluímos que

$$-\varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} \phi_n^*(y) - \psi^*(y) \leq \limsup_{n\to\infty} \phi_n^*(y) - \psi^*(y) \leq \varepsilon.$$

Finalmente, pela arbitrariedade de ε é possível concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n^*(x) = \psi^*(x), \quad \forall x \in \Omega'.$$

Resta-nos então generalizar este raciocínio para os pontos de descontinuidade da função ψ^*. Pelo *Teorema de Darboux-Froda* ([5]), como ψ^* é não decrescente o conjunto dos seus pontos de descontinuidade é numerável. Assim aplicando o lema 2, a sucessão de funções (ϕ_n^*) terá uma subsucessao (ϕ_n), convergente em $\mathbb{R} \setminus \Omega'$ para uma dada função $\psi^{**}\colon \mathbb{R} \setminus \Omega' \to \mathbb{R}$. Considerando finalmente a função $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida da forma

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi^*(x), & x \in \Omega' \\ \psi^{**}(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \Omega' \end{cases},$$

conluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \psi,$$

terminando a prova. ■

Teorema 12 **(Teorema da Convergência de Helly)** *Seja* $[a,b]$ *um intervalo compacto e* (ψ_n), $n \in \mathbb{N}$, *uma sucessão de funções não decrescentes da forma* $\psi_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *uniformemente limitada, convergente para* $\psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *em qualquer ponto do intervalo* $[a,b]$. *Então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, d\psi_n(x) = \int_a^b f(x)\, d\psi(x), \tag{1.26}$$

para toda a função f *contínua em* $[a,b]$.

Prova: Comecemos por notar, como a sucessão de funções (ψ_n) é uniformemente limitada, existe $M > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \psi_n(b) - \psi_n(a) \leq M$$

e consequentemente

$$0 \leq \psi(b) - \psi(a) \leq M. \tag{1.27}$$

Observe-se ainda que, como a função f toma valores reais e é contínua no intervalo compacto $[a,b]$, então f é uniformemente contínua em $[a,b]$. Assim, para um qualquer $\varepsilon > 0$ existe um partição $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ de $[a,b]$, tal que, para qualquer $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$\left| f(x') - f(x'') \right| < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad \text{para } x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{1.28}$$

Seja $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para $1 \leq i \leq m$, e consideremos

$$\Delta_i \psi \equiv \psi(x_i) - \psi(x_{i-1}) \geq 0, \qquad \Delta_i \psi_n \equiv \psi_n(x_i) - \psi_(x_{i-1}) \geq 0.$$

Assim, para algum $\xi_i' \in [x_{i-1}, x_i]$, pelo *teorema de valor intermédio para integrais de Riemann-Stieltjes*,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\, d\psi - f(\xi_i)\Delta_i \psi \leq \left[f(\xi_i') - f(\xi_i) \right] \Delta_i \psi.$$

Desta forma, e tendo também em conta (1.28) e (1.27),

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f\, d\psi - \sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta_i \psi \right| &\leq \sum_{i=1}^m \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\, d\psi - f(\xi_i)\Delta_i \psi \right| \\
&= \sum_{i=1}^m \left| f(\xi_i') - f(\xi_i) \right| \Delta_i \psi \\
&< \frac{\varepsilon}{4M} \sum_{i=1}^m \Delta_i \psi \leq \frac{\varepsilon}{4M} M = \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

Podemos então concluir que

$$\left| \int_a^b f \, d\psi - \sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta_i \psi \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{1.29}$$

$$\left| \int_a^b f \, d\psi_n - \sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta_i \psi_n \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{1.30}$$

sendo que (1.30) pode ser obtido de maneira exactamente análoga a (1.29). Assim, naturalmente

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f \, d\psi - \int_a^b f \, d\psi_n \right| &\leq \left| \int_a^b f \, d\psi - \sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta_i \psi \right| + \left| \int_a^b f \, d\psi_n - \sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta_i \psi_n \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta_i \psi - \sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta_i \psi_n \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^m |f(\xi_i)| \, |\Delta_i \psi - \Delta_i \psi_n| \end{aligned}$$

Para n suficientemente grande, é possível observar que

$$|\Delta_i \psi - \Delta_i \psi_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e assim, nestas circustâncias, podemos finalmente concluir que

$$\left| \int_a^b f \, d\psi - \int_a^b f \, d\psi_n \right| < \varepsilon,$$

finalizando a prova. ■

Suponhamos agora que $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é uma sequência se polinómios ortogonais, relativamente a funcional de momentos definido positivo L. Denote-se por $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,n}$ os zeros destes polinómios (indexados por ordem crescente), tal que, para certos valores reais ζ, η,

$$\lim_{n\to\infty} x_{n,1} = \zeta, \qquad \lim_{n\to\infty} x_{n,n} = \eta.$$

Definição 5 *Ao intervalo* $[\zeta, \eta]$ *chamamos o* ***verdadeiro intervalo de ortogonalidade*** *da sequência de polinómios ortogonais* $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$*. Este intervalo é assim o menor intervalo que contém todos os zeros da sequência de polinómios* $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$*, para qualquer* $n \in \mathbb{N}$*.*

Nestas condições, é claro que, para ψ_n definido como em (1.24).

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\psi_n(x) = \int_\zeta^\eta x^k \, d\psi_n(x), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

pelo que, aplicando os teoremas 11 e 12, é verdade, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, que

$$L\left[x^k\right] = \int_\zeta^\eta x^k \, d\psi(x).$$

Resta assim avaliar o caso em que não é possível encontrar um intervalo limitado $[\zeta, \eta]$ que contenha, para todo $n \in \mathbb{N}$, todos os zero da sequência de polinómios $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$. Assim é necessário estender, de certa forma, o alcance do resultado presente no teorema 12.

Teorema 13 *Defina-se ψ_n como em (1.24). Então, para um funcional de momentos definido positivo L, existe uma subsucessão da sucessão de funções (ψ_n), que converge em $(-\infty, \infty)$ para ψ, tal que*

$$L\left[x^k\right] = \int_{-\infty}^\infty x^k \, d\psi(x), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Prova: Seja $(\phi_i) \equiv (\psi_{n_i})$ uma subsucessão da sucessão de funções (ψ_n), que converge em $(-\infty, \infty)$ para ψ. Note-se que, por (1.25), para $k \in \mathbb{N}_0$

$$L\left[x^k\right] = \int_{-\infty}^\infty x^k \, d\phi_i(x), \quad i \geq \frac{k+1}{2}. \tag{1.31}$$

Por outro lado, sabemos, pelo teorema 12, que para um qualquer intervalo compacto $[a, b]$,

$$\lim_{i \to \infty} \int_a^b x^k \, d\phi_i(x) = \int_a^b x^k \, d\psi(x), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dada a arbitrariedade do intervalo compacto $[a, b]$ podemos tomar $a < 0 < b$. Nestas condições, para $i > k+1$ e tendo em conta (1.31),

$$\begin{aligned} \left| L\left[x^k\right] - \int_a^b x^k \, d\psi(x) \right| &= \left| \int_{-\infty}^\infty x^k \, d\phi_i(x) - \int_a^b x^k \, d\psi(x) \right| \\ &\leq \left| \int_{-\infty}^a x^k \, d\phi_i(x) \right| + \left| \int_b^\infty x^k \, d\phi_i(x) \right| \\ &+ \left| \int_a^b x^k \, d\phi_i(x) - \int_a^b x^k \, d\psi(x) \right|. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Por outro lado, para $k \in \mathbb{N}_0$, $|a| \geq \sup x^{-(k+2)}$ para $x \in [|a|, \infty)$, logo

$$\left| \int_{-\infty}^a x^k \, d\phi_i(x) \right| = \left| \int_{-\infty}^a \frac{x^{2k+2}}{x^{k+2}} \, d\phi_i(x) \right| \leq |a|^{-(k+2)} \left| \int_{-\infty}^a x^{2k+2} \, d\phi_i(x) \right|. \tag{1.33}$$

Note-se ainda que, para todo $i \in \mathbb{N}$, a função ϕ_i define um funcional de momentos definido positivo, pelo que

$$\left| \int_a^\infty x^{2k+2} \, d\phi_i(x) \right| \geq 0$$

e portanto

$$L\left[x^{2k+2}\right]=\left|\int_{-\infty}^{\infty}x^{2k+2}\,d\phi_i(x)\right|=\left|\int_{-\infty}^{a}x^{2k+2}\,d\phi_i(x)\right|+\left|\int_{a}^{\infty}x^{2k+2}\,d\phi_i(x)\right|$$
$$\geq\left|\int_{-\infty}^{a}x^{2k+2}\,d\phi_i(x)\right|.$$

Assim, e por (1.33),

$$\left|\int_{-\infty}^{a}x^{k}\,d\phi_i(x)\right|\leq|a|^{-(k+2)}L\left[x^{2k+2}\right]. \tag{1.34}$$

Analogamente, para $k\in\mathbb{N}_0$, $b\geq\sup x^{-(k+2)}$ para $x\in[b,\infty)$, portanto,

$$\left|\int_{b}^{\infty}x^{k}\,d\phi_i(x)\right|\leq b^{-(k+2)}L\left[x^{2k+2}\right]. \tag{1.35}$$

Por (1.32), (1.34) e (1.35), é possível observar então que

$$\left|L\left[x^{k}\right]-\int_{a}^{b}x^{k}\,d\psi(x)\right|\leq\left(|a|^{-(k+2)}+b^{-(k+2)}\right)L\left[x^{2k+2}\right]$$
$$+\left|\int_{a}^{b}x^{k}\,d\phi_i(x)-\int_{a}^{b}x^{k}\,d\psi(x)\right|.$$

É claro que tomando $i\to\infty$ obtemos

$$\left|L\left[x^{k}\right]-\int_{a}^{b}x^{k}\,d\psi(x)\right|\leq\left(|a|^{-(k+2)}+b^{-(k+2)}\right)L\left[x^{2k+2}\right].$$

Finalmente, tomando $a\to-\infty$ e $b\to\infty$, tem-se que

$$L\left[x^{k}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x^{k}\,d\psi(x),\quad k\in\mathbb{N}_0,$$

concluíndo a prova. ∎

Finalmente, podemos afirmar que, para um funcional de momentos definido positivo L, é possível escrever, para uma dada função distribuição ψ, obtida a partir de ψ_n definida como em (1.24),

$$L\left[x^{k}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x^{k}\,d\psi(x).$$

Adicionalmente, a partir da aplicação do Teorema 6 (de Chritoffel-Darboux) e dos teoremas 11, 12 e 13, é possível ainda demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 14 *Consideremos a sequência de polinómios $(P_n, n\in\mathbb{N}_0)$, ortogonais relativamente a um funcional de momentos L. Suponhamos que a sequência de polinómios $(P_n, n\in\mathbb{N}_0)$ é definida como em (1.9), com $\alpha_n\in\mathbb{R}$, para todo $n\in\mathbb{N}_0$ e $\beta_n>0$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Então pode-se escrever, para* *todo* $k \in \mathbb{N}_0$,

$$L\left[x^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\psi(x).$$

Este teorema está presente em [2] e a sua demonstração apresenta um raciocínio análogo (num contexto mais geral) ao efectuado na secção 2.4 (capítulo seguinte), pelo que aqui será omitida.

Capítulo 2

A análise dos sistemas de Chapmann-Kolmogorov

O trabalho apresentado neste capítulo terá um carácter central nesta dissertação, pois destina-se a "construir a ponte" entre o estudo de um certo tipo de processos estocástios, que denominamos *processos de nascimento e morte*, e a teoria de polinómios ortogonais, sobre a qual dissertámos no capítulo anterior. Assim, abriremos caminho à análise de casos mais concretos a que daremos de destaque no capítulo seguinte.

Na realidade, os processos estocásticos que nos propomos aqui a analisar, são um caso concreto de uma *cadeia de Markov a tempo contínuo*, pelo que as nossas primeiras considerações começarão por um breve olhar sobre esta classe de processos.

2.1 Cadeias de Markov a tempo contínuo

Iremos agora estudar uma classe de processos estocásticos conhecida como *cadeia de Markov a tempo contínuo*. Estas podem ser vistas como como uma versão a tempo contínuo das cadeias de Markov (discretas) ([3]) e assim sendo, tal como estas, possuem a chamada propriedade Markoviana:

> *Os estados futuros apenas dependem do estado presente e não do passado para além do presente.*

Definição 6 *Um processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ diz-se uma cadeia de Markov a tempo contínuo se, $X(t) \geq 0$, para todo t, e para todos $s,t \geq 0$, para todos os estados i, j*

$$P(X(t+s) = j | X(s) = i, X(u), 0 \leq u < s) = P(X(t+s) = j | X(s) = i),$$

Se, além disso, $P(X(t+s) = j | X(s) = i)$ for independente de s, diz-se que a cadeia de Markov a tempo contínuo é estacionária (ou homogénea).

Daqui em diante consideremos apenas cadeias de Markov a tempo contínuo estacionárias, com espaço de estados $\mathbb{N}_0$. Se T_i denotar a quantidade de tempo que processo se mantém no estado i, antes de assumir um outro estado, então, da definição decorre que $P\{T_i > s+t | T_i > s\} = P\{T_i > t\}$, para todo $s,t \geq 0$. Sendo a distribuição exponencial a única distribuição com esta propriedade então T_i tem distribuição exponencial. Além disso, todas estas variáveis aleatórias T_i são independentes entre si. Por isso, uma cadeia de Markov a tempo contínuo pode também ser definida como um processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ tal que, sempre que $X(t) = i$, a quantidade de tempo que se mantém no estado i, antes de mudar para um outro estado, possui uma distribuição exponencial com média $1/v_i$ (para uma dada *taxa de transição* v_i), independente de todos os outros estados. Ao sair desse estado i, o processo tomará então um novo estado j, com uma dada probabilidade $P_{i,j}$. Podemos assim caraterizar uma cadeia de Markov a tempo contínuo como um processo estocástico com alternância de estados de acordo com uma cadeia de Markov a tempo discreto mantendo-se em cada estado de acordo com uma distribuição exponencial específica para cada estado.

2.1.1 Sistemas de Chappman-Kolmogorov

Agora estaremos interessados em caraterizar $p_{i,j}(t) \equiv P(X(t+s) = j | X(s) = i)$, que denota a probabilidade de $X(\cdot)$ se encontrar no estado j passados t unidades de tempo de ter estado no estado i, que denominamos *probabilidade de transição*. Para tal, iremos deduzir um conjunto de equações diferenciais que a função $p_{i,j}(t)$ deverá satisfazer. Comecemos por definir a *taxa instantânea de transição*,

$$q_{i,j} \equiv v_i P_{i,j}.$$

Dado que

$$v_i = \sum_{j=0}^{\infty} v_i P_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} q_{ij}, \qquad P_{ij} = \frac{q_{ij}}{v_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_{j=0}^{\infty} q_{ij}},$$

as taxas instantâneas de transição são suficientes para caraterizar a cadeia de Markov a tempo contínuo. Note-se ainda que é trivial que

$$p_{i,j}(0) = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases} \tag{2.1}$$

Lema 3

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1-p_{i,i}(h)}{h} = v_i, \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{p_{i,j}(h)}{h} = q_{i,j},\ i \neq j \tag{2.2}$$

Prova:

Foi já observado que o tempo decorrido até ocorrer uma transição de estado é exponencialmente distribuído. Assim, a probabilidade de ocorrerem duas ou mais transições num intervalo de tempo $[t, t+h]$ é $o(h)$ ([3]), tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

Note-se agora que $1 - p_{i,i}(h)$ denota a probabilidade de um processo, que se econtra no estado i, não se encontrar nesse mesmo estado passado h unidades de tempo. O valor desta probabilidade será dado pela soma da probabilidade de haver uma única transição nesse intervalo de tempo, $v_i h$, com a probabilidade de um acontecimento no qual ocorrem duas ou mais transições. Assim

$$1 - p_{i,i}(h) = v_i h + o(h)$$

e portanto

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1 - p_{i,i}(h)}{h} = v_i.$$

Por outro lado, $p_{i,j}(h)$ denota a probabilidade de um processo que se encontra no estado i, encontrar-se no estado j passado h unidades de tempo. De forma análoga, o valor desta probabilidade será dado pela probabilidade de haver uma única transição do estado i para o estado j, $q_{i,j}h$, com a probabilidade de um acontecimento no qual ocorrem duas ou mais transições. Desta forma,

$$p_{i,j}(h) = q_{i,j}h + o(h) \quad i \neq j,$$

pelo que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{p_{i,j}(h)}{h} = q_{i,j}, \quad i \neq j,$$

concluíndo a prova. ■

Lema 4 *Para todo* $s, t \geq 0$

$$p_{i,j}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t) p_{kj}(s) \tag{2.3}$$

Prova: Note-se que

$$\begin{aligned}
p_{i,j}(t+s) &= P\{X(t+s) = j | X(0) = i\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t+s) = j, X(t) = k | X(0) = i\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t+s) = j | X(t) = k, X(0) = i\} P\{X(t) = k | X(0) = i\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t+s) = j | X(t) = k\} P\{X(t) = k | X(0) = i\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t) p_{kj}(s),
\end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

Do último Lema decorre que, para todo $i, j \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{p_{i,j}(t+h)-p_{i,j}(t)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(t)p_{kj}(h) - p_{i,j}(t)\right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{\infty} p_{i,k}(t)p_{k,j}(h) - [1-p_{j,j}(h)]p_{ij}(t)\right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{\infty} p_{i,k}(t)\frac{p_{k,j}(h)}{h} - \frac{1-p_{j,j}(h)}{h}p_{i,j}(t)\right).
\end{aligned}$$

Supondo que são satisfeitas as condições de regularidade necessárias para que seja possível a troca entre o limite e a soma, então, pelo Lema 3,

$$p'_{i,j}(t) = \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{\infty} p_{i,k}(t)q_{k,j} - v_j p_{i,j}(t), \qquad i, j \geq 0 \tag{2.4}$$

um sistema de equações diferencias lineares conhecido como sistema de equações *forward* de Chapmann-Kolmogorov. Escritas usando notação matricial, estas equações ficam $P'(t) = P(t)R$, com

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{0,0}(t) & p_{0,1}(t) & p_{0,2}(t) & \cdots \\ p_{1,0}(t) & p_{1,1}(t) & p_{1,2}(t) & \cdots \\ p_{2,0}(t) & p_{2,1}(t) & p_{2,2}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad R(t) = \begin{bmatrix} -v_0 & q_{0,1} & q_{0,2} & \cdots \\ q_{1,0} & -v_1 & q_{1,2} & \cdots \\ q_{2,0} & q_{2,1} & -v_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

onde cada linha de $R(t)$ soma zero. Analogamente,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{p_{i,j}(t+h)-p_{i,j}(t)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(h)p_{kj}(t) - p_{i,j}(t)\right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{\infty} p_{i,k}(h)p_{kj,}(t) - [1-p_{i,i}(h)]p_{ij}(t)\right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{\infty} \frac{p_{i,k}(h)}{h}p_{k,j}(t) - \frac{1-p_{i,i}(h)}{h}p_{i,j}(t)\right).
\end{aligned}$$

Novamente, supondo satisfeitas as condições de regularidade necessárias, então,

$$p'_{i,j}(t) = \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{\infty} q_{i,k}p_{kj}(t) - v_i p_{i,j}(t), \text{ para todo} \qquad i, j \geq 0 \tag{2.5}$$

um sistema de equações diferencias lineares conhecido como sistema de equações *backward* de Chapmann-Kolmogorov. Escritas usando notação matricial, estas equações ficam $P'(t) = RP(t)$.

2.1.2 Processos de Nascimento e Morte

Um caso particular de interesse ocorre quando as transições ocorrem apenas entre estados adjacentes - denominado *processo de nascimento e morte*. Este tipo de processos é normalmente caraterizado pela taxa de natalidade $\lambda_i, i \in \mathbb{N}_0$, e taxa de mortalidade $\mu_i, i \in \mathbb{N}$. Deste modo, num contexto estacionário, temos uma cadeia de Markov a tempo contínuo caraterizada por taxas de transição

$$v_0 = \lambda_0, \quad v_i = \lambda_i + \mu_i, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & j = i+1 \\ \mu_i, & j = i-1 \\ 0, & \text{nos restantes casos.} \end{cases}$$

Será neste tipo específico de Cadeias de Markov a tempo contínuo que nos concentraremos no restante deste capítulo.

Considere-se então os seguintes sistemas de equações diferenciais,

$$p'_{m,n}(t) = \lambda_{n-1} p_{m,n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)\, p_{n,m}(t) + \mu_{n+1} p_{m,n+1}(t),\ m,n = 0,1,\ldots, \tag{2.6}$$

$$p'_{m,n}(t) = \lambda_m p_{m+1,n}(t) - (\lambda_m + \mu_m)\, p_{m,n}(t) + \mu_m p_{m-1,n}(t), \quad m,n = 0,1,\ldots, \tag{2.7}$$

onde $(\lambda_n, n = -1, 0, \ldots)$ e $(\mu_n, n = 0, 1, \ldots)$ denotam duas sequências de números reais positivos com a exceção de $\lambda_{-1} = 0$ e $\mu_0 = 0$. Note-se que, por (2.1), a este bloco de sistemas de equações acresce a condição inicial $p_{m,n}(0) = 1$ se $m = n$, e 0, caso contrário. Estes dois sistemas de equações diferenciais correspondem naturalmente, por (2.4) e (2.5), aos sistemas *forward* e *backward* de equações de Chapman-Kolmogorov, respectivamente.

Os dois sistemas (2.6)-(2.7) podem ainda ser descritos matricialmente na forma

$$P'(t) = P(t)J, \qquad P'(t) = JP(t),$$

acrescidos da condição inicial $P(0) = I$, o operador identidade, onde

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) & \cdots \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots \\ p_{20}(t) & p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

Note-se que as linhas de J somam zero.

2.2 Método de separação de variáveis

A presente secção irá, em linha com trabalho efectuado em [2], ilustrar, de forma mais ou menos intuitiva, a relação directa que estes sistemas têm com a teoria do polinómios ortogonais. Através de um método de separação de variáveis, será apresentada uma candidata a solução do problema, que servirá de motivação à secção seguinte em que, com maior rigor, será analisado o caso finito resultante da truncatura das matrizes $P(t)$, $P'(t)$ e J, para mais tarde ser confirmado o que aqui será, de forma menos rigorosa, concluído.

Comecemos assim por supor que existe uma solução para (2.6)-(2.7) da forma

$$p_{m,n}(t) = f(t) q_m r_n, \; m,n = 0,1,\ldots, \tag{2.8}$$

onde q_m, r_n denotam escalares reais não nulos. Assim, aplicando a substituição (2.8) no primeiro grupo de equações (2.6), observamos que

$$f'(t) q_m r_n = \lambda_{n-1} f(t) q_m r_{n-1} + \mu_{n+1} f(t) q_m r_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n) f(t) q_m r_n,$$

ou, de modo equivalente,

$$f'(t) = f(t) \left(\frac{\lambda_{n-1} r_{n-1} + \mu_{n+1} r_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n) r_n}{r_n} \right). \tag{2.9}$$

Dada a sua independência da variável t, podemos tomar, para um dado parâmetro x

$$\frac{\lambda_{n-1} r_{n-1} + \mu_{n+1} r_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n) r_n}{r_n} = -x.$$

Assim, podemos definir os escalares r_n, com $n \in \mathbb{N}_0$, através de seguinte equação de recorrência

$$-x r_n = \lambda_{n-1} r_{n-1} + \mu_{n+1} r_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n) r_n, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{2.10}$$

$$r_{-1} = 0, \; r_0 = 1, \tag{2.11}$$

para $x \in \mathbb{R}$, arbitrário. Então, para cada n, r_n é um polinómio de grau n em x, que denotaremos por $r_n(x)$. Além disso, a menos do produto por uma constante, podemos tomar $f(t) = e^{-xt}$.

De modo análogo, aplicando a substituição (2.8) no segundo grupo de equações (2.7), somos levados a supôr que os escalares q_n, com $n \in \mathbb{N}_0$, verificam a seguinte equação de recorrência

$$-x q_n = \mu_n q_{n-1} + \lambda_n q_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n) q_n, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{2.12}$$

$$q_{-1} = 0, \; q_0 = 1, \tag{2.13}$$

para $x \in \mathbb{R}$, arbitrário. Então, para cada n, q_n é um polinómio de grau n em x, que denotaremos por $q_n(x)$.

Lema 5 *Se, para um dado* $x \in \mathbb{R}$, (r_n) *verifica* (2.10) *e* (q_n) *verifica* (2.12), *então*

$$r_n(x) = \xi_n q_n(x) \tag{2.14}$$

onde (ξ_n) *é definido por*

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_n = \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}, \; n = 1, 2, \ldots \tag{2.15}$$

Prova: Como $\mu_0 \xi_0 = 0 = \lambda_{-1}$, $\mu_1 \xi_1 = \lambda_0 \xi_0$ e, para $n = 2, 3, \ldots$,

$$\mu_n \xi_n = \mu_n \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \ldots \mu_n} = \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \ldots \mu_{n-1}} = \lambda_{n-1} \xi_{n-1} \tag{2.16}$$

então, após multiplicarmos a equação em (2.12) por $\xi_n \neq 0$, obtemos a seguinte equação equivalente

$$\begin{aligned}
-x\xi_n q_n &= \mu_n \xi_n q_{n-1} + \lambda_n \xi_n q_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n) \xi_n q_n, \\
-x(\xi_n q_n) &= \lambda_{n-1} (\xi_{n-1} q_{n-1}) + \mu_{n+1} (\xi_{n+1} q_{n+1}) - (\lambda_n + \mu_n)(\xi_n q_n),
\end{aligned}$$

onde, note-se, o valor de ξ_{-1} é irrelevante. Assim, $\xi_n q_n$ verifica a recorrência em (2.10), pela que se confirma a igualdade (2.14). ■

Portanto, pelo Lema 5, o conhecimento da sequência de polinómios $(r_n, n \in \mathbb{N}_0)$ determina o conhecimento da sequência de polinómios $(q_n, n \in \mathbb{N}_0)$. De facto, de (2.8), concluímos que

$$p_{m,n}(t) \equiv f(t) \frac{r_m(x) r_n(x)}{\xi_m} = e^{-xt} \frac{r_m(x) r_n(x)}{\xi_m} \tag{2.17}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, para qualquer $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (condições?)

$$p_{m,n}(t) = \frac{1}{\xi_m} \int_{\mathbb{R}} e^{-xt} r_m(x) r_n(x) \, d\psi(x) \tag{2.18}$$

Note-se ainda que,

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-xt} r_m(x) r_n(x) \, d\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{t \to 0} e^{-xt} \right) r_m(x) r_n(x) \, d\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} r_m(x) r_n(x) \, d\psi(x).$$

Por isso, para todo $m, n = 0, 1, \ldots$, com $m \neq n$,

$$\int_{\mathbb{R}} r_m(x) r_n(x) \, d\psi(x) = 0, \tag{2.19}$$

$$\int_{\mathbb{R}} r_n^2(x) \, d\psi(x) = \xi_n, \tag{2.20}$$

o que mostra que, caso exista uma solução para (2.6)-(2.7) da forma (2.8), as duas sequência de polinómios $(r_n, n \in \mathbb{N}_0)$ e $(q_n, n \in \mathbb{N}_0)$ serão ortogonais relativamente a um funcional de momentos que seja caraterizado pela função de distruição ψ.

2.3 A ortogonalidade da sequência de polinómios $(r_n, n \in \mathbb{N}_0)$

Antes de iniciarmos uma análise mais rigorosa ao sistema de equações diferenciais que nos propusemos a resolver, é importante notar algumas propriedades dos polinómios $(r_n, n \in \mathbb{N}_0)$, definidos como em (2.10). Estes polinómios terão um papel fundamental neste processo de resolução, o que mais tarde se tornará claro. Comecemos então por demonstrar que a relação de recorrência (2.10) é suficiente para indicar a existência de uma relação de ortogonalidade para a sequência de polinómios $(r_n, n \in \mathbb{N}_0)$. Para tal consideremos a sequência de polinómios $(T_n, n \in \mathbb{N}_0)$, constituída pelas polinómios definidos da forma

$$T_n(x) \equiv k_n r_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.21}$$

com

$$\begin{aligned} k_0 &= 1, \\ k_n &= (-1)^n \mu_1 \ldots \mu_n, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

De (2.21) e (2.10) observe-se

$$\begin{aligned} -xT_n(x) &= k_n \lambda_{n-1} r_{n-1}(x) + k_n \mu_{n+1} r_{n+1}(x) - k_n(\lambda_n + \mu_n) r_n(x) \\ &= -(-1)^{n-1} \mu_1 \ldots \mu_{n-1} \mu_n \lambda_{n-1} r_{n-1}(x) - (-1)^{n+1} \mu_1 \ldots \mu_n \mu_{n+1} r_{n+1}(x) - k_n(\lambda_n + \mu_n) r_n(x) \\ &= -\mu_n \lambda_{n-1} k_{n-1} r_{n-1}(x) - k_{n+1} r_{n+1}(x) - (\lambda_n + \mu_n) k_n r_n(x). \end{aligned}$$

De onde se obtém a recorrência

$$xT_n(x) = \mu_n \lambda_{n-1} T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x) + (\lambda_n + \mu_n) T_n(x). \tag{2.22}$$

É então claro que, com $\alpha_n = \lambda_n + \mu_n$, $\beta_n = \mu_n \lambda_{n-1}$, o Teorema de Favard garante-nos que a sequência de polinómios $(T_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é ortogonal relativamente a um dado funcional de momentos.

Observação 2 *Dado* (2.21)*, da definição de ortogonalidade de polinómios é trivial que se existe uma relação de ortogonalidade para sequência de polinómios* $(T_n, n \in \mathbb{N}_0)$ *então existirá também para* $(r_n, n \in \mathbb{N}_0)$.

Note-se ainda que, num Processo de Nascimento e Morte, as taxas de natalidade λ_n são reais e positivas para $n = 0, 1, 2, \ldots$ e as taxas de mortalidade μ_n são reais e positivas para $n = 1, 2, \ldots$. Assim as condições do Teorema 7 serão válidas para $(T_n, n \in \mathbb{N}_0)$.

Observação 3 *Para todo* $n \in \mathbb{N}_0$*, os zeros de* r_n *são os mesmos que* T_n*, pelo que valem para estes também as propriedades indicadas no Teorema 7.*

2.4 O caso finito e a construção da função distribuição

Para olhar de forma mais rigorosa para a análise dos sistema composto por (2.6)-(2.7), comecemos por considerar o problema finito, resultante da truncatura das matrizes $P(t)$, $P'(t)$ e J. Assim, denotemos por $P_N(t)$, $P'_N(t)$ e J_N, as matrizes de dimensão N que resultam dessa mesma truncatura, respectivamente. O problema resultante terá então como solução

$$P_N(t) = e^{tJ_N} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} J_N^k \tag{2.23}$$

Assim, este problema prende-se com a diagonalização da matriz

$$J_N = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(\lambda_{N-1}+\mu_{N-1}) \end{bmatrix}$$

De seguida veremos como os polinómios r_n serão fulcrais neste processo.

A relação em (2.10), na sua versão truncada, traduz-se matricialmente por

$$-x\big(r_0(x), r_1(x), \ldots, r_{N-1}(x)\big) = \big(r_0(x), r_1(x), \ldots, r_{N-1}(x)\big)J_N + \big(0, 0, \ldots, \mu_N r_N(x)\big) \tag{2.24}$$

Denotemos agora por $x_{N,j}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, tais que

$$x_{N,1} < x_{N,2} < \ldots < x_{N,N},$$

os zeros de r_N (que sabemos serem simples e reais). É trivial que, para qualquer um destes zeros, $\mu_N r_N(x_{N,j}) = 0$, portanto do sistema (2.24) retiramos

$$-x_{N,j}\big(r_0(x_{N,j}), r_1(x_{N,j}), \ldots, r_{N-1}(x_{N,j})\big) = \big(r_0(x_{N,j}), r_1(x_{N,j}), \ldots, r_{N-1}(x_{N,j})\big)J_N \tag{2.25}$$

Assim, os valores próprios da matriz J_N serão $-x_{N,j}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, com respectivos vectores próprios $(r_0(x_{N,j}), r_1(x_{N,j}), \ldots, r_{N-1}(x_{N,j}))$. Note-se que os zeros r_N serão todos eles distintos, logo J_N será diagonalizável. De seguida procuramos encontrar uma matriz, facilmente invertítel, composta por vectores próprios de J_N, possibilitando assim a sua diagonalização.

Aplicando agora o Teorema de Christoffel-Darboux e a igualdade (1.17) (que se obtém do mesmo) note-se que, para todo $N = 1, 2, \ldots,$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{T_k(x_{N,j})T_k(x_{N,i})}{(\lambda_0\mu_1)\ldots(\lambda_{k-1}\mu_k)} = \frac{T_N(x_{N,j})T_{N-1}(x_{N,i}) - T_n(x_{N,i})T_{N-1}(x_{N,j})}{(\lambda_0\mu_1)\ldots(\lambda_{N-2}\mu_{N-1})(x-y)} = 0, \qquad i \neq j$$

e

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{T_k^2(x_{N,j})}{(\lambda_0\mu_1)\dots(\lambda_{k-1}\mu_k)} = \frac{T_N'(x_{N,j})T_{N-1}(x_{N,j}) - T_n(x_{N,j})T_{N-1}'(x_{N,j})}{(\lambda_0\mu_1)\dots(\lambda_{N-2}\mu_{N-1})}$$
$$= \frac{T_N'(x_{N,j})T_{N-1}(x_{N,j})}{(\lambda_0\mu_1)\dots(\lambda_{N-2}\mu_{N-1})}.$$

Por outro lado, aplicando a relação (2.21),

$$0 = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T_k(x_{N,j})T_k(x_{N,i})}{(\lambda_0\mu_1)\dots(\lambda_{k-1}\mu_k)} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\mu_1\dots\mu_k r_k(x_{N,j})\mu_1\dots\mu_k r_k(x_{N,i})}{(\lambda_0\mu_1)\dots(\lambda_{k-1}\mu_k)}$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\mu_1\dots\mu_k}{\lambda_0\dots\lambda_{k-1}} r_k(x_{N,j})r_k(x_{N,i}),$$

de onde obtemos

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{r_k(x_{N,j})r_k(x_{N,i})}{\xi_k} = 0, \qquad i \neq j. \tag{2.26}$$

Observação 4 *É curioso notar que ξ_k, que relaciona os somatórios acima descritos, é o mesmo que em (2.15), que relaciona as sequências de polinómios $(r_n, n \in \mathbb{N}_0)$ e $(q_n, n \in \mathbb{N}_0)$.*

Além disso, de forma análoga,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{T_k^2(x_{N,j})}{(\lambda_0\mu_1)\dots(\lambda_{k-1}\mu_k)} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\mu_1\dots\mu)_k^2 r_k^2(x_{N,j})}{(\lambda_0\mu_1)\dots(\lambda_{k-1}\mu_k)}$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\mu_1\dots\mu_k}{\lambda_0\dots\lambda_{k-1}} r_k^2(x_{N,j})$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{r_k^2(x_{N,j})}{\xi_k},$$

ou seja, para $\rho(x_{N,j}) = (\lambda_0\mu_1)\dots(\lambda_{N-2}\mu_{N-1})/T_N'(x_{N,j})T_{N-1}(x_{N,j})$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{r_k^2(x_{N,j})}{\xi_k} = \frac{1}{\rho(x_{N,j})} \tag{2.27}$$

Observação 5 *Note-se que $\rho(x_{N,j})\,(r_0(x_{N,j}), r_1(x_{N,j}), \dots, r_{N-1}(x_{N,j}))$ é também um vector próprio de J_N associado ao valor próprio $-x_{N,j}$.*

Com a observação anterior em mente, denotemos por R_N a matriz cujas linhas são compostas pelos vectores

$$\rho(x_{N,j})\,(r_0(x_{N,j}), r_1(x_{N,j}), \dots, r_{N-1}(x_{N,j}))\,, \qquad j = 1, \dots, N,$$

e por $\overline{R_N}$ a matriz cujas colunas são compostas pelos vectores

$$\left(\frac{r_0(x_{N,j})}{\xi_0}, \frac{r_1(x_{N,j})}{\xi_1}, \ldots, \frac{r_{N-1}(x_{N,j})}{\xi_{N-1}}\right), \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Por (2.26) e (2.27) facilmente de conclui que

$$R_N \overline{R_N} = I_N,$$

em que I_N denota a matriz identidade de dimensão N. Assim,

$$\overline{R_N} = R_N^{-1}.$$

Podemos então concluir que

$$R_N J_N R_N^{-1} = D_N$$

em que D_N é uma matriz diagonal de dimensão N composta pelos valores próprios de J_N, $-x_{N,j}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, i.e.,

$$D_N = \begin{bmatrix} -x_{N,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x_{N,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x_{N,N} \end{bmatrix}.$$

Assim, $J_N = R_N^{-1} D_N R_N$, pelo que, por (2.23) podemos concluir que

$$p_{m,n}(t) = \frac{1}{\xi_m} \sum_{j=1}^{N} e^{-tx_{N,j}} r_m(x_{N,j}) r_n(x_{N,j}) \rho(x_{N,j}). \tag{2.28}$$

Seja ainda

$$\psi_N(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{N,1} \\ \sum_{k=1}^{j} \rho(x_{N,k}), & x_{N,j} \leq x < x_{N,j+1} \quad (1 < j \leq N) \\ \sum_{k=1}^{N} \rho(x_{N,k}), & x \geq x_{N,N} \end{cases},$$

então (2.28) será equivalente a

$$p_{m,n}(t) = \frac{1}{\xi_m} \int_{\mathbb{R}} e^{-tx} r_m(x) r_n(x) d\psi_N(x).$$

Finalmente, aplicando os teoremas 11, 12 e 13, é possível generalizar este raciocínio, ao tomarmos $N \to \infty$. Nestas condições podemos finalmente concluir que a solução do sistema (2.6)-(2.7) e consequentemente das probabilidades de transição de um processo de nascimento e morte (no sentido geral, i.e., com um número infinito de estados) pode ser realmente dada como em (2.18) por,

$$p_{m,n}(t) = \frac{1}{\xi_m} \int_{\mathbb{R}} e^{-xt} r_m(x) r_n(x) \, d\psi(x),$$

em que ψ é uma função distribuição relativamente à qual a sequência de polinómios $(r_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é ortogonal.

Note-se que a função de distribuição relativamente à qual os polinómios com que trabalhámos são ortogonais, poderá não ser única, questão esta que será abordada mais à frente. No entanto, no caso em consigamos garantir esta mesma unicidade, concluímos neste capítulo que é possível encontrar a solução de um processo de nascimento e morte, a partir do estudo da ortogonalidade dos polinómios que associamos ao mesmo. É com isto em mente que partiremos para as aplicações do capítulo seguinte.

Capítulo 3

Aplicação a modelos de fila de espera

O objectivo do presente capítulo é estudar as probabilidades de transição de um tipo específico de processos de nascimento e morte, os modelos de filas de espera, aplicando, mais uma vez, conhecimentos da teoria da polinómios ortogonais. Ao contrário de capítulo anterior, procuraremos aqui encontrar explicitamente o funcional de momentos relativamente ao qual é dada a ortogonalidade dos polinómios que vamos associar ao modelo em estudo, encontrando assim uma expressão concreta para as probabilidades de transição do mesmo. Os modelos de fila de espera que nos propomos aqui então a estudar, a que chamaremos $M/M/s$, consistem em processos de nascimento e morte, cujas taxas serão definidas, para um dado número natural s e números reais positivos λ e μ, da forma:

$$\begin{aligned} &\lambda_n = \lambda, \ \forall n \in \mathbb{N}_0, \\ &\mu_0 = 0, \qquad \mu_n = n\mu, \ 1 \leq n \leq s-1, \qquad \mu_n = s\mu, \ n \geq s. \end{aligned}$$

Intuitivamente, a situação aqui modelizada pode ser descrita como uma fila de espera por um serviço, existindo s servidores diferentes, em que as chegadas são dadas por uma taxa λ e as saídas (após atendimento) por uma taxa μ. Em particular, o modelos que iremos estudar neste capítulo serão os casos $M/M/1$ e $M/M/2$, i.e., os casos em que existem em funcionamento 1 ou 2 servidores. Uma análise alternativa, por meio de funções geradoras, pode ser encontrada por exemplo em [6].

A análise dos modelos a que nos propomos estudar consistirá essencialmente na procura de funcionais de momentos para o quais os polinómios (que associamos a esses mesmos modelos) sejam ortogonais. Neste caso será até possível encontrar funções peso para as quais estes funcionais possam ser dados por um integral de Riemann. O trabalho aqui realizado será inspirado no trabalho efectuado em [4] para os polinómios de Chebychev (de 1ª e 2ª espécie). Um trabalho análogo será possível pois, tal como os polinómios de Chebychev, estes nossos polinómios serão (a menos de certas condições iniciais) polinómios de coeficientes constantes. É esta propriedade que torna útil a aplicação do teorema de Markov, que iremos estudar na secção que segue.

3.1 Os polinómios numerador e o teorema de Markov

Seja $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ uma sequência de polinómios definida como em (1.9) pela relação de recorrência

$$P_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x), \quad n = 0,1,\ldots$$
$$P_{-1}(x) = 0,\ P_0(x) = 1.$$

Defina-se agora a sequência de *polinómios numerador* de $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$, que denotaremos por $\left(P_n^{(1)}, n \in \mathbb{N}_0\right)$, pela recorrência

$$P_{n+1}^{(1)}(x) = (x-\alpha_{n+1})P_n^{(1)}(x) - \beta_{n+1}P_{n-1}^{(1)}(x), \quad n = 0,1,\ldots$$
$$P_{-1}^{(1)}(x) = 0,\ P_0^{(1)}(x) = 1.$$

Teorema 15 *[1] Seja $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ uma sequência de polinómios ortogonais definida como em (1.9), com $\alpha_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e $\beta_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que a sequência de polinómios é ortogonal relativamente a uma função de distribuição ψ. Denote-se por*

$$\chi(z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z-x}.$$

e

$$u_0 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} 1\ d\psi((x).$$

Nestas condições,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_0 P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} = \chi(z), \quad \text{para } z \in \mathbb{C}\setminus[\zeta,\eta],$$

onde $[\zeta,\eta]$ representa o verdadeiro intervalo de ortogonalidade da sequência de polinómios $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$.

3.2 Uma análise dos polinómios de Chebychev

Defina-se por $(T_n, n \in \mathbb{N}_0)$ e $(U_n, n \in \mathbb{N}_0)$ as sequências de polinómios de Chebychev, de 1ª e 2ª espécie, respectivamente. Estes representam uma classe de polinómios extensivamente estudada e um exemplo clássico da ortogonalidade de polinómios. Recursivamente podem ser definidos da forma

$$2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x), \quad n = 1,2,\ldots$$
$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$$

e

$$
\begin{aligned}
&2xU_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots \\
&U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x.
\end{aligned}
$$

No caso dos polinómios de Chebychev de 1ª espécie, por exemplo, podemos tomar a mudança de variável $x = \cos(\theta)$, tornando a expressão

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

equivalente a

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)\ d\theta$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}_0$. É claro que, para $m, n = 0$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)\ d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\ d\theta = 1$$

e, para $m = n \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)\ d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \cos\left((m+n)\theta\right) + \cos\left((m-n)\theta\right)\ d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \cos\left((m+n)\theta\right) + 1\ d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi(m+n)}\Big[\sin\left((m+n)\theta\right)\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, para $m \neq n$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)\ d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \cos\left((m+n)\theta\right) + \cos\left((m-n)\theta\right)\ d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi(m+n)}\Big[\sin\left((m+n)\theta\right)\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi(m+n)}\Big[\sin\left((m-n)\theta\right)\Big]_0^{\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Assim, a função definida como

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

é uma função peso em relação à qual a sequência de polinómios $(T_n, n \in \mathbb{N}_0)$ é ortogonal. No entanto o processo que nos interessa, para obter o funcional de momentos em relação ao qual estes polinómios são ortogonais, é outro.

Em [4] a ortogonalidade dos polinómios de Chebychev é estudada com recurso à aplicação do teorema de Markov e, consequentemente, da *fórmula de inversão de Stieltjes*. Este trabalho servirá de inspiração para secções seguintes deste capítulo, em que uma análise análoga será realizada no contexto dos polinómios que iremos associar aos modelos de fila de espera $M/M/1$ e $M/M/2$. Para esse efeito, iremos nesta secção destacar alguns dos pontos essenciais do raciocínio efectuado no referido artigo, até à obtenção da ortogonalidade para os polinómios de Chebychev.

Um primeiro passo nesta metodologia, com via da aplicação do teorema de Markov, é a obtenção de

$$\chi_T(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{T_{n-1}^{(1)}(z)}{T_n(z)} = \frac{-\sqrt{z^2-1}}{1-z^2}. \quad z \in \mathbb{C}\setminus[-1,1],$$
$$\chi_U(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n-1}^{(1)}(z)}{U_n(z)} = 2z - 2\sqrt{z^2-1}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus[-1,1].$$

Sejam então τ e υ duas funções de distribuição em relação às quais as sequências de polinómios $(T_n, n \in \mathbb{N}_0)$ e $(U_n, n \in \mathbb{N}_0)$ são ortogonais, sabemos assim que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(x)}{z-x} = \frac{-\sqrt{z^2-1}}{1-z^2}. \quad z \in \mathbb{C}\setminus[-1,1],$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\upsilon(x)}{z-x} = 2z - 2\sqrt{z^2-1}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus[-1,1].$$

É possível agora aplicar a fórmula de inversão de Stieltjes, tomando assim

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \{\chi_T(x-i\varepsilon) - \chi_T(x+i\varepsilon)\} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & x \in [-1,1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \{\chi_T(x-i\varepsilon) - \chi_T(x+i\varepsilon)\} \\ &= \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & x \in [-1,1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases}. \end{aligned}$$

No caso do polinómios de Chebychev de 2ª espécie, podemos com relativa facilidade concluir que

$$h(x)\, dx = d\upsilon(x)$$

e portanto que estes polinómios serão ortogonais relativamente à função peso $h(x)$. Por outro lado, no caso dos polinómios de Chebychev de 1ª espécie temos de ter em conta a possível existência de pontos de de descontinuídade de $\tau(x)$ no intervalo $[-1,1]$. Denotando por A_τ o conjunto destes pontos, note-se que A_τ é um subconjunto dos pontos de descontinuidade de $g(x)$, i.e., $A_\tau \subseteq \{-1,1\}$. Para continuar este estudo é necessário considerar o resultado que se segue.

Teorema 16 *[4] Seja $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ uma sequência de polinómios ortonormados relativamente a uma função de distribuição ψ. Um ponto x^* é um ponto de descontinuidade de ψ se e só se*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^2(x^*) < +\infty. \tag{3.1}$$

Consideremos então polinómios definidos, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, como

$$\widehat{T}_n(x) = \gamma_n T_n(x),$$

com

$$\gamma_0 = 1,$$
$$\gamma_n = \sqrt{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

A sequência de polinómios $\left(\widehat{T}_n, n \in \mathbb{N}_0\right)$ é a versão ortonormada da sequência de polinómios de Chebychev de 1ª espécie. Note-se agora que

$$\widehat{T}_n(-1) = (-1)^n, \qquad \widehat{T}_n(1) = 1,$$

pelo que (3.1) se verifica para estes pontos. Podemos então concluir pelo teorema 16 que $A_\tau = \emptyset$ no intervalo $[-1,1]$ e portanto

$$g(x)\, dx = d\tau(x).$$

Assim, finalmente, os polinómios de Chebychev de 1ª espécie serão ortogonais relativamente à função peso $g(x)$, como esperávamos.

3.3 Modelo M/M/1

Esta secção será dedicada à análise do modelo $M/M/1$, como intuito de encontrar uma solução para as probabilidades de transição do mesmo, recorrendo a uma linguagem de polinómios ortogonais. A sequência de polinómios ortogonais associada a este modelo, que designaremos por $(p_n, n \in \mathbb{N}_0)$, pode ser definida de forma recursiva por

$$-xp_n(x) = \lambda_{n-1}p_{n-1}(x) + \mu_{n+1}p_{n+1}(x) - (\lambda_n + \mu_n)p_n(x), \quad n = 0, 1, \ldots,$$
$$p_{-1}(x) = 0, \ p_0(x) = 1,$$

com

$$\lambda_{-1} = 0, \qquad \lambda_n = \lambda, \ \forall n \in \mathbb{N}_0,$$
$$\mu_0 = 0, \qquad \mu_n = \mu, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

para λ e μ números reais positivos. Procuremos agora manobrar os polinómios com que estamos a trabalhar, simplificando assim os cálculos mais à frente realizados, com o intuito da aplicação do teorema de Markov. Com isto em mente, sabemos com base no capítulo anterior que é possível obter uma sequência de polinómios mónicos $(M_n, n \in \mathbb{N}_0)$ a partir da sequência anterior, preservando a ortogonalidade dos mesmos, tomando

$$M_n(x) \equiv k_n p_n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

com

$$k_0 = 1,$$
$$k_n = (-1)^n \mu_1 \dots \mu_n, \ n \in \mathbb{N},$$

i.e., em particular para este caso,

$$k_n = (-\mu)^n, \ n \in \mathbb{N}_0,$$

Deste modo, esta nova sequência de polinómios será definida pela recorrência

$$xM_n(x) = \lambda_{n-1}\mu_n M_{n-1}(x) + M_{n+1}(x) + (\lambda_n + \mu_n)M_n(x), \quad n = 0, 1, \dots,$$
$$M_{-1}(x) = 0, \ M_0(x) = 1.$$

Com base nestes últimos, será ainda útil tomar uma nova sequência de polinómios ortogonais. Comecemos então por considerar a mudança de variável

$$y = x - (\lambda + \mu)$$

e defina-se

$$P_n(y) = M_n\left(y + (\lambda + \mu)\right).$$

Nestas condições, a sequência de polinómios $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ será definida por uma nova recorrência, da forma

$$yP_n(y) = P_{n+1}(y) + \lambda_{n-1}\mu_n P_{n-1}(y), \quad n = 1, 2, \dots$$
$$P_0(y) = 1, \ P_1(y) = y + \mu.$$

Em particular,

$$\begin{cases} P_0(y) = 1 \\ P_1(y) = y + \mu \\ P_n(y) = yP_{n-1}(y) - \lambda\mu P_{n-2}(y), \quad n = 2, 3, \ldots \end{cases}.$$

Note-se que podemos escrever a recorrência da forma (1.9), tomando

$$\alpha_0 = -\mu, \qquad \alpha_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

$$\beta_0 = 1, \qquad \beta_n = \lambda\mu,\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

(Note-se que, tomando $P_{-1}(y) = 0$, β_0 pode tomar qualquer valor). Podemos assim tomar a sequência de polinómios numerador de $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$, que denotaremos por $\left(P_n^{(1)}, n \in \mathbb{N}_0\right)$. Estes polinómios sabemos serem definidos de froma recursiva por

$$\begin{aligned} &yP_n^{(1)}(y) = P_{n+1}^{(1)}(y) + \lambda_n\mu_{n+1}P_{n-1}^{(1)}(y), \quad n = 0, 1, \ldots \\ &P_{-1}^{(1)}(y) = 0,\ P_0^{(1)}(y) = 1. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{cases} P_0^{(1)}(y) = 1 \\ P_1^{(1)}(y) = y \\ P_n^{(1)}(y) = yP_{n-1}^{(1)}(y) - \lambda\mu P_{n-2}^{(1)}(y), \quad n = 2, 3, \ldots \end{cases}.$$

Pretendemos agora determinar, com o intuito de aplicar o Teorema de Markov, o valor de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n-1}^{(1)}(y)}{P_n(y)}.$$

Comecemos por notar que, para $n = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{bmatrix} P_{n+1}(y) & P_n^{(1)}(y) \\ P_n(y) & P_{n-1}^{(1)}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -\lambda\mu \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n(y) & P_{n-1}^{(1)}(y) \\ P_{n-1}(y) & P_{n-2}^{(1)}(y) \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{bmatrix} P_1(y) & P_0^{(1)}(y) \\ P_0(y) & P_{-1}^{(1)}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y + \mu & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, pode-se obter recorrentemente, para $n = 0, 1, \ldots$,

$$\begin{bmatrix} P_{n+1}(y) & P_n^{(1)}(y) \\ P_n(y) & P_{n-1}^{(1)}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -\lambda\mu \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} y + \mu & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Desta forma, é possível obter, para uma dado polinómio $R(y)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n-1}^{(1)}(y)}{P_n(y)}=\frac{-\sqrt{y^2-4\lambda\mu}+R(y)}{2\mu\,(y+\mu+\lambda)},\qquad y\notin\left[-2\sqrt{\lambda\mu},2\sqrt{\lambda\mu}\right].$$

Assim, para uma dada função ditribuição ϕ, pelo Teorema de Markov,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\phi(y)}{z-y}=\chi(z)=\frac{-\sqrt{z^2-4\lambda\mu}+R(z)}{2\mu\,(z+\lambda+\mu)},\quad z\in\mathbb{C}\setminus\left[-2\sqrt{\lambda\mu},2\sqrt{\lambda\mu}\right].$$

Tomemos agora, com base na fórmula de inversão de Stieltjes,

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}(y)&=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to0^+}\{\chi(y-i\varepsilon)-\chi(y+i\varepsilon)\}\\&=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4\lambda\mu-y^2}}{2\pi\mu\,(y+\lambda+\mu)}, & y\in\left[-2\sqrt{\lambda\mu},2\sqrt{\lambda\mu}\right]\\ 0, & y\notin\left[-2\sqrt{\lambda\mu},2\sqrt{\lambda\mu}\right]\end{cases}\end{aligned}$$

Denotemos por A_ϕ o conjunto de pontos de descontínuidade de $\phi(y)$ no intervalo $\left[-2\sqrt{\lambda\mu},2\sqrt{\lambda\mu}\right]$. Note-se que $A_\phi\subseteq\{-(\lambda+\mu)\}$. Tomemos então λ,μ (que sabemos serem reais e positivos), tais que

$$-2\sqrt{\lambda\mu}\le-(\lambda+\mu)\le2\sqrt{\lambda\mu}. \tag{3.5}$$

Dividindo ambos os membros da primeira desigualdade de (3.5) por μ, facilmente se obtém

$$\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\mu}{\mu}\le\frac{2\sqrt{\lambda\mu}}{\mu},$$

ou, de forma equivalente

$$\frac{\lambda}{\mu}-2\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}+1\le0. \tag{3.6}$$

A solução da desigualdade (3.6) é da forma $\lambda/\mu=1$, ou seja, $\lambda=\mu$. Por outro lado, nestas condições,

$$-(\lambda+\mu)=-2\sqrt{\lambda\mu}=-2\mu$$

e portanto, $A_\phi\subseteq\{-2\mu\}$.

Para finalmente obter o conjunto A_ϕ, comecemos por encontrar a sequência de polinómios ortonormados $\left(\widehat{P}_n,n\in\mathbb{N}_0\right)$, que preserve a ortogonalidade da sequência de polinómios $(P_n,n\in\mathbb{N}_0)$. Para tal, consideremos a sucessão (γ_n), definida por

$$\gamma_0=1,\qquad\gamma_n=(\lambda\mu)^n,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Tomemos a recorrência da forma (1.9) com coeficientes α_n, β_n ($n \in \mathbb{N}_0$), definidos como em (3.2)-(3.3). Dividindo a recorrência por $\sqrt{\gamma_n}$ obtemos, para $n = 1, 2, \ldots,$

$$y\frac{P_n(y)}{\sqrt{\gamma_n}} = \beta_{n+1}\frac{\sqrt{\gamma_n}}{\sqrt{\gamma_{n+1}}}\frac{P_{n+1}(y)}{\sqrt{\gamma_{n+1}}} + \alpha_n\frac{P_n(y)}{\sqrt{\gamma_n}} + \beta_n\frac{\sqrt{\gamma_{n-1}}}{\sqrt{\gamma_n}}\frac{P_{n-1}(y)}{\sqrt{\gamma_{n-1}}}.$$

Consideremos então, para $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \beta_n\frac{\sqrt{\gamma_{n-1}}}{\sqrt{\gamma_n}}, \qquad \widehat{P}_n(x) = \frac{P_n(x)}{\sqrt{\gamma_n}}.$$

e

$$b_0 = 1, \qquad \widehat{P}_0(x) = 1.$$

Assim, a sequência de polinómios $\left(\widehat{P}_n, n \in \mathbb{N}_0\right)$ será definida pela recorrência

$$\begin{aligned}
&y\widehat{P}_n(y) = b_{n+1}\widehat{P}_{n+1}(y) + \alpha_n\widehat{P}_n(y) + b_n\widehat{P}_{n-1}(y), \quad n = 1, 2, \ldots \\
&\widehat{P}_0(y) = 1,\ \widehat{P}_1(y) = \frac{y - \alpha_0}{b_1}
\end{aligned}$$

e portanto $\left(\widehat{P}_n, n \in \mathbb{N}_0\right)$ é uma sequência de polinómios ortonormados, ortogonais relativamente ao mesmo funcional de momentos que a sequência de polinómios $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ ([1]).

Sabemos então pelo Teorema 16, que para um dado ponto $y^* \in \left[-2\sqrt{\lambda\mu}, 2\sqrt{\lambda\mu}\right]$, $y^* \in A_\phi$ se e só se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{P}_n^2(y^*) < \infty.$$

Assim sendo, resta-nos então estudar a convergência de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{P}_n^2(-2\mu). \tag{3.7}$$

Note-se que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\widehat{P}_n^2(-2\mu) = 1,$$

pelo que a série (3.7) é divergente.

É possível então concluir que $A_\phi = \emptyset$ no intervalo $\left[-2\sqrt{\lambda\mu}, 2\sqrt{\lambda\mu}\right]$, pelo que podemos concluir que

$$d\phi(y) = \widetilde{\omega}(y)\, dx.$$

Assim, a sequência de polinómios $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ será ortogonal relativamente à função peso

$$\widetilde{\omega}(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4\lambda\mu - y^2}}{2\pi\mu\,(y+\lambda+\mu)}, & y \in \left[-2\sqrt{\lambda\mu}, 2\sqrt{\lambda\mu}\right] \\ 0, & y \notin \left[-2\sqrt{\lambda\mu}, 2\sqrt{\lambda\mu}\right] \end{cases}.$$

Observe-se agora que, para $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}\gamma_n = \int_{-2\sqrt{\lambda\mu}}^{-2\sqrt{\lambda\mu}} P_n^2(y)\widetilde{\omega}(y)\;dy &= \int_{-2\sqrt{\lambda\mu}}^{2\sqrt{\lambda\mu}} M_n^2\,(y+\lambda+\mu)\,\widetilde{\omega}(y)\;dy \\ &= \int_{-2\sqrt{\lambda\mu}+\lambda+\mu}^{2\sqrt{\lambda\mu}+\lambda+\mu} M_n^2\,(x)\,\frac{\sqrt{4\lambda\mu-(x-(\lambda+\mu))^2}}{2\pi\mu x}\;dx \\ &= \int_{-2\sqrt{\lambda\mu}+\lambda+\mu}^{2\sqrt{\lambda\mu}+\lambda+\mu} M_n^2\,(x)\,\frac{\sqrt{-x^2+2(\lambda+\mu)x-(\lambda-\mu)^2}}{2\pi\mu x}\;dx \\ &= \frac{1}{k_n^2}\int_{-2\sqrt{\lambda\mu}+\lambda+\mu}^{2\sqrt{\lambda\mu}+\lambda+\mu} p_n^2\,(x)\,\frac{\sqrt{-x^2+2(\lambda+\mu)x-(\lambda-\mu)^2}}{2\pi\mu x}\;dx.\end{aligned}$$

Analogamente, para $m, n \in \mathbb{N}_0$, com $m \neq n$,

$$\begin{aligned}0 &= \int_{-2\sqrt{\lambda\mu}}^{-2\sqrt{\lambda\mu}} P_m(y)P_n(y)\widetilde{\omega}(y)\;dy \\ &= \frac{1}{k_m k_n}\int_{-2\sqrt{\lambda\mu}+\lambda+\mu}^{2\sqrt{\lambda\mu}+\lambda+\mu} p_m\,(x)\,p_n\,(x)\,\frac{\sqrt{-x^2+2(\lambda+\mu)x-(\lambda-\mu)^2}}{2\pi\mu x}\;dx.\end{aligned}$$

Assim, para

$$\omega(x) = \frac{\sqrt{-x^2+2(\lambda+\mu)x-(\lambda-\mu)^2}}{2\pi\mu x}$$

e $m, n \in \mathbb{N}_0$,

$$\int_{-2\sqrt{\lambda\mu}+\lambda+\mu}^{2\sqrt{\lambda\mu}+\lambda+\mu} p_m(x)p_n\,(x)\,\omega(x)\;dx = \begin{cases} \dfrac{\gamma_n}{k_n^2}, & \text{se } m \neq n \\ 0, & \text{se } m = n \end{cases},$$

pelo que a sequência de polinómios $(p_n, n \in \mathbb{N}_0)$ será ortogonal relativamente à função peso $\omega(x)$. Note-se ainda que, tomando ξ_n como em (2.15), temos nestas circunstâncias que, para $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\xi_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n}$$

e portanto

$$\frac{\gamma_n}{k_n^2} = \frac{(\lambda\mu)^n}{\mu^{2n}} = \frac{\lambda^n}{\mu^n} = \xi_n.$$

Assim, de forma semelhante a (2.19)-(2.20),

$$\int_{-2\sqrt{\lambda\mu}+\lambda+\mu}^{2\sqrt{\lambda\mu}+\lambda+\mu} p_m(x)p_n(x)\,\omega(x)\,dx = \begin{cases} \xi_n, & \text{se } m \neq n \\ 0, & \text{se } m = n \end{cases},$$

para todo $m,n \in \mathbb{N}_0$.

Antes de concluir esta secção, é preciso perceber se realmente a função peso $\omega(x)$ definine de forma única o funcional de momentos, a que chamaremos L, relativamente ao qual os polinómios com que estamos a trabalhar são ortogonais. De facto, por [2], isto verifica-se se as sucessões de números reais (α_n) e (β_n) forem limitadas, como no caso que estamos a analisar.

Podemos então finalmente concluir que as probabilidades de transição, do processo de nascimento e morte que nos propusemos a estudar nesta secção, serão dadas por

$$p_{m,n}(t) = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^m \int_{-2\sqrt{\lambda\mu}+\lambda+\mu}^{2\sqrt{\lambda\mu}+\lambda+\mu} e^{-xt} p_m(x)p_n(x)\,\frac{\sqrt{-x^2+2(\lambda+\mu)x-(\lambda-\mu)^2}}{2\pi\mu x}\,dx.$$

Note-se que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$ o cálculo dos polinómios $p_n(x)$ pode ser facilmente obtido a partir do cálculo dos polinómios $P_n(x)$, por sua vez obtido como em (3.8).

Tomando $\rho = \lambda/\mu$ é possível ainda escrever

$$p_{m,n}(t) = \left(\frac{1}{\rho}\right)^m \int_{\rho+1-2\sqrt{\rho}}^{\rho+1+2\sqrt{\rho}} e^{-(\mu x)t} p_m(\mu x)p_n(\mu x)\,\frac{\sqrt{-x^2+2(\rho+1)x-(\rho-1)^2}}{2\pi x}\,dx,$$

em que os polinómios $p_n(\mu x)$ apenas dependem do parâmetro ρ, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

Foi assim possível obter, nesta secção, a solução das probabilidades de transição $p_{m,n}(t)$ na forma integral, em que todos os objectos estão definidos no texto. Além de um diferente processo de raciocínio no cálculo destas probabilidades, apresentamos também a solução de uma forma alternativa à usual, como a presente em [6], que é dada através de *funções modificadas de Bessel*.

3.4 Modelo M/M/2

Nesta secção, em que será feita uma análise da solução das probabilidade de transição para o modelo $M/M/2$, utilizaremos em muitos casos a mesma notação utilizada na secção dedicada ao modelo $M/M/1$, sem perda de clareza. Assim, neste caso, a sequência de polinómios ortogonais associada a este modelo, que designaremos por $(p_n, n \in \mathbb{N}_0)$, pode ser definida de recursivamente da forma

$$\begin{aligned} &-xp_n(x) = \lambda_{n-1}p_{n-1}(x) + \mu_{n+1}p_{n+1}(x) - (\lambda_n+\mu_n)p_n(x), \quad n = 0,1,\ldots, \\ &p_{-1}(x) = 0,\ p_0(x) = 1, \end{aligned}$$

com

$$\lambda_{-1} = 0, \qquad \lambda_n = \lambda,\ \forall n = 0,1,\ldots,$$
$$\mu_0 = 0, \qquad \mu_1 = \mu, \qquad \mu_n = 2\mu,\ \forall n = 2,3,\ldots,$$

para λ e μ números reais positivos. Como já sabemos, é possível obter uma sequência de polinómios mónicos $(M_n, n \in \mathbb{N}_0)$ a partir da sequência anterior, preservando a ortogonalidade dos mesmos, tomando

$$M_n(x) \equiv k_n p_n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

com

$$k_0 = 1,$$
$$k_n = (-1)^n \mu_1 \ldots \mu_n,\ n \in \mathbb{N},$$

ou seja, nas condições actuais,

$$k_0 = 1,$$
$$k_n = 2^{n-1}(-\mu)^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Esta nova sequência de polinómios será definida pela recorrência

$$xM_n(x) = \lambda_{n-1}\mu_n M_{n-1}(x) + M_{n+1}(x) + (\lambda_n + \mu_n)M_n(x) \quad n = 0,1,\ldots,$$
$$M_{-1}(x) = 0,\ M_0(x) = 1.$$

Mais uma vez continuaremos a simplificação dos polinómios considerando a mudança de variável

$$y = x - (\lambda + \mu)$$

e defina-se

$$P_n(y) = M_n\left(y + (\lambda + \mu)\right).$$

Nestas condições, a sequência de polinómios $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ pode ser definida da forma

$$\begin{cases} P_0(y) = 1 \\ P_1(y) = y + 2\mu \\ P_2(y) = (y+\mu)P_1(y) + \lambda\mu \\ P_n(y) = yP_{n-1}(y) - 2\lambda\mu P_{n-2}(y), \quad n = 3,4,\ldots \end{cases}.$$

Note-se que podemos escrever a recorrência da forma (1.9), tomando

$$\alpha_0 = -2\mu, \qquad \alpha_1 = -\mu, \qquad \alpha_n = 0,\ \forall n = 2,3,\ldots,$$
$$\beta_0 = 1, \qquad \beta_1 = \lambda\mu, \qquad \beta_n = 2\lambda\mu,\ \forall n = 2,3,\ldots,$$

(Note-se que, tomando $P_{-1}(y) = 0$, β_0 pode tomar qualquer valor). Podemos então também considerar a sequência de polinómios numerador de $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$, que denotaremos por $\left(P_n^{(1)}, n \in \mathbb{N}_0\right)$. Estes polinómios sabemos serem definidos de froma recursiva por

$$\begin{cases} P_0^{(1)}(y) = 1 \\ P_1^{(1)}(y) = y + 2\mu \\ P_n^{(1)}(y) = yP_{n-1}^{(1)}(y) - 2\lambda\mu P_{n-2}^{(1)}(y), \quad n = 2,3,\ldots \end{cases}.$$

Notemos que neste caso, para $n = 2,3,\ldots$,

$$\begin{bmatrix} P_{n+1}(y) & P_n^{(1)}(y) \\ P_n(y) & P_{n-1}^{(1)}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -2\lambda\mu \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n(y) & P_{n-1}^{(1)}(y) \\ P_{n-1}(y) & P_{n-2}^{(1)}(y) \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{bmatrix} P_1(y) & P_0^{(1)}(y) \\ P_0(y) & P_{-1}^{(1)}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+2\mu & 1 \\ 1 & -1/\lambda \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} P_2(y) & P_1^{(1)}(y) \\ P_1(y) & P_0^{(1)}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^2+3\mu y+2\mu^2+\lambda\mu & y+2\mu \\ y+2\mu & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, é possível obter-se recorrentemente, para $n = 2,3,\ldots$,

$$\begin{bmatrix} P_{n+1}(y) & P_n^{(1)}(y) \\ P_n(y) & P_{n-1}^{(1)}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -2\lambda\mu \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} y^2+3\mu y+2\mu^2+\lambda\mu & y+2\mu \\ y+2\mu & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

É possível tal como anteriormente obter, para um dado polinómio $R(y)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n-1}^{(1)}(y)}{P_n(y)} = \frac{-(y-\lambda+2\mu)\sqrt{y^2-8\lambda\mu}+R(y)}{y^3+3\lambda y^2+5\mu y^2+12\lambda\mu y+8\mu^2 y+\lambda^2\mu+12\lambda\mu^2+4\mu^3},$$

para $y \notin \left[-2\sqrt{2\lambda\mu}, 2\sqrt{2\lambda\mu}\right]$. Logo, para uma dada função ditribuição ϕ, pelo Teorema de Markov,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi(y)}{z-y} = \chi(z) = \frac{-(z-\lambda+2\mu)\sqrt{z^2-8\lambda\mu}+R(z)}{z^3+3\lambda z^2+5\mu z^2+12\lambda\mu z+8\mu^2 z+\lambda^2\mu+12\lambda\mu^2+4\mu^3},$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus \left[-2\sqrt{2\lambda\mu}, 2\sqrt{2\lambda\mu}\right]$. Mais uma vez, com base na fórmula de inversão de Stieltjes, considere-se agora

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}(y) &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\{\chi(y-i\varepsilon)-\chi(y+i\varepsilon)\}\\ &= \begin{cases}\dfrac{(y-\lambda+2\mu)\sqrt{8\lambda\mu-y^2}}{\pi(y^3+3\lambda y^2+5\mu y^2+12\lambda\mu y+8\mu^2 y+\lambda^2\mu+12\lambda\mu^2+4\mu^3)}, & y\in\left[-2\sqrt{\lambda\mu}, 2\sqrt{2\lambda\mu}\right]\\ 0, & y\notin\left[-2\sqrt{2\lambda\mu}, 2\sqrt{\lambda\mu}\right]\end{cases}\end{aligned}$$

Denote-se então

$$D(y) = y^3+3\lambda y^2+5\mu y^2+12\lambda\mu y+8\mu^2 y+\lambda^2\mu+12\lambda\mu^2+4\mu^3.$$

Pretendemos agora analisar o comportamento das raízes deste polinómio no intervalo da recta real $\left[-2\sqrt{2\lambda\mu}, 2\sqrt{2\lambda\mu}\right]$. Comecemos por notar que, como $\lambda, \mu > 0$, o polinómio $D(y)$ é estritamente positivo no intervalo $\left(0, 2\sqrt{2\lambda\mu}\right]$, pelo que nos iremos concentrar apenas no comportamento das suas raízes em $\left[-2\sqrt{2\lambda\mu}, 0\right]$. Neste contexto, é importante observar que

$$D\left(-2\sqrt{2\lambda\mu}\right) = \mu\left(5\lambda+2\mu-4\sqrt{2\lambda\mu}\right)^2 > 0$$

e

$$D(0) = \mu\left(\lambda^2+12\lambda\mu+4\mu^2\right) > 0.$$

Assim, é possível concluir que, caso $D(y)$ possua apenas uma raíz real, então esta não se situa no intervalo $\left[-2\sqrt{2\lambda\mu}, 0\right]$. Por outro lado, as únicos casos em que o polinómio em causa se poderá anular neste intervalo, serão:

1. $D(y)$ tem exactamente duas raízes reais, simples, em $\left[-2\sqrt{2\lambda\mu}, 0\right]$;

2. $D(y)$ tem exactamente uma raíz real, de multiplicidade dupla, em $\left[-2\sqrt{2\lambda\mu}, 0\right]$.

Para analisar tais possibilidades, comcemos por notar que

$$D'(y) = 3y^2+(6\lambda+10\mu)y+12\lambda\mu+8\mu^2.$$

Denote-se então as raízes de $D'(y)$ por

$$y_1 = -\frac{2}{3}(3\lambda+2\mu), \qquad y_2 = -2\mu.$$

Por um lado,

$$y_1 = -\frac{2}{3}(3\lambda+2\mu) \leq -2(\lambda+\mu).$$

Note-se ainda que a desigualdade

$$-2(\lambda+\mu) < -2\sqrt{2\lambda\mu}$$

é equivalente a

$$\frac{\lambda}{\mu} - \sqrt{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} + 1 > 0,$$

que é verdadeira para todo $\lambda, \mu > 0$. Assim

$$y_1 < -2\sqrt{2\lambda\mu}$$

e portanto $y_1 \notin \left[-2\sqrt{2\lambda\mu}, 0\right]$. Por outro lado, a desigualdade

$$y_2 = -2\mu < -2\sqrt{2\lambda\mu}$$

apenas se verifica quando $\mu > 2\lambda$, pelo que, para $\mu \leq 2\lambda$, $y_2 \in \left[-2\sqrt{2\lambda\mu}, 0\right]$. No entanto, apesar da possibilidade da existência de uma mudança de sinal da derivada de $D(y)$, neste intervalo, é importante notar que

$$D(y_2) = \lambda^2\mu > 0,$$

pelo que, mesmo nestas circunstâncias, que o polinómio não se anula no intervalo $\left[-2\sqrt{2\lambda\mu}, 2\sqrt{2\lambda\mu}\right]$.

Podemos então mais uma vez concluir que

$$d\phi(y) = \widetilde{\omega}(y)\; dx,$$

e portanto a sequência de polinómios $(P_n, n \in \mathbb{N}_0)$ será ortogonal relativamente à função peso

$$\widetilde{\omega}(y) = \begin{cases} \dfrac{(y-\lambda+2\mu)\sqrt{y^2-8\lambda\mu}}{\pi(y^3+3\lambda y^2+5\mu y^2+12\lambda\mu y+8\mu^2 y+\lambda^2\mu+12\lambda\mu^2+4\mu^3)}, & y \in \left[-2\sqrt{\lambda\mu}, 2\sqrt{\lambda\mu}\right] \\ 0, & y \notin \left[-2\sqrt{\lambda\mu}, 2\sqrt{\lambda\mu}\right] \end{cases}.$$

Tomando agora

$$\gamma_0 = 1, \qquad \gamma_n = 2^{n-1}(\lambda\mu)^n, \; \forall n \in \mathbb{N},$$

e considerando

$$\omega(x) = \frac{(x-2\lambda+\mu)\sqrt{8\lambda\mu-(x-\lambda-\mu)^2}}{\pi(x^3+2\mu x^2-3\lambda^2 x+2\lambda\mu x+\mu^2 x+2\lambda^3-3\lambda^2\mu+2\lambda\mu^2)}, \tag{3.9}$$

podemos notar que, para $n \in \mathbb{N}_0$

$$\gamma_n = \int_{-2\sqrt{2\lambda\mu}}^{-2\sqrt{2\lambda\mu}} P_n^2(y)\widetilde{\omega}(y)\, dy = \frac{1}{k_n^2} \int_{-2\sqrt{2\lambda\mu}+\lambda+\mu}^{2\sqrt{2\lambda\mu}+\lambda+\mu} p_n^2(x)\, \omega(x)\, dx$$

e, para $m,n \in \mathbb{N}_0$, com $m \neq n$,

$$0 = \int_{-2\sqrt{2\lambda\mu}}^{-2\sqrt{2\lambda\mu}} P_m(y)P_n(y)\widetilde{\omega}(y)\, dy = \frac{1}{k_m k_n} \int_{-2\sqrt{2\lambda\mu}+\lambda+\mu}^{2\sqrt{2\lambda\mu}+\lambda+\mu} p_m(x)\, p_n(x)\, \omega(x)\, dx.$$

É de observar ainda que, tomando ξ_n como em (2.15), temos nas condições actuais,

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_1 = \frac{\lambda}{\mu}$$
$$\xi_n = \frac{\lambda^n}{2^{n-1}\mu^n},\ n = 2, 3, \ldots.$$

e portanto

$$\frac{\gamma_0}{k_0^2} = 1 = \xi_0, \tag{3.10}$$
$$\frac{\gamma_n}{k_n^2} = \frac{2^{n-1}(\lambda\mu)^n}{2^{2n-2}\mu^{2n}} = \frac{\lambda^n}{2^{n-1}\mu^n} = \xi_n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Desta maneira, tal como anteriormente, e de forma semelhante a (2.19)-(2.20),

$$\int_{-2\sqrt{2\lambda\mu}+\lambda+\mu}^{2\sqrt{2\lambda\mu}+\lambda+\mu} p_m(x) p_n(x)\, \omega(x)\, dx = \begin{cases} \xi_n, & \text{se } m \neq n \\ 0, & \text{se } m = n \end{cases},$$

para todo $m,n \in \mathbb{N}_0$.

De formar análoga ao caso estudado anteriomente, também aqui a função peso ω definine de forma única o funcional de momentos em relação ao qual os polinómios que estamos a considerar são ortogonais. Assim, da mesma forma, podemos escrever para o modelo $M/M/2$,

$$p_{m,n}(t) = \frac{1}{\xi_m} \int_{-2\sqrt{2\lambda\mu}+\lambda+\mu}^{2\sqrt{2\lambda\mu}+\lambda+\mu} e^{-xt} p_m(x) p_n(x)\, \omega(x)\, dx,$$

com ξ_m definido em (3.10)-(3.11) e $\omega(x)$ definido em (3.9).

Mais uma vez, neste caso, conseguimos descrever as probabilidades de transição $p_{m,n}(t)$ por uma forma integral, com todos os objectos, presentes na expressão, identificados.

Conclusão

Na presente dissertação foi possível cumprir o objectivo de construir um documento que permitisse, de forma sólida e clara, entrelaçar duas áreas aparentemente distintas da matemática. Começando na discussão dos fundamentos da *Teoria de Polinómios Ortogonais*, passando pelos pontos essenciais da *Análise Transitória de Processos de Nascimento e Morte*, conseguimos aqui evidenciar o natural entruzamento destas áreas, ultrapassando barreiras ilusórias originadas por uma divergência de linguagem matemática. Este trabalho deverá assim inspirar à continuação de utilização da linguagem de polinómios ortogonais como ferramenta de análise deste e outros assuntos, como tem sido feito por vários autores.

Resta ainda observar que, naturalmente, esta dissertação deixa diversos pontos em aberto para discussão. No âmbito do raciocínio efectuado no capítulo 2, será interessante perceber como certos resultados obtidos podem ser úteis na análise de processos de nascimento e morte cujo espaço de estados é finito e ainda discutir, de uma forma recíproca ao que é efectuado no capítulo 3, casos já trabalhados no âmbito da teoria de polinómios ortogonais, que possam reflectir-se em aplicações relevantes de processos de nascimento e morte. Por outro lado, o trabalho efectuado no âmbito dos modelos de fila de espera pode ser completo com o cáculo dos integrais apresentados e, consequentemente, com a concretização de casos práticos de relevência, assim como a comparação do raciocínio efectuado e resultados obtidos com trabalhos previamente realizados no contexto destes mesmo modelos.

Bibliografia

[1] Chihara, T. S. (2011). *An introduction to orthogonal polynomials*. Courier Corporation.

[2] Ismail, M., Ismail, M. E., & van Assche, W. (2005). *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable* (Vol. 13). Cambridge University Press.

[3] Ross, S. M. (2014). *Introduction to probability models*. Academic press.

[4] Castañeda, J. A. C., Silva, V., & Salas, G. (1991). *Polinomios ortogonales relacionados con problemas espectrales*. Revista Colombiana de Matemáticas, 25(1-4), 35-80.

[5] Froda, A. (1929). *Sur la distribution des propriétés de voisinage des fonctions de variables réelles* (Doctoral dissertation, Librairie scientifique Hermann).

[6] Shortle, J. F., Thompson, J. M., Gross, D., & Harris, C. M. (2018). *Fundamentals of queueing theory* (Vol. 399). John Wiley & Sons.