



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Adérito Giordan Bernardes

**TRANSFERÊNCIA DE CALOR COM CONDIÇÕES
DE ROBIN**

VOLUME 1

**Dissertação no âmbito do Mestrado em Matemática, Ramo Análise Aplicada e
Computação orientada pelo Professor Doutor José Augusto Ferreira e apresentada
ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia.**

Junho de 2020

TRANSFERÊNCIA DE CALOR COM CONDIÇÕES DE ROBIN

Adérito Giordan Bernardes



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mestrado em Matemática

Master in Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Junho 2020

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a minha família pelo apoio incondicional para a realização deste sonho. Sem eles, a decisão de deixar para trás tudo que eu havia construído e conquistado até aquele momento em busca do desejo de fazer o mestrado longe de casa, não teria sido possível. Não posso deixar de mencionar também a minha parte portuguesa da família, que me acolheu durante o Natal e me fez sentir um pouco mais perto de casa.

Agradeço também a este país que me recebeu de braços abertos e me deu a oportunidade de viver novas experiências e conhecer pessoas incríveis. Aqui, construí amizades que levarei para minha vida e não posso deixar de mencionar duas pessoas em especial que tornaram esses dois anos mais leve e feliz, Bárbara e Simone. Posso afirmar com toda certeza que levarei a nossa amizade dentro do meu coração independentemente de onde estivermos, juntos ou separados por um oceano.

Por fim, mas não menos importante, agradeço à Universidade de Coimbra e seu corpo docente por toda atenção e ensinamentos, em especial, ao meu orientador Professor Doutor José Augusto Ferreira pela paciência e orientação para a realização desta dissertação.

Resumo

Neste trabalho é estudado, do ponto de vista analítico e numérico, o problema de calor linear e não linear com condições de fronteira de Robin. No caso linear provamos a estabilidade do problema contínuo e, para o problema discreto, são estabelecidos resultados de estabilidade e convergência. No caso não linear, para o modelo contínuo, a estabilidade é concluída localmente para uma solução suave. No caso discreto, a estabilidade local é estabelecida se a solução verifica uma condição de regularidade que pode ser vista como uma versão discreta da imposta no caso contínuo. A validade desta condição é concluída a partir do resultado de convergência.

Abstract

In this work we study for the analytical and numerical point of view, the linear and non linear heat problem with Robin boundary conditions. In the linear case, we prove the stability of the continuous problem, we establish the stability and convergence results. In the non linear case and for the continuous problem, the stability is locally concluded for smooth solutions. In the discrete case, the local stability is proved if the discrete solution satisfies a smoothness condition that can be seen as a discrete version of the one improved for the continuous case. We show that this condition can be considered from the convergence results.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	O Caso Linear	3
2.1	Introdução	3
2.2	Modelo contínuo	5
2.2.1	Introdução	5
2.2.2	Uma estimativa de energia	5
2.2.3	Estabilidade	7
2.3	Modelo semi-discreto	9
2.3.1	Introdução	9
2.3.2	Aproximação semi-discreta	9
2.3.3	Estabilidade	11
2.3.4	Análise de convergência	13
2.4	Modelo completamente discreto	17
2.4.1	Introdução	17
2.4.2	Integração Espaço-Tempo	17
2.4.3	Estabilidade	18
2.4.4	Análise de convergência	18
2.4.5	Simulação numérica	22
3	O Caso Não Linear	25
3.1	Introdução	25
3.2	Modelo contínuo	25
3.2.1	Uma estimativa de energia	25
3.2.2	Estabilidade	28
3.3	Modelo semi-discreto	31
3.3.1	Aproximação semi-discreta	31
3.3.2	Estabilidade	34
3.3.3	Análise de convergência	37
3.4	Modelo completamente discreto	45
3.4.1	Introdução	45
3.4.2	Integração Espaço-Tempo	45
3.4.3	Estabilidade	46

3.4.4	Simulação numérica	48
Bibliografia		51

Capítulo 1

Introdução

O objetivo central do presente trabalho é o estudo da solução do seguinte problema parabólico não linear

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (1.1)$$

em que $K(T)$ é uma função de T , eventualmente não linear e Ω representa o domínio espacial. A equação anterior pode ser considerada no estudo da temperatura T de um corpo Ω . Neste caso $K(T)$ denota o coeficiente de condutividade térmica que depende da temperatura T . No entanto, esta equação pode ser também utilizada para descrever a evolução de uma concentração. Neste contexto, $K(T)$ representa o coeficiente de difusão.

A equação (1.1) é, em geral, complementada por uma condição inicial que descreve a variável T para $t = 0$ podendo, ou não, ser também complementada com condições de fronteira. Salientamos que são conhecidas expressões explícitas para a solução da equação (1.1) quando $K(T)$ é constante, isto é, quando a equação é linear, no caso particular de $\Omega = \mathbb{R}$, ou para $\Omega = (0, a)$ e a equação diferencial é complementada com condições de Dirichlet, Neumann ou certos tipos de condições de Robin, além da condição inicial. Notamos que, nos casos anteriores, as soluções admitem uma representação integral ($\Omega = \mathbb{R}$) ou é a soma de uma série de funções ($\Omega = (0, a)$).

Neste trabalho iremos considerar o seguinte problema com condições inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \text{ em } (0, a) \times \mathbb{R}^+, \\ K(T) \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = h_c(T(0, t) - T_{amb}), t \in \mathbb{R}^+, \\ -K(T) \frac{\partial T}{\partial x}(a, t) = h_{ca}(T(a, t) - T_{ca}), t \in \mathbb{R}^+, \\ T(x, 0) = \phi(x), x \in (0, a). \end{cases} \quad (1.2)$$

No contexto da propagação de calor, T_{amb} e T_{ca} denotam as temperaturas exteriores à esquerda e à direita, respectivamente, h_c e h_{ca} denotam os coeficientes de transferência de calor, e a distribuição inicial do calor no corpo é definida pela função ϕ .

Contrariamente aos problemas anteriormente referidos, a determinação da solução do problema (1.2) é possível apenas numericamente. O método que pretendemos estudar pertence à classe dos métodos de diferenças finitas e que será construído utilizando a abordagem do método das linhas: discretização espacial que converte o sistema contínuo num sistema diferencial ordinário que é em

seguida integrado utilizando um método para problemas diferenciais ordinários ([6]). A integração temporal será feita seguindo uma abordagem implícita-explicita em que a variável $K(T)$ é discretizada explicitamente de modo a obter um problema linear final.

Consideramos a discretização espacial da derivada de segunda ordem utilizando diferenças centradas de segunda ordem e a discretização das derivadas parciais que surgem nas condições de fronteira utilizando operadores de diferenças centradas de primeira ordem. Observamos que na literatura o estudo deste tipo de métodos é usualmente apresentado considerando condições de Dirichlet. Aqui, as condições de fronteira trazem dificuldades acrescidas no estudo das propriedades de convergência que são contornadas definindo um contexto funcional conveniente.

O presente trabalho é composto por mais dois capítulos que apresentamos seguidamente. No capítulo 2, *O Caso Linear*, é feito um estudo do comportamento qualitativo da temperatura para o caso em que o coeficiente $K(T)$ é constante. Iniciamos este capítulo com o estabelecimento de uma estimativa para $\|T(t)\|_{L^2(0,a)}$. Em seguida é apresentado um estudo de estabilidade. A análise do comportamento qualitativo da aproximação semi-discreta é o objetivo da seção 2.3, *Modelo semi-discreto*. Nesta seção estabelecemos resultados que constituem uma versão discreta dos resultados provados na seção 2.2. Realçamos que a definição da discretização espacial, bem como das condições de fronteira, e da norma L^2 -discreta e do correspondente produto interno são os elementos essenciais para a obtenção dos resultados aqui apresentados. O método numérico construído integrando o problema semi-discreto com o método de Euler implícito é introduzido na seção 2.4, *Modelo completamente discreto*. Nesta seção apresentamos o método numérico completamente discreto e ilustramos o comportamento qualitativo da solução do problema diferencial estudado ao longo deste capítulo.

No capítulo 3, *O Caso Não Linear*, é feito um estudo do comportamento qualitativo da solução do sistema diferencial não linear. Iniciamos este capítulo com o estabelecimento na seção 3.2 de uma estimativa para $\|T(t)\|_{L^2(0,a)}$. Para o efeito utilizamos o método de energia ([1]). Em seguida é apresentado um estudo de estabilidade. A estabilidade do modelo não linear é estabelecida localmente para soluções suaves. A análise do comportamento qualitativo da aproximação semi-discreta é o objetivo da seção 3.3, *Modelo semi-discreto*. Nesta seção estabelecemos resultados que constituem uma versão discreta dos resultados provados na seção 3.2. A definição da discretização espacial, bem como das condições de fronteira, e da norma L^2 -discreta e do correspondente produto interno são os elementos essenciais para a obtenção dos resultados aqui apresentados. Resultados análogos para o caso linear e com condições de fronteira mais simples podem ser vistos em ([4]). A estabilidade local é provada desde que a solução semi-discreta satisfaça uma condição que pode ser vista como uma versão discreta da exigida no caso contínuo. Observamos que esta condição é uma consequência dos resultados de convergência provados para a aproximação semi-discreta. Na seção 3.4, *Modelo completamente discreto*, é apresentado o método numérico completamente discreto construído integrando o problema semi-discreto com o método de Euler implícito-explicito. Estabelecemos um resultado de estabilidade desde que a aproximação completamente discreta em torno da qual este estudo é feito verifique uma condição análoga a já considerada no caso semi-discreto. Salientamos que tal condição poderá ser consequência dos resultados de convergência, no entanto esta análise não será objeto de estudo no presente trabalho. Concluimos este trabalho ilustrando o comportamento qualitativo da solução numérica definida pelo método de Euler implícito-explicito.

Capítulo 2

O Caso Linear

2.1 Introdução

A equação do calor (1.1) em que T denota a temperatura no ponto x no instante t , $K(T)$ denota o coeficiente de condutividade térmica que depende da temperatura T e Ω representa o domínio espacial, é uma das equações parabólicas mais estudadas na literatura atendendo à sua aplicação numa grande diversidade de fenómenos físicos.

A solução da equação (1.1), no caso em que o coeficiente de condutividade térmica é constante, $K(T) = K$, $\Omega = \mathbb{R}$ e complementada com a condição inicial

$$T(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

admite uma representação explícita utilizando a função de Green

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4K\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Kt}} \phi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Quando consideramos $\Omega = (0, a)$, a equação (1.1), com $K(T) = K$, complementada com condições de fronteira de Dirichlet admite a representação

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi)^2 Kt} \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right), \quad x \in [0, a], \quad t \in \mathbb{R}_0^+,$$

com $A_n = \frac{2}{a} \int_0^a \phi(y) \sin\left(n\pi \frac{y}{a}\right) dy$, $y \in \mathbb{N}$. A representação anterior é substituída por uma série de cossenos quando as condições de Dirichlet para a fronteira são substituídas por condições de Neumann.

No presente capítulo pretendemos estudar o problema de condução de calor no corpo cilíndrico representado na Figura 2.1 supondo conhecida a temperatura exterior.

Seja ρ a densidade do corpo, c a capacidade de calor específico e seja K o coeficiente de condutividade térmica. Admitindo que o corpo é homogéneo e isotrópico¹, então o problema anterior

¹Domínio em que se mantém as mesmas propriedades físicas independente da direção considerada.

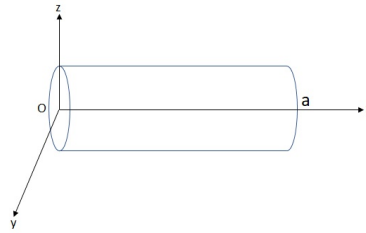


Fig. 2.1 Corpo cilíndrico

pode ser substituído pelo seguinte problema com condição inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \text{em } (0, a) \times \mathbb{R}^+, \\ K \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = h_c(T(0, t) - T_{amb}), & t \in \mathbb{R}^+, \\ -K \frac{\partial T}{\partial x}(a, t) = h_{ca}(T(a, t) - T_{ca}), & t \in \mathbb{R}^+, \\ T(x, 0) = \phi(x), & x \in (0, a), \end{cases} \quad (2.2)$$

em que T_{amb} e T_{ca} denotam as temperaturas exteriores à esquerda e à direita, respectivamente, h_c e h_{ca} denotam os coeficientes de transferência de calor, e a distribuição inicial do calor no corpo é definida pela função ϕ .

Contrariamente aos problemas anteriormente introduzidos, a determinação da solução do problema (2.2) não nos parece simples e portanto, a utilização de métodos numéricos para o cálculo aproximado de T é uma abordagem que seguimos no presente capítulo. O método numérico que vamos estudar pertence à classe dos métodos de diferenças finitas e que é usualmente referido como método das linhas. Consideramos a discretização espacial da derivada de segunda ordem utilizando diferenças centradas de segunda ordem e a discretização das derivadas parciais que surgem nas condições de fronteira utilizando operadores de diferenças centradas de primeira ordem. Observamos que na literatura o estudo deste tipo de métodos é usualmente apresentado considerando condições de Dirichlet. Aqui, as condições de fronteira trazem dificuldades acrescidas no estudo das propriedades de convergência que são contornadas definindo um contexto funcional conveniente.

O presente capítulo é composto por mais três secções que apresentamos seguidamente. Na secção 2.2, *Modelo contínuo*, é feito um estudo do comportamento qualitativo da temperatura. Iniciamos esta secção com o estabelecimento de uma estimativa para $\|T(t)\|_{L^2(0,a)}$. Em seguida é apresentado um estudo de estabilidade. A análise do comportamento qualitativo da aproximação semi-discreta é o objetivo da secção 2.3, *Modelo semi-discreto*. Nesta secção estabelecemos resultados que constituem uma versão discreta dos resultados provados na secção 2.2. O método numérico construído integrando o problema semi-discreto com o método de Euler implícito é introduzido na secção 2.4, *Modelo completamente discreto*. Nesta secção apresentamos o método numérico completamente discreto estudando a sua estabilidade na secção 2.4.3 e a prova da convergência é apresentada na secção 2.4.4. Finalmente na secção 2.4.5 ilustramos o comportamento qualitativo da solução do problema diferencial estudado neste capítulo, é também apresentado a ilustração da ordem de convergência estabelecida na Proposição 9.

2.2 Modelo contínuo

2.2.1 Introdução

Nesta secção pretendemos estabelecer estimativas para a solução do problema diferencial (2.2), relativamente à norma usual do espaço $L^2(0, a)$ que representamos por $\|\cdot\|_{L^2}$. O correspondente produto interno é denotado (\cdot, \cdot) .

Iremos utilizar a notação seguinte: se $u : [0, a] \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, então para $t \in \mathbb{R}_0^+$, $u(t) : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $u(t)(x) = u(x, t)$, $x \in [0, a]$.

Utilizando a notação anterior, iremos estabelecer na secção 2.2.2 - *Uma estimativa de energia*, um majorante para $\|T(t)\|_{L^2}$. Na secção 2.2.3- *Estabilidade*, apresentamos o estudo de estabilidade do problema de condições inicial e de fronteira (2.2). Na construção destes resultados tem um papel fundamental o *método da energia* ([1]).

2.2.2 Uma estimativa de energia

No resultado seguinte estabelecemos um resultado de conservação para o sistema (2.2) que relaciona as quantidades de calor num determinado instante e no instante inicial com a variação no espaço da temperatura e ainda a quantidade de calor que circula entre o corpo e o exterior. Consideramos $t \in [0, \mathcal{T}]$, em que $\mathcal{T} > 0$. Por $C[0, \mathcal{T}]$ denotamos o espaço das funções contínuas definidas em $[0, \mathcal{T}]$.

Proposição 1. *Se a solução T de (2.2) é tal que $\frac{\partial T}{\partial x}(t), \frac{\partial T}{\partial t}(t) \in C[0, \mathcal{T}]$, então*

$$\begin{aligned} & \rho c \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2h_c \int_0^t T(0, s)(T(0, s) - T_{amb}) ds \\ & + 2h_{ca} \int_0^t T(a, s)(T(a, s) - T_{ca}) ds + 2K \int_0^t \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds = \rho c \|T(0)\|_{L^2}^2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

para $t \in [0, \mathcal{T}]$.

Prova. Considerando o produto interno em ambos os membros da equação (2.2) com $T(t)$, obtemos

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t}(t), T(t) \right) = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t), T(t) \right). \quad (2.4)$$

Uma vez que $\left(\frac{\partial T}{\partial t}(t), T(t) \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T(t)\|_{L^2}^2$, de (2.4) vem

$$\rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T(t)\|_{L^2}^2 = K \frac{\partial T}{\partial x}(t) T(t) \Big|_0^a - \int_0^a K \frac{\partial T}{\partial x}(t) \frac{\partial T}{\partial x}(t) dx = K \frac{\partial T}{\partial x}(t) T(t) \Big|_0^a - \int_0^a K \left(\frac{\partial T}{\partial x}(t) \right)^2 dx,$$

portanto

$$\rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T(t)\|_{L^2}^2 = K \frac{\partial T}{\partial x}(a, t) T(a, t) - K \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) T(0, t) - K \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2. \quad (2.5)$$

Considerando agora as condições de fronteira de (2.2) obtemos

$$\rho c \frac{d}{dt} \|T(t)\|_{L^2}^2 = -2h_{ca}(T(a,t) - T_{ca})T(a,t) - 2h_c(T(0,t) - T_{amb})T(0,t) - 2K \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2,$$

que admite a forma equivalente

$$\frac{d}{dt} \left(\rho c \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2h_{ca} \int_0^t (T(a,s) - T_{ca})T(a,s) ds + 2h_c \int_0^t (T(0,s) - T_{amb})T(0,s) ds + 2K \int_0^t \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds \right) = 0,$$

para $t \in (0, \mathcal{T}]$. A igualdade anterior mostra que a função

$$\rho c \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2h_{ca} \int_0^t (T(a,s) - T_{ca})T(a,s) ds + 2h_c \int_0^t (T(0,s) - T_{amb})T(0,s) ds + 2K \int_0^t \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds$$

é constante em $t \in [0, \mathcal{T}]$ e portanto vale (2.3). \blacksquare

Observamos que no caso particular de um corpo aquecido com temperatura inicial $T(x, 0)$, $x \in [0, a]$ e $T_{amb} = T_{ca} = 0$, de (2.3) vem

$$\rho c \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2h_{ca} \int_0^t T(a,s)^2 ds + 2h_c \int_0^t T(0,s)^2 ds + 2K \int_0^t \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds = \rho c \|T(0)\|_{L^2}^2, \quad (2.6)$$

para $t \in [0, \mathcal{T}]$. Em (2.6), $h_{ca} \int_0^t T(a,s)^2 ds + h_c \int_0^t T(0,s)^2 ds$ representam a quantidade de calor transferida pela fronteira.

No resultado seguinte estabelecemos um majorante para $\rho c \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2K \int_0^t \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds$ em função das temperaturas exteriores T_{amb} e T_{ca} .

Proposição 2. Nas hipóteses da Proposição 1, se $\varepsilon > 0$ e $\gamma > 0$ são tais que $\frac{1}{\varepsilon} - 2h_c \leq 0$ e $\frac{1}{\gamma} - 2h_{ca} \leq 0$, então

$$\rho c \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2K \int_0^t \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds \leq t \left(\varepsilon h_c^2 T_{amb}^2 + \gamma h_{ca}^2 T_{ca}^2 \right) + \rho c \|T(0)\|_{L^2}^2, \quad t \in [0, \mathcal{T}]. \quad (2.7)$$

Prova. De (2.5), usando a desigualdade $ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$ para a e $b \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon, \gamma > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T(t)\|_{L^2}^2 &= -h_{ca}(T(a,t) - T_{ca})T(a,t) - h_c(T(0,t) - T_{amb})T(0,t) - K \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2 \\ &\leq -h_{ca}T(a,t)^2 - h_cT(0,t)^2 + \frac{\gamma}{2} h_{ca}^2 T_{ca}^2 + \frac{1}{2\gamma} T(a,t)^2 + \frac{\varepsilon}{2} h_c^2 T_{amb}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} T(0,t)^2 - K \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \rho c \frac{d}{dt} \|T(t)\|_{L^2}^2 &\leq -2h_cT(0,t)^2 - 2h_{ca}T(a,t)^2 + \varepsilon h_c^2 T_{amb}^2 + \frac{1}{\varepsilon} T(0,t)^2 + \gamma h_{ca}^2 T_{ca}^2 + \frac{1}{\gamma} T(a,t)^2 - 2K \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2 \\ &= T(0,t)^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - 2h_c \right) + T(a,t)^2 \left(\frac{1}{\gamma} - 2h_{ca} \right) + \varepsilon h_c^2 T_{amb}^2 + \gamma h_{ca}^2 T_{ca}^2 - 2K \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Considerando $\varepsilon > 0$ e $\gamma > 0$ tais que $\frac{1}{\varepsilon} - 2h_c \leq 0$ e $\frac{1}{\gamma} - 2h_{ca} \leq 0$, deduzimos

$$\rho c \frac{d}{dt} \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2K \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon h_c^2 T_{amb}^2 + \gamma h_{ca}^2 T_{ca}^2,$$

e portanto

$$\frac{d}{dt} \left(\rho c \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2K \int_0^t \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds - t \varepsilon h_c^2 T_{amb}^2 - t \gamma h_{ca}^2 T_{ca}^2 \right) \leq 0, t \in (0, \mathcal{T}].$$

Da última desigualdade concluímos que a função

$$\rho c \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2K \int_0^t \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds - t \varepsilon h_c^2 T_{amb}^2 - t \gamma h_{ca}^2 T_{ca}^2, t \in [0, \mathcal{T}],$$

é decrescente e portanto vale (2.7). ■

2.2.3 Estabilidade

Nesta secção pretendemos estudar a estabilidade de (2.2). Para o efeito iremos analisar o comportamento da diferença de duas soluções deste problema quando uma delas apresenta a condição inicial perturbada relativamente à condição inicial de outra.

Proposição 3. *Sejam T e \tilde{T} soluções do problema diferencial (2.2), com a regularidade considerada na Proposição 1, em que $\tilde{T}(0) = \tilde{\phi}$ e seja $w(t) = T(t) - \tilde{T}(t)$. Então*

$$\rho c \|w(t)\|_{L^2}^2 + 2K \int_0^t \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds \leq \rho c \|w(0)\|_{L^2}^2, t \in [0, \mathcal{T}]. \quad (2.8)$$

Prova. Observamos que w é solução do seguinte problema diferencial

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial w}{\partial t}(t) = K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t) & \text{em } (0, a) \times (0, \mathcal{T}], \\ K \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = h_c w(0, t) & t \in (0, \mathcal{T}], \\ -K \frac{\partial w}{\partial x}(a, t) = h_{ca} w(a, t) & t \in (0, \mathcal{T}], \\ w(0) = \phi - \tilde{\phi}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Tomando o produto interno de $\rho c \frac{\partial w}{\partial t}(t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial w}{\partial x}(t) \right)$ com $w(t)$ e integrando por partes obtemos

$$\rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2}^2 = K \frac{\partial w}{\partial x}(a, t) w(a, t) - K \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) w(0, t) - K \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2,$$

e considerando as condições de fronteira de (2.9) deduzimos

$$\rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2}^2 = -h_c w(0, t)^2 - h_{ca} w(a, t)^2 - K \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2, \quad t \in (0, \mathcal{T}].$$

Da igualdade anterior vem ainda

$$\rho c \|w(t)\|_{L^2}^2 + 2K \int_0^t \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds = \rho c \|w(0)\|_{L^2}^2 - 2h_c \int_0^t w(0,s)^2 ds - 2h_{ca} \int_0^t w(a,s)^2 ds,$$

para $t \in [0, \mathcal{T}]$, que nos permite concluir (2.8). ■

2.3 Modelo semi-discreto

2.3.1 Introdução

Nesta secção pretendemos estudar um método numérico de diferenças finitas que permite determinar uma aproximação para a solução do problema diferencial (2.2). Para o efeito vamos considerar a abordagem do método das linhas que consiste em introduzir uma discretização por diferenças finitas do operador diferencial envolvendo apenas as derivadas espaciais. Deste modo introduzimos uma aproximação para a temperatura que é discreta no espaço, isto é, está definida apenas numa rede espacial em $[0, a]$, e contínua no tempo. Esta aproximação, usualmente designada aproximação semi-discreta, é solução de um sistema diferencial ordinário que introduzimos nesta secção.

A grande diferença entre o estudo que apresentamos e os resultados que surgem na literatura no contexto dos problemas com condições de fronteira de Dirichlet, está associada às condições de fronteira de Robin ([4]). De facto, a compatibilidade entre a discretização do operador diferencial e a discretização das condições de fronteira é o elemento principal no estabelecimento das propriedades de estabilidade e convergência que são objeto de estudo nesta secção.

Na secção 2.3.2, *Aproximação semi-discreta*, introduzimos o sistema diferencial ordinário que define a aproximação semi-discreta e introduzimos a norma, relativamente à qual estabelecemos os resultados de estabilidade e convergência, e o correspondente produto interno utilizando o método de energia ([8],[4]). Na secção 2.3.3, *Estabilidade*, apresentamos versões discretas dos resultados apresentados na secção anterior. As propriedades de convergência da aproximação semi-discreta são estudadas na secção 2.3.4, *Análise de convergência*.

2.3.2 Aproximação semi-discreta

Algumas definições

Em $\bar{\Omega} = [0, a]$ introduzimos a partição uniforme $\bar{\Omega}_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N\}$, em que $x_i - x_{i-1} = h$ com $h = \frac{a}{N}$. Com o objetivo de discretizar as condições de fronteira consideramos os pontos auxiliares x_{-1} e x_{N+1} , em que $x_{-1} = -h, x_{N+1} = a + h$. Utilizamos a notação $\bar{\Omega}_h^*$ para representar $\bar{\Omega}_h \cup \{x_{-1}, x_{N+1}\}$.

Seja W_h o espaço de funções de rede u_h definidas em $\bar{\Omega}_h$ onde consideramos o produto interno

$$(u_h, v_h)_h = \frac{h}{2} u_h(x_0) v_h(x_0) + \sum_{i=1}^{N-1} h u_h(x_i) v_h(x_i) + \frac{h}{2} u_h(x_N) v_h(x_N), \quad u_h, v_h \in W_h.$$

A correspondente norma é denotada por $\|\cdot\|_h$.

Por D_x e D_{-x} denotamos os operadores de diferenças backward e forward, respectivamente. Por W_h^* representamos o espaço das funções de rede w_h definidas na rede $\bar{\Omega}_h^*$. Observamos que se $w_h \in W_h^*$, então $D_{-x} D_x w_h \in W_h$.

No resultado seguinte é estabelecida a relação entre o operador $D_{-x} D_x$, que não é mais do que o operador de diferenças centradas de segunda ordem

$$D_{-x} D_x w_h(x_i) = \frac{1}{h^2} (w_h(x_{i-1}) - 2w_h(x_i) + w_h(x_{i+1})), \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

e o operador de diferenças centradas de primeira ordem $D_c w_h(x_i) = \frac{1}{2h}(w_h(x_{i+1}) - w_h(x_{i-1}))$ que consideramos apenas para $i = 0, N$.

A fim de simplificar a prova do referido resultado, introduzimos o seguinte lema.

Lema 1. *Se $w_h \in W_h^*$, $v_h \in W_h$, então*

$$\sum_{i=1}^{N-1} hK(D_x D_{-x} w_h)(x_i) v_h(x_i) = - \sum_{i=1}^N hKD_{-x} w_h(x_i) D_{-x} v_h(x_i) - KD_{-x} w_h(x_1) v_h(x_0) + KD_{-x} w_h(x_N) v_h(x_N). \quad (2.10)$$

Prova. A demonstração é feita considerando as igualdades seguintes

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} hK(D_x D_{-x} w_h)(x_i) v_h(x_i) &= \sum_{i=1}^{N-1} KD_{-x} w_h(x_{i+1}) v_h(x_i) - \sum_{i=1}^{N-1} KD_{-x} w_h(x_i) v_h(x_i) \\ &= \sum_{j=2}^N KD_{-x} w_h(x_j) v_h(x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{N-1} KD_{-x} w_h(x_j) v_h(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^N KD_{-x} w_h(x_j) v_h(x_{j-1}) - KD_{-x} w_h(x_1) v_h(x_0) - \sum_{j=1}^N KD_{-x} w_h(x_j) v_h(x_j) + KD_{-x} w_h(x_N) v_h(x_N) \\ &= - \sum_{j=1}^N hKD_{-x} w_h(x_j) \frac{v_h(x_j) - v_h(x_{j-1})}{h} - KD_{-x} w_h(x_1) v_h(x_0) + KD_{-x} w_h(x_N) v_h(x_N) \\ &= - \sum_{i=1}^N hKD_{-x} w_h(x_i) D_{-x} v_h(x_i) - KD_{-x} w_h(x_1) v_h(x_0) + KD_{-x} w_h(x_N) v_h(x_N). \end{aligned}$$

■

Utilizando o lema anterior estabelecemos a seguinte proposição.

Proposição 4. *Se $w_h \in W_h^*$ e $v_h \in W_h$, então*

$$(KD_x D_{-x} w_h, v_h)_h = -KD_c w_h(x_0) v_h(x_0) - \sum_{i=1}^N hKD_{-x} w_h(x_i) D_{-x} v_h(x_i) + KD_c w_h(x_N) v_h(x_N). \quad (2.11)$$

Prova. Notamos que utilizando o último resultado se tem sucessivamente

$$\begin{aligned} (KD_x D_{-x} w_h, v_h)_h &= \frac{h}{2} K(D_x D_{-x} w_h)(x_0) v_h(x_0) + \sum_{i=1}^{N-1} hK(D_x D_{-x} w_h)(x_i) v_h(x_i) + \frac{h}{2} K(D_x D_{-x} w_h)(x_N) v_h(x_N) \\ &= \frac{1}{2} KD_{-x} w_h(x_1) v_h(x_0) - \frac{1}{2} KD_{-x} w_h(x_0) v_h(x_0) - \sum_{i=1}^N hKD_{-x} w_h(x_i) D_{-x} v_h(x_i) - KD_{-x} w_h(x_1) v_h(x_0) \\ &\quad + KD_{-x} w_h(x_N) v_h(x_N) + \frac{1}{2} KD_{-x} w_h(x_{N+1}) v_h(x_N) - \frac{1}{2} KD_{-x} w_h(x_N) v_h(x_N) \\ &= -\frac{K}{2} (D_{-x} w_h(x_1) + D_{-x} w_h(x_0)) v_h(x_0) - \sum_{i=1}^N hKD_{-x} w_h(x_i) D_{-x} v_h(x_i) + \frac{K}{2} (D_{-x} w_h(x_N) + D_{-x} w_h(x_{N+1})) v_h(x_N) \\ &= -KD_c w_h(x_0) v_h(x_0) - \sum_{i=1}^N hKD_{-x} w_h(x_i) D_{-x} v_h(x_i) + KD_c w_h(x_N) v_h(x_N). \end{aligned}$$

■

Este resultado é a versão discreta da identidade seguinte:

$$\int_0^a Kw''(x)v(x)dx = Kw'(a)v(a) - Kw'(0)v(0) - K \int_0^a w'(x)v'(x)dx.$$

A aproximação semi-discreta

Considerando os operadores de diferenças $D_x D_{-x}$ e D_c , introduzimos seguidamente a aproximação semi-discreta para a temperatura, $T_h(t) \in W_h^*$, definida pelo seguinte sistema diferencial ordinário

$$\begin{cases} \rho c \frac{dT_h}{dt}(x_i, t) = KD_x D_{-x} T_h(x_i, t), & i = 0, 1, \dots, N, t \in (0, \mathcal{T}], \\ KD_c T_h(x_0, t) = h_c(T_h(x_0, t) - T_{amb}), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ -KD_c T_h(x_N, t) = h_{ca}(T_h(x_N, t) - T_{ca}), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ T_h(x_i, 0) = \phi(x_i), & i = 0, 1, \dots, N, \end{cases}$$

que passamos a escrever a forma equivalente

$$\begin{cases} \rho c \frac{dT_h}{dt}(t) = KD_x D_{-x} T_h(t), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ KD_c T_h(x_0, t) = h_c(T_h(x_0, t) - T_{amb}), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ -KD_c T_h(x_N, t) = h_{ca}(T_h(x_N, t) - T_{ca}), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ T_h(0) = \phi_h. \end{cases} \quad (2.12)$$

2.3.3 Estabilidade

A estabilidade da aproximação semi-discreta $T_h(t)$ é o objetivo desta secção. Começamos por estabelecer um resultado de conservação análogo à Proposição 1 da secção anterior e posteriormente estabelecemos a estabilidade do problema diferencial (2.12). No que se segue usamos as notações seguintes

$$\|D_{-x} w_h\|_h^2 = \sum_{i=1}^N h(D_{-x} w_h(x_i))^2 \quad \text{e} \quad w_i = w_h(x_i).$$

Proposição 5. *Se $T_h(t) \in W_h^*$ é solução do sistema diferencial ordinário (2.12), então*

$$\begin{aligned} \rho c \|T_h(t)\|_h^2 + 2K \int_0^t \|D_{-x} T_h(s)\|_h^2 ds + 2h_c \int_0^t T_0(s)(T_0(s) - T_{amb}) ds \\ + 2h_{ca} \int_0^t T_N(s)(T_N(s) - T_{ca}) ds = \rho c \|T_h(0)\|_h^2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

para $t \in [0, \mathcal{T}]$.

Prova. Da equação diferencial de (2.12) vem

$$\rho c \left(\frac{dT_h}{dt}(t), T_h(t) \right)_h = (KD_x D_{-x} T_h(t), T_h(t))_h.$$

Considerando que se tem $\frac{d}{dt} \|T_h(t)\|_h^2 = 2 \left(\frac{dT_h}{dt}(t), T_h(t) \right)_h$, pela Proposição 4 obtemos

$$\rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T_h(t)\|_h^2 = -KD_c T_0(t) T_0(t) - \sum_{i=1}^N h K D_{-x} T_i(t) D_{-x} T_i(t) + K D_c T_N(t) T_N(t).$$

As condições de fronteira de (2.12) permitem concluir

$$\rho c \frac{d}{dt} \|T_h(t)\|_h^2 = -2h_c T_0(t) (T_0(t) - T_{amb}) - 2h_{ca} T_N(t) (T_N(t) - T_{ca}) - 2K \|D_{-x} T_h(t)\|_h^2,$$

que pode ser escrito na forma equivalente:

$$\frac{d}{dt} \left(\rho c \|T_h(t)\|_h^2 + 2h_c \int_0^t T_0(s) (T_0(s) - T_{amb}) ds + 2h_{ca} \int_0^t T_N(s) (T_N(s) - T_{ca}) ds + 2K \int_0^t \|D_{-x} T_h(s)\|_h^2 ds \right) = 0.$$

O que nos leva a concluir que $\rho c \|T_h(t)\|_h^2 + 2h_c \int_0^t T_0(s) (T_0(s) - T_{amb}) ds + 2h_{ca} \int_0^t T_N(s) (T_N(s) - T_{ca}) ds + 2K \int_0^t \|D_{-x} T_h(s)\|_h^2 ds$ é constante e assim, para $t \in [0, \mathcal{T}]$, concluímos (2.13). ■

Pode-se observar ainda que, para o caso particular de $T_{amb} = T_{ca} = 0$, obtemos ²

$$\rho c \|T_h(t)\|_h^2 + 2h_c \int_0^t T_0(s)^2 ds + 2h_{ca} \int_0^t T_N(s)^2 ds + 2K \int_0^t \|D_{-x} T_h(s)\|_h^2 ds = \rho c \|T_h(0)\|_h^2, t \in [0, \mathcal{T}].$$

Sejam $T_h(t)$ e $\tilde{T}_h(t)$ soluções de (2.12) com condições iniciais ϕ_h e $\tilde{\phi}_h$, respectivamente, e seja $w_h(t) = T_h(t) - \tilde{T}_h(t)$ que é solução do sistema diferencial seguinte

$$\begin{cases} \rho c \frac{dw_h}{dt}(t) = K D_x D_{-x} w_h(t), t \in (0, \mathcal{T}], \\ K D_c w_h(x_0, t) = h_c w_h(x_0, t), t \in (0, \mathcal{T}], \\ -K D_c w_h(x_N, t) = h_{ca} w_h(x_N, t), t \in (0, \mathcal{T}], \\ w_h(0) = \phi_h - \tilde{\phi}_h. \end{cases} \quad (2.14)$$

Seguindo a demonstração do Proposição 5, é fácil provar o seguinte resultado de estabilidade.

Proposição 6. *Sejam $T_h(t)$ e $\tilde{T}_h(t)$ soluções de (2.12) com condições iniciais ϕ_h e $\tilde{\phi}_h$, respectivamente, e seja $w_h(t) = T_h(t) - \tilde{T}_h(t)$. Então*

$$\rho c \|w_h(t)\|_h^2 + 2K \int_0^t \|D_{-x} w_h(s)\|_h^2 ds \leq \rho c \|w_h(0)\|_h^2, t \in [0, \mathcal{T}]. \quad (2.15)$$

Prova. Tomando o produto interno de $\rho c \frac{dw_h}{dt}(t) = K D_x D_{-x} w_h(t)$ com $w_h(t)$ obtemos

$$\rho c \left(\frac{dw_h}{dt}(t), w_h(t) \right)_h = (K D_x D_{-x} w_h(t), w_h(t))_h,$$

²Nota-se que o resultado obtido para a conservação da aproximação semi-discreta $T_h(t)$ é uma versão discreta da estimativa obtida para o modelo contínuo (2.6)

e utilizando a Proposição 4 vem ainda

$$\rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_h(t)\|_h^2 = -K D_c w_h(x_0, t)^2 - \sum_{i=1}^N h K (D_{-x} w_h(x_i, t))^2 + K D_c w_h(x_N, t)^2.$$

As condições de fronteira de (2.14) permitem concluir

$$\rho c \frac{d}{dt} \|w_h(t)\|_h^2 = -2h_c w_h(x_0, t)^2 - 2h_{ca} w_h(x_N, t)^2 - 2K \|D_{-x} w_h(t)\|_h^2,$$

e portanto

$$\rho c \|w_h(t)\|_h^2 + 2K \int_0^t \|D_{-x} w_h(s)\|_h^2 ds = \rho c \|w_h(0)\|_h^2 - 2h_c \int_0^t w_h(x_0, s)^2 ds - 2h_{ca} \int_0^t w_h(x_N, s)^2 ds. \quad (2.16)$$

E conseqüentemente concluímos (2.15). ■

2.3.4 Análise de convergência

Seguidamente pretendemos estabelecer um majorante para o erro $E_h(t) = T(t) - T_h(t)$.

Recordamos que se $u \in C^4[x_{-1}, x_{N+1}]$ então existem $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ e $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tais que

$$D_x D_{-x} u(x_i) = u''(x_i) + \frac{h^2}{24} (u^{(iv)}(\xi_i) + u^{(iv)}(\eta_i)), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Por outro lado, se $u \in C^3[x_{-1}, x_{N+1}]$, então existem $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ e $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tais que

$$D_c u(x_i) = u'(x_i) + \frac{h^2}{12} (u'''(\xi_i) + u'''(\eta_i)), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Estabelecemos seguidamente o problema diferencial para o erro de semi-discretização $E_h(t)$. Começamos por notar que se tem

$$\rho c \frac{dE_h}{dt}(x_i, t) = \rho c \frac{dT}{dt}(x_i, t) - \rho c \frac{dT_h}{dt}(x_i, t),$$

e atendendo aos problemas diferenciais para T e T_h , obtemos

$$\rho c \frac{dE_h}{dt}(x_i, t) = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t) - K D_x D_{-x} T_h(x_i, t),$$

que pode ser reescrito na forma equivalente

$$\rho c \frac{dE_h}{dt}(x_i, t) = K D_x D_{-x} T(x_i, t) + T_r(x_i, t) - K D_x D_{-x} T_h(x_i, t),$$

em que $T_r(x_i, t)$ denota o erro de truncatura associado à discretização espacial considerada. Notamos que $T_r(x_i, t)$ admite a representação

$$T_r(x_i, t) = -K \frac{h^2}{24} \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}(\xi_i, t) + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4}(\eta_i, t) \right) \quad \text{em que} \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}) \text{ e } \eta_i \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Concluimos, deste modo, que o erro de semi-discretização $E_h(t)$ e o correspondente erro de truncatura satisfazem a seguinte equação diferencial ordinária

$$\rho c \frac{dE_h}{dt}(x_i, t) = KD_x D_{-x} E_h(x_i, t) + T_r(x_i, t).$$

Por outro lado, da condição de fronteira em $x = 0$, para $T(t)$ é fácil estabelecer

$$KD_C T(x_0, t) - T_L(x_0, t) = h_c(T(x_0, t) - T_{amb}),$$

em que $T_L(x_0, t)$ denota o erro de truncatura associado que admite a representação

$$T_L(x_0, t) = K \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(\xi_0, t) + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(\eta_0, t) \right), \quad \text{em que } \xi_0 \in (x_0, x_1) \quad \text{e} \quad \eta_0 \in (x_{-1}, x_0).$$

Considerando agora a condição de fronteira para $T_h(x_0, t)$, concluimos

$$KD_C E_h(x_0, t) = h_c E_h(x_0, t) + T_L(x_0, t).$$

De igual modo se estabelece

$$-KD_C E_h(x_N, t) = h_{ca} E_h(x_N, t) + T_R(x_N, t),$$

em que

$$T_R(x_N, t) = -K \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(\xi_N, t) + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(\eta_N, t) \right), \quad \text{em que } \xi_N \in (x_N, x_{N+1}) \quad \text{e} \quad \eta_N \in (x_{N-1}, x_N).$$

Sumariando, para o erro $E_h(t)$ obtemos o seguinte problema diferencial

$$\begin{cases} \rho c \frac{dE_h}{dt}(t) = KD_x D_{-x} E_h(t) + T_r(t), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ KD_C E_h(x_0, t) = h_c E_h(x_0, t) + T_L(x_0, t), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ -KD_C E_h(x_N, t) = h_{ca} E_h(x_N, t) + T_R(x_N, t), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ E_h(0) = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

No resultado seguinte estabelecemos um majorante para $\|E_h(t)\|_h$.

Proposição 7. *Seja $E_h(t) = T(t) - T_h(t)$, em que $T(t)$ é solução do problema diferencial (2.2) e $T_h(t)$ é solução do problema diferencial ordinário (2.12). Então, existem constantes positivas ε e γ tais que*

$$\begin{aligned} \|E_h(t)\|_h^2 + \frac{2K}{\rho c} \int_0^t \|D_{-x} E_h(s)\|_h^2 e^{\frac{t-s}{\rho c}} ds &\leq \|E_h(0)\|_h^2 e^{\frac{t}{\rho c}} \\ &+ \int_0^t e^{\frac{t-s}{\rho c}} \left(\frac{1}{\rho c \varepsilon} T_L(x_0, s)^2 + \frac{1}{\rho c \gamma} T_R(x_N, s)^2 + \frac{1}{\rho c} \|T_r(s)\|_h^2 \right) ds, \end{aligned} \quad (2.18)$$

para $t \in [0, \mathcal{T}]$.

Prova. Da equação diferencial de (2.17) vem

$$\rho c \left(\frac{dE_h}{dt}(t), E_h(t) \right)_h = (KD_x D_{-x} E_h(t), E_h(t))_h + (T_r(t), E_h(t))_h,$$

e portanto, utilizando a Proposição 4, obtemos

$$\rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|E_h(t)\|_h^2 = -KD_c E_h(x_0, t) E_h(x_0, t) - K \|D_{-x} E_h(t)\|_h^2 + KD_c E_h(x_N, t) E_h(x_N, t) + (T_r(t), E_h(t))_h.$$

Considerando agora as condições de fronteira de (2.17), deduzimos

$$\begin{aligned} \rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|E_h(t)\|_h^2 &= -h_c E_h(x_0, t)^2 - T_L(x_0, t) E_h(x_0, t) - h_{ca} E_h(x_N, t)^2 \\ &\quad - T_R(x_N, t) E_h(x_N, t) - K \|D_{-x} E_h(t)\|_h^2 + (T_r(t), E_h(t))_h. \end{aligned} \quad (2.19)$$

De (2.19), para $\varepsilon > 0, \gamma > 0$, utilizando a desigualdade $ab \leq \frac{z}{2} a^2 + \frac{1}{2z} b^2, z > 0$ temos

$$\begin{aligned} \rho c \frac{d}{dt} \|E_h(t)\|_h^2 &\leq -2h_c E_h(x_0, t)^2 - 2h_{ca} E_h(x_N, t)^2 + \varepsilon E_h(x_0, t)^2 + \frac{1}{\varepsilon} T_L(x_0, t)^2 + \gamma E_h(x_N, t)^2 \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} T_R(x_N, t)^2 - 2K \|D_{-x} E_h(t)\|_h^2 + 2(T_r(t), E_h(t))_h. \end{aligned}$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz permite estabelecer

$$\begin{aligned} \rho c \frac{d}{dt} \|E_h(t)\|_h^2 - \|E_h(t)\|_h^2 &\leq E_h(x_0, t)^2 (\varepsilon - 2h_c) + E_h(x_N, t)^2 (\gamma - 2h_{ca}) + \frac{1}{\varepsilon} T_L(x_0, t)^2 \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} T_R(x_N, t)^2 - 2K \|D_{-x} E_h(t)\|_h^2 + \|T_r(t)\|_h^2. \end{aligned}$$

Fixemos ε e γ tais que $\varepsilon - 2h_c \leq 0$ e $\gamma - 2h_{ca} \leq 0$. Assim, concluímos

$$\rho c \frac{d}{dt} \|E_h(t)\|_h^2 - \|E_h(t)\|_h^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} T_L(x_0, t)^2 + \frac{1}{\gamma} T_R(x_N, t)^2 - 2K \|D_{-x} E_h(t)\|_h^2 + \|T_r(t)\|_h^2, \quad (2.20)$$

e portanto

$$\frac{d}{dt} (\|E_h(t)\|_h^2 e^{\frac{-t}{\rho c}}) \leq \frac{1}{\rho c \varepsilon} T_L(x_0, t)^2 e^{\frac{-t}{\rho c}} + \frac{1}{\rho c \gamma} T_R(x_N, t)^2 e^{\frac{-t}{\rho c}} - \frac{2K}{\rho c} \|D_{-x} E_h(t)\|_h^2 e^{\frac{-t}{\rho c}} + \frac{1}{\rho c} \|T_r(t)\|_h^2 e^{\frac{-t}{\rho c}}, t \in (0, \mathcal{T}].$$

Da desigualdade diferencial anterior obtemos

$$\|E_h(t)\|_h^2 e^{\frac{-t}{\rho c}} - \|E_h(0)\|_h^2 + \frac{2K}{\rho c} \int_0^t \|D_{-x} E_h(s)\|_h^2 e^{\frac{-s}{\rho c}} ds \leq \int_0^t e^{\frac{-s}{\rho c}} \left(\frac{1}{\rho c \varepsilon} T_L(x_0, s)^2 + \frac{1}{\rho c \gamma} T_R(x_N, s)^2 + \frac{1}{\rho c} \|T_r(s)\|_h^2 \right) ds,$$

que facilmente nos leva a (2.18). ■

Conjugando a estimativa (2.18) com as representações dos diferentes erros de truncatura, concluímos o seguinte resultado de convergência

Corolário 2.3.1. Se $T(t) \in C^4([x_{-1}, x_{N+1}])$ e $E_h(0) = 0$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|E_h(t)\|_h^2 + \int_0^t \|D_{-x}E_h(s)\|_h^2 ds \leq Ch^4 \max_{t \in [0, \mathcal{T}]} \|T(t)\|_{C^4([x_{-1}, x_{N+1}])}^2, \quad t \in [0, \mathcal{T}]. \quad (2.21)$$

Prova. É suficiente notar que se tem

$$\|T_r(s)\|_h^2 \leq \sum_{i=1}^N h T_r(x_i, t)^2 = \sum_{i=1}^N h \left\{ -K \frac{h^2}{24} \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}(\xi_i, t) + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4}(\eta_i, t) \right) \right\}^2 \leq h^4 \frac{4K^2}{576} (a + 2h) \left\| \frac{\partial^4 T}{\partial x^4}(t) \right\|_{\infty, [x_{-1}, x_{N+1}]}^2,$$

e

$$T_L(t)^2 = \left(K \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(\xi_0, t) + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(\eta_0, t) \right) \right)^2 \leq h^4 \frac{K^2}{36} \left\| \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(t) \right\|_{\infty, [x_{-1}, x_{N+1}]}^2,$$

$$T_R(t)^2 = \left(-K \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(\xi_N, t) + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(\eta_N, t) \right) \right)^2 \leq h^4 \frac{K^2}{36} \left\| \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(t) \right\|_{\infty, [x_{-1}, x_{N+1}]}^2.$$

■

2.4 Modelo completamente discreto

2.4.1 Introdução

Nesta secção pretendemos introduzir um método completamente discreto no sentido em que tanto a variável espaço como a variável temporal são definidas em conjuntos discretos. Uma vez que na secção anterior estudamos a aproximação semi-discreta definida por (2.12), o método que consideramos é obtido integrando este sistema diferencial com o método de Euler implícito.

2.4.2 Integração Espaço-Tempo

Em $[0, \mathcal{T}]$ introduzimos a partição temporal $\{t_m, m = 0, 1, \dots, M\}$ em que $t_m = m\Delta t$ e $\Delta t = \mathcal{T}/M$. Integrando numericamente o sistema diferencial (2.12) com o método de Euler implícito, obtemos

$$\begin{cases} \rho c \frac{T_h^{n+1}(x_i) - T_h^n(x_i)}{\Delta t} = KD_x D_{-x} T_h^{n+1}(x_i), & i = 0, 1, \dots, N \text{ e } n = 0, \dots, M-1, \\ KD_c T_h^j(x_0) = h_c(T_h^j(x_0) - T_{amb}), & j = 1, \dots, M, \\ -KD_c T_h^j(x_N) = h_{ca}(T_h^j(x_N) - T_{ca}), & j = 1, \dots, M, \\ T_h^0(x_i) = \phi_h(x_i), & i = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (2.22)$$

em que $T(x_i, t_n) \simeq T_h^n(x_i), i = 0, 1, \dots, N$. O sistema (2.22) admite a representação equivalente

$$\begin{cases} \left[I - \frac{K\Delta t}{\rho ch^2} \mathbf{A} \right] T_h^{n+1} = T_h^n + \frac{\Delta t}{\rho ch} \mathbf{B}, & n = 0, 1, \dots, M-1, \\ T_h^0(x_i) = \phi(x_i), & i = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (2.23)$$

em que \mathbf{A} é a matriz de ordem $N+1$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(2 + \frac{2h}{K}h_c) & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -(2 + \frac{2h}{K}h_{ca}) \end{bmatrix}$$

e \mathbf{B} é o vetor de dimensão $N+1$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2h_c T_{amb} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2h_{ca} T_{ca} \end{bmatrix}.$$

2.4.3 Estabilidade

O objetivo desta secção é a análise de estabilidade do método completamente discreto. Para tal, consideremos T_h^n e \tilde{T}_h^n com soluções iniciais ϕ_h e $\tilde{\phi}_h$, respectivamente, duas soluções do problema diferencial (2.22) e seja $w_h^n = T_h^n - \tilde{T}_h^n$ que é solução do seguinte problema diferencial

$$\begin{cases} \rho c \frac{w_h^{n+1}(x_i) - w_h^n(x_i)}{\Delta t} = KD_x D_{-x} w_h^{n+1}(x_i), & i = 0, 1, \dots, N \text{ e } n = 0, \dots, M-1, \\ KD_c w_h^j(x_0) = h_c w_h^j(x_0), & j = 1, \dots, M, \\ -KD_c w_h^j(x_N) = h_{ca} w_h^j(x_N), & j = 1, \dots, M, \\ w_h(0) = \phi_h - \tilde{\phi}_h. \end{cases} \quad (2.24)$$

Tomando o produto interno membro a membro do problema de diferenças (2.24) com w_h^{n+1} , temos

$$\rho c \|w_h^{n+1}\|_h^2 = \rho c (w_h^n, w_h^{n+1})_h + \Delta t \left(KD_x D_{-x} w_h^{n+1}, w_h^{n+1} \right)_h.$$

Pela Proposição 4 vem

$$\rho c \|w_h^{n+1}\|_h^2 = \rho c (w_h^n, w_h^{n+1})_h + \Delta t \left(-KD_c w_h^{n+1}(x_0) w_h^{n+1}(x_0) - K \|D_{-x} w_h^{n+1}\|_h^2 + KD_c w_h^{n+1}(x_N) w_h^{n+1}(x_N) \right).$$

Utilizando agora as condições de fronteira do problema (2.24) concluímos

$$\rho c \|w_h^{n+1}\|_h^2 \leq \rho c (w_h^n, w_h^{n+1})_h - K \Delta t \|D_{-x} w_h^{n+1}\|_h^2.$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz vem ainda

$$\rho c \|w_h^{n+1}\|_h^2 \leq \frac{\rho c}{2} \|w_h^n\|_h^2 + \frac{\rho c}{2} \|w_h^{n+1}\|_h^2 - K \Delta t \|D_{-x} w_h^{n+1}\|_h^2,$$

ou seja

$$\rho c \|w_h^{n+1}\|_h^2 + 2K \Delta t \|D_{-x} w_h^{n+1}\|_h^2 \leq \rho c \|w_h^n\|_h^2.$$

Da última desigualdade concluímos a seguinte proposição para a estabilidade do problema completamente discreto

Proposição 8. *Sejam T_h^n e \tilde{T}_h^n soluções de (2.22) com condições iniciais ϕ_h e $\tilde{\phi}_h$, respectivamente, e seja $w_h^n = T_h^n - \tilde{T}_h^n$. Então*

$$\rho c \|w_h^{n+1}\|_h^2 + 2K \Delta t \sum_{j=1}^{n+1} \|D_{-x} w_h^j\|_h^2 \leq \rho c \|w_h^0\|_h^2, \quad n = 0, \dots, M-1. \quad (2.25)$$

■

2.4.4 Análise de convergência

O objetivo desta secção é estabelecer um majorante para o erro $E_h^n = T(t_n) - T_h^n$ associado ao modelo completamente discreto (2.22).

Recordamos que se $u \in C^4[x_{-1}, x_{N+1}]$ então existem $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ e $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tais que

$$D_x D_{-x} u(x_i) = u''(x_i) + \frac{h^2}{24} (u^{(iv)}(\xi_i) + u^{(iv)}(\eta_i)).$$

Por outro lado, se $u \in C^2[t_0, t_M]$ existe $\xi_n \in (t_n, t_{n+1})$ tal que

$$D_t u(t_n) = u'(t_n) + \frac{\Delta t}{2} u''(\xi_n).$$

Seja $T_r(x_i, t_n)$ o erro de truncatura, $i = 0, 1, \dots, N$ e $n = 0, \dots, M-1$,

$$\begin{aligned} T_r(x_i, t_n) &= \rho c \frac{T(x_i, t_{n+1}) - T(x_i, t_n)}{\Delta t} - K D_x D_{-x} T(x_i, t_{n+1}) \\ &= \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(x_i, t_n) + \rho c \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(x_i, \xi_n) - K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t_{n+1}) - K \frac{h^2}{24} \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}(\xi_i, t_{n+1}) + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4}(\eta_i, t_{n+1}) \right). \end{aligned}$$

Atendendo que temos

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t}(x_i, t_n) = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t_{n+1}),$$

vem finalmente

$$T_r(x_i, t_n) = \rho c \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(x_i, \xi_n) - K \frac{h^2}{24} \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}(\xi_i, t_{n+1}) + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4}(\eta_i, t_{n+1}) \right).$$

Desta forma temos o erro E_h^n do modelo completamente discreto com o respectivo erro de truncatura satisfazendo a seguinte equação

$$E_h^{n+1} = E_h^n + \frac{\Delta t}{\rho c} K D_x D_{-x} E_h^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho c} T_r(t_n).$$

Por outro lado, da condição de fronteira em $x = 0$, para T é fácil estabelecer

$$K D_C T(x_0, t_{n+1}) - T_L(x_0, t_n) = h_c (T(x_0, t_{n+1}) - T_{amb}),$$

em que $T_L(x_0, t_n)$ denota o erro de truncatura associado e que admite a representação

$$T_L(x_0, t_n) = K \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(\xi_0, t_n) + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(\eta_0, t_n) \right), \quad \text{em que } \xi_0 \in (x_0, x_1) \quad \text{e} \quad \eta_0 \in (x_{-1}, x_0).$$

Considerando agora a condição de fronteira concluímos

$$K D_C E_h^{n+1}(x_0) = h_c E_h^{n+1}(x_0) + T_L(x_0, t_n).$$

De igual modo se estabelece

$$-K D_C E_h^{n+1}(x_N) = h_{ca} E_h^{n+1}(x_N) + T_R(x_N, t_n),$$

em que

$$T_R(x_N, t_n) = -K \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(\xi_N, t_n) + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(\eta_N, t_n) \right), \quad \text{com } \xi_N \in (x_N, x_{N+1}) \text{ e } \eta_N \in (x_{N-1}, x_N).$$

Sumariando, para o erro E_h^n obtemos o seguinte problema diferencial

$$\begin{cases} E_h^{n+1} = E_h^n + \frac{\Delta t}{\rho c} K D_x D_{-x} E_h^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho c} T_r(t_n), i = 0, 1, \dots, N \text{ e } n = 0, \dots, M-1, \\ K D_C E_h^{n+1}(x_0) = h_c E_h^{n+1}(x_0) + T_L(x_0, t_n), n = 0, 1, \dots, M-1, \\ -K D_C E_h^{n+1}(x_N) = h_{ca} E_h^{n+1}(x_N) + T_R(x_N, t_n), n = 0, 1, \dots, M-1, \\ E_h^0 = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

De (2.26) vem

$$\|E_h^{n+1}\|_h^2 = (E_h^n, E_h^{n+1})_h + \frac{\Delta t}{\rho c} (K D_x D_{-x} E_h^{n+1}, E_h^{n+1})_h + \frac{\Delta t}{\rho c} (T_r(t_n), E_h^{n+1})_h.$$

Pela Proposição 4 deduzimos

$$\begin{aligned} \|E_h^{n+1}\|_h^2 &= (E_h^n, E_h^{n+1})_h + \frac{\Delta t}{\rho c} \left(-K D_C E_h^{n+1}(x_0) E_h^{n+1}(x_0) - \sum_{i=1}^N h K (D_{-x} E_i^{n+1})^2 \right. \\ &\quad \left. + K D_C E_h^{n+1}(x_N) E_h^{n+1}(x_N) + (T_r(t_n), E_h^{n+1})_h \right). \end{aligned}$$

Considerando agora as condições de fronteira de (2.26) obtemos

$$\begin{aligned} \|E_h^{n+1}\|_h^2 &= (E_h^n, E_h^{n+1})_h + \frac{\Delta t}{\rho c} \left(-h_c (E_h^{n+1}(x_0))^2 - T_L(t_n) E_h^{n+1}(x_0) \right. \\ &\quad \left. - K \|D_{-x} E_h^{n+1}\|_h^2 - h_{ca} (E_h^{n+1}(x_N))^2 - T_R(t_n) E_h^{n+1}(x_N) + (T_r(t_n), E_h^{n+1})_h \right). \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Scharwz e $ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$, para $a, b \in \mathbb{R}$ e ε constante positiva, concluímos

$$\begin{aligned} \|E_h^{n+1}\|_h^2 &\leq \|E_h^n\|_h^2 + \frac{\Delta t}{\rho c} \left((E_h^{n+1}(x_0))^2 (\varepsilon - 2h_c) + (E_h^{n+1}(x_N))^2 (\gamma - 2h_{ca}) + \frac{1}{\varepsilon} T_L(t_n)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\gamma} T_R(t_n)^2 - 2K \|D_{-x} E_h^{n+1}\|_h^2 + \|T_r(t_n)\|_h^2 + \|E_h^{n+1}\|_h^2 \right), \end{aligned}$$

em que ε, γ são constantes positivas. Fixemos ε, γ tais que $\varepsilon - 2h_c \leq 0$ e $\gamma - 2h_{ca} \leq 0$. Então para Δt tal que $\rho c - \Delta t \delta > 0$ vai

$$\|E_h^{n+1}\|_h^2 \leq \left(\frac{\rho c}{\rho c - \Delta t} \right) \|E_h^n\|_h^2 + \left(\frac{\Delta t}{\rho c - \Delta t} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} T_L(t_n)^2 + \frac{1}{\gamma} T_R(t_n)^2 + \|T_r(t_n)\|_h^2 \right).$$

É fácil provar por indução o seguinte resultado

$$\|E_h^n\|_h^2 \leq \left(\frac{\rho c}{\rho c - \Delta t}\right)^n \|E_h^0\|_h^2 + \left(\frac{\Delta t}{\rho c - \Delta t}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\rho c}{\rho c - \Delta t}\right)^{n-1-j} \left(\frac{1}{\varepsilon} T_L(t_j)^2 + \frac{1}{\gamma} T_R(t_j)^2 + \|T_r(t_j)\|_h^2\right), \quad (2.27)$$

para $n = 1, \dots, M$, e para Δt tal que $\rho c - \Delta t > 0$. A desigualdade anterior pode ser reescrita na forma seguinte

$$\|E_h^n\|_h^2 \leq \left(1 + \frac{\Delta t}{\rho c - \Delta t}\right)^n \|E_h^0\|_h^2 + \left(\frac{\Delta t}{\rho c - \Delta t}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\Delta t}{\rho c - \Delta t}\right)^{n-1-j} \left(\frac{1}{\varepsilon} T_L(t_j)^2 + \frac{1}{\gamma} T_R(t_j)^2 + \|T_r(t_j)\|_h^2\right).$$

Atendendo a que se tem $e^x \geq 1 + x$, $x > 0$ concluímos

$$\|E_h^n\|_h^2 \leq e^{\left(\frac{\Delta t}{\rho c - \Delta t}\right)^n} \|E_h^0\|_h^2 + \left(\frac{\Delta t}{\rho c - \Delta t}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\Delta t}{\rho c - \Delta t}\right)^{n-1-j} \left(\frac{1}{\varepsilon} T_L(t_j)^2 + \frac{1}{\gamma} T_R(t_j)^2 + \|T_r(t_j)\|_h^2\right),$$

ou ainda

$$\|E_h^n\|_h^2 \leq e^{\left(\frac{n\Delta t}{\rho c - \Delta t}\right)} \|E_h^0\|_h^2 + \left(\frac{\Delta t}{\rho c - \Delta t}\right) \max_{j=0, \dots, n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} T_L(t_j)^2 + \frac{1}{\gamma} T_R(t_j)^2 + \|T_r(t_j)\|_h^2\right) \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\Delta t}{\rho c - \Delta t}\right)^{n-1-j}.$$

Utilizando agora a expansão da forma de uma progressão geométrica obtemos

$$\|E_h^n\|_h^2 \leq e^{\left(\frac{n\Delta t}{\rho c - \Delta t}\right)} \|E_h^0\|_h^2 \max_{j=0, \dots, n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} T_L(t_j)^2 + \frac{1}{\gamma} T_R(t_j)^2 + \|T_r(t_j)\|_h^2\right) \left[\left(1 + \left(\frac{\Delta t}{\rho c - \Delta t}\right)^n - 1\right)\right].$$

Sabendo que o erro inicial é nulo, ou seja, $E_h^0 = 0$ temos ainda

$$\|E_h^n\|_h^2 \leq \max_{j=0, \dots, n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} T_L(t_j)^2 + \frac{1}{\gamma} T_R(t_j)^2 + \|T_r(t_j)\|_h^2\right) \left[e^{\left(\frac{n\Delta t}{\rho c - \Delta t}\right)} - 1\right].$$

Concluímos assim o seguinte resultado para a análise de convergência do modelo completamente discreto.

Proposição 9. *Seja $E_h^n = T(t_n) - T_h^n$ o erro do modelo completamente discreto (2.22). Então existem constantes positivas ε, γ tais que para Δt com $\rho c - \Delta t > 0$ se tem*

$$\|E_h^n\|_h^2 \leq \max_{j=0, \dots, n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} T_L(t_j)^2 + \frac{1}{\gamma} T_R(t_j)^2 + \|T_r(t_j)\|_h^2\right) \left[e^{\left(\frac{\mathcal{T}}{\rho c - \Delta t}\right)} - 1\right], \quad n = 1, \dots, M. \quad (2.28)$$

Observamos que se a solução T é suficientemente regular, nomeadamente, $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$ e $\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}$ limitadas em $[0, a] \times [0, \mathcal{T}]$ concluímos que existe uma constante positiva C tal que

$$\|E_h^n\|_h^2 \leq C(\Delta t^2 + h^4), \quad n = 1, \dots, M.$$

■

2.4.5 Simulação numérica

Nesta secção pretendemos ilustrar o comportamento da solução do problema (2.22) em diferentes cenários. Para o efeito consideramos os parâmetros apresentados em [5], [7] e [2], no contexto da transferência de calor na córnea.

Exemplo 1 Consideremos que a temperatura interior inicial é nula e os demais parâmetros³ considerados estão listados na Tabela 2.1⁴.

Tabela 2.1 Parâmetros

Parâmetro	Valor (em mm)
$h_c (Wm^{-2}K^{-1})$	10×10^{-6}
$h_{ca} (Wm^{-2}K^{-1})$	65×10^{-6}
$T_{amb} (K)$	298
$T_{ca} (K)$	310
$\rho (kgm^{-3})$	1050×10^{-9}
$c (Jkg^{-1}K^{-1})$	4178×10^6
$K (Wm^{-1}K^{-1})$	0.58×10^{-3}
Espessura córnea (mm)	0.52

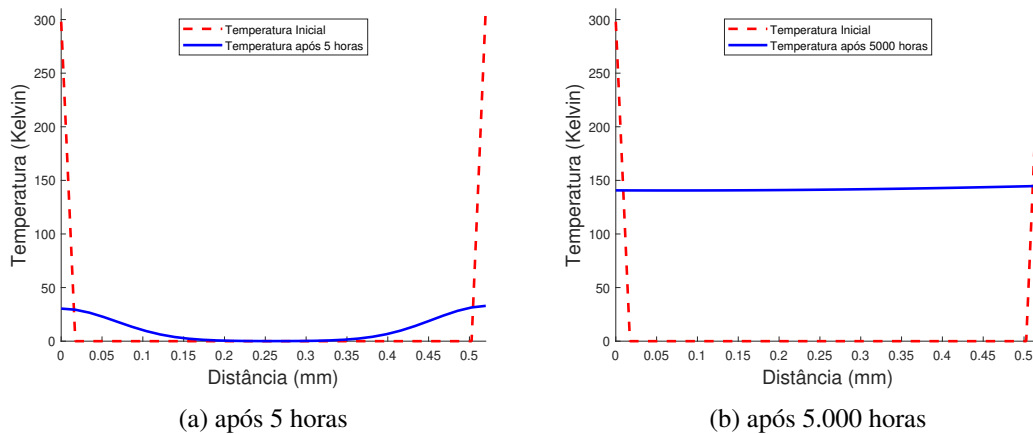


Fig. 2.2 Distribuição da Temperatura **Exemplo 1**

³Os parâmetros foram convertidos para milímetros

⁴ $1W = \frac{1J}{1s} = \frac{1kgm^2}{s^3}$ e $1J = \frac{1kgm^2}{s^2}$

Na Figura 2.2a apresentamos a distribuição da temperatura para $t = 5 \text{ horas}$ e observamos que a temperatura interior aumenta das extremidades para o interior. Para $t = 5.000 \text{ horas}$ a solução apresenta o estado de equilíbrio como se pode ver na Figura 2.2b.

Exemplo 2 Consideramos os parâmetros fixados no Exemplo 1 mas com uma distribuição inicial da temperatura apresentada na Figura 2.3.

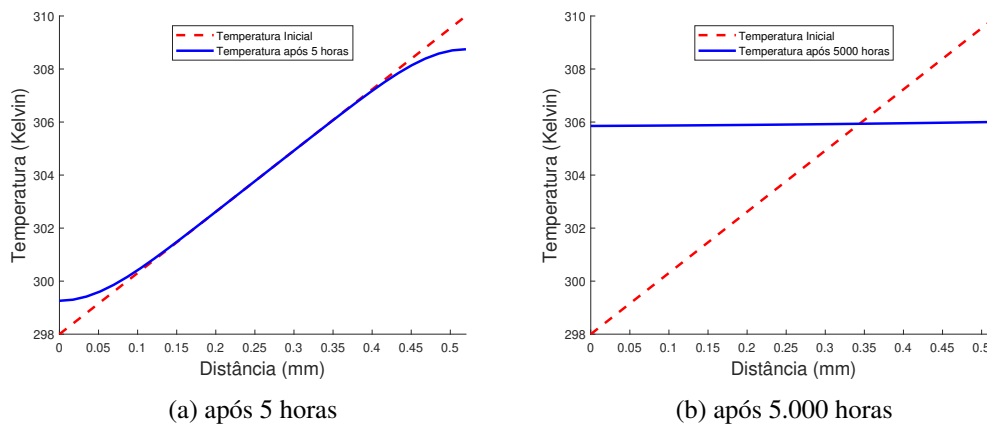


Fig. 2.3 Distribuição da Temperatura **Exemplo 2**

Na Figura 2.3a ilustramos o comportamento da temperatura para $t = 5 \text{ horas}$ e, neste caso, observamos um decrescimento da temperatura na extremidade direita e um aumento na extremidade esquerda. Na Figura 2.3b apresentamos a solução numérica para $t = 5.000 \text{ horas}$ que apresenta um comportamento constante.

Exemplo 3 Pretendemos agora ilustrar a influência dos coeficientes de transferência de calor h_c e h_{ca} no comportamento da temperatura. Consideramos os restantes parâmetros com os valores fixados no **Exemplo 1** e tomamos $h_c = 10.000 \times 10^{-6}$, $h_{ca} = 65.000 \times 10^{-6}$.

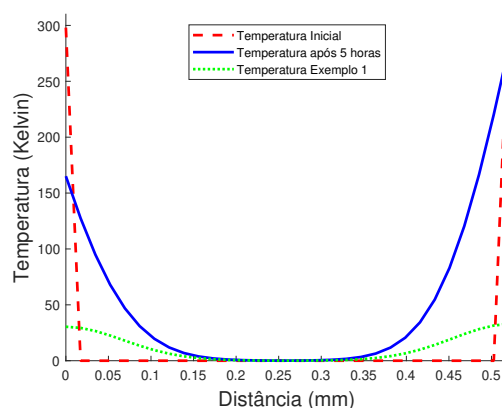


Fig. 2.4 Distribuição da temperatura **Exemplo 3**

Na Figura 2.4 apresentamos o gráfico da temperatura para $t = 5 \text{ horas}$ considerando a temperatura inicial do **Exemplo 1**. Observamos que ao diminuir os valores dos coeficientes de transferência de calor, a temperatura aumenta mais rapidamente das extremidades para o interior.

No intuito de ilustrar numericamente a ordem de convergência obtida na Proposição 9, consideramos $T(x, t) = e^{\left(\frac{\beta^2 K t}{\rho c} + \beta x\right)}$ onde $\beta = \frac{h_c}{K}$ e no caso especial em que $h_c = -h_{ca}$ e $T_{amb} = T_{ca} = 0$. Os demais parâmetros são os listados na tabela 2.1.

Pelo Proposição 9 sabemos que

$$\|E_h^n\|_h^2 \leq C(\Delta t^2 + h^4).$$

Tomemos $\Delta t \leq h^2$ e portanto $\|E_h^n\|_h^2 \leq Ch^4$. Seja

$$Erro_i = \max_{n=1, \dots, M} \|E_h^n\|_h^2.$$

Vejamos que

$$p = \ln\left(\frac{Erro_1}{Erro_2}\right) / \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right),$$

é aproximadamente 4. Na expressão anterior h_1 e h_2 são duas medidas de passo consecutivas. Na Tabela 2.2 são apresentados os resultados obtidos com $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

Tabela 2.2 Ordem de Convergência

N	h	Erro	ordem (p)
1	10×10^{-2}	$9,67 \times 10^{-10}$	-
2	50×10^{-3}	$3,45 \times 10^{-10}$	1,49
4	25×10^{-3}	$9,70 \times 10^{-11}$	1,83
8	$12,5 \times 10^{-3}$	$2,06 \times 10^{-11}$	2,23
16	$6,3 \times 10^{-3}$	$3,47 \times 10^{-12}$	2,58
32	$3,1 \times 10^{-3}$	$5,03 \times 10^{-13}$	2,78
64	$1,6 \times 10^{-3}$	$6,73 \times 10^{-14}$	2,90
128	$7,81 \times 10^{-4}$	$8,48 \times 10^{-15}$	2,99
256	$3,91 \times 10^{-4}$	$9,60 \times 10^{-16}$	3,14
512	$1,95 \times 10^{-4}$	$8,31 \times 10^{-17}$	3,53
1024	$9,77 \times 10^{-5}$	$5,12 \times 10^{-18}$	4,02
2048	$4,88 \times 10^{-5}$	$3,03 \times 10^{-19}$	4,08
4096	$2,44 \times 10^{-5}$	$1,85 \times 10^{-20}$	4,03
8192	$1,22 \times 10^{-5}$	$1,14 \times 10^{-21}$	4,03

É fácil constatar que $p \simeq 4$ quando o número de pontos no espaço se torna arbitrariamente grande.

Capítulo 3

O Caso Não Linear

3.1 Introdução

O objetivo central deste capítulo é a extensão dos resultados do capítulo anterior para o caso não linear. Iniciamos este capítulo considerando o modelo contínuo na secção 3.2. Utilizando o método de energia estabelecemos na secção 3.2.1 uma estimativa para $\|T(t)\|_{L^2}^2$. A estabilidade do problema diferencial (1.2) é estudada na secção 3.2.2. Observamos que a estabilidade é concluída em $[0, \mathcal{T}]$ para a solução T tal que $\left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{\infty}^2$ é limitada em $[0, \mathcal{T}]$. Na secção 3.3 é estudado o modelo semi-discreto que é introduzido utilizando um operador de diferenças finitas para aproximar $\frac{\partial}{\partial x} \left(K(T) \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right)$ que se reduz ao operador de diferenças centradas de segunda ordem no caso em que K é constante. Para a aproximação semi-discreta, obtemos na secção 3.3.1 uma estimativa de energia que não é mais do que uma versão discreta da obtida para o caso contínuo. O estudo da estabilidade da aproximação semi-discreta é apresentada na secção 3.3.2. Observamos que o resultado da estabilidade é estabelecido se vale da versão discreta da condição anteriormente imposta para o caso contínuo. Afim de concluir que de facto tal condição é válida, estudamos na secção 3.3.3 a ordem de convergência do modelo semi-discreto e, como corolário deste resultado, concluimos a validade do resultado da estabilidade. O modelo completamente discreto é introduzido na secção 3.4. Nesta secção estudamos a estabilidade do método numérico e observamos que tal resultado é válido se a solução numérica fixada satisfaz uma condição análoga à exigida no caso semi-discreto. Salientamos que tal condição poderá ser consequência dos resultados de convergência que não serão objeto de estudo do presente trabalho. Concluimos este capítulo ilustrando o comportamento da solução numérica.

3.2 Modelo contínuo

3.2.1 Uma estimativa de energia

Na proposição seguinte apresentamos um majorante para $\|T(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds$, que generaliza o resultado já obtido para o caso em que $K(T)$ é constante.

Proposição 10. *Seja $K(y) \geq \alpha_0 > 0$, $y \in \mathbb{R}$, para alguma constante α_0 . Então para a solução T do problema de condição inicial e de fronteira (1.2) tem-se*

$$\begin{aligned} \rho c \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2\alpha_0 \int_0^t \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds + 2h_c \int_0^t T(0,s)(T(0,s) - T_{amb}) ds \\ + 2h_{ca} \int_0^t T(a,s)(T(a,s) - T_{ca}) ds \leq \rho c \|T(0)\|_{L^2}^2, \quad t \in [0, \mathcal{T}]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Prova. Da equação diferencial de (1.2) vem

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t}(t), T(t) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(K(T(t)) \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right), T(t) \right).$$

Atendendo a que se tem $\left(\frac{\partial T}{\partial t}(t), T(t) \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T(t)\|_{L^2}^2$, e

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(K(T(t)) \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right), T(t) \right) &= \left(K(T(a,t)) \frac{\partial T}{\partial x}(a,t) \right) T(a,t) - \left(K(T(0,t)) \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) \right) T(0,t) \\ &\quad - \left(\left(K(T(t)) \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right), \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right), \end{aligned}$$

obtemos

$$\rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T(t)\|_{L^2}^2 = \left(K(T(a,t)) \frac{\partial T}{\partial x}(a,t) \right) T(a,t) - \left(K(T(0,t)) \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) \right) T(0,t) - \left(\left(K(T(t)) \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right), \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right).$$

As condições de fronteira de (1.2) permitem agora concluir

$$\begin{aligned} \rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T(t)\|_{L^2}^2 &= -h_c (T(0,t) - T_{amb}) T(0,t) - h_{ca} (T(a,t) - T_{ca}) T(a,t) \\ &\quad - \left(\left(K(T(t)) \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right), \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Atendendo a que $K(y) \geq \alpha_0 > 0$, de (3.2) deduzimos

$$\rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T(t)\|_{L^2}^2 + \alpha_0 \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2 \leq -h_c (T(0,t) - T_{amb}) T(0,t) - h_{ca} (T(a,t) - T_{ca}) T(a,t), \quad (3.3)$$

que admite a forma equivalente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\rho c \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2\alpha_0 \int_0^t \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds + 2h_c \int_0^t (T(0,s) - T_{amb}) T(0,s) ds \right. \\ \left. + 2h_{ca} \int_0^t (T(a,s) - T_{ca}) T(a,s) ds \right) \leq 0, \quad t \in (0, \mathcal{T}]. \end{aligned}$$

A desigualdade anterior mostra que

$$\rho c \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2\alpha_0 \int_0^t \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds + 2h_c \int_0^t (T(0,s) - T_{amb}) T(0,s) ds + 2h_{ca} \int_0^t (T(a,s) - T_{ca}) T(a,s) ds$$

é uma função decrescente em $[0, \mathcal{T}]$ e portanto vale (3.1). ■

Observamos que no contexto da propagação do calor e no caso particular de um corpo aquecido com temperatura inicial $T(x, 0)$, $x \in [0, a]$, e em que $T_{amb} = T_{ca} = 0$, de (3.1), vem para $t \in [0, \mathcal{T}]$

$$\rho c \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2\alpha_0 \int_0^t \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds + 2h_c \int_0^t T(0, s)^2 ds + 2h_{ca} \int_0^t T(a, s)^2 ds \leq \rho c \|T(0)\|_{L^2}^2. \quad (3.4)$$

Na desigualdade (3.4), $h_c \int_0^t T(0, s)^2 ds$ e $h_{ca} \int_0^t T(a, s)^2 ds$ contabilizam a quantidade de calor que passa por $x = 0$ e $x = a$, respectivamente.

No resultado seguinte estabelecemos um resultado análogo à Proposição 10 mas em que não contabilizamos os termos $h_c \int_0^t T(0, s)^2 ds$ e $h_{ca} \int_0^t T(a, s)^2 ds$.

Proposição 11. *Nas hipóteses da Proposição 10, existem constantes positivas ε e γ tais que a solução T do problema diferencial (1.2) satisfaz*

$$\rho c \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2\alpha_0 \int_0^t \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds \leq \rho c \|T(0)\|_{L^2}^2 + t \frac{1}{\varepsilon} h_c^2 T_{amb}^2 + t \frac{1}{\gamma} h_{ca}^2 T_{ca}^2, \quad (3.5)$$

para $t \in [0, \mathcal{T}]$.

Prova. De (3.3) vem

$$\rho c \frac{d}{dt} \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2\alpha_0 \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2 \leq -2h_c T(0, t)^2 + 2h_c T_{amb} T(0, t) - 2h_{ca} T(a, t)^2 + 2h_{ca} T_{ca} T(a, t),$$

e portanto

$$\rho c \frac{d}{dt} \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2h_c T(0, t)^2 + 2h_{ca} T(a, t)^2 + 2\alpha_0 \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2 \leq 2h_c T(0, t) T_{amb} + 2h_{ca} T(a, t) T_{ca}. \quad (3.6)$$

Atendendo a que se tem, para $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$,

$$2h_c T(0, t) T_{amb} + 2h_{ca} T(a, t) T_{ca} \leq \varepsilon T(0, t)^2 + \frac{1}{\varepsilon} h_c^2 T_{amb}^2 + \gamma T(a, t)^2 + \frac{1}{\gamma} h_{ca}^2 T_{ca}^2,$$

de (3.6) obtemos

$$\rho c \frac{d}{dt} \|T(t)\|_{L^2}^2 + (2h_c - \varepsilon) T(0, t)^2 + (2h_{ca} - \gamma) T(a, t)^2 + 2\alpha_0 \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} h_c^2 T_{amb}^2 + \frac{1}{\gamma} h_{ca}^2 T_{ca}^2. \quad (3.7)$$

Sejam ε e γ tais que $2h_c - \varepsilon \geq 0$ e $2h_{ca} - \gamma \geq 0$. Assim, de (3.7) deduzimos

$$\rho c \frac{d}{dt} \|T(t)\|_{L^2}^2 + 2\alpha_0 \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} h_c^2 T_{amb}^2 + \frac{1}{\gamma} h_{ca}^2 T_{ca}^2. \quad (3.8)$$

integrando de 0 a t obtemos (3.5). ■

3.2.2 Estabilidade

A seguir é apresentada a análise da estabilidade do problema diferencial (1.2). Para o efeito consideramos duas soluções T e \tilde{T} com condições iniciais ϕ e $\tilde{\phi}$, respectivamente. Então $w(t) = T(t) - \tilde{T}(t)$ é solução do seguinte problema diferencial

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial w}{\partial t}(t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(T(t)) \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\tilde{T}(t)) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}(t) \right), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ K(T(0,t)) \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) - K(\tilde{T}(0,t)) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}(0,t) = h_c w(0,t), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ -K(T(a,t)) \frac{\partial T}{\partial x}(a,t) + K(\tilde{T}(a,t)) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}(a,t) = h_{ca} w(a,t), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ w(0) = \phi - \tilde{\phi}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Da equação diferencial de (3.9) vem sucessivamente

$$\begin{aligned} \rho c \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t), w(t) \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(K(T(t)) \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\tilde{T}(t)) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}(t) \right), w(t) \right) \\ &= - \left(K(T(t)) \frac{\partial T}{\partial x}(t) - K(\tilde{T}(t)) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}(t), \frac{\partial w}{\partial x}(t) \right) \\ &\quad + \left(K(T(a,t)) \frac{\partial T}{\partial x}(a,t) - K(\tilde{T}(a,t)) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}(a,t) \right) w(a,t) \\ &\quad - \left(K(T(0,t)) \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) - K(\tilde{T}(0,t)) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}(0,t) \right) w(0,t). \end{aligned}$$

Sabendo que

$$K(T(t)) \frac{\partial T}{\partial x}(t) - K(\tilde{T}(t)) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}(t) = \frac{\partial T}{\partial x}(t) \left(K(T(t)) - K(\tilde{T}(t)) \right) + K(\tilde{T}(t)) \frac{\partial w}{\partial x}(t),$$

e ainda, pelas condições de fronteira de (3.9)

$$\begin{aligned} \rho c \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t), w(t) \right) &= - \left(\left(K(T(t)) - K(\tilde{T}(t)) \right) \frac{\partial T}{\partial x}(t), \frac{\partial w}{\partial x}(t) \right) \\ &\quad - \left(K(\tilde{T}(t)) \frac{\partial w}{\partial x}(t), \frac{\partial w}{\partial x}(t) \right) - h_{ca} w(a,t)^2 - h_c w(0,t)^2. \end{aligned}$$

Suponhamos que K é uma função com primeira derivada limitada, $|K'(y)| \leq \beta, y \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} \left(\left(K(T(t)) - K(\tilde{T}(t)) \right) \frac{\partial T}{\partial x}(t), \frac{\partial w}{\partial x}(t) \right) &\leq \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{\infty} \|K'\|_{\infty} \|w(t)\|_{L^2} \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(t) \right\|_{L^2} \\ &\leq \beta \|w(t)\|_{L^2} \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{\infty} \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}, \end{aligned}$$

e portanto para $\varepsilon > 0$,

$$\left| \left(\left(K(T(t)) - K(\tilde{T}(t)) \right) \frac{\partial T}{\partial x}(t), \frac{\partial w}{\partial x}(t) \right) \right| \leq \frac{1}{4\varepsilon} \beta^2 \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{\infty}^2 \|w(t)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2. \quad (3.10)$$

Por outro lado, uma vez que se tem $K(y) \geq \alpha_0 > 0, y \in \mathbb{R}$, obtemos

$$-\left(K(\tilde{T}(t))\frac{\partial w}{\partial x}(t), \frac{\partial w}{\partial x}(t)\right) \leq -\alpha_0 \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2.$$

Conjugando as desigualdades obtidas, concluímos

$$\begin{aligned} \rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{4\varepsilon} \beta^2 \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{\infty}^2 \|w(t)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2 \\ &\quad - \alpha_0 \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2 - h_{ca}w(a,t)^2 - h_cw(0,t)^2, t \in (0, \mathcal{T}]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Seja $g(t) = \frac{1}{2\rho c\varepsilon} \beta^2 \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{\infty}^2$. Então (3.11) é reescrita na forma equivalente seguinte

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2}^2 - g(t) \|w(t)\|_{L^2}^2 \leq (\varepsilon - \alpha_0) \frac{2}{\rho c} \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2 - \frac{2}{\rho c} (h_{ca}w(a,t)^2 + h_cw(0,t)^2), t \in (0, \mathcal{T}],$$

ou seja

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|w(t)\|_{L^2}^2 e^{-\int_0^t g(s)ds} \right) &\leq (\varepsilon - \alpha_0) \frac{2}{\rho c} e^{-\int_0^t g(s)ds} \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2 \\ &\quad - e^{-\int_0^t g(s)ds} \frac{2}{\rho c} (h_{ca}w(a,t)^2 + h_cw(0,t)^2), t \in (0, \mathcal{T}]. \end{aligned}$$

Atendendo a que a última desigualdade admite a representação

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|w(t)\|_{L^2}^2 e^{-\int_0^t g(s)ds} \right) &+ (\alpha_0 - \varepsilon) \frac{2}{\rho c} \int_0^t e^{-\int_0^s g(\mu)d\mu} \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds \\ &+ \frac{2}{\rho c} \int_0^t e^{-\int_0^s g(\mu)d\mu} (h_{ca}w(a,s)^2 + h_cw(0,s)^2) ds \leq 0, t \in (0, \mathcal{T}], \end{aligned} \quad (3.12)$$

concluímos que

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{L^2}^2 e^{-\int_0^t g(s)ds} &+ (\alpha_0 - \varepsilon) \frac{2}{\rho c} \int_0^t e^{-\int_0^s g(\mu)d\mu} \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds \\ &+ \frac{2}{\rho c} \int_0^t e^{-\int_0^s g(\mu)d\mu} (h_{ca}w(a,s)^2 + h_cw(0,s)^2) ds \end{aligned}$$

é uma função decrescente em $[0, \mathcal{T}]$. Estabelecemos deste modo o resultado seguinte

Proposição 12. *Suponhamos que $K(y) \geq \alpha_0 > 0, y \in \mathbb{R}, |K'(y)| \leq \beta, y \in \mathbb{R}$. Sejam $T(t), \tilde{T}(t)$ soluções de (1.2) com condições iniciais ϕ e $\tilde{\phi}$, respectivamente. Seja $\varepsilon > 0$ e*

$$g(t) = \frac{1}{2\rho c\varepsilon} \beta^2 \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{\infty}^2.$$

Então $w(t) = T(t) - \tilde{T}(t)$ satisfaz

$$\begin{aligned}
\|w(t)\|_{L^2}^2 &+ (\alpha_0 - \varepsilon) \frac{2}{\rho c} \int_0^t e^{\int_s^t g(\mu) d\mu} \left\| \frac{\partial w}{\partial x}(s) \right\|_{L^2}^2 ds \\
&+ \frac{2}{\rho c} \int_0^t e^{\int_s^t g(\mu) d\mu} (h_{ca} w(a, s)^2 + h_c w(0, s)^2) ds \\
&\leq e^{\int_0^t g(\mu) d\mu} \|w(0)\|_{L^2}^2, \quad t \in [0, \mathcal{T}].
\end{aligned} \tag{3.13}$$

■

Se T é solução do problema diferencial (1.2) e é tal que

$$\left\| \frac{\partial T}{\partial x}(t) \right\|_{\infty}^2 \leq C, \quad t \in [0, \mathcal{T}], \tag{3.14}$$

para alguma constante $C > 0$, então a Proposição 12 permite concluir a estabilidade do problema (1.2) nesta solução, isto é, para todo $\delta > 0$, existe $\sigma > 0$ tal que qualquer outra solução \tilde{T} de (1.2) que verifique $\|T(0) - \tilde{T}(0)\|_{L^2}^2 < \sigma$ também satisfaz $\|T(t) - \tilde{T}(t)\|_{L^2}^2 < \sigma$, $t \in [0, \mathcal{T}]$. Para $\sigma > 0$ é suficiente tomar

$$\sigma \leq \frac{\delta}{e^{\int_0^{\mathcal{T}} g(\mu) d\mu}}.$$

Da desigualdade (3.13) vem ainda que o problema (1.2) tem solução única. De facto, se \tilde{T} e T são duas soluções, então $w(t) = T(t) - \tilde{T}(t)$ satisfaz $\|w(t)\|_{L^2}^2 = 0$ e portanto $T(t) = \tilde{T}(t)$ em $L^2(0, a)$, $t \in [0, \mathcal{T}]$.

3.3 Modelo semi-discreto

Nesta secção pretendemos introduzir um método de semi-discretização para o problema não linear (1.2) estável e convergente. A questão principal está associada à discretização do termo não linear $K(T(t))$. Vamos considerar a abordagem já introduzida por exemplo em [3] para problemas com condições de Dirichlet. Recordamos que as condições de fronteira de Robin introduzem dificuldades que serão contornadas utilizando discretizações convenientes, uma norma e o correspondente produto interno adequados.

Esta secção é composta por mais duas secções que apresentamos seguidamente: na secção 3.3.1, *Aproximação semi-discreta* é apresentado o sistema diferencial ordinário que caracteriza a aproximação semi-discreta e definições e alguns resultados básicos que têm papel relevante no estudo da estabilidade. Na secção 3.3.2, *Estabilidade*, é apresentado o estudo de estabilidade da aproximação semi-discreta. Finalmente, na secção 3.3.3, *Análise de convergência*, são estudadas as propriedades de convergência da aproximação semi-discreta.

3.3.1 Aproximação semi-discreta

Algumas definições

Em $\bar{\Omega} = [0, a]$ introduzimos a partição uniforme $\bar{\Omega}_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N\}$, em que $x_i - x_{i-1} = h$ com $h = \frac{a}{N}$. Seja x_{-1} e x_{N+1} os pontos auxiliares, $x_{-1} = -h, x_{N+1} = a + h$, e seja $\bar{\Omega}_h^* = \bar{\Omega}_h \cup \{x_{-1}, x_{N+1}\}$. Sejam W_h^* e W_h os espaços de funções de rede definidas em $\bar{\Omega}_h^*$ e $\bar{\Omega}_h$, respectivamente.

Introduzimos seguidamente os operadores de diferenças que consideraremos na definição da aproximação semi-discreta. A aproximação de $K(T(x_i, t))$ é definida utilizando o operador média

$$M_h v_h(x_i) = \frac{1}{2}(v_h(x_{i-1}) + v_h(x_i)).$$

Introduzimos agora os operadores que consideramos na discretização das condições de fronteira:

$$D_L u_h(x_0) = \frac{1}{2} \left(K(M_h u_h(x_1)) D_{-x} u_h(x_1) + K(M_h u_h(x_0)) D_{-x} u_h(x_0) \right),$$

e

$$D_R u_h(x_N) = \frac{1}{2} \left(K(M_h u_h(x_N)) D_{-x} u_h(x_N) + K(M_h u_h(x_{N+1})) D_{-x} u_h(x_{N+1}) \right).$$

Observamos que no caso em que K é constante, os dois operadores anteriores coincidem com KD_c em que D_c denota o operador de diferenças centradas

$$D_c u_h(x_i) = \frac{1}{2h} (u_h(x_{i+1}) - u_h(x_{i-1})).$$

Para $u_h, v_h \in W_h^*$, consideramos o seguinte operador de diferenças não linear

$$\begin{aligned} D_x(K(M_h v_h) D_{-x} u_h)(x_i) &= \frac{1}{h} (K(M_h v_h(x_{i+1})) D_{-x} u_h(x_{i+1}) - K(M_h v_h(x_i)) D_{-x} u_h(x_i)) \\ &= \frac{1}{h} \left(K\left(\frac{1}{2}(v_h(x_{i+1}) + v_h(x_i))\right) D_{-x} u_h(x_{i+1}) - K\left(\frac{1}{2}(v_h(x_i) + v_h(x_{i-1}))\right) D_{-x} u_h(x_i) \right), \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Observamos que $D_x(K(M_h v_h)D_{-x}u_h) \in W_h$. Em W_h consideramos o produto interno

$$(u_h, v_h)_h = \frac{h}{2}u_h(x_0)v_h(x_0) + \sum_{i=1}^{N-1} h u_h(x_i)v_h(x_i) + \frac{h}{2}u_h(x_N)v_h(x_N),$$

em que $u_h, v_h \in W_h$, e por $\|\cdot\|_h$ denotamos a correspondente norma. Para facilitar a escrita, frequentemente escreveremos u_i em substituição de $u_h(x_i)$.

Lema 2. *Vale a igualdade seguinte*

$$\sum_{i=1}^{N-1} h D_x(K(M_h u_i)D_{-x}u_i)v_i = - \sum_{i=1}^N h K(M_h u_i)D_{-x}u_i D_{-x}v_i - K(M_h u_1)D_{-x}u_1 v_0 + K(M_h u_N)D_{-x}u_N v_N. \quad (3.15)$$

Prova. Seja $K_i = K(M_h u_i)$. Notamos que se tem sucessivamente

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} (h D_x(K_i D_{-x}u_i))v_i &= \sum_{j=2}^N K_j D_{-x}u_j v_{j-1} - \sum_{j=1}^{N-1} K_j D_{-x}u_j v_j \\ &= \sum_{j=1}^N K_j D_{-x}u_j v_{j-1} - K_1 D_{-x}u_1 v_0 - \sum_{j=1}^N K_j D_{-x}u_j v_j + K_N D_{-x}u_N v_N \\ &= - \sum_{j=1}^N h K_j D_{-x}u_j D_{-x}v_j - K_1 D_{-x}u_1 v_0 + K_N D_{-x}u_N v_N. \end{aligned}$$

■

Utilizando o lema anterior estabelecemos a seguinte proposição

Proposição 13. *Para $u_h \in W_h^*$ e $v_h \in W_h$ tem-se*

$$(D_x(K(M_h u_h)D_{-x}u_h), v_h)_h = -D_L u_0 v_0 - \sum_{i=1}^N h K(M_h u_h(x_i))D_{-x}u_i D_{-x}v_i + D_R u_N v_N.$$

Prova. Com $K_i = K(M_h u_i)$, utilizando o Lema 2 tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned} (D_x(K(M_h u_h)D_{-x}u_h), v_h)_h &= \frac{h}{2}D_x(K_0 D_{-x}u_0)v_0 + \sum_{i=1}^{N-1} h D_x(K_i D_{-x}u_i)v_i + \frac{h}{2}D_x(K_N D_{-x}u_N)v_N \\ &= \frac{1}{2}K_1 D_{-x}u_1 v_0 - \frac{1}{2}K_0 D_{-x}u_0 v_0 - \sum_{i=1}^N h K_i D_{-x}u_i D_{-x}v_i - K_1 D_{-x}u_1 v_0 \\ &\quad + K_N D_{-x}u_N v_N + \frac{1}{2}K_{N+1} D_{-x}u_{N+1} v_N - \frac{1}{2}K_N D_{-x}u_N v_N \\ &= -\frac{1}{2}(K_1 D_{-x}u_1 + K_0 D_{-x}u_0)v_0 - \sum_{i=1}^N h K_i D_{-x}u_i D_{-x}v_i + \frac{1}{2}(K_N D_{-x}u_N + K_{N+1} D_{-x}u_{N+1})v_N. \end{aligned}$$

■

Utilizaremos as seguintes notações

$$\|D_{-x}u_h\|_h^2 = \sum_{i=1}^N h(D_{-x}u_h(x_i))^2 \quad \text{e} \quad (u_h, v_h)_{h,+} = \sum_{i=1}^N hu_h(x_i)v_h(x_i).$$

A aproximação semi-discreta

Seja $T_h(t) \in W_h^*$ a solução do seguinte sistema diferencial ordinário

$$\begin{cases} \rho c \frac{dT_h}{dt}(x_i, t) = D_x(K(M_h T_h(t))D_{-x}T_h(t))(x_i, t), & i = 0, 1, \dots, N, \quad t \in (0, \mathcal{T}], \\ D_L T_h(x_0, t) = h_c(T_h(x_0, t) - T_{amb}), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ -D_R T_h(x_N, t) = h_{ca}(T_h(x_N, t) - T_{ca}), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ T_h(x_i, 0) = \phi(x_i), & i = 0, 1, \dots, N, \end{cases}$$

que admite a representação equivalente

$$\begin{cases} \rho c \frac{dT_h}{dt}(t) = D_x(K(M_h T_h(t))D_{-x}T_h(t)), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ D_L T_h(x_0, t) = h_c(T_h(x_0, t) - T_{amb}), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ -D_R T_h(x_N, t) = h_{ca}(T_h(x_N, t) - T_{ca}), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ T_h(0) = \phi_h, \end{cases} \quad (3.16)$$

em que $\phi_h(x_i) = \phi(x_i), i = 0, 1, \dots, N$. Observamos que o sistema diferencial ordinário (3.16) é não linear. A existência e unicidade da solução deste problema pode ser analisada utilizando a teoria das equações diferenciais ordinárias.

3.3.2 Estabilidade

Iniciamos esta secção estabelecendo uma estimativa para $\|T_h(t)\|_h$ em que $T_h(t)$ é solução do problema diferencial (3.16).

Proposição 14. *Se $K(y) \geq \alpha_0 > 0, y \in \mathbb{R}$, e $T_h(t)$ é solução do problema diferencial (3.16), então*

$$\begin{aligned} \rho c \|T_h(t)\|_h^2 + 2\alpha_0 \int_0^t \|D_{-x}T_h(s)\|_h^2 ds + 2h_c \int_0^t T_0(s)(T_0(s) - T_{amb}) ds + 2h_{ca} \int_0^t T_N(s)(T_N(s) - T_{ca}) ds \\ \leq \rho c \|T_h(0)\|_h^2, \quad t \in [0, \mathcal{T}]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Prova. Da equação diferencial de (3.16) vem

$$\rho c \left(\frac{dT_h}{dt}(t), T_h(t) \right)_h = (D_x(K(M_h T_h(t)) D_{-x} T_h(t)), T_h(t))_h.$$

Pela Proposição 13 obtemos

$$\rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T_h(t)\|_h^2 = -D_L T_0(t) T_0(t) - \sum_{i=1}^N h K_i (D_{-x} T_i(t))^2 + D_R T_N(t) T_N(t).$$

Considerando as condições de fronteira e uma vez que $K(y) \geq \alpha_0$, vem

$$\rho c \frac{d}{dt} \|T_h(t)\|_h^2 + 2\alpha_0 \|D_{-x} T_h(t)\|_h^2 + 2h_c T_0(t)(T_0(t) - T_{amb}) + 2h_{ca} T_N(t)(T_N(t) - T_{ca}) \leq 0,$$

que admite a representação equivalente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\rho c \|T_h(t)\|_h^2 + 2\alpha_0 \int_0^t \|D_{-x} T_h(s)\|_h^2 ds + 2h_c \int_0^t T_0(s)(T_0(s) - T_{amb}) ds \right. \\ \left. + 2h_{ca} \int_0^t T_N(s)(T_N(s) - T_{ca}) ds \right) \leq 0, \quad t \in (0, \mathcal{T}]. \end{aligned}$$

Da desigualdade anterior concluímos que

$$\rho c \|T_h(t)\|_h^2 + 2\alpha_0 \int_0^t \|D_{-x} T_h(s)\|_h^2 ds + 2h_c \int_0^t T_0(s)(T_0(s) - T_{amb}) ds + 2h_{ca} \int_0^t T_N(s)(T_N(s) - T_{ca}) ds$$

é decrescente em $[0, \mathcal{T}]$ e portanto vale (3.17). ■

Pode-se observar ainda que, para o caso particular de $T_{amb} = T_{ca} = 0$, vem

$$\rho c \|T_h(t)\|_h^2 + 2h_c \int_0^t T_0(s)^2 ds + 2h_{ca} \int_0^t T_N(s)^2 ds + 2\alpha_0 \int_0^t \|D_{-x} T_h(s)\|_h^2 ds \leq \rho c \|T_h(0)\|_h^2, \quad t \in [0, \mathcal{T}].$$

É possível observar que a estimativa de energia para o modelo diferencial discreto é uma versão discreta da correspondente estimativa face o modelo contínuo (3.4).

Consideremos agora $T_h(t)$ e $\tilde{T}_h(t)$ duas soluções de (3.16) com condições iniciais ϕ_h e $\tilde{\phi}_h$, respectivamente, e seja $w_h(t) = T_h(t) - \tilde{T}_h(t)$. Esta última função de rede pertencente ao espaço W_h^* e é

solução do seguinte problema diferencial ordinário

$$\begin{cases} \rho c \frac{dw_h}{dt}(t) = D_x(K(M_h T_h(t))D_{-x}T_h(t)) - D_x(K(M_h \tilde{T}_h(t))D_{-x}\tilde{T}_h(t)), & t \in (0, \mathcal{I}], \\ D_L T_h(x_0, t) - D_L \tilde{T}_h(x_0, t) = h_c w_h(x_0, t), & t \in (0, \mathcal{I}], \\ -(D_R T_h(x_N, t) - D_R \tilde{T}_h(x_N, t)) = h_{ca} w_h(x_N, t), & t \in (0, \mathcal{I}], \\ w_h(0) = \phi_h - \tilde{\phi}_h. \end{cases} \quad (3.18)$$

Da equação diferencial de (3.18) vem sucessivamente

$$\begin{aligned} \rho c \left(\frac{dw_h}{dt}(t), w_h(t) \right)_h &= \left(D_x(K(M_h T_h(t))D_{-x}T_h(t)) - D_x(K(M_h \tilde{T}_h(t))D_{-x}\tilde{T}_h(t)), w_h(t) \right)_h \\ &= \left(D_x(K(M_h T_h(t))D_{-x}T_h(t)), w_h(t) \right)_h - \left(D_x(K(M_h \tilde{T}_h(t))D_{-x}\tilde{T}_h(t)), w_h(t) \right)_h. \end{aligned}$$

Pela Proposição 13 e, pelas condições de fronteira, vem sucessivamente

$$\begin{aligned} \rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_h(t)\|_h^2 &= -w_h(x_0, t)(D_L T_h(x_0, t) - D_L \tilde{T}_h(x_0, t)) + w_h(x_N, t)(D_R T_h(x_N, t) - D_R \tilde{T}_h(x_N, t)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N h D_{-x} w_h(x_i) (K(M_h T_h(x_i))D_{-x}T_h(x_i) - K(M_h \tilde{T}_h(x_i))D_{-x}\tilde{T}_h(x_i)) \\ &= -h_c w_h(x_0, t)^2 - h_{ca} w_h(x_N, t)^2 - \left(K(M_h T_h(t))D_{-x}T_h(t) - K(M_h \tilde{T}_h(t))D_{-x}\tilde{T}_h(t), D_{-x}w_h(t) \right)_{h,+}. \end{aligned}$$

Sabendo que se tem

$$K(M_h T_h(t))D_{-x}T_h(t) - K(M_h \tilde{T}_h(t))D_{-x}\tilde{T}_h(t) = D_{-x}T_h(t) \left(K(M_h T_h(t)) - K(M_h \tilde{T}_h(t)) \right) + K(M_h \tilde{T}_h(t))D_{-x}w_h(t),$$

então concluímos

$$\begin{aligned} \rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_h(t)\|_h^2 &= -h_c w_h(x_0, t)^2 - h_{ca} w_h(x_N, t)^2 - \left(D_{-x}T_h(t) \left(K(M_h T_h(t)) - K(M_h \tilde{T}_h(t)) \right), D_{-x}w_h(t) \right)_{h,+} \\ &\quad - \left(K(M_h \tilde{T}_h(t))D_{-x}w_h(t), D_{-x}w_h(t) \right)_{h,+}. \end{aligned}$$

Suponhamos, tal como no caso contínuo na secção anterior, que K é uma função com primeira derivada limitada, $|K'(y)| \leq \beta, y \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} \left(D_{-x}T_h(t) \left(K(M_h T_h(t)) - K(M_h \tilde{T}_h(t)) \right), D_{-x}w_h(t) \right)_{h,+} &\leq \|D_{-x}T_h(t)\|_\infty \|K'\|_\infty \|M_h w_h(t)\|_h \|D_{-x}w_h(t)\|_h \\ &\leq \beta \|M_h w_h(t)\|_h \|D_{-x}T_h(t)\|_\infty \|D_{-x}w_h(t)\|_h \\ &\leq \beta \|w_h(t)\|_h \|D_{-x}T_h(t)\|_\infty \|D_{-x}w_h(t)\|_h, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \left| \left(\left(K(M_h T_h(t)) - K(M_h \tilde{T}_h(t)) \right) D_{-x}T_h(t), D_{-x}w_h(t) \right)_{h,+} \right| &\leq \beta \|w_h(t)\|_h \|D_{-x}T_h(t)\|_\infty \|D_{-x}w_h(t)\|_h \\ &\leq \frac{1}{4\varepsilon} \beta^2 \|D_{-x}T_h(t)\|_\infty^2 \|w_h(t)\|_h^2 + \varepsilon \|D_{-x}w_h(t)\|_h^2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

para $\varepsilon > 0$. Considerando agora que também se tem $K(y) \geq \alpha_0 > 0, y \in \mathbb{R}$, obtemos

$$-(K(M_h \tilde{T}_h(t))D_{-x}w_h(t), D_{-x}w_h(t))_{h,+} \leq -\alpha_0 \|D_{-x}w_h(t)\|_h^2.$$

Conjugando as desigualdades obtidas, concluímos

$$\begin{aligned} \rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_h^2 &\leq \frac{1}{4\varepsilon} \beta^2 \|D_{-x}T_h(t)\|_\infty^2 \|w_h(t)\|_h^2 + \varepsilon \|D_{-x}w_h(t)\|_h^2 \\ &\quad - \alpha_0 \|D_{-x}w_h(t)\|_h^2 - h_{ca}w_h(x_N, t)^2 - h_cw_h(x_0, t)^2, t \in (0, \mathcal{T}]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Introduzimos agora a seguinte função $g_h(t) = \frac{1}{2\rho c\varepsilon} \beta^2 \|D_{-x}T_h(t)\|_\infty^2$. (3.20) é reescrita na forma equivalente seguinte

$$\frac{d}{dt} \|w_h(t)\|_h^2 - g_h(t) \|w_h(t)\|_h^2 \leq (\varepsilon - \alpha_0) \frac{2}{\rho c} \|D_{-x}w_h(t)\|_h^2 - \frac{2}{\rho c} (h_{ca}w_h(x_N, t)^2 + h_cw_h(x_0, t)^2), t \in (0, \mathcal{T}],$$

ou seja

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|w_h(t)\|_h^2 e^{-\int_0^t g_h(s) ds} \right) &\leq (\varepsilon - \alpha_0) \frac{2}{\rho c} e^{-\int_0^t g_h(s) ds} \|D_{-x}w_h(t)\|_h^2 \\ &\quad - \frac{2}{\rho c} e^{-\int_0^t g_h(s) ds} (h_{ca}w_h(x_N, t)^2 + h_cw_h(x_0, t)^2). \end{aligned}$$

Atendendo a que a última desigualdade admite a representação

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|w_h(t)\|_h^2 e^{-\int_0^t g_h(s) ds} \right) &+ (\alpha_0 - \varepsilon) \frac{2}{\rho c} \int_0^t e^{-\int_0^s g_h(\mu) d\mu} \|D_{-x}w_h(s)\|_h^2 ds \\ &+ \frac{2}{\rho c} \int_0^t e^{-\int_0^s g_h(\mu) d\mu} (h_{ca}w_h(x_N, s)^2 + h_cw_h(x_0, s)^2) ds \leq 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

para $t \in (0, \mathcal{T}]$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \|w_h(t)\|_h^2 e^{-\int_0^t g_h(s) ds} &+ (\alpha_0 - \varepsilon) \frac{2}{\rho c} \int_0^t e^{-\int_0^s g_h(\mu) d\mu} \|D_{-x}w_h(s)\|_h^2 ds \\ &+ \frac{2}{\rho c} \int_0^t e^{-\int_0^s g_h(\mu) d\mu} (h_{ca}w_h(x_N, s)^2 + h_cw_h(x_0, s)^2) ds \end{aligned}$$

é uma função decrescente em $[0, \mathcal{T}]$ e deste modo estabelecemos o resultado seguinte.

Proposição 15. *Suponhamos que $K(y) \geq \alpha_0 > 0, y \in \mathbb{R}, |K'(y)| \leq \beta, y \in \mathbb{R}$. Sejam $T_h(t), \tilde{T}_h(t)$ soluções de (3.18) com condições iniciais ϕ_h e $\tilde{\phi}_h$, respectivamente. Seja $\varepsilon > 0$ e*

$$g_h(t) = \frac{1}{2\rho c\varepsilon} \beta^2 \|D_{-x}T_h(t)\|_\infty^2.$$

Então $w_h(t) = T_h(t) - \tilde{T}_h(t)$ satisfaz

$$\begin{aligned} \|w_h(t)\|_h^2 &+ (\alpha_0 - \varepsilon) \frac{2}{\rho c} \int_0^t e^{\int_s^t g_h(\mu) d\mu} \|D_{-x} w_h(s)\|_h^2 ds \\ &+ \frac{2}{\rho c} \int_0^t e^{\int_s^t g_h(\mu) d\mu} (h_{ca} w_h(x_N, s)^2 + h_c w_h(x_0, s)^2) ds \\ &\leq e^{\int_0^t g_h(\mu) d\mu} \|w_h(0)\|_h^2, \quad t \in [0, \mathcal{T}]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

■

Para concluir a estabilidade de (3.18) em $T_h(t)$, é necessário garantir que $\|D_{-x} T_h(t)\|_h^2 \leq C$, em que C é independente de h . Para tal, analisaremos a convergência do modelo semi-discreto.

3.3.3 Análise de convergência

Nesta secção pretendemos estabelecer um majorante para o erro $E_h(t) = T(t) - T_h(t)$ onde $T(t)$ é solução do problema diferencial (1.2) e $T_h(t)$ é solução do problema diferencial ordinário (3.16).

Começamos por recordar que se $u \in C^4[x_{-1}, x_{N+1}]$ então

$$\begin{aligned} D_{-x} u(x_i) &= \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h} = u'(x_i) - \frac{h}{2} u''(x_i) + \frac{h^2}{6} u'''(x_i) + \mathcal{O}(h^3), \quad i = 0, 1, \dots, N, \\ D_{-x} u(x_{i+1}) &= \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} = u'(x_i) + \frac{h}{2} u''(x_i) + \frac{h^2}{6} u'''(x_i) + \mathcal{O}(h^3), \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Proposição 16. *Se $u \in C^4[x_{-1}, x_{N+1}]$ e K''' limitada, então*

$$\begin{aligned} D_x(K(M_h u(x_i)) D_{-x} u(x_i)) &= K'(u(x_i))(u'(x_i))^2 + K(u(x_i))u''(x_i) + T_r(x_i, t) \\ &= (K(u)u')'(x_i) + T_r(x_i, t), \quad i = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.23)$$

em que $|T_r(x_i)| \leq Ch^2$ e C depende de $\|u\|_{C^4}$.

Prova. Começemos por notar que

$$\begin{aligned} D_x(K(M_h u) D_{-x} u)(x_i) &= u'(x_i) \frac{1}{h} [K(M_h u(x_{i+1})) - K(M_h u(x_i))] + u''(x_i) \frac{1}{2} [K(M_h u(x_{i+1})) + K(M_h u(x_i))] \\ &\quad + u'''(x_i) \frac{h}{6} [K(M_h u(x_{i+1})) - K(M_h u(x_i))] + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} K(M_h u(x_{i+1})) &= K\left(\frac{u(x_{i+1}) + u(x_i)}{2}\right) = K\left(u(x_i) + \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{2}\right) \\ &= K(u(x_i)) + K'(u(x_i))\left(\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{2}\right) + \frac{1}{8} K''(u(x_i))\left(u(x_{i+1}) - u(x_i)\right)^2 + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned}$$

e de modo análogo

$$K(M_h u(x_i)) = K(u(x_i)) - K'(u(x_i)) \left(\frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{2} \right) + \frac{1}{8} K''(u(x_i)) \left(u(x_{i-1}) - u(x_i) \right)^2 + \mathcal{O}(h^3).$$

Assim

$$\begin{aligned} K(M_h u(x_{i+1})) - K(M_h u(x_i)) &= K'(u(x_i)) \left(h u'(x_i) + \mathcal{O}(h^3) \right) + \frac{1}{8} K''(u(x_i)) \left[h^3 u'(x_i) u''(x_i) + \frac{h^4}{4} u''(x_i)^2 \right. \\ &\quad \left. + h^3 u'(x_i) u''(x_i) - \frac{h^4}{4} u''(x_i)^2 \right] + \mathcal{O}(h^3) \\ &= h K'(u(x_i)) u'(x_i) + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned}$$

e $K(M_h u(x_{i+1})) + K(M_h u(x_i)) = 2K(u(x_i)) + \mathcal{O}(h^2)$. Logo,

$$\begin{aligned} D_x(K(M_h u) D_{-x} u)(x_i) &= \frac{1}{h} \left[u'(x_i) \left(h K'(u(x_i)) u'(x_i) + \mathcal{O}(h^3) \right) \right] + u''(x_i) \frac{1}{2} \left[2K(u(x_i)) + \mathcal{O}(h^2) \right] + \mathcal{O}(h^3) \\ &= K'(u(x_i)) (u'(x_i))^2 + u''(x_i) K(u(x_i)) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= (K(u) u')'(x_i) + T_r(x_i, t), \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

■

Seja então $E_h(t) = T(t) - T_h(t)$ o erro associado à discretização espacial do modelo semi-discreto. Temos

$$\rho c \frac{dE_h}{dt}(x_i, t) = \rho c \frac{dT}{dt}(x_i, t) - \rho c \frac{dT_h}{dt}(x_i, t),$$

e, atendendo aos problemas diferencial e de diferenças de T e T_h respectivamente, obtemos

$$\rho c \frac{dE_h}{dt}(x_i, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(T(t)) \frac{\partial T}{\partial x}(x_i, t) \right) - D_x(K(M_h T_h(x_i, t)) D_{-x} T_h(x_i, t)).$$

Da Proposição 16 vem

$$\rho c \frac{dE_h}{dt}(x_i, t) = D_x(K(M_h T(x_i, t)) D_{-x} T(x_i, t)) - D_x(K(M_h T_h(x_i, t)) D_{-x} T_h(x_i, t)) - T_r(x_i, t), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Por outro lado, para a condição de fronteira em $x = 0$, temos

$$K(T(x_0, t)) \frac{\partial T}{\partial x}(x_0, t) - D_L T_h(x_0, t) = h_c E_h(x_0, t),$$

onde

$$D_L T_h(x_0, t) = \frac{1}{2} \left(K(M_h T_h(x_1, t)) D_{-x} T_h(x_1, t) + K(M_h T_h(x_0, t)) D_{-x} T_h(x_0, t) \right).$$

Observamos que se tem

$$D_L T(x_0, t) = K(T(x_0, t)) \frac{\partial T}{\partial x}(x_0, t) + T_L(x_0, t),$$

em que $|T_L(x_0, t)| \leq Ch^2$ para alguma constante positiva C , desde que $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ seja limitada em $[x_{-1}, x_{N+1}] \times [0, \mathcal{T}]$ e $|K'(y)| \leq \text{Constante}, y \in \mathbb{R}$. Logo obtemos

$$D_L T(x_0, t) - D_L T_h(x_0, t) = h_c E_h(x_0, t) + T_L(x_0, t).$$

De igual modo, para $x = N$ obtemos

$$D_R T(x_N, t) - D_R T_h(x_N, t) = h_{ca} E_h(x_N, t) + T_R(x_N, t),$$

em que

$$D_R T_h(x_N, t) = \frac{1}{2} \left(K(M_h T_h(x_N, t)) D_{-x} T_h(x_N, t) + K(M_h T_h(x_{N+1}, t)) D_{-x} T_h(x_{N+1}, t) \right).$$

sendo $D_R T(x_N, t)$ definido de modo análogo e $T_R(x_N, t)$ verifica $|T_R(x_N, t)| \leq Ch^2, t \in [0, \mathcal{T}]$, para alguma constante positiva C .

Sumariando, para o erro $E_h(t)$ obtemos o seguinte problema diferencial

$$\begin{cases} \rho c \frac{dE_h}{dt}(t) = D_x(K(M_h T(t)) D_{-x} T(t)) - D_x(K(M_h T_h(t)) D_{-x} T_h(t)) - T_r(t), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ D_L T(x_0, t) - D_L T_h(x_0, t) = h_c E_h(x_0, t) + T_L(x_0, t), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ -(D_R T(x_N, t) - D_R T_h(x_N, t)) = h_{ca} E_h(x_N, t) - T_R(x_N, t), & t \in (0, \mathcal{T}], \\ E_h(0) = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Em seguida apresentamos um majorante para $\|E_h(t)\|_h$.

Proposição 17. *Suponhamos que $K(y) \geq \alpha_0 > 0, y \in \mathbb{R}, |K'(y)| \leq \beta, y \in \mathbb{R}$. Seja $T(t)$ solução do problema contínuo (1.2) e $T_h(t)$ solução do problema semi-discreto (3.16). Seja $\varepsilon > 0$ e*

$$g_h(t) = \frac{1}{2\rho c\varepsilon} \beta^2 \|D_{-x} T(t)\|_\infty^2 + \frac{1}{\rho c}.$$

Então $E_h(t) = T(t) - T_h(t)$ satisfaz

$$\begin{aligned} \|E_h(t)\|_h^2 &+ \frac{2}{\rho c} (\alpha_0 - \varepsilon) \int_0^t e^{\int_s^t g_h(\mu) d\mu} \|D_{-x} E_h(s)\|_h^2 ds \\ &+ \frac{1}{\rho c} \int_0^t e^{\int_s^t g_h(\mu) d\mu} \left((2h_c - \gamma) E_h(x_0, s)^2 + (2h_{ca} - \delta) E_h(x_N, s)^2 \right) ds \\ &\leq \|E_0(t)\|_h^2 e^{\int_0^t g_h(\mu) d\mu} + \frac{1}{\rho c} \int_0^t e^{\int_s^t g_h(\mu) d\mu} \left(\frac{1}{\gamma} T_L(x_0, s)^2 + \frac{1}{\delta} T_R(x_N, s)^2 + \|T_r(s)\|_h^2 \right) ds. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Prova. Do problema diferencial (3.25) vem

$$\rho c \left(\frac{dE_h}{dt}(t), E_h(t) \right)_h = \left(D_x(K(M_h T(t)) D_{-x} T(t)), E_h(t) \right)_h - \left(D_x(K(M_h T_h(t)) D_{-x} T_h(t)), E_h(t) \right)_h - (T_r(t), E_h(t))_h.$$

Pela Proposição 13 e considerando as condições de fronteira vem

$$\begin{aligned} \rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|E_h(t)\|_h^2 &= -E_h(x_0, t)(D_L T(x_0, t) - D_L T_h(x_0, t)) + E_h(x_N, t)(D_R T(x_N, t) - D_R T_h(x_N, t)) \\ &\quad - \left(K(M_h T(t)) D_{-x} T(t), D_{-x} E_h(t) \right)_{h,+} + \left(K(M_h T_h(t)) D_{-x} T_h(t), D_{-x} E_h(t) \right)_{h,+} - (T_r(t), E_h(t))_h \\ &= -h_c E_h(x_0, t)^2 - E_h(x_0, t) T_L(x_0, t) - h_{ca} E_h(x_N, t)^2 + E_h(x_N, t) T_R(x_N, t) \\ &\quad - \left(K(M_h T(t)) D_{-x} T(t) - K(M_h T_h(t)) D_{-x} T_h(t), D_{-x} E_h(t) \right)_{h,+} - (T_r(t), E_h(t))_h. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$K(M_h T(t)) D_{-x} T(t) - K(M_h T_h(t)) D_{-x} T_h(t) = D_{-x} T(t) \left(K(M_h T(t)) - K(M_h T_h(t)) \right) + K(M_h T_h(t)) D_{-x} E_h(t),$$

então

$$\begin{aligned} \rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|E_h(t)\|_h^2 &= -h_c E_h(x_0, t)^2 - h_{ca} E_h(x_N, t)^2 - E_h(x_0, t) T_L(x_0, t) + E_h(x_N, t) T_R(x_N, t) - (T_r(t), E_h(t))_h \\ &\quad - \left(D_{-x} T(t) \left(K(M_h T(t)) - K(M_h T_h(t)) \right), D_{-x} E_h(t) \right)_{h,+} - \left(K(M_h T_h(t)) D_{-x} E_h(t), D_{-x} E_h(t) \right)_{h,+}. \end{aligned}$$

Suponhamos que K é uma função com primeira derivada limitada, $|K'(y)| \leq \beta, y \in \mathbb{R}$. Então vem sucessivamente

$$\begin{aligned} \left(D_{-x} T(t) \left(K(M_h T(t)) - K(M_h T_h(t)) \right), D_{-x} E_h(t) \right)_{h,+} &\leq \|D_{-x} T(t)\|_\infty \|K'\|_\infty \|M_h E_h(t)\|_h \|D_{-x} E_h(t)\|_h \\ &\leq \beta \|M_h E_h(t)\|_h \|D_{-x} T(t)\|_\infty \|D_{-x} E_h(t)\|_h \\ &\leq \beta \|E_h(t)\|_h \|D_{-x} T(t)\|_\infty \|D_{-x} E_h(t)\|_h, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \left| \left(D_{-x} T(t) \left(K(M_h T(t)) - K(M_h T_h(t)) \right), D_{-x} E_h(t) \right)_{h,+} \right| &\leq \beta \|E_h(t)\|_h \|D_{-x} T(t)\|_\infty \|D_{-x} E_h(t)\|_h \\ &\leq \frac{1}{4\varepsilon} \beta^2 \|D_{-x} T(t)\|_\infty^2 \|E_h(t)\|_h^2 + \varepsilon \|D_{-x} E_h(t)\|_h^2, \end{aligned}$$

em que $\varepsilon > 0$. Considerando agora que também se tem $K(y) \geq \alpha_0 > 0, y \in \mathbb{R}$. Assim obtemos

$$-(K(M_h T_h(t)) D_{-x} E_h(t), D_{-x} E_h(t))_{h,+} \leq -\alpha_0 \|D_{-x} E_h(t)\|_h^2.$$

Conjugando as desigualdades obtidas, concluímos

$$\begin{aligned} \rho c \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|E_h(t)\|_h^2 &\leq \frac{1}{4\varepsilon} \beta^2 \|D_{-x} T(t)\|_\infty^2 \|E_h(t)\|_h^2 + \varepsilon \|D_{-x} E_h(t)\|_h^2 - \alpha_0 \|D_{-x} E_h(t)\|_h^2 \\ &\quad - h_c E_h(x_0, t)^2 - h_{ca} E_h(x_N, t)^2 - E_h(x_0, t) T_L(x_0, t) + E_h(x_N, t) T_R(x_N, t) - (T_r(t), E_h(t))_h. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz vem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|E_h(t)\|_h^2 &\leq \frac{1}{2\rho c \varepsilon} \beta^2 \|D_{-x}T(t)\|_\infty^2 \|E_h(t)\|_h^2 + \frac{2\varepsilon}{\rho c} \|D_{-x}E_h(t)\|_h^2 \\ &\quad - \frac{2\alpha_0}{\rho c} \|D_{-x}E_h(t)\|_h^2 - \frac{2h_c}{\rho c} E_h(x_0, t)^2 - \frac{2h_{ca}}{\rho c} E_h(x_N, t)^2 + \frac{\gamma}{\rho c} E_h(x_0, t)^2 \\ &\quad + \frac{1}{\rho c \gamma} T_L(x_0, t)^2 + \frac{\delta}{\rho c} E_h(x_N, t)^2 + \frac{1}{\rho c \delta} T_R(x_N, t)^2 + \frac{1}{\rho c} \|T_r(t)\|_h^2 + \frac{1}{\rho c} \|E_h(t)\|_h^2, \end{aligned} \quad (3.27)$$

para $\delta, \gamma > 0$. A desigualdade (3.27) admite a forma equivalente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|E_h(t)\|_h^2 - g_h(t) \|E_h(t)\|_h^2 &\leq \frac{2}{\rho c} (\varepsilon - \alpha_0) \|D_{-x}E_h(t)\|_h^2 - \frac{1}{\rho c} E_h(x_0, t)^2 (2h_c - \gamma) \\ &\quad - \frac{1}{\rho c} E_h(x_N, t)^2 (2h_{ca} - \delta) + \frac{1}{\rho c} \left(\frac{1}{\gamma} T_L(x_0, t)^2 + \frac{1}{\delta} T_R(x_N, t)^2 + \|T_r(t)\|_h^2 \right), \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|E_h(t)\|_h^2 e^{-\int_0^t g_h(s) ds} \right) &\leq \frac{2}{\rho c} (\varepsilon - \alpha_0) e^{-\int_0^t g_h(s) ds} \|D_{-x}E_h(t)\|_h^2 \\ &\quad - \frac{1}{\rho c} e^{-\int_0^t g_h(s) ds} E_h(x_0, t)^2 (2h_c - \gamma) - \frac{1}{\rho c} e^{-\int_0^t g_h(s) ds} E_h(x_N, t)^2 (2h_{ca} - \delta) \\ &\quad + \frac{1}{\rho c} e^{-\int_0^t g_h(s) ds} \left(\frac{1}{\gamma} T_L(x_0, t)^2 + \frac{1}{\delta} T_R(x_N, t)^2 + \|T_r(t)\|_h^2 \right). \end{aligned}$$

E deste modo concluímos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|E_h(t)\|_h^2 e^{-\int_0^t g_h(s) ds} + \frac{2}{\rho c} (\alpha_0 - \varepsilon) \int_0^t e^{-\int_0^s g_h(\mu) d\mu} \|D_{-x}E_h(s)\|_h^2 ds \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho c} \int_0^t e^{-\int_0^s g_h(\mu) d\mu} \left(2h_c E_h(x_0, s)^2 - \gamma E_h(x_0, s)^2 + 2h_{ca} E_h(x_N, s)^2 - \delta E_h(x_N, s)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\gamma} T_L(x_0, s)^2 - \frac{1}{\delta} T_R(x_N, s)^2 - \|T_r(s)\|_h^2 \right) ds \right) \leq 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

para $t \in (0, \mathcal{T}]$. Da desigualdade anterior vem que

$$\begin{aligned} \|E_h(t)\|_h^2 e^{-\int_0^t g_h(s) ds} + \frac{2}{\rho c} (\alpha_0 - \varepsilon) \int_0^t e^{-\int_0^s g_h(\mu) d\mu} \|D_{-x}E_h(s)\|_h^2 ds \\ + \frac{1}{\rho c} \int_0^t e^{-\int_0^s g_h(\mu) d\mu} \left(2h_c E_h(x_0, s)^2 - \gamma E_h(x_0, s)^2 + 2h_{ca} E_h(x_N, s)^2 - \delta E_h(x_N, s)^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{\gamma} T_L(x_0, s)^2 - \frac{1}{\delta} T_R(x_N, s)^2 - \|T_r(s)\|_h^2 \right) ds \end{aligned}$$

é uma função decrescente em $[0, \mathcal{T}]$ e portanto concluímos (3.26). ■

Conjugando a estimativa (3.26) com as representações dos diferentes erros de truncatura, estabelecemos o seguinte resultado de convergência para o problema não linear:

Corolário 3.3.1. *Se $T(t) \in C^4([x_{-1}, x_{N+1}])$, K é suficientemente regular e $E_h(0) = 0$. Supondo ainda que $\varepsilon, \gamma, \delta$ são tais que $\varepsilon > 0$, $2h_c - \gamma \geq 0$ e $2h_{ca} - \delta \geq 0$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|E_h(t)\|_h^2 + \int_0^t \|D_{-x}E_h(s)\|_h^2 ds \leq Ch^4 \max_{t \in [0, \mathcal{T}]} \|T(t)\|_{C^4([x_{-1}, x_{N+1}])}^2, \quad t \in [0, \mathcal{T}]. \quad (3.29)$$

Prova. A desigualdade (3.29) decorre de imediato de (3.26) visto que $2h_c - \gamma \geq 0$, $2h_{ca} - \delta \geq 0$, $\alpha_0 - \varepsilon > 0$ e

$$e \int_s^t g_h(\mu) d\mu \geq 1, s, t \in [0, \mathcal{T}],$$

e ainda tendo atenção que

$$\|T_r(t)\|_h^2 \leq Ch^4, T_L(x_0, t)^2 \leq Ch^4, T_R(x_N, t)^2 \leq Ch^4, \quad t \in [0, \mathcal{T}].$$

■

Para concluir a estabilidade do problema (3.18) é necessário provar que $\|D_{-x}T_h(t)\|_\infty^2$ é uniformemente limitada. Tal prova vai ser apresentada utilizando o resultado de convergência.

Começemos por notar que, para $T_h(t)$ solução do problema semi-discreto (3.16) e $T(t)$ solução do problema contínuo (1.2), temos

$$\|T_h(t)\|_\infty \leq \|E_h(t)\|_\infty + \|T(t)\|_\infty. \quad (3.30)$$

Nota-se ainda que, para $i = 0, 1, \dots, N$, temos

$$|E_h(x_i)|^2 \leq \frac{1}{h} \left(\frac{h}{2} |E_h(x_0)|^2 + \sum_{j=1}^{N-1} h |E_h(x_j)|^2 + \frac{h}{2} |E_h(x_N)|^2 \right),$$

e portanto

$$\|E_h(t)\|_\infty^2 \leq \frac{2}{h} \|E_h(t)\|_h^2. \quad (3.31)$$

Logo, de (3.30) e (3.31) vem

$$\|T_h(t)\|_\infty \leq \frac{2}{h} \|E_h(t)\|_h^2 + \|T(t)\|_\infty. \quad (3.32)$$

Pelo Corolário 3.3.1 temos que, para $g_h(t) = \frac{1}{2\rho c\varepsilon}\beta^2\|D_{-x}T(t)\|_\infty^2 + \frac{1}{\rho c}$, existe uma constante positiva C tal que

$$\|E_h(t)\|_h^2 + \int_0^t e^{\int_s^t g_h(\mu)d\mu} \|D_{-x}E_h(s)\|_h^2 ds \leq Ch^4, t \in [0, \mathcal{T}],$$

e deste modo vem

$$\|E_h(t)\|_h^2 \leq Ch^4. \quad (3.33)$$

Conjugando (3.32) com (3.33) obtemos

$$\|T_h(t)\|_\infty^2 \leq 2\left(\frac{2}{h}Ch^4 + \|T(t)\|_\infty^2\right),$$

isto é, $\|T_h(t)\|_\infty^2 \leq Ch^3 + 2\|T(t)\|_\infty^2$. E portanto

$$\|T_h(t)\|_\infty^2 \leq C, t \in [0, \mathcal{T}], \quad (3.34)$$

em que C denota uma constante independente de h e t .

Provemos agora que $\int_0^t \|D_{-x}T_h(s)\|_\infty^2 ds$ é uniformemente limitada. Atendendo a que se tem

$$D_{-x}T_h(t) = D_{-x}E_h(t) + D_{-x}T(t),$$

deduzimos $\max |D_{-x}T_h(t)| \leq \max |D_{-x}E_h(t)| + \max |D_{-x}T(t)|$. E portanto

$$\|D_{-x}T_h(t)\|_\infty \leq \|D_{-x}E_h(t)\|_\infty + \|D_{-x}T(t)\|_\infty. \quad (3.35)$$

Uma vez que se tem $|D_{-x}E_h(x_i)|^2 \leq \frac{1}{h} \sum_{j=1}^N h(D_{-x}E_h(x_j))^2$, estabelecemos

$$\|D_{-x}E_h(t)\|_\infty^2 \leq \frac{1}{h} \|D_{-x}E_h(t)\|_h^2. \quad (3.36)$$

De (3.35) e (3.36) vem finalmente

$$\|D_{-x}T_h(t)\|_\infty^2 \leq \frac{2}{h} \|D_{-x}E_h(t)\|_h^2 + 2\|D_{-x}T(t)\|_\infty^2, t \in [0, \mathcal{T}],$$

e portanto

$$\int_0^t \|D_{-x}T_h(s)\|_\infty^2 ds \leq \frac{2}{h} \int_0^t \|D_{-x}E_h(s)\|_h^2 ds + 2 \int_0^t \|D_{-x}T(s)\|_\infty^2 ds, t \in [0, \mathcal{T}]. \quad (3.37)$$

O Corolário 3.3.1 garante a existência de uma constante positiva C independente de h e t tal que

$$\|E_h(t)\|_h^2 + \int_0^t e^{\int_s^t g_h(\mu) d\mu} \|D_{-x}E_h(s)\|_h^2 ds \leq Ch^4, t \in [0, \mathcal{T}],$$

e portanto $\int_0^t \|D_{-x}E_h(s)\|_h^2 ds \leq Ch^4$. E de (3.37) vem

$$\int_0^t \|D_{-x}T_h(s)\|_\infty^2 ds \leq Ch^3 + 2 \int_0^t \|D_{-x}T(s)\|_\infty^2 ds,$$

ou seja

$$\int_0^t \|D_{-x}T_h(s)\|_\infty^2 ds \leq C, \quad (3.38)$$

em que C denota uma constante positiva independente de h e t . A desigualdade (3.38) é consequência do facto

$$\int_0^t \|D_{-x}T(s)\|_\infty^2 ds \leq \int_0^t \|T(s)\|_{C^4}^2 ds, t \in [0, \mathcal{T}].$$

O resultado seguinte é um corolário das Proposições 15 e 17.

Corolário 3.3.2. *Nas hipóteses das Proposições 15 e 17 tem-se*

$$\|w_h(t)\|_h^2 + \int_0^t \|D_{-x}w_h(s)\|_h^2 ds \leq C\|w_h(0)\|_h^2, t \in [0, \mathcal{T}]. \quad (3.39)$$

3.4 Modelo completamente discreto

3.4.1 Introdução

Nesta secção pretendemos introduzir um método completamente discreto no sentido em que tanto a variável espaço como a variável temporal são definidas em conjuntos discretos. Uma vez que na secção anterior estudamos a aproximação semi-discreta definida por (3.16), o método que consideramos é obtido integrando este sistema diferencial com o método de Euler implícito mas mantendo o coeficiente de condutividade explícito. Deste modo, o cálculo da solução numérica é feita resolvendo, em cada nível temporal, um sistema linear. Para o método introduzido estudamos a estabilidade e notamos que tal propriedade requer que a solução numérica seja limitada. O estudo completo desta propriedade poderá ser concluído a partir da análise da convergência. Esta última propriedade não é objeto de estudo no presente trabalho. Concluimos esta secção apresentando alguns resultados numéricos.

3.4.2 Integração Espaço-Tempo

Considerando em $[0, \mathcal{T}]$ a partição temporal $\{t_m, m = 0, 1, \dots, M\}$ em que $t_m = m\Delta t$ e $\Delta t = \mathcal{T}/M$. Integrando o sistema diferencial (3.16) com o sistema de Euler implícito, obtemos

$$\begin{cases} \rho c \frac{T_h^{n+1}(x_i) - T_h^n(x_i)}{\Delta t} = D_x \left(K(M_h T_h^n(x_i)) D_{-x} T_h^{n+1}(x_i) \right), i = 0, 1, \dots, N \text{ e } n = 0, \dots, M-1, \\ D_L T_h^j(x_0) = h_c(T_h^j(x_0) - T_{amb}), j = 1, \dots, M, \\ -D_R T_h^j(x_N) = h_{ca}(T_h^j(x_N) - T_{ca}), j = 1, \dots, M, \\ T_h^0(x_i) = \phi_h(x_i), i = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (3.40)$$

em que $T(x_i, t_n) \simeq T_h^n(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$. O sistema (3.40) admite a representação matricial equivalente

$$\begin{cases} \left[I - \frac{\Delta t}{\rho c h^2} \mathbf{A} \right] T_h^{n+1} = T_h^n + \frac{2\Delta t}{\rho c h} \mathbf{B}, \quad n = 0, 1, \dots, M-1, \\ T_h^0(x_i) = \phi(x_i), i = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (3.41)$$

em que a matriz \mathbf{A} , de ordem $N+1$, é definida por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2K_1^n - 2hh_c & 2K_1^n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ K_1^n & -K_2^n - K_1^n & K_2^n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{N-1}^n & -K_N^n - K_{N-1}^n & K_N^n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2K_N^n & -2K_N^n - 2hh_{ca} \end{bmatrix}$$

em que $K_i^n = K(M_h T_h^n(x_i))$, e \mathbf{B} é o vetor de dimensão $N+1$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} h_c T_{amb} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_{ca} T_{ca} \end{bmatrix}.$$

Tem-se ainda

$$\left| \left(D_{-x} T_h^{n+1} \left(K(M_h T_h^n) - K(M_h \tilde{T}_h^n) \right), D_{-x} w_h^{n+1} \right)_{h,+} \right| \leq \frac{1}{4\varepsilon} \beta^2 \|D_{-x} T_h^{n+1}\|_\infty^2 \|w_h^n\|_h^2 + \varepsilon \|D_{-x} w_h^{n+1}\|_h^2,$$

em que $\varepsilon > 0$. Considerando agora que também se tem $K(y) \geq \alpha_0 > 0, y \in \mathbb{R}$, obtemos

$$-(K(M_h \tilde{T}_h^n) D_{-x} w_h^{n+1}, D_{-x} w_h^{n+1})_{h,+} \leq -\alpha_0 \|D_{-x} w_h^{n+1}\|_h^2.$$

Conjugando as desigualdades obtidas, concluímos

$$\begin{aligned} \frac{\rho c}{\Delta t} \|w_h^{n+1}\|_h^2 &\leq \frac{\rho c}{\Delta t} (w_h^n, w_h^{n+1})_h + \frac{1}{4\varepsilon} \beta^2 \|D_{-x} T_h^{n+1}\|_\infty^2 \|w_h^n\|_h^2 + \varepsilon \|D_{-x} w_h^{n+1}\|_h^2 \\ &\quad - \alpha_0 \|D_{-x} w_h^{n+1}\|_h^2 - h_c (w_h^{n+1}(x_0))^2 - h_{ca} (w_h^{n+1}(x_N))^2 \\ &\leq \frac{1}{4\varepsilon} \beta^2 \|D_{-x} T_h^{n+1}\|_\infty^2 \|w_h^n\|_h^2 + \varepsilon \|D_{-x} w_h^{n+1}\|_h^2 - \alpha_0 \|D_{-x} w_h^{n+1}\|_h^2. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos ainda

$$\rho c \|w_h^{n+1}\|_h^2 \leq \frac{\rho c}{2} \|w_h^n\|_h^2 + \frac{\rho c}{2} \|w_h^{n+1}\|_h^2 + \frac{\Delta t}{4\varepsilon} \beta^2 \|D_{-x} T_h^{n+1}\|_\infty^2 \|w_h^n\|_h^2 + \Delta t (\varepsilon - \alpha_0) \|D_{-x} w_h^{n+1}\|_h^2,$$

ou seja

$$\|w_h^{n+1}\|_h^2 + 2 \frac{\Delta t}{\rho c} (\alpha_0 - \varepsilon) \|D_{-x} w_h^{n+1}\|_h^2 \leq \|w_h^n\|_h^2 \left(1 + \frac{\Delta t}{2\rho c \varepsilon} \beta^2 \|D_{-x} T_h^{n+1}\|_\infty^2 \right).$$

Assumindo que $\alpha_0 \geq \varepsilon$ vem

$$\|w_h^{n+1}\|_h^2 \leq \|w_h^n\|_h^2 \left(1 + \frac{\Delta t}{2\rho c \varepsilon} \beta^2 \|D_{-x} T_h^{n+1}\|_\infty^2 \right), n = 0, 1, \dots, M-1. \quad (3.43)$$

De (3.43), vem facilmente sucessivamente

$$\begin{aligned} \|w_h^n\|_h^2 &\leq \|w_h^0\|_h^2 \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{\Delta t}{2\rho c \varepsilon} \beta^2 \|D_{-x} T_h^j\|_\infty^2 \right) \\ &\leq \|w_h^0\|_h^2 \left(\max_{j=1, \dots, n} \left(1 + \frac{\Delta t}{2\rho c \varepsilon} \beta^2 \|D_{-x} T_h^j\|_\infty^2 \right) \right)^n \\ &\leq \|w_h^0\|_h^2 \left(1 + \frac{\Delta t}{2\rho c \varepsilon} \beta^2 \max_{j=1, \dots, n} \|D_{-x} T_h^j\|_\infty^2 \right)^n \\ &\leq \|w_h^0\|_h^2 e^{\left(\frac{n\Delta t}{2\rho c \varepsilon} \beta^2 \max_{j=1, \dots, n} \|D_{-x} T_h^j\|_\infty^2 \right)}, n = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Provamos o resultado seguinte

Proposição 18. *Sejam T_h^n e \tilde{T}_h^n soluções do do problema (3.40) com condições iniciais ϕ_h e $\tilde{\phi}_h$, respectivamente, e seja $w_h^n = T_h^n - \tilde{T}_h^n$. Então, para $\alpha_0 \geq \varepsilon$,*

$$\|w_h^n\|_h^2 \leq \|w_h^0\|_h^2 e^{\left(\frac{n\Delta t}{2\rho c \varepsilon} \beta^2 \max_{j=1, \dots, n} \|D_{-x} T_h^j\|_\infty^2 \right)}, n = 1, \dots, M. \quad (3.44)$$



Para concluir a estabilidade do problema (3.42) em torno de T_h^n temos que garantir que $\|D_{-x}T_h^j\|_\infty^2$ é limitada para qualquer $h, \Delta t$. Prosseguindo como foi feito para o caso semi-discreto, para $n = 1, \dots, M$,

$$\|D_{-x}T_h^n\|_\infty \leq \|D_{-x}E_h^n\|_\infty + \|D_{-x}T(t_n)\|_\infty,$$

e $\|D_{-x}E_h^n\|_\infty^2 \leq \frac{1}{h}\|D_{-x}E_h^n\|_h^2$. Logo,

$$\|D_{-x}T_h^n\|_\infty^2 \leq 2(\|D_{-x}E_h^n\|_\infty^2 + \|D_{-x}T(t_n)\|_\infty^2),$$

e portanto

$$\|D_{-x}T_h^n\|_\infty^2 \leq 2\left(\frac{1}{h}\|D_{-x}E_h^n\|_h^2 + \|D_{-x}T(t_n)\|_\infty^2\right). \quad (3.45)$$

De (3.44) concluir que a estabilidade em T_h^n refere que se tenha

$$\|D_{-x}T_h^n\|_\infty^2 \leq C, n = 1, \dots, M. \quad (3.46)$$

Por outro lado, de (3.45) vem que se $\|D_{-x}E_h^n\|_h^2 \leq Ch^4$ então vale (3.46) desde que $T(t) \in C^4([0, a])$. A convergência não será objeto de estudo do presente trabalho.

3.4.4 Simulação numérica

Nesta secção pretendemos ilustrar o comportamento da solução do problema (3.40) em diferentes cenários. Para o efeito consideramos os parâmetros apresentados em [5], [7] e [2], no contexto da transferência de calor na córnea.

Exemplo 1 Consideremos que a temperatura interior inicial de um corpo é nula com o coeficiente de condutividade térmica $K(T(x, t)) = \varepsilon T(x, t)$, com $\varepsilon = 10^{-4}$ e os demais parâmetros considerados são os mesmos do caso linear e estão listados na Tabela 2.1.

Na Figura 3.1a apresentamos a distribuição da temperatura para $t = 5 \text{ horas}$ e observamos que a temperatura interior aumenta das extremidades para o interior. Para $t = 5.000 \text{ horas}$ a solução apresenta o estado de equilíbrio como se pode ver na Figura 3.1b.

Exemplo 2 Neste cenário tomamos os parâmetros fixados no Exemplo 1 mas com uma distribuição inicial da temperatura que surge na Figura 3.2.

Na Figura 3.2a ilustramos o comportamento da temperatura para $t = 1 \text{ horas}$ e, neste caso, observamos um decréscimo da temperatura na extremidade direita e um aumento na extremidade esquerda. Na Figura 3.2b apresentamos a solução numérica para $t = 5 \text{ horas}$ que apresenta um comportamento constante.

Exemplo 3 Pretendemos agora ilustrar a influência do coeficiente ε no comportamento da temperatura. Consideramos os restantes parâmetros com os valores fixados no **Exemplo 2** e tomamos $\varepsilon = 10^{-6}$.

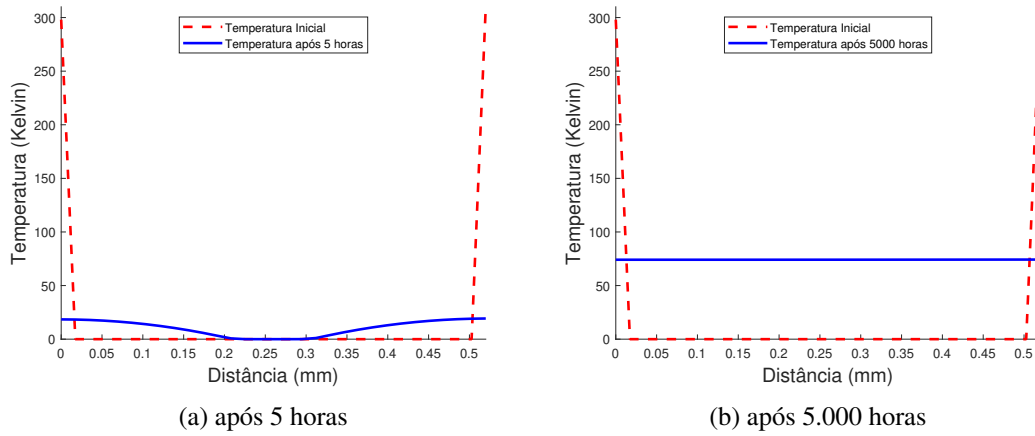


Fig. 3.1 Distribuição da Temperatura **Exemplo 1**

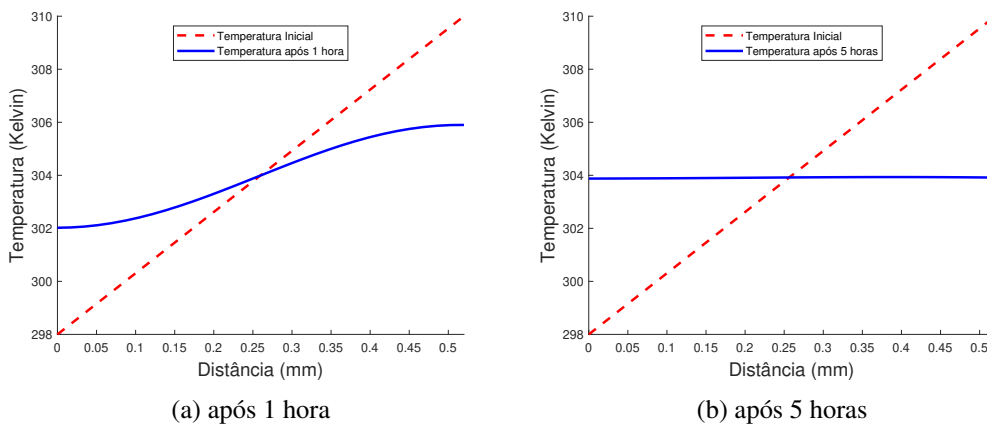


Fig. 3.2 Distribuição da Temperatura **Exemplo 2**

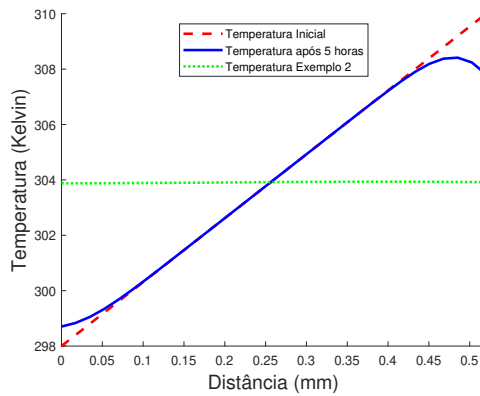


Fig. 3.3 Distribuição da temperatura **Exemplo 3**

Na Figura 3.3 apresentamos o gráfico da temperatura para $t = 5 \text{ horas}$ considerando a temperatura inicial do **Exemplo 2**. Observamos que ao diminuir o valor do parâmetro ε , a temperatura leva um tempo maior para ter um comportamento constante.

Bibliografia

- [1] Evans, L. and Society, A. M. (1998). *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society.
- [2] Han Chen, Feng Zhang, Y. H. J. W. (2015). Numerical investigation of topical drug transport in the anterior human eye. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 85(85):356–366.
- [3] J.A. Ferreira, P. Oliveira, E. S. (2020). Drug release enhanced by temperature: An accurate discrete model for solutions in h^3 . *Computers and Mathematics with Applications*, 79(3):852–875.
- [4] Jovanović, B. and Süli, E. (2013). *Analysis of Finite Difference Schemes: For Linear Partial Differential Equations with Generalized Solutions*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer London.
- [5] Mahathanthila, W. D. (2017). Modeling of drug delivery to the human eye. Master's thesis, California State Polytechnic University , Pomona.
- [6] Quarteroni, A., Sacco, R., and Saleri, F. (2000). *Numerical Mathematics*. Texts in applied mathematics. Springer.
- [7] Scott, J. A. (1988). A finite element model of heat transport in the human eye. *Physics in Medicine and Biology*, 33(2):227–241.
- [8] Thomas, J. (1995). *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag New York.