

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE  
ESTRUTURAS

**Estudo Numérico sobre o Comportamento  
de Vigas de Aço com Almas Esbeltas  
Enrijecidas Longitudinalmente**

José Osvaldo Ferreira Filho

Belo Horizonte

2019

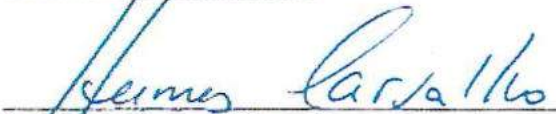
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

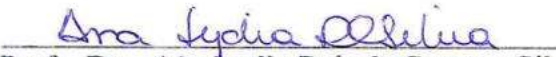
**"ESTUDO NUMÉRICO SOBRE O COMPORTAMENTO DE VIGAS  
DE AÇO COM ALMAS ESBELTAS ENRIJECIDAS  
LONGITUDINALMENTE"**

José Osvaldo Ferreira Filho


Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Hermes Carvalho  
DEES - UFMG (Orientador)

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Ana Lydia Reis de Castro e Silva  
DEES-UFMG (Coorientadora)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Rodrigo Barreto Caldas  
DEES - UFMG

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Maximiliano Malite  
USP

Belo Horizonte, 22 de outubro de 2019

F383e	<p>Ferreira Filho, José Osvaldo.  Estudo numérico sobre o comportamento de vigas de aço com almas esbeltas enrijecidas longitudinalmente [recurso eletrônico] / José Osvaldo Ferreira Filho. - 2019.  1 recurso online (120 f. : il., color.) : pdf.  Orientador: Hermes Carvalho.  Coorientadora: Ana Lydiá Reis de Castro e Silva.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.</p> <p>Apêndices: f.103-120.</p> <p>Bibliografia: f. 92-102.  Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.</p> <p>1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Aço - Estruturas - Teses. 3. Análise numérica - Teses. 4. Flambagem (Mecânica) - Teses. I. Carvalho, Hermes. II. Castro e Silva, Ana Lydiá Reis de. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 624(043)</p>
-------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

*Dedico este trabalho a quem sempre se dedicou a mim,  
preocupando-se com a minha vida, meus sonhos e meu futuro.  
Dedico ao meu querido e sempre presente pai Altamir Ferreira Lacerda,  
que apesar de não estar fisicamente entre nós,  
estará sempre em minhas melhores lembranças e em meu coração.*



## AGRADECIMENTOS

Acima de todas as circunstâncias, agradeço Àquele cujo o Apoio não falha, o Amor é eterno e a Amizade, a maior do mundo. Todos os dias, sinto a sua Presença, que é meu refrigerio. Independente das circunstâncias, “O Senhor é o meu pastor e nada me falta. Ele me faz repousar em pastos verdejantes. Leva-me para junto das águas de descanso... Ainda que eu ande pelo vale da sombra da morte, não preciso temer mal algum porque Deus está comigo”. Obrigado, meu Deus. Para Ti, toda Honra e Glória. Que a minha vida seja instrumento usado por Tuas Mãos, para levar Sua Luz e o Seu Amor àqueles que mais necessitam. Que o Seu Nome seja sempre exaltado, para todo o sempre. Eu te adoro. Amém.

Agradeço aos meus pais Altamir Ferreira Lacerda e Flávia Helena de Jesus Gonzaga Lopes Ferreira Lacerda.

“Zeca, qual é a população de Caçu, Ituiutaba, Uberaba, Uberlândia, Campo Mourão, Los Angeles, Nova Iorque, Capanema e Belo Horizonte?”, “Zeca, Bogotá é a capital de qual país?”, “Zeca, qual é a letra inicial da placa dos carros de cada estado?”, “Zeca, vou comprar um mapa do mundo pra você”. E, assim, fui incentivado a ser curioso, explorar, descobrir, ler, escrever e gostar de aprender. Tudo isso pelo melhor pai do mundo. Papai, você é a minha maior saudade. Todos os dias, o meu coração te pede de volta. Cada dia que passa, aqui dentro pede um pouco mais de gente no mundo como você. Todos os dias, o meu maior desejo é ser a metade do homem que você era. Fico muito feliz e grato a Deus por saber que tive essa oportunidade única de ser seu filho de vida, que você escolheu. Você está guardado para sempre em meu coração. Sempre te amarei. Eu te encontro no céu. Beijos do Zeca.

“Há de se cuidar do broto, pra que a vida nos dê flor e fruto”. Obrigado, mamãe, por ter sempre cuidado tão bem de mim. Mesmo em meio a tantas dificuldades, você nunca me deixou de lado e isso é incrível. Foram tantos acontecimentos tristes, né? Mas, mesmo assim, sempre tivemos um ao outro. Tenho certeza que Deus está nos olhando e auxiliará para que seja sempre assim. Eu prometo que farei todo o possível para sempre estar presente, mesmo quando distante. Muito obrigado por ter me ensinado sobre fé, sinceridade e amor. Muito obrigado por ter enfrentado tanto por mim. Eu tenho muito orgulho de ser filho da mulher mais forte que conheço. Sua força me inspira. Eu te amo muito.

Agradeço aos professores orientadores deste trabalho, Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Ana Lydia Reis de Castro e Silva e Prof. Dr. Hermes Carvalho, pelo empenho e comprometimento ao longo da jornada. O primeiro docente que tive contato na UFMG foi a Prof<sup>ª</sup>. Ana Lydia. Lembro direitinho de meu desespero à procura de um orientador no primeiro dia de aula. Com toda calma do mundo e respostas sempre apropriadas, a Ana me tranquilizou e ajudou a escolher minhas disciplinas para o primeiro semestre. Em toda caminhada, o apoio da Ana, tanto profissional como pessoal, foi essencial. Com ela tudo sempre fica mais fácil e tranquilo. Ana, sou muito feliz por ter uma orientadora e amiga tão especial como você. Você é sensacional. Mas não para por aí... Para completar, ainda tive o prazer de trabalhar com um professor tão incrível como o Prof. Hermes. Meu primeiro contato com ele foi na Mostra PROPEEs. Fiquei muito

admirado por ele ser tão novo e já tão experiente. O “cara” é capaz de orientar metade dos mestrandos, fazer pós-doutorado no exterior e ainda ser um profissional de excelência. Hermes, muito obrigado pela orientação e amizade. Com toda certeza, sempre serei muito grato por tantas oportunidades que você me concedeu. Você é muito querido por mim. Vocês dois são exemplos pra mim.

Agradeço aos demais professores, funcionários, colegas e amigos do DEES, principalmente, ao “*Steel Team*”, pela ajuda e convivência ao longo deste ano e meio. Em especial, agradeço aos mestrandos Bárbara e Ruan, pelo companheirismo ao longo dos trabalhos, e à Engenheira Me. Denise Aparecida Barbosa, por toda colaboração, todas as reuniões e conversas no telefone que sempre duravam mais do que esperávamos. Também agradeço ao Prof. Dr. Rodrigo Barreto Caldas, por todo aprendizado e considerações tão valiosas em todo meu mestrado, e ao Prof. Dr. Lucas Grilo, por ser o “*google estrutural*” do PROPEEs e sempre me socorrer nas horas mais difíceis da pesquisa.

Agradeço às universidades que me acolheram: Universidade Tecnológica Federal do Paraná - campus Campo Mourão, na qual tenho muito orgulho de ter realizado minha graduação; University of Southern California e Fordham Univeristy, nas quais me reconheci como um cidadão global e uma pessoa que pode fazer a diferença onde está, sendo quem é; Universidade Federal de Minas Gerais, na qual confirmei a certeza de seguir com a profissão mais importante para o futuro do país.

Agradeço às instituições de fomento à pesquisa de meu país, principalmente, ao CNPq, que apoiou financeiramente a elaboração deste trabalho, e também à CAPES e à FAPEMIG, pelo suporte ao ensino, pesquisa e extensão de minha universidade.

Agradeço a todos os meus amigos, em especial, à Alba, ao Bernardo, ao Daniel, à Danyella, à Isadora, à Jamila, à Jéssica, ao Jorge, ao Lucas, à Nathalia e ao Victor. A vida é muito mais feliz e divertida quando estamos juntos de quem queremos o bem e de quem nos quer bem também. Com certeza, tudo é muito mais fácil com vocês. “Há amigo mais chegado que um irmão”.

Agradeço também a gentileza e o cristianismo demonstrado por tantas pessoas que passaram em minha vida, principalmente, aos integrantes das Igrejas Presbiterianas de Ituiutaba, Uberaba, Campo Mourão e Belo Horizonte.

Por fim, agradeço a todos aqueles que não foram citados diretamente aqui, mas que de alguma forma contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional. É através do exemplo de quem ama, respeita e se importa com o próximo que conseguimos tornar o mundo melhor e mais bonito.

Com gratidão,

Zé

*“For **Christ**’s sake, I delight in weaknesses,  
in insults, in hardships, in persecutions, in difficulties.  
For when I am **weak**, then I am **strong**.”*

2ª Coríntios 12:10

## RESUMO

FERREIRA FILHO, J.O. **Estudo Numérico sobre o Comportamento de Vigas de Aço com Almas Esbeltas Enrijecidas Longitudinalmente**. 2019. 120 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2019.

A utilização de vigas esbeltas de aço é alternativa favorável ao dimensionamento estrutural de pontes e viadutos, uma vez que proporciona alta resistência e baixo consumo de material. Entretanto, a elevada esbeltez de seus elementos é responsável por ocasionar problemas de instabilidade estrutural. Como solução, enrijecedores longitudinais são aplicados ao longo de placas que constituem almas esbeltas de perfis metálicos, aumentando a resistência ao fenômeno de flambagem. Os procedimentos existentes para calcular a tensão crítica global e, assim, indicar o início da instabilidade estrutural de placas enrijecidas, em sua maioria, são práticos, porém conservadores e pouco gerais, assim como é o caso da norma europeia EN 1993-1-5:2006 e do programa computacional EBPlate. Sendo assim, o objetivo deste trabalho foi compreender o comportamento de flambagem elástica e a capacidade resistente última de placas enrijecidas que compõem a alma de vigas esbeltas de aço com seção transversal do tipo I, por meio de um modelo numérico confiável. Logo, a partir da análise de flambagem elástica, a tensão crítica global para placas com um, dois e três enrijecedores longitudinais submetidas à tensão normal, ao cisalhamento e à combinação entre tensões normais e cisalhantes foi investigada. Além disso, o coeficiente de redução e a contribuição da alma para a resistência ao cisalhamento foram determinados, a partir de uma análise numérica avançada que considera imperfeições iniciais. Na sequência, os procedimentos supracitados foram avaliados, verificando-se respostas inconsistentes e superestimadas. Quando os resultados normativos são confrontados aos numéricos, os desvios chegam a ser superiores a 40% e a presença do segundo enrijecedor chega a ser desprezada pela norma. Ao fim, este trabalho resultou em uma abordagem numérica capaz de contribuir com maior exatidão ao estudo do comportamento estrutural de placas enrijecidas longitudinalmente com diferentes geometrias e diversas configurações de enrijecedores.

Palavras-chave: Estruturas de aço. Vigas esbeltas. Almas enrijecidas. Análise de flambagem elástica. Análise avançada.

## ***ABSTRACT***

FERREIRA FILHO, J.O. **Numerical Study of Slender Steel Girders with Longitudinally Stiffened Web Panels**. 2019. 120 p. Dissertation (M.Sc. in Structural Engineering) – Department of Structural Engineering, School of Engineering, Federal University of Minas Gerais. Belo Horizonte, 2019.

The use of slender steel girders is a favorable alternative to optimize the design of bridges and viaducts because it provides high resistance coupled with low material consumption. However, special attention is needed to the buckling problems related to these structures. As a solution, stiffeners are commonly applied along plate girder web panels, increasing the resistance related to the buckling. There are several possibilities to compute the elastic critical stress of stiffened plates and determine the beginning of the structural instability. Despite the existence of practical methodologies, most part of them is inaccurate and limited, such as EN 1993-1-5:2006 code and EBPlate computer program. They are also responsible for oversizing and unnecessary expenses. Therefore, it was aimed to comprehend the critical and post-critical behavior of longitudinally stiffened web panels of slender steel I-girders. For this, a consistent numerical model was proposed, ensuring the reliability in correspondence to the real behavior of the structure. In this sense, a linear buckling analysis was performed to calculate the global critical stresses of plates stiffened by one, two or three longitudinal stiffeners and subjected to bending, shear and interaction of both. Furthermore, the reduction factor and the contribution from the web to the design shear resistance were measured by a geometrically and materially nonlinear analysis with initial imperfections (GMNIA). Then, the numerical model was confronted with the aforementioned approaches. In general, they set an inconsistent and overestimated analysis. The deviation surpassed 40% to the safe side. Moreover, the code even disregarded the presence of the second stiffener, leading to lower critical global stresses than in cases of plates stiffened by just one stiffener. At the end, this work resulted in a numerical approach capable to contribute for an in-depth study about the structural behavior of longitudinally stiffened plates, covering a large range of geometries with diverse stiffener configurations.

Keywords: Steel structures. Slender steel girders. Stiffened web panels. Linear Buckling Analysis. GMNIA.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1. Viaduto Itamar Franco (Boulevard Arrudas), Belo Horizonte - MG.....	17
Figura 1-2. Construção de pontes e viadutos em Belo Horizonte (MG) e Vila Velha (ES) a partir de vigas esbeltas de aço com seção transversal do tipo I reforçadas por enrijecedores transversais e longitudinais.....	18
Figura 1-3. Trajetórias de equilíbrio de uma placa sob condições ideais de elasticidade. ....	19
Figura 1-4. Representação numérica da flambagem local (a) e da flambagem global (b) .....	20
Figura 2-1. Flambagem elástica de uma placa submetida à compressão axial.....	32
Figura 2-2. Estado puro de tensões cisalhantes (comportamento pré-flambagem). ....	33
Figura 2-3. Ilustração dos comportamentos Tipo Placa e Tipo Pilar de placas submetidas à compressão.....	35
Figura 2-4. Alma reforçada por um enrijecedor na região comprimida .....	36
Figura 2-5. Alma reforçada por dois enrijecedores na região comprimida. ....	39
Figura 2-6. Ilustração das medidas de larguras efetivas adjacentes aos enrijecedores.....	40
Figura 2-7. Representação do comportamento último de placas esbeltas sob compressão. ....	45
Figura 2-8. Ilustração das ideias básicas introduzidas pelo MLE e MTR. ....	47
Figura 2-9. Representação de um painel uniforme. ....	49
Figura 2-10. Interpolação entre os comportamentos Tipo Placa e Tipo Pilar .....	51
Figura 2-11. Comportamentos pré-flambagem e pós-flambagem de placas submetidas ao cisalhamento. ....	52
Figura 2-12. Alma de uma viga de seção transversal do tipo I submetida ao cisalhamento ...	52
Figura 2-13. Modelo do Método do Campo de Tensão Rotacionado.....	53
Figura 2-14. Determinação do coeficiente de redução $\chi_w$ através de diagramas .....	56
Figura 2-15. Diagramas de tensão <i>versus</i> deformação para reprodução do comportamento do aço. ....	58
Figura 3-1. Geometria das placas e enrijecedores estudados.....	60
Figura 3-2. Representação da simulação das tensões solicitantes. ....	64
Figura 3-3. Representação das restrições de deslocamentos, $\delta$ , e rotações, $\phi$ . ....	65
Figura 3-4. Ilustrações do elemento S4R.....	66
Figura 3-5. Testes de malha em uma placa de espessura igual a 8,9 mm reforçada a partir de dois enrijecedores longitudinais.....	67
Figura 3-6. Geometria, carregamento e condições de contorno das placas enrijecidas de paredes de aço modeladas por Xu <i>et al.</i> (2018a) .....	68

Figura 4-1. Gráfico de tensões críticas de flambagem global de placas com um enrijecedor submetidas à flexão.....	75
Figura 4-2. Gráfico de tensões críticas de flambagem global de placas com um enrijecedor submetidas ao cisalhamento.....	75
Figura 4-3. Parcela de tensão crítica devido à flexão de placas submetidas à interação .....	78
Figura 4-4. Parcela de tensão crítica devido aos esforços cisalhantes de placas submetidas à interação .....	79
Figura 4-5. Comparação entre os valores de tensão crítica devido à tensão normal para placas com 1 e 2 enrijecedores utilizando os procedimentos normativos .....	80
Figura 4-6. Comparação entre os valores de tensão crítica devido à tensão cisalhante para placas com 1 e 2 enrijecedores utilizando os procedimentos normativos .....	81
Figura 4-7. Comparação entre os valores de tensão crítica devido à tensão normal para placas com 1, 2 e 3 enrijecedores a partir dos modelos numéricos .....	81
Figura 4-8. Comparação entre os valores de tensão crítica devido à tensão de cisalhamento para placas com 1, 2 e 3 enrijecedores a partir dos modelos numéricos .....	82
Figura 4-9. Flambagem global obtida como primeiro modo de flambagem através do modelo numérico (a) e do programa computacional EBPlate 2.01 (b).....	83
Figura 4-10. Tensões críticas de flambagem elástica devido à flexão para placas com razão de aspecto $\alpha = 1,43$ reforçadas por 2 enrijecedores .....	85
Figura 4-11. Coeficientes de redução $\rho$ avaliados a partir dos modelos numérico e analítico para placas reforçadas por um enrijecedor .....	87
Figura 4-12. Contribuição da alma à resistência à flambagem, $Vbw, Rd$ , a partir dos modelos numérico e analítico para placas reforçadas por um enrijecedor.....	89
Figura A-1. Gráfico de tensões críticas de flambagem global de placas com dois enrijecedores submetidas à flexão.....	103
Figura A-2. Gráfico de tensões críticas de flambagem global de placas com dois enrijecedores submetidas ao cisalhamento.....	104
Figura A-3. Parcela de tensão crítica devido à flexão de placas submetidas à interação .....	104
Figura A-4. Parcela de tensão crítica devido ao cisalhamento de placas submetidas à interação .....	105
Figura A-5. Coeficientes de redução $\rho$ avaliados a partir dos modelos numérico e analítico	105
Figura A-6. Contribuição da alma à resistência à flambagem, $Vbw, Rd$ , a partir dos modelos numérico e analítico.....	106
Figura B-1. Vista superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com um enrijecedor submetida à flexão .....	108

Figura B-2. Vista superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com um enrijecedor submetida ao cisalhamento .....	109
Figura B-3. Vista superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com um enrijecedor submetida à interação de tensões .....	110
Figura B-4. Vista superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com dois enrijecedores submetida à flexão .....	111
Figura B-5. Vista superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com dois enrijecedores submetida ao cisalhamento .....	112
Figura B-6. Vista superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com dois enrijecedores submetida à interação de esforços .....	113
Figura B-7. Vista superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com três enrijecedores submetida à flexão .....	114
Figura B-8. Vista superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com três enrijecedores submetida ao cisalhamento .....	115
Figura B-9. Vista superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com três enrijecedores submetida à interação de esforços .....	116
Figura B-10. Vista superior e vistas laterais do modo de falha da placa reforçada a partir de um enrijecedor submetida à flexão .....	117
Figura B-11. Vista superior e vistas laterais do modo de falha da placa reforçada a partir de dois enrijecedores submetida à flexão .....	118
Figura B-12. Vistas superiores e vista lateral do modo de falha da placa reforçada a partir de um enrijecedor submetida ao cisalhamento .....	119
Figura B-13. Vistas superiores e vista lateral do modo de falha da placa reforçada a partir de dois enrijecedores submetida ao cisalhamento .....	120



## LISTA DE TABELAS

Tabela 2-1. Determinação do coeficiente de redução $\chi_w$ através de formulações. Fonte: adaptado de EN 1993-1-5:2006 .....	56
Tabela 3-1. Comparação das respostas numéricas de tensão crítica, $\sigma_{cr}$ , com as da formulação clássica, $\sigma_{cl}$ , e do modelo numérico de Xu <i>et al.</i> (2018a), $\sigma_{cr, Xu}$ . .....	71
Tabela 3-2. Comparação das respostas numéricas do coeficiente de redução, $\rho_{num}$ , com as da formulação de Winter (1968), $\rho_{Winter}$ , e do modelo numérico de Xu <i>et al.</i> (2018a), $\rho_{Xu}$ . ..	72
Tabela 4-1. Espessura das placas e rigidezes relativa e ótima de enrijecedores.....	74
Tabela 4-2. Espessura das placas de 5000x3500 mm e rigidezes relativa e ótima dos enrijecedores .....	84
Tabela 4-3. Comparação entre os coeficientes de redução de placas com 1 e 2 enrijecedores. ....	88

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras romanas minúsculas

$a$	comprimento da placa enrijecida;
$a_c$	comprimento de flambagem da placa;
$b$	largura da placa enrijecida;
$b_1$	distância entre o enrijecedor longitudinal e a borda superior da placa;
$b_1^{II}$	posição do enrijecedor equivalente para placas com dois enrijecedores;
$b_2$	distância entre o enrijecedor longitudinal e a borda inferior da placa;
$b_c$	distância da borda mais comprimida da placa até a linha neutra;
$b_{c2}$	distância do enrijecedor longitudinal até a linha neutra;
$b_{eff}$	largura efetiva da placa;
$b_s$	largura do maior subpainel da placa;
$f_y$	resistência ao escoamento;
$f_{yw}$	resistência ao escoamento da alma;
$h_s$	altura do enrijecedor;
$h_w$	altura ou largura da alma;
$h_{wi}$	altura ou largura de um subpainel;
$k$	coeficiente de flambagem elástica;
$k_\sigma$	coeficiente de flambagem elástica devido à tensão normal da placa;
$k_\tau$	coeficiente de flambagem elástica devido à tensão de cisalhamento da placa;
$k_{\tau i}$	coeficiente de flambagem elástica devido à tensão de cisalhamento de um subpainel;
$k_{\tau sl}$	coeficiente de flambagem elástica devido à tensão de cisalhamento do pilar equivalente;
$m$	número de semi-ondas na direção longitudinal da placa;
$n$	número de semi-ondas na direção transversal da placa;
$t$	espessura da placa;
$t_s$	espessura do enrijecedor;
$t_w$	espessura da alma;

### Letras romanas maiúsculas

$A_{eff}$	área efetiva total da placa enrijecida;
$A_{sl,1}$	área bruta do pilar equivalente;
$E$	módulo de elasticidade do aço;
$I_p$	momento de inércia da placa desconsiderando a presença dos enrijecedores longitudinais;
$I_{sl}$	momento de inércia da placa enrijecida;
$I_{sl,1}$	momento de inércia da seção bruta do pilar equivalente;

$P_{ult}$	força por espessura unitária relacionada à capacidade resistente última;
$V_{b,Rd}$	valor de cálculo da capacidade resistente ao cisalhamento da viga;
$V_{bw,Rd}$	valor de cálculo da contribuição da alma na capacidade resistente ao cisalhamento da viga;
$V_{bw,Rk}$	valor característico da contribuição da alma na capacidade resistente ao cisalhamento da viga;

## Letras gregas minúsculas

$\alpha$	razão de aspecto;
$\gamma$	rigidez à flexão relativa do enrijecedor;
$\gamma^*$	rigidez à flexão ótima do enrijecedor;
$\gamma_{M1}$	fator parcial de segurança relacionado à instabilidade
$\delta$	área relativa do enrijecedor em relação à placa;
$\varepsilon$	fator de escoamento;
$\eta$	coeficiente relacionado à classe de resistência do aço;
$\bar{\lambda}_w$	coeficiente de esbeltez;
$\nu$	coeficiente de <i>Poisson</i> ;
$\xi$	coeficiente de suscetibilidade à flambagem relacionada ao Comportamento Tipo Placa ou ao Comportamento Tipo Pilar;
$\rho$	coeficiente de redução relacionado ao Comportamento Tipo Placa;
$\rho_c$	coeficiente de redução final;
$\rho_{loc}$	coeficiente de redução de um subpainel;
$\sigma$	tensão normal solicitante;
$\sigma_1$	tensão principal de tração;
$\sigma_2$	tensão principal de compressão;
$\sigma_{act}$	tensão solicitante;
$\sigma_{cl}$	tensão crítica de flambagem elástica obtida a partir da formulação clássica;
$\sigma_{cr}$	tensão crítica de flambagem elástica devido à tensão normal;
$\sigma_{cr,c}$	tensão crítica de flambagem elástica relacionada ao Comportamento Tipo Pilar;
$\sigma_{cr,p}$	tensão crítica de flambagem elástica relacionada ao Comportamento Tipo Placa ou tensão crítica global;
$\sigma_{cr,sl}$	tensão crítica de flambagem elástica do pilar equivalente;
$\sigma_E$	tensão de flambagem de Euler;
$\sigma_{lim}$	tensão relacionada à capacidade resistente última;
$\tau$	tensão de cisalhamento solicitante;
$\tau_{cr}$	tensão crítica de flambagem elástica devido à tensão de cisalhamento;
$\tau_u$	tensão relacionada à capacidade resistente última ao cisalhamento;
$\chi_c$	coeficiente de redução relacionado ao Comportamento Tipo Pilar;
$\chi_w$	coeficiente de redução relacionado à capacidade resistente à flambagem da alma devido à tensão de cisalhamento;
$\psi$	razão entre as tensões normais solicitantes;

## Letras gregas maiúsculas

$\phi_{cr}$  fator crítico de flambagem elástica

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

COMBRI	<i>Competitive Steel and Composite Bridges by Improved Steel Plated Structures</i>
CTICM	<i>Centre Technique Industriel de la Construction Métallique</i>
ELU	Estado Limite Último
GMNIA	<i>Geometrically and Materially Nonlinear Analysis with Initial Imperfections</i>
LPF	<i>Load Proportionality Factor</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
MLE	Método da Largura Efetiva
MTR	Método da Tensão Reduzida
RFCS	<i>European Research Fund for Coal and Steel</i>

# SUMÁRIO

1	Introdução .....	17
1.1	Considerações Gerais .....	17
1.2	Objetivos .....	23
1.3	Justificativa.....	23
1.4	Metodologia .....	24
2	Revisão Bibliográfica.....	26
2.1	Contextualização .....	26
2.2	Comportamento de flambagem elástica devido às tensões normais .....	31
2.3	Comportamento de flambagem elástica devido às tensões cisalhantes.....	33
2.4	Procedimentos para obtenção das tensões críticas de flambagem elástica .....	33
2.4.1	Norma europeia EN 1993-1-5:2006.....	34
2.4.2	Programa computacional EBPlate .....	41
2.4.3	Análise de flambagem elástica via MEF .....	42
2.5	Verificação da Capacidade Resistente Última .....	44
2.5.1	Métodos de verificação da resistência de placas submetidas aos esforços normais.....	45
2.5.2	Método do Campo de Tensões Rotacionado para a verificação da capacidade resistente aos esforços cortantes .....	51
2.5.3	Análise avançada .....	56
3	Modelo Numérico .....	59
3.1	Considerações Iniciais.....	59
3.2	Geometria .....	60
3.3	Material .....	61
3.4	Imperfeições .....	62
3.5	Carregamento e Condições de Contorno.....	63
3.6	Elementos Finitos e Discretização da Malha .....	65
3.7	Validação.....	68
4	Resultados e Discussão .....	73
4.1	Análise de Flambagem Elástica .....	73
4.2	Análise Avançada.....	86
5	Conclusão.....	90
	Referências.....	92
	Apêndice A .....	103
	Apêndice B.....	107

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações Gerais

A necessidade de um desenvolvimento sustentável e menos agressivo ao meio ambiente leva a uma mudança de paradigma no projeto estrutural. Atualmente, procura-se construir economicamente e com a menor interferência possível ao meio ambiente. Portanto, o conceito de estrutura ideal está relacionado àquela que não só assegura os menores custos, como também garante um consumo racional de material. Neste sentido, peças estruturais esbeltas ganham destaque, sendo soluções com grande potencial sustentável. A representatividade da utilização destes elementos é notória, sendo aplicados principalmente no dimensionamento de grandes construções (Figura 1-1).



Figura 1-1. Viaduto Itamar Franco (Boulevard Arrudas), Belo Horizonte - MG.  
Fonte: RMG Engenharia

Neste cenário, a aplicação de vigas esbeltas de aço é alternativa eficiente à construção de pontes e viadutos, sendo responsável por proporcionar alta resistência e baixo consumo de material. Em seu dimensionamento, é comum a utilização de placas na composição da alma e das mesas. Porém, fenômenos de instabilidade são recorrentes justamente por causa da elevada razão entre largura e espessura destes elementos. Para evitá-los, as placas podem ser reforçadas com enrijecedores transversais e longitudinais, o que assegura maior estabilidade e permite menores espessuras de alma (Figura 1-2).

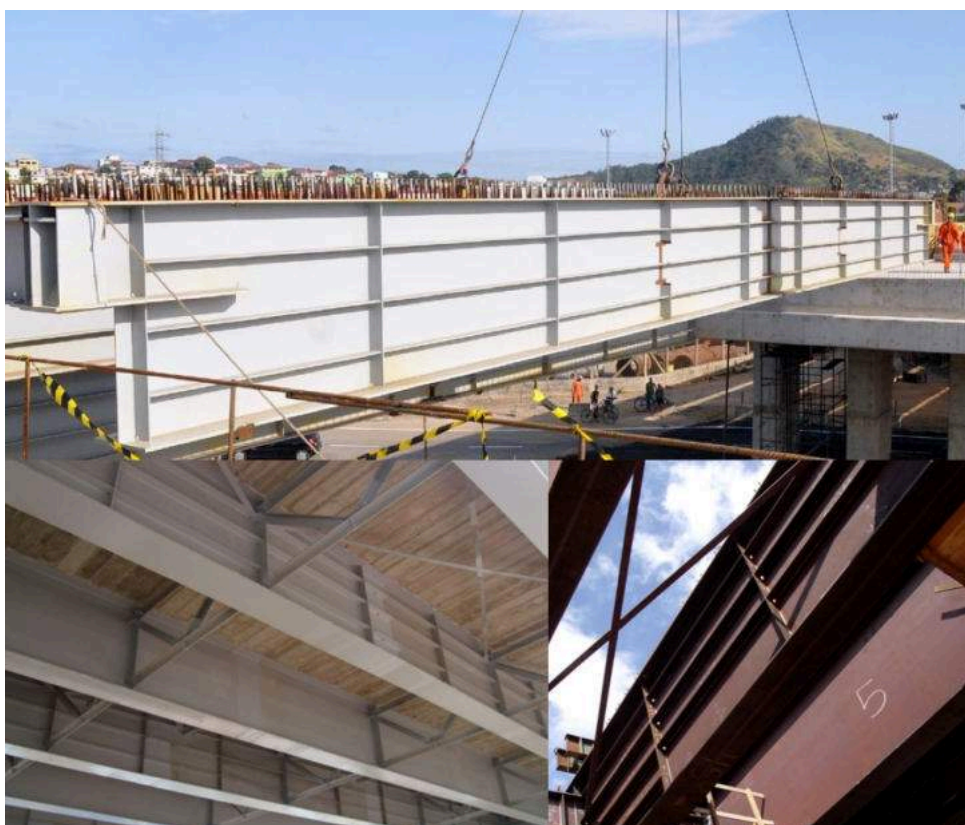


Figura 1-2. Construção de pontes e viadutos em Belo Horizonte (MG) e Vila Velha (ES) a partir de vigas esbeltas de aço com seção transversal do tipo I reforçadas por enrijecedores transversais e longitudinais. Fonte: RMG Engenharia

Galambos (1998) aborda que a instabilidade é quando uma estrutura sujeita à compressão perde a capacidade de resistir ao aumento de força e, portanto, há um decréscimo em sua capacidade resistente. Ou seja, a instabilidade estrutural está associada ao ponto máximo da curva força *versus* deslocamento. Neste contexto, Reis e Camotim (2000) explicam que os fenômenos de instabilidade se manifestam através de duas formas: ocorrência de uma bifurcação do equilíbrio e ocorrência de um ponto máximo de força sem bifurcação.



Quando uma placa “ideal” é submetida à compressão, por exemplo, encontra-se inicialmente em uma situação de equilíbrio estável, ou seja, as perturbações externas não são suficientes para provocarem deformações e retirarem-na de sua posição inicial (Figura 1-3). Contudo, a partir de certa magnitude de carregamento, a placa torna-se susceptível à deformação e uma nova configuração é estabelecida. À força responsável pela deformação dá-se o nome de força crítica de flambagem e à nova configuração, modo de flambagem. No momento em que a força crítica é atingida, origina-se uma ramificação do diagrama de tensão *versus* deformação, que é justamente resultado da bifurcação do equilíbrio. Este instante também corresponde a uma transição entre o equilíbrio estável e instável, sendo que duas curvas alternativas força *versus* deslocamento são possíveis.

Para placas esbeltas, a bifurcação geralmente ocorre no regime elástico, sendo assim, as tensões correspondentes são denominadas de tensões críticas de flambagem elástica,  $\sigma_{cr}$ . Logo, Ventsel e Krauthammer (2001) discorrem que o principal objetivo da análise de flambagem elástica de placas é a determinação da tensão crítica e dos modos de flambagem correspondentes.

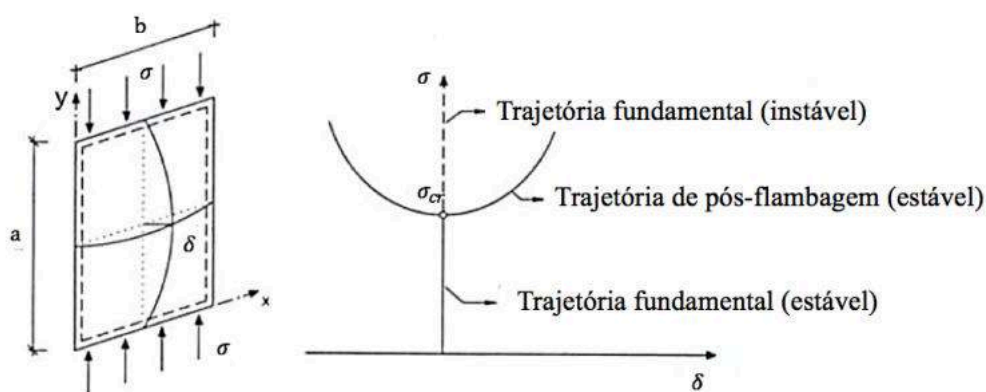
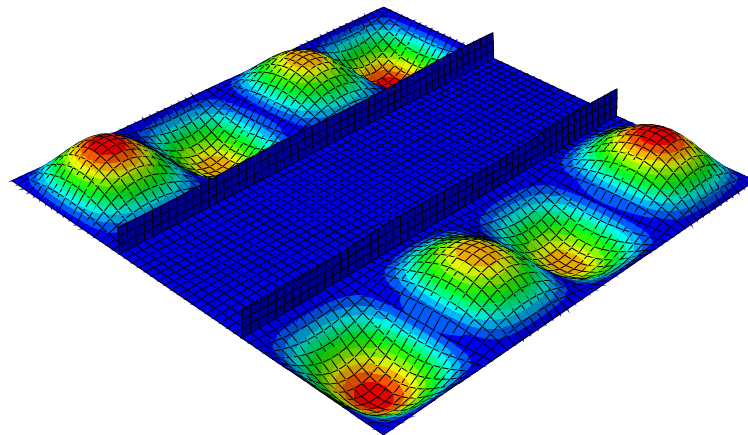


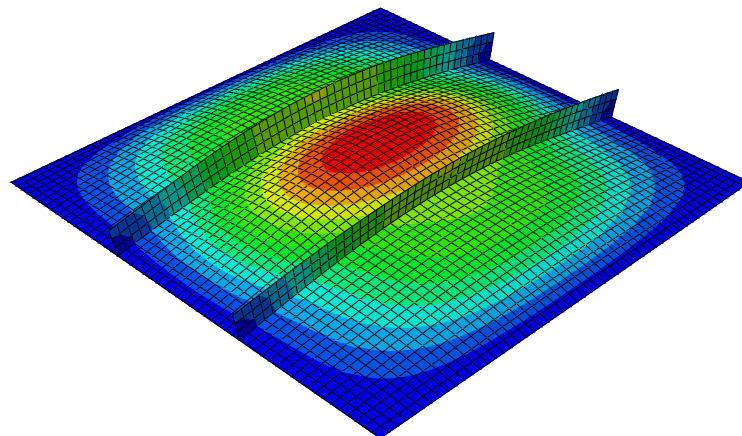
Figura 1-3. Trajetórias de equilíbrio de uma placa sob condições ideais de elasticidade. Fonte: Reis e Camotim (2000)

Em seções transversais constituídas por placas esbeltas enrijecidas, o colapso devido à instabilidade pode ocorrer a partir da flambagem local ou global. Na Figura 1-4.a, o fenômeno de flambagem local é representado. No caso em questão, ocorre flambagem apenas de dois dos três subpainéis que constituem a placa. Observa-se que os enrijecedores não deformam, sendo responsáveis por constituírem uma linha nodal sem instabilidade. Ao contrário, na Figura 1-4.b, ocorre a flambagem da placa como um todo, ou seja, painel e enrijecedores. Com isso, os enrijecedores não permanecem em sua posição indeformada. Entende-se por subpainel o

elemento de placa localizado entre bordas longitudinais e enrijecedores, ou entre dois enrijecedores, e por painel, o conjunto de todos os subpainéis.



(a)



(b)

Figura 1-4. Representação numérica da flambagem local (a) e da flambagem global (b)

A ocorrência da flambagem local ou global de placas esbeltas está relacionada à rigidez relativa e ótima dos enrijecedores que as constituem. O valor de rigidez à flexão relativa do enrijecedor em relação à placa,  $\gamma$ , é obtido a partir da razão entre o momento de inércia do eixo menos resistente do painel enrijecido,  $I_{sl}$ , e o momento de inércia do eixo menos resistente da placa isolada sem enrijecedores,  $I_p$ . O mínimo valor de  $\gamma$  responsável por garantir rigidez suficiente ao enrijecedor, a ponto de induzir que este permaneça reto e não flexione fora do plano junto à placa, é denominado rigidez ótima,  $\gamma^*$ . Sendo assim, o primeiro modo de flambagem correspondente aos casos nos quais o enrijecedor apresenta-se rígido, ou seja,  $\gamma \geq \gamma^*$ , é o modo de flambagem local (Figura 1-4.a). Já para situações nas quais o enrijecedor é considerado flexível, ou seja,  $\gamma < \gamma^*$ , a flambagem global governa e placa e enrijecedor se deslocam para

fora do plano (Figura 1-4.b). Os valores de  $\gamma$  e  $\gamma^*$  dependem das propriedades geométricas da placa e da área relativa do enrijecedor em relação à placa,  $\delta$ , sendo obtidos através de formulações desenvolvidas por Skaloud (1983).

A tendência à ocorrência de flambagem local ou global é também relacionada a fatores como: razão de aspecto (razão entre o comprimento e a largura da placa),  $\alpha$ ; razão entre as tensões normais solicitantes,  $\psi$ ; quantidade e posição dos enrijecedores. A flambagem local de placas esbeltas ocorre antes do escoamento, sendo assim, é de suma importância conhecer a resistência da placa ao fenômeno. Contudo, a flambagem global pode anteceder a flambagem local dependendo dos fatores supracitados, o que evidencia a importância de sua análise.

Segundo Silva e Gervásio (2007), a instabilidade de uma placa reforçada é frequentemente controlada pela flambagem global, que pode estar acompanhada ou não da flambagem local dos subpainéis. Em placas de maiores dimensões, por exemplo, quando  $\alpha \geq 1$ , há maior predisposição à flambagem global. Sendo assim, a verificação quanto à resistência ao fenômeno governa o dimensionamento.

Para que superdimensionamentos sejam evitados, atenção é necessária tanto aos valores de capacidade resistente última, como àqueles de tensões críticas globais. Apesar da resistência de placas esbeltas não se esgotar após a flambagem, a análise da flambagem elástica é necessária para a verificação dos esforços resistentes de cálculo, além de ser fundamental para indicar o início dos problemas de instabilidade.

O dimensionamento de vigas esbeltas está presente nas principais normas aplicáveis às estruturas metálicas, que apresentam modelos analíticos simples e práticos para a análise de flambagem elástica e definição dos esforços resistentes de cálculo. A norma brasileira ABNT NBR 8800:2008 disponibiliza o dimensionamento de vigas esbeltas, mas sem a consideração de enrijecedores longitudinais. A norma americana AASHTO LRFD (2012) estabelece um procedimento de cálculo de vigas esbeltas, porém, apenas com até duas nervuras longitudinais. A norma europeia EN 1993-1-5:2006, sendo mais abrangente que essas, contempla, inclusive, procedimentos para múltiplos enrijecedores longitudinais.

No dimensionamento de placas esbeltas, a norma europeia EN 1993-1-5:2006 se destaca, apresentando formulações para a determinação de tensões críticas de placas reforçadas por um ou dois enrijecedores na região comprimida e por três ou mais enrijecedores igualmente espaçados com  $\alpha \geq 0,5$  e  $\psi \geq 0,5$ . A norma também sugere como opção a utilização de

gráficos e tabelas, programas computacionais direcionados ao estudo de flambagem elástica e *software* baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF).

No cálculo dos esforços resistentes, a norma introduz dois métodos simplificados para placas submetidas a tensões normais e um método próprio para placas sob tensões cisalhantes. Dentre esses métodos, a tensão crítica global - denominada tensão crítica referente ao Comportamento Tipo Placa,  $\sigma_{cr,p}$  - é essencial para a obtenção do coeficiente de redução final,  $\rho_c$ . Sendo assim, está relacionada ao cálculo da capacidade resistente última advinda com a aplicação do Método da Largura Efetiva (MLE).

Apesar de ser prática, a norma demonstra uma tendência ao conservadorismo. Nem todos os fatores preponderantes ao dimensionamento são considerados, o que resulta em uma metodologia simples, frente a procedimentos mais elaborados, porém também menos precisa. Além disso, a norma não apresenta caráter geral, sendo aplicada apenas a placas nas quais a espessura é constante, não existem grandes aberturas e o reforço é realizado a partir de enrijecedores com quantidade e posição pré-definida.

A utilização de gráficos e tabelas, como os ábacos de Klöppel (Klöppel e Scheer, 1960; Klöppel e Möller, 1968) é outra alternativa simples e prática para a obtenção das tensões críticas globais, porém, muito limitada, sendo aplicável apenas a situações com valores específicos de razão de aspecto,  $\alpha$ , razão entre tensões solicitantes,  $\psi$ , rigidez relativa à flexão dos enrijecedores,  $\gamma$ , e área relativa dos enrijecedores,  $\delta$ . Geralmente, particulariza-se também a quantidade e posição dos reforços. De acordo com Galéa e Martin (2010), este procedimento é muito conservador, principalmente para placas reforçadas por enrijecedores rígidos. Em casos de enrijecedores flexíveis e placas ortotrópicas, os resultados demonstram maior exatidão.

Beg *et al.* (2010) ressalta o uso de programas computacionais especializados na análise do comportamento de flambagem e programas baseados em MEF como sendo os principais procedimentos para a análise de flambagem elástica de placas esbeltas. Os autores apontam o programa computacional EBPlate como ferramenta gratuita e eficiente, que proporciona não só a magnitude das tensões críticas, mas também o aspecto dos modos de flambagem associados a essas. Além disso, é uma abordagem mais geral que as anteriores porque possibilita a reprodução do comportamento de placas com diferentes dimensões, quantidade e posição de enrijecedores variadas e sujeitas à distribuição de tensão não especificada. O programa também viabiliza a consideração da interação dos esforços aos quais a placa está submetida.

Contudo, o EBPlate é restrito a geometrias pouco elaboradas, nas quais o comprimento, largura e espessura da placa são sempre constantes. Também apresenta uma metodologia semi-analítica à análise de flambagem elástica e não computa os esforços resistentes de cálculo. Para uma análise ainda mais geral e precisa, capaz de representar geometrias mais complexas e que também seja adequada à verificação da capacidade resistente última, os *software* baseados em MEF são recomendados, assegurando exatidão de resultados e reprodução do comportamento real das estruturas. Para tanto, uma modelagem numérica confiável deve ser desenvolvida.

## 1.2 Objetivo

Em vista do que foi apresentado, o objetivo deste trabalho foi compreender o comportamento de flambagem elástica e a capacidade resistente última de placas esbeltas enrijecidas longitudinalmente que compõem a alma de vigas de aço submetidas à flexão, ao cisalhamento e à interação de esforços.

## 1.3 Justificativa

A geometria dos elementos estruturais que constituem vigas esbeltas, como, por exemplo, a espessura da alma e a quantidade e posição de enrijecedores são fatores que interferem diretamente no peso estrutural. É importante que haja correta verificação da instabilidade estrutural e dos esforços resistentes para que o dimensionamento não seja superestimado e, conseqüentemente, custos desnecessários sejam evitados.

Normatizações podem auxiliar no dimensionamento de estruturas de aço porque expõem simplificações que tornam o processo prático e pouco laborioso, todavia geralmente demonstram caráter conservador. Analisando a norma europeia EN 1993-1-5:2006, Beg *et al.* (2010) concluem que o procedimento fornecido é muito conservador, especialmente quando enrijecedores são alocados nas proximidades da mesa comprimida ou da linha neutra. Portanto, superestima-se a geometria das placas, acarretando em gastos superiores aos necessários. Além disso, a norma é pouco geral e não abrange casos que fogem aos de estruturas usuais. Com isso, restringe-se a dimensões de placas e quantidade e posições de enrijecedores específicas. Sendo assim, inviabiliza a aplicação de diferentes seções, com geometrias mais elaboradas e características que fogem ao seu escopo.

Por conseguinte, observa-se a necessidade de uma metodologia que permita avaliar o comportamento de placas esbeltas, abarcando gama considerável de estruturas e resultando em respostas mais precisas quanto aos valores de tensões críticas de flambagem elástica e capacidade resistente última. Neste sentido, a análise via MEF apresenta-se como uma solução bem aceita no meio técnico, já que garante boa precisão de resultados e é capaz de representar grande variedade de estruturas. É uma ferramenta difundida e acessível, além de ser recomendada, inclusive, nas próprias normatizações.

## 1.4 Metodologia

Para alcançar os objetivos apresentados, as seguintes etapas foram cumpridas:

1) revisão bibliográfica sobre o dimensionamento de placas enrijecidas de vigas esbeltas de aço submetidas à flexão, ao cisalhamento e à interação entre ambos, compreendendo:

- (i) os modelos analíticos e as recomendações para análises via MEF fornecidos pela norma europeia EN 1993-1-5:2006;
- (ii) a análise semi-analítica do programa computacional EBPlate 2.01;
- (iii) as propriedades numéricas baseadas em MEF responsáveis pela análise de flambagem elástica e análise avançada no *software* ABAQUS 6.14;
- (iv) os avanços quanto ao estudo do comportamento pré-flambagem e pós-flambagem;

2) elaboração de planilhas de cálculo baseadas no modelo analítico da EN 1993-1-5:2006, por meio do programa *Mathcad 2001 Professional* e com o auxílio do trabalho de Barbosa (2016);

3) desenvolvimento de um modelo numérico consistente no *software* ABAQUS 6.14, de acordo com as recomendações do anexo C da EN 1993-1-5:2006;

4) estudo do comportamento de flambagem elástica através da determinação das tensões críticas globais e dos modos de flambagem por meio das planilhas elaboradas, do programa computacional EBPlate 2.01 e do modelo numérico em elementos finitos;

5) análise do comportamento pós-flambagem<sup>1</sup> através da obtenção do coeficiente de redução e dos valores de contribuição da alma à resistência ao cisalhamento por meio das planilhas desenvolvidas e das análises avançadas via MEF.

---

<sup>1</sup> Neste trabalho, o conceito de pós-flambagem também foi adotado para casos de placas com imperfeições.

# 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

## 2.1 Contextualização

A Teoria de Pilares proposta por Leonard Euler (1744) é o marco inicial do estudo de flambagem elástica. A partir da definição de uma equação capaz de determinar a força crítica elástica de barras perfeitamente retas e axialmente comprimidas, o matemático suíço conseguiu dar notoriedade à análise da estabilidade estrutural. Desde então, inúmeros trabalhos foram realizados com o objetivo de apresentar teorias detalhadas para a obtenção de forças críticas de flambagem elástica, buscando precisão na representação de estruturas sujeitas a diferentes condições de contorno e carregamento.

Quanto à análise de flambagem elástica de placas, Bryan (1891) foi o primeiro a solucionar a equação diferencial de placa proposta por Saint-Venant (1883). Utilizando o Método da Energia, analisou o comportamento de placas planas de navios, definindo a expressão para a obtenção da tensão crítica de flambagem elástica de uma placa retangular com espessura constante, simplesmente apoiada em suas quatro bordas e submetida à tensão de compressão longitudinal uniforme. Na expressão, Bryan (1891) também define um coeficiente responsável por reduzir o módulo elástico da estrutura. Denominado coeficiente de flambagem  $k$ , seu valor está relacionado com a geometria e as condições de contorno da placa.

Até então, a equação de tensão crítica de flambagem elástica e a definição de  $k$  eram restritos apenas a placas simplesmente apoiadas. Sendo assim, os trabalhos de Reissner (1909) e Timoshenko (1910) foram importantes por estenderem o estudo para casos com outras condições de contorno. Com isso, a análise de flambagem elástica foi se tornando mais abrangente. Ganhou, ainda, caráter mais geral, quando Bleich (1924), através de uma aproximação conservadora, modificou a equação definida por Bryan (1891), adaptando-a a fim de solucionar problemas envolvendo tensões superiores àquelas do limite de proporcionalidade, ou seja, no regime inelástico. A partir de então, a análise da estabilidade de placas adquiriu cada vez mais espaço na literatura, sendo o principal objeto de estudo em trabalhos de notoriedade



no campo da Mecânica dos Sólidos, a saber: Schleicher (1931), Bleich (1952), Stowell *et al.* (1952), Gerard e Becker (1957), Timoshenko e Gere (1961), Allen e Bulson (1980), Ugural (1981), Trahair e Bradford (1988), Galambos (1998) e Reddy (1999).

Com a expansão da análise de flambagem de placas, o estudo do comportamento elástico de placas enrijecidas também se tornou escopo de inúmeros trabalhos. A aplicação de enrijecedores apresentou-se como solução econômica e adequada ao aumento da resistência. As primeiras pesquisas relacionadas a placas enrijecidas foram realizadas por Timoshenko (1921), que calculou a tensão crítica de flambagem elástica para placas com um a três enrijecedores longitudinais ou transversais igualmente espaçados. O autor analisou placas simplesmente apoiadas submetidas à compressão uniforme e ao cisalhamento puro, através do Método da Energia, assim como Bryan (1891).

Logo após, Chwalla (1936), também aplicando o Método da Energia, expandiu a análise para placas reforçadas a partir de um enrijecedor longitudinal no meio da zona de compressão e no meio da placa, sendo avaliadas tensões relacionadas à flexão pura, compressão e cisalhamento. Na mesma época, Lokshin (1935) estudou casos especiais de placas enrijecidas com quantidade qualquer de enrijecedores longitudinais de dimensões e espaçamentos iguais. Entretanto, Barbré (1937), considerando este estudo incompleto, apresentou sua teoria para a análise de flambagem elástica de placas submetidas à compressão uniforme e reforçadas a partir de um ou dois enrijecedores longitudinais ou transversais alocados em qualquer região da placa. Desde então, a análise da estabilidade de placas enrijecidas expandiu-se e teorias quanto à tensão crítica de flambagem elástica e o coeficiente de flambagem foram desenvolvidas, destacando-se os trabalhos de Seide e Stein (1949), Bleich e Ramsey (1951), Bleich (1952), Klöppel e Scheer (1960), Timoshenko e Gere (1961), Sharp (1966) e Klöppel e Möller (1968).

Como foi abordado anteriormente, determinar apenas a tensão crítica de flambagem elástica de uma placa não é estimativa realista de sua capacidade resistente. Contudo, até a década de 1930, o início da flambagem da placa também era considerado seu colapso (Roorda, 1980; Trahair e Bradford, 1988 e Castro e Silva, 2006). A partir dos avanços nas análises sobre a instabilidade, concluiu-se que placas esbeltas têm comportamento pós-flambagem estável. Observou-se que a força última de uma placa plana era de fato maior que a força relacionada à flambagem. Sendo assim, ficou evidente que placas possuem resistência pós-flambagem considerável (Cox, 1934; Marguerre e Trefftz, 1937, Schuman e Back, 1959).

No entanto, a determinação da capacidade resistente última não é simples, principalmente, porque o comportamento último é afetado por imperfeições geométricas e tensões residuais da estrutura. Sendo assim, *von Kármán et al.* (1932) introduziu o conceito de largura efetiva. Através de um método semi-empírico, o cálculo da resistência de uma placa comprimida axialmente e simplesmente apoiada foi definido como sendo o produto entre a tensão de escoamento do aço e a largura efetiva. Conforme seus estudos, regiões adjacentes às bordas longitudinais de placas esbeltas são também aquelas que resistem a maior parte do carregamento aplicado. Sendo assim, aproximou-se a distribuição real de tensões últimas através de uma distribuição simplificada, na qual a região central da placa é desprezada e a largura remanescente (largura efetiva) fica sujeita à tensão de escoamento. Por fim, a placa é substituída por duas faixas sob tensão constante e uma região central descarregada.

Na sequência, vários outros estudos sobre a capacidade resistente última de placas foram desenvolvidos e aprofundados por meio de grande número de ensaios experimentais. Nesses estudos, modificações à fórmula proposta por *von Kármán et al.* (1932) foram realizadas, a fim de que imperfeições geométricas e tensões residuais também fossem consideradas. Como resultado, diferentes fórmulas de largura efetiva foram elaboradas, destacando-se a de Winter (1947), Gerard e Becker (1957), Faulkner (1977) e Johansson *et al.* (2001). Entre essas, aquela que obteve maior aceitação foi a de Winter (1947), que também pode ser aplicada a placas submetidas a distribuição linear de tensões normais.

Para a verificação de placas esbeltas enrijecidas e não enrijecidas, a norma europeia EN 1993-1-5:2006 fundamenta-se na determinação da seção transversal efetiva, que é feita com base nas larguras efetivas determinadas pela fórmula de Winter (1947).

Quanto ao comportamento último de placas submetidas aos esforços cisalhantes, esse corresponde à sobreposição do comportamento de flambagem elástica da placa com a atuação do campo de tração. Historicamente, Rode (1916) foi o primeiro a apresentar a formulação matemática do campo de tração, considerando uma diagonal de trações com largura igual a 50 vezes a espessura da alma. Nos trabalhos de Wagner (Wagner, 1929, Wagner, 1931a, Wagner, 1931b e Wagner, 1931c), o conceito de campo de tração ideal foi explorado e reconhecido como adequado a placas muito esbeltas. Na sequência, pesquisas foram levantadas com o propósito de otimizar o dimensionamento de aviões, até que Basler e Thürlimann (1959), desconfiando da validade dos modelos existentes para o dimensionamento de vigas de

estruturas de edifícios e pontes, organizaram um programa experimental extenso a fim de propor um novo modelo.

Na década de 60, após uma sequência de graves colapsos em pontes de aço, outras investigações aprofundadas sobre a capacidade resistente de painéis submetidos aos esforços cortantes foram iniciadas. Baseados em testes experimentais, Basler (1961a), Thürlimann (1963), Takeuchi (1964), Chern e Ostapenko (1969), Fuji *et al.* (1971), Höglund (1971) e Roche e Skaloud (1972) desenvolveram seus próprios modelos de resistência, a fim de determinar a capacidade resistente última de painéis sujeitos às tensões cisalhantes. Em geral, os modelos apresentados divergem quanto à definição do campo de tração, à posição das rótulas no mecanismo plástico que é formado na estrutura, à natureza da distribuição de tensões e às condições de contorno adotadas para o cálculo das tensões críticas de flambagem elástica devido aos esforços cortantes.

A partir de então, nas décadas de 70 e 80, outros experimentos foram estendidos a painéis enrijecidos longitudinalmente. De modo geral, os trabalhos de Komatsu (1971), Mele e Puhali (1980), Cooke *et al.* (1983), Evans e Tang (1984) e Charlier e Maquoi (1987) propuseram modelos considerando duas situações extremas: uma, na qual o campo de tração se formava ao longo de todo o painel, ponderando a presença dos enrijecedores apenas para a obtenção das forças críticas - modelo de Cardiff (Porter *et al.*, 1975) -, e outra que avaliava a formação de vários campos de tração, sendo um para cada subpainel - modelo de Cooper (1967) e Ostapenko e Chern (1971). Em suma, a primeira garante maior precisão quando os enrijecedores são flexíveis, ou seja, quando a placa tende à flambagem global, e a segunda, em casos nos quais os enrijecedores são rígidos e a flambagem local ocorre primeiro. Porém, como a rigidez do enrijecedor pode variar, os modos de falha também variam de uma situação extrema a outra. Sendo assim, nenhuma das duas aborda, de modo geral, o comportamento de placas enrijecidas.

A inexistência de um modelo de resistência que representasse adequadamente o comportamento de placas enrijecidas e não enrijecidas foi determinante para que a EN 1993-1-5:2006 adotasse o modelo de Höglund (1973, 1995 e 1998), que foi primeiramente descoberto por Höglund em 1973 e posteriormente modificado justamente para a elaboração da norma. Além de levar em conta a rigidez do enrijecedor, esse modelo é prático e preciso frente aos testes experimentais de placas reforçadas por enrijecedores de seção aberta.

Quanto ao estudo de placas submetidas à interação de tensões normais e cisalhantes, Way (1936) foi o primeiro a propor uma equação para a tensão crítica de flambagem elástica que

considerasse a interação entre tensões advindas da flexão e do cisalhamento. Posteriormente, Gerard e Becker (1957) modificaram essa formulação, adaptando-a para casos de placas enrijecidas. Para isso, os autores particionaram a placa em subpainéis não enrijecidos e submetidos a tensões normais e cisalhantes. Na década de 70, Rockey (1971) estendeu a aplicação da fórmula para vigas com seção transversal do tipo I.

A EN 1993-1-5:2006 não considera diretamente a interação de tensões no estudo de flambagem elástica. Sendo assim, as tensões críticas devido aos efeitos de tensões normais são obtidas separadamente das tensões críticas devido aos efeitos dos esforços cisalhantes. Contudo, a norma não ignora a interação, sendo que a contabiliza a partir de uma equação de verificação, na qual já se considera a ação concomitante do momento resistente de cálculo e da capacidade resistente à força de cisalhamento.

A equação de interação entre momento fletor e força cortante proposta por Basler (1961b) foi adotada pela norma europeia com pequenas alterações. Esta formulação é baseada na hipótese de que a força cortante é totalmente suportada pela alma e o momento fletor aplicado é menor que a capacidade resistente das mesas da viga. Com isso, para maiores valores de flexão, o momento também deve ser resistido pela alma, o que diminui a capacidade resistente ao cisalhamento da viga. Considerando que há a contribuição das mesas para resistir aos efeitos de tensões cisalhantes, a força axial aplicada nestes elementos também deve ser reduzida. Observa-se que a formulação utilizada para vigas constituídas de placas enrijecidas é a mesma para aquelas com placas sem enrijecimento.

Neste contexto, tanto para placas submetidas à interação de tensões, como para casos nos quais os esforços são aplicados isoladamente, inúmeros trabalhos experimentais e numéricos foram direcionados no sentido de verificar a aplicabilidade da norma e propor novas formulações para o dimensionamento de placas enrijecidas.

Dentre os trabalhos mais recentes relacionados ao estudo de flambagem elástica, Galéa e Martin (2007) e Martin e Galéa (2008) apresentaram o programa computacional EBPlate como uma nova forma de se obter as tensões críticas. Além disso, Galéa e Martin (2010) propuseram um novo método para o cálculo de tensões críticas globais por meio do programa, que foi comparado ao procedimento normativo. Desde então, outras pesquisas foram realizadas a fim de confrontar ambas abordagens, assim como foi feito por Beg *et al.* (2010), Čaušević e Bulić (2012), Zahlquist (2013), Sinur (2014) e Barbosa *et al.* (2019a).

Na literatura, entretanto, pouco é apresentado quanto à determinação de tensões críticas de flambagem elástica considerando a interação dos esforços solicitantes. Sobre o assunto, destaca-se o estudo de Alinia e Moosavi (2009), no qual a flambagem local de placas enrijecidas longitudinalmente submetidas à interação de tensões é avaliada através de estudos numéricos e procedimentos analíticos. Observa-se que o estudo da flambagem global, considerando a interação de tensões, não é tão explorado em trabalhos técnico-científicos.

Enquanto isso, em relação à capacidade resistente última, vários estudos foram desenvolvidos para que novas propostas de dimensionamento fossem elaboradas e comparadas aos procedimentos da EN 1993-1-5:2006. Entre esses, os mais recentes são: Sinur (2011), Sinur e Beg (2013a), Sinur e Beg (2013b), Kövesdi et al. (2014) e Jáger *et al.* (2018), nos quais placas enrijecidas longitudinalmente submetidas à interação de tensões são avaliadas.

Recentemente, Kövesdi (2019b) também ressaltou a importância do estudo da interpolação entre os comportamentos Tipo Placa e Tipo Pilar, que é fator preponderante no cálculo da capacidade resistente última de placas enrijecidas. Segundo o autor, há carência de investigações e estudos paramétricos apropriados quanto ao assunto. Em seu trabalho, a formulação preconizada pela EN 1993-1-5:2006 é examinada para casos de placas ortotrópicas, sendo comparada às respostas numéricas obtidas.

Neste sentido, Martin *et al.* (2019) e Kövesdi (2019a) enfatizam a importância da análise da flambagem e capacidade resistência última relacionadas ao Comportamento Tipo Placa, principalmente quando esse é o comportamento que governa o dimensionamento. Os autores analisaram, respectivamente, o coeficiente de redução referente ao Comportamento Tipo Placa,  $\rho$ , para placas ortotrópicas reforçadas através de enrijecedores trapezoidais. Em suma, contestaram o caráter conservador da norma europeia, enfatizando que, em casos de enrijecedores com seção transversal fechada, o dimensionamento baseado nos procedimentos normativos pode resultar em valores contra a segurança.

## **2.2 Comportamento de flambagem elástica devido às tensões normais**

Como abordado anteriormente, Bryan (1891) utilizou o Método da Energia para estudar a flambagem de uma placa retangular de espessura  $t$ , simplesmente apoiada em seu contorno e submetida à tensão de compressão uniforme, conforme exibido na Figura 2-1.

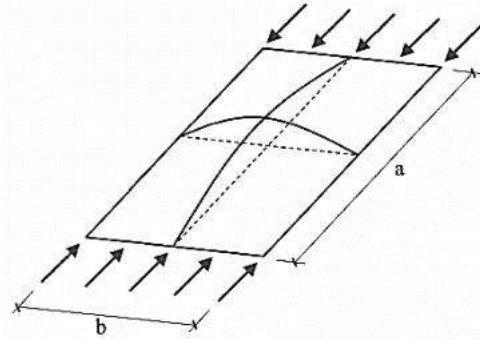


Figura 2-1. Flambagem elástica de uma placa submetida à compressão axial. Fonte: Silva e Gervásio (2007).

Para esta situação, uma equação diferencial foi definida e, solucionando-a, a expressão analítica para determinação da tensão crítica de flambagem elástica devido às tensões normais,  $\sigma_{cr}$ , foi obtida:

$$\sigma_{cr} = \frac{k_{\sigma} \pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (2.1)$$

Onde:

- $b$  é a largura da placa, na qual a aplicação do carregamento é realizada (Figura 2-1);
- $k_{\sigma}$  é o coeficiente de flambagem elástica, que é definido por:

$$k_{\sigma} = \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{n^2 \alpha}{m}\right)^2 \quad (2.2)$$

Onde:

- $\alpha$  é a razão de aspecto igual a  $a/b$  (Figura 2-1);
- $m$  é o número de semi-ondas na direção de compressão;
- $n$  é o número de semi-ondas na direção transversal da placa;

Através de gráficos e tabelas específicos, tais como os ábacos de Klöppel e Scheer (1960) e Klöppel e Möller (1968) também é possível determinar  $k_{\sigma}$  para placas não enrijecidas submetidas a diversos tipos de aplicação de esforços e condições de apoio, diferentes daqueles demonstrados na Figura 2-1. Com isso, os coeficientes encontrados são aplicados na Equação (2.1), resultando na tensão crítica de flambagem elástica.

Para placas enrijecidas, Vayas e Illiopoulos (2013) explanam que a determinação de  $\sigma_{cr}$  não é tão simples, uma vez que a definição de  $k_\sigma$  é trabalhosa. Esse coeficiente não depende apenas da razão de aspecto,  $\alpha$ , e dos tipos de carregamentos ou vinculação, visto que as propriedades geométricas e as posições dos enrijecedores também interferem em seu valor.

### 2.3 Comportamento de flambagem elástica devido às tensões cisalhantes

Em relação à solicitação por esforços cortantes, Beg *et al.* (2010) explicam que, antes da ocorrência de flambagem, a placa está sujeita a tensões de cisalhamento puro,  $\tau$ . Considerando que essas tensões correspondem à tensão principal de tração,  $\sigma_1$ , e à tensão principal de compressão,  $\sigma_2$ , infere-se que possuem intensidades de valores iguais e direções que formam  $45^\circ$  com o eixo longitudinal da placa (Figura 2-2), até que as tensões críticas devido aos esforços cisalhantes sejam atingidas. Isso caracteriza o comportamento pré-flambagem da placa.

Para conhecer o limiar desse comportamento, é necessário que se defina os valores do coeficiente de flambagem devido aos esforços de cisalhamento,  $k_\tau$ , e da tensão crítica de flambagem elástica,  $\tau_{cr}$ , que são imprescindíveis para a determinação da contribuição da alma à resistência,  $V_{bw,Rd}$ , e da capacidade resistente ao cisalhamento,  $V_{b,Rd}$ .

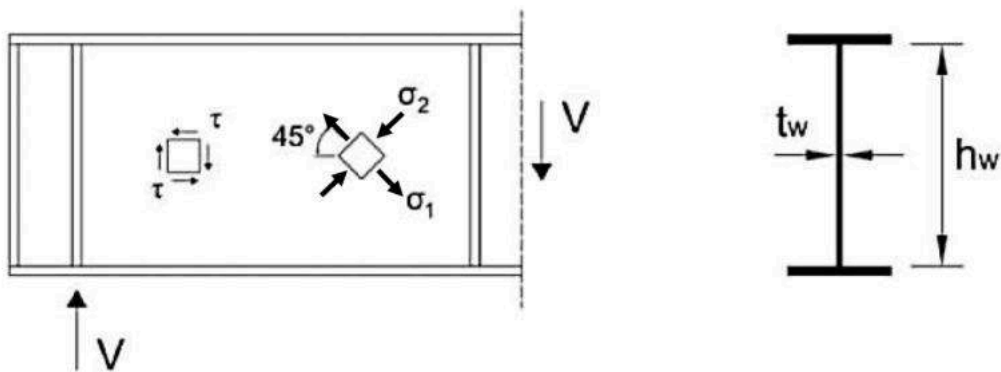


Figura 2-2. Estado puro de tensões cisalhantes (comportamento pré-flambagem). Fonte: adaptado de Beg *et al.* (2010)

### 2.4 Procedimentos para obtenção das tensões críticas de flambagem elástica

Quanto ao comportamento elástico de placas enrijecidas, Silva e Gervásio (2007) destacam que a análise de flambagem elástica depende da quantidade e posição de enrijecedores adotados e do espaçamento entre esses, sendo relevante a condição de serem igualmente espaçados ou não.

Com isso, abordam que, se a placa apresenta três ou mais enrijecedores longitudinais igualmente espaçados e de tamanhos equivalentes, é conveniente a consideração de uma contribuição uniforme de cada um para toda placa. Neste sentido, a placa é considerada como uma placa ortotrópica fictícia, ou seja, que possui comportamento ortotrópico com diferente rigidez entre suas direções transversal e longitudinal. Se o reforço for realizado a partir de um ou dois enrijecedores longitudinais igualmente espaçados, uma equação de equilíbrio referente ao modo de flambagem da placa pode ser definida e solucionada, resultando em respostas aos coeficientes de flambagem elástica,  $k$ , e à tensão crítica.

Na literatura, a obtenção analítica de  $k$  é realizada a partir de expressões simplificadas e normatizações, gráficos e tabelas, programas computacionais e análises baseadas em métodos numéricos. A seguir, são apresentados diferentes procedimentos de cálculo para a obtenção do coeficiente e das tensões críticas de flambagem elástica de placas com enrijecedores longitudinais.

#### **2.4.1 Norma europeia EN 1993-1-5:2006**

##### 2.4.1.1 Tensões críticas de flambagem elástica devido às tensões normais

Através de uma abordagem que considera dois tipos de comportamento (Comportamento Tipo Placa e Comportamento Tipo Pilar), que podem ser assumidos por placas enrijecidas submetidas às tensões normais, a norma EN 1993-1-5:2006 estabelece um modelo analítico responsável por determinar os valores das tensões críticas de flambagem elástica,  $\sigma_{cr}$ . Sendo assim, considera uma tensão crítica para cada um dos comportamentos. Para tanto, algumas condições são assumidas:

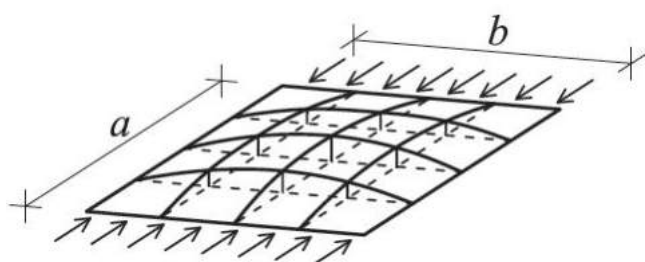
- enrijecedores transversais rígidos;
- enrijecedores longitudinais não pertencentes à Classe 4 definida na norma EN 1993-1-1:2005;
- enrijecedores longitudinais com rigidez à torção nula;
- painéis com aberturas desprezáveis;

De acordo com Beg *et al.* (2010), placas esbeltas possuem resistência pós-flambagem considerável. Contudo, quando tendem a se comportar como pilar, a resistência decresce. Neste sentido, a principal diferença entre os dois tipos de comportamento está justamente relacionada à resistência pós-flambagem, que pode diminuir gradualmente, ou não, dependendo das

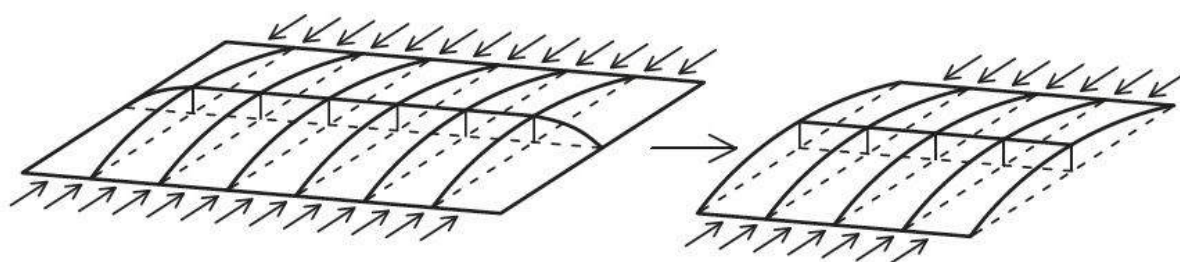


dimensões assumidas pelos lados da placa. Na Figura 2-3, visualiza-se ambos os tipos de comportamento e as dimensões da placa também são demonstradas.

Percebe-se que, quando a razão de aspecto  $\alpha$  atinge valores menores que 1, ou seja, o menor lado está na direção da tensão de compressão (Figura 2-3.b), as tensões críticas podem ser determinadas considerando que a placa tende a se comportar como um pilar. Sendo assim, a resistência pós-flambagem decresce, uma vez que se observa, ao invés de comportamento bidimensional característico de placas, um comportamento unidimensional, que não possui qualquer resistência após a ocorrência de flambagem, caracterizando o Comportamento Tipo Pilar. No entanto, se as dimensões da placa continuam com medidas próximas, o comportamento bidimensional se mantém. Com isso, verifica-se curvaturas nas direções longitudinais e transversais da placa e conserva-se a resistência pós-flambagem, caracterizando o Comportamento Tipo Placa (Figura 2-3.a).



(a) Comportamento Tipo Placa



(b) Comportamento Tipo Pilar

Figura 2-3. Ilustração dos comportamentos Tipo Placa e Tipo Pilar de placas submetidas à compressão. Fonte: adaptado de Beg *et al.* (2010).

Além disso, os autores explicam que as tensões críticas referentes ao Comportamento Tipo Placa são sempre maiores que do Comportamento Tipo Pilar, porque neste as placas são adotadas com bordas longitudinais não apoiadas.

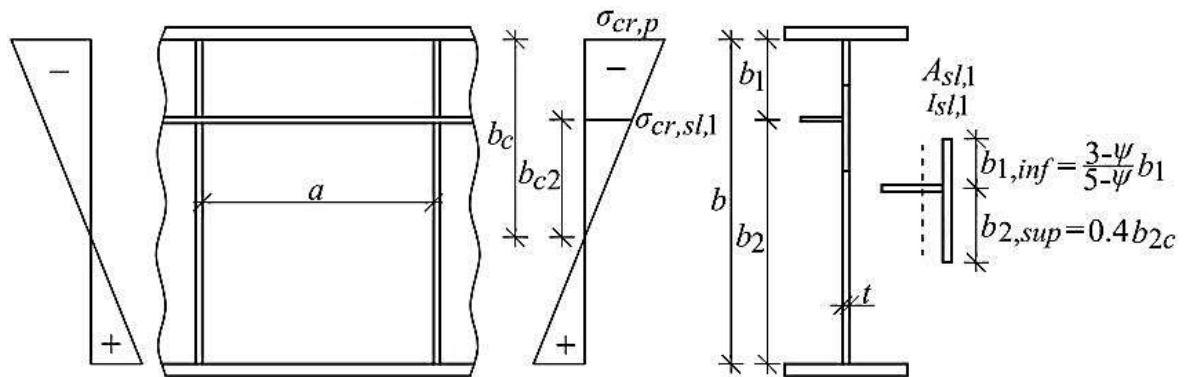
#### 2.4.1.1.1 Tensões críticas de flambagem elástica para o Comportamento Tipo Placa

De acordo com a EN 1993-1-5:2006, determinar a tensão crítica para o Comportamento Tipo Placa,  $\sigma_{cr,p}$ , é o mesmo que definir a tensão crítica associada ao modo de flambagem global, ou seja, sem considerar os efeitos causados pela flambagem local de subpainéis. Neste sentido, a placa é avaliada como um todo, constituída por um painel com enrijecedores longitudinais.

Quando se trata deste tipo de comportamento, a norma preconiza dois métodos específicos, que atendem aos casos mais comuns de projetos de engenharia, a saber: situações nas quais painéis são submetidos à compressão uniforme e reforçados longitudinalmente por mais de dois enrijecedores igualmente espaçados e placas de alma de vigas do tipo I reforçadas por um ou dois enrijecedores alocados na zona de compressão.

No que diz respeito ao método proposto no item A.2 do anexo A da norma, para placas reforçadas a partir de um ou dois enrijecedores alocados na região comprimida, as tensões críticas globais são obtidas a partir da consideração de que a placa enrijecida trabalha como se fosse um pilar equivalente restringido por um apoio contínuo elástico. Por meio do procedimento, enrijecedores inseridos na zona tracionada são desprezados.

Sendo assim, determina-se a tensão crítica de flambagem elástica do pilar equivalente,  $\sigma_{cr,sl}$ , a fim de se obter a tensão crítica de flambagem elástica da placa,  $\sigma_{cr,p}$ . Para isso, são adotados a área bruta deste pilar,  $A_{sl,1}$  (soma das áreas brutas da seção transversal do enrijecedor e das partes da placa adjacentes que contribuem para resistir à sollicitação de compressão), e o momento de inércia de sua seção bruta em torno de um eixo centroidal e paralelo ao plano da placa,  $I_{sl,1}$  (Figura 2-4).



\*  $b_{2c}$  é a largura em compressão do subpainel de largura  $b_2$

Figura 2-4. Alma reforçada por um enrijecedor na região comprimida. Fonte: Beg *et al.* (2010)

Por causa destas considerações, esse procedimento é conhecido como Método do Pilar Fictício, sendo baseado em uma simplificação, na qual se supõe a flambagem de um pilar carregado axialmente e apoiado continuamente em vínculo elástico, que representa a rigidez à flexão da placa. Com isso, determina-se a tensão crítica de flambagem elástica do pilar equivalente, através da Equação (2.3).

$$\sigma_{cr,sl} = \begin{cases} \frac{1,05E \sqrt{I_{sl,1} t^3 b}}{A_{sl,1} b_1 b_2} & \text{se } a \geq a_c \\ \frac{\pi^2 E I_{sl,1}}{A_{sl,1} a^2} + \frac{E t^3 b a^2}{4\pi^2 (1 - \nu^2) A_{sl,1} b_1^2 b_2^2} & \text{se } a < a_c \end{cases} \quad (2.3)$$

Onde:

- $b_1$  é a distância entre o enrijecedor longitudinal e a borda superior do painel (Figura 2-4);
- $b_2$  é a distância entre o enrijecedor longitudinal e a borda inferior do painel (Figura 2-4);
- $b$  é a soma de  $b_1$  e  $b_2$  (Figura 2-4);
- $a_c$  é o comprimento de flambagem, que pode ser determinado através da seguinte expressão:

$$a_c = 4,33 \sqrt[4]{\frac{I_{sl,1} b_1^2 b_2^2}{t^3 b}} \quad (2.4)$$

Quando  $a \geq a_c$ ,  $\sigma_{cr,sl}$  é determinada considerando-se comprimento de flambagem igual ao comprimento do painel,  $a$ . Entretanto, se  $a < a_c$ ,  $\sigma_{cr,sl}$  é estabelecida mediante a existência de várias meia-ondas senoidais, ao longo do comprimento  $a$ .

Após  $\sigma_{cr,sl}$  ser obtida, determina-se  $\sigma_{cr,p}$ , que é definida como sendo a maior tensão de compressão na qual a placa está submetida (Figura 2-4), cujo valor é estabelecido de acordo com a Equação (2.5).

$$\sigma_{cr,p} = \frac{b_c}{b_{c2}} \sigma_{cr,sl} \quad (2.5)$$

Observa que o valor de  $\sigma_{cr,sl}$ , que foi obtido a partir da posição na qual o enrijecedor comprimido se localiza, é extrapolado para a posição da borda mais comprimida. Isso se dá com a aplicação da razão  $b_c/b_{c2}$ , sendo que os valores de numerador e denominador

representam, respectivamente, a distância da borda mais comprimida e a distância da posição do enrijecedor até a linha neutra, como demonstrado na Figura 2-4.

Beg *et al.* (2010) destacam que, quando o enrijecedor está alocado sobre a linha neutra, ou muito próximo a essa, o valor de  $b_{c2}$  é muito pequeno ou igual a zero, sendo assim,  $\sigma_{cr,p}$  tende ao infinito. Isso reitera que a flambagem global do painel enrijecido não ocorrerá. Neste caso, a flambagem local do subpainel de largura  $b_1$  predomina. Além disso, os autores abordam que os valores de  $\sigma_{cr,p}$  também tendem ao infinito quando o enrijecedor é posicionado em uma região muito próxima à mesa comprimida, já que a largura  $b_1$  é muito pequena em tais situações. Novamente, não é possível a ocorrência de flambagem global do painel enrijecido e visualiza-se apenas a flambagem local. Portanto, a partir da normatização, a presença do enrijecedor é ignorada para estes casos.

Em situações com dois enrijecedores situados na parte comprimida da placa (Figura 2-5), o procedimento descrito também é utilizado, sendo repetido três vezes:

- primeiramente, o enrijecedor I é considerado um pilar fictício, sendo a placa seu suporte elástico contínuo e o enrijecedor II, um apoio rígido;
- logo após, o enrijecedor II é que exerce a função de pilar fictício e, novamente, a placa tem o papel de suporte elástico contínuo, sendo que, desta vez, o enrijecedor I é assumido como apoio rígido;
- por último, considera-se um único enrijecedor equivalente aos enrijecedores I e II. Sendo assim, é possível simular a flambagem com a atuação simultânea de ambos enrijecedores na placa. A posição do enrijecedor é adotada no ponto de aplicação da resultante das tensões às quais os enrijecedores I e II estão submetidos, sendo encontrada através da Equação (2.6).

$$b_1^{I+II} = \frac{A_{sl,2} b_{c,2}}{A_{sl,1} b_{c,1} + A_{sl,2} b_{c,2}} b_2^I b_1^{II} \quad (2.6)$$

Onde:

- $A_{sl,1}$  é a área de seção transversal do enrijecedor (Figura 2-5);
- $b_{c,1}$  é a distância entre o enrijecedor I e a linha neutra da alma (Figura 2-5);
- $A_{sl,2}$  é a área de seção transversal do enrijecedor II (Figura 2-5);

- $b_{c,2}$  é a distância entre o enrijecedor II e a linha neutra da alma (Figura 2-5);
- $b_1^I$  é a posição do enrijecedor I (Figura 2-5);
- $b_2^I$  é a posição do enrijecedor II (Figura 2-5);

São utilizadas as mesmas equações anteriores para a obtenção de  $\sigma_{cr,sl}$  e  $\sigma_{cr,p}$ , de modo que, em casos de distribuição linear de tensões, a tensão crítica de flambagem elástica do pilar equivalente é extrapolada desde a posição do enrijecedor sob compressão até a posição da borda mais comprimida da placa. O resultado final de  $\sigma_{cr,p}$  é o menor dentre os três valores computados. Ressalta-se que as propriedades de seção transversal do enrijecedor equivalente devem ser a soma das propriedades de seção transversal dos enrijecedores I e II.

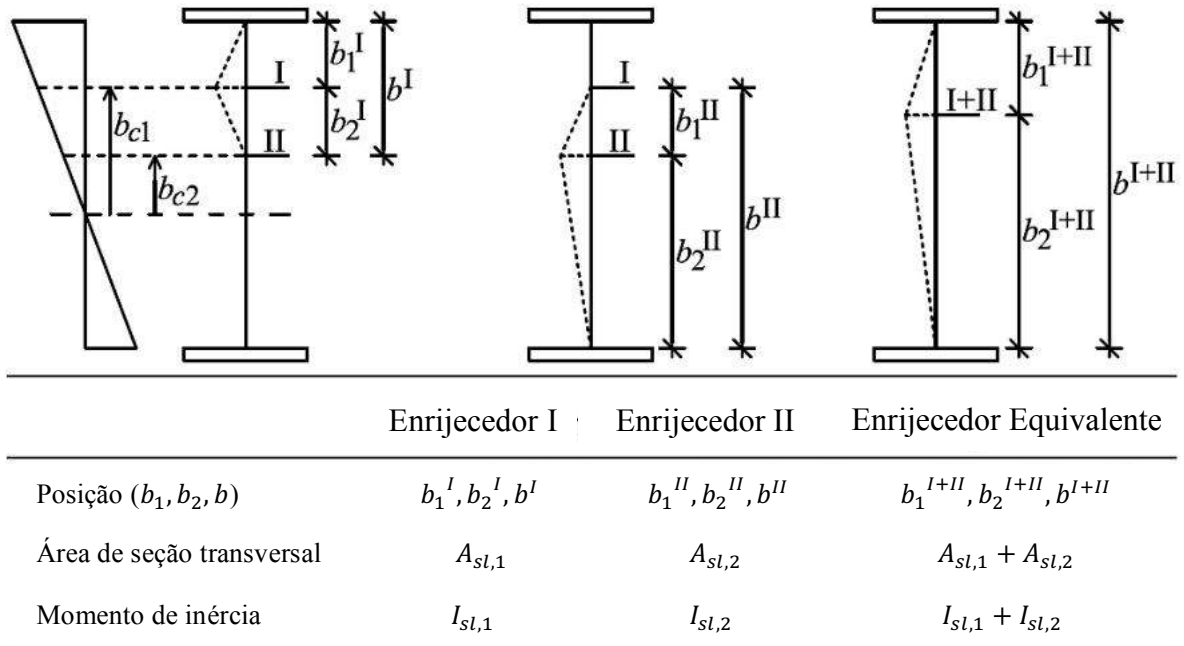


Figura 2-5. Alma reforçada por dois enrijecedores na região comprimida. Fonte: adaptado de Beg *et al.* (2010)

#### 2.4.1.2 Tensões críticas de flambagem elástica devido aos esforços de cisalhamento

Os valores de tensão crítica de flambagem elástica,  $\tau_{cr}$ , são calculados conforme a seguinte expressão:

$$\tau_{cr} = k_{\tau} \sigma_E \quad (2.7)$$

A tensão  $\sigma_E$  refere-se à tensão de flambagem de Euler, em MPa, sendo, neste caso, a rigidez à flexão de barra substituída pela rigidez à flexão da placa e definida pela Equação (2.8).

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E t^2}{12 (1 - \nu^2) b^2} = 190000 \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (2.8)$$

Os valores do coeficiente de flambagem  $k_\tau$  são obtidos através das fórmulas fornecidas no item A.3 do anexo A da norma, para casos de placas com enrijecedores transversais rígidos e placas com enrijecedores longitudinais dispostos entre enrijecedores transversais rígidos.

Em situações nas quais painéis com enrijecedores transversais rígidos também são reforçados por 1 ou 2 enrijecedores longitudinais (com razão de aspecto  $\alpha \geq 3$ ), por mais de 2 enrijecedores longitudinais, ou, ainda, não são reforçados longitudinalmente, o coeficiente de flambagem  $k_\tau$  é determinado pela seguinte equação:

$$k_\tau = \begin{cases} 5,34 + 4,00 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + k_{\tau sl} & \text{quando } a/b \geq 1 \\ 4,00 + 5,34 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + k_{\tau sl} & \text{quando } a/b < 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Em que:

$$k_{\tau sl} = 9 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sqrt[4]{\left(\frac{I_{sl}}{t^3 b}\right)^3} \geq \frac{2,1^3}{t} \sqrt[3]{\frac{I_{sl}}{b}} \quad (2.10)$$

Ressalta-se que o valor do momento de inércia  $I_{sl}$  está relacionado à área do enrijecedor longitudinal somada às áreas das larguras efetivas da placa a uma distância de  $15\epsilon t$  de cada lado do enrijecedor, conforme a Figura 2-6, na qual  $\epsilon = \sqrt{235/f_y}$ , sendo  $f_y$  em MPa.

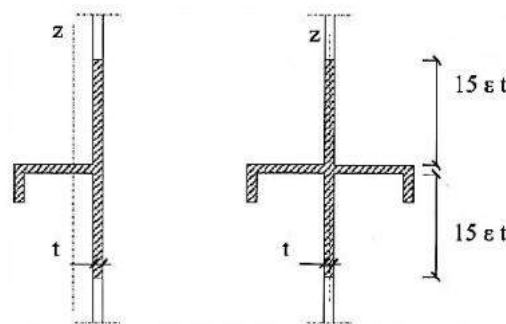


Figura 2-6. Ilustração das medidas de larguras efetivas adjacentes aos enrijecedores. Fonte: Silva e Gervásio (2007)

Quando os painéis são constituídos por 2 ou mais enrijecedores longitudinais, que não estão igualmente espaçados,  $I_{sl}$  é adotado como sendo a soma das rigidezes de cada um dos enrijecedores. Em casos de ausência de reforço longitudinal, seu valor é zero e, conseqüentemente, o valor de  $k_{\tau sl}$  é nulo.

Em situações nas quais painéis com enrijecedores transversais rígidos também são reforçados por 1 ou 2 enrijecedores e a razão de aspecto  $\alpha = a/h_w < 3$ , o coeficiente de flambagem  $k_\tau$  é estabelecido segundo a seguinte equação:

$$k_\tau = 4,1 + \frac{6,3 + 0,18 \left( \frac{I_{sl}}{t^3 \cdot h_w} \right)}{\alpha^2} + 2,2 \sqrt[3]{\frac{I_{sl}}{t^3 h_w}} \quad (2.11)$$

#### 2.4.2 Programa computacional EBPlate

O programa computacional EBPlate (*Elastic Buckling of Plates*) foi criado pelo *Centre Technique Industriel de la Construction Métallique* (CTICM), sendo produto do projeto europeu *Competitive Steel and Composite Bridges by Improved Steel Plated Structures* (COMBRI) e fomentado pelo *European Research Fund for Coal and Steel* (RFCS). A sua validação ocorreu por meio de resultados analíticos, casos presentes na literatura, ábacos de Klöppel e Scheer (1960) e Klöppel e Möller (1968) e respostas advindas de análises numéricas baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF). Através do programa, é possível analisar o comportamento de flambagem elástica de placas retangulares enrijecidas longitudinalmente, com espessuras uniformes e carregadas em seu plano.

Como resultado, a ferramenta calcula os coeficientes de flambagem elástica, bem como as tensões críticas, e apresenta os modos de flambagem característicos. Para tanto, o usuário deve fornecer parâmetros de entrada que indiquem a complexidade da análise em questão. Além disso, há a opção de avaliar apenas o primeiro modo de flambagem, como também os 20 primeiros ou todos os modos.

De acordo com Galéa e Martin (2006), o EBPlate calcula o fator crítico,  $\phi_{cr}$ , através de uma solução aproximada, utilizando o Método de Energia semi-analítico de Rayleigh-Ritz. Esse fator exerce a função de multiplicador de força. Ao ser aplicado às tensões iniciais, às quais as placas estão submetidas, resulta nas tensões críticas de flambagem elástica, que são encontradas a partir das seguintes equações:

$$\sigma_{cr} = \phi_{cr}\sigma \quad (2.12)$$

$$\tau_{cr} = \phi_{cr}\tau \quad (2.13)$$

Para a determinação dos valores de tensões críticas globais, os usuários devem avaliar os modos de flambagem obtidos e escolher o valor de  $\phi_{cr}$  relacionado ao modo de flambagem global.

Em algumas situações, o modo de flambagem global não será o primeiro a ser encontrado no programa. Beg *et al.* (2010) explica que a obtenção de modos globais não é trivial, principalmente, quando os enrijecedores são rígidos em relação à placa. Existem casos nos quais os enrijecedores são tão rígidos que a análise de flambagem global não tem solução. Por esta razão, além do método convencional (no qual o usuário deve avaliar os modos de flambagem, a fim de encontrar o global), existe também o método proposto, que consiste em evitar que ocorra flambagem local de subpainéis, propiciando a flambagem global como o primeiro modo de flambagem elástica. Os dois métodos podem ser utilizados na análise de flambagem elástica e ambos são detalhados no *Presentation Manual of EBPlate* (Galéa e Martin, 2006).

### 2.4.3 Análise de flambagem elástica via MEF

Devido aos avanços da tecnologia computacional nas últimas décadas e o desenvolvimento de *software* simples e intuitivos, análises numéricas via MEF não são mais exclusivas apenas a fins de pesquisas, sendo atualmente utilizadas como ferramentas no dimensionamento estrutural. No contexto das estruturas metálicas, grande marco desse avanço é a própria norma europeia EN 1993-1-5:2006, que apresenta o anexo C destinado somente a recomendações sobre a utilização de elementos finitos na análise de placas esbeltas de aço. Além disso, a EN 1993-1-6:2007, que é direcionada ao dimensionamento de estruturas em casca, já foi elaborada baseando-se na utilização de programas de elementos finitos e métodos de análise avançada.

Percebe-se, portanto, que a análise via MEF tornou-se uma ferramenta poderosa, capaz de representar o comportamento real de gama diversificada de estruturas, sendo recomendada e utilizada, até mesmo, na elaboração de normas. Sendo assim, nas últimas décadas, vários trabalhos foram desenvolvidos a fim de explicar o método e orientar sobre sua utilização. Entre



eles, destacam-se: Zienkiewicz (1971), Gallagher (1975), Zienkiewicz e Taylor (1989), Kleiber e Hien (1992), Bathe (1996), Zienkiewicz *et al.* (2005), Sastry (2010) e Schmid(2012).

A EN 1993-1-5:2006 prescreve alguns cuidados necessários: as simulações numéricas devem ser realizadas por meio de *software* confiáveis; a escolha dos elementos finitos e tamanhos de malha estão correlacionadas à precisão dos resultados; as respostas numéricas são influenciadas pelas propriedades do material e pelo uso de imperfeições; a reprodução das condições de contorno e aplicação de esforços às quais as placas estão submetidas deve ser fidedigna e coeficientes parciais devem ser escolhidos conforme às prescrições do anexo C. É também aconselhado que as informações necessárias para a reprodução do modelo elaborado sejam documentadas, de modo que seja possível ser realizada por terceiros.

No contexto de estruturas constituídas por placas esbeltas de aço, a norma europeia indica a utilização do MEF, principalmente, em casos nos quais os elementos apresentam aberturas ou não são uniformes. No anexo C, são propostas diferentes análises para vários tipos de problemas. Entre essas, destacam-se as análises de flambagem elástica e de capacidade resistente última. Salienta-se que a análise de flambagem é um estudo elástico linear. Logo, o comportamento do material é linearizado, ou seja, o patamar de escoamento é desprezado, o comportamento geométrico é definido como linear e imperfeições não são introduzidas.

Entre tantos programas cuja análise é embasada em MEF, o ABAQUS (SIMULIA, 2014) se destaca por sua grande potencialidade e aplicação em problemas estruturais. No entanto, conhecimento sobre seus recursos computacionais é necessário, a fim de que haja controle sobre os parâmetros envolvidos, garantindo modelos consistentes e resultados confiáveis.

Quando se trata de problemas de instabilidade, o *software* permite que, através de uma análise linearizada, o comportamento de flambagem elástica seja conhecido. Sendo assim, o custo computacional é inferior, se comparado ao de análises mais elaboradas, nas quais existem considerações referentes ao comportamento não linear do material e à utilização de imperfeições. Sobre a análise linearizada de estabilidade e a potencialidade do programa ABAQUS, explicação detalhada é encontrada no trabalho de Castro e Silva (2006).

No ABAQUS, problemas de flambagem são tratados como perturbações lineares, nas quais autovalores e modos de flambagem podem ser obtidos. Semelhante ao fator crítico do EBPlate,  $\phi_{cr}$ , o autovalor (*eigenvalue*) é um multiplicador de força aplicado às tensões iniciais a fim de se obter as tensões críticas. Além disso, assim como no método convencional do EBPlate, o

usuário deve avaliar os modos de flambagem elástica, a fim de que seja definido o modo referente à tensão crítica global.

Portanto, nos últimos anos, a análise de flambagem elástica ganhou uma nova abordagem, que permitiu com que estudos aprofundados fossem realizados. A análise via MEF, além de garantir precisão nos resultados, também foi capaz de introduzir um caráter mais geral à avaliação da instabilidade estrutural de placas, representando maior gama de estruturas com diferentes geometrias. Nos trabalhos de Martins *et al.* (2013) e Ljubinković (2019), por exemplo, estudos numéricos extensivos foram realizados com o intuito de investigar o comportamento elástico de painéis esbeltos cilindricamente curvos e propor fórmulas para a definição das tensões críticas de flambagem elástica. As normas europeias que apresentam o cálculo de tensões críticas para estruturas de aço de elementos com elevada esbelteza restringem-se apenas ao dimensionamento de placas retangulares (EN 1993-1-5:2006) ou cascas (EN 1993-1-6:2007), não viabilizando com exatidão o cálculo para as estruturas em questão, o que é propiciado com utilização da análise de flambagem elástica via elementos finitos.

## 2.5 Verificação da Capacidade Resistente Última

Lebet e Hirt (2013) descrevem que placas esbeltas apresentam resistência pós-flambagem considerável. Sendo assim, independente de qual seja o procedimento escolhido para a análise de flambagem elástica, a capacidade resistente última de placas esbeltas deve ser verificada. Segundo Beg *et al.* (2010), após a tensão crítica ser alcançada, a resistência da placa não se esgota, ao contrário, aumenta até que se atinja o colapso (Figura 2-7). Neste sentido, o comportamento pós-flambagem de placas esbeltas deve ser estudado a fim de que se descubra com exatidão quando o colapso ocorrerá.

Após a flambagem, há uma redução de tensões no meio do painel porque a rigidez torna-se menor nesta região. Em contrapartida, há o aumento de tensões nas regiões próximas às extremidades longitudinais da placa. Como placas esbeltas não apresentam ductilidade significativa para que as tensões sejam redistribuídas em regiões com deformações plásticas, a capacidade resistente última é alcançada quando o valor da tensão máxima, nas extremidades da placa, for igual ao valor da resistência ao escoamento,  $f_y$ .

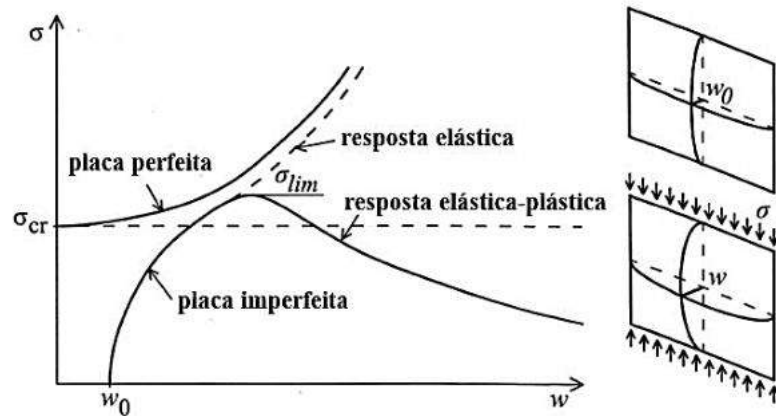


Figura 2-7. Representação do comportamento último de placas esbeltas sob compressão.  
Fonte: Barbosa (2016)

### 2.5.1 Métodos de verificação da resistência de placas submetidas aos esforços normais

Como não é prático trabalhar com a distribuição não linear de tensões, foram desenvolvidos dois métodos simplificados para verificar a capacidade resistente última de placas esbeltas, a saber: Método da Largura Efetiva (MLE) e Método da Tensão Reduzida (MTR). Ambos são preconizados pela norma EN 1993-1-5:2006.

Johansson *et al.* (2007) pontuam que o MLE se baseia no conceito de seção transversal efetiva, ou seja, em uma abordagem que fornece redução à seção transversal. Inicialmente, ocorre a verificação da seção transversal efetiva da placa, para cada um dos esforços aos quais está submetida. Logo após, através de equações de interação, realiza-se outra verificação considerando as possíveis combinações de carregamento. Os autores também afirmam que, nesta abordagem, o dimensionamento é governado pelo início do escoamento da fibra mais comprimida, considerando a seção transversal reduzida da placa.

Sendo assim, Beg *et al.* (2010) explanam que esse método fundamenta-se na redução apropriada da seção transversal na região central da placa, na qual ocorre flambagem, assumindo-se larguras adjacentes às extremidades da placa como larguras efetivas,  $b_{eff}$ . Essas são submetidas a tensões iguais ao valor da tensão de escoamento. Salienta-se que a determinação da seção efetiva dos elementos de placa é influenciada pelas condições de apoio nas extremidades e pela razão entre as tensões normais solicitantes,  $\psi$ .

Segundo Johansson *et al.* (2007), na abordagem de redução de tensão proposta pelo MTR, o comportamento de flambagem da placa não se relaciona com a redução de eficiência das propriedades da seção transversal. Ao contrário, para cada elemento de placa, a seção é

considerada como totalmente efetiva. É introduzido também o conceito de tensão reduzida, sobre o qual o dimensionamento é embasado. Neste contexto, as máximas tensões normais e cisalhantes, em cada elemento da placa, não devem ultrapassar o valor calculado para a tensão reduzida, que não excede os valores da tensão de escoamento. Quanto à combinação de carregamento, a placa é verificada pelo critério de *von Mises*. Portanto, é possível analisar a placa submetida à interação entre diferentes tipos de tensão sem a necessidade de se verificar, primeiramente, cada tensão de modo separado e, só depois, aplicar uma equação que considera a combinação entre as tensões.

Beg *et al.* (2010) ainda definem que, por meio deste método, assume-se uma distribuição linear de tensões até que seja atingido o estado limite de tensão do elemento de placa que flamba primeiro. Também reiteram o comportamento totalmente efetivo da seção transversal, mas ressalvam que é garantido apenas quando o estado limite ainda não foi alcançado. Explicam que, através desta abordagem, ocorre a comparação entre as tensões solicitantes (tomadas com base em um campo de tensão total) e as tensões limites (estabelecidas com relação ao primeiro elemento de placa que sofreu flambagem). Nenhuma das tensões atuantes deve ultrapassar a resistência reduzida definida pelo método. Logo, resumem que a capacidade resistente de toda placa é controlada pelo elemento “mais fraco”.

As abordagens de ambos os métodos garantem que seja mantido o equilíbrio com a distribuição de tensões à qual a placa está submetida. Sendo assim:

$$P_{ult} = \int_0^b \sigma_{act} dx = b_{eff} f_y = b \sigma_{lim} = \rho_{loc} b f_y \quad (2.14)$$

Onde:

- $P_{ult}$  é a força por espessura unitária relacionada à capacidade resistente última;
- $\sigma_{act}$  é a tensão solicitante à qual a placa está submetida;
- $\sigma_{lim}$  é a tensão relacionada à capacidade resistente última;
- $\rho_{loc}$  é o coeficiente de redução devido à flambagem de um subpainel ou de uma placa não enrijecida, definido pela seguinte equação:

$$\rho_{loc} = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{\sigma_{lim}}{f_y} \quad (2.15)$$

Na Figura 2-8, são demonstradas as ideias básicas dos dois métodos sugeridos pela EN 1993-1-5:2006.

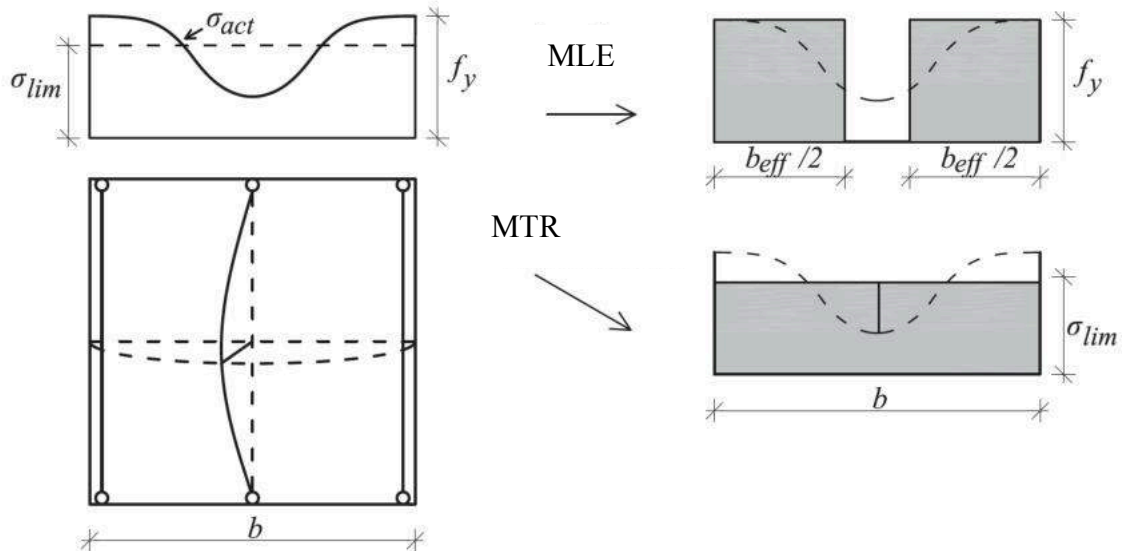


Figura 2-8. Ilustração das ideias básicas introduzidas pelo MLE e MTR. Fonte: adaptado de Beg *et al.* (2010)

Por conseguinte, a partir da comparação entre os dois métodos de verificação conclui-se que:

- ambos resultam em mesma solução para um único elemento de placa, ou para uma placa constituída por vários elementos sob compressão pura, sendo que, para situações diferentes dessas, o MLE resulta em capacidades resistentes maiores e viabiliza a utilização de seções transversais mais esbeltas;
- ao contrário do MLE, o MTR subestima a deformação máxima da placa, quando considera seção transversal totalmente efetiva, na reserva pós-crítica de um elemento individual, e desconsidera a redistribuição de tensão ao longo da seção transversal;
- a verificação proposta pelo MLE acontece em algumas etapas, conforme explicado anteriormente, enquanto isso, pelo MTR, propõe-se verificação em única etapa, sendo mais prático;
- o MLE só se aplica a seções transversais de placa comumente utilizadas em projetos, como, por exemplo, as de viga do tipo I e caixão (item 4.1 da EN 1993-1-5:2006), já o MTR, além de

ser válido para estes casos, também abrange situações nas quais existem elementos com mesas não paralelas, aberturas regulares ou irregulares em almas e enrijecedores não ortogonais.

No trabalho de Barbosa *et al.* (2019b), ambos os métodos foram aplicados a fim de definir as espessuras de painéis enrijecidos longitudinalmente. As diferenças foram significativas, sendo que o MLE resultou em valores inferiores em até 30%. Por fim, os autores concluíram que, apesar do MTR apresentar vantagens em relação à praticidade e aplicação para seções transversais não típicas e não uniformes, fornece uma proposta de cálculo mais conservadora.

Neste trabalho, optou-se pelo MLE para a análise da capacidade resistente de placas submetidas às tensões normais. Sendo assim, a deformação máxima da placa não é subestimada, o que contribui para menores espessuras, evitando a ocorrência de superdimensionamentos.

#### 2.5.1.1 Método da Largura Efetiva

Johansson *et al.* (2007) e Beg *et al.* (2010), baseando-se no item 4.1 da EN 1993-1-5:2006, explicam que o MLE pode ser aplicado para a verificação da capacidade resistente aos efeitos das tensões normais, quando os seguintes requisitos são cumpridos:

- os painéis e subpainéis devem ser retangulares ou quase retangulares (visto que o método foi desenvolvido para painéis de almas e mesas com larguras constantes) e, para estes, o ângulo  $\theta$  (Figura 2-9) não deve exceder  $10^\circ$ ;
- as placas podem ser enrijecidas ou não, sendo que, se forem, os enrijecedores devem ser alocados paralelamente à direção das tensões normais longitudinais (enrijecedores longitudinais) e/ou perpendicularmente a essa (enrijecedores transversais);
- os painéis também devem apresentar seção transversal constante e, quando a espessura do painel não é constante, deve ser considerada a menor de suas espessuras como a espessura equivalente;
- se existirem aberturas enrijecidas ou entalhes, esses devem ser pequenos, possuindo diâmetros que não ultrapassem  $0,05 b$ , sendo  $b$  a maior largura do painel (Figura 2-9);
- previne-se a ocorrência de flambagem de alma induzida por flambagem de mesa, optando por uma esbeltez de alma ( $b/t_w$ ) apropriada, ou por enrijecimento adequado.

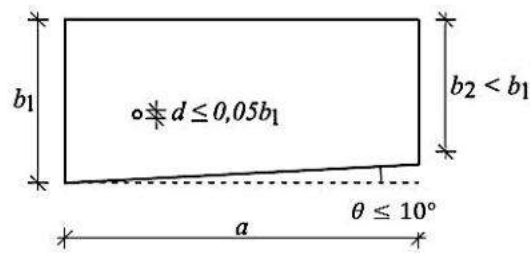


Figura 2-9. Representação de um painel uniforme. Fonte: adaptado de Beg *et al.* (2010)

Como foi abordado, o método é baseado na determinação da seção transversal reduzida dos elementos. Sendo assim, determina-se a área efetiva de cada subpainel, a fim de que seja considerada a possibilidade de ocorrência de flambagem local. Em seguida, outra redução é estabelecida na área de toda placa enrijecida, para que seja estimada a possibilidade de ocorrência de flambagem global. Logo após, define-se a área efetiva da parte comprimida e, por fim, a área efetiva total da placa enrijecida. A partir de então, obtém-se a capacidade resistente última, que em seguida é verificada quanto às tensões normais solicitantes por meio de equações preconizadas pela norma.

Beg *et al.* (2010) destacam que a capacidade resistente última das placas, principalmente, daquelas com pequenas dimensões, depende dos dois tipos de comportamento explicados anteriormente (Comportamento Tipo Placa e Comportamento Tipo Pilar). Para a análise do comportamento pós-flambagem, uma interpolação adequada entre ambos deve ser adotada. Com isso, são definidos coeficientes de redução de flambagem para o Comportamento Tipo Placa,  $\rho$ , e para o Comportamento Tipo Pilar,  $\chi_c$ , sendo, por fim, um coeficiente de redução final,  $\rho_c$ , determinado conforme a Equação (2.16). Os valores de  $\rho$  e  $\chi_c$  são obtidos a partir das considerações do capítulo 4 da EN 1993-1-5:2006.

$$\rho_c = (\rho - \chi_c) \xi (2 - \xi) + \chi_c \quad (2.16)$$

Onde:

-  $\xi$  é o coeficiente de suscetibilidade à flambagem relacionada ao Tipo Placa ou ao Tipo Pilar, que mede o quanto a tensão crítica de flambagem elástica do Tipo Placa,  $\sigma_{cr,p}$ , dista da tensão crítica de flambagem elástica do Tipo Pilar,  $\sigma_{cr,c}$ , de acordo com a Equação (2.17).

$$\xi = \frac{\sigma_{cr,p}}{\sigma_{cr,c}} - 1, \text{ com } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (2.17)$$

Johansson *et al.* (2007) explicam que o comportamento real da placa reflete essa interação, de modo que, frequentemente, se apresenta como situação intermediária entre as duas situações extremas de comportamento. Sendo assim, a capacidade resistente de uma placa enrijecida longitudinalmente, no Estado Limite Último (ELU), deve ser obtida através de  $\rho_c$ , tal que  $\chi_c \leq \rho_c \leq \rho$ .

No MLE, o valor do coeficiente  $\rho_c$  é importante ao cálculo da área efetiva total,  $A_{eff}$ , que influenciará diretamente no valor de cálculo dos esforços resistentes. Sendo assim, a determinação precisa de seu valor é fundamental na verificação da capacidade resistente última, a fim de que se evitem problemas de superdimensionamentos e situações contra a segurança estrutural.

Os autores ainda explanam que a flambagem referente ao Comportamento Tipo Placa não é mais restritiva ao dimensionamento da placa que aquela influenciada pelo Tipo Pilar, ou seja,  $\sigma_{cr,p} \geq \sigma_{cr,c}$ . Com isso, o resultado do coeficiente de suscetibilidade à flambagem,  $\xi$ , é sempre um valor positivo. O comportamento Tipo Pilar torna-se irrelevante quando  $\sigma_{cr,p}$  é significativamente maior que  $\sigma_{cr,c}$ , como, por exemplo, quando  $\sigma_{cr,p} \geq 2\sigma_{cr,c}$ . Com isso,  $\rho_c = \rho$ , já que o valor máximo de  $\xi$  é igual a 1.

Além disso, de acordo com Beg *et al.* (2010), quando se adota  $\rho_c = \chi_c$ , uma abordagem simples do dimensionamento de placas enrijecidas torna-se possível. Porém, essa também é conservadora. Deste modo, a resistência pós-crítica da placa enrijecida relacionada à flambagem global é totalmente desprezada, considerando-se apenas a resistência pós-crítica dos subpainéis. Para placas com grandes dimensões, esta abordagem é bastante imprecisa, já que em alguns casos a relação entre  $\rho/\chi_c$  pode ultrapassar o valor de 2.

A interpolação entre os fatores de redução  $\rho$  e  $\chi_c$  preconizada pela EN 1993-1-5:2006 é ilustrada na Figura 2-10.



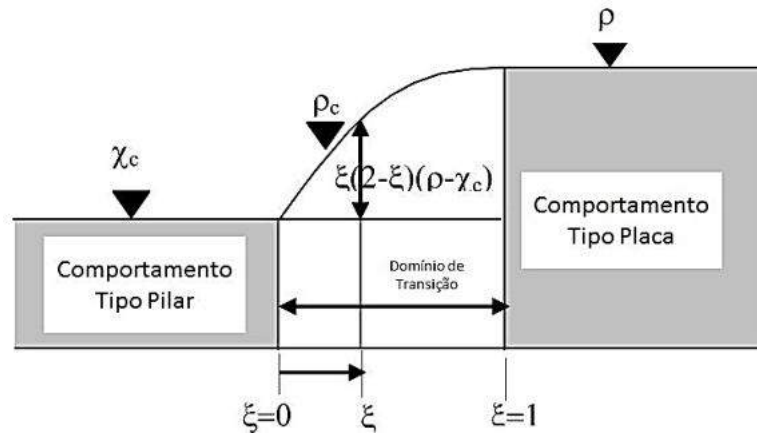


Figura 2-10. Interpolação entre os comportamentos Tipo Placa e Tipo Pilar. Fonte: adaptado de Johansson *et al.* (2007)

### 2.5.2 Método do Campo de Tensões Rotacionado para a verificação da capacidade resistente aos esforços cortantes

Segundo Lebet e Hirt (2013), a capacidade resistente ao cisalhamento de vigas com seção transversal do tipo I é primeiramente fornecida pela alma. No caso de vigas de pontes e viadutos, geralmente almas são esbeltas e, portanto, ainda mais susceptíveis à flambagem local causada por tensões cisalhantes. Na Figura 2-11, tanto o comportamento pré-flambagem, quanto o comportamento pós-flambagem de placas de alma de vigas esbeltas submetidas à tensão de cisalhamento são apresentados.

Silva e Gervásio (2007) explicam que ao atingir a tensão crítica de flambagem devido aos esforços cisalhantes,  $\tau_{cr}$ , a placa apresenta modo de flambagem com formato de meia onda na direção da tensão principal de tração,  $\sigma_1$ , e de uma onda, no mínimo, na direção da tensão principal de compressão,  $\sigma_2$ . Neste sentido, a flambagem da diagonal comprimida, apesar de não representar a falha do painel, faz com que a placa perca a capacidade de resistir tensões normais adicionais na direção de  $\sigma_2$ . Com isso, torna-se impossível o aumento significativo de tensões nessa direção. Ao contrário, na direção de  $\sigma_1$ , as tensões ainda podem aumentar, até que se atinja o valor da tensão de escoamento do aço. Logo, o comportamento último estável da placa e sua capacidade resistente adicional são fornecidos unicamente pela diagonal tracionada.

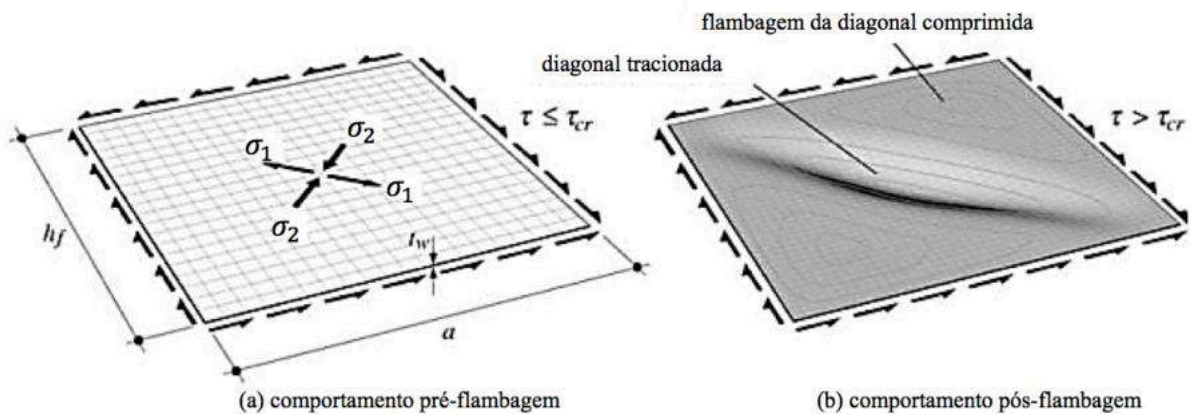


Figura 2-11. Comportamentos pré-flambagem e pós-flambagem de placas submetidas ao cisalhamento. Fonte: adaptado de Lebet e Hirt (2013)

Conforme Beg *et al.* (2010), surgem tensões de diferentes intensidades, podendo ser visualizados valores de tração maiores que de compressão. Isso acarreta no desequilíbrio das tensões principais, o que induz a ocorrência de forças adicionais de tração em mesas e enrijecedores transversais, formando o campo de tração (Figura 2-12.a).

Silva e Gervásio (2007) descrevem ainda que a capacidade resistente última de placas solicitadas por esforços cortantes, que é comumente denominada de capacidade resistente do campo de tração, corresponde à sobreposição da contribuição da resistência crítica elástica, que é advinda do comportamento pré-flambagem, e do campo de tração, que é originado a partir de forças de tração adicionais adquiridas no comportamento pós-flambagem. Na Figura 2-12.b, pode-se observar a formação da rótula plástica, quando se atinge a resistência última da placa.

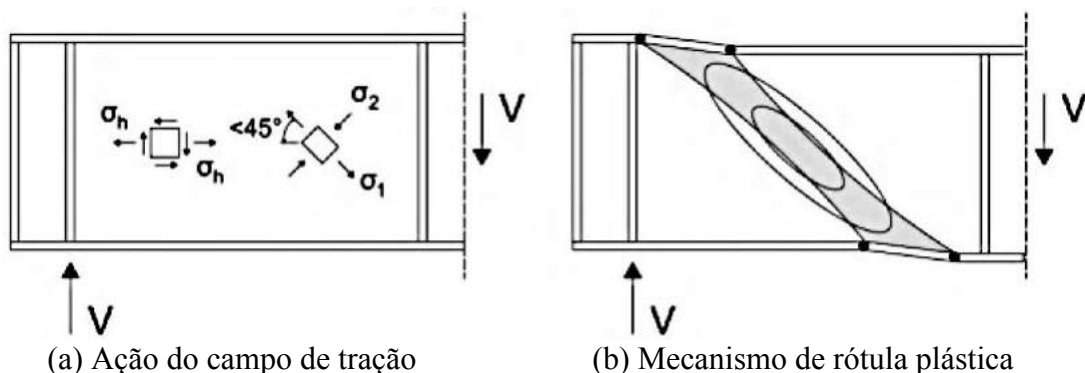


Figura 2-12. Alma de uma viga de seção transversal do tipo I submetida ao cisalhamento. Fonte: adaptado de Beg *et al.* (2010)

Como abordado anteriormente, muitas teorias fundamentadas no campo de tração foram desenvolvidas. Entre essas, destaca-se o método de Höglund (1998), que é conhecido como Método do Campo de Tensões Rotacionado e foi adotado pela EN 1993-1-5:2006.

Inicialmente, tal método foi desenvolvido para painéis de vigas com elevada razão de aspecto ( $\alpha > 3$ ), sem enrijecedores longitudinais, sem enrijecedores transversais intermediários e com enrijecedores transversais nos apoios. Isso porque, para estes tipos de painéis, outros métodos conduziam a resultados muito conservadores. Posteriormente, modificações ocorreram, a fim de que o dimensionamento também atendesse casos com enrijecedores longitudinais e as contribuições de mesas e enrijecedores transversais fossem levadas em consideração. Por fim, como proporcionou resultados adequados para casos usuais, independente da razão de aspecto considerada e atendendo também o dimensionamento de painéis enrijecidos transversalmente e longitudinalmente, foi reconhecido e adotado pela EN 1993-1-5:2006. Com isso, tornou-se base dos procedimentos analíticos fornecidos pela norma para a determinação da capacidade resistente última de placas submetidas aos esforços cisalhantes.

Johansson *et al.* (2007) resumem que o método adota uma hipótese básica associada à inexistência de tensões de membrana na direção transversal da alma: o que realmente é verdadeiro para almas de vigas com grandes dimensões e com enrijecedores transversais apenas sobre os apoios. Sendo assim, como as tensões de membrana de compressão,  $\sigma_2$ , não aumentam e as tensões de membrana de tração,  $\sigma_1$ , ainda crescem até que a capacidade resistente última seja alcançada, para que exista o equilíbrio, requer-se a rotação do campo de tensões, conforme pode ser visualizado na Figura 2-13b. Com isso, o ângulo  $\phi$  (Figura 2-13.h) deve ser menor, para que se mantenha o equilíbrio.

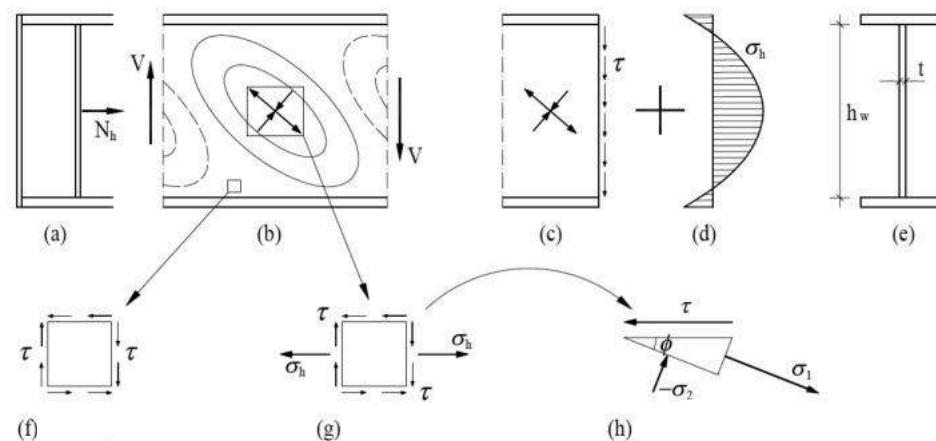


Figura 2-13. Modelo do Método do Campo de Tensão Rotacionado. Fonte: adaptado de Johansson *et al.* (2007)

Por fim, os valores das tensões principais devem ser determinados a fim de que, aplicando o critério de *von Mises* e limitando  $\sigma_2$  ao valor máximo de  $\tau_{cr}$ , a tensão relacionada à capacidade resistente última ao cisalhamento da alma,  $\tau_u$ , seja obtida. Por muitos autores, tal resistência é denominada de capacidade teórica.

A EN 1993-1-5:2006 fornece um procedimento de cálculo para a verificação da capacidade resistente aos efeitos das tensões cisalhantes, que é válido somente quando os seguintes critérios são respeitados:

- painéis devem ser retangulares e mesas paralelas, sendo que o ângulo  $\theta$  (Figura 2-9) não deve exceder  $10^\circ$ ;
- almas podem ser reforçadas por enrijecedores transversais e/ou longitudinais;
- se existirem aberturas enrijecidas ou entalhes, estes devem ser pequenos, possuindo diâmetros que não ultrapassem  $0,05 b$ , sendo  $b$  a maior largura da alma;
- elementos que constituem a placa devem possuir seção transversal uniforme;

A norma descreve o procedimento da verificação e apresenta equações para o cálculo da capacidade resistente total aos esforços cortantes,  $V_{b,Rd}$ , que podem ser consultadas em seu capítulo 5. Ressalta-se que a contribuição da alma, retratada na sequência, tem papel preponderante no cálculo da resistência à tensão de cisalhamento.

#### 2.5.1.1 Determinação da contribuição da alma à resistência ao cisalhamento

De acordo com a EN 1993-1-5:2006, o valor de contribuição da alma para a capacidade resistente última aos esforços cisalhantes,  $V_{bw,Rd}$ , é determinado através da Equação (2.18).

$$V_{bw,Rd} = \chi_w \frac{f_{yw} h_w t_w}{\sqrt{3} \gamma_{M1}} \quad (2.18)$$

Onde:

- $\chi_w$  é o coeficiente de redução relacionado à capacidade resistente à flambagem da alma devido às tensões de cisalhamento;

Para almas apenas enrijecidas transversalmente nos apoios e para aquelas também reforçadas por enrijecedores transversais intermediários e/ou enrijecedores longitudinais,  $\chi_w$  deve ser obtido a partir de equações e curvas dispostas, respectivamente, na Tabela 2-1 e na Figura 2-14.

Sendo assim, percebe-se que o valor de  $\chi_w$  depende da situação na qual as extremidades da alma se encontram. Observe que há diferença de valores entre casos de extremidades com enrijecedores transversais rígidos e flexíveis. Isso se deve ao fato de que, para o cálculo de  $\chi_w$ , são consideradas componentes de força cortante pura e ancoragem de forças de membrana proporcionada por enrijecedores transversais de extremidade devido à ação do campo de tração. Portanto, a rigidez axial e rigidez à flexão desses enrijecedores interferem na reserva pós-crítica, alterando a capacidade resistente última.

Percebe-se que para a determinação de  $\chi_w$  são necessários o coeficiente de esbeltez,  $\bar{\lambda}_w$ , e o coeficiente relacionado ao tipo de aço utilizado,  $\eta$ .

Se tratando de um painel enrijecido,  $\bar{\lambda}_w$  é adotado como o valor do maior coeficiente de esbeltez encontrado dentre o de todos os subpainéis que constituem a placa. O coeficiente de esbeltez  $\bar{\lambda}_w$ , para almas enrijecidas longitudinalmente é simplificado de acordo com a seguinte equação:

$$\bar{\lambda}_w = \max\left(\frac{h_w}{37,4 t_w \varepsilon \sqrt{k_\tau}}; \frac{h_{wi}}{37,4 t_w \varepsilon \sqrt{k_{\tau i}}}\right) \quad (2.19)$$

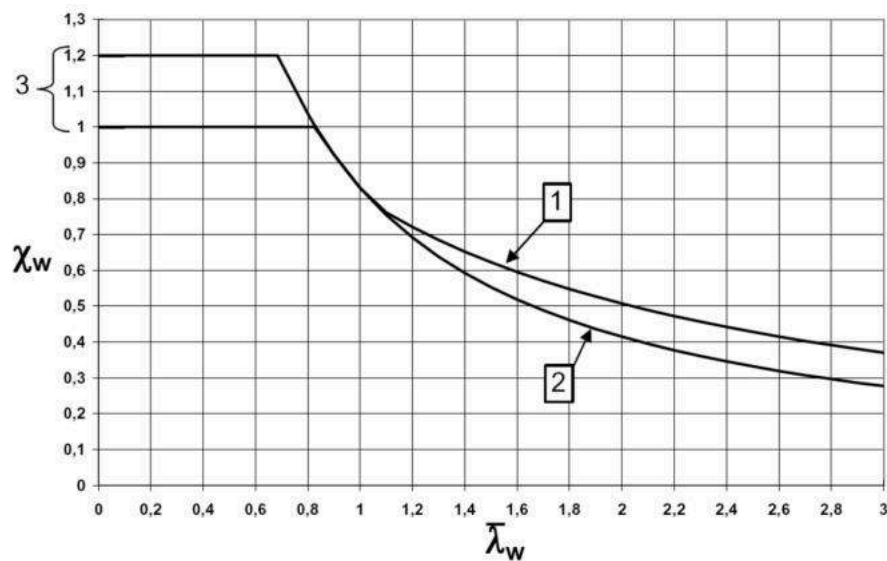
Onde:

- $h_{wi}$  é a altura livre de subpainéis  $i$ ;
- $\varepsilon$  é o fator de escoamento;
- $k_{\tau i}$  é o coeficiente de flambagem de subpainéis  $i$  devido às tensões de cisalhamento, que deve ser calculado pelas Equação (2.9) e Equação (2.11), adotando  $k_{\tau sl} = 0$ ;

Quanto ao coeficiente  $\eta$ , esse é igual a 1,2, para aços de classe de resistência até S460, ou seja, com  $f_y \leq 460$  MPa, e 1,0, para os demais. A norma EN1993-1-1:2005 determina que o coeficiente também pode ser igual a 1,0, a partir de uma proposição mais conservadora.

Tabela 2-1. Determinação do coeficiente de redução  $\chi_w$  através de formulações. Fonte: adaptado de EN 1993-1-5:2006

	Extremidade com Enrijecedor Transversal Rígido	Extremidade com Enrijecedor Transversal Não Rígido
$\bar{\lambda}_w < 0,83/\eta$	$\eta$	$\eta$
$0,83/\eta \leq \bar{\lambda}_w < 1,08$	$0,83/\bar{\lambda}_w$	$0,83/\bar{\lambda}_w$
$\bar{\lambda}_w \geq 1,08$	$1,37/(0,7 + \bar{\lambda}_w)$	$0,83/\bar{\lambda}_w$



- 1) Extremidade com enrijecedor transversal rígido;
- 2) Extremidade com enrijecedor transversal flexível;
- 3) Variação sugerida de  $\eta$ ;

Figura 2-14. Determinação do coeficiente de redução  $\chi_w$  através de diagramas. Fonte: adaptado de EN 1993-1-5:2006

### 2.5.3 Análise avançada

Para o estudo da capacidade resistente última via MEF, uma análise avançada geometricamente e materialmente não linear com imperfeições (*GMNIA*) deve ser executada. Para isso, o Método de *Riks* (Riks, 1979) geralmente é utilizado. Sendo assim, problemas de pós-flambagem são avaliados, de modo que imperfeições devem ser introduzidas por perturbações na geometria. Geralmente, essas perturbações possuem o aspecto dos modos de flambagem obtidos na análise de flambagem elástica. Logo, executa-se primeiro a análise linearizada, para que, então, a capacidade resistente última seja avaliada. O Método de *Riks* baseia-se no Método do

Comprimento de Arco (*Arc Length Method*), sendo melhor detalhado nos trabalhos de Castro e Silva (2006) e Vasios (2015).

Para esse tipo de análise, a EN 1993-1-5:2006 também apresenta no anexo C importantes recomendações. Dentre essas, destaca-se aquelas relacionadas às imperfeições (item C.5) e propriedades dos materiais (item C.6). Nos trabalhos de Silva e Gervásio (2007) e Beg *et al.* (2010), orientações também são sugeridas para direcionar a aplicação da análise avançada para a obtenção da capacidade resistente última.

Quanto à escolha das propriedades dos materiais, verifica-se que algumas hipóteses podem ser assumidas com o objetivo de representar o comportamento do aço. Sendo assim, o material pode ser considerado em regime elastoplástico perfeito (Figura 2-15.a), elastoplástico perfeito com inclinação nominal do patamar de escoamento (Figura 2-15.b), elastoplástico com encruamento linear (Figura 2-15.c) e elastoplástico não linear (Figura 2-15.d).

Quanto à introdução de imperfeições, a norma europeia prescreve que devem ser incluídas aquelas relacionadas à geometria e às tensões residuais da estrutura. Com isso, aborda o conceito de imperfeições geométricas equivalentes, nas quais ambas imperfeições são consideradas. Além disso, apresenta a Tabela C.2 e a Figura C.1, nas quais aspectos e amplitudes de imperfeições equivalentes são determinados.

A norma possibilita utilizar os modos de flambagem como formato para as imperfeições consideradas, descrevendo que a direção da imperfeição deve ser adotada de tal modo que garanta a menor resistência final. Ademais, também viabiliza a reprodução das imperfeições geométricas equivalentes através de forças fictícias apropriadas que atuam na estrutura. Contudo, prescreve que, quando mais de uma imperfeição for considerada, é necessário definir alguma delas como base, reduzindo a amplitude das demais a 70% de seus valores. A escolha da “imperfeição base” é arbitrária, sendo as outras imperfeições concomitantes.

Silva e Gervásio (2007) enfatizam que a consideração de imperfeições é o maior obstáculo à utilização de MEF para a análise de problemas estruturais. Observa-se na literatura que, em análises do comportamento pós-flambagem, a introdução de imperfeições geométricas e tensões residuais não segue um padrão, sendo realizada de diferentes maneiras. Isso pode ser verificado ao se comparar trabalhos recentes, nos quais se objetiva estudar o comportamento último de placas esbeltas enrijecidas, ver Pavlovčič *et al.* (2007), Beg *et al.* (2010), Sinur e Beg

(2010), Braun (2010), Sinur e Beg (2013a), Sinur e Beg (2013b), Kövesdi *et al.* (2014), Jáger *et al.* (2018) e Martin *et al.* (2019).

No programa ABAQUS, a análise avançada gera, por convergência, um fator de proporcionalidade de força (*LPF*), que, ao ser aplicado à tensão inicial, indica o valor da tensão última. Deste modo, a capacidade resistente última da peça estrutural é estabelecida.

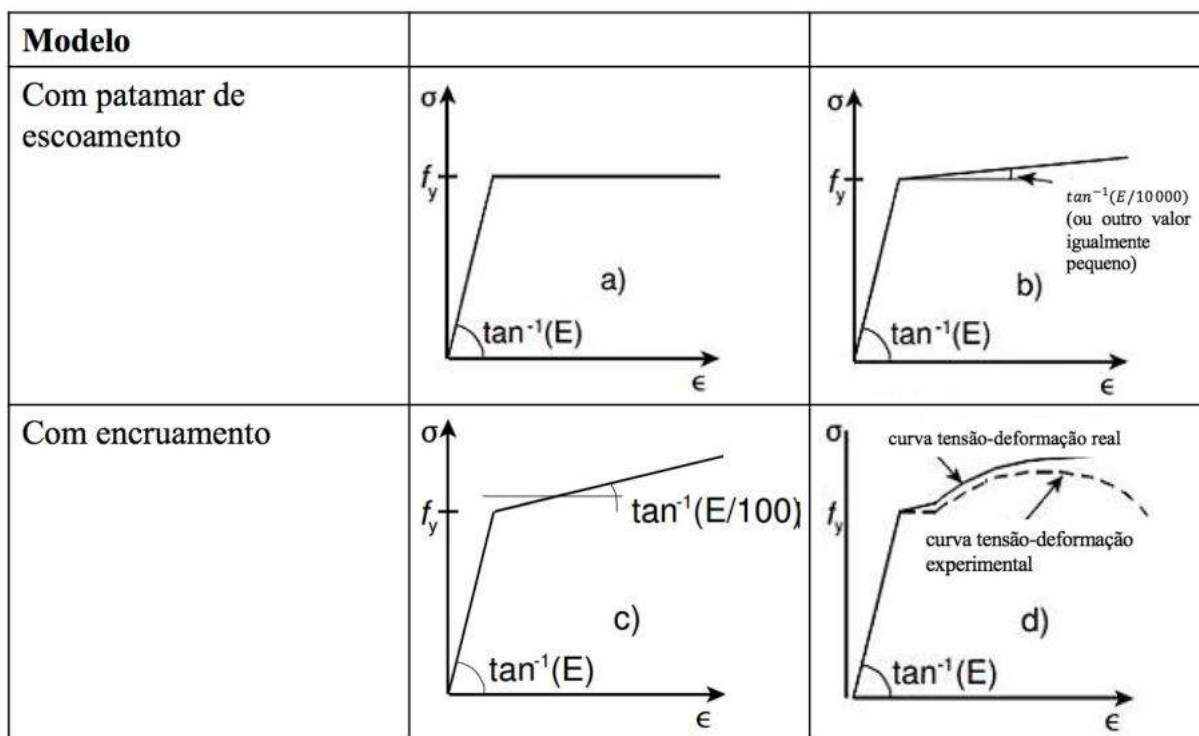


Figura 2-15. Diagramas de tensão *versus* deformação para reprodução do comportamento do aço. Fonte: adaptado de EN 1993-1-5:2006



# 3 MODELO NUMÉRICO

## 3.1 Considerações Iniciais

O Método dos Elementos Finitos é uma ferramenta importante na resolução de diferentes tipos de problemas no campo da Mecânica dos Sólidos. A partir da aplicação de programas computacionais baseados no método, o comportamento físico de estruturas é simulado, possibilitando que respostas aproximadas sejam encontradas, sem a necessidade de onerosos testes experimentais. Entretanto, a elaboração do modelo matemático requer extremo cuidado relacionado às informações quanto à geometria, ao material, ao carregamento e às condições de contorno que serão simuladas. Na verdade, a correta representação destes fatores é preponderante para que as respostas numéricas sejam precisas e o comportamento real das estruturas seja exatamente reproduzido.

Após o modelo ser elaborado, a estrutura contínua é discretizada a partir de pequenos elementos finitos. O modo com o qual este refinamento é realizado colabora para a exatidão do estudo. Com isso, é importante que se escolha corretamente o elemento finito a ser aplicado, bem como suas dimensões. Este processo, além de contribuir para a precisão das aproximações, também é fundamental para diminuir o custo computacional da análise numérica.

Além disso, é primordial que se tenha domínio não só sobre a teoria do método, como também sobre o programa computacional utilizado para aplicá-lo. Apenas assim, corretas interpretações serão realizadas sobre as respostas obtidas. Sendo assim, o programa computacional comercial ABAQUS 6.14, cujas aplicabilidades foram mencionadas anteriormente, foi utilizado para o desenvolvimento do modelo matemático.

Com isso, as considerações para as simulações numéricas, que são descritas na sequência, foram fundamentais não só para que o modelo numérico desenvolvido fosse capaz de representar o fenômeno de flambagem global e o colapso de placas enrijecidas longitudinalmente, mas também se mostrasse como uma nova forma mais geral e precisa, em relação aos procedimentos já existentes, para o estudo do comportamento de almas enrijecidas.

### 3.2 Geometria

Para o estudo do comportamento de almas esbeltas enrijecidas de vigas de aço isolado, placas reforçadas a partir de enrijecedores longitudinais foram modeladas. Para possível comparação com análises normativas e computacionais, a geometria das placas foi escolhida em função de seções transversais cujo dimensionamento é previsto nos procedimentos normativos da EN 1993-1-5:2006 e na abordagem do EBPlate 2.01. Além disso, outras seções também foram estudadas, a fim de demonstrar a generalidade do modelo numérico. Em suma, as seguintes propriedades geométricas foram adotadas (Figura 3-1):

- placas retangulares com espessura uniforme ao longo de toda seção;
- enrijecedores longitudinais com seção transversal aberta (retangular sólida);
- comprimento do painel,  $a$ , igual a 5000 mm;
- largura do painel,  $b$ , igual a 3000 mm;
- altura do enrijecedor,  $h_s$ , igual a 100 mm;
- espessura do enrijecedores,  $t_s$ , igual a 12,5 mm;
- comprimento do enrijecedor igual ao comprimento do painel;

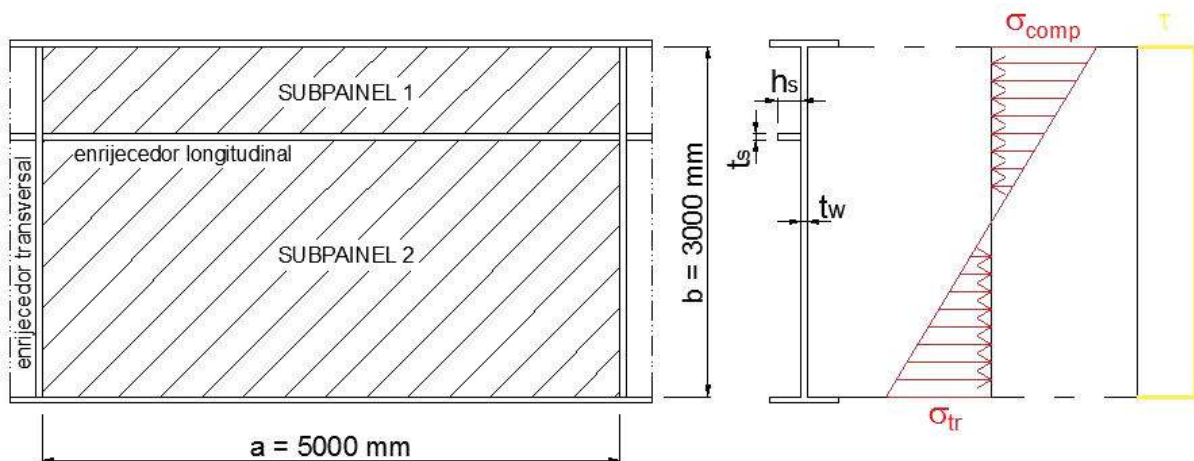


Figura 3-1. Geometria das placas e enrijecedores estudados

Percebe-se que a razão de aspecto  $\alpha$  foi propositalmente escolhida igual a 1,68. Isso se deve ao fato de que o objetivo do trabalho é estudar a flambagem elástica e a capacidade resistente última relacionadas ao comportamento global (Comportamento Tipo Placa). Sendo assim, para se evitar o Comportamento Tipo Pilar, cuja ocorrência está relacionada, geralmente, a valores de  $\alpha$  menores que 1,00, tal razão de aspecto foi determinada.

Além disso, as dimensões dos enrijecedores também foram estabelecidas intencionalmente. Optou-se por enrijecedores que não fossem esbeltos, de modo a não apresentarem flambagem local. Já a geometria retangular sólida foi escolhida por ser a mais usual em reforços de placas de alma de vigas esbeltas de seção transversal do tipo I.

Quanto à quantidade e posição dos enrijecedores, a nível de comparação com a norma europeia, foram adotados 1 e 2 enrijecedores alocados na zona de compressão. Para placas com 1 enrijecedor, esse foi posicionado a uma distância igual a  $b/4$  da borda longitudinal superior da placa. Para placas com 2 enrijecedores, o primeiro foi alocado a uma distância igual a  $b/6$  da borda longitudinal e o segundo, a uma distância  $b/6$  do primeiro. Placas com três enrijecedores na região comprimida também foram modeladas, de modo a reiterar a maior abrangência do modelo numérico em relação à normatização. Para estas, os enrijecedores foram dispostos a partir de um espaçamento entre si de valor igual a  $b/8$ .

É importante ressaltar que, em vigas esbeltas, almas são geralmente dimensionadas com a razão  $b/t_w$  elevada. De acordo com a norma europeia EN 1993-1-1:2005, quando essa razão atinge valores maiores que  $124\varepsilon$  (sendo  $\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$ , com  $f_y$  em MPa), almas submetidas à flexão são consideradas pertencentes à Classe 4. Ou seja, a flambagem local ocorre antes que se alcance o escoamento. Deste modo, a partir deste limite, a alma é assumida como esbelta.

É válido salientar também que, dependendo da espessura  $t_w$ , o efeito do enrijecedor na placa pode ser rígido ou flexível. Sendo assim, neste trabalho, a propriedade geométrica parametrizada foi justamente a espessura da placa, a fim de que comparações entre os diferentes procedimentos fossem realizadas, quando a rigidez relativa do enrijecedor,  $\gamma$ , é alterada, o que é detalhado no capítulo 4.

### 3.3 Material

Na simulação do comportamento do material, o ABAQUS 6.14 fornece diferentes modelos constitutivos relacionados tanto às respostas elásticas, quanto às inelásticas. No estudo de flambagem elástica, como o comportamento do material é linearizado, a curva tensão-deformação, a partir do patamar de escoamento, é ignorada. Sendo assim, o aço estrutural foi simulado obedecendo a Lei de Hooke com o módulo de elasticidade,  $E$ , igual a 200.000 MPa

e coeficiente de Poisson,  $\nu$ , igual a 0,3, até que a resistência ao escoamento,  $f_y$ , igual a 345 MPa, fosse alcançada.

Em análises avançadas, nas quais se objetiva determinar a capacidade resistente última da estrutura, também é necessário incluir a não linearidade do material. Como o diagrama real de tensão *versus* deformação do aço é complexo, incluindo o encruamento após a tensão ultrapassar o patamar de escoamento, diagramas simplificados geralmente são aplicados para simular o comportamento não linear.

Com isso, os diagramas ilustrados na Figura 2-15 foram testados, verificando-se pouca ou nenhuma diferença entre os resultados. Isso é justificado pelo fato de que a tensão última de placas esbeltas geralmente é inferior ao patamar de escoamento. Desta maneira, optou-se por representar o material a partir de um diagrama bilinear constituído por duas fases lineares, sendo uma responsável por reproduzir o regime elástico e outra, o regime plástico. O diagrama é conhecido como elastoplástico perfeito com inclinação nominal do patamar de escoamento, sendo também recomendado pela norma europeia (Figura 2-15.b).

### 3.4 Imperfeições

No trabalho de Beg *et al.* (2010), um exemplo de placa reforçada por dois enrijecedores na zona de compressão é demonstrado. Quanto às imperfeições geométricas equivalentes, os autores analisam a estrutura sob nove situações diferentes, sendo uma sem imperfeição aplicada, duas adotando o formato de modos de flambagem obtidos numericamente, três considerando curvas senoidais e três considerando a combinação destas últimas três. Verificou-se que as imperfeições globais (aspecto de modo de flambagem global), tanto aquela obtida numericamente, quanto aquela representada pela curva senoidal, apresentaram as menores resistências e se aproximaram significativamente do resultado obtido pela utilização do procedimento analítico da norma europeia.

Conforme Braun (2010), é uma decisão razoável a escolha da imperfeição geométrica equivalente mais simples possível, principalmente, em casos nos quais o estudo exige uma série de parametrizações. O autor aborda que, nestas situações, a função da imperfeição deve ser a de simular o comportamento físico de uma flambagem global. Além disso, a partir da introdução de diferentes aspectos de imperfeições, Kövesdi (2019b) concluiu que a imperfeição com aspectos de modos de flambagem local teve efeito negligenciável em suas simulações.

Sobre o assunto, Timmers *et al.* (2018) propõem a utilização de aspectos de imperfeição simplificados, utilizando apenas modos de flambagem global. Salientam, ainda, que a direção da aplicação da imperfeição tem efeito significativo nos resultados de capacidade resistente última de painéis. Com isso, deve-se aplicar amplitudes de imperfeição positivas e negativas, sendo considerado o menor valor de resistência encontrado.

Por conseguinte, imperfeições geométricas equivalentes foram introduzidas ao modelo numérico para a execução das análises avançadas. Para tanto, o aspecto de imperfeição adotado foi o modo de flambagem global obtido a partir da análise de flambagem elástica precedente. Além disso, a amplitude da imperfeição foi definida igual a  $\pm (b/400)$ , conforme recomendado na Tabela C.2 da EN 1993-1-5:2006.

### 3.5 Carregamento e Condições de Contorno

Como nos trabalhos de Kövesdi (2019a), Kövesdi (2019b) e Martin *et al.* (2019), já se aborda a análise numérica da flambagem elástica e da resistência última referentes ao comportamento global para placas enrijecidas submetidas à compressão uniforme, neste trabalho, foram avaliadas placas submetidas à flexão, ao cisalhamento e à interação entre ambos os esforços. Para isso, foram adotadas distribuições lineares de tensão solicitante, nas quais a razão entre a tensão máxima de tração e a tensão máxima de compressão,  $\psi$ , é igual a  $-1$ , ou seja, ambas tensões possuem valores iguais e a linha neutra encontra-se no meio da seção transversal da placa. Para representar tal sollicitação, forças concentradas equivalentes foram aplicadas aos nós dos elementos finitos das bordas transversais das placas. Quanto ao cisalhamento, este foi considerado constante, sendo reproduzido a partir de um carregamento distribuído uniformemente ao longo de todas as bordas das placas. As duas sollicitações também foram aplicadas concomitantemente, a fim de avaliar valores de tensões críticas de flambagem elástica considerando a interação dos esforços. Nestes casos, o valor da tensão de cisalhamento foi igual a cerca de 10% da tensão máxima advinda da flexão. Em geral, os valores das tensões sollicitantes variaram de acordo com a espessura da placa analisada.

Na Figura 3-2, observa-se a representação dos esforços sollicitantes apresentados anteriormente e ilustrados na Figura 3-1, para um caso de placa reforçada a partir de dois enrijecedores na zona comprimida e submetida à interação de esforços.

Neste trabalho, apenas placas de alma simplesmente apoiadas foram analisadas. Entretanto, salienta-se que raramente painéis estão realmente submetidos só a este tipo de vínculo. Geralmente, algumas de suas bordas também são engastadas e apoiadas em outras placas de alma ou mesa que possuem rigidez significativa (Paik, 2018). Contudo, a nível de comparação com os procedimentos normativos, é interessante estabelecer que todas as bordas sejam simplesmente apoiadas, já que análises a favor da segurança são recomendadas no anexo C da norma europeia. Assim também é sugerido por Beg *et al.* (2010) e realizado por vários estudos numéricos encontrados na literatura, destacando-se os trabalhos de Martins *et al.* (2013) e Ljubinković (2019).

Na Figura 3-3, são exibidas as restrições necessárias para simular as placas simplesmente apoiadas. Percebe-se que o deslocamento em x foi restringido no ponto A, o deslocamento em y, em todas as bordas e o deslocamento em z, nos pontos B e C. Rotações em x foram restringidas somente nas bordas longitudinais, rotações em y, em todas as bordas e rotações em z, apenas nas bordas transversais. Estas considerações também foram fundamentais para que o comportamento da placa tendesse ao Comportamento Tipo Placa e o modo de flambagem global fosse facilmente verificado.

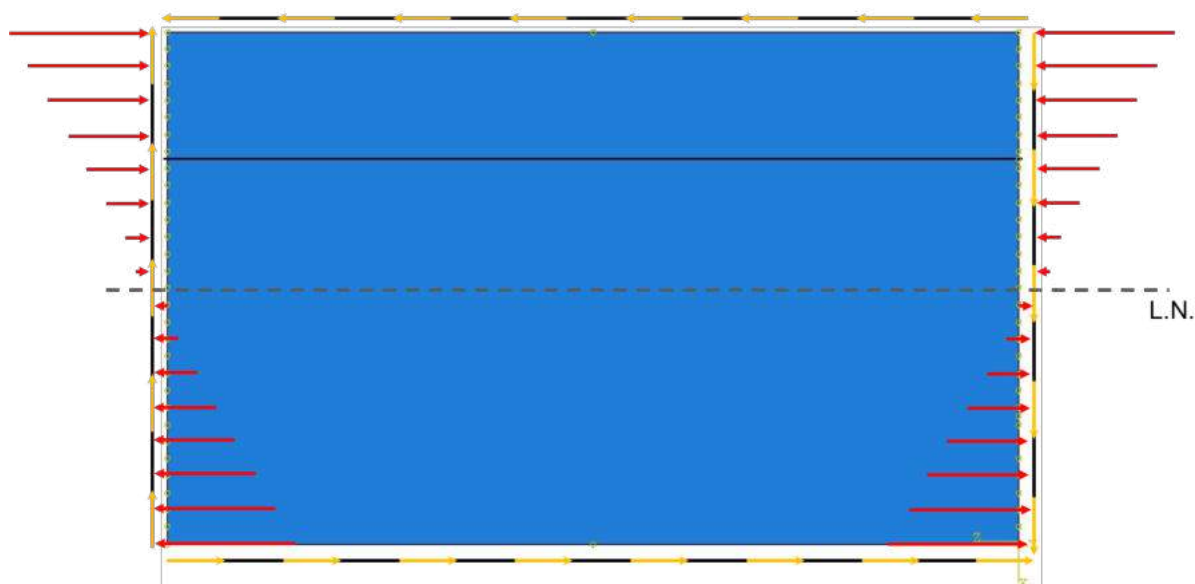


Figura 3-2. Representação da simulação das tensões solicitantes.

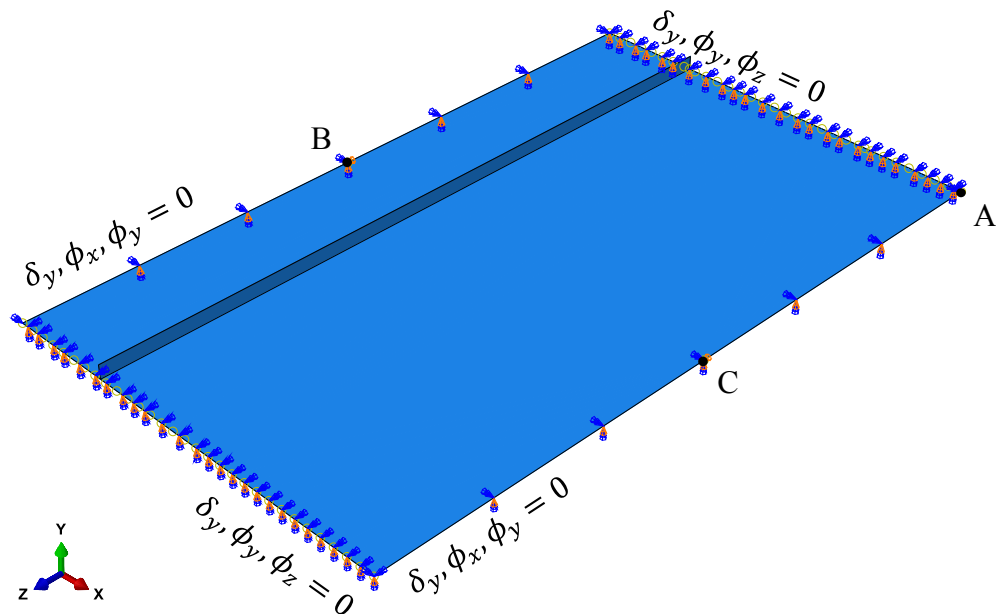


Figura 3-3. Representação das restrições de deslocamentos,  $\delta$ , e rotações,  $\phi$ .

### 3.6 Elementos Finitos e Discretização da Malha

Silva e Gervário (2007) e Beg *et al.* (2010), baseando-se nas orientações da norma europeia, propõem recomendações ao dimensionamento de estruturas metálicas constituídas por placas via MEF. Os autores discorrem que, dentre os elementos finitos que constam na biblioteca de elementos de programas computacionais, o uso dos elementos de casca é opção vantajosa, que garante que insuficiências sejam ultrapassadas, permitindo uma análise mais geral e precisa. Portanto, foram testados três tipos de elementos de casca para a determinação da melhor opção à reprodução do comportamento de placas retangulares reforçadas a partir de enrijecedores de seção transversal aberta (retangular sólida):

- a) S4: elemento de casca de quatro nós (aproximação linear) e integração completa, a partir de quatro pontos de integração;
- b) S4R: elemento de casca de quatro nós (aproximação linear) e integração reduzida, a partir de somente um ponto de integração;
- c) S8R: elemento de casca de oito nós (aproximação quadrática) e integração reduzida, a partir de quatro pontos de integração;

Os elementos lineares testados (S4 e S4R) possuem lados retos e mostraram-se vantajosos na análise das placas em questão. A geometria retilínea pôde ser, então, modelada com seu formato exato. Apesar do elemento S8R também ser capaz de representar a geometria em questão,

conforme o manual do ABAQUS 6.14 (SIMULIA, 2014), é apenas recomendado para casos de estruturas mais espessas.

Observou-se que os resultados referentes às malhas constituídas pelos elementos S4 e S4R apresentavam valores bem inferiores de tensões críticas de flambagem elástica se comparadas àquela formada por elementos S8R. Os desvios alcançados foram de até 11%. Além disso, quando comparadas às análises realizadas no EBPlate 2.01, os resultados obtidos por meio da aplicação dos elementos quadráticos distavam-se significativamente.

Por fim, optou-se pela utilização do elemento finito S4R por apresentar maior qualidade de resultados, se comparado ao elemento quadrático S8R, e custo computacional inferior, quando comparado ao elemento linear com integração completa, S4. Estas características do elemento propiciaram respostas precisas de modo mais rápido.

Como já foi descrito, o elemento S4R é um elemento de casca, com aproximação linear e lados retos, cuja integração é reduzida. O elemento possui 4 nós e cada nó apresenta seis graus de liberdade, sendo três translações e três rotações (Figura 3-4.a). Possui um ponto de integração na superfície (Figura 3-4.b) e foi configurado com 5 pontos de integração ao longo da espessura (Figura 3-4.c), sendo nestes utilizada a regra de integração numérica de *Simpson*. Para evitar a indução de modos espúrios de deformação, que é característica de integrações não completas e pode contribuir para formação de matrizes de rigidez artificialmente singulares, é aplicado o esquema de estabilização “*hourglass control*” (SIMULIA, 2014).

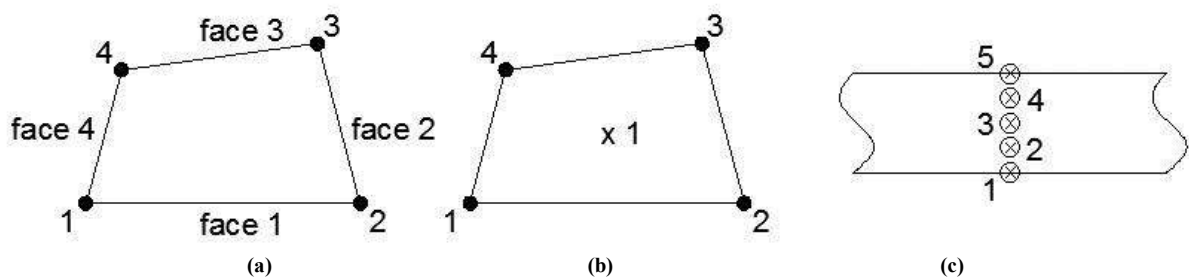


Figura 3-4. Ilustrações do elemento S4R

Após análises para a determinação do elemento, testes de sensibilidade de malha foram realizados a fim de definir suas dimensões. Para isso, placas com a geometria descrita na seção 3.2, reforçadas por dois enrijecedores, foram modeladas com esbeltez significativa. Além disso, as placas simuladas foram submetidas apenas à tensão uniforme de compressão, evitando que



casos de concentração de tensões interferissem nas análises em questão. Então, foram considerados elementos de lados iguais a 12,5, 25, 50 e 100 mm (Figura 3-5).

Sendo assim, a malha foi discretizada a partir de elementos de casca lineares S4R com lados de tamanho igual a 50 mm, uma vez que não houve diferenças expressivas entre os autovalores deste tipo de malha e malhas mais refinadas e o tempo de processamento foi significativamente inferior. Sendo assim, 6200 elementos, 6464 nós e 38784 variáveis relacionadas aos graus de liberdade foram gerados, ao todo, para cada placa modelada.

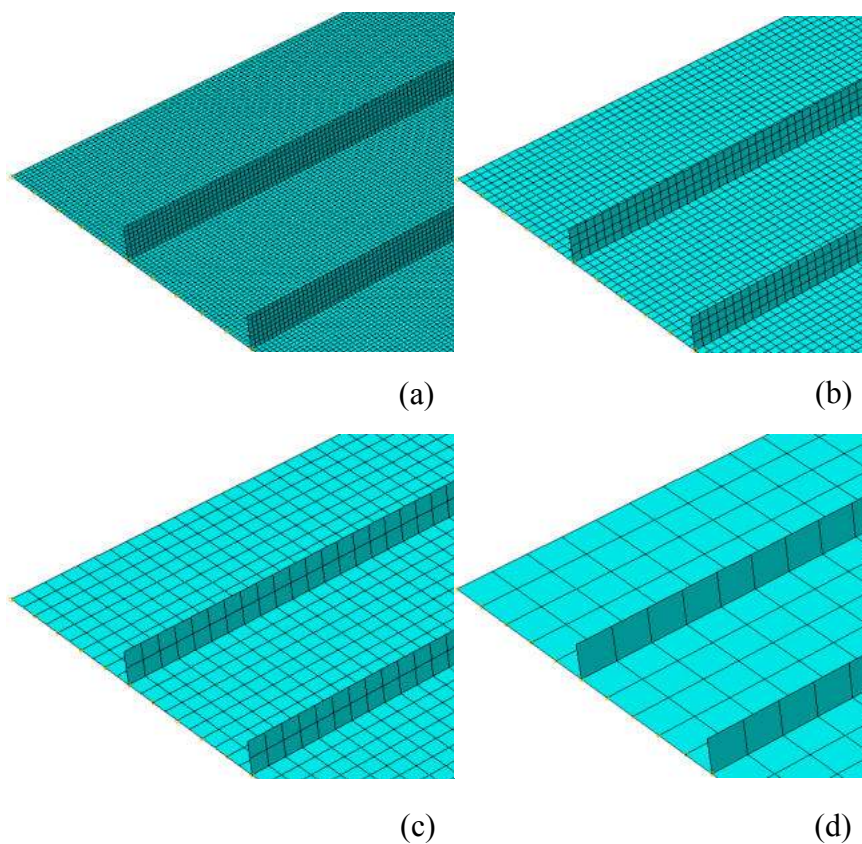


Figura	(a)	(b)	(c)	(d)
Dimensão (mm)	12,5	25	50	100
Autovalor	0,20857	0,20751	0,20324	0,18328

Figura 3-5. Testes de malha em uma placa de espessura igual a 8,9 mm reforçada a partir de dois enrijecedores longitudinais

### 3.7 Validação

Nos estudos baseados em métodos numéricos, comprovar a consistência dos modelos elaborados é essencial para que haja confiança nas análises realizadas e nas respostas obtidas. Geralmente, para isso, resultados numéricos são comparados a resultados analíticos ou experimentais, como também a outros resultados numéricos.

Nos trabalhos de Xu *et al.* (2018a) e Xu *et al.* (2018b), por exemplo, as simulações foram validadas a partir de expressões analíticas clássicas encontradas na literatura. Os autores comprovaram a consistência dos modelos tanto na análise de flambagem elástica, como em análises avançadas, com o intuito de definir equações confiáveis para a determinação do limiar de rigidez à flexão de enrijecedores verticais de paredes de aço. A partir deste limiar, a flambagem deixa de apresentar aspecto global relacionado a todo painel e inicia-se a ocorrência da flambagem local dos subpainéis. Além disso, a tensão crítica de flambagem elástica e a capacidade resistente última podem ser maiores dependendo da rigidez dos enrijecedores. Sendo assim, os comportamentos pré-flambagem e pós-flambagem devem ser estudados. A geometria das placas, bem como o carregamento aplicado e as condições de contorno utilizadas são apresentadas na Figura 3-6.

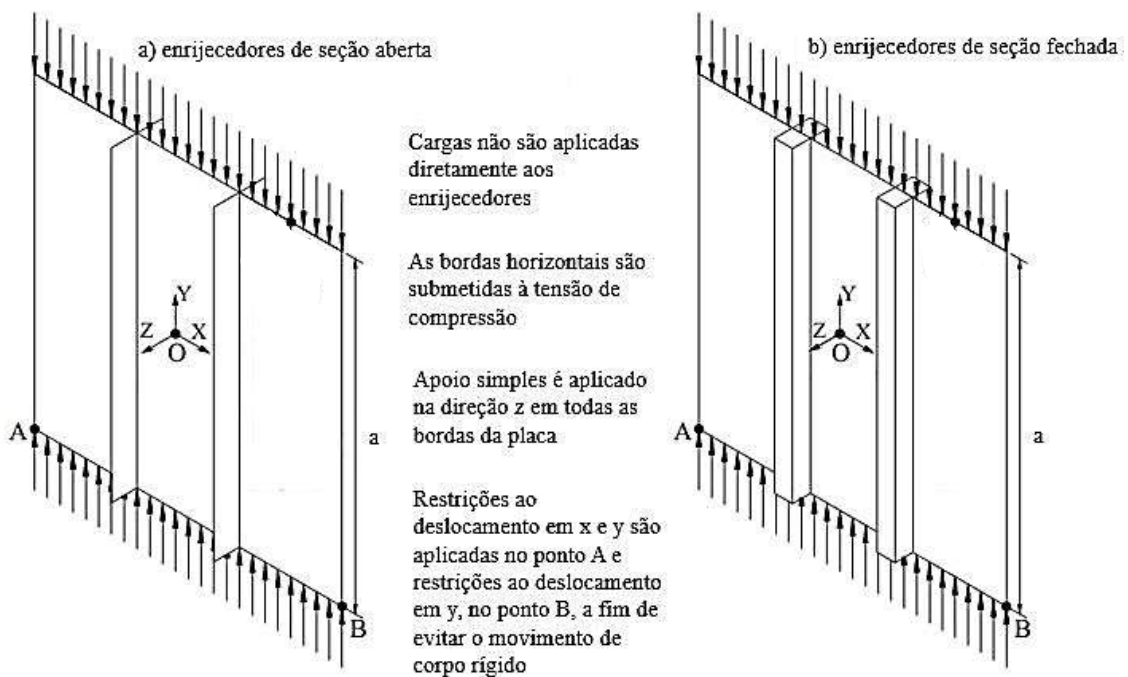


Figura 3-6. Geometria, carregamento e condições de contorno das placas enrijecidas de paredes de aço modeladas por Xu *et al.* (2018a). Fonte: adaptado de Xu *et al.* (2018a)

Por conseguinte, a validação do modelo numérico foi realizada de modo similar ao de Xu *et al.* (2018a). Primeiramente, placas reforçadas por dois enrijecedores posicionados de ambos os lados da placa e com as mesmas dimensões daquelas simuladas pelos autores foram analisadas a partir do estudo de flambagem elástica. Então, as aproximações numéricas foram confrontadas às respostas obtidas pela utilização da formulação clássica para tensão crítica proposta por Timoshenko e Gere (1961), que é definida de acordo com a Equação (3.1), e também aos resultados numéricos dos autores supracitados. Na sequência, placas com dois enrijecedores em apenas um dos lados da placa também foram analisadas, comparando as respostas numericamente obtidas com aquelas advindas da formulação clássica (Tabela 3-1).

$$\sigma_{cl} = \frac{kE\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t_w}{b_s}\right)^2 \quad (3.1)$$

Onde:

-  $k$  é o coeficiente de flambagem elástica, definido de acordo com a Equação (3.2);

$$k = \left(\frac{mb_s}{a} + \frac{a}{b_s m}\right)^2 \quad (3.2)$$

-  $b_s$  é a largura do maior subpainel;

-  $a$  é o comprimento total das bordas não comprimidas;

-  $m$  é o número de semi-ondas originadas na flambagem elástica;

Logo após, o modelo também foi verificado em relação ao comportamento pós-flambagem. Do mesmo modo, a metodologia de validação foi similar à de Xu *et al.* (2018a). A partir de análises avançadas, os autores obtiveram resultados de capacidade resistente última à compressão uniforme,  $P_{ul}$ , para que o coeficiente de redução de flambagem de placas,  $\rho$ , fosse definido e comparado à formulação de Winter (1968):

$$\rho_{Winter} = \frac{1}{\lambda_{sp}} \left(1 - \frac{0,22}{\lambda_{sp}}\right) \quad (3.3)$$

Onde:

$$\lambda_{sp} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cl}}} \quad (3.4)$$

Numericamente, os autores definiram a obtenção do coeficiente de redução de acordo com a seguinte equação:

$$\rho_{num} = \frac{\sigma_{ul}}{f_y} \quad (3.5)$$

Novamente, placas foram modeladas com as mesmas dimensões apresentadas por Xu *et al.* (2018a) e reforçadas por dois enrijecedores aplicados em ambos os lados da placa. Outras foram simuladas a partir de dois enrijecedores posicionados em apenas um dos lados da placa. Por fim, os valores numéricos foram confrontados às respostas analíticas advindas da formulação de Winter (1968) e numéricas dos autores (Tabela 3-2).

A fim de verificar a consistência das características do modelo elaborado, todas as informações quanto ao material, carregamento, condições de contorno e malha de elementos finitos foram consideradas para a validação. Contudo, quanto à análise de flambagem elástica, o módulo de elasticidade  $E$  foi definido igual a 206000 MPa, tanto para as placas, como para os enrijecedores. Além disso, quanto à análise avançada, o regime do comportamento do material foi definido como sendo elastoplástico perfeito (Figura 2-15.a) e as imperfeições iniciais foram aplicadas com amplitude igual a  $a/500$  e aspecto referente ao dos modos de flambagem. Essas também foram características determinadas para as simulações de Xu *et al.* (2018a) e foram consideradas a fim de que não interferissem na comparação com os modelos numéricos dos autores.

Por fim, observando os valores de tensão crítica e fatores de redução de flambagem elástica apresentados, respectivamente, na Tabela 3-1 e na Tabela 3-2, conclui-se que o modelo numérico desenvolvido comporta-se de modo similar ao modelo elaborado por Xu *et al.* (2018a) e apresenta respostas muito próximas daquelas obtidas a partir das formulações encontradas na teoria. Entre desvios variando de 0 a 15% em relação aos resultados teóricos, o modelo numérico, além de reproduzir o comportamento de flambagem elástica das placas esbeltas enrijecidas, também é suscetível à introdução de imperfeições iniciais, sendo capaz de representar adequadamente o comportamento pós-flambagem a partir de análises avançadas.

Tabela 3-1. Comparação das respostas numéricas de tensão crítica,  $\sigma_{cr}$ , com as da formulação clássica,  $\sigma_{cl}$ , e do modelo numérico de Xu *et al.* (2018a),  $\sigma_{cr,Xu}$ .

$\alpha$	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$b_s$ (mm)	$t_w$ (mm)	$t_s$ (mm)	$\sigma_{cl}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\sigma_{cr,Xu}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\sigma_{cr}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cl}}$	$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr,Xu}}$
<b>placas com dois enrijecedores em ambos os lados</b>										
1,33	3000	2250	750	2,5	2,5	8,27	8,82	9,36	1,13	1,06
1,11	3000	2700	900	3,0	2,5	8,37	8,87	9,32	1,11	1,05
0,67	3000	4500	1500	5,0	4,0	8,27	8,57	8,72	1,05	1,02
0,48	3000	6300	2100	7,0	7,0	9,25	9,52	9,70	1,05	1,02
0,33	3000	9000	3000	10,0	8,0	8,27	8,41	8,46	1,02	1,01
<b>placas com dois enrijecedores em um dos lados</b>										
1,33	3000	2250	1125	2,5	2,5	4,32	-	4,90	1,13	-
1,11	3000	2700	1350	3,0	2,5	4,02	-	4,51	1,12	-
0,67	3000	4500	2250	5,0	4,0	4,32	-	4,56	1,06	-
0,48	3000	6300	3150	7,0	7,0	6,10	-	6,35	1,04	-
0,33	3000	9000	4500	10,0	8,0	4,32	-	4,15	0,96	-

Tabela 3-2. Comparação das respostas numéricas do coeficiente de redução,  $\rho_{num}$ , com as da formulação de Winter (1968),  $\rho_{Winter}$ , e do modelo numérico de Xu *et al.* (2018a),  $\rho_{Xu}$ .

$\alpha$	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$b_s$ (mm)	$t_w$ (mm)	$t_s$ (mm)	$\rho_{Winter}$	$\rho_{Xu}$	$\rho_{num}$	$\frac{\rho_{num}}{\rho_{Winter}}$	$\frac{\rho_{num}}{\rho_{Xu}}$
<b>placas com dois enrijecedores em ambos os lados</b>										
1,33	3000	2250	750	20,0	20,0	0,90	1,00	0,93	1,04	0,93
1,33	3000	2250	750	10,0	12,0	0,54	0,57	0,51	0,95	0,90
1,33	3000	2250	750	3,75	7,5	0,22	0,19	0,22	1,00	1,16
0,67	1500	2250	750	20,0	15,0	0,90	1,00	0,94	1,04	0,94
0,67	1500	2250	750	10,0	12,0	0,54	0,57	0,54	1,00	0,95
0,67	3000	4500	1500	7,5	12,0	0,22	0,20	0,22	0,98	1,08
0,33	1500	4500	1500	40,0	30,0	0,90	0,99	0,99	1,10	1,00
0,33	1500	4500	1500	20,0	20,0	0,54	0,53	0,52	0,96	0,98
<b>placas com dois enrijecedores em um dos lados</b>										
1,68	5000	3000	1500	10,0	12,0	0,32	-	0,28	0,85	-
1,68	5000	3000	1500	7,0	14,0	0,23	-	0,23	1,00	-
1,33	3000	2250	1125	20,0	20,0	0,72	-	0,63	0,88	-
1,33	3000	2250	1125	3,75	7,5	0,16	-	0,16	0,97	-
0,67	1500	2250	1125	20,0	15,0	0,72	-	0,64	0,89	-
0,67	1500	2250	1125	7,5	12,0	0,16	-	0,15	0,94	-
0,67	3000	4500	2250	40,0	30,0	0,71	-	0,63	0,89	-

# 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

## 4.1 Análise de Flambagem Elástica

Para compreender o comportamento elástico relacionado à flambagem global de almas reforçadas por enrijecedores longitudinais de seção transversal aberta (retangular sólida), 323 modelos de placas enrijecidas foram elaborados. A partir das simulações numéricas, algumas das propriedades geométricas das placas foram parametrizadas, a fim de entender as mudanças de comportamento que propiciam. Verificou-se que alterações na razão de aspecto e espessura da alma, na razão entre tensões normais aplicadas e na quantidade, posição e rigidez dos enrijecedores são fatores que alteram significativamente o comportamento pré-flambagem de almas enrijecidas de vigas esbeltas.

Em particular, a espessura da alma,  $t_w$ , é fator preponderante no estudo da flambagem elástica. Mudanças em seu valor são também responsáveis por alterar os valores de esbeltez das placas e de rigidez relativa,  $\gamma$ , e ótima,  $\gamma^*$ , dos enrijecedores. Isso conduz a resultados pouco precisos de tensão crítica elástica, dependendo do procedimento adotado para o dimensionamento de vigas esbeltas.

Sendo assim, placas com as dimensões apresentadas na seção 3.2 foram analisadas do ponto de vista numérico, a partir de 14 espessuras diferentes, a fim de verificar a consistência dos procedimentos analíticos preconizados pela EN 1993-1-5:2006 e da abordagem semi-analítica do EBPlate 2.01. Os valores dessas espessuras foram assumidos de acordo com o trabalho de Barbosa *et al.* (2019a) e são apresentados na Tabela 4-1.

Primeiramente, a influência da mudança de  $t_w$  nas respostas quanto a  $\gamma$  e  $\gamma^*$  foi avaliada. Os valores obtidos também podem ser visualizados na Tabela 4-1. Nota-se que a transição de enrijecedor rígido para flexível se dá entre as espessuras 8 e 8,6 mm. Sendo assim, as únicas placas reforçadas por enrijecedor rígido são as placas de 7 e 8 mm. Em todos os outros casos, os enrijecedores avaliados são considerados flexíveis, uma vez que  $\gamma < \gamma^*$ .

Tabela 4-1. Espessura das placas e rigidezes relativa e ótica de enrijecedores.

$t_w$ (mm)	$\gamma$	$\gamma^*$
7	42,0	26,0
8	29,1	24,8
8,6	23,9	24,2
8,9	21,8	23,9
9	21,1	23,8
10	15,9	23,1
10,1	15,4	23,0
10,2	15,0	23,0
10,4	14,3	22,8
10,5	13,9	22,8
11	12,3	22,5
11,1	12,0	22,4
12	9,7	22,0
12,5	8,7	21,7

\* Os valores em destaque relacionam-se com a faixa de transição de enrijecedor rígido para flexível

Na sequência, gráficos correlacionando os valores de tensões críticas globais e espessura de placas foram elaborados a partir dos resultados obtidos por meio dos modelos, a fim de conhecer o comportamento numérico desenvolvido pelas almas esbeltas e avaliar as respostas obtidas através das outras duas abordagens supracitadas. A princípio, as placas analisadas foram reforçadas por apenas um enrijecedor na zona de compressão. Os resultados de tensões críticas de flambagem elástica em relação à aplicação de tensões normais e tensões cisalhantes são exibidos, respectivamente, na Figura 4-1 e na Figura 4-2.



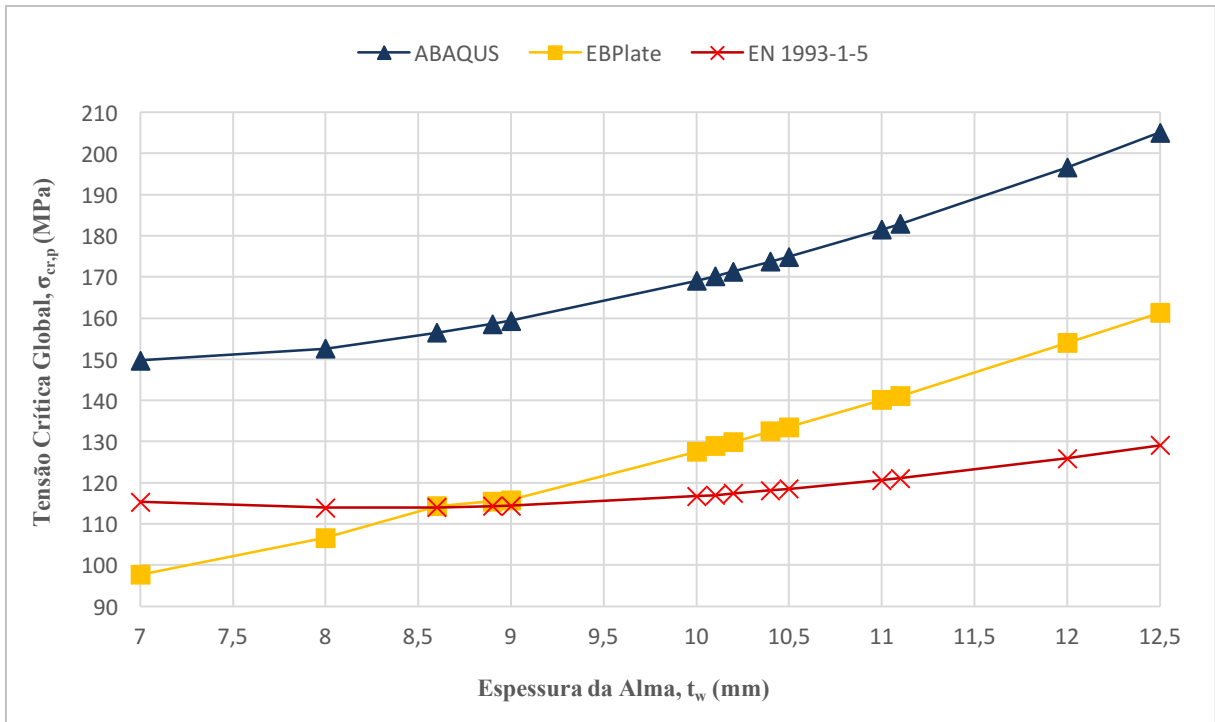


Figura 4-1. Gráfico de tensões críticas de flambagem global de placas com um enrijecedor submetidas à flexão

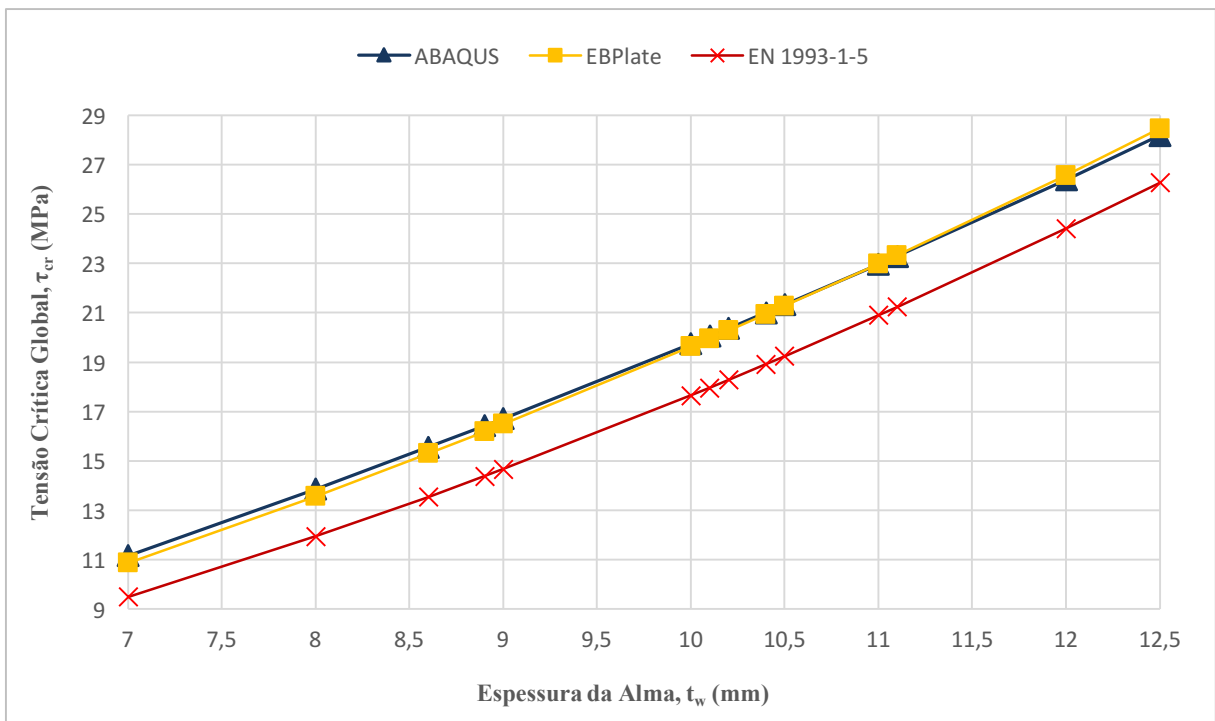


Figura 4-2. Gráfico de tensões críticas de flambagem global de placas com um enrijecedor submetidas ao cisalhamento

Como pode ser observado na Tabela 4-1, à medida que a espessura da placa vai aumentando, a rigidez relativa do enrijecedor se distancia da rigidez ótima, o que significa que o enrijecedor torna-se flexível e não proporciona rigidez suficiente a ponto de criar uma linha nodal sem instabilidade. Ou seja, o reforço não contribui para o surgimento de flambagem local de subpainéis. Ao contrário, toda placa apresenta flambagem, inclusive o próprio enrijecedor. Sendo assim, ao invés de ocorrer a flambagem local como primeiro modo de flambagem elástica, a flambagem global precede. Em outras palavras, as placas mais espessas tornam-se também mais susceptíveis à ocorrência de flambagem global.

Este comportamento foi claramente demonstrado a partir das análises numéricas e da utilização do programa EBPlate 2.01. Os primeiros modos de flambagem elástico obtidos para placas reforçadas por enrijecedores flexíveis foram modos globais, nos quais placa e enrijecedor apresentaram flambagem. Para enrijecedores rígidos, o primeiro modo não foi necessariamente aquele relacionado à flambagem global. Contudo, a partir de ambas análises, mesmo a placa estando mais propícia à ocorrência de flambagem global, verifica-se que as tensões críticas globais são maiores à medida que a espessura da placa aumenta. Isso é justamente esperado pelo fato de que o aumento da resistência à flambagem é proporcionado quando placas são dimensionadas com espessuras superiores.

Na Figura 4-1, verifica-se que a norma europeia não percebe significativamente os efeitos da diminuição da esbelteza, apresentando respostas com desvios de até 37% a favor da segurança em relação às aproximações numéricas. Existe até mesmo uma queda de tensão crítica global, entre as espessuras de 7 a 8,6 mm. Logo após, não há aumento significativo, mesmo quando as espessuras vão se tornando maiores. Observa-se que a curva apresentada é praticamente constante, sendo que as diferenças de tensão entre a primeira e última placa são de apenas 10%. Assim, a norma europeia exibe um comportamento elástico no qual se prioriza a influência da rigidez relativa do enrijecedor, a ponto de não ser sensível o bastante ao aumento da espessura da placa.

Em relação às tensões críticas devido à flexão, as menores diferenças entre a norma e os outros procedimentos são encontradas justamente quando os enrijecedores são rígidos e as placas mais esbeltas. Entretanto, mesmo para estes casos, os desvios são significativos, variando em torno de 22%, em relação aos resultados numéricos. Ao contrário, as respostas obtidas com a utilização do EBPlate 2.01, justamente para estes casos, são as que mais se desviam das

aproximações numéricas, sendo que à medida que o enrijecedor vai se tornando flexível, verificam-se as menores diferenças, em torno de 21%.

Sendo assim, como pode ser visualizado na Figura 4-1, as curvas relacionadas à norma europeia e ao EBPlate 2.01 se cruzam nos valores de tensão crítica da placa cuja espessura é igual a 8,6 mm, ou seja, exatamente quando os enrijecedores passam a ser flexíveis em relação à placa ( $\gamma < \gamma^*$ ). Neste sentido, para as espessuras de alma entre 8 e 9 mm, o valor de  $\gamma$  é muito próximo ao de  $\gamma^*$  e as tensões críticas dos dois procedimentos não apresentam diferenças significativas. Contudo, a partir de então, este cenário se inverte e a norma europeia manifesta seu caráter conservador. Esta característica influencia a maioria das placas analisadas, resultando em valores muito inferiores aos dos outros dois procedimentos, e é justificada pelas simplificações existentes na normatização, que foram abordadas no capítulo 2.

Enquanto isso, os resultados numéricos são sempre superiores aos valores das demais metodologias. Isso pode ser explicado pelo fato de que as simulações conseguem perceber a influência da rigidez à torção do enrijecedor, o que, por exemplo, não é considerado a partir das simplificações utilizadas para a elaboração dos modelos analíticos da EN 1993-1-5:2006. Os modelos numéricos também são capazes de identificar a ocorrência de modos de flambagem acoplados, o que não é investigado nem pela norma, nem pelo EBPlate 2.01. Além disso, são constituídos por elementos finitos de casca, que permitem com que sejam avaliados os efeitos de membrana. Assim, não só os deslocamentos relacionados à direção de flambagem são ponderados, mas também todos os possíveis deslocamentos das demais direções, proporcionando, muitas das vezes, um efeito restaurador à placa e garantindo maior resistência à flambagem. Por fim, as modelagens numéricas foram realizadas no programa computacional ABAQUS 6.14, que possui uma vasta biblioteca de elementos finitos e métodos numéricos cujos algoritmos são precisos e confiáveis, sendo assim, apresentam potencial reconhecido, principalmente no que diz respeito à análise de estabilidade.

Em relação às tensões críticas devido ao cisalhamento, desvios significativos não são encontrados e o modelo analítico do anexo A da norma fornece resultados próximos aos obtidos pelo ABAQUS 6.14 e pelo EBPlate 2.01, como pode ser visualizado na Figura 4-2. Os desvios são de 6,8% a 15%. Observa-se que a equação A.6 da EN 1993-1-5:2006 (responsável pelo cálculo dos coeficientes de flambagem elástica relacionados a placas reforçadas por um ou dois enrijecedores com  $\alpha < 3$  e submetidas ao cisalhamento) não apresenta, em sua formulação, simplificações tão acentuadas como as definidas para a obtenção dos coeficientes de placas

submetidas à tensão normal. Entre as respostas do modelo numérico e do programa semi-analítico, diferenças menores ainda são encontradas, sendo da ordem de 0,1% a 2,7%.

Logo após avaliar o comportamento analítico, semi-analítico e numérico das placas enrijecidas submetidas a tensões normais e cisalhantes, de modo isolado, placas reforçadas por um enrijecedor também foram modeladas considerando a concomitância dos esforços de flexão e cisalhamento. Na Figura 4-3 e na Figura 4-4, são exibidos, respectivamente, os resultados referentes à parcela de tensão crítica global relacionada às tensões normais e às tensões cisalhantes.

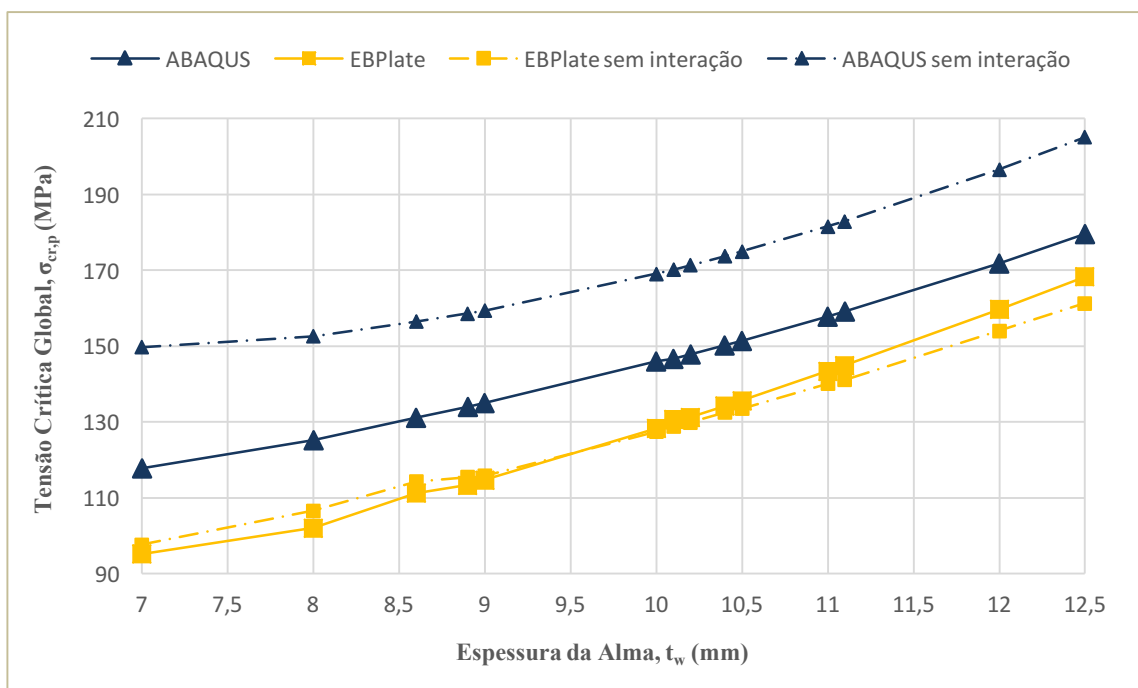
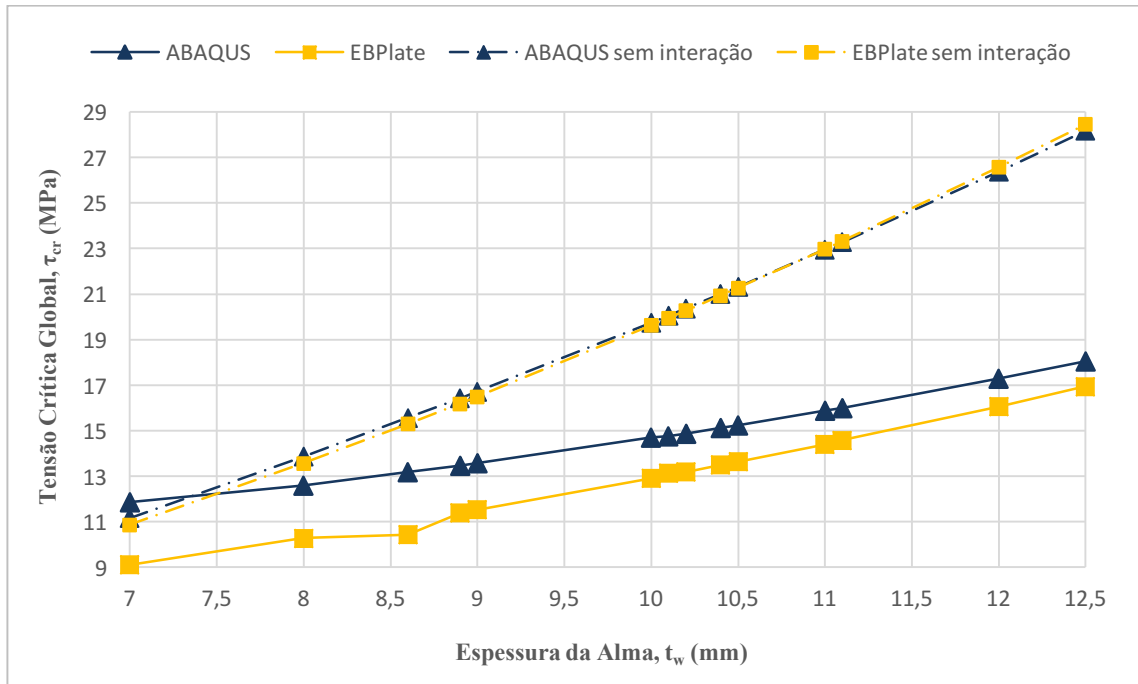


Figura 4-3. Parcela de tensão crítica devido à flexão de placas submetidas à interação

Nota-se que as curvas do modelo numérico possuem inclinações iguais tanto para parcela de tensão crítica relacionada à flexão, como ao cisalhamento. O mesmo se percebe nas curvas que definem as respostas do programa EBPlate 2.01. Com isso, observa-se que, para o mesmo procedimento, o comportamento descrito é o mesmo e apenas a magnitude das tensões se altera. Valores de tensões cisalhantes foram aplicados iguais a 10% dos valores de tensões normais, em todos os casos estudados. Infere-se também que foram obtidas tensões críticas relacionadas aos esforços cortantes de valores iguais a 10% das tensões críticas devido às tensões normais.

Além disso, é importante ressaltar a influência da interação dos esforços na magnitude das tensões críticas globais. Nos gráficos da Figura 4-3 e da Figura 4-4, as curvas tracejadas são as

mesmas apresentadas anteriormente nos casos de esforços estudados isoladamente. Veja que a interação de tensões foi suficiente para que resultados numéricos a considerando fossem inferiores em relação àqueles que a desconsideraram em até 27%, no caso de tensões normais, e em 56%, nos casos de tensões cisalhantes.



\* Os valores aplicados de tensões de cisalhamento foram iguais a 10% dos valores das tensões normais máximas solicitantes

Figura 4-4. Parcela de tensão crítica devido aos esforços cisalhantes de placas submetidas à interação

Além de placas reforçadas por um enrijecedor, também foram modeladas placas com dois enrijecedores e as mesmas dimensões descritas no capítulo 3. Essas placas também foram analisadas a partir das espessuras definidas na Tabela 4-1. Os resultados quanto à tensão crítica global em relação à flexão, ao cisalhamento e à interação de tensões são apresentados, respectivamente, na Figura A-1, Figura A-2, Figura A-3 e Figura A-4 (Apêndice A).

Nestas análises, o que mais surpreendeu foi o fato de que o procedimento proposto no anexo A da EN 1993-1-5:2006 chega a ser tão conservador a ponto de praticamente ignorar a presença do segundo enrijecedor, tanto para placas submetidas à flexão, quanto para aquelas sujeitas ao cisalhamento. Como visualizado nos gráficos da Figura 4-5 e da Figura 4-6, pouca ou nenhuma resistência adicional à flambagem global é verificada, quando se adota um enrijecedor a mais. Os valores de tensão crítica devido à flexão para as placas com dois enrijecedores chegam a ser

tão incoerentes que se apresentam, até mesmo, inferiores àqueles de placas com as mesmas dimensões e somente um enrijecedor (espessuras de 12 e 12,5 mm). Quando há ganho de resistência, os acréscimos não chegam a 7%, diminuindo à medida que os enrijecedores vão se tornando mais flexíveis.

Sendo assim, a fim de inferir a relevância da adição de enrijecedores à placa, foram também modelados casos com três enrijecedores, confrontando os valores de tensão crítica obtidos com aqueles dos casos anteriores. Os resultados são exibidos na Figura 4-7 e na Figura 4-8.

Ao contrário da norma, o modelo numérico reconhece a influência da adição de mais enrijecedores à placa. Tendo em vista tensões normais, o ganho de resistência à flambagem apresenta-se acima dos 32,7% para todas as espessuras de alma analisadas, atingindo cerca de até 49,5%, quando se adota mais um enrijecedor na zona de compressão. Enquanto isso, quando se considera três enrijecedores na região comprimida, os valores mínimos e máximos de ganho são, respectivamente, 49,5% e 81,2% em relação aos casos de placas com um enrijecedor. Quanto às tensões de cisalhamento, os acréscimos também são significativos, sendo entre 29,8% e 38%, quando se acrescenta um enrijecedor, e 45,2% e 57%, quando se acrescenta dois enrijecedores à placa.

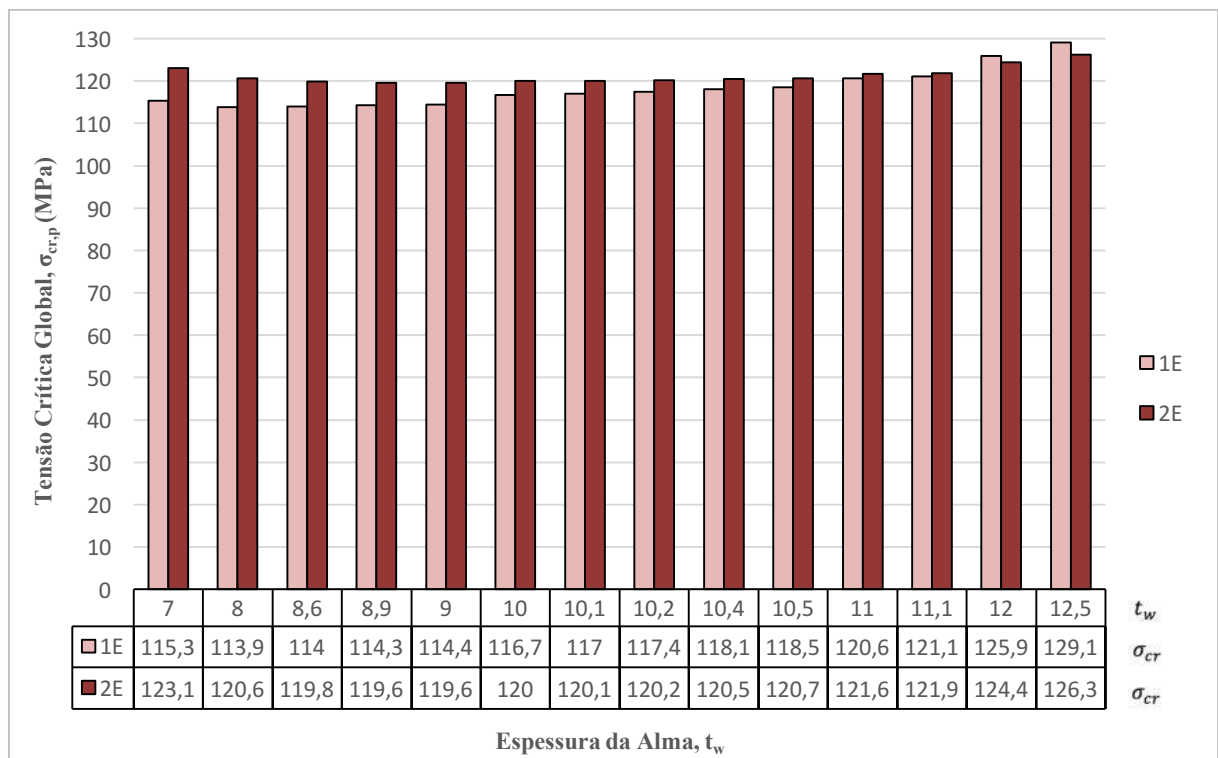


Figura 4-5. Comparação entre os valores de tensão crítica devido à tensão normal para placas com 1 e 2 enrijecedores utilizando os procedimentos normativos

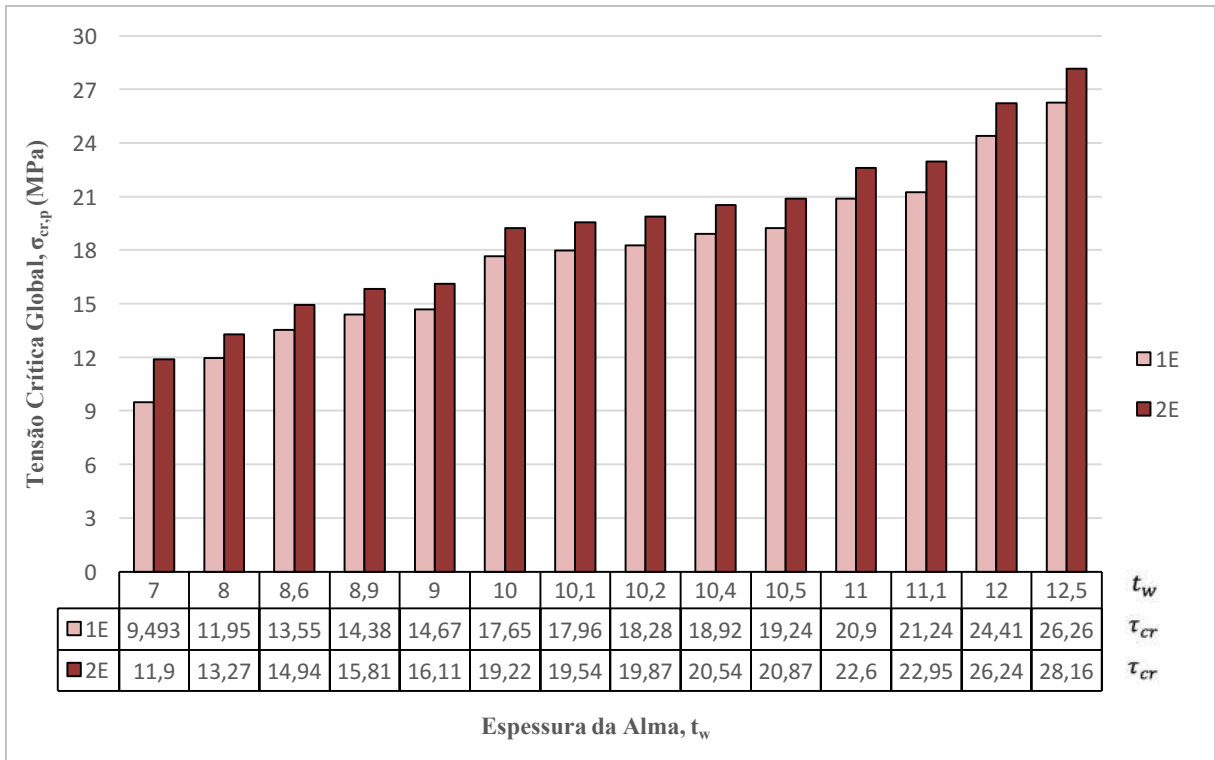


Figura 4-6. Comparação entre os valores de tensão crítica devido à tensão cisalhante para placas com 1 e 2 enrijecedores utilizando os procedimentos normativos

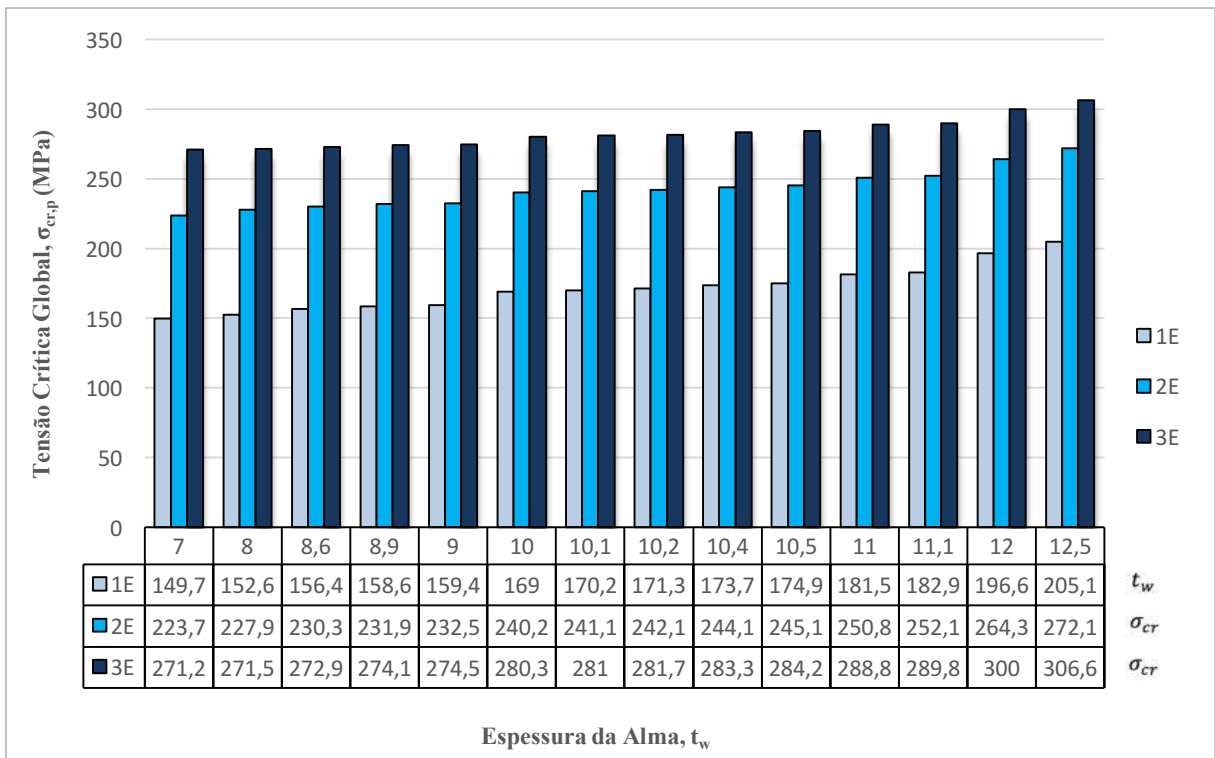


Figura 4-7. Comparação entre os valores de tensão crítica devido à tensão normal para placas com 1, 2 e 3 enrijecedores a partir dos modelos numéricos

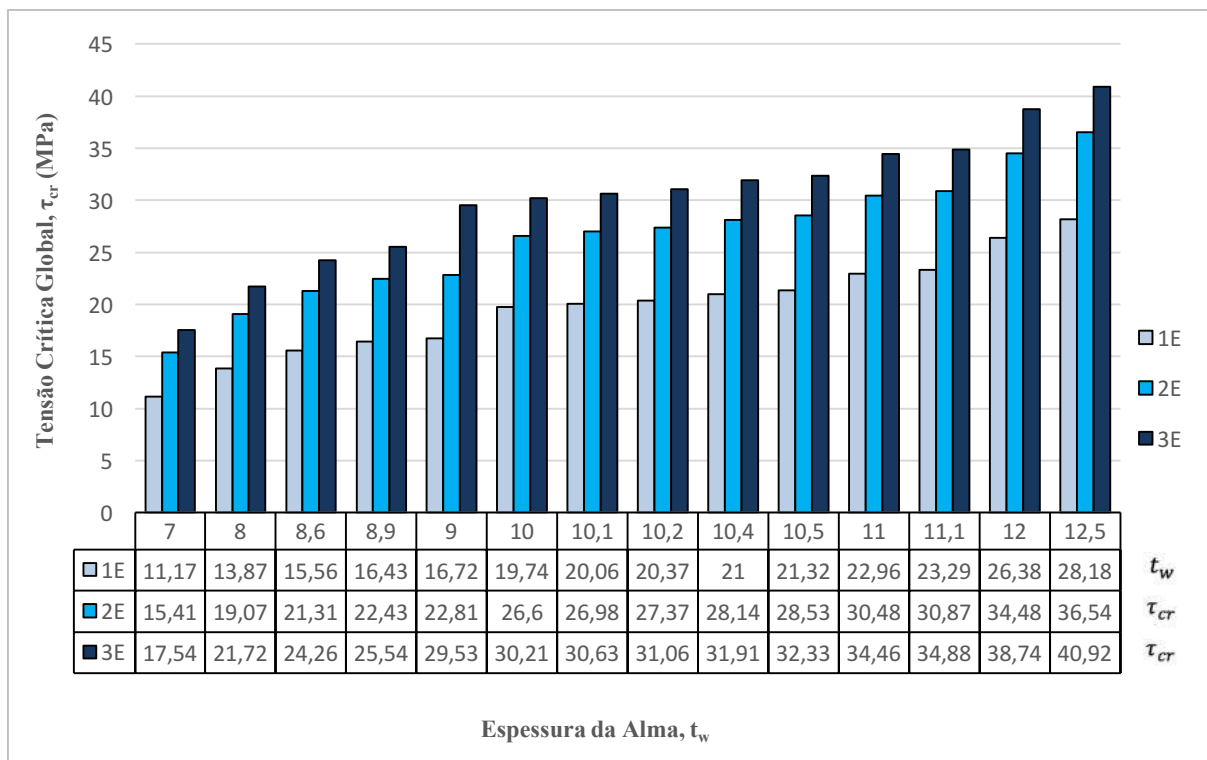


Figura 4-8. Comparação entre os valores de tensão crítica devido à tensão de cisalhamento para placas com 1, 2 e 3 enrijecedores a partir dos modelos numéricos

Independentemente da quantidade de enrijecedores adotada e dos esforços aos quais as placas estão submetidas, é interessante observar que as inclinações das curvas descritas a partir da utilização do ABAQUS 6.14 e do EBPlate 2.01 são praticamente iguais, para todas as situações anteriormente apresentadas. Por sua vez, o comportamento de flambagem elástica também é muito parecido, sendo que os modos de flambagem apresentam-se, inclusive, em ordem similar. Possivelmente, isso é justificado pelo processo de validação comportamental do EBPlate 2.01, no qual as considerações para os tipos de condições de contorno do programa foram validadas frente a respostas numéricas obtidas pelo *software* ANSYS 6.1, que também é baseado em MEF. Contudo, os valores de tensão crítica são diferentes e a abordagem semi-analítica do EBPlate 2.01 é mais conservadora para a maioria dos casos estudados.

Como já discorrido anteriormente, isso está relacionado à precisão de análise do ABAQUS, com algoritmos que garantem exatidão a partir de uma resposta inteiramente numérica. No entanto, pode ser também explicado pelo fato de que a validação dos coeficientes de flambagem elástica para placas enrijecidas sob tensões normais e cisalhantes foi realizada a partir da comparação com as respostas teóricas dos gráficos e tabelas desenvolvidas por Klöppel e Scheer (1960) e Klöppel e Möller (1968).



Na Figura 4-9, os modos de flambagem global obtidos pelas simulações numéricas e pelo EBPlate 2.01 são dispostos lado a lado, demonstrando correspondência quanto ao aspecto do primeiro modo de flambagem para uma placa com espessura igual a 12,5 mm reforçada por um enrijecedor. Neste caso, os desvios nas respostas de tensão crítica global devido aos efeitos da flexão são de 21,3%, apesar da similaridade no comportamento de flambagem elástica.

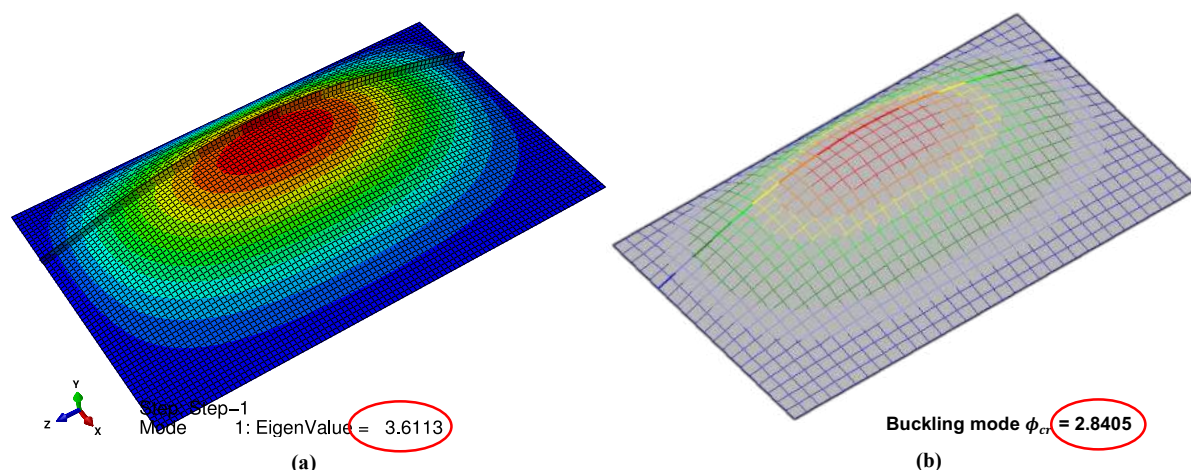


Figura 4-9. Flambagem global obtida como primeiro modo de flambagem através do modelo numérico (a) e do programa computacional EBPlate 2.01 (b)

Por fim, com intuito de conhecer o comportamento de flambagem variando também outros parâmetros, placas reforçadas por dois enrijecedores de espessura  $t_s = 16$  mm e altura  $h_s = 140$  mm, dimensões  $a = 5000$  mm e  $b = 3500$  mm ( $\alpha = 1,43$ ) e razão entre tensões normais  $\psi = -0,60$  foram modeladas a partir das considerações apresentadas no capítulo 3. Além disso, também foram analisadas pelos procedimentos normativos e do EBPlate 2.01. Dessa vez, a gama de espessura das placas também foi alterada, propiciando novos valores de  $\gamma$  e  $\gamma^*$ , que podem ser conferidos na Tabela 4-2. Os resultados quanto à tensão crítica global são exibidos na Figura 4-10.

A partir da análise em questão, percebe-se que todas as alterações realizadas foram responsáveis por gerar curvas que descrevem um comportamento totalmente diferente ao das placas analisadas anteriormente. A mudança quanto ao comportamento numérico é a primeira discordância que se destaca. Observe que, nas placas anteriores, as curvas traçadas pelas aproximações numéricas eram sempre crescentes por causa do aumento da espessura das placas. Visto que os enrijecedores eram menores, por mais que fossem flexíveis, isto não era o suficiente a ponto de influenciar em menores valores de tensão crítica. Entretanto, para este caso, os modelos parecem se comportar sob uma perspectiva compensatória, na qual os efeitos

de enrijecedores maiores influenciam tanto quanto os de espessuras de almas mais robustas. Sendo assim, resultados muito próximos entre as tensões são induzidos, mesmo quando a placa se torna menos esbelta.

Tabela 4-2. Espessura das placas de 5000x3500 mm e rigidezes relativa e ótima dos enrijecedores

$t_w$ (mm)	$\gamma$	$\gamma^*$
10	85,6	53,7
10,2	81,1	52,9
10,3	78,9	52,6
10,5	74,9	51,8
12	52	47,2
14	34,1	42,6
15	28,4	40,7
15,5	26	39,9
15,6	25,5	39,7
16	23,8	39,1

\* Os valores em destaque relacionam-se com a faixa de transição de enrijecedor rígido para flexível

Na Figura 4-10, é interessante observar que a expectativa da curva dos resultados numéricos ser crescente não se concretizou. A curva decresce entre os resultados de placas com espessuras de 10 a 14 mm. Inclusive, a placa de 14 mm está justamente relacionada ao limiar de rigidez, no qual os enrijecedores passam a se comportar como flexíveis (Tabela 4-2), ou seja,  $\gamma < \gamma^*$ . Portanto, entre essas espessuras, constata-se que o modelo consegue perceber a perda de rigidez progressiva do enrijecedor até esse se tornar flexível, o que propicia maior facilidade à obtenção da flambagem global, ou seja, menores valores de  $\sigma_{cr,p}$ . Contudo, o modelo numérico também identifica o aumento da espessura, o que proporciona ganho de resistência à flambagem e faz com que os valores de tensão crítica não diminuam consideravelmente.

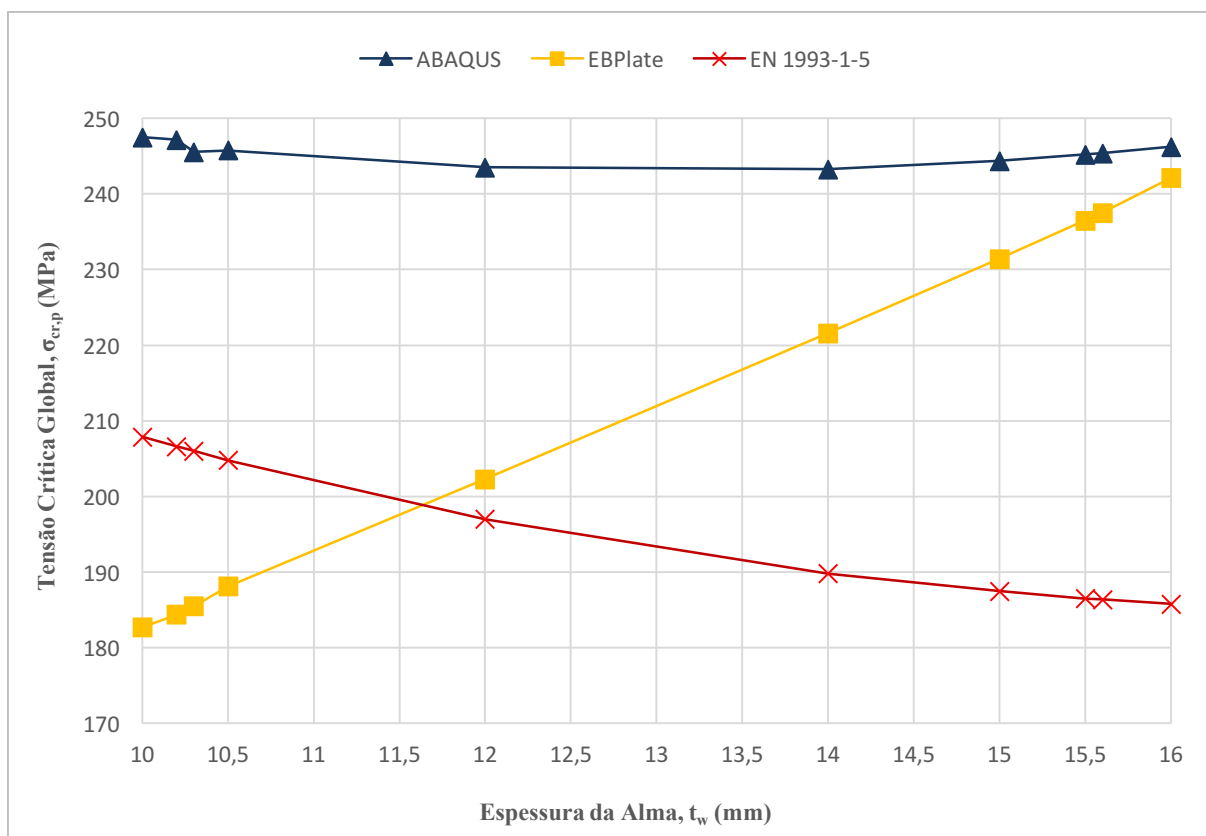


Figura 4-10. Tensões críticas de flambagem elástica devido à flexão para placas com razão de aspecto  $\alpha = 1,43$  reforçadas por 2 enrijecedores

Quanto às curvas descritas através da utilização dos procedimentos do EBPlate 2.01 e da EN 1993-1-5:2006, verifica-se, novamente, uma intersecção próxima à faixa de transição de enrijecedor rígido para flexível, apontando proximidade entre as abordagens, quando  $\gamma$  tende a  $\gamma^*$ . Entretanto, as curvas se distam, mais uma vez, para as outras situações e a norma europeia, à medida que o enrijecedor se torna mais flexível, assume caráter mais conservador. Isso denota que, enquanto a abordagem normativa é capaz de perceber a diminuição de rigidez dos reforços, não considerando a adição de resistência à flambagem ocasionada pelo aumento da espessura, a abordagem semi-analítica analisa de modo inverso, priorizando o ganho de resistência da placa à perda de rigidez dos enrijecedores.

Logo, enquanto o procedimento da EN 1993-1-5:2006 é mais preciso para situações nas quais os enrijecedores são rígidos, apresentando desvios em relação às análises numéricas inferiores a 16%, o procedimento do EBPlate 2.01 mostra-se mais exato para casos nos quais os enrijecedores são flexíveis, chegando a diferenças insignificantes se comparadas aos resultados numéricos de valor igual a 1,7%.

Em relação aos modos de flambagem obtidos a partir das análises numéricas anteriores, imagens são apresentadas a critério de ilustração no Apêndice B.

## 4.2 Análise Avançada

Como foi abordado anteriormente, o conceito de capacidade resistente de vigas esbeltas ultrapassa o estudo de flambagem elástica. A partir das simulações numéricas, isso foi comprovado. Com modelos numéricos avaliados sob a perspectiva de uma análise avançada, cujo comportamento do material e cujas imperfeições foram simulados conforme descrito no capítulo 3, verificou-se que a tensão última se sobressai, sendo superior ao valor da tensão crítica global. A partir de então, análises foram realizadas de modo a conduzir as placas enrijecidas à falha, a fim de que o coeficiente de redução (fator primordial ao dimensionamento das placas pelo MLE) e a contribuição da alma à resistência ao cisalhamento fossem obtidos numericamente e as prescrições normativas fossem avaliadas.

Inicialmente, os valores do coeficiente de redução de almas reforçadas por um e dois enrijecedores com esbeltez  $b/t_w$  entre 187,5 e 428,6<sup>1</sup> foram computados. As aproximações numéricas foram realizadas a partir da Equação (3.5) e o coeficiente de redução normativo foi definido a partir da Equação (2.16). Sendo assim, gráficos foram plotados para confrontar ambas abordagens e são exibidos na Figura 4-11 e na Figura A-5 (Apêndice A).

Como o coeficiente de redução tem correspondência direta com a área efetiva da seção transversal da placa, conclui-se, imediatamente, que a redução proposta pela normatização é maior em todos os casos, uma vez que considera coeficientes menores e, portanto, menores áreas efetivas e menor valor de capacidade resistente última devido à tensão normal. À medida que a esbeltez da placa vai diminuindo, apesar do coeficiente de redução crescer em ambos os procedimentos, as curvas descritas pela análise numérica e normativa vão se distanciando, o que confere um conservadorismo ainda maior à metodologia da norma europeia.

Os desvios a favor da segurança chegam a 33% e 43% nos casos de placas de 16 mm reforçadas, respectivamente, por um e dois enrijecedores. Isso não é o mais surpreendente. Como se sabe, a norma EN1993-1-5:2006 foi desenvolvida para elementos estruturais

---

<sup>1</sup> De acordo com a EN 1993-1-5:2006, não há limite relacionado à esbeltez máxima de placas. Contudo, a norma americana AASHTO LRFD (2012) limita a esbeltez a 150, em casos sem nervuras, e a 300, em casos com nervuras.

classificados como Classe 4, que são esbeltos o bastante a ponto de que a flambagem local ocorra antes de se alcançar a resistência ao escoamento. Sendo assim, conforme a espessura vai aumentando, a norma se distancia proporcionalmente do comportamento real. Ao contrário, para as placas de esbeltez igual a 428,6, as diferenças são bem menores, atingindo valores inferiores a 11,1%.

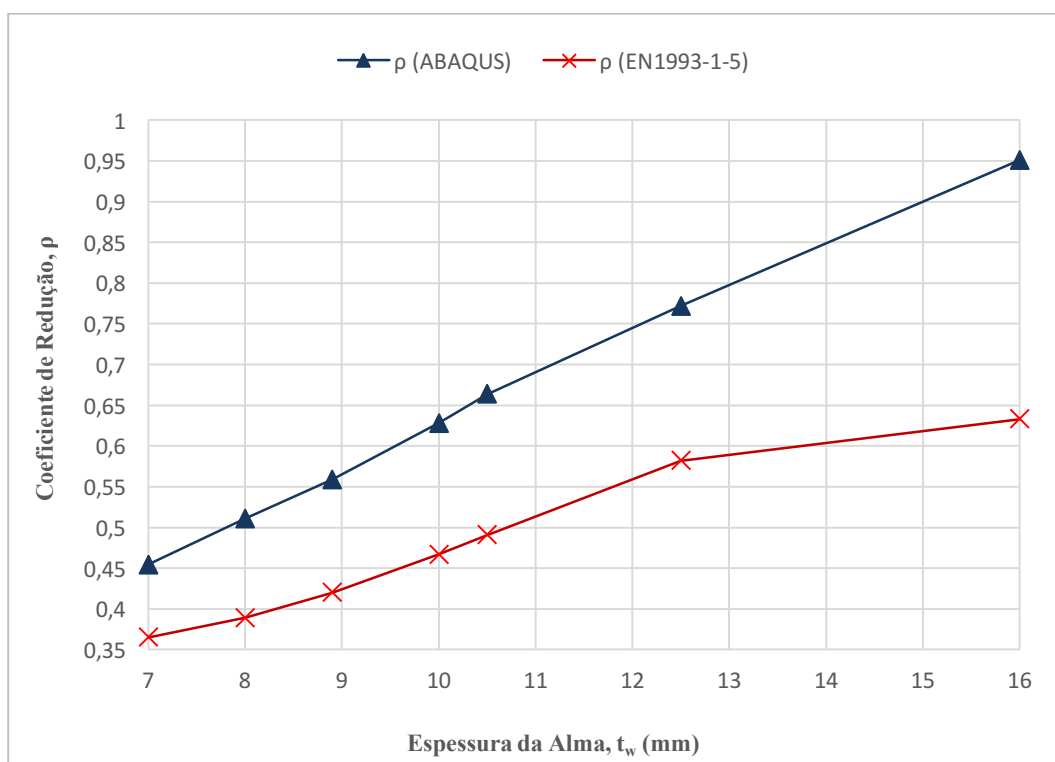


Figura 4-11. Coeficientes de redução  $\rho$  avaliados a partir dos modelos numérico e analítico para placas reforçadas por um enrijecedor

No entanto, o que mais surpreendeu foi a inconsistência do modelo analítico em proporcionar uma diminuição pouco expressiva à redução, quando casos de placas com um e dois enrijecedores são comparados. Como pode ser visualizado na Tabela 4-3, quando outro enrijecedor é adicionado à placa, a redução proposta numericamente chega a ser 37% inferior, o que está de acordo, já que se espera que o efeito do reforço seja contabilizado e responsável por maior resistência. Contudo, não é o que se observa ao avaliar as respostas obtidas a partir das recomendações do procedimento normativo da EN 1993-1-5:2006. Verifica-se que a redução é, inclusive, superior em situações nas quais a placa é reforçada por dois enrijecedores.

Sabe-se que a norma prescreve que sejam considerados os comportamentos Tipo Placa e Tipo Pilar para a obtenção da capacidade resistente. O coeficiente de redução normativo é definido

a partir de uma interação entre coeficientes advindos de ambos comportamentos, conforme definido no capítulo 2. Nota-se, entretanto, que o comportamento Tipo Placa se sobressai a ponto de conduzir valores de  $\xi$  maiores que 1 - Equação (2.17) -, em casos de placa com esbeltez igual ou inferior a 187,5. Deste modo, o coeficiente de redução final é igual ao coeficiente de redução Tipo Placa, ou seja, a formulação do Comportamento Tipo Placa governa o dimensionamento.

Tabela 4-3. Comparação entre os coeficientes de redução de placas com 1 e 2 enrijecedores

$b/t_w$	$\rho_{(ABAQUS)}$		$\rho_{(EN1993-1-5)}$	
	1 enrijecedor	2 enrijecedores	1 enrijecedor	2 enrijecedores
428,6	0,45	0,51	0,37	0,45
375,0	0,51	0,70	0,39	0,46
337,1	0,56	0,76	0,42	0,47
300,0	0,63	0,82	0,47	0,49
285,7	0,66	0,84	0,49	0,50
240,0	0,77	0,93	0,58	0,55
187,5	0,95	1,00	0,63	0,60

Com isso, a consideração do Comportamento Tipo Pilar passa a ser desprezável. Sabe-se que sua contabilização é responsável por diminuir consideravelmente os valores do coeficiente de redução final proposto na Equação (2.16). No entanto, como é ignorado a partir da esbeltez igual a 187,5, pode-se atribuir à formulação do Comportamento Tipo Placa completa responsabilidade quanto ao efeito ínfimo da adição do segundo enrijecedor. Observa-se que, a partir de casos com valores de esbeltez iguais a 240, nos quais a influência do Comportamento Tipo Placa é cerca de 78% superior a do Comportamento Tipo Pilar, a norma já não é sensível ao segundo enrijecedor, o que acarreta em redução superior à seção.

É válido salientar ainda que, a partir de certa espessura, a adição do segundo enrijecedor realmente não conduzirá em acréscimos significativos à resistência. Não deixará de contribuir, como é visto a partir da utilização da norma, mas também não possibilitará ganhos na capacidade resistente que justifiquem o uso. Para as dimensões das placas estudadas, a partir da

espessura de 16 mm, esta assertiva é evidente e o aumento da resistência, por conta do acréscimo de mais um enrijecedor, não é tão considerável quanto ao de placas mais esbeltas.

Quanto à contribuição da alma à resistência ao cisalhamento, a partir dos gráficos apresentados na Figura 4-12 e na Figura A-6 (Apêndice A), observa-se similaridade entre as respostas numéricas e normativas. Os resultados relacionados à norma foram determinados desconsiderando o fator de ponderação parcial  $\gamma_{M1}$ , o que ocasionou maior paridade entre as abordagens. Quando o fator é aplicado, menores valores normativos são obtidos, mas não a ponto de interferir significativamente na análise. Os desvios entre as abordagens variam de 0,05% a 9,6%. Sendo assim, o modelo analítico preconizado pela norma europeia para o cálculo da contribuição da alma à resistência ao cisalhamento demonstra coerência ao resultar em respostas precisas.

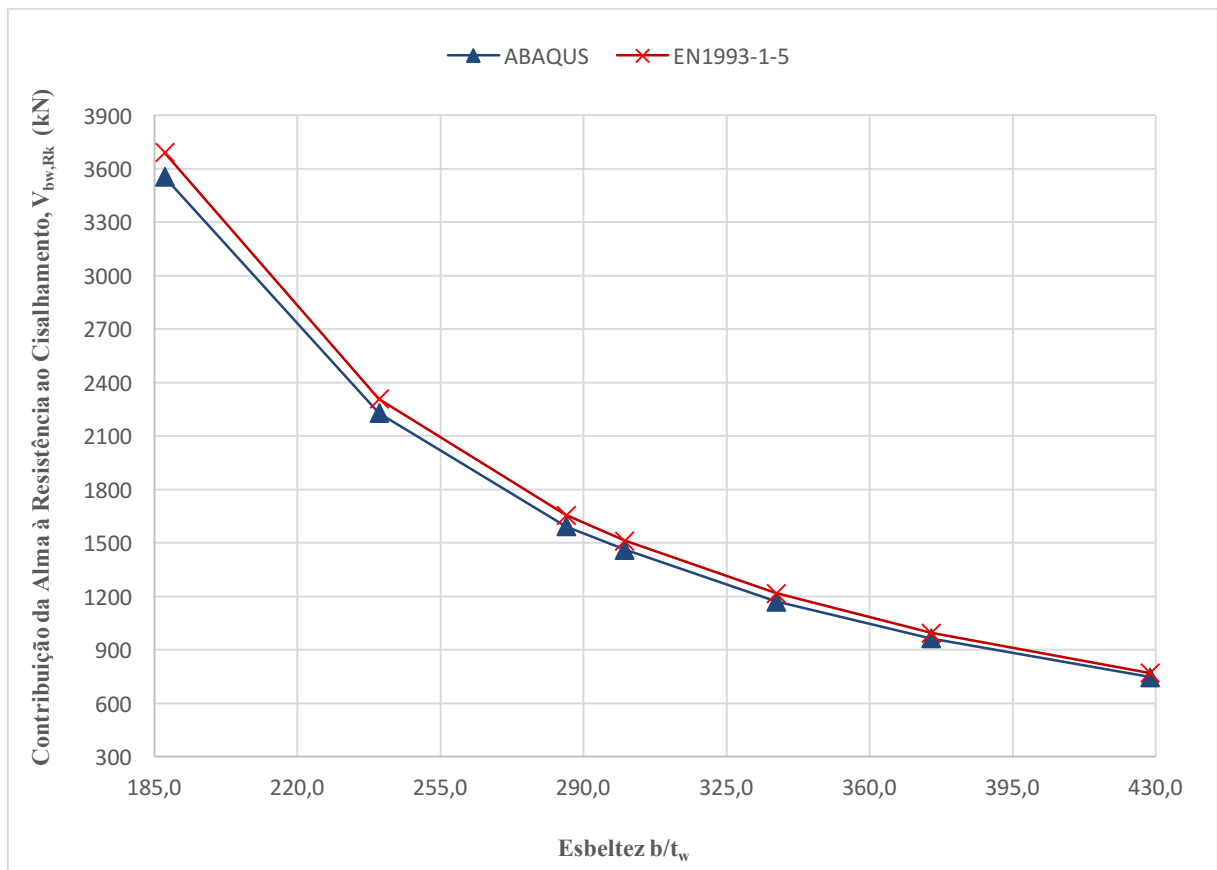


Figura 4-12. Valor característico da contribuição da alma à resistência à flambagem,  $V_{bw,Rk}$ , a partir dos modelos numérico e analítico para placas reforçadas por um enrijecedor

Em relação ao aspecto de deformação adquirido ao se atingir a capacidade resistente última por meio das análises numéricas anteriores, imagens são apresentadas a critério de ilustração no Apêndice B.

# 5 CONCLUSÃO

A partir do desenvolvimento de um modelo consistente capaz de reproduzir o comportamento real relacionado à flambagem e resistência última de placas reforçadas por enrijecedores longitudinais, uma alternativa mais geral e precisa é proposta ao dimensionamento da alma enrijecida de vigas esbeltas de aço com seção transversal do tipo I. Logo, é possível estender o estudo comportamental às mais diversas situações, sem se ater a geometrias específicas de placas e quantidade e posição pré-estabelecida de enrijecedores. Outra vantagem é que se permite computar com boa aproximação o ganho de resistência à flambagem global proporcional ao acréscimo de enrijecedores, as parcelas de tensões críticas devido à flexão e ao cisalhamento para placas submetidas à interação de esforços e a redução necessária à seção para o cálculo da capacidade resistente última.

Ao contrário, outros procedimentos demonstram inconsistências que conduzem a superdimensionamentos. Quanto à análise de flambagem elástica devido à tensão normal, por exemplo, a norma europeia EN 1993-1-5:2006 e o programa computacional EBPlate são responsáveis por subestimar os valores de tensão crítica global. Enquanto a norma indica os maiores desvios para casos nos quais a placa é reforçada por enrijecedores flexíveis, o programa aponta grandes diferenças relacionadas a casos em que enrijecedores rígidos reforçam a placa. Apesar de também existirem divergências consideráveis entre ambos procedimentos, percebe-se que as análises são similares para determinados valores de rigidez dos enrijecedores. Porém, até mesmo nestas situações, nas quais a rigidez é assumida como ótima, os procedimentos reiteram o caráter conservador.

Em relação à determinação dos valores de momento resistente, os coeficientes de redução numéricos são confrontados aos normativos. A norma apresenta reduções superiores àquelas propostas pelo modelo numérico, ocasionando seções de áreas inferiores e, conseqüentemente, capacidade resistente menor. Mais uma vez, lidera ao conservadorismo. Portanto, o modelo analítico da EN 1993-1-5:2006 é menos preciso não só para a flambagem, como também para a resistência última. Contudo, o que mais surpreendeu não foi o conservadorismo nas respostas,



que é comum a normatizações, mas sim a incoerência da norma ao expor valores de tensão crítica global e coeficiente de redução menores para placas com dois enrijecedores que para placas com um. Sendo assim, a norma comprova o fato de que não consegue perceber a adição de um segundo enrijecedor na zona comprimida. Neste sentido, também corrobora a necessidade de investigações a fim de promover formulações menos específicas, que levem em consideração fatores que fogem ao seu escopo.

Se por um lado há imprecisões relacionadas à análise normativa para casos de placas submetidas à flexão, de outro, a norma europeia manifesta bons resultados ao lidar com casos envolvendo apenas esforços cortantes. Na análise de flambagem elástica devido aos efeitos das tensões de cisalhamento, os desvios mais significativos são para situações de reforço com dois enrijecedores. Mesmo assim, não são maiores que os desvios relacionados a placas submetidas ao momento fletor. Para placas reforçadas a partir de um enrijecedor, as diferenças podem ser desprezáveis. Na análise de capacidade resistente última, a norma também é consistente e exhibe desvios ínfimos em relação aos resultados numéricos. Sendo assim, sua utilização é vantajosa para estes casos, uma vez que demonstra precisão e praticidade.

Além disso, a partir de alterações na razão de aspecto, razão entre as tensões normais solicitantes e dimensão e posição dos enrijecedores, diferenças significativas nas respostas numéricas podem ser visualizadas. Uma vez que considera fatores que são negligenciados pelos outros procedimentos, o modelo consegue identificar com clareza a influência de todos os parâmetros que são variados. Sendo assim, um estudo paramétrico que pondere os efeitos da variação das propriedades geométricas da placa e do enrijecedor, bem como da aplicação de carregamentos, é recomendado. Então, será viável a proposição de um novo modelo analítico que seja mais geral e exato que as formulações da norma europeia. Outra sugestão é que se reproduza o comportamento de todo perfil I de vigas esbeltas, incluindo também as mesas, o que não foi escopo deste trabalho. Com isso, também será possível avaliar diretamente as equações de verificação dos esforços resistentes de cálculo advindos da EN 1993-1-5:2006.

## REFERÊNCIAS

AMERICAN ASSOCIATION OF STATE HIGHWAY AND TRANSPORTATION OFFICIALS. **AASHTO LRFD Bridge**: design specifications. Washington: AASHTO, 2012.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro: ABNT, 2008.

ALINIA, M.M.; MOOSAVI, S. H. Stability of longitudinally stiffened web plates under interactive shear and bending force. **Thin-Walled Structures**, v.47, p. 53-60, 2009.

ALLEN, H. G.; BULSON, P. S. **Background to Buckling**, 1ª ed. Maidenhead: McGraw-Hill, 1980.

BARBOSA, D. A. **Estudo de almas de vigas de aço enrijecidas longitudinalmente**. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2016.

BARBOSA, D. A.; CALDAS, R. B.; FERREIRA FILHO, J. O. Comparativo entre Métodos de Cálculo de Vigas de Aço com Alma Enrijecida Longitudinalmente. **Revista da Estrutura de Aço**, v. 8, n. 3, [2019b]. No prelo.

BARBOSA, D. A.; CALDAS, R. B.; FERREIRA FILHO, J. O. Tensões Críticas de Flambagem Global de Almas de Vigas de Aço Enrijecidas Longitudinalmente. **Revista da Estrutura de Aço**, v. 8, n. 3, [2019a]. No prelo.

BARBRÉ, R. **Stability of rectangular plates with longitudinal or transverse stiffeners under uniform compression**. Washington: National Advisory Committee for Aeronautics, 1939.

BASLER, K. Strength of plate girders in shear. **Proc. ASCE**, v. 87, n. ST7, p. 151-180, 1961a.

BASLER, K. Strength of plate girders under combined bending and shear. **ASCE Journal of the Structural Division**, v. 87, n. 7, 1961b, p. 181–197.

BASLER, K.; THURLIMANN, B. Strength of Plate Girders in Bending. **Transactions – ASCE**, v. 128, n. 2, p. 153-181, 1959.

BATHE, K.J. **Finite element procedures** - Revision of Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hall, 1996.

BEG, D.; KUHLMANN, U.; DAVAINÉ, L.; BRAUN, B. **Design of plated structures**, 1<sup>a</sup> ed. Mem Martins: ECCS – European convention for Constructional Steelwork, 2010.

BLEICH, F. **Buckling strength of metal structures**, 1<sup>a</sup> ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1952.

BLEICH, F. **Theorie und berechnung der eisernen brücken**, 1<sup>a</sup> ed. Berlim: Springer, 1924.

BLEICH, F; Ramsey, L. B. **A Design Manual on the Buckling Strength of Metal Structures**. Washington: Society of Naval Architects, 1951.

BRAUN, B. T. **Stability of Steel Plates under Combined Loading**. 2010. Dissertação (Mestrado), Institut für Konstruktion und Entwurf - Universität Stuttgart, Stuttgart, 2010.

BRYAN, G. H. On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane with applications to the buckling of the sides of a ship. *In*: LONDON MATHAMATICAL SOCIETY, 22., 1891, Londres. **Proceedings of the London Mathematical Society**, p. 54.

CASTRO E SILVA, A.L.R. **Análise numérica não-linear da flambagem local de perfis de aço estrutural submetidos à compressão uniaxial**. 2006. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

ČAUŠEVIĆ, M.; BULIĆ, M. Steel plate elements loaded in their plane – buckling factors and critical stresses. **Gradevinar**, v. 64, n. 2, p. 115-125, (2012).

CHARLIER, R.; MAQUOI, R. Ultimate shear strength of plate girders fitted with closed shape longitudinal stiffeners. *In*: Dubas P, Vandepitte D, editors. 1987. Gante. **Colloquium on stability of plate and shell structures**. p. 59–64.

CHERN, C.; OSTAPENKO, A. **Ultimate strength of plate girder under shear**. Belém: Lehigh University, 1969.

CHWALLA, E. Die Bemessung der Waagrecht ausgesteiften Stegbleche vollwandiger Träger. *In: Kongress der Intern. Vereinig. für Brückenbau und Hochbau, 2., 1936, Berlin-Munich. Prelim Publ. IABSE*, p. 957.

COOKE, N.; MOSS, P. J.; WALPOLE, W.R.; LANGDON, D. W.; HARVEY, M. H. Strength and serviceability of steel girder webs. **Journal of Structural Engineering**. v. 109, n. 3, p. 785–807, 1983.

COOPER, P. B. Strength of longitudinally stiffened plate girders. **ASCE Journal of the Structural Division**, v. 93, n. ST2, p. 419-452, 1967.

COX, H. L. **Buckling of thin plates in compression**. EUA: Aeronautical Research Communications, Report and Memory, 1934.

DUBAS, P.; GEHRI, E.; **Behaviour and design of steel plated structures**, 1<sup>a</sup> ed. Zurich: Applied Statics and Steel Structures, 1986.

EULER, L. **Methodus inveniendi líneas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti**, 1<sup>a</sup> ed. Bousquet, Lausanne e Geneva, 1744.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION ENV 1993-1-1. **Eurocode 3 – Design of steel structures - part 1-1**: general rules and rules for buildings. Bruxelles: CEN, 2005.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION ENV 1993-1-5. **Eurocode 3 - Design of steel structures - Part 1-5**: general rules for plated structural elements. Bruxelles: CEN, 2006.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION ENV 1993-1-6. **Eurocode 3 - Design of steel structures - Part 1-6**: crane supporting structures. Bruxelles: CEN, 2007.

EVANS, H. R.; TANG, K. H. The influence of longitudinal web stiffeners upon the collapse behaviour of plate girders. **Journal of Constructional Steel Research**, 4, p. 201–34, 1984.

FAULKNER, D. Compression tests on welded eccentrically stiffened plate panels. In: DOWLING PJ *et al.* editors, 1977. Crosby Lockwood. **International Symposium on Steel Plated Structures**, p. 581-617.

FUJI, T.; FUKOMOTO, Y.; NISHINO, F.; OKUMURA, T. Research works on ultimate strength of plate girders and Japanese provisions on plate girder design. *In: IABSE Proceedings*, 1971. Londres. **Colloquium on design of plate and box girders for ultimate strength**, p. 21-48.

GALAMBOS, T. V. C. N. **Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures**, 5<sup>a</sup> ed. Nova Iorque: John Willey & Sons, 1998.

GALÉA, Y.; MARTIN, P. O. Contraintes critiques de voilement de plaques rectangulaires - Présentation du logiciel EBPlate. **Revue Construction Métallique**, v. 3, p. 33-74, 2007.

GALÉA, Y.; MARTIN, P. O. Longitudinally stiffened plates in Eurocode 3: calculation of the global critical buckling stress. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 66, n. 11, p. 1345-1353, 2010.

GALÉA, Y.; MARTIN, P. **Presentation Manual of EBPlate**, 1<sup>a</sup> ed. Liege: CTICM – Centre Technique Industriel de la Construction Métallique, 2006.

GALLAGHER, R.H. **Finite Element Analysis: Fundamentals**, 1<sup>a</sup> ed. John Wiley & Sons, 1975.

GERARD, G.; BECKER, H. **Handbook of Structural Stability – Part I: buckling of flat plates**, 1<sup>a</sup> ed. Nova Iorque: NACA Tech, 1957.

HÖGLUND, T. **Design of Thin-Plate I-Girders in Shear and Bending**, 1<sup>a</sup> ed. Estocolmo: Royal Institute of Technology, 1973.

HÖGLUND, T. Shear buckling resistance of steel and aluminium plate girders. **Thin-Walled Structures**, v.29, p. 12-30, 1998.

HÖGLUND, T. Simply supported thin plate I-girders without web stiffeners subjected to distributed transverse load. In: IABSE Proceedings, 1971. Londres. **Colloquium on design of plate and box girders for ultimate strength**.

HÖGLUND, T. **Strength of steel and aluminium plate girders** - shear buckling and overall web buckling of plane and trapezoidal webs. Comparison with tests, 1<sup>a</sup> ed. Estocolmo: Royal Institute of Technology e Department of Structural Engineering, 1995.

JÁGER, B.; KÖVESDI, B; DUNAI, L. Bending and shear buckling interaction behaviour of I-girders with longitudinally stiffened webs. **Journal of Constructional Steel Research**, v.145, p. 504-517, 2018.

JOHANSSON, B.; MAQUOI, R.; SEDLACEK, G. New design rules for plated structures in Eurocode 3. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 57, p. 279-311, 2001.

JOHANSSON, B.; MAQUOI, R.; SEDLACEK, G.; MÜLLER, C.; BEG, D. **Commentary and worked examples to EN 1993-1-5: Plated structural elements**, 1<sup>a</sup> ed. Itália: JRC European Comission - ECCS, 2007.

KLEIBER, M.; HIEN, T.D., **The stochastic finite element method**, 1<sup>a</sup> ed. John Wiley & Sons, 1992.

KLÖPPEL, K.; MÖLLER, K. H. **Beulwerte ausgestifter Rechteckplatten**, 2<sup>a</sup> ed. Berlin: Ernst & Sohn Verlag, 1968.

KLÖPPEL, K.; SCHEER, J. **Beulwerte ausgesteifter Rechteckplatten**, 1<sup>a</sup> Ed. Berlin: Ernst & Sohn Verlag, 1960.

KOMATSU, S. Ultimate strength of stiffened plate girders subjected to shear. In: IABSE Proceedings, 1971. Londres. **Colloquium on design of plate and box girders for ultimate strength**. p. 49-65.

KÖVESDI, B. Buckling resistance of orthotropic plates subjected by compression interpolation between plate and column-like behavior. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 160, p. 67-76, 2019b.

KÖVESDI, B. Plate-like Buckling Resistance of Longitudinally Stiffened Plates Subjected to Pure Compression. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, v. 63, n. 2, p. 621-630, 2019a.

KÖVESDI, B.; ALCÁINE, J.; DUNAI, L.; MIRAMBELL, E.; BRAUN, B.; KUHLMANN, U. Interaction behaviour of steel I-girders under bending, shear and transverse force, part II: longitudinally stiffened girders, **Journal of Constructional Steel Research**. v. 103, p. 344-353, 2014.

KRISTEK, V.; SKALOUD, M. Advanced Analysis and Design of Plated Structures. *In: NANNI, A. Developments in Civil Engineering*. Boca Ratón: Elsevier, 1991. v. 32.

LEBET, J.P.; HIRT, M.A. **Steel bridges**: conceptual and structural design of steel and steel concrete composite bridges, 1<sup>a</sup> ed. Lausanne: CRC Press, 2013.

LJUBINKOVIĆ, F.; MARTINS, J. P.; GERVÁSIO, H.; SIMÕES DA SILVA, L.; Eigenvalue analysis of cylindrically curved steel panels under pure shear. **Thin-Walled Structures**, v. 141, p. 447-459, 2019.

LOKSHIN, A. S. On the calculation of plates with ribs. **Journal of Applied Math. and Mech.**, v. 2, p. 225, 1935.

MAQUOI, R.; MASSONNET, C. Théorie non-linéaire de la résistance postcritique des grandes poutres en caisson raidies. **Mémoires AIPC**, Zurich, v. 31, n. 2, p. 91-140, 1971.

MARGUERRE, K.; TREFFTZ, E. Über die tãgfhigkeit eines lãngsbelasteten plattenstreifens nach überschreiten der beullast. **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 17, p. 85-100, 1937.

MARTIN, P. O.; GALÉA, Y. Assessment of elastic buckling stresses of plates - Presentation of EBPlate software. *In: 7th international conference on steel bridges*, 2008.

MARTIN, P-O.; NGUYEN, T. M.; DAVAINÉ, L. Effect of the torsional stiffness of closed-section stiffeners on plate buckling in Eurocode 3, Part 1-5. *Steel Construction*, v. 12, n. 1, p. 10-22, 2019.

MARTINS, J. P.; SIMÕES DA SILVA, L.; REIS, A. Eigenvalue analysis of cylindrically curved panels under compressive stresses – Extension of rules from EN 1993-1-5. **Thin-Walled Structures**, v. 68, p. 183-194, 2013.

MELE, M.; PUHALI, R. Optimization of Stiffeners in thin walled plate girders. **Acier-Stahl-Steel**, v. 3, p. 108–17, 1980.

OSTAPENKO, A. CHERN, C. Ultimate strength of longitudinally stiffened plate girders under combined loads. *In: IABSE Proceedings, 1971. Londres. Colloquium on design of plate and box girders for ultimate strength.* p. 301–13.

PAIKE, J .K. **Ultimate Limit State Analysis and Design of Plated Structures**, 2<sup>a</sup> ed. Chichester, John Wiley & Sons, 2018.

PAVLOVČIČ, L.; BEG, D.; KUHLMANN, U. Shear resistance of longitudinally stiffened panels—Part 2: Numerical parametric study. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 63, n. 3, p. 351-364, 2007.

PORTER, D. M.; ROCKEY, K. C.; EVANS, H. R. The collapse behaviour of plate girders loaded in shear. **The Structural Engineer**, v. 53, n. 8, p. 313–25, 1975.

REDDY, J. N. **Theory and analysis of elastic plates**, 1<sup>a</sup> ed. College Station: Taylor & Francis, 1999.

REIS, A.; CAMOTIM, D. **Estabilidade Estrutural**, 1<sup>a</sup> Ed. Alfragide: MacGraw-Hill, 2000.

REISSNER, H. **Über die Knicksicherheit ebener bleche**, 1<sup>a</sup> ed. Zentraltblatt der Blauverwaltung, 1909.

RIKS, E. An incremental approach to the selection of buckling and snapping problems. **International Journal of Solids & Structures**, v. 15, p. 529-551, 1979.

ROCKEY, K.C. An ultimate load method for the design of plate girders. *In: IABSE Proceedings, 1971. Londres. Colloquium on design of plate and box girders for ultimate strength.* p. 253-268.



ROCKEY, K.C.; SKALOUD, M. The ultimate load behaviour of plate girders loaded in shear. **The Structural Engineer**. v. 50, n.1, p. 29-48, 1972.

RODE, H. H. Beiträge zur Theorie der Knick Erscheinungen. **Der Eisenbau**. Lipsia, v. 7, p. 210-218, 1916.

ROORDA, J. **Buckling of elastic structures**, 1<sup>a</sup> ed. Waterloo: Solid Mechanics Division - University of Waterloo Press, 1980.

SAINT-VENANT, B. **Théorie de l'élasticité des corps solides**, 1<sup>a</sup> ed. Paris: Clebsch, 1883.

SASTRY, S.S.S. Accepted practices in practical finite element analysis of structures. *In: NAFEMS Webinar Series*, 2010, Índia. Disponível em: [www.nafems.org](http://www.nafems.org). Acesso em: 1 jan 2019.

SCHLEICHER, F. **Die Knickspannungen von eingespannten rechteckigen Platten**. Mitt. Forsch. Anst. Gutehoffnungshutte, 1931.

SCHMID, D. FEM validation. *In: Swiss VPE workshop*, 2012, Suíça. Disponível em: [www.swiss-vpe.ch/Validierung-von-Berechnungen-S.10631.0.html](http://www.swiss-vpe.ch/Validierung-von-Berechnungen-S.10631.0.html). Acesso em: 1 jan 2019.

SCHUMAN, L.; BACK, G. **Strength of rectangular plates under edge compression**. EUA: NASA Technical Report, 1959.

SEIDE, P.; STEIN, M. **Compressive Buckling of Simply Supported Plates with Longitudinal Stiffeners**. Washington: National Advisory Committee for Aeronautics (NACA TN), 1949.

SHARP, M. L. Longitudinal Stiffeners for Compression Members. **ASCE Journal of the Structural Division**, v. 96, n. ST5, p. 1011-1015, 1966.

SILVA, L. S.; GERVÁSIO, H. **Manual de dimensionamento de estruturas metálicas: métodos avançados**, 1<sup>a</sup> Ed. Mem Martins: CMM, 2007.

SIMULIA, D. S. **ABAQUS 6.14 User's Manual**. Dassault Systems, 2014.

SINUR, F. **Behaviour of longitudinally stiffened girders under combination of high bending and shear loading**. Tese (Doutorado), Faculty of Civil and Geodetical Engineering - University of Ljubljana, Ljubljana, 2011.

SINUR, F. Stability of longitudinally stiffened plates. In: **ECCS Technical Working Group 8.3 Meeting, Aachen**. 13 out. 2014.

SINUR, F.; BEG, D. Imperfection sensitivity analysis of longitudinally stiffened plated girders subjected to bending-shear interaction. In: SSDS, 2010. Rio de Janeiro. **Proceedings of Stability and Ductility of Steel Structures**. p. 787-794.

SINUR, F.; BEG, D. Moment-shear interaction of stiffened plate girders – tests and numerical model verification. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 85, p. 116-129, 2013a.

SINUR, F.; BEG, D. Moment-shear interaction of stiffened plate girders – numerical study and reliability analysis, **Journal of Constructional Steel Research**. v.88, p.231–243, 2013b.

SKALOUD, M. Optimum rigidity of stiffeners of webs and flanges. In: Narayanan, R. **Plated Structures, Stability and Strength**. Londres: Applied Science Publishers, 1983. p. 103-134.

STOWELL, E. Z.; HEIMERL, G. J.; LIBOVE, C.; LUNDQUIST, E. E. Buckling Stresses for Flat Plates and Sections Trans. **Am. Soc. Civ. Eng.**, v. 117, p. 545-578, 1952.

TAKEUCHI, T. **Investigation of the load carrying capacity of plate girders**. 1964. Dissertação (Mestrado) - University of Kyoto, Quioto, 1964.

THURLIMANN, B. Static strength of plate girders. **Extract des memoires de la Société Royale des Sciences de Liège**, v. 8, p. 137, 1963.

TIMMERS, R.; SCHWIENBACHER, M.; LANG, R.; LENER, G. Proposal and validation of a simplified numerical buckling check for stiffened plated elements. In: ICTWS, 2018. Lisboa. **Proceedings of Eighth International Conference on Thin-Walled Structures**.

TIMOSHENKO, S. P. Einige stabilitäts probleme der elastizitäts theorie. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)**, v. 58, n. 4, p. 337-385, 1910.

TIMOSHENKO, S. P. Über die Stabilität versteifter Platten. **Der Eisenbau**, v. 12, p. 147-163, 1921.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of elastic stability**, 1<sup>a</sup> ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1961.

TRAHAIR, N. S.; BRADFORD, M. A. **The behavior and design of steel structures**, 2<sup>a</sup> ed. Nova Iorque: Chapman & Hall, 1988.

UGURAL, A.C. **Stresses in plates and shells**, 1<sup>a</sup> ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1981.

VASIOS, N. The Arc Length Method: Formulation, Implementation and Applications, 1<sup>a</sup> ed. Cambridge: Harvard University, 2015.

VAYAS, I.; ILIOPOULOS, A. **Design of steel-concrete composite bridges to eurocodes**, 1<sup>a</sup> ed. Boca Ratón: CRC Press, 2013.

VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. **Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications**, 1<sup>a</sup> Ed. Nova Iorque: Marcel Dekker, Inc., 2001.

von KÁRMAN, T.; SECHLER, E. E.; DONNELL, L. H. The strength of thin plates in compression. **Transactions - ASCE**, v. 54, p. 53, 1932.

WAGNER, H. Ebene Blechwantrager mit sehr dünnem Stegblech. **Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt**, v. 20, n. 8, p. 200-207, n. 9, p. 227-233, n.10, p. 256-262, n. 11, p. 279-284, n.12, p. 306-314, 1929.

WAGNER, H. **Flat Sheet Metal Girder with Very Thin Metal Web – Part I: General Theories and Assumptions**. Washington: National Advisory Committee for Aeronautics (NACA TN), 1931a.

WAGNER, H. **Flat Sheet Metal Girder with Very Thin Metal Web – Part II: Sheet Metal Girders with Spars Resistant to Bending – Oblique Uprights – Stiffness**. Washington: National Advisory Committee for Aeronautics (NACA TN), 1931b.

WAGNER, H. **Flat Sheet Metal Girder with Very Thin Metal Web – Part III: Sheet Metal Girders with Spars Resistant to Bending the Stress in Uprights – Diagonal Tension Fields.** Washington: National Advisory Committee for Aeronautics (NACA TN), 1931c.

WAY, S. Stability of rectangular plates under shear and bending forces. **Journal of Applied Mechanics**, v.3, n.4, p. 131-136, 1936.

WINTER, G. Strength of thin compression flanges. **Transactions - ASCE**, v. 112, p. 527-576, 1947.

WINTER, G. Thin-walled steel structures: theoretical solutions and test results. *In: IABSE Proceedings*, 1968. Nova Iorque. **8th Congress of the International Association for Bridge and Structural Engineering**. p. 101-112.

XU, Z.; TONG, G.; ZHANG, L. Design of horizontal stiffeners for stiffened steel plate walls in compression. **Thin-Walled Structures**, v. 132, p. 385-397, 2018b.

XU, Z.; TONG, G.; ZHANG, L. Elastic and elastic-plastic threshold stiffness of stiffened steel plate walls in compression. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 148, p. 138-153, 2018a.

ZAHLQUIST, R. **Knekklast for platefelt med aksiallast.** 2013. Dissertação (Mestrado), Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU), Trondheim, 2013.

ZIENKIEWICZ, O.C. **The finite element method in engineering science**, 2<sup>a</sup> ed. McGraw-Hill, 1971.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method**, 4<sup>a</sup> ed. McGraw-Hill, 1989.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. **The finite element method – Its basis and fundamentals**, 6<sup>o</sup> ed. Elsevier, 2005.

## APÊNDICE A

### Resultados da análise de flambagem elástica e capacidade resistente última para placas reforçadas por dois enrijecedores

Na sequência, serão apresentados os gráficos relacionados aos resultados referentes às placas reforçadas por dois enrijecedores na região comprimida. Essas placas possuem a geometria descrita no capítulo 3 e espessuras conforme definido na Tabela 4-1.

Os resultados de tensão crítica global devido aos efeitos da flexão e do cisalhamento são visualizados, respectivamente, na Figura A-1 e na Figura A-2. Em relação à interação dos esforços, as parcelas de tensão crítica global devido à tensão normal e cisalhante são exibidas, respectivamente, na Figura A-3 e na Figura A-4. Além disso, também são apresentados os resultados relacionados do coeficiente de redução, na Figura A-5, e os valores de contribuição da alma à resistência ao cisalhamento, na Figura A-6.

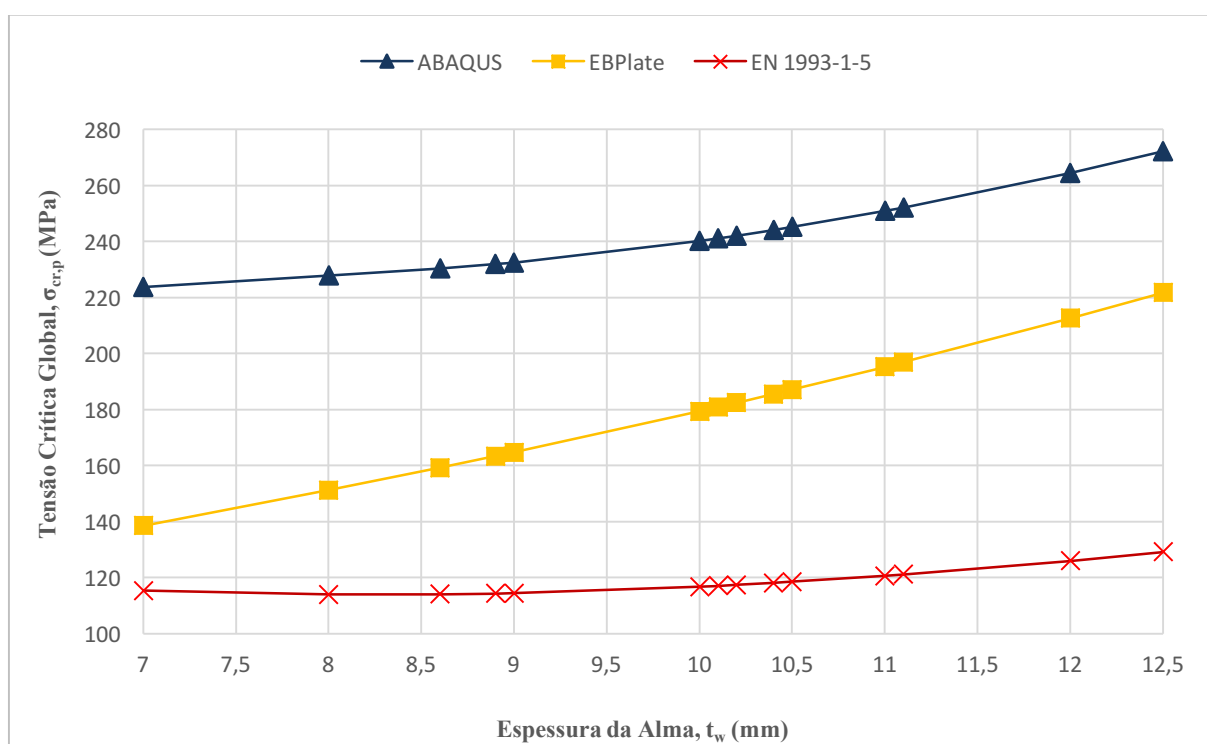


Figura A-1. Gráfico de tensões críticas de flambagem global de placas com dois enrijecedores submetidas à flexão

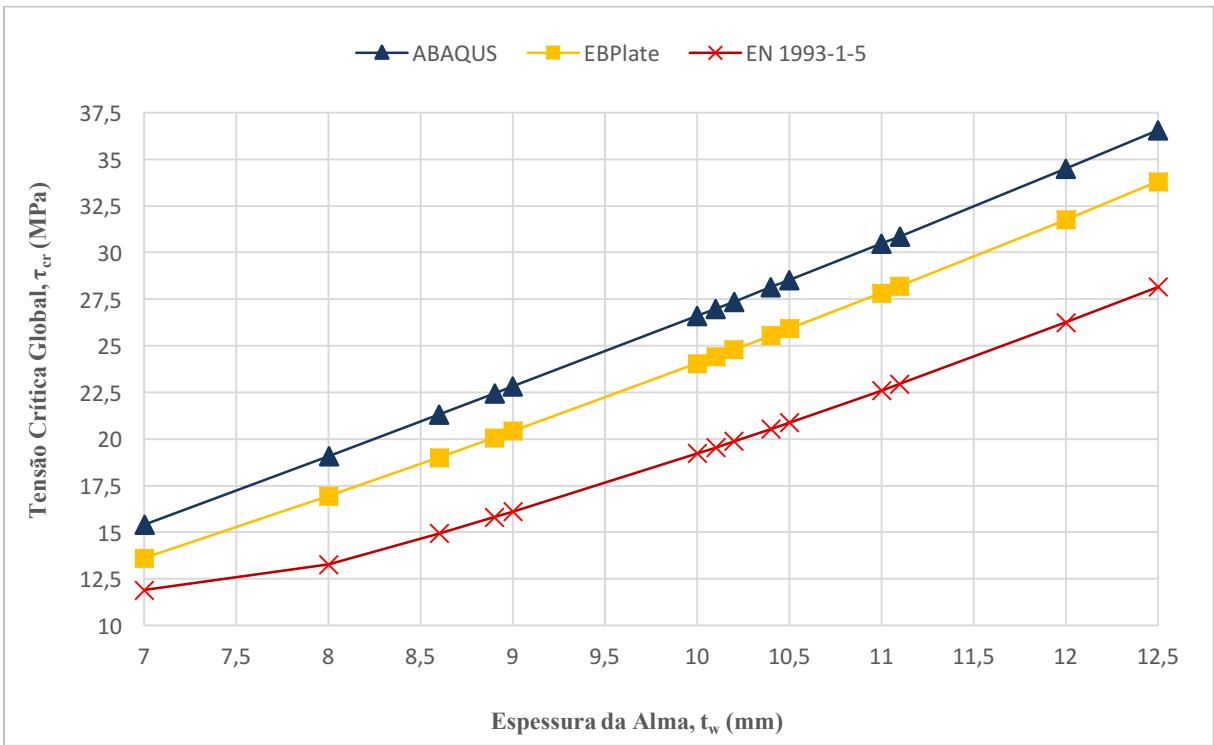


Figura A-2. Gráfico de tensões críticas de flambagem global de placas com dois enrijecedores submetidas ao cisalhamento

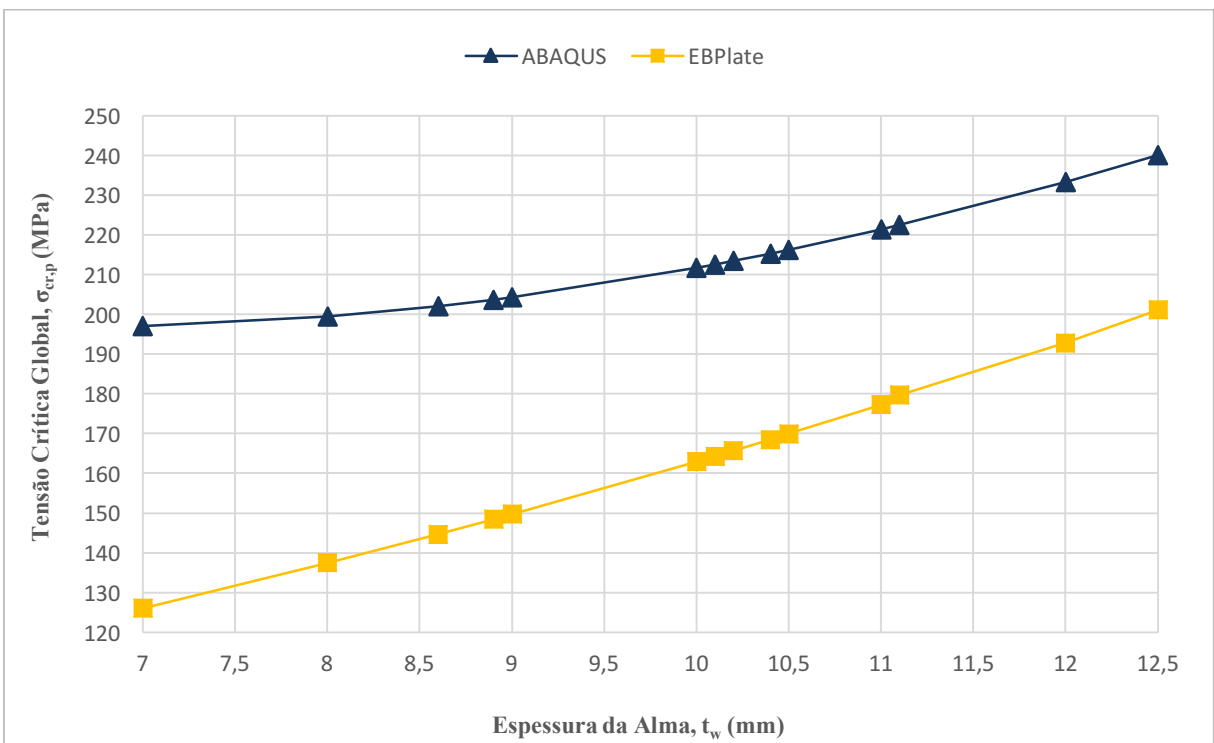


Figura A-3. Parcela de tensão crítica devido à flexão de placas submetidas à interação

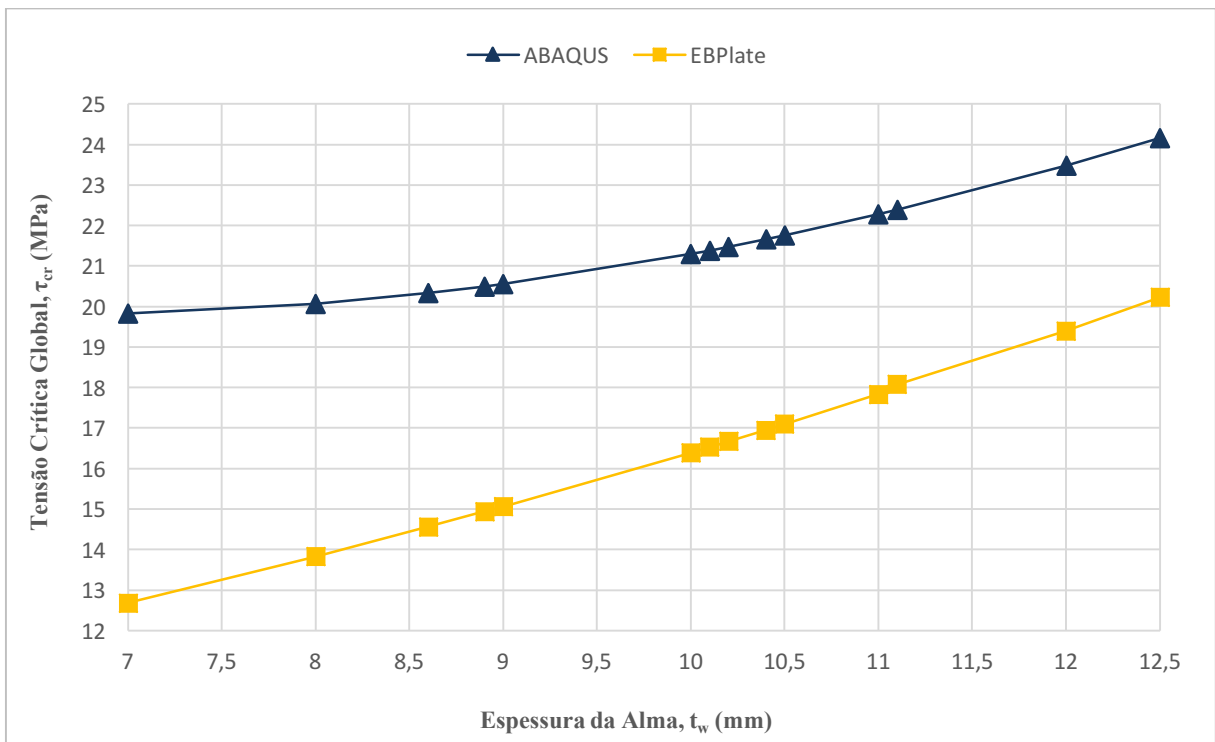


Figura A-4. Parcela de tensão crítica devido ao cisalhamento de placas submetidas à interação

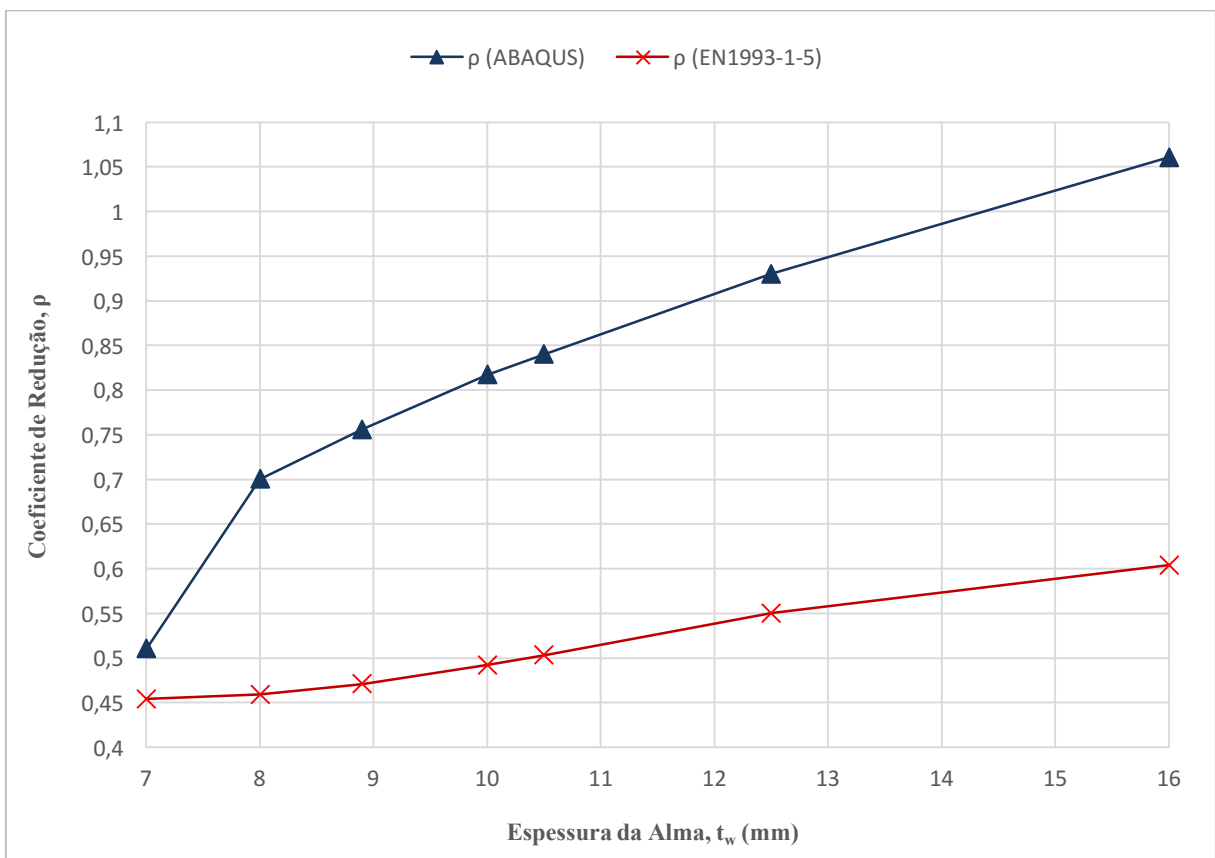


Figura A-5. Coeficientes de redução  $\rho$  avaliados a partir dos modelos numérico e analítico

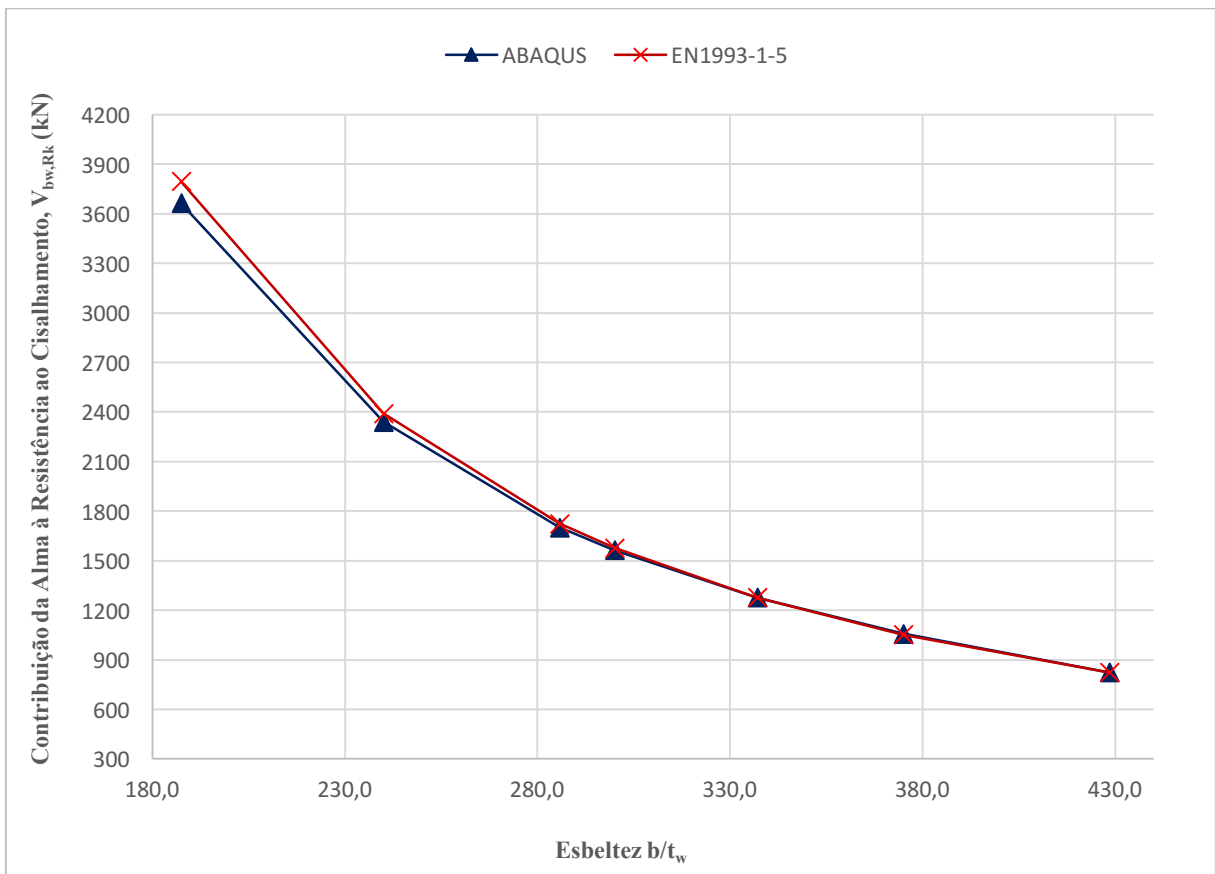


Figura A-6. Valor característico da contribuição da alma à resistência à flambagem,  $V_{bw,Rk}$ , a partir dos modelos numérico e analítico



## APÊNDICE B

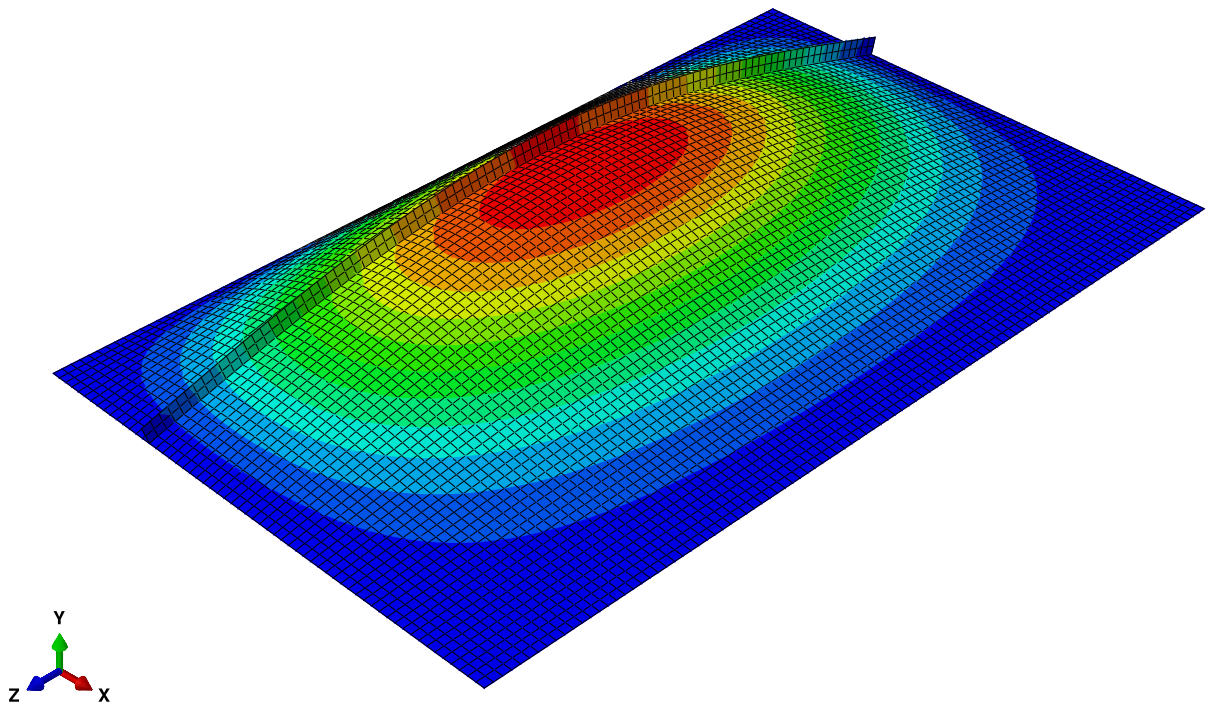
### **Ilustração dos modos de flambagem elástica e falha para a placa de 12,5 mm reforçada por um, dois e três enrijecedores na região comprimida**

Os modos de flambagem elástica relacionados à flexão, ao cisalhamento e à interação de esforços são apresentados, respectivamente, na Figura B-1, Figura B-2 e Figura B-3, para a placa reforçada a partir de um enrijecedor; na Figura B-4, Figura B-5 e Figura B-6, para a placa com dois enrijecedores e na Figura B-7, Figura B-8 e Figura B-9, para placa reforçada por três enrijecedores longitudinais. Em todas as situações de carregamento e reforço, observa-se o aspecto de flambagem global como primeiro modo de flambagem encontrado.

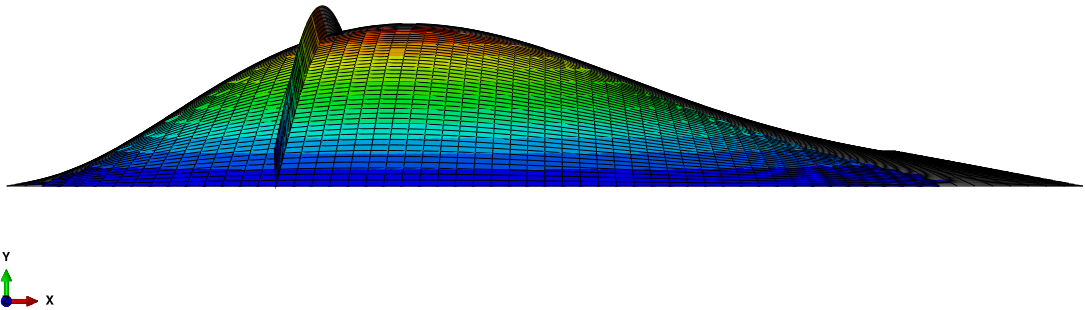
Observe que na Figura B-2, Figura B-5 e Figura B-8 há a formação de uma semi-onda na direção tracionada da placa e de uma onda na direção comprimida. Após a tensão crítica relacionada a este modo de flambagem, apenas a direção tracionada conseguirá absorver carga e contribuir para o valor de resistência última ao cisalhamento. Isso pode ser verificado na Figura B-12 e Figura B-13, nas quais o colapso acontece justamente na direção tracionada. Nas imagens, o mecanismo plástico, no qual rótulas plásticas são originadas, não pode ser visualizado, uma vez que as mesas do perfil I não foram modeladas.

Observe que ao comparar o modo de flambagem relacionado à interação de esforços (Figura B-3, Figura B-6 e Figura B-9) com aqueles referentes à cada tensão isolada, o aspecto se aproxima mais do formato de flambagem global devido à flexão que ao modo de flambagem devido aos efeitos do cisalhamento. Isso já era esperado, uma vez que a tensão normal é 10 vezes superior à tensão cisalhante aplicada.

Por fim, os modos de falha em relação à flexão e ao cisalhamento são exibidos, respectivamente, na Figura B-10 e Figura B-12, para a placa reforçada por um enrijecedor, e Figura B-11 e Figura B-13, para a placa reforçada a partir de dois enrijecedores. Nas imagens, também é interessante observar a semelhança entre os modos de falha e os modos de flambagem, constatando a aplicação desses últimos como imperfeições iniciais aos primeiros.

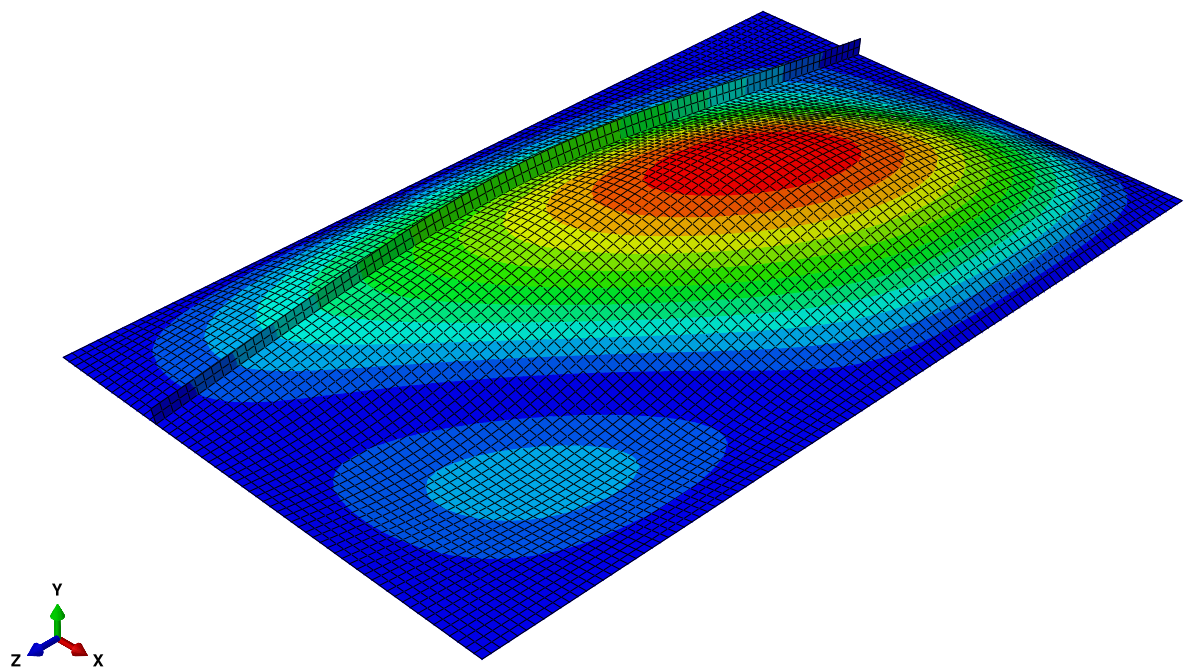


(a)

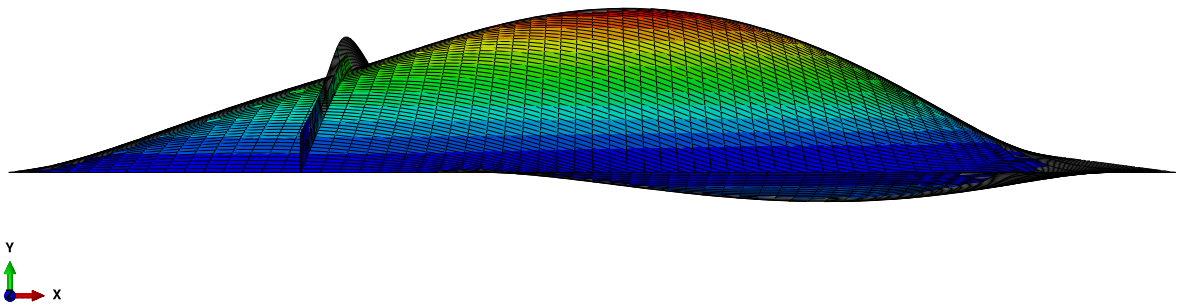


(b)

Figura B-1. Vistas superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com um enrijecedor submetida à flexão

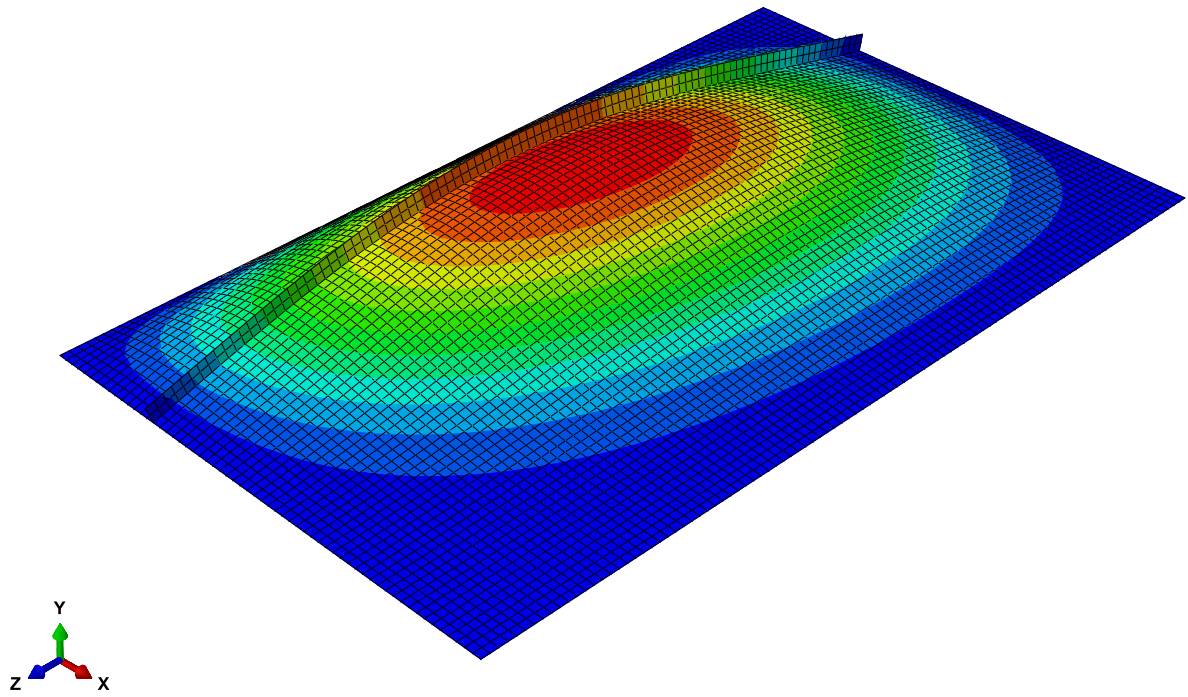


(a)

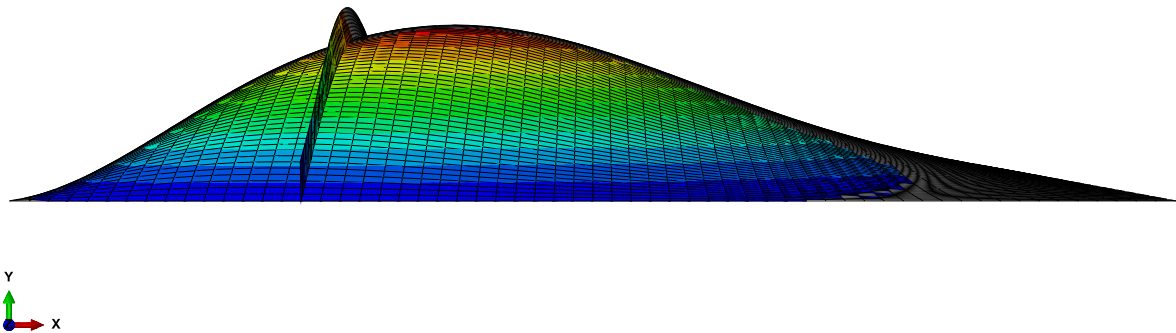


(b)

Figura B-2. Vistas superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com um enrijecedor submetida ao cisalhamento

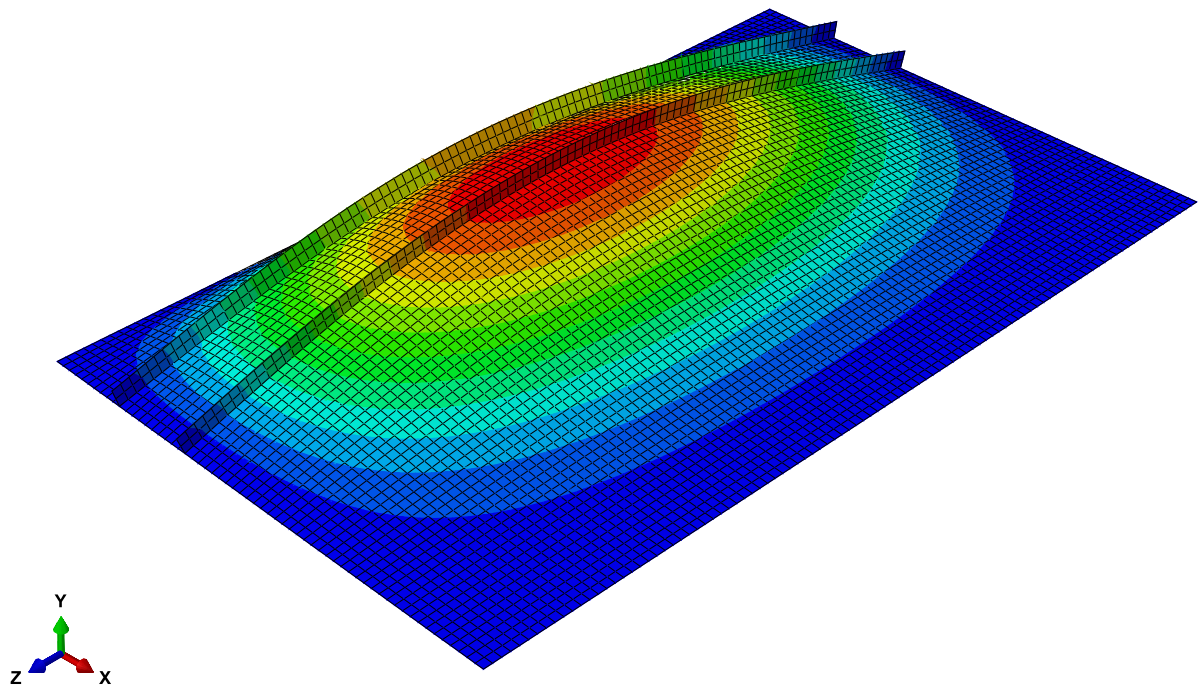


(a)

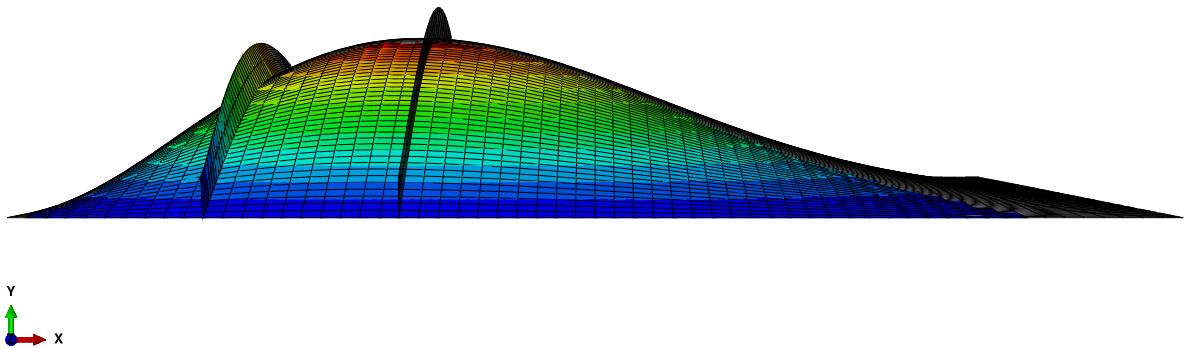


(b)

Figura B-3. Vistas superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com um enrijecedor submetida à interação de tensões

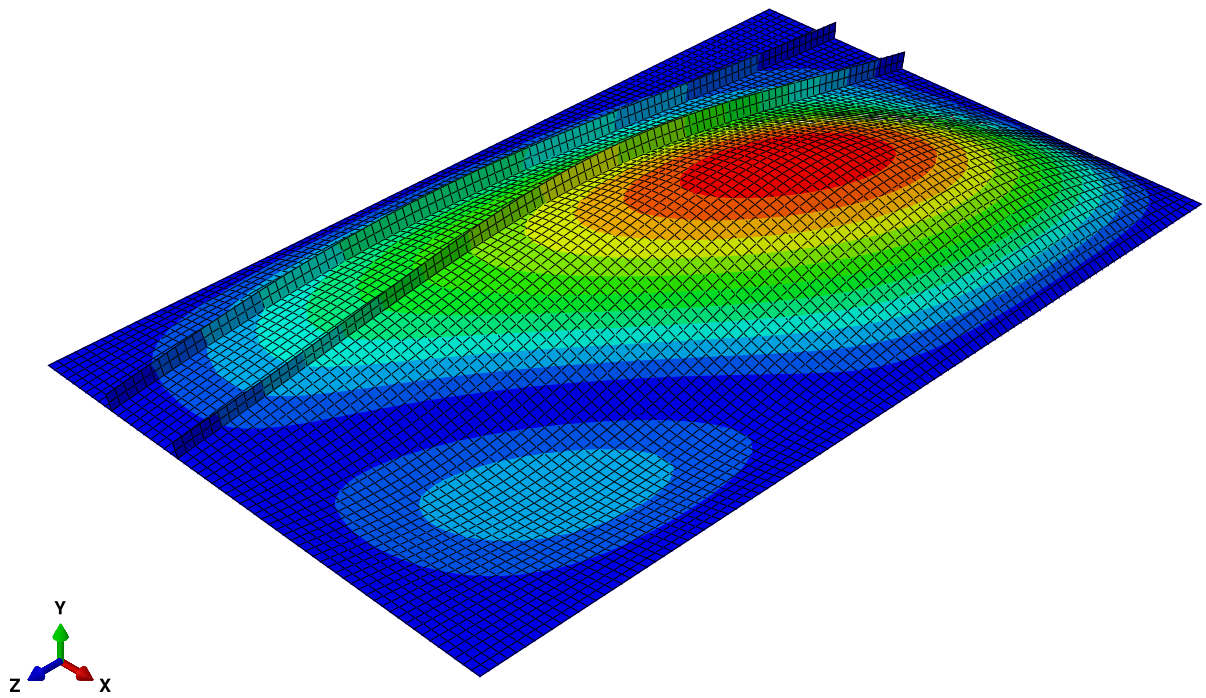


(a)

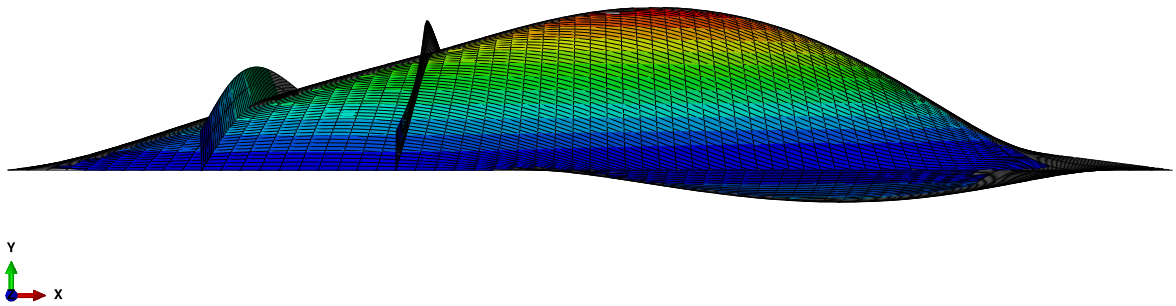


(b)

Figura B-4. Vistas superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com dois enrijecedores submetida à flexão



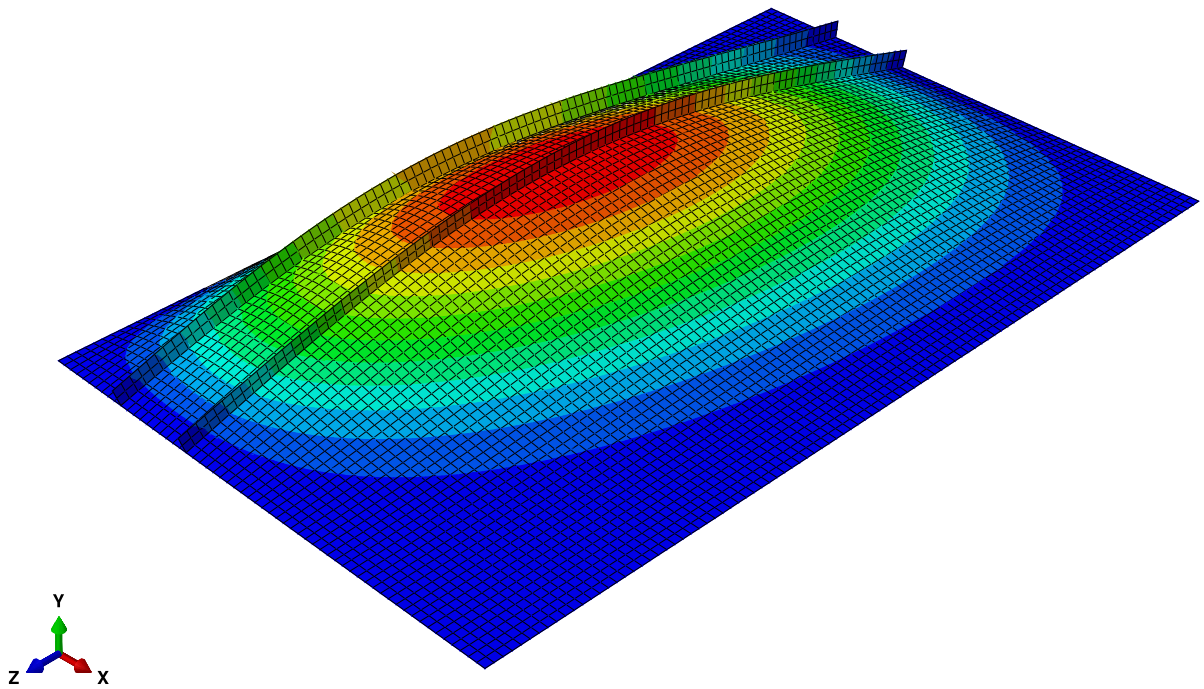
(a)



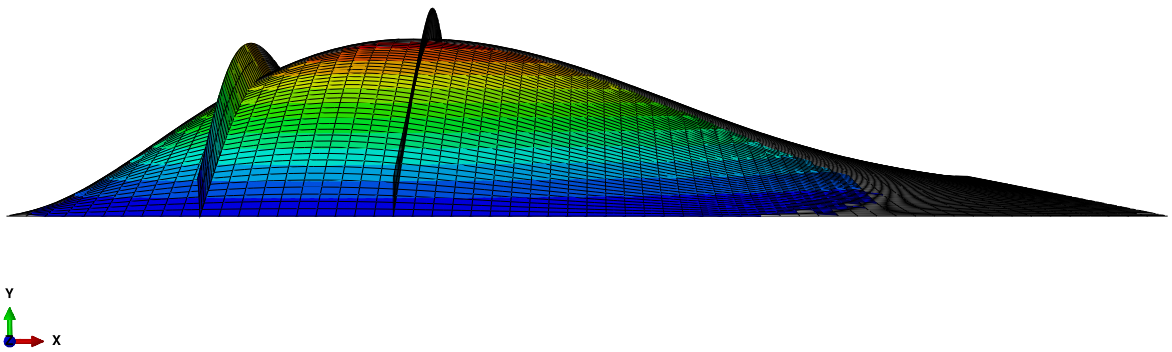
(b)

Figura B-5. Vistas superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com dois enrijecedores submetida ao cisalhamento



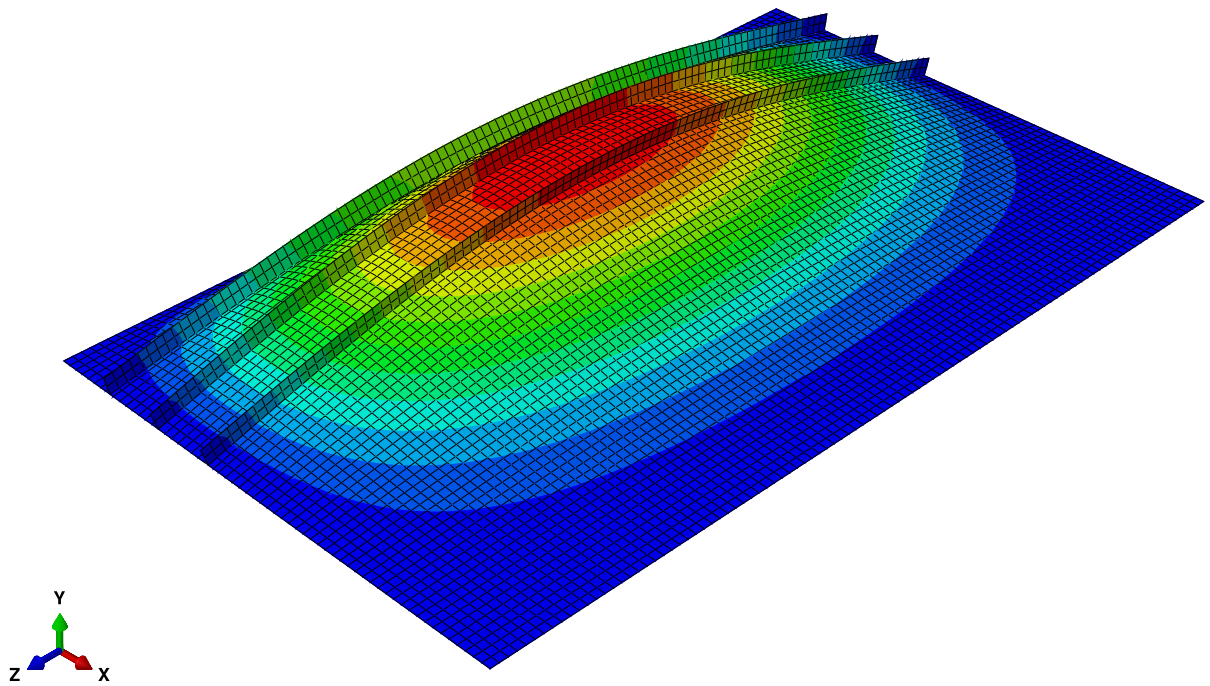


(a)

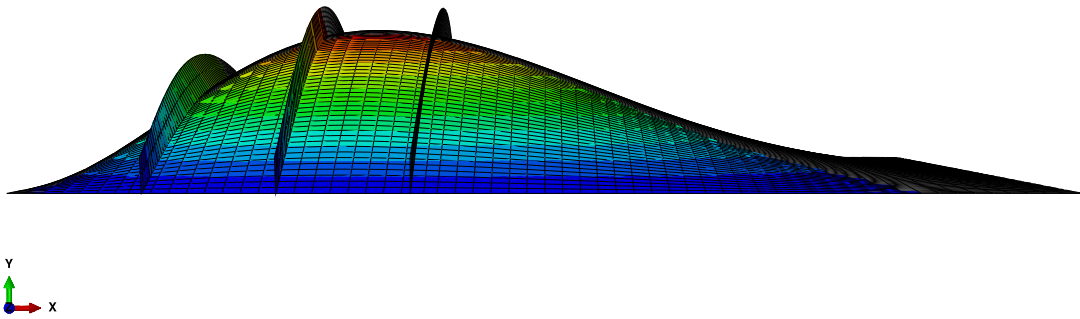


(b)

Figura B-6. Vistas superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com dois enrijecedores submetida à interação de esforços



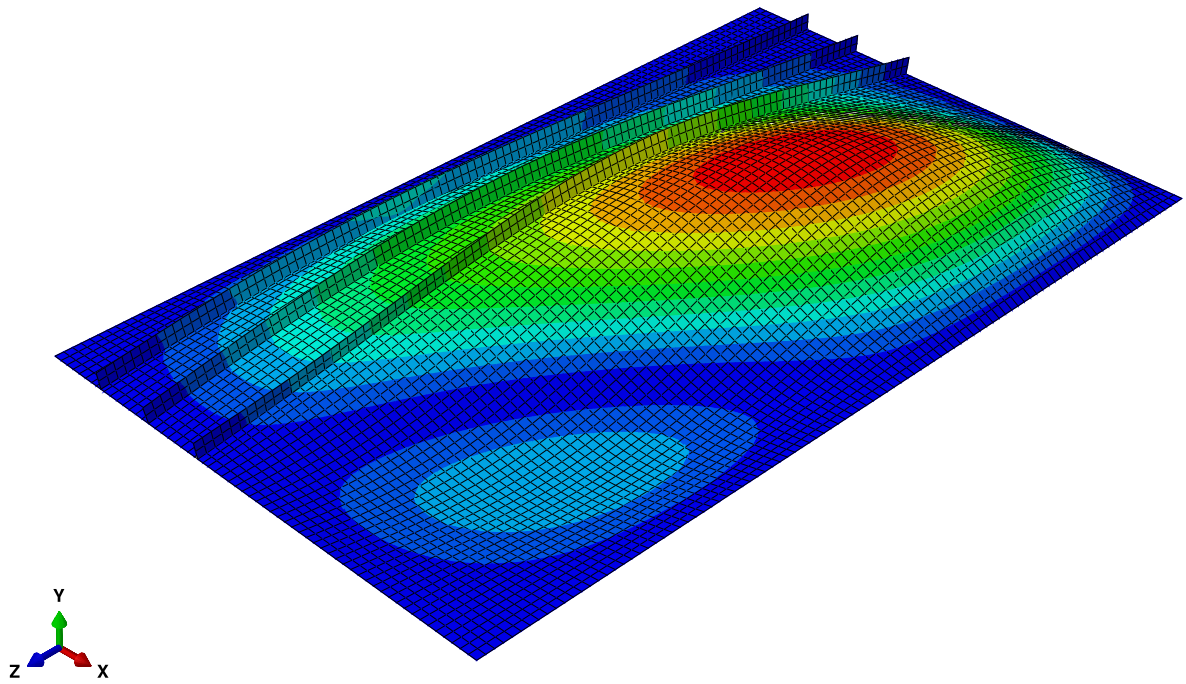
(a)



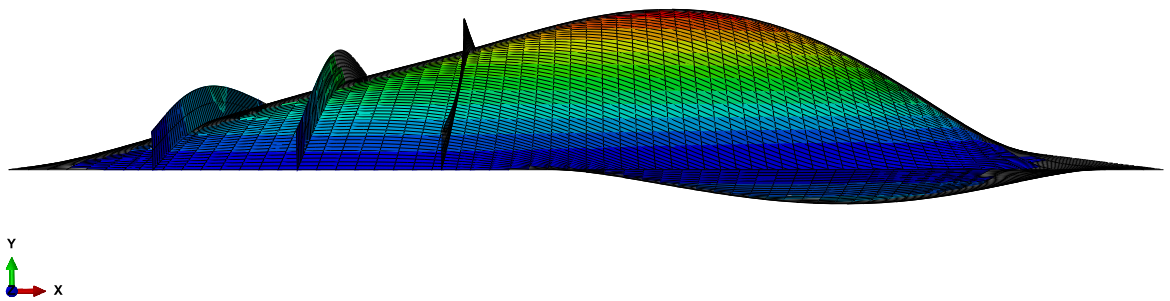
(b)

Figura B-7. Vistas superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com três enrijecedores submetida à flexão



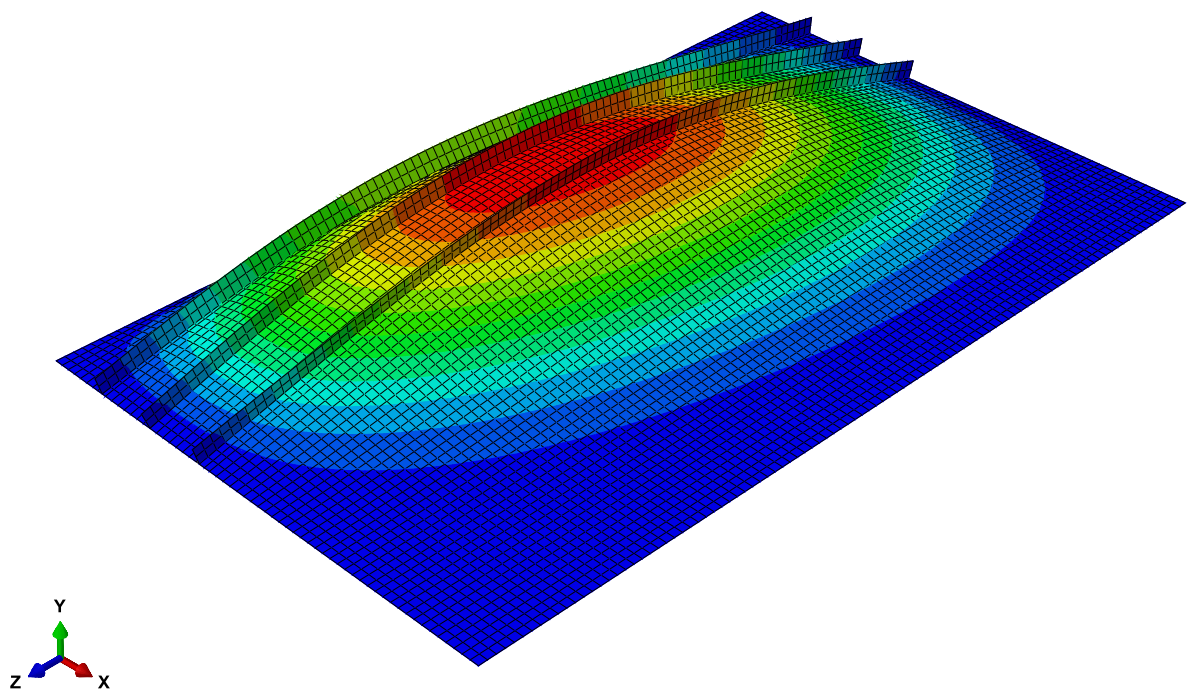


(a)

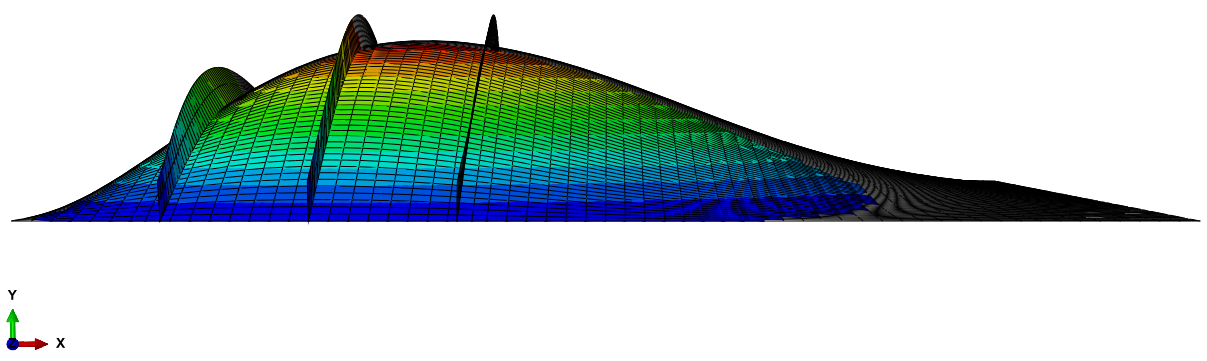


(b)

Figura B-8. Vistas superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com três enrijecedores submetida ao cisalhamento



(a)



(b)

Figura B-9. Vistas superior (a) e lateral (b) do modo de flambagem global para a placa com três enrijecedores submetida à interação de esforços

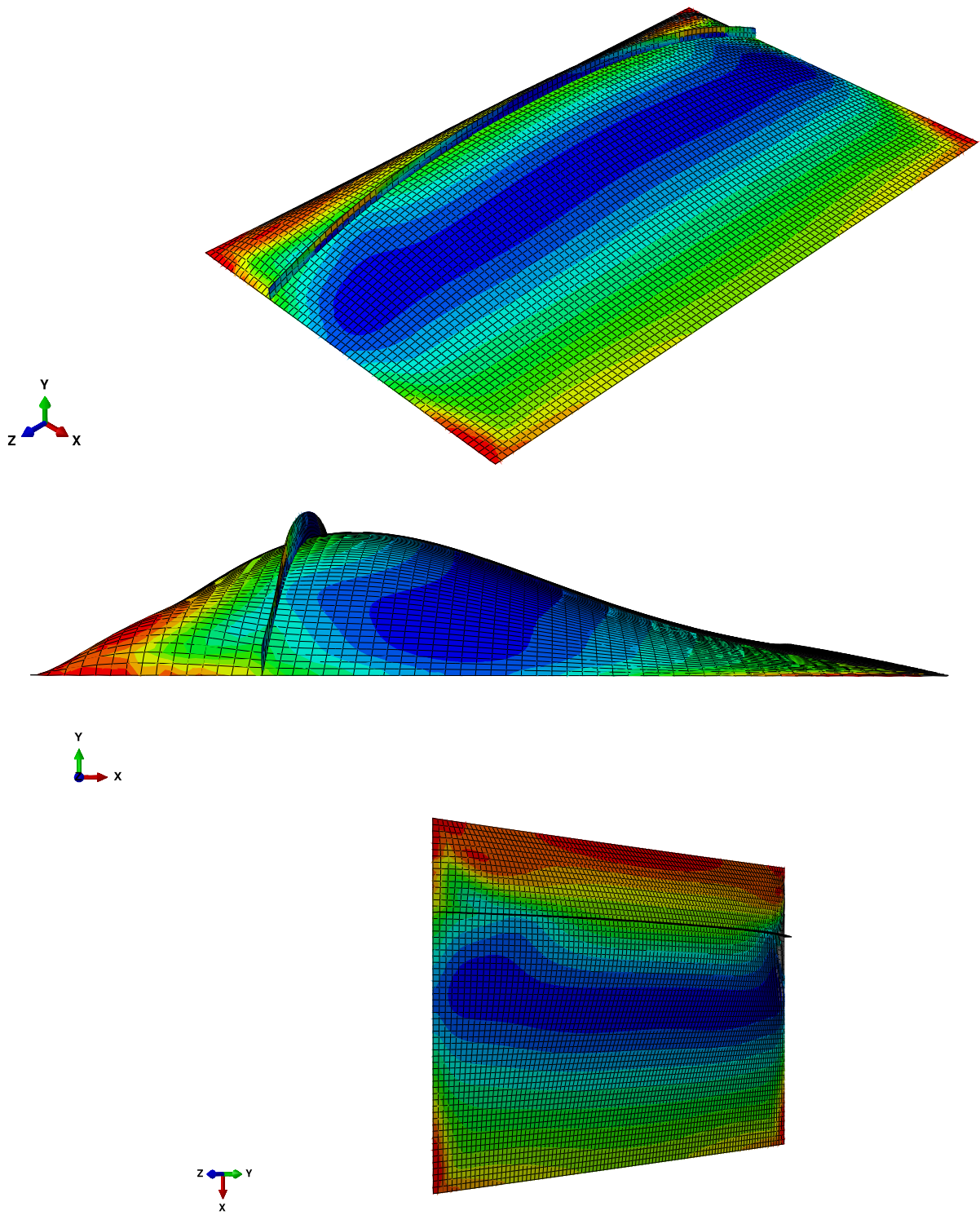


Figura B-10. Vista superior e vistas laterais do modo de falha da placa reforçada a partir de um enrijecedor submetida à flexão

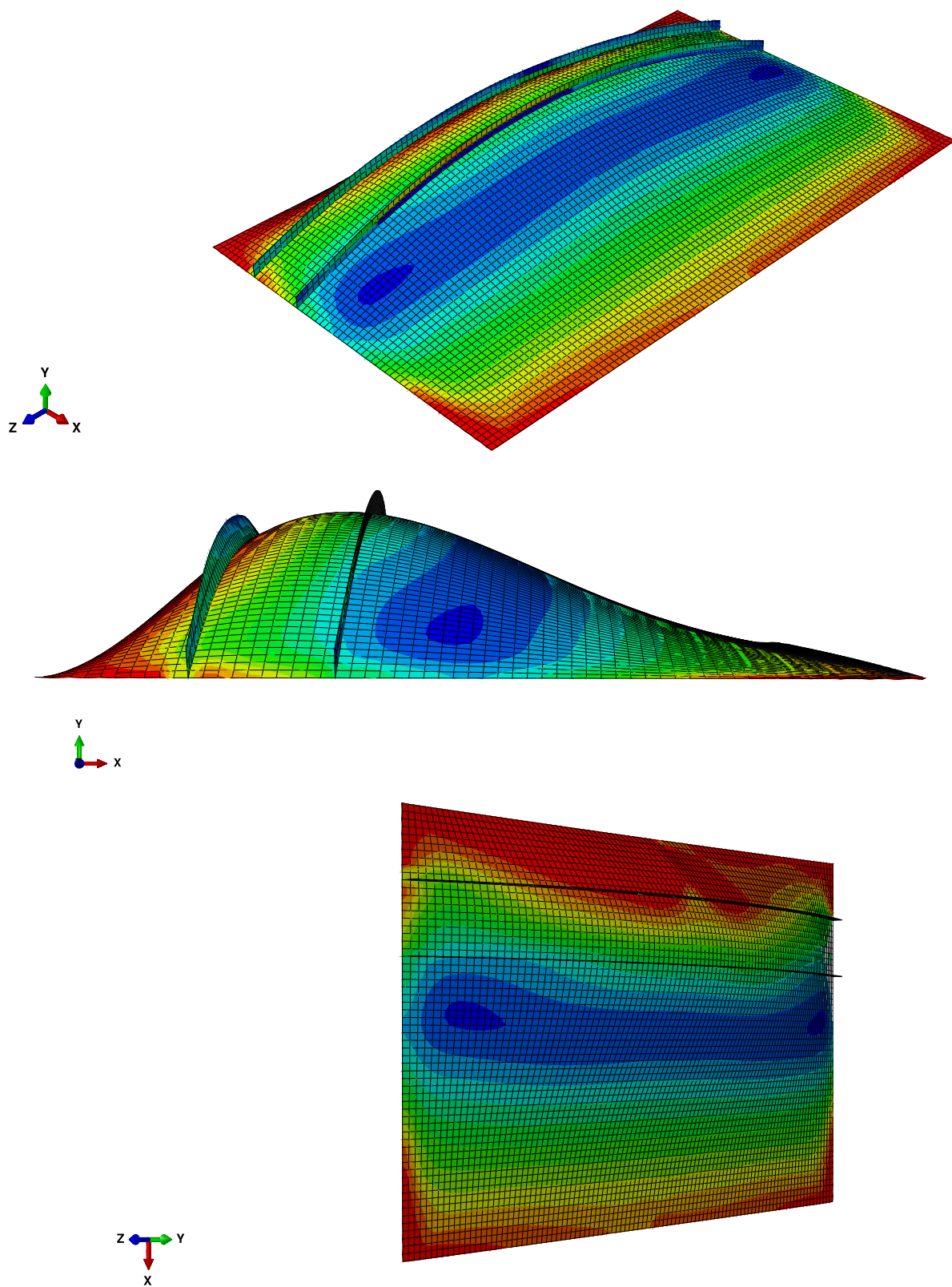


Figura B-11. Vista superior e vistas laterais do modo de falha da placa reforçada a partir de dois enrijecedores submetida à flexão



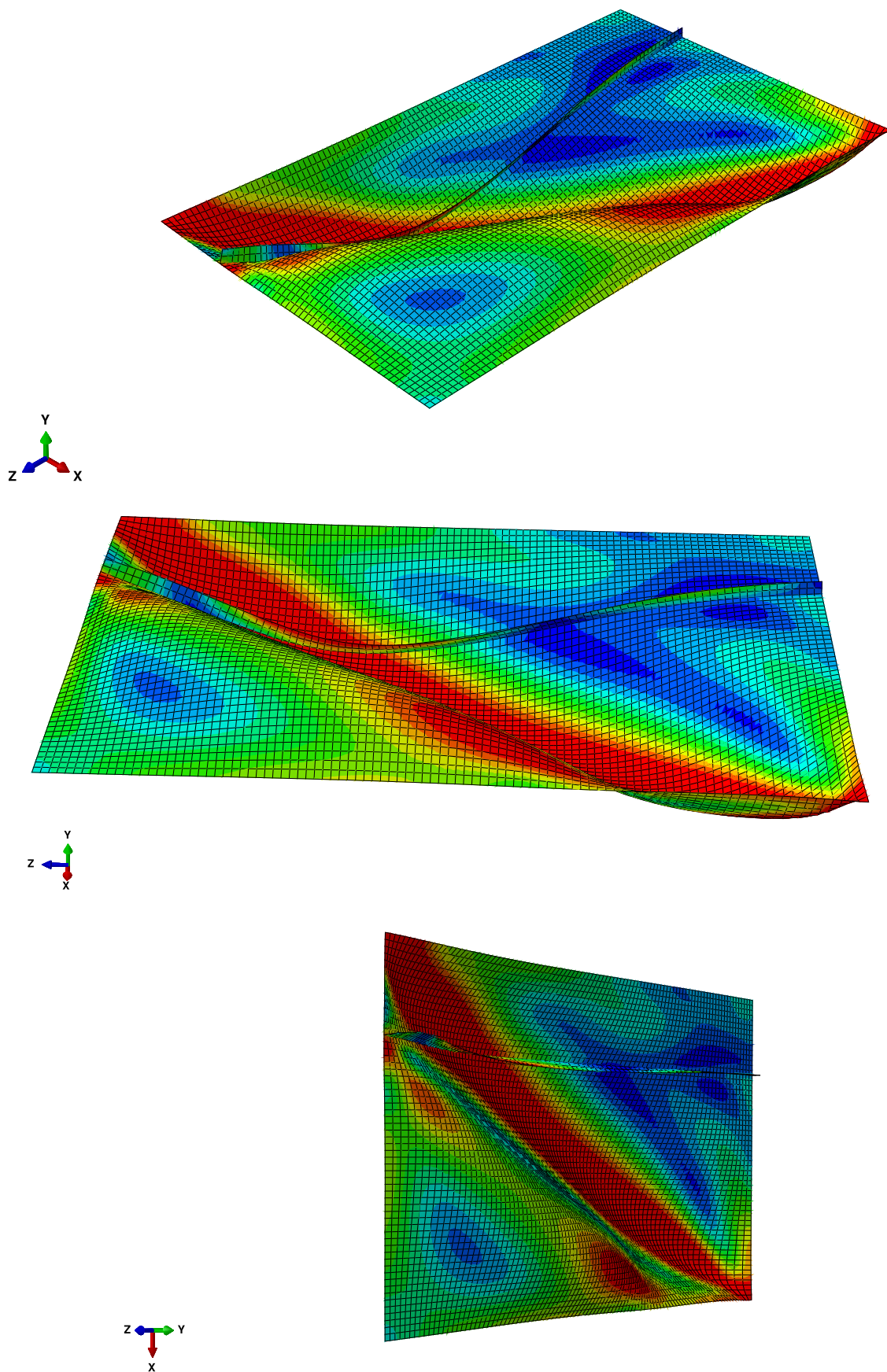


Figura B-12. Vistas superiores e vista lateral do modo de falha da placa reforçada a partir de um enrijecedor submetida ao cisalhamento

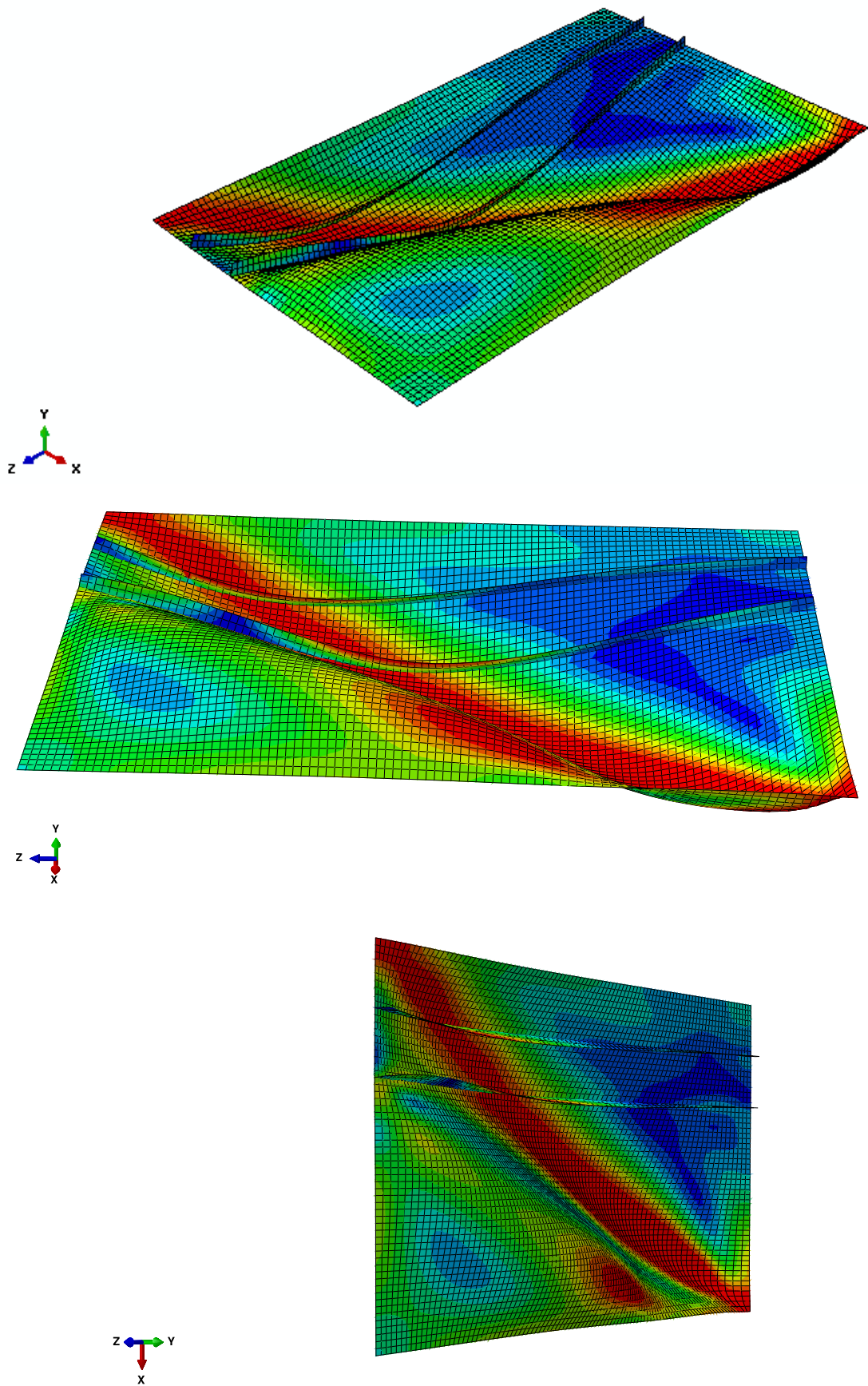


Figura B-13. Vistas superiores e vista lateral do modo de falha da placa reforçada a partir de dois enrijecedores submetida ao cisalhamento