

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

**Identificación, análisis y
simulación de flujo en medios
altamente heterogéneos**

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

con Orientación en

Matemática Aplicada

P r e s e n t a

Hugo Peña Gómez

Director de Tesis:

Dr. Miguel Ángel Moreles Vázquez

Co-Director de Tesis:

Dr. Joaquín Peña Acevedo

Guanajuato, Gto.. Agosto de 2015

A mis padres.

Índice general

1. Medios Altamente Heterogéneos	5
1.1. Modelo de Doble Porosidad/Permeabilidad	7
1.1.1. Modelo en Coordenadas Polares	10
1.2. Modelo Fractal	12
1.2.1. Modelo y Transformada de Laplace	13
2. Modelo de DPP con EMH	15
2.1. Medios con pérdida	16
2.2. Ecuación de energía	17
2.3. Porosidad simple y EMH	21
2.4. Modelo de DPP con EMH	26
2.4.1. Modelo en Coordenadas Polares	27
3. Solución numérica de los modelos DPP y DPP con EMH	34
3.1. Solución numérica de modelo DPP	35

	3
3.1.1. Algoritmo	39
3.1.2. Ejemplo sintético	40
3.1.3. Resultados del modelo de DDP	43
3.2. Solución numérica del modelo DPP con EMH	44
3.2.1. Algoritmo	50
3.2.2. Ejemplo sintético	52
3.2.3. Resultados	56
4. Identificación de un yacimiento fractal	68
4.1. Datos del modelo	68
4.2. Estimación de parámetros con MCMC	70
4.3. Resultados	74
4.3.1. Comentarios	86
Bibliography	87

Índice de figuras

1.1. Ilustración de un YNF.	6
1.2. Idealización de un YNF.	9
2.1. Ilustración del pozo con EMH.	27
3.1. Solución analítica y numérica de P_1	41
3.2. Solución analítica y numérica de P_2	41
3.3. Solución numérica de presión en la matriz.	44
3.4. Solución numérica de presión en las fracturas.	45
3.5. Flujo en matriz y fracturas	46
3.6. Reindexación utilizada.	47
3.7. Reindexación utilizada.	48
3.8. Matriz del esquema numérico.	50
3.9. Funciones analíticas y aproximadas.	54
3.10. Corte de T_1 para r fijo.	54

	5
3.11. Corte de T_1 para z fijo.	54
3.12. Corte de T_2 para r fijo	54
3.13. Presiones y Temperaturas.	59
3.14. Flujo en matriz.	60
3.15. Flujo en fracturas.	60
3.16. Temperatura en matriz y fracturas.	61
3.17. Diferencias de temperatura.	61
3.18. Viscosidad en matriz y fracturas.	62
3.19. Presiones y Temperaturas.	63
3.20. Flujo en matriz.	64
3.21. Flujo en fracturas.	64
3.22. Temperatura en matriz y fracturas.	65
3.23. Diferencias de temperatura.	65
3.24. Viscosidad en matriz y fracturas.	66
4.1. Datos de cada caso.	69
4.2. Datos de caso 1 ,3 y 4.	70
4.3. Aprioris para α , β y θ	72
4.4. Análisis de convergencia.	74
4.5. Histograma de α	74
4.6. Histograma de β	74

4.7. Histograma de θ	74
4.8. Estimadores y datos ruidosos.	75
4.9. Estimadores y datos sin ruido.	75
4.10. Análisis de convergencia.	76
4.11. Histograma de α	76
4.12. Histograma de β	76
4.13. Histograma de θ	76
4.14. Estimadores y datos ruidosos.	77
4.15. Estimadores y datos sin ruido.	77
4.16. Análisis de convergencia.	78
4.17. Histograma de α	78
4.18. Histograma de β	78
4.19. Histograma de θ	78
4.20. Estimadores y datos ruidosos.	79
4.21. Estimadores y datos sin ruido.	79
4.22. Análisis de convergencia.	80
4.23. Histograma de α	80
4.24. Histograma de β	80
4.25. Histograma de θ	80
4.26. Estimadores y datos ruidosos.	81

4.27. Estimadores y datos sin ruido.	81
4.28. Análisis de convergencia.	82
4.29. Histograma de α	82
4.30. Histograma de β	82
4.31. Histograma de θ	82
4.32. Estimadores y datos ruidosos.	83
4.33. Estimadores y datos sin ruido.	83
4.34. Cadena para α	84
4.35. Cadena para β	84
4.36. Cadena para θ	84
4.37. Correlación en cadena de α	85
4.38. Correlación en cadena de β	85
4.39. Correlación en cadena de θ	85

Índice de tablas

2.1. valores de parámetros en (2.6)	22
2.2. valores de parámetros en (2.7)	25
2.3. valores de parámetros en (2.7)	25
3.1. Errores entre solución analítica y numérica del ejemplo sintético.	42
3.2. Parámetros utilizados.	43
3.3. Errores entre solución analítica y numérica de T_1 (3.14).	53
3.4. Errores entre solución analítica y numérica de T_2 (3.14).	53
3.5. Errores entre solución analítica y numérica para T_1	55
3.6. Errores entre solución analítica y numérica para T_2	55
3.7. valores de parámetros en (2.8) para presión.	56
3.8. valores de parámetros en (2.8) para temperatura.	56

Introducción

El estudio de los medios altamente heterogéneos es de gran importancia en ingeniería petrolera y geología. Muchos acuíferos subterráneos se localizan en medios heterogéneos e interesa estudiarlos para prevenir que contaminantes alcancen el acuífero así como para la limpieza del mismo. Algunos yacimientos de petróleo también están ubicados en medios altamente heterogéneos y es de interés estudiar como se comporta el flujo (hidrocarburos) en estos medios para mejorar la extracción.

Este trabajo se enfoca en la modelación de yacimientos naturalmente fracturados que son, comúnmente, medios altamente heterogéneos. En la literatura se pueden encontrar varios modelos, pero no está claro cuál está más próximo a describir la dinámica del medio. Aquí se estudian dos modelos para medios altamente heterogéneos, con el fin de desarrollar herramientas numéricas que permitan un posible trabajo de campo en el futuro.

México es uno de los 10 productores de petróleo más grandes del mundo, el tercero más grande de América. Sin embargo, la producción petrolera de México ha disminuido de manera constante desde el año 2005 según Energy Information Administration [11].

El petróleo es un componente crucial de la economía de México. El sector petrolero generó el 13 % de los ingresos de exportación del país en 2013, una proporción que ha ido disminuyendo en la última década, según el Banco Central de México.

Por esta razón es necesario investigar y mejorar las técnicas de extracción. Una forma de realizar esto es proponiendo modelos que describan mejor el comportamiento físico de los yacimientos en el proceso de extracción.

La extracción primaria de petróleo en un yacimiento se basa en la energía potencial almacenada en dicho yacimiento. Una vez que esta energía no es suficiente para la extracción, se requieren otras técnicas de recuperación. Una de estas técnicas es *calentamiento electromagnético* (EMH por sus siglas en inglés) y resulta de gran interés por sus ventajas potenciales en el campo. Los yacimientos naturalmente fracturados (YNF), típicos en México, son altamente heterogéneos y la técnica EMH es de gran factibilidad.

La técnica de EMH consiste en introducir un generador de ondas electromagnéticas en el pozo. Estas ondas interactúan con el medio (usualmente dieléctrico) y generan calor. El calor ocasiona una disminución en la viscosidad del fluido lo que facilita la extracción.

Existen varios trabajos en el área de calentamiento electromagnético. Carrizales y Lake [4] aseveran que la técnica puede ser benéfica donde los métodos convencionales no pueden ser utilizados debido grandes profundidades, formaciones discontinuas, excesivas pérdidas de calor o medios heterogéneos. Estos autores plantean un modelo de simple porosidad para describir la dinámica del medio al aplicar EMH, entonces, se considera el pozo compuesto por roca porosa (matriz).

Davletbaev et al. [9] también proponen un modelo de simple porosidad con calentamiento electromagnético donde toman en cuenta la convección de calor y la pérdida de calor en las rocas circundantes. Además, comparan los efectos de la técnica de EMH con la recuperación sin calentamiento.

Los resultados numéricos en los dos trabajos ([4] y [9]) muestran un aumento en la producción del pozo con la técnica de EMH.

Por otro lado, también se han propuesto modelos de doble porosidad/permeabilidad (DPP), ver Chen [5], para describir el comportamiento de la presión en un YNF. Las soluciones que conllevan estos modelos tienen un comportamiento similar al que se ha observado empíricamente para las presiones, lo que indica que es una buena aproximación a la dinámica de extracción. Sin embargo, no hay trabajos que contemplen un modelo de doble porosidad/permeabilidad con la técnica de EMH, por lo que uno de los objetivos de este trabajo es explorar numéricamente la técnica de EMH modelando un YNF como medio de doble porosidad/permeabilidad.

Para el planteamiento del modelo y la exploración numérica, se dedican los primeros dos capítulos de este trabajo: Medios altamente heterogéneos, Modelo de doble porosidad/permeabilidad con EMH.

En el primer capítulo se propone modelar un YNF como un medio de doble porosidad/permeabilidad. Este enfoque se basa en considerar el yacimiento compuesto por dos medios porosos superpuestos, uno asociado a la matriz (roca) y otro a las fracturas. La interacción de los mismos es a través de un parámetro de forma, que en principio se puede determinar conociendo las propiedades del YNF.

Se realiza un estudio del modelo de doble porosidad/permeabilidad así como una implementación numérica. Esto permite tener una idea de la interacción entre los medios (matriz y fracturas) que propone este modelo así como el comportamiento del flujo y presiones en el yacimiento.

El objetivo del segundo capítulo es modelar la técnica de EMH en un YNF con un modelo de doble porosidad/permeabilidad tanto para las presiones en el yacimiento como para la temperatura. Se plantea una ecuación de temperatura tanto para matriz como para fracturas. Estas ecuaciones incluyen un término de intercambio entre ellas. Nuevamente la

exploración numérica permite identificar las diferencias y similitudes entre este modelo y el de simple porosidad.

Por último, los YNF se pueden considerar como medios fractales, por lo que algunos autores proponen modelar la mecánica del medio con cálculo fraccionario. Los parámetros en estos modelos dependen por supuesto de la geometría de cada yacimiento, por lo que el tercer capítulo está dedicado al planteamiento bayesiano para la estimación de dichos parámetros a partir de mediciones. Además se presentan algunos resultados generados con datos sintéticos.

Capítulo 1

Medios Altamente Heterogéneos

Un medio poroso es un material que consiste de una matriz sólida con espacios vacíos interconectados.

En términos matemáticos, un medio poroso se puede considerar como un subconjunto de \mathbb{R}^n , para $n = 1, 2$ ó 3 . Son medios porosos la piedra caliza, madera, arena, un pulmón humano.

La porosidad ϕ se define como el volumen de espacio vacío (poros) del medio entre del volumen total. Entonces, $1 - \phi$ es la fracción ocupada por el material sólido. Definiendo ϕ de esta manera se está suponiendo que todo el espacio vacío esta conectado.

En efecto, se debe tratar con medios en los que no todo el espacio vacío esta interconectado, entonces se debe introducir el concepto de *porosidad efectiva*, que se define como la razón de espacio vacío interconectado y el volumen total.

Comúnmente la porosidad varia de 0,25 de una roca bastante permeable a 0,1 para una roca muy poco permeable Chen [6].

Las propiedades de la roca tales como la porosidad pueden variar en el espacio. Si la

propiedad es independiente de la posición, se dice que el medio es *homogéneo*. Por el contrario, si alguna propiedad tal como la porosidad (ϕ) o permeabilidad (k) tiene variaciones muy grandes respecto a la posición, se dice que el medio es altamente heterogéneo.

Como se mencionó anteriormente, los medios altamente heterogéneos están presentes en acuíferos, suelos, yacimientos entre otros, sin embargo aquí se hará énfasis en la modelación de yacimientos naturalmente fracturados.

Yacimientos Naturalmente Fracturados

Un Yacimiento Naturalmente Fracturado (YNF) es un medio que contiene hidrocarburos. Los YNF típicamente son medios heterogéneos.

Un YNF está compuesto la matriz porosa y una red de fracturas como se ilustra en la figura (1.1). Uno de los supuestos que se realizan en para construir un modelo es que distribución de fracturas es uniforme. Esta idea se puede observar en la figura (1.1).

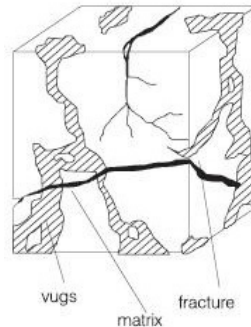


Figura 1.1: Ilustración de un YNF.

En un YNF las propiedades de la roca pueden variar dramáticamente, por ejemplo, la permeabilidad puede variar de un milidarcy (md) en la matriz a miles de md en las fracturas, por lo que también son medios altamente heterogéneos Chen et al. [7].

En el trabajo se abordan dos modelos distintos para medios altamente heterogéneos: un modelo de doble porosidad/permeabilidad y un modelo fractal.

En la industria petrolera existen varias técnicas para la extracción de hidrocarburos de YNF. En una primera etapa se obtiene de la extracción gas o hidrocarburos (se desprecia la presencia de agua). A menudo en esta etapa la presión es tan alta en el YNF que el fluido sale a la superficie debido a la diferencia de presiones sin necesidad de aplicar algún método de extracción. Esta etapa se denomina *recuperación primaria*.

Cuando la presión del YNF se estabiliza con la presión atmosférica aún permanece de un 70 % a un 85 % de hidrocarburos en el medio.

Para recobrar parte de los hidrocarburos que aún permanecen en el YNF se aplican técnicas como inyección de agua en algunos pozos y los hidrocarburos son producidos en los otros pozos. Esta es la etapa conocida como *recuperación secundaria*.

Sin embargo luego de la recuperación secundaria aún queda en el yacimiento 50 % o más hidrocarburos.

Para recobrar más hidrocarburos se han desarrollado técnicas que envuelven efectos químicos y térmicos. Se denominan a estas técnicas de *recuperación mejorada*. Existen varias versiones de recuperación mejorada, pero los objetivos principales son lograr miscibilidad (por tanto eliminar los residuos de hidrocarburos) y reducir la viscosidad Chen et al. [7].

1.1. Modelo de Doble Porosidad/Permeabilidad

Los yacimientos naturalmente fracturados se encuentran alrededor del mundo y proveen una gran cantidad de hidrocarburos y gas natural. La característica esencial de estos

yacimientos es que la matriz almacena la mayor parte del fluido mientras que el principal medio de transporte del mismo son las fracturas. Por lo tanto, el comportamiento de los YNF es muy diferente de los yacimientos convencionales homogéneos Chen [5].

Barenblatt y Zheltov (ver Chen [5]) consideran un YNF como dos medios porosos superpuestos: la matriz con una alta capacidad de almacenamiento y poca permeabilidad; y las fracturas, con poca capacidad de almacenamiento y alta permeabilidad.

Consideran además que dichos medios superpuestos se comunican mediante un término de flujos interporoso q^* .

Con las ideas anteriores y despreciando el efecto inercial, proponen un modelo denominado *de doble porosidad/permeabilidad* (DPP), que describe el comportamiento de la presión tanto en la matriz como en las fracturas. En modelo está dado por las ecuaciones (1.1):

$$\begin{aligned}\phi_1 \rho c_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} &= \nabla \cdot \left(\frac{\rho k_1}{\mu} (\nabla P_1) \right) - q^* \\ \phi_2 \rho c_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} &= \nabla \cdot \left(\frac{\rho k_2}{\mu} (\nabla P_2) \right) + q^*,\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde el subíndice 1 hace referencia a la matriz, el subíndice 2 a las fracturas. Además $q^* = \frac{\alpha}{\mu} (P_1 - P_2)$ es el término de flujo interporoso y α es un parámetro que está asociado a la heterogeneidad del medio Chen [5].

Los demás parámetros del modelo (1.1) se describen a continuación:

- Compresibilidad (c): cambio de volumen del fluido o matriz debido a la presión.
- Permeabilidad (k): capacidad de la roca de conducir fluidos a través de los poros

interconectados.

- Porosidad (ϕ): de un medio se define como el volumen de espacio vacío (poros) del medio entre del volumen total del medio.
- Densidad (ρ): masa del fluido por unidad de volumen.
- Viscosidad (μ): viscosidad dinámica del fluido. Se considera constante el caso en que la temperatura no varia.

Un modelo idealizado de un yacimiento fue desarrollado por Warrent y Root (1963) (ver Chen [5]). El modelo considera un YNF como un sistema formado por paralelepípedos rectangulares separados por una red ortogonal de fracturas, ver figura (1.2). Se considera que el flujo todo lugar en la red de fracturas y los paralelepípedos alimentan la red de fractura.

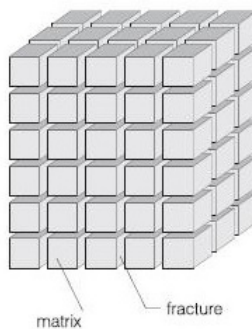


Figura 1.2: Idealización de un YNF.

Además, si se supone que la permeabilidad de la matriz es cero y viscosidad constante,

el sistema (1.1) se simplifica como se muestra en la ecuación (1.2):

$$\begin{aligned}\phi_1 c_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} &= -\alpha \left(\frac{P_1}{\mu} - \frac{P_2}{\mu} \right) \\ \phi_2 c_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} &= \frac{k_2}{\mu} \Delta P_2 + \alpha \underbrace{\left(\frac{P_1}{\mu} - \frac{P_2}{\mu} \right)}_{q^*}\end{aligned}$$

Con estas ecuaciones Warrent y Root obtienen resultados para las caídas de presión en el yacimiento muy similares a las que se han observado empíricamente, lo cual indica que el modelo aproxima adecuadamente la dinámica de la presión en el YNF.

1.1.1. Modelo en Coordenadas Polares

Se puede simplificar el problema (1.1) si se supone simetría radial en el pozo. Realizando un cambio a coordenadas polares, la primera ecuación del modelo de DPP se transforma como sigue:

$$\begin{aligned}\phi_1 c_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} &= \frac{k_1}{\mu} \nabla \cdot (\nabla P_1) - \frac{\alpha}{\mu} (P_1 - P_2) \\ &= \frac{k_1}{\mu} \nabla \cdot \left(\frac{\partial P_1}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial P_1}{\partial \theta}, \frac{\partial P_1}{\partial z} \right) - \frac{\alpha}{\mu} (P_1 - P_2) \\ &= \frac{k_1}{\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial P_1}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial P_1}{\partial z} \right] - \frac{\alpha}{\mu} (P_1 - P_2) \\ &= \frac{k_1}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_1}{\partial r} \right) - \frac{\alpha}{\mu} (P_1 - P_2) \\ &= \frac{k_1}{\mu} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial P_1}{\partial r} + r \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} \right) - \frac{\alpha}{\mu} (P_1 - P_2), \quad \text{haciendo } \frac{k_1}{\mu} = \eta_1 \\ &= \frac{\eta_1}{r} \frac{\partial P_1}{\partial r} + \eta_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} - \frac{\alpha}{\mu} (P_1 - P_2)\end{aligned}$$

Análogamente se puede proceder con la segunda ecuación del sistema (1.1). El modelo

de Warrent-Root Chen [5] considera una sola viscosidad para el fluido, sin embargo, aquí se hará la distinción: μ_1 y μ_2 , debido a que cuando se haga variar la temperatura también la viscosidad del fluido en la matriz puede ser diferente a la viscosidad en las fracturas. Así se llega al sistema (1.2).

$$\begin{aligned} \phi_1 c_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} &= \eta_1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} \right) + \frac{\eta_1}{r} \frac{\partial P_1}{\partial r} - \alpha \left(\frac{P_1}{\mu_1} - \frac{P_2}{\mu_2} \right) \\ \phi_2 c_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} &= \eta_2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_2 \frac{\partial P_2}{\partial r} \right) + \frac{\eta_2}{r} \frac{\partial P_2}{\partial r} + \alpha \left(\frac{P_1}{\mu_1} - \frac{P_2}{\mu_2} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Condiciones iniciales y de frontera

La condición inicial ($t = 0$) corresponde a la presión inicial que hay en todo el yacimiento antes de que sea perforado. En el radio del pozo r_w se impuso una condición Dirichlet (presión constante) al igual que en el radio exterior. Las condiciones iniciales corresponden al régimen de producción a presión constante:

$$\begin{aligned} P_1(r, 0) &= P_0 \\ P_1(r_w, t) &= P_{0,w} \\ P_1(r_e, 0) &= P_{0,e} \\ P_2(r, 0) &= P_0 \\ P_2(r_w, t) &= P_{0,w} \\ P_2(r_e, 0) &= P_{0,e}, \end{aligned}$$

donde r_w es el radio del pozo y r_e el radio exterior.

1.2. Modelo Fractal

Una forma de modelar medios porosos altamente heterogéneos es utilizando geometría fractal. Un medio poroso se considera fractal si su dimensión de Hausdorff no es entera.

Según Camacho-Velázquez et al. [3], empíricamente se ha observado que en ciertos casos la presión en pozos y el comportamiento de la producción son diferentes a otros casos estudiados previamente. La razón de esta diferencia no está entendida completamente, pero puede deberse a la distribución de fracturas dentro del YNF.

La mayoría de yacimientos son estudiados con modelos euclídeos, sin embargo, estos modelos suponen implícitamente una distribución uniforme de las fracturas y además que todas las fracturas están interconectadas Camacho-Velázquez et al. [3].

Moreles et al. [17] proponen un modelo fractal que describe la difusión de presión que se produce en medios fracturados. La estimación de parámetros en un modelo como este puede permitir aproximar la dinámica del yacimiento y con ello realizar estimados de la producción, lo cual es de interés en la industria.

Sea $W \subset \mathbb{R}^3$ tal que su dimensión de Hausdorff es D , esto es $\dim_{\mathcal{H}}(W) = D$. Si D no es un entero este conjunto se llama fractal.

W es verticalmente homogéneo si es de la forma: $W = V_{\mathcal{H}} \times [0, h]$, para algún $h > 0$ y $V_{\mathcal{H}} \subset \mathbb{R}^2$ con $1 < \dim_{\mathcal{H}}(V) = d \leq 2$.

El modelo propuesto por Moreles et al. [17] está dado por la ecuación (1.3):

$$\frac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\beta \frac{\partial P}{\partial r} \right). \quad (1.3)$$

donde:

- $0 < \alpha \leq 1$ es el orden de la derivada fraccionaria de **Riemann-Liouville**.

- $0 < \beta < 2$ simboliza la dimensión fractal de la frontera de V .

Para estar en concordancia con literatura clásica, se introduce $\theta = d - \beta - 1$, y se escribe la ecuación (1.3) como:

$$\frac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{r^{\beta+\theta}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\beta \frac{\partial P}{\partial r} \right). \quad (1.4)$$

1.2.1. Modelo y Transformada de Laplace

Para la estimación de parámetros se considera el caso de producción de pozo de presión a tasa terminal constante (CTR por sus siglas en inglés). Las condiciones iniciales y de frontera son las siguientes:

$$\begin{aligned} P(r, 0) &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial r}(1, t) &= -1, \quad t > 0 \\ \frac{\partial P}{\partial r}(r_e, t) &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación (1.4) y utilizando las condiciones iniciales y de frontera mencionadas se puede obtener la ecuación (1.5) que describe la presión en el espacio de Laplace:

$$\bar{P}(r, s) = \frac{r^{\nu\theta}}{s^{\alpha/2+1}} \frac{I_{\nu-1} \left(\frac{s^{\alpha/2} r^\Theta}{\Theta} \right) K_\nu \left(\frac{s^{\alpha/2} r^\Theta}{\Theta} \right) + K_{\nu-1} \left(\frac{s^{\alpha/2} r^\Theta}{\Theta} \right) I_\nu \left(\frac{s^{\alpha/2} r^\Theta}{\Theta} \right)}{K_{\nu-1} \left(\frac{s^{\alpha/2}}{\Theta} \right) I_{\nu-1} \left(\frac{s^{\alpha/2} r^\Theta}{\Theta} \right) - I_{\nu-1} \left(\frac{s^{\alpha/2}}{\Theta} \right) K_{\nu-1} \left(\frac{s^{\alpha/2} r^\Theta}{\Theta} \right)}, \quad (1.5)$$

donde $\nu = \frac{1-\beta}{\theta+2}$, $\Theta = \frac{\theta+2}{2}$ y I, K son funciones de Bessel de primer y segundo orden respectivamente.

La transformada inversa de Laplace (numérica) de la expresión 1.5 juega un papel importante tanto en la generación de datos como en el proceso de estimación de datos.

Capítulo 2

Modelo de DPP con EMH

En el capítulo anterior se presentó el modelo de Doble Porosidad/Permeabilidad que describe el comportamiento de la presión en un YNF a temperatura constante. Sin embargo como se antes, existen técnicas de recuperación mejorada de hidrocarburos que envuelven efectos químicos y térmicos. Los objetivos de estas técnicas son lograr miscibilidad (por tanto eliminar los residuos de hidrocarburos) y reducir la viscosidad. Al reducir la viscosidad del fluido se facilita la extracción del mismo.

Una de las técnicas de recuperación mejorada de hidrocarburos es el calentamiento electromagnético (EMH por sus siglas en inglés) y resulta de gran interés por sus ventajas potenciales en campo: se puede aplicar a mucha profundidad, en formaciones delgadas, formaciones discontinuas, sin agua, yacimientos heterogéneos o con excesivas pérdidas de calor.

Como se mencionó anteriormente, los yacimientos naturalmente fracturados, típicos en México, son altamente heterogéneos y la técnica EMH es de gran factibilidad. En consecuencia, el propósito de este capítulo es explorar desde el punto de vista de la modelación

numérica la técnica EMH en YNF.

Los trabajos realizados en la técnica de EMH consideran medios homogéneos. En este capítulo se propone la aplicación a medios heterogéneos, modelando el YNF como un medio de DPP.

2.1. Medios con pérdida

Las ecuaciones de *James Clerk Maxwell* engloban todos los aspectos del electromagnetismo. Por ejemplo, los campos eléctricos que cambian en el tiempo generan campos magnéticos y viceversa. La energía eléctrica y magnética dependen no sólo del cuerpo que está siendo electrizado o magnetizado, sino también en mayor medida del medio circundante.

Sin embargo, podría decirse que la idea más importante, al menos para efecto de este capítulo, es que los efectos eléctricos y magnéticos pueden ser transmitidos de un punto a otro a través del espacio, ya sea en presencia de materia o no.

Cuando las ondas electromagnéticas están en presencia de algunos tipos de materia, pueden experimentar una atenuación, por lo que se denomina a estos medios como: *medios con pérdida* (lossy media, LM).

En los LM se presenta una interacción microscópica de las ondas electromagnéticas con la masa, esta interacción microscópica se puede describir en términos de parámetros macroscópicos que son: permeabilidad eléctrica (ϵ), permitividad (μ) y conductividad (σ).

Los materiales dieléctricos tienen una pequeña conductividad (o permitividad) y pue-

den absorber energía electromagnética, resultando en la atenuación de las ondas conforme se propagan a través del medio.

Por otro lado, el campo eléctrico de las ondas que se propagan causa una conducción de corriente, esta corriente conduce a la disipación de algunas de las ondas de energía como calor dentro del material. Esto es justo la propiedad de los LM que se aprovecha en la técnica de EMH ya que los YNF están formados por algunos materiales dieléctricos.

2.2. Ecuación de energía

Para estudiar la interacción de la energía aplicada al yacimiento se plantea una ecuación de conservación de energía (2.1), esta ecuación es en esencia la primera ley de la termodinámica y está dada por (ver Lake [15]):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_t U + \frac{1}{2} \rho |u|^2 \right) + \nabla \cdot E + (\nabla \cdot (pu) - \rho u \cdot \mathcal{P} \nabla z) = q_H - q_L \quad (2.1)$$

donde:

- ρ_t es la densidad total,
- $\rho_t U$ es la energía interna total,
- $\frac{1}{2} \rho |u|^2$ representa la energía cinética por unidad de volumen,
- E energía del fluido,
- $\nabla \cdot (pu) - \rho u \cdot \mathcal{P} \nabla z$, es la tasa de trabajo realizado por el campo de presión y campo de gravedad,

- q_H es la entalpía del término fuente por unidad de volumen,
- q_L es la pérdida de calor.

La energía total está dada por:

$$\rho_t U = \phi \rho S_o U_o + (1 - \phi) \rho_s C_s T,$$

donde U_o es la energía interna específica por unidad de masa de la fase o , C_s la capacidad calorífica específica del sólido (matriz) y la densidad total se calcula a partir de la expresión $\rho_t = \phi \rho S_o + (1 - \phi) \rho_s$.

La ecuación de temperatura se puede construir a partir de un balance de energía, de manera que se considera el flujo de calor debido a convección, conducción y radiación:

$$E = \rho \mathbf{u} \left(U_o + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) + \mathbf{q}_c + \mathbf{q}_r,$$

donde q_c es el término que corresponde a flujo convectivo de calor. Si λ es la conductividad térmica total entonces q_c está dado por la ley de Fourier:

$$\mathbf{q}_c = -\lambda \nabla T.$$

El término q_r corresponde a la ganancia de calor por radiación, calor que es suministrado por la fuente electromagnética. La modelación de este término aún es objeto de investigación. Carrizales y Lake [4] propone la expresión:

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_r = -\alpha |q_r|, \tag{2.2}$$

α es el coeficiente de absorción electromagnético del medio y se expresa como sigue:

$$\alpha = 2\omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu'}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)} - 1 \right]^{1/2},$$

ω es 2π veces la frecuencia, ε , μ' son la parte real de la permitividad y permeabilidad magnética respectivamente y σ es la conductividad dieléctrica del medio, la cual es función de la temperatura. Suponiendo simetría radial, el término (2.2) coincide con lo propuesto por Abernethy Abernethy [1].

Despreciando el término de energía cinética y el término de gravedad (ver Lake [15]), se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho S_o U_o + (1 - \phi)\rho_s C_s T) + \nabla \cdot (\rho u H_o) - \nabla \cdot (\lambda_t \nabla T) - \alpha |q_r| = q_H - q_L,$$

donde H_o es la entalpía por unidad de masa, dado por: $H_o = U_o + \frac{p_o}{\rho_o}$. Por último, la energía interna específica U_o y la entalpía H_o pueden ser calculadas mediante:

$$U_o = C_{vo}T, \quad H_o = C_{po}T$$

Aquí C_{vo} representa la capacidad calorífica a presión constante y C_{po} la capacidad calorífica a presión constante (ver Chen et al. [7]).

Si se supone que el flujo de radiación q_r es radial, se puede escribir:

$$q_r = \frac{\varphi(r)}{r}. \quad (2.3)$$

Como q_r satisface $\nabla \cdot q_r = -\alpha|q_r|$, se sigue que φ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial(r\varphi)}{\partial r} = -\alpha(r\varphi) \quad (2.4)$$

Por lo que $\varphi = \frac{R_0}{r} e^{-\alpha r}$.

Tomando en cuenta estas expresiones, la ecuación (2.1) se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho S_o U_o + (1-\phi)\rho_s C_s T) + \nabla \cdot (\rho u C_{po} T) - \nabla \cdot (\lambda_t \nabla T) - \frac{\alpha R_0}{r} e^{-\alpha r} = q_H - q_L \quad (2.5)$$

Esta es una forma de construir la ecuación de energía. Algunos autores proponen formas similares. A manera de resumen se presentan a continuación dos de los trabajos en la técnica de EMH en medios de simple porosidad.

2.3. Porosidad simple y EMH

Carrizales y Lake [4] proponen un modelo de simple porosidad para un medio homogéneo que consiste de dos ecuaciones diferenciales parciales no lineales (2.6), las cuales están acopladas por la velocidad del flujo así como por la viscosidad del fluido.

Se considera el pozo compuesto por tres capas en la dirección de z ; la capa superior y la inferior no contienen hidrocarburos y se introducen en el modelo solamente para tomar en cuenta la pérdida de calor por conducción.

La capa intermedia corresponde al YNF donde se aplica la fuente de energía. La energía electromagnética fluye en dirección opuesta al fluido (hidrocarburos) producido por el pozo por lo que la difusión de temperatura es lenta.

$$\begin{cases} \phi c_o \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k_0}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla P_o) \\ M_T \frac{\partial T}{\partial t} = -M_o u_o \cdot \nabla T - H_o \nabla(\rho_o u_o) + \nabla \cdot (k_T \nabla T) - \nabla \cdot q_{EM}. \end{cases} \quad (2.6)$$

La expresión que representa la fuente de calor es la siguiente:

$$q_{EM} = \frac{P_0 e^{-\alpha(r-r_w)}}{r},$$

donde P_0 la potencia de la fuente en el pozo. Sin embargo, según Carrizales y Lake [4], la ganancia de calor (fuente) se puede expresar de varias formas y aún es desconocido cuál de las expresiones es más precisa especialmente para fluido multidimensional.

La temperatura alcanza un máximo de $245,11^\circ F$ y cerca de $142^\circ F$ a una distancia de $20m$ de la pared del pozo (en dirección horizontal). La conducción de calor fuera de

la capa intermedia es permitida, pero la temperatura en las capas exteriores es mucho menor que en la intermedia. El aumento es significativo en el flujo de hidrocarburos y por consiguiente en el acumulado.

La tabla (2.1) resume los valores de los parámetros utilizados por Carrizales y Lake.

Parámetro	Símbolo	Valor
Porosidad	ϕ	0,38
Compresibilidad	c_o	$5,0 \times 10^{-6} psi^{-1}$
Permeabilidad	k	1000md
Oil Volumetric heat capacity	M_o	$1,9 \times 10^4 lbf \cdot ft / (ft^3 \cdot F)$
Volumetric heat capacity	M_T	
Entalpía	H_o	
Conductividad térmica	k_T	$0,38 lbf / (s \cdot F)$
Fuente de poder	P_0	63,000W a 915MHz
Coefficiente de absorción del medio	α	$0,04 ft^{-1}$
Viscosidad inicial	μ_0	3,780cp

Tabla 2.1: valores de parámetros en (2.6)

Además, la capacidad calorífica volumétrica total M_T está determinado por $\phi M_o S_o + (1 - \phi) M_s$, donde M_o y M_s son las capacidades caloríficas volumétricas del fluido y la roca respectivamente.

Davletbaev et al. [9] presentan un modelo de simple porosidad, 2-dimensional y resultados numéricos de a aplicación de EMH en un pozo, tomando en cuenta la transferencia de calor por convección a lo largo del pozo y la pérdida de calor en la roca circundante. Además se compara la recuperación de hidrocarburos con la técnica de EMH y sin ella. Se consideran también 3 capas en la dirección z , divididas por las fronteras $Z_1 = 83m$, $Z_2 = 93m$ y $Z_3 = 96m$. Además, el radio del pozo es $r_w = 0,035m$ y el radio exterior de $r_e = 60m$.

Se asume que para cada elemento de volumen del medio poroso la transferencia de calor entre la estructura del medio y el fluido ocurre instantáneamente.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k_r}{\phi c_t} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{k_z}{\phi c_t} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\alpha r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \left(-\frac{k_r}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) \frac{\rho_0 c_0}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial r} - \omega_w \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{q}{\alpha} \end{cases} \quad (2.7)$$

Para la validación del modelo, inicialmente se aplicó EMH con una fuente de $20kW$ lo cual en un tiempo de $t_1 = 1,39$ días elevó la temperatura en el fondo del pozo de $8,8^\circ C$ a $117,9^\circ C$. Se reajustó el generador a $30kW$, luego de 6 horas ($t_2 = 1,64$ días) la temperatura en el pozo alcanzó $149,8^\circ C$. Nuevamente se ajustó el generador a su máxima capacidad $60kW$ y en 3,7 horas ($t_3 = 1,80$) la temperatura aumentó a $191,3^\circ C$. Seguidamente se apagó el generador 1,72 horas ($t_4 = 1,87$ días) y como quinta etapa se encendió el generador al máximo y de dejó trabajar por 32 horas ($t_5 = 3,21$ días). Por último se apagó el generador por 72 horas ($t_6 = 6,20$ días).

Los coeficientes que varían con la temperatura y el espacio son:

- El flujo en la tubería:

$$\omega_w = \frac{Q}{\pi R_1^2},$$

donde Q representa la tasa de flujo y R_1 el radio interior del pozo.

- Término fuente:

$$q = 2\alpha_d J_b \frac{r_d}{r} e^{-2\alpha_d(r-r_d)},$$

donde α_d es el factor de atenuación de las ondas electromagnéticas, J_b es la intensidad de radiación en la pared del pozo y r_d el radio del radiador de ondas electromagnéticas.

- La viscosidad:

$$\mu = \mu_0 e^{-\gamma_0 \cdot (T - T_0)}.$$

Los resultados de las simulaciones muestran un incremento en la tasa de producción al aplicar EMH comparado con la producción sin EMH.

Los valores de los parámetros son de un yacimiento de viscosidad alta ubicado en Rusia. Las tablas (2.2) y (2.3) resumen los valores utilizados.

Parámetro	Símbolo	Expresión	Valor
Porosidad	ϕ		0,25
Permeabilidad en dirección r	k_r		$0,18310^{-12}m^2$
Permeabilidad en dirección z	k_z		$0m^2$
Compresibilidad total	c_t		$10^{-9}Pa^{-1}$
Cap. calorífica por Unid. volumen	α	$(1 - \phi)\alpha_m + \phi\alpha_0$	$1378170J/(m^3K)$
Conduc. térmica del medio	λ	$(1 - \phi)\lambda_m + \phi\lambda_0$	$2,2813W/(m \cdot K)$
Densidad del aceite	ρ_0		$950kg/m^3$
Cap. calorífica específica	c_0		

Tabla 2.2: valores de parámetros en (2.7)

Parámetro	Símbolo	Valor
Capacidad calorífica del aceite	α_0	$1912680J/(m^3K)$
Capacidad calorífica de la roca	α_m	$1200000J/(m^3K)$
Conductividad térmica del aceite	λ_0	$0,125W/(m \cdot K)$
Conductividad térmica de la roca	λ_m	$3,0W/(m \cdot K)$
Viscosidad inicial	μ_0	$1Pa \cdot s$
Temperatura inicial	T_0	$8,8^\circ C$
Coefficiente de viscosidad	γ_0	$0,042K^{-1}$
Coefficiente de atenuación EM	α_d	$0,03267m^{-1}$
Intensidad de radiación en el fondo de pozo	$J_b = N_0/S_b$	

Tabla 2.3: valores de parámetros en (2.7)

Los trabajos anteriores presentan un aumento en la extracción de hidrocarburos, comparado con la extracción sin EMH. Sin embargo, ambos trabajos son para medios de simple porosidad. La idea de incluir un medio de doble porosidad para la dinámica de presión en el yacimiento es, como se mencionó en el capítulo 1, ya conocida. En la siguiente sección se adopta esta idea y se propone trabajarla con la técnica de EMH.

2.4. Modelo de DPP con EMH

Como ya se mencionó, el propósito de este capítulo es explorar desde el punto de vista de la modelación numérica la técnica EMH en YNF. Para esto se modeló la presión en un YNF con un modelo de DPP, lo que proporciona un sistema acoplado de dos ecuaciones. Además, para la aplicación del EMH se utilizó la ecuación de energía (2.5), asociando también una ecuación para la temperatura en la matriz T_1 y otra ecuación para la temperatura en las fracturas T_2 . De esta manera el modelo propuesto es siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 c_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} = \eta_1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} \right) + \frac{\eta_1}{r} \frac{\partial P_1}{\partial r} + \alpha \left(\frac{P_1}{\mu_1} - \frac{P_2}{\mu_2} \right), \\ \phi_2 c_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} = \eta_2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_2 \frac{\partial P_2}{\partial r} \right) + \frac{\eta_2}{r} \frac{\partial P_2}{\partial r} - \alpha \left(\frac{P_1}{\mu_1} - \frac{P_2}{\mu_2} \right), \\ M_{T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_1 C_{po} T_1) - \nabla \cdot (\lambda \nabla T_1) - \alpha |q_r| - \omega(T_1 - T_2) + q_H - q_L, \\ M_{T_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_2 C_{po} T_2) - \nabla \cdot (\lambda \nabla T_2) - \alpha |q_r| + \omega(T_1 - T_2) + q_H - q_L, \end{array} \right.$$

donde \mathbf{u}_i para $i \in \{1, 2\}$ está dada por la ley de Darcy (despreciando el efecto de la gravedad):

$$\mathbf{u} = -\frac{k_i}{\mu_i} \nabla P_i,$$

y la viscosidad depende de la temperatura de la siguiente forma:

$$\mu_i = \mu_0 e^{-\gamma(T_i - T_0)}.$$

Nótese que al depender la viscosidad de la temperatura, la cual depende a su vez del espacio y el tiempo, implica que la viscosidad también varía con el espacio y el tiempo; por lo que las cuatro ecuaciones del sistema (2.8) están acopladas por la viscosidad.

Ahora bien, como se ha observado en trabajo de campo, se puede considerar el YNF dividido en tres capas determinadas por los valores (líneas horizontales) de z : Z_i , Z_2 , Z_3 y Z_f , como se muestra en la figura (2.1).

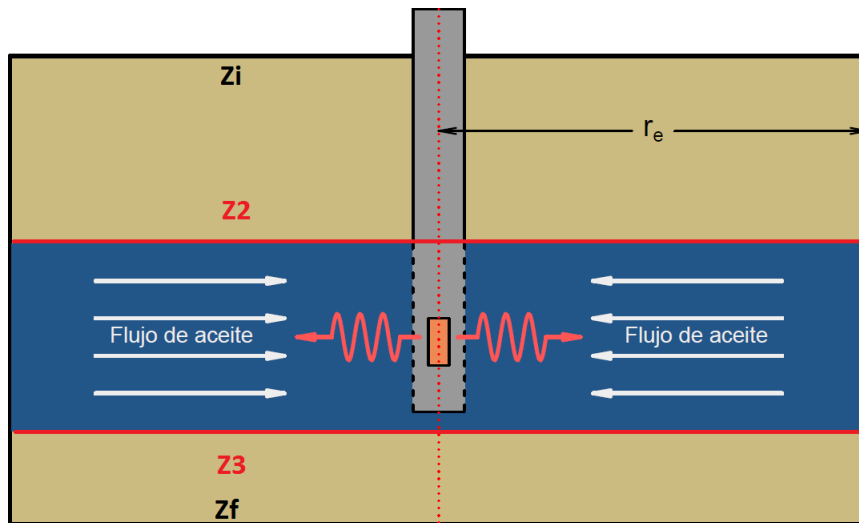


Figura 2.1: Ilustración del pozo con EMH.

Las capas superior e inferior, determinadas por Z_i , Z_2 y Z_3 , Z_f respectivamente, corresponden a partes rocosas del medio. En estas capas no se encuentran hidrocarburos. La capa intermedia, entre Z_2 y Z_3 , es donde se encuentra el crudo y por consiguiente es donde interesa aplicar la fuente electromagnética. La extracción del fluido provoca cambios en la presión dentro de esta capa y si se supone que fuera no se encuentra fluido, se sigue que los cambios en la presión fuera de la capa son cero.

2.4.1. Modelo en Coordenadas Polares

Considérese la ecuación de temperatura escribiendo $T = T_1$:

$$M_T \frac{\partial T}{\partial t} = k\rho C_{po} \nabla \cdot \left(\frac{T}{\mu} \nabla P \right) + \nabla \cdot (\lambda_t \nabla T) + \alpha |q_r| + \omega(T - T_2) + q_H - q_L.$$

Análogamente el esquema utilizado para el modelo de DPP, haciendo un cambio a coordenadas polares y asumiendo simetría radial se puede simplificar la ecuación anterior.

Considere las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \nabla u &= \left(\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad \text{donde: } \mathbf{F} = (F_r, F_\theta, F_z). \end{aligned}$$

Debido a la simetría radial, las derivadas que involucran el cambio en la dirección θ son cero. Aplicando estas identidades la ecuación (2.8), se puede escribir como:

$$\begin{aligned} M_T \frac{\partial T}{\partial t} &= \rho k C_{po} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{T}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right] \\ &+ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_t \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_t \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \alpha |q_r| + q_H - q_L \end{aligned}$$

Para no tratar con una notación muy pesada, cada término de la ecuación se trabajará por separado.

a) El primer término: $M_T = (\phi \rho S_o C_{vo} + (1 - \phi) \rho_s C_s) \frac{\partial T}{\partial t}$, no tiene modificaciones,

suponiendo que los parámetros en la expresión de M_T son constantes.

b) Segundo término: $k\rho C_{po} \nabla \cdot \left(\frac{T}{\mu} \nabla P \right)$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
& \rho k C_{po} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{T}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right] \\
&= \rho k C_{po} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{rT}{\mu} \right) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{rT}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T}{\mu} \right) \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \right] \\
&= \rho k C_{po} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial P T}{\partial r \mu} + \frac{\partial P}{\partial r} \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{T}{\mu} \right) + \frac{r}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} T \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T}{\mu} \right) \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \right] \\
&= \rho k C_{po} \left[\frac{1}{r\mu} \frac{\partial P}{\partial r} T + \frac{\partial P}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial r} T \right) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} T + \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial z} T \right) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} T \right] \\
&= \left(-\frac{\rho k C_{po}}{r\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) T + \left(-\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) \frac{\partial T}{\partial r} + \left(\frac{\rho k C_{po}}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial r} \right) T + \left(-\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) T \\
&+ \left(-\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \frac{\partial T}{\partial z} + \left(\frac{\rho k C_{po}}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} \right) T + \left(-\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) T \\
&= \left[\left(-\frac{\rho k C_{po}}{r\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \left(\frac{\rho k C_{po}}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial r} \right) + \left(-\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) + \left(\frac{\rho k C_{po}}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \left(-\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \right] T \\
&+ \left(-\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) \frac{\partial T}{\partial r} + \left(-\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \frac{\partial T}{\partial z} \\
&= \left[\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial r} - \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \right] T \\
&+ \left(-\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) \frac{\partial T}{\partial r} + \left(-\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \frac{\partial T}{\partial z}
\end{aligned}$$

c) El tercer término $\nabla \cdot (\lambda_t \nabla T)$ corresponde a:

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_t \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_t \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \\
&= \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial r} + r \lambda_t \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_t) \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_t \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \\
&= \left(\frac{\lambda_t}{r} + \frac{\partial \lambda_t}{\partial r} \right) \frac{\partial T}{\partial r} + r \lambda_t \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial \lambda_t}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_t \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\
&= \left(\frac{\lambda_t}{r} + \frac{\partial \lambda_t}{\partial r} \right) \frac{\partial T}{\partial r} + (r \lambda_t) \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial \lambda_t}{\partial z} \right) \frac{\partial T}{\partial z} + (\lambda_t) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

d) Los últimos términos son:

$$\begin{aligned}
w(T - T_2) + \alpha |q_r| + q_H - q_L &= w(T - T_2) + \alpha \frac{R_0 e^{-\alpha r}}{r} + q_H - q_L \\
&= wT - wT_2 + \left(\alpha \frac{R_0 e^{-\alpha r}}{r} + q_H - q_L \right)
\end{aligned}$$

Sumando todos los términos como se escribieron de a) hasta d), la ecuación (2.8) se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned}
M_T \frac{\partial T}{\partial t} &= \left[\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial r} - \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) + w \right] T \\
&- \left[\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} + \left(\frac{\lambda_t}{r} + \frac{\partial \lambda_t}{\partial r} \right) \right] \frac{\partial T}{\partial r} + [r \lambda_t] \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \\
&- \left[-\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \lambda_t}{\partial z} \right] \frac{\partial T}{\partial z} \\
&- [-\lambda_t] \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - [-w] T_2 + \left(q_H - q_L + \alpha \frac{R_0 e^{-\alpha r}}{r} \right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Considérese la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= M_T \\
 f_2 &= \left[\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial r} - \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) + w \right] \\
 f_3 &= - \left[\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} + \left(\frac{\lambda_t}{r} + \frac{\partial \lambda_t}{\partial r} \right) \right] \\
 f_4 &= [r \lambda_t] \\
 f_5 &= - \left[-\frac{\rho k C_{po}}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \lambda_t}{\partial z} \right] \\
 f_6 &= -[-\lambda_t] \\
 f_7 &= -[-w] \\
 f_8 &= \left(q_H - q_L + \alpha \frac{R_0 e^{-\alpha r}}{r} \right).
 \end{aligned}$$

Entonces se puede escribir la ecuación (2.8) como:

$$f_1 \frac{\partial T}{\partial r} = f_2 T + f_3 \frac{\partial T}{\partial r} + f_4 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + f_5 \frac{\partial T}{\partial z} + f_6 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + f_7 T_2 + f_8 \quad (2.9)$$

Condiciones iniciales y de frontera

Las condiciones iniciales y de frontera para la presión corresponden al régimen de producción a presión constante.

Se impuso condiciones frontera para la presión en Z_2 y Z_3 . Se supone que no hay flujo fuera de la franja que determina estos valores de z , por esta razón, las ecuaciones de presión sólo se resolvieron para los nodos que tienen coordenada z tal que $Z_2 \leq z \leq Z_3$.

Condiciones iniciales y de frontera para la presión:

$$\begin{aligned}
 P(t = 0, r, z) &= P_0 \\
 P(t, r = r_w, z) &= P_w \\
 P(t, r = r_e, z) &= P_0 \\
 \frac{\partial P}{\partial z}(t, r, z = Z_1) &= 0 \\
 \frac{\partial P}{\partial z}(t, r, z = Z_2) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Por otro lado, cuando se aplica energía a la franja entre Z_2 y Z_3 no tiene sentido físico suponer que no hay flujo de calor fuera de la franja, por lo cual no se imponen condiciones frontera para la temperatura en esos valores de z . Esta es otra razón de peso para resolver el sistema de DPP con EMH en una geometría de pozo como la que muestra la imagen (2.1).

Las condiciones frontera para la temperatura se imponen en los valores de Z_i y Z_f , donde si se supone que el flujo de temperatura es 0.

$$\begin{aligned}T(t = 0, r, z) &= T_0 \\ \frac{\partial T}{\partial r}(t, r = 0, z) &= 0 \\ T(t, r = r_e, z) &= T_0 \\ \frac{\partial T}{\partial z}(t, r, z = Z_i) &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z}(t, r, z = Z_f) &= 0\end{aligned}\tag{2.11}$$

En el siguiente capítulo se toma en cuenta tanto la forma de la ecuación (2.9) como las condiciones iniciales y de frontera (2.11) para la construcción del esquema numérico.

Capítulo 3

Solución numérica de los modelos DPP y DPP con EMH

En este capítulo se aborda la solución numérica del modelo de DPP (3.17) y del modelo de DPP con EMH (2.8).

Se utilizará diferencias finitas con aproximaciones de primer orden para la derivada temporal y de segundo orden para las derivadas espaciales, luego, se aplica el método theta (Quarteroni et al. [20]) al esquema de diferencias finitas.

Para la forma polar de cada modelo se presenta el respectivo esquema numérico (suponiendo simetría radial). La discretización espacial y temporal se indica en cada caso. En los resultados del modelo de DPP con EMH se debe tener presente que el intervalo de tiempo trabajado es bastante grande, por lo que el costo computacional también lo es.

3.1. Solución numérica de modelo DPP

Para discretizar el sistema (1.2) se utilizó la técnica del *punto fantasma* (Quarteroni et al. [20]), esto es, si se considerando el flujo como $J(P)(r) = \eta_i \frac{\partial^i P}{\partial r}$, entonces se aproximó su derivada de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial r} (J(P)(r)) \approx \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{J_{m+1/2}(P_n) - J_{m-1/2}(P_n)}{\Delta r} \right) \quad (3.1)$$

donde:

$$\begin{aligned} J_{m+1/2}(P_n) - J_{m-1/2}(P_n) &= \eta_{m+1/2} \frac{P_{m+1}^n - P_m^n}{\Delta r} \\ J_{m-1/2}(P_n) - J_{m-1/2}(P_n) &= \eta_{m-1/2} \frac{P_m^n - P_{m-1}^n}{\Delta r} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Utilizando lo anterior y aproximaciones de diferencias finitas para las derivadas respecto al tiempo y espacio (1er y 2do orden respectivamente), la discretización de la ecuación 1.2 que se obtiene es la siguiente:

$$\begin{aligned} \phi_1 c_1 \left(\frac{P_m^{1,n+1} - P_m^{1,n}}{\Delta t} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{J_{m+1/2}(P_{1,n}) - J_{m-1/2}(P_{1,n})}{\Delta r} \right) + \frac{\eta_m}{r_m} \left(\frac{P_{m+1}^{1,n} - P_{m-1}^{1,n}}{2\Delta t} \right) \\ &\quad - \frac{\alpha}{\mu_1} P_m^{1,n} + \frac{\alpha}{\mu_2} P_m^{2,n} \end{aligned}$$

Desarrollando y agrupando términos adecuadamente se obtiene el esquema:

$$\begin{aligned}
\frac{P_m^{1,n+1} - P_m^{1,n}}{\Delta t} &= \underbrace{\frac{1}{\phi_1 c_1} \left(\frac{\eta_{m-1/2}}{\Delta^2} - \frac{\eta_m}{2\Delta r r_m} \right)}_{a_1} P_{m-1}^{1,n} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{\phi_1 c_1} \left(\frac{-\eta_{m+1/2}}{\Delta^2} - \frac{\eta_{m-1/2}}{\Delta r^2} - \frac{\alpha}{\mu_1} \right)}_{b_1} P_m^{1,n} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{\phi_1 c_1} \left(\frac{\eta_{m+1/2}}{\Delta r^2} + \frac{\eta_m}{2\Delta r r_m} \right)}_{c_1} P_{m+1}^{1,n} + \underbrace{\frac{\alpha}{\phi_1 c_1 \mu_2}}_{d_1} P_m^{2,n} \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Como se señala en el esquema 3.3, los coeficientes se renombran como a_1, b_1, c_1, d_1 para simplificar la notación, por lo que este esquema se puede escribir como:

$$\frac{P_m^{1,n+1} - P_m^{1,n}}{\Delta t} = a_1 P_{m-1}^{1,n} + b_1 P_m^{1,n} + c_1 P_{m+1}^{1,n} + d_1 P_m^{2,n} \quad (3.4)$$

Aplicando el Método θ (ver Quarteroni et al. [20]) a este esquema se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned}
\frac{P_m^{1,n+1} - P_m^{1,n}}{\Delta t} &= a_1 (\theta P_{m-1}^{1,n+1} + (1 - \theta) P_{m-1}^{1,n}) + b_1 (\theta P_m^{1,n+1} + (1 - \theta) P_m^{1,n}) \\
&+ c_1 (\theta P_{m+1}^{1,n+1} + (1 - \theta) P_{m+1}^{1,n}) + d_1 (\theta P_m^{2,n+1} + (1 - \theta) P_m^{2,n})
\end{aligned}$$

Agrupando los términos que tienen un valor de tiempo en común, queda construido el esquema a implementar numéricamente:

$$\begin{aligned}
& -a_1\theta P_{m-1}^{1,n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} - b_1\theta\right) P_m^{1,n+1} - c_1\theta P_{m+1}^{1,n+1} - dP_m^{1,n+1} \\
& = -a_1(1-\theta)P_{m-1}^{1,n} + \left(\frac{1}{\Delta t} - b_1(1-\theta)\right) P_m^{1,n} - c_1(1-\theta)P_{m+1}^{1,n} + d_1(1-\theta)P_m^{2,n}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Análogamente para la segunda ecuación de sistema 1.2 se puede construir el esquema:

$$\begin{aligned}
\frac{P_m^{2,n+1} - P_m^{2,n}}{\Delta t} & = \underbrace{\frac{1}{\phi_2 c_2} \left(\frac{\eta_{m-1/2}}{\Delta^2} - \frac{\eta_m}{2\Delta r r_m} \right)}_{a_2} P_{m-1}^{2,n} \\
& + \underbrace{\frac{1}{\phi_2 c_2} \left(\frac{-\eta_{m+1/2}}{\Delta^2} - \frac{\eta_{m-1/2}}{\Delta r^2} - \frac{\alpha}{\mu_2} \right)}_{b_2} P_m^{2,n} \\
& + \underbrace{\frac{1}{\phi_2 c_2} \left(\frac{\eta_{m+1/2}}{\Delta r^2} + \frac{\eta_m}{2\Delta r r_m} \right)}_{c_2} P_{m+1}^{2,n} + \underbrace{\frac{\alpha}{\phi_2 c_2 \mu_1}}_{d_2} P_m^{1,n}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Renombrando los coeficientes como se muestra en la ecuación anterior, el esquema se puede escribir como:

$$\frac{P_m^{2,n+1} - P_m^{2,n}}{\Delta t} = a_2 P_{m-1}^{2,n} + b_2 P_m^{2,n} + c_2 P_{m+1}^{2,n} + d_2 P_m^{1,n} \tag{3.7}$$

Aplicando el Método θ a este esquema:

$$\begin{aligned}
\frac{P_m^{2,n+1} - P_m^{2,n}}{\Delta t} & = a_2 (\theta P_{m-1}^{2,n+1} + (1-\theta)P_{m-1}^{2,n}) + b_2 (\theta P_m^{2,n+1} + (1-\theta)P_m^{2,n}) \\
& + c_2 (\theta P_{m+1}^{2,n+1} + (1-\theta)P_{m+1}^{2,n}) + d_2 (\theta P_m^{1,n+1} + (1-\theta)P_m^{1,n})
\end{aligned}$$

Agrupando los términos que tienen un valor de tiempo en común, queda construido el

esquema a implementar numéricamente:

$$\begin{aligned}
 & -a_2\theta P_{m-1}^{2,n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} - b_2\theta\right) P_m^{2,n+1} - c_2\theta P_{m+1}^{1,n+1} - d_2 P_m^{1,n+1} \\
 = & -a_2(1-\theta)P_{m-1}^{2,n} + \left(\frac{1}{\Delta t} - b_2(1-\theta)\right) P_m^{2,n} - c_2(1-\theta)P_{m+1}^{2,n} + d_1(1-\theta)P_m^{2,n}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Se consideró un intervalo de tiempo de $[0, 6]$ con una cantidad de nodos de $N = 450$ y un intervalo espacial determinado por $r_w = 0,2$, $r_e = 10$ con una cantidad de nodos de $M = 60$ para probar el esquema. El algoritmo implementado en **Matlab** para resolver el modelo de es el siguiente:

3.1.1. Algoritmo

Algoritmo 3.1.1. Algoritmo para resolver DPP (1.1).

1. Discretización: t vector de discretización del tiempo de tamaño N , r vector de discretización de tamaño M .
2. Leer parámetros.
3. Sean P_1 y P_2 vectores de tamaño M que corresponden a las condiciones iniciales de las presiones.
4. Sea A matriz tridiagonal de tamaño $2M+2 \times 2M+2$ tal que:
 - Al aplicar las condiciones frontera: $A_{1,1} = P_{0,w}$, $A_{M+1,M+1} = P_{0,e}$, $A_{M+2,M+2} = P_{0,w}$ y $A_{2M+2,2M+2} = P_{0,e}$.
 - Las demás entradas de A (tridiagonal) están determinadas por los coeficientes de los esquemas (3.5) y (3.8).
5. Para $t = t_2, \dots, t_N$ hacer:
 - Calcular el vector constante b .
 - Resolver el sistema $Au = b$.
 - $P_1 = u(1 : (M+1))$ y $P_2 = u((M+2) : end)$.
 - Calcular el flujo $Q = \eta_j \frac{\partial P_j}{\partial r}$ para $j \in \{1, 2\}$.

3.1.2. Ejemplo sintético

Para validar la implementación de los esquemas 3.5 y 3.8 se utilizará un ejemplo sintético, tomando las siguientes funciones:

$$P_1(r, t) = \cos(r + t)$$

$$P_2(r, t) = 1 - e^{-(2\pi-t)r^2}$$

Se puede verificar que estas funciones satisfacen las ecuaciones:

$$\phi_1 c_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} = \eta_1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} \right) + \frac{\eta_1}{r} \frac{\partial P_1}{\partial r} - \alpha \left(\frac{P_1}{\mu_1} - \frac{P_2}{\mu_2} \right) + f(r, t)$$

$$\phi_2 c_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} = \eta_2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_2 \frac{\partial P_2}{\partial r} \right) + \frac{\eta_2}{r} \frac{\partial P_2}{\partial r} + \alpha \left(\frac{P_1}{\mu_1} - \frac{P_2}{\mu_2} \right) + g(r, t)$$

Donde f y g se determinan sustituyendo las expresiones de P_1 y P_2 en la ecuaciones anteriores. Estas expresiones son:

$$f(r, t) = \eta \cos(r + t) + \frac{\eta_1}{r} \sin(r + t) + \alpha \frac{\cos(r + t)}{\mu_1} - \alpha \frac{1 - e^{-(2\pi-t)r^2}}{\mu_2} - \phi_1 c_1 \sin(r + t)$$

$$g(r, t) = \left[2\eta_2(-2\pi + t)(-4\pi r^2 + 2tr^2 + 2) - \frac{\alpha}{\mu_2} - \phi_2 c_2 r^2 \right] e^{-(2\pi-t)r^2} - \frac{\alpha}{\mu_1} \cos(r + t) + \frac{\alpha}{\mu_2}$$

Como se cuenta con las funciones analíticas se puede verificar que realmente el algoritmo (3.1.1) aproxima la solución al problema. Así, la solución aproximada debe ser muy similar a las funciones del ejemplo sintético. Las gráficas de las soluciones analíticas y aproximadas se pueden observar en las figuras (3.1) y (3.2). Los errores entre la solución analítica y numérica se pueden observar en la tabla (3.1).

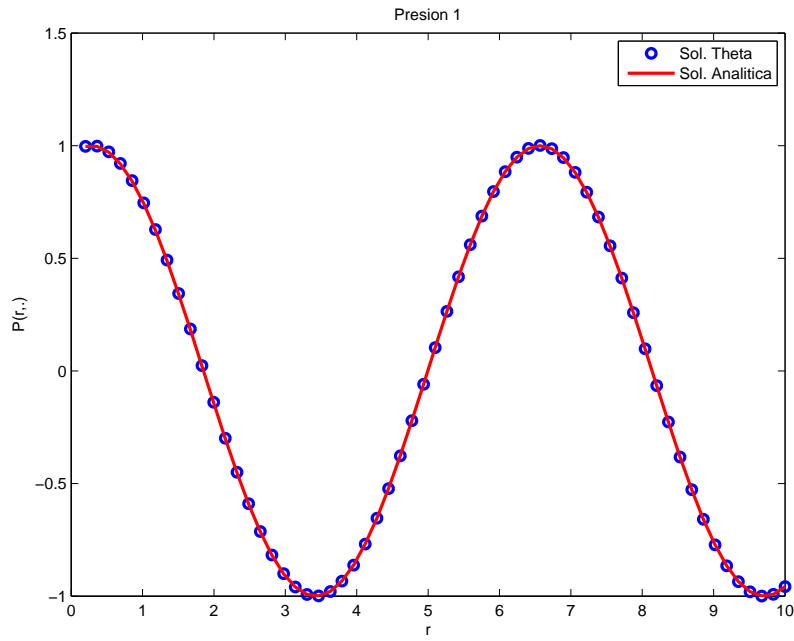


Figura 3.1: Solución analítica y numérica de P_1 .

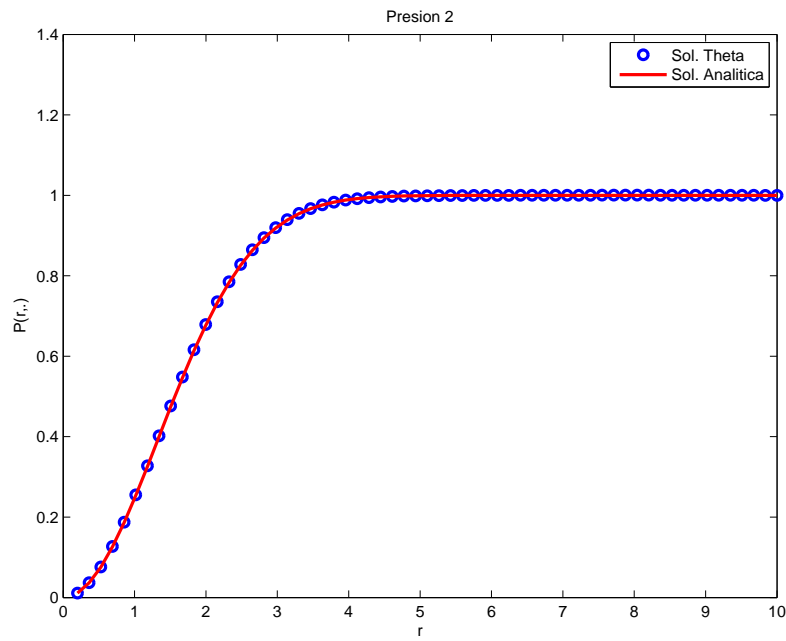


Figura 3.2: Solución analítica y numérica de P_2 .

	Max. error absoluto	Max. error relativo	Error relativo prom.	ECM
Presión 1	$3,23233 \times 10^{-3}$	$1,41457 \times 10^{-1}$	$5,08430 \times 10^{-3}$	$1,40463 \times 10^{-3}$
Presión 2	$2,33704 \times 10^{-3}$	$6,35597 \times 10^{-3}$	$1,30349 \times 10^{-3}$	$9,27568 \times 10^{-4}$

Tabla 3.1: Errores entre solución analítica y numérica del ejemplo sintético.

En la table (3.1), el error cuadrático medio se representa como ECM.

3.1.3. Resultados del modelo de DDP

Una vez validado el programa con el ejemplo sintético, se resolvió del modelo de DPP (1.1) en un intervalo de tiempo de 500 unidades con una cantidad de nodos de $N = 10000$ y para un radio exterior de $5m$ con una cantidad de nodos de $M = 80$. Los valores de parámetros que se muestran en la tabla (3.2).

Parámetro	Matriz	Fracturas
ϕ	0,25	0,35
c	$0,002481(kPa)^{-1}$	$0,032481(kPa)^{-1}$
k	$1 \times 10^{-12}m^2$	$1 \times 10^{-9}m^2$
μ	$1 \times 10^{-6}MPa \cdot s$	$1 \times 10^{-6}MPa \cdot s$

Tabla 3.2: Parámetros utilizados.

Además $\alpha = \frac{5 \times 10^{-3} \cdot k_2}{r_w^2}$ de acuerdo con Chen [5].

La condiciones iniciales y de frontera utilizadas son:

$$P_i(r, 0) = 1 \text{ MPa}$$

$$P_i(r_w, t) = 0,5 \text{ MPa}$$

$$P_i(r_f, t) = 0,5 \text{ MPa},$$

para $i \in \{1, 2\}$.

Las soluciones numéricas del modelos de DPP se pueden observar en las imágenes (3.3), (3.4) y (3.5). Nótese que la presión en las fracturas disminuye más rápido que en la matriz. Además, el flujo en las fracturas es mayor que el flujo en la matriz. Estos son resultados que concuerdan con la física del problema, esto porque como se mencionó anteriormente las fracturas son el principal medio de transporte del fluido.

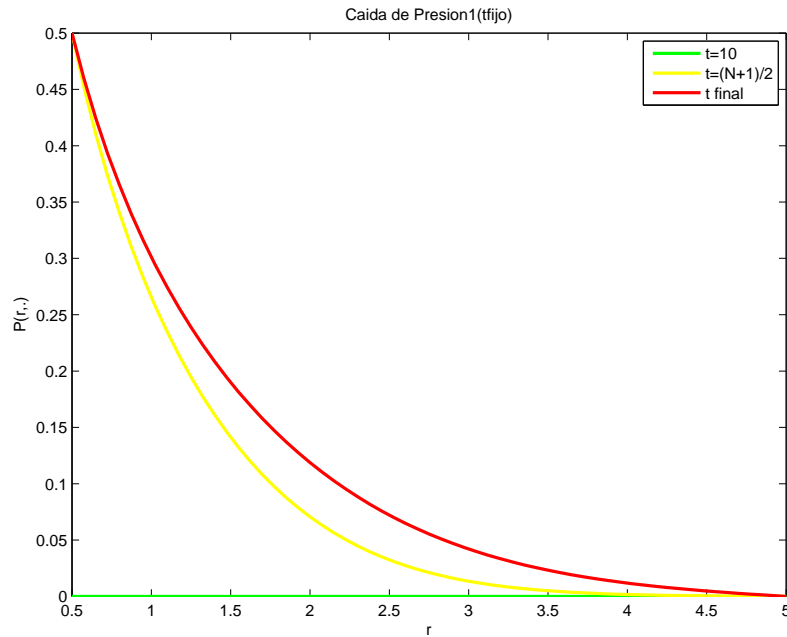


Figura 3.3: Solución numérica de presión en la matriz.

3.2. Solución numérica del modelo DPP con EMH

La construcción del esquema numérico para aproximar la solución de (2.8) también se realizó utilizando diferencias finitas y el método- θ .

Aplicando diferencias finitas a la ecuación (2.9) con aproximación de primer orden para la derivada temporal y de segundo orden para derivadas espaciales se obtiene el esquema (3.9) (tenga en cuenta la notación que indica la ecuación para los coeficientes):

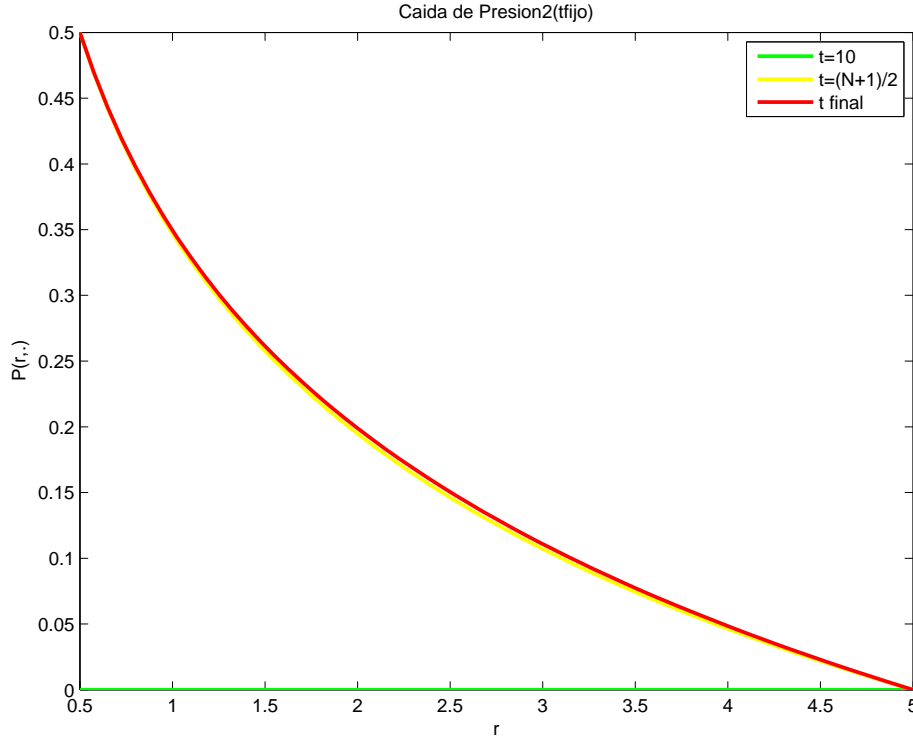


Figura 3.4: Solución numérica de presión en las fracturas.

$$\begin{aligned}
 f_1 \left(\frac{T_{m,z}^{n+1} - T_{m,z}^n}{\Delta t} \right) &= \underbrace{\left[\frac{-f_3}{\Delta r} - \frac{f_4}{(\Delta r)^2} \right]}_{a_1} T_{m-1,z}^n \\
 &+ \underbrace{\left[f_2 - 2 \frac{f_4}{(\Delta r)^2} - 2 \frac{f_6}{(\Delta z)^2} \right]}_{b_1} T_{m,z}^n \\
 &+ \underbrace{\left[\frac{f_3}{2\Delta r} + \frac{f_4}{(\Delta r)^2} \right]}_{c_1} T_{m+1,z}^n \\
 &+ \underbrace{\left[\frac{-f_5}{2\Delta z} + \frac{f_6}{(\Delta z)^2} \right]}_{d_1} T_{m,z-1}^n \\
 &+ \underbrace{\left[\frac{f_5}{2\Delta z} + \frac{f_6}{(\Delta z)^2} \right]}_{e_1} T_{m,z+1}^n + [f_7 T_{m,z}^{2,n} + f_8]
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

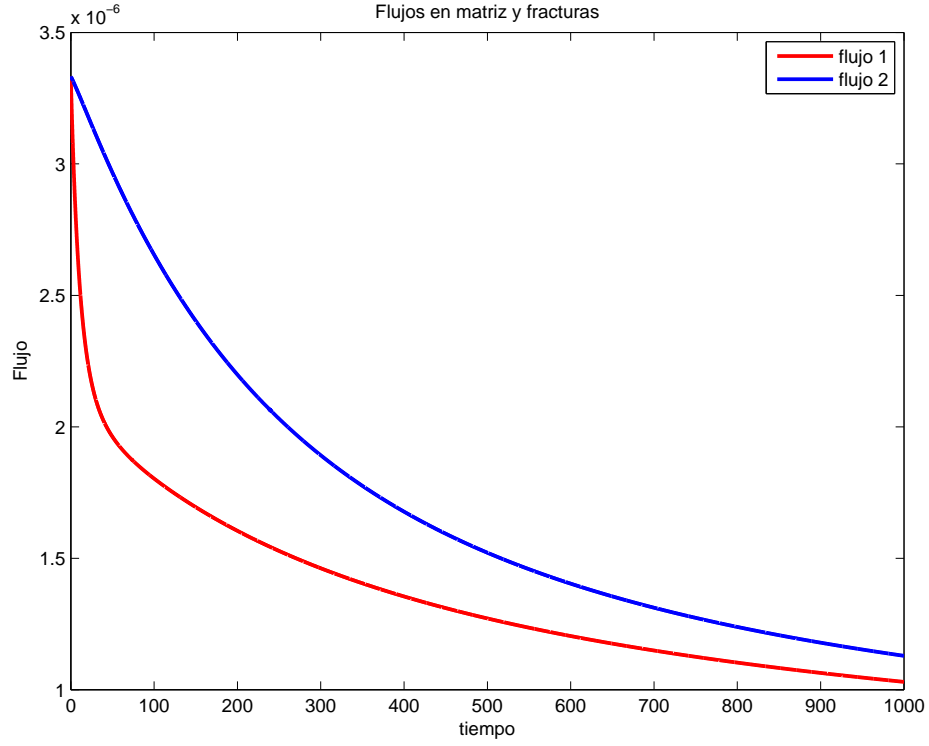


Figura 3.5: Flujo en matriz y fracturas

Por último, al aplicar el método- θ al esquema (3.9) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & a_1 \theta T_{m-1,z}^{n+1} + \left(\frac{f_1}{\Delta t} + b_1 \theta \right) T_{m,z}^{n+1} + c_1 \theta T_{m+1,z}^{n+1} + d_1 \theta T_{m,z-1}^{n+1} + e_1 \theta T_{m,z+1}^{n+1} + f_7 \theta T_{m,z}^{2,n+1} \\
 & = -a_1 (1 - \theta) T_{m-1,z}^n + \left(\frac{f_1}{\Delta t} - b_1 (1 - \theta) \right) T_{m,z}^n - c_1 (1 - \theta) T_{m+1,z}^n \\
 & - d_1 (1 - \theta) T_{m,z-1}^n - e_1 (1 - \theta) T_{m,z+1}^n - f_7 (1 - \theta) T_{m,z}^{2,n+1} + \theta f_8^{n+1} + (1 - \theta) f_8^n
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Nodos y reindexación

Para trabajar la discretización del tiempo y el espacio en **Matlab** se utilizó una reindexación de modo que las aproximaciones de la forma $T_{m,z}^n$ se puedan expresar de la forma T_k^n , para así poder representar el esquema numérico como un sistema lineal:

$$AT^{n+1} = BT^n + c.$$

Sean t_n nodos para $n \in \{1, \dots, N\}$ en el intervalo de tiempo $[0, T]$, r_j nodos para $j \in \{1, \dots, M\}$ en el intervalo $[r_w, r_e]$ y z_i nodos para $i \in \{1, \dots, Z\}$ en el intervalo $[z_i, z_f]$. Considere los nodos en el espacio numerados como se muestra en la figura (3.6). Nótese que no es la forma usual de numerar nodos, sin embargo, se utilizó esta forma para aprovechar la forma en que **Matlab** ordena los elemento de un arreglo en un solo vector.

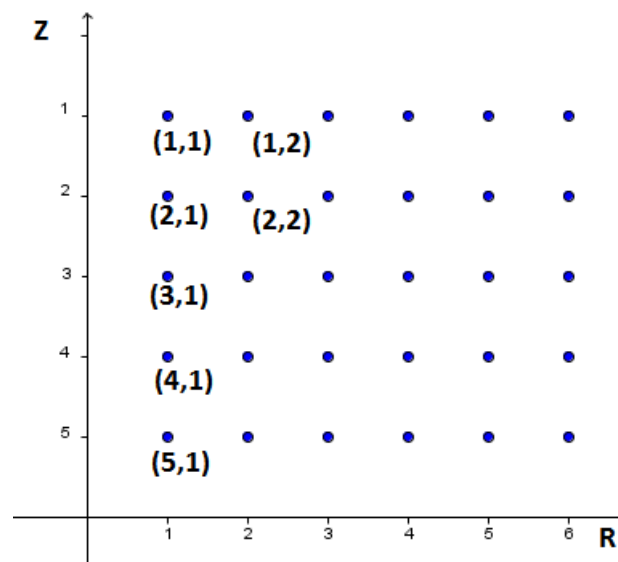


Figura 3.6: Reindexación utilizada.

La regla de reindexación que se utilizó es la siguiente:

$$k = (j - 1)Z + i \quad (3.11)$$

Por ejemplo, al nodo $(i, j) = (1, 2)$ que se muestra en la figura (3.6) (esquina superior izquierda) le corresponde el índice $k = (2 - 1)Z + 1 = 1(5) + 1 = 6$. La nueva numeración de los nodos se muestra en la figura (3.7).

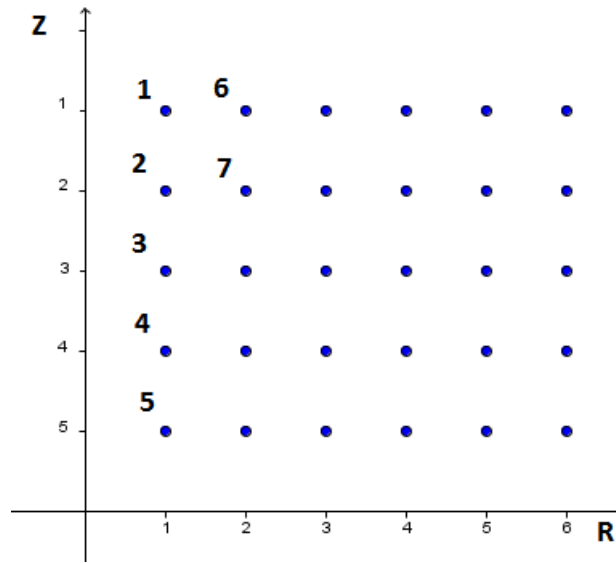


Figura 3.7: Reindexación utilizada.

Siguiendo esta nueva numeración de nodos, el nodo (z, m) le corresponde el índice $k + 1$. Haciendo los cálculos respectivos el esquema (3.10) se expresa como:

$$\begin{aligned} & a_1 \theta T_{k-z}^{n+1} + \left(\frac{f_1}{\Delta t} + b_1 \theta \right) T_k^{n+1} + c_1 \theta T_{k+z}^{n+1} + d_1 \theta T_{k-1}^{n+1} + e_1 \theta T_{k+1}^{n+1} + f_7 \theta T_k^{2,n+1} \\ & = -a_1 (1 - \theta) T_{k-z}^n + \left(\frac{f_1}{\Delta t} - b_1 (1 - \theta) \right) T_k^n - c_1 (1 - \theta) T_{k+z}^n - d_1 (1 - \theta) T_{k-1}^n \\ & \quad - e_1 (1 - \theta) T_{k+1}^n - f_7 (1 - \theta) T_k^{2,n+1} + \theta f_8^{n+1} + (1 - \theta) f_8^n \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
& a_2\theta T_{k-z}^{n+1} + \left(\frac{g_1}{\Delta t} + b_2\theta\right) T_k^{n+1} + c_2\theta T_{k+z}^{n+1} + d_2\theta T_{k-1}^{n+1} + e_2\theta T_{k+1}^{n+1} + g_7\theta T_k^{2,n+1} \\
& = -a_2(1-\theta)T_{k-z}^n + \left(\frac{g_1}{\Delta t} - b_2(1-\theta)\right) T_k^n - c_2(1-\theta)T_{k+z}^n \\
& - d_2(1-\theta)T_{k-1}^n - e_2(1-\theta)T_{k+1}^n - g_7(1-\theta)T_k^{2,n+1} + \theta g_8^{n+1} + (1-\theta)g_8^n
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Los esquemas para matriz y fracturas (3.12) y (3.13) junto con las condiciones frontera de cada caso determinan la matriz A del sistema. Esta matriz es de tamaño $2MZ \times 2MZ$ y está compuesta por dos bloques, superior e inferior, ambos de tamaño $(MZ, 2MZ)$, como se muestra en la figura (3.8).

El primer bloque está determinado por el esquema (3.12) para los nodos interiores y las condiciones frontera para nodos frontera.

Análogamente, el segundo bloque se construye a partir del esquema (3.13) y las condiciones frontera del caso.

Por otro lado, el vector T^{n+1} de tamaño $2MZ \times 1$ tiene como entradas las incógnitas $T_1^{n+1}, \dots, T_{MZ}^{n+1}, T_{MZ+1}^{n+1}, \dots, T_{2MZ}^{n+1}$, donde las primeras corresponden MZ incógnitas son las asociadas a la matriz y las demás a las fracturas.

Similarmente se determina la matriz B y el vector T^n , con la diferencia que la matriz B tiene el valor 0 en las entradas correspondientes a los nodos frontera.

El vector c queda determinado por los valores independientes de la temperatura además de las condiciones iniciales del sistema.

Las matrices A y B son matrices ralas, que a lo sumo tienen 5 entradas debido a los esquemas numéricos.

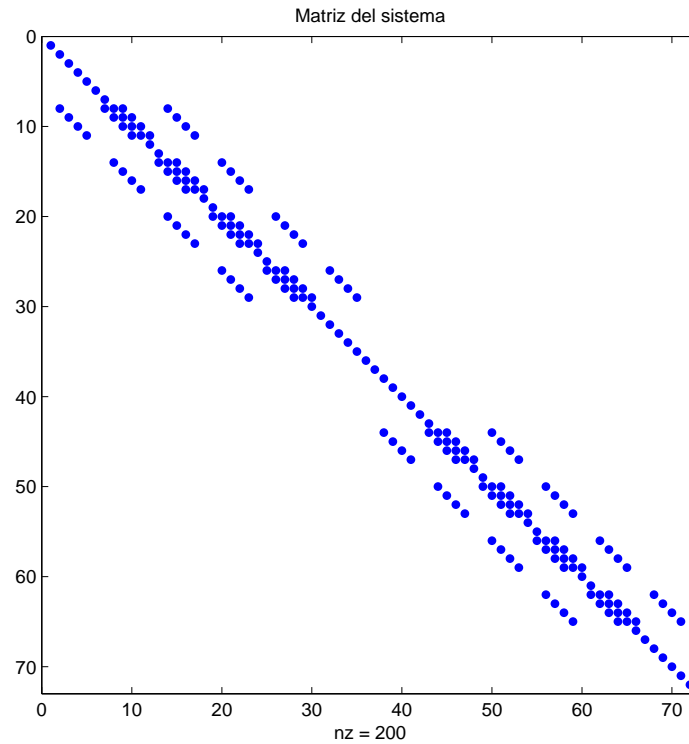


Figura 3.8: Matriz del esquema numérico.

3.2.1. Algoritmo

Nótese que se debe resolver dos sistemas acoplados, uno de presiones y otro de temperaturas. Ambos tienen una forma similar pues se pueden escribir de la forma de la ecuación (2.9). Sin embargo, varían las funciones coeficientes (f_1, \dots, f_8). Es necesario resolver el sistema de presiones para determinar las funciones coeficientes que le corresponden al sistema de temperatura.

El algoritmo que se implementó en **Matlab** es el siguiente:

Algoritmo 3.2.1. Algoritmo para modelo de DPP con EMH.

1. Discretización en tiempo y espacio: t vector de discretización del tiempo de tamaño N , r vector de discretización de tamaño M y z vector de tamaño Z .
2. Leer parámetros.
3. Identificas los nodos de la franja donde se resolverá la presión $Z_2 \leq z \leq Z_3$.
4. Para $n = 1, \dots, N$ hacer:
 - Resolver el problema de presiones en la capa entre Z_2 y Z_3 , esto es, resolver el sistema $\bar{A}P^{n+1}\bar{B}P^n + \bar{c}$, donde P^{n+1} es el vector incógnita que tiene los valores de presión tanto en matriz como en fracturas.
 - Calcular las matrices $A_{2MZ \times 2MZ}$, $B_{2MZ \times 2MZ}$ y $c_{2MZ \times 1}$ del sistema de temperatura.
 - Resolver el sistema $AT^{n+1} = BT^n + b$.
 - Actualizar valores de viscosidades en toda la malla: $\mu_i = \mu_0 e^{-\gamma(T_i - T_0)}$, para $i \in \{1, 2\}$.

3.2.2. Ejemplo sintético

Análogamente al capítulo anterior, se utilizó ejemplos sintéticos para la validación. Sin embargo, el sistema (2.8) tiene una interacción complicada entre sus cuatro ecuaciones, por lo que la validación se realizó en las ecuaciones de presión y luego en las ecuaciones de temperatura, como si fueran dos sistemas desacoplados.

Sistema de temperatura

Considere el sistema de ecuaciones parciales:

$$\begin{aligned} f_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} &= f_2 T_1 + f_3 \frac{\partial T_1}{\partial r} + f_4 \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + f_5 \frac{\partial T_1}{\partial z} + f_6 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + f_7 T_2 + f_8 \\ g_1 \frac{\partial T_2}{\partial r} &= g_2 T_2 + g_3 \frac{\partial T_2}{\partial r} + g_4 \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + g_5 \frac{\partial T_2}{\partial z} + g_6 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + g_7 T_1 + g_8 \end{aligned}, \quad (3.14)$$

donde las funciones coeficientes f_1, \dots, f_7 y g_1, \dots, g_7 son constantes igual a 1.

Se puede verificar que las funciones:

$$T_1(t, r, z) = t^2 \cos(r + z) \quad \text{y} \quad T_2(t, r, z) = \sin(t) e^{\frac{-r-z}{60}} \quad (3.15)$$

satisfacen el sistema (3.14) tomando f_8 y g_8 como sigue:

$$\begin{aligned} f_8 &= (2t - (1 - w)t^2 + 2t^2) \cos(r + z) + 2t^2 \sin(r + z) - w \sin(t) e^{(-r-z)/60} \\ g_8 &= \cos(t) e^{(-r-z)/60} + \left(w - \frac{1741}{1800} \right) \sin(t) e^{(-r-z)/60} - wt^2 \cos(r + z) \end{aligned},$$

Las condiciones iniciales utilizadas en este caso:

$$\begin{aligned}
T_1(t = 0, r, z) &= 0 \cdot \cos(r + z) = 0 & T_2(t = 0, r, z) &= 0 \\
\frac{\partial T_1}{\partial r}(t, r = r_w, z) &= -t^2 \sin(r_w + z) & \frac{\partial T_2}{\partial r}(t, r = r_w, z) &= -\frac{\sin(t)e^{(-r_w - z)/60}}{60} \\
T_1(t, r = r_e, z) &= t^2 \cos(r_e + z) & T_2(t, r = r_e, z) &= \sin(t)e^{(-r_e - z)/60} , \\
\frac{\partial T_1}{\partial z}(t, r, z = z_i) &= -t^2 \sin(r + z_i) & \frac{\partial T_2}{\partial z}(t, r, z = z_i) &= -\frac{\sin(t)e^{(-r - z_i)/60}}{60} \\
\frac{\partial T_1}{\partial z}(t, r, z = z_f) &= -t^2 \sin(r + z_f) & \frac{\partial T_2}{\partial z}(t, r, z = z_f) &= -\frac{\sin(t)e^{(-r - z_f)/60}}{60}
\end{aligned}$$

El intervalo de tiempo $[0, 10]$ se discretizó en $N = 10^3$ nodos equidistantes. El intervalo para r , $[0, 10]$ se dividió en M nodos y en z , $[0, 10]$ se dividió en Z nodos. Esta discretización espacial se aumentó para ver las variaciones de los errores.

Los errores entre solución analítica y numérica se muestran en las tablas (3.3) y (3.4).

Discretización	Max. error absoluto	Max. error relativo	Error relativo prom.	ECM
$M = 20, Z = 20$	$1,046300 \times 10^1$	$5,587282 \times 10^{-1}$	$7,443508 \times 10^{-2}$	$3,939321 \times 10^0$
$M = 30, Z = 30$	$4,365493 \times 10^0$	$1,852606 \times 10^0$	$4,396168 \times 10^{-2}$	$1,704123 \times 10^0$
$M = 40, Z = 40$	$2,388064 \times 10^0$	$8,815716 \times 10^0$	$3,868272 \times 10^{-2}$	$9,473787 \times 10^{-1}$
$M = 50, Z = 50$	$1,506363 \times 10^0$	$7,150440 \times 10^0$	$1,992020 \times 10^{-2}$	$1,992020 \times 10^{-1}$

Tabla 3.3: Errores entre solución analítica y numérica de T_1 (3.14).

Discretización	Max. error absoluto	Max. error relativo	Error relativo prom.	ECM
$M = 20, Z = 20$	$1,457764 \times 10^{-3}$	$2,828386 \times 10^{-3}$	$4,656530 \times 10^{-4}$	$4,203060 \times 10^{-4}$
$M = 30, Z = 30$	$1,312837 \times 10^{-3}$	$2,559491 \times 10^{-3}$	$4,366784 \times 10^{-4}$	$3,826088 \times 10^{-4}$
$M = 40, Z = 40$	$1,262052 \times 10^{-3}$	$2,466259 \times 10^{-3}$	$4,290271 \times 10^{-4}$	$3,711712 \times 10^{-4}$
$M = 50, Z = 50$	$1,237845 \times 10^{-3}$	$2,422317 \times 10^{-3}$	$4,265274 \times 10^{-4}$	$3,664503 \times 10^{-4}$

Tabla 3.4: Errores entre solución analítica y numérica de T_2 (3.14).

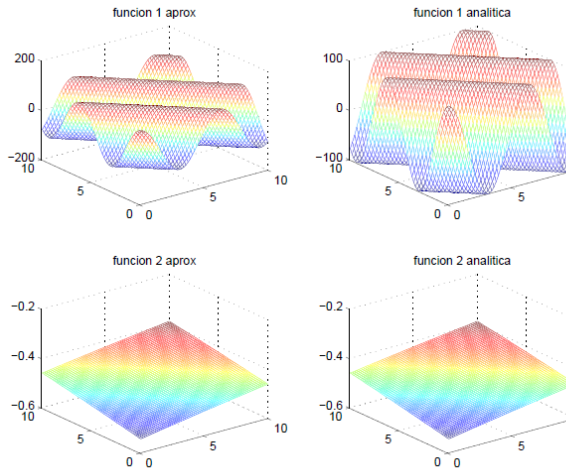


Figura 3.9: Funciones analíticas y aproximadas.

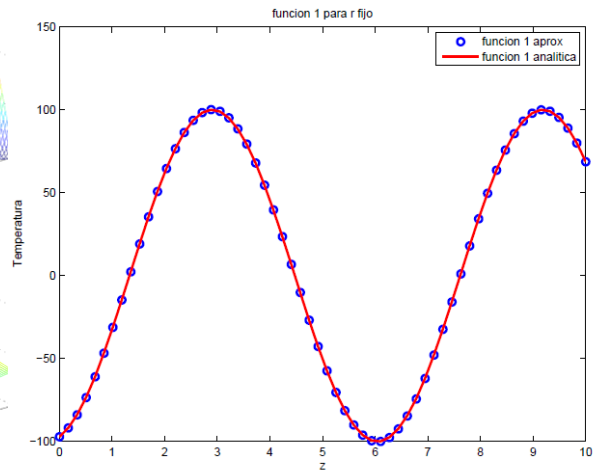


Figura 3.10: Corte de T_1 para r fijo.

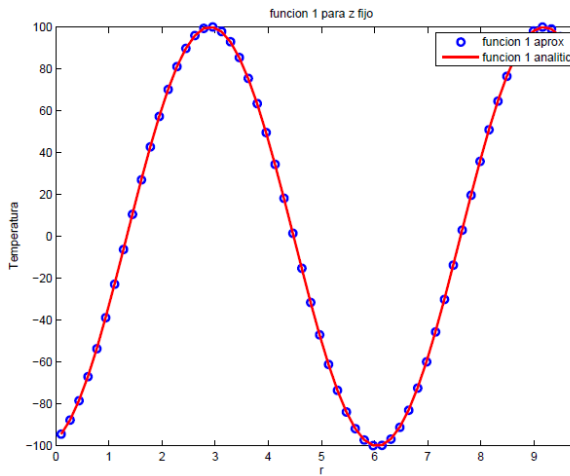


Figura 3.11: Corte de T_1 para z fijo.

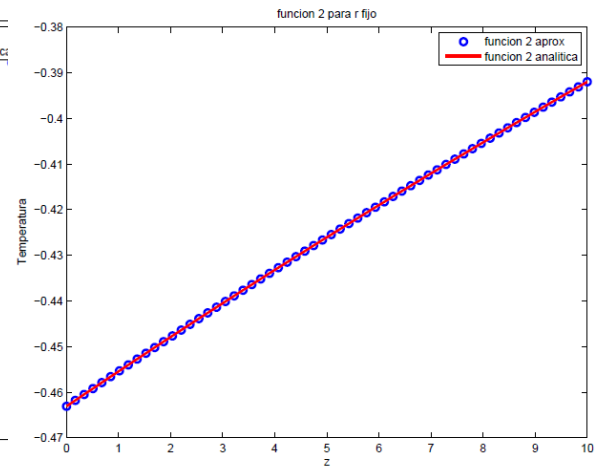


Figura 3.12: Corte de T_2 para r fijo

Sistema de presiones

Desarrollando términos en la primera ecuación de DPP se pueden verificar que otra forma de expresarla es la siguiente:

$$\phi_1 c_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} = - \left(\frac{\alpha}{\mu_1} \right) P_1 - \left(\frac{k_1^2}{\mu_1^3} \frac{\partial \mu_1}{\partial r} - \frac{k_1}{\mu_1} \right) \frac{\partial P_1}{\partial r} + \left(\frac{k_1^2}{\mu_1^2} \right) \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} + \left(\frac{\alpha}{\mu_2} \right) P_2 \quad (3.16)$$

Análogamente para la segunda ecuación del modelo de DPP. Así, también se puede expresar el sistema de presiones de la forma (2.9) como sigue:

$$\begin{aligned} \phi_1 c_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} &= - \left(\frac{\alpha}{\mu_1} \right) P_1 - \left(\frac{k_1^2}{\mu_1^3} \frac{\partial \mu_1}{\partial r} - \frac{k_1}{\mu_1} \right) \frac{\partial P_1}{\partial r} + \left(\frac{k_1^2}{\mu_1^2} \right) \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} + \left(\frac{\alpha}{\mu_2} \right) P_2 \\ \phi_2 c_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} &= - \left(\frac{\alpha}{\mu_2} \right) P_2 - \left(\frac{k_2^2}{\mu_2^3} \frac{\partial \mu_2}{\partial r} - \frac{k_2}{\mu_2} \right) \frac{\partial P_2}{\partial r} + \left(\frac{k_2^2}{\mu_2^2} \right) \frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} + \left(\frac{\alpha}{\mu_1} \right) P_1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nuevamente utilizando las funciones T_1 y T_2 de la ecuación (3.15), se obtuvieron los siguientes errores entre la solución analítica y numérica:

Discretización	Max. error absoluto	Max. error relativo	Error relativo prom.	ECM
$M = 50, Z = 50$	$1,521930 \times 10^0$	$3,364566 \times 10^{-1}$	$1,475200 \times 10^{-2}$	$6,09911 \times 10^{-1}$

Tabla 3.5: Errores entre solución analítica y numérica para T_1 .

Discretización	Max. error absoluto	Max. error relativo	Error relativo prom.	ECM
$M = 50, Z = 50$	$1,300241 \times 10^{-3}$	$2,540959 \times 10^{-3}$	$4,452025 \times 10^{-4}$	$3,838031 \times 10^{-3}$

Tabla 3.6: Errores entre solución analítica y numérica para T_2 .

3.2.3. Resultados

Una vez validado el código para resolver el modelo propuesto de DPP con EMH (2.8) se utilizaron datos realistas (ver Davletbaev et al. [9], Carrizales y Lake [4]) para resolver numéricamente el modelo.

El intervalo de tiempo utilizado fue $[0, 10^4]$ con 10^5 nodos, en la dirección r el intervalo que se consideró fue $[0,5, 10]$ con $M = 50$ nodos y en z un intervalo $[0, 20]$ con $Z = 50$ nodos.

Los valores de los parámetros se muestran en las tablas (3.7) y (3.8).

Parámetro	Símbolo	Valor en la Matriz	Valor en las Fracturas
Compresibilidad	c	$5,0725 \times 10^{-10} Pa^{-1}$	$1,7391 \times 10^{-9} Pa^{-1}$
Porosidad	ϕ	0,25	0,35
Permeabilidad	k	$1 \times 10^{-11} m^2$	$1 \times 10^{-13} m^2$
Viscosidad inicial	μ_0	$1 Pa \cdot s$	$1 Pa \cdot s$

Tabla 3.7: valores de parámetros en (2.8) para presión.

Parámetro	Símbolo	Valor en la Matriz	Valor en las Fracturas
	M_t	$2,1531 \times 10^6 J/(m^3 \cdot K)$	$2,1311 \times 10^6 J/(m^3 K)$
Densidad del fluido por unidad de vol.	ρ	$950 kg/m^3$	$950 kg/m^3$
Cap. calorífica específica	C	$920 J/(kg \cdot K)$	$2093 J/(kg \cdot K)$
Permeabilidad	k	$1 \times 10^{-11} m^2$	$1 \times 10^{-13} m^2$
Conduc. térmica total	λ_T	$2,2813 W/(m \cdot K)$	$0,120 W/(m \cdot K)$
Entalpía de la fuente por unid. volumen	q_H		
Pérdida de calor	q_L		
Fuente de poder	R_0	$63,00000 W$ a $915 MHz$	$63,00000 W$

Tabla 3.8: valores de parámetros en (2.8) para temperatura.

Algunos cálculos adicionales para encontrar valores de los parámetros de la bibliografía utilizada se presentan en la siguiente lista.

- El parámetro M_{T_1} está determinado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} M_{T_1} &= \phi_1 \rho S_o C_{vo} + (1 - \phi_1) \rho_s C_s \\ &= 0,25(950 \text{kg/m}^3)(1)(2093 \text{J/(Kg} \cdot \text{K)}) + (1 - 0,25)(2400 \text{kg/m}^3)(920 \text{J/(Kg} \cdot \text{K)}) \\ &= 2,1531 \times 10^6 \text{J/(m}^3 \text{K)} \end{aligned}$$

Se tomó en cuenta la densidad de la roca de Petrowiki [19], comúnmente las *areniscas* (sandstones) en los yacimientos naturalmente fracturados.

- El valor de M_{T_2} está dado por:

$$\begin{aligned} M_{T_2} &= \phi_2 \rho S_o C_{vo} + (1 - \phi_2) \rho_s C_s \\ &= 0,35(950 \text{kg/m}^3)(1)(2093 \text{J/(Kg} \cdot \text{K)}) + (1 - 0,35)(2400 \text{kg/m}^3)(920 \text{J/(Kg} \cdot \text{K)}) \\ &= 2,1311 \times 10^6 \text{J/(m}^3 \text{K)} \end{aligned}$$

- La conductividad térmica en la matriz se utiliza al igual que Davletbaev et al. [9]:

$$\begin{aligned} \lambda_{T_1} &= (1 - \phi) \lambda_m + \phi \lambda_0 \\ &= (1 - 0,25)3,0 \text{W/(m} \cdot \text{K)} + 0,25(0,125 \text{W/(m} \cdot \text{K)}) \\ &= 2,2813 \text{W/(m} \cdot \text{K)} \end{aligned}$$

- La conductividad térmica en las fracturas se considerará como la conductividad térmica del aceite. Según Elam et al. [10] la conductividad térmica del aceite es aproximadamente: $\lambda_{T_2} = 0,120 \text{W/(m} \cdot \text{K)}$.

Los resultados se dividieron en tres casos, debido a que el interés es observar las diferencias de modelo (2.8) con los modelos de simple porosidad. El primer caso tiene los parámetros de interacción tanto en presiones (α) como en temperatura (w) iguales a cero.

Caso 1: $\alpha = 0, w = 0.$

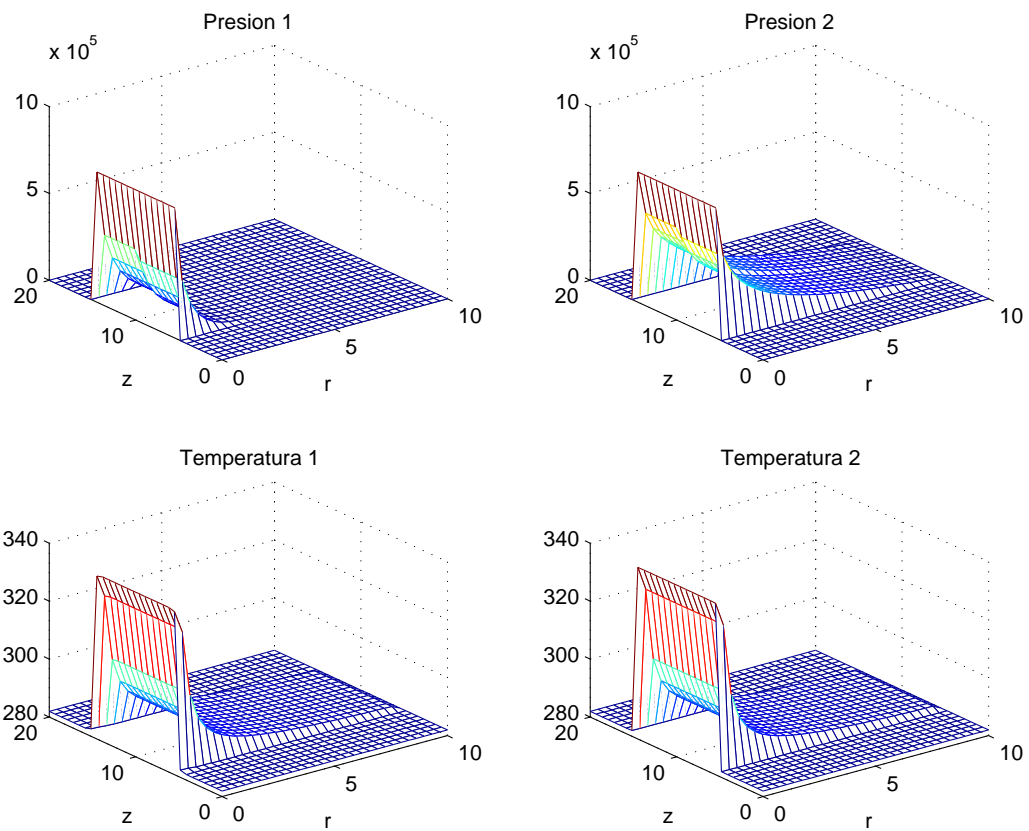
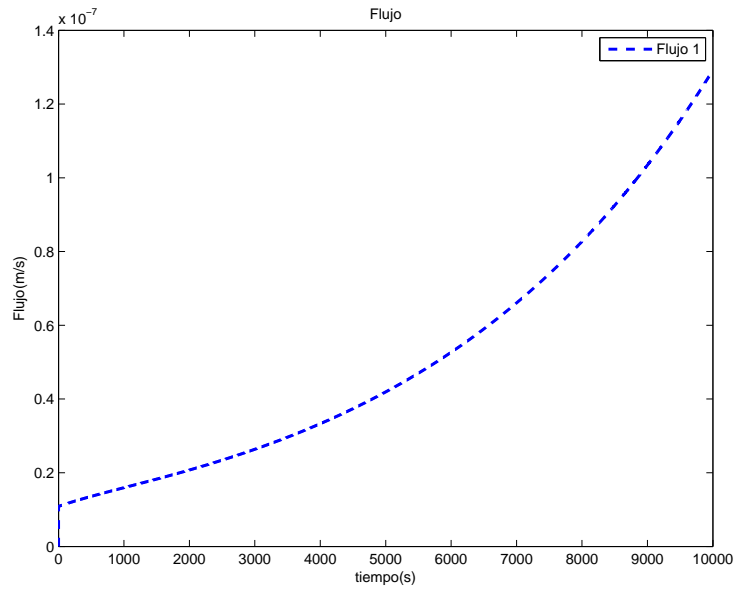
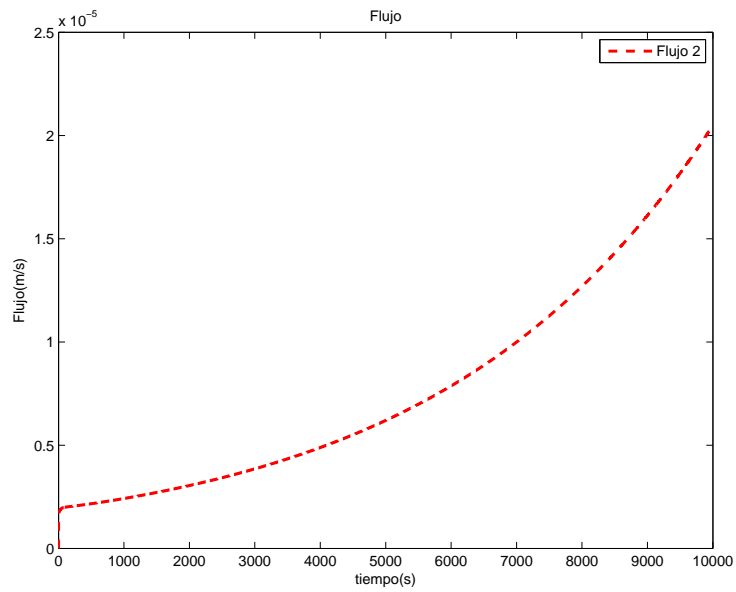


Figura 3.13: Presiones y Temperaturas.

**Figura 3.14:** Flujo en matriz.**Figura 3.15:** Flujo en fracturas.

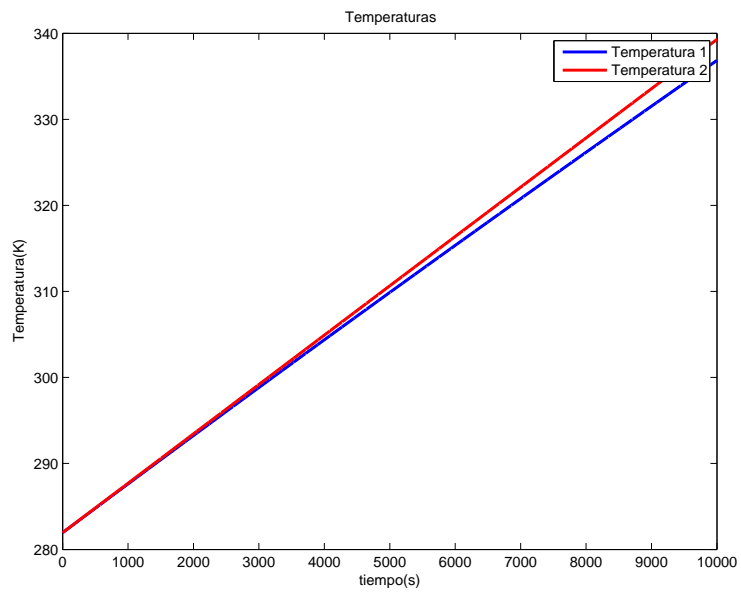


Figura 3.16: Temperatura en matriz y fracturas.

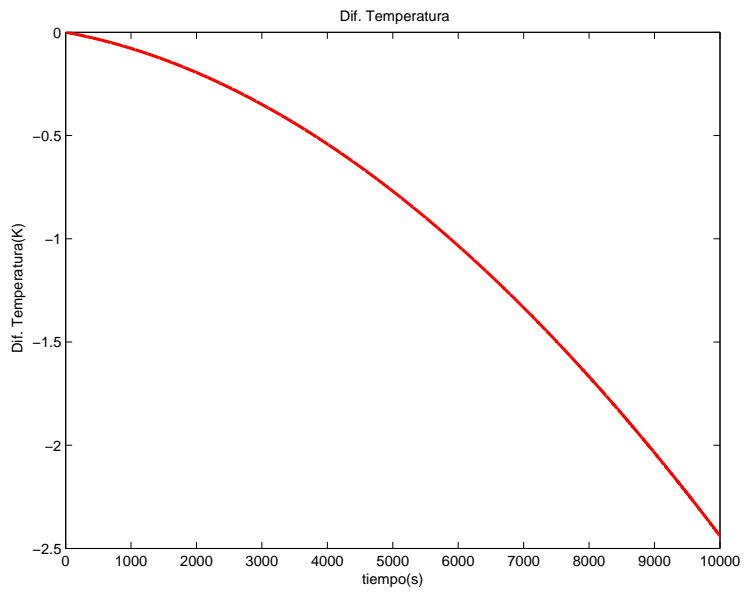


Figura 3.17: Diferencias de temperatura.

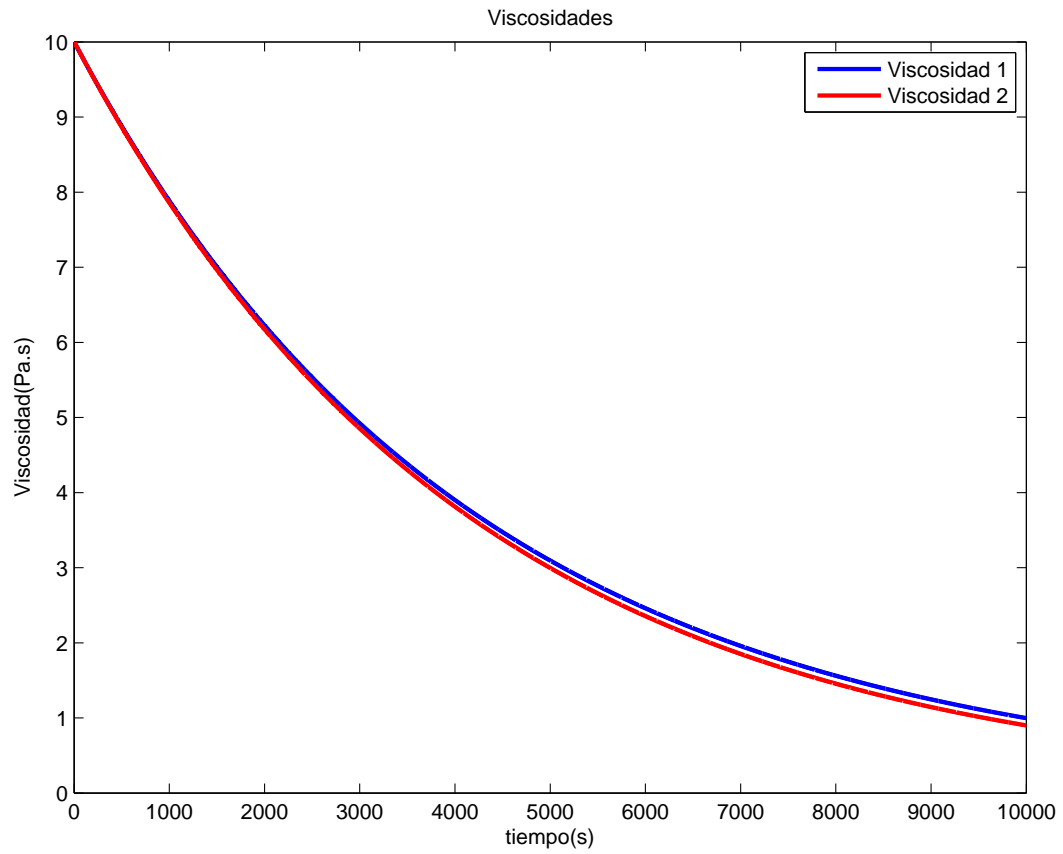


Figura 3.18: Viscosidad en matriz y fracturas.

Caso 2: $\alpha = 0,0, w = -1,0.$

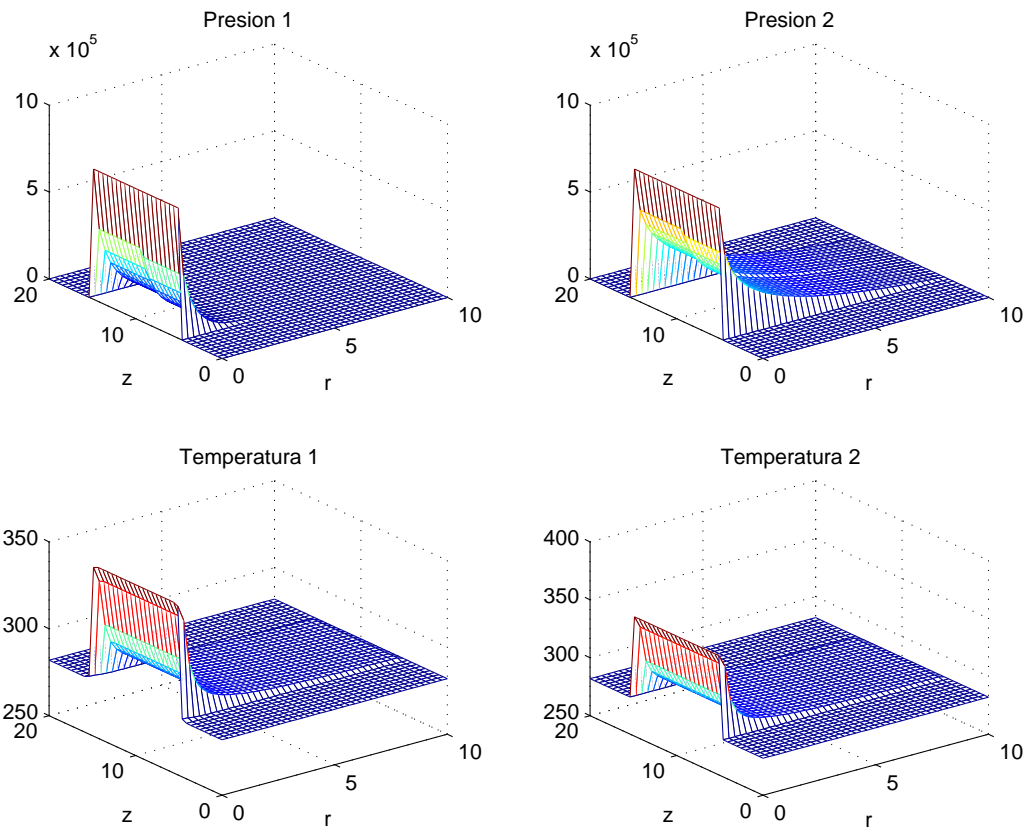
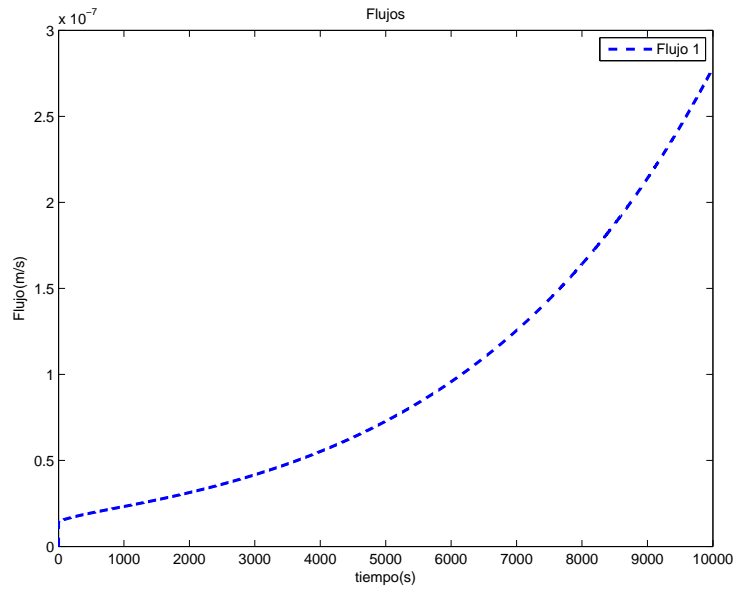
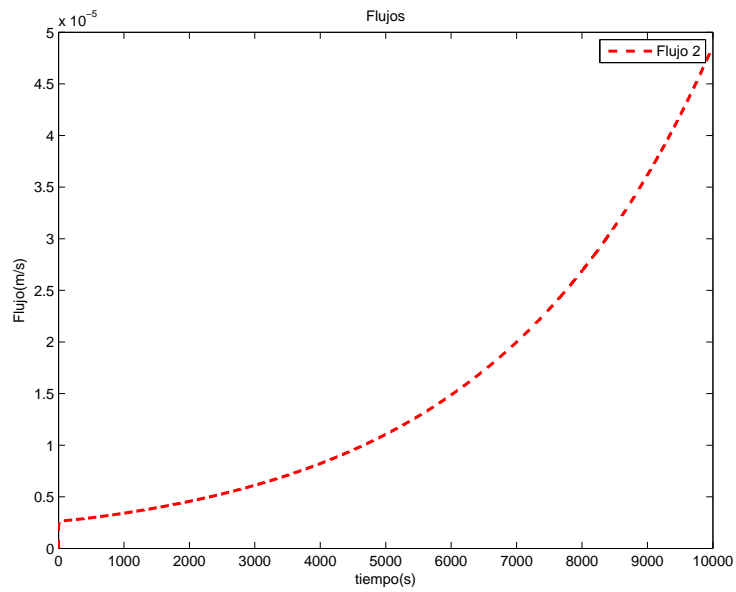


Figura 3.19: Presiones y Temperaturas.

**Figura 3.20:** Flujo en matriz.**Figura 3.21:** Flujo en fracturas.

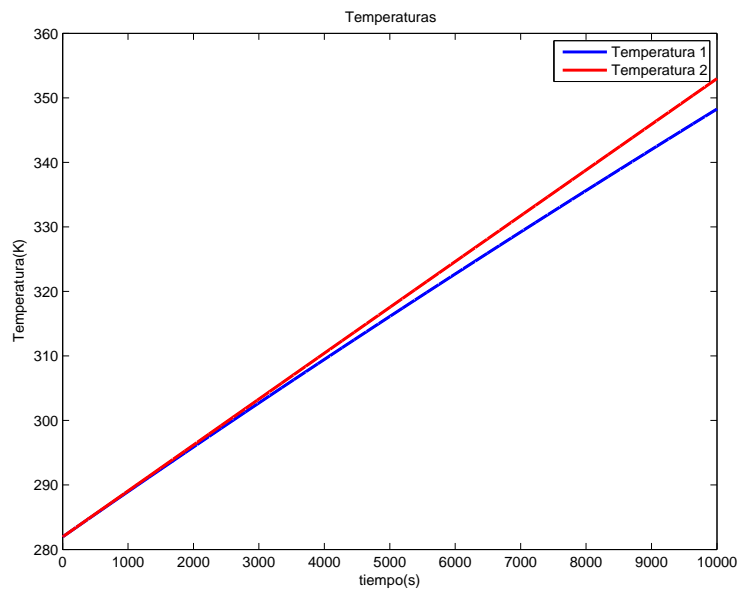


Figura 3.22: Temperatura en matriz y fracturas.

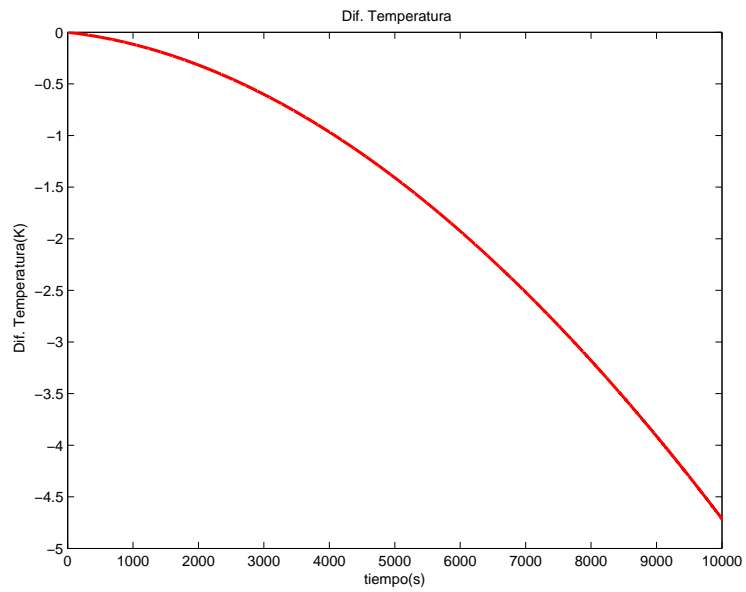


Figura 3.23: Diferencias de temperatura.

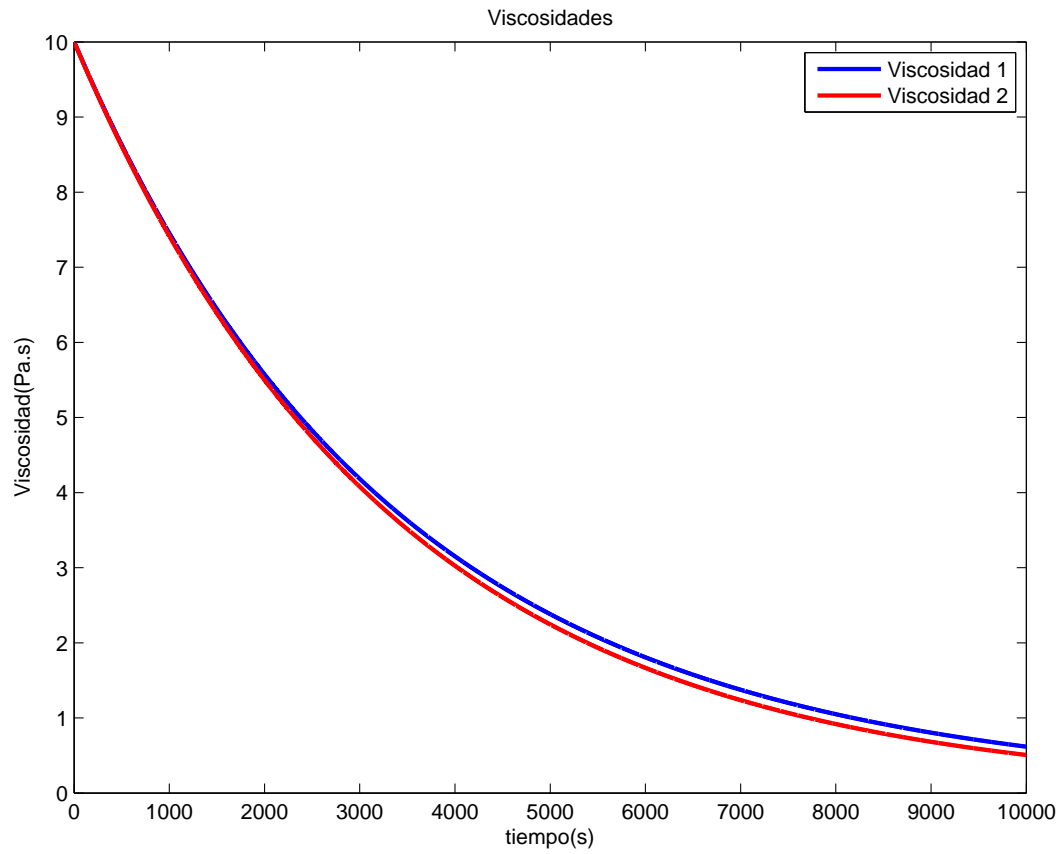


Figura 3.24: Viscosidad en matriz y fracturas.

Los resultados muestran coincidir con lo que se espera de la física del problema. La temperatura en matriz y fracturas aumentan y se observa una diferencia conforme el tiempo aumenta en las temperaturas, siendo mayor la temperatura en las fracturas. Además μ_1 y μ_2 disminuyen, lo cual es todo el objetivo de la técnica de EMH.

Las gráficas 3D de presiones también muestran una mayor difusión de presión en las fracturas, lo cual también tiene sentido físico, al igual que el el modelo de DPP.

Por último, el flujo en un punto en la pared del pozo en medio de la franja determinada por Z_2 y Z_3 concuerdan también con lo que se espera físicamente, debido a que el flujo en las fracturas es mucho mayor que en la matriz.

Capítulo 4

Identificación de un yacimiento fractal

El objetivo de este capítulo es implementar una estrategia de estimación de parámetros en un modelo fraccionario para la difusión de presión en un medio fractal, dados datos ruidosos de la presión. También estudiar el papel del ruido y la cantidad de datos en la estimación. Para esto se utilizan métodos Monte Carlo y el software **t-walk** de Christen y Fox [8], para construir una caminata aleatoria y realizar la estimación de los parámetros en el modelo que presentan Moreles et al. [17].

4.1. Datos del modelo

Se utilizó el algoritmo de Hassanzadeh y Pooladi-Darvish [12] de inversión numérica de Laplace para aproximar los valores de la presión de la ecuación (1.5), en el intervalo de tiempo $[10^2, 10^{10}]$. Los datos generados se les agregó ruido η_i con distribución normal entre los valores $-0,1P_i$ y $0,1P_i$.

El conjunto de datos se le denotará $\{y_i\}$ para $i = 1, \dots, 100$.

Para lograr interpretar mejor los resultados del **mcmc** se generaron 5 conjuntos de datos variando los valores de los parámetros α y d . Los casos que se trabajaron son los siguientes:

- Caso 0: $d = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, y $\theta = 0$ (caso euclideo).
- Caso 1: $d = 1,85$, $\alpha = 0,9$, $\beta = 1,1$ y $\theta = -0,25$.
- Caso 2: $d = 1,85$, $\alpha = 1$, $\beta = 1,1$ y $\theta = -0,25$.
- Caso 3: $d = 2$, $\alpha = 0,9$, $\beta = 1,25$ y $\theta = -0,25$.
- Caso 4: $d = 1,95$, $\alpha = 0,9$, $\beta = 1,2$ y $\theta = -0,25$.

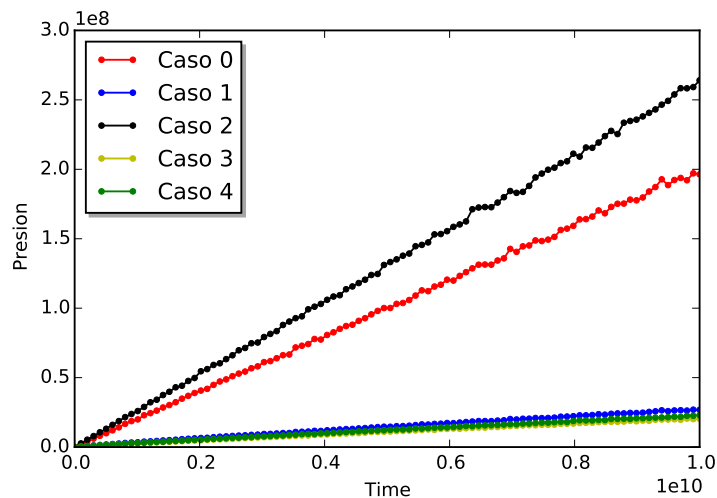


Figura 4.1: Datos de cada caso.

Los intervalos de tiempo muy grandes pueden representar un problema en el trabajo de campo, por lo que se realizaron algunas pruebas con la misma cantidad de datos (un solo caso) en un intervalo de tiempo más pequeño $[10^2, 10^5]$, para estudiar el comportamiento del método y el papel del ruido.

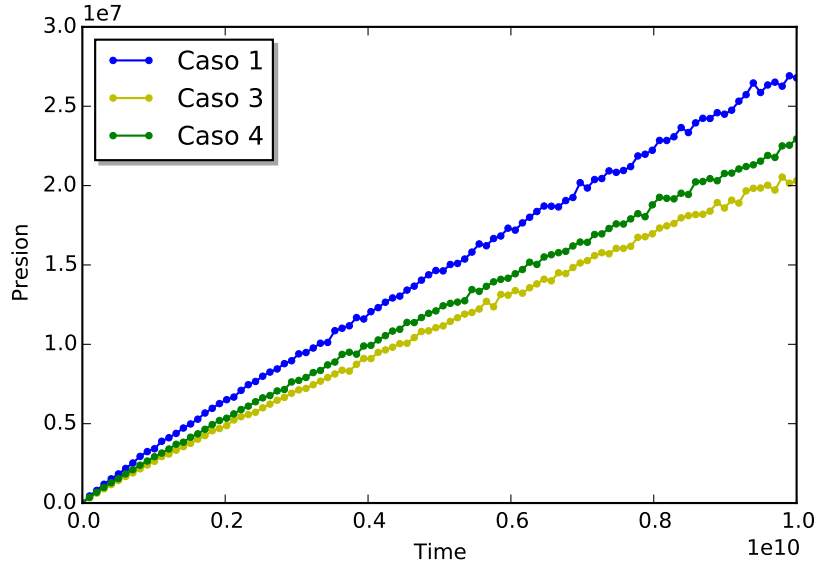


Figura 4.2: Datos de caso 1 ,3 y 4.

4.2. Estimación de parámetros con MCMC

Se quiere resolver el problema inverso que consiste en estimar los parámetros del modelo (1.3), dados los datos sintéticos generados con el algoritmo de Hoog. El método de estimación se basa en el teorema de bayes:

Teorema 4.2.1. Suponga que $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tiene una densidad de probabilidad conocida $\pi_{pr}(x)$ y que los datos consisten en el valor observado y de una variable aleatoria $Y \in \mathbb{R}^k$ tal que $\pi(y) > 0$, entonces la distribución de x dado y es:

$$\pi(x|y) = \frac{\pi_{pr}(x) \cdot \pi(y|x)}{\pi(y)} \propto \pi_{pr}(x) \cdot \pi(y|x), \quad (4.1)$$

donde $\pi(x|y)$ es la distribución posterior, $\pi_{pr}(x)$ la distribución a priori y $\pi(y|x)$ la verosimilitud.

Nótese que en el modelo (1.3) se quieren estimar únicamente tres parámetros, por lo que para este caso $n = 3$.

Se utilizó este teorema para muestrear de la distribución posterior. Para esto se utilizó el software **t-walk**, al cual se necesita asignarle un modelo para la verosimilitud $\pi(y|x)$, un modelo cada una de las distribuciones a priori $\pi_{pr}(x)$ y un *solver* de la ecuación (1.5), el cual se implementó utilizando el método de *Zakian* de inversión numérica de Laplace, ver Hassanzadeh y Pooladi-Darvish [12].

Se dispone de los datos y_i en los tiempos t_i , para $i = 1, \dots, 100$. Como se mencionó anteriormente, los datos fueron generados de la ecuación (1.5) y se les agregó ruido normal, por lo que la verosimilitud propuesta es también normal con μ igual a la media de los datos y σ la desviación estándar de los datos.

Suponiendo que las observaciones son independientes entre sí, la distribución conjunta es una buena aproximación de la distribución de probabilidad condicional (verosimilitud) $\pi(y|x)$, por lo que se puede definir como el producto de las funciones de densidades individuales de las observaciones:

$$\pi(y|x) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (4.2)$$

Por otro lado, es conocido que los valores de α son siempre menores o iguales a 1, aunque siempre muy cercanos, por lo que la apriori asociada a α tiene un mayor peso cerca de este valor.

El parámetro β debe tomar valores muy cercanos a 1 también, aunque puede ser mayor, por lo que la apriori asociada se eligió normal con una desviación estándar pequeña.

Por último, θ puede tomar valores cercanos a 0 tanto negativos como positivos, por lo que la apriori asociada es una normal, ver figura (4.3).

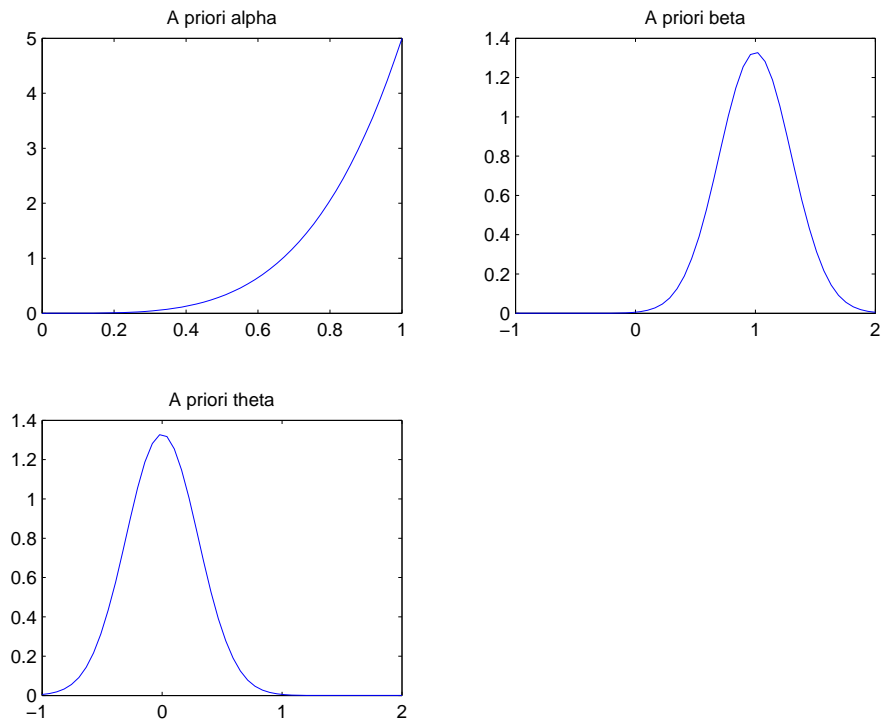


Figura 4.3: Aprioris para α , β y θ .

Las distribuciones apriori se resume de la siguiente forma:

$$\alpha \sim \beta(5, 1)$$

$$\beta \sim N(1, 0, 3)$$

$$\theta \sim N(0, 0, 3)$$

El soporte utilizado para el **MCMC** fué el siguiente:

$$0,5 < \alpha < 1$$

$$0 < \beta < 2$$

$$-1 < \theta < 1.$$

En particular, el soporte para α se toma de 0,5 a 1 y aún este intervalo representa un soporte amplio para los valores que puede tomar el parámetro.

4.3. Resultados

Intervalo de tiempo $[10^2, 10^{10}]$

- Caso 0: $d = 2, \alpha = 1, \beta = 1, \theta = 0$

Resultados:

	α	β	θ	d	Error rel. prom.
CM	0,97228056	0,84151198	-0,18221891	-	0,02262
MAP	0,99933254	1,00552936	-0,00982236	-	0,00654

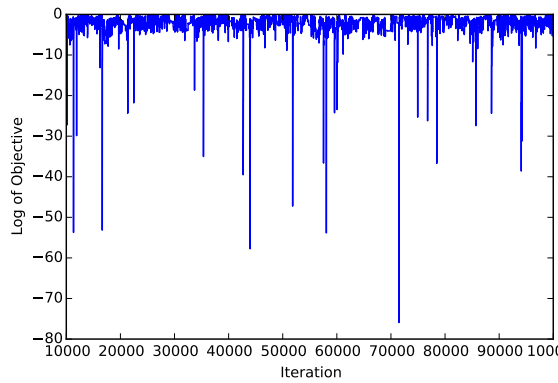


Figura 4.4: Análisis de convergencia.

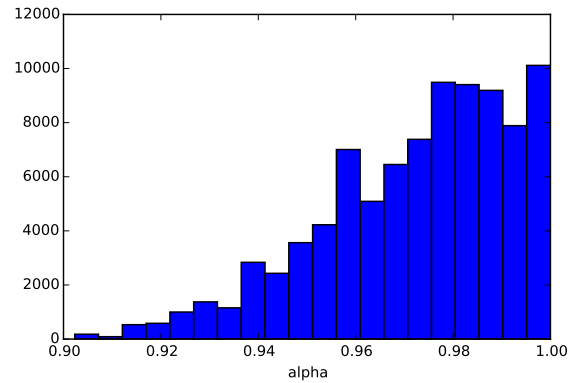


Figura 4.5: Histograma de α .

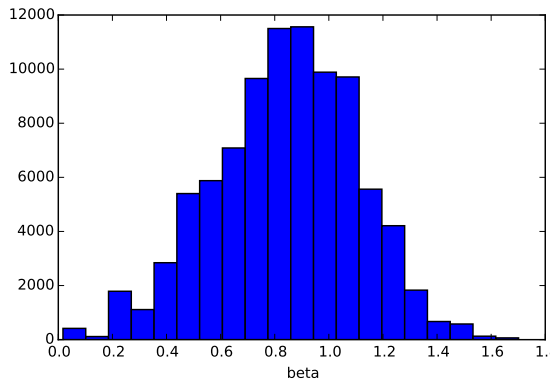


Figura 4.6: Histograma de β .

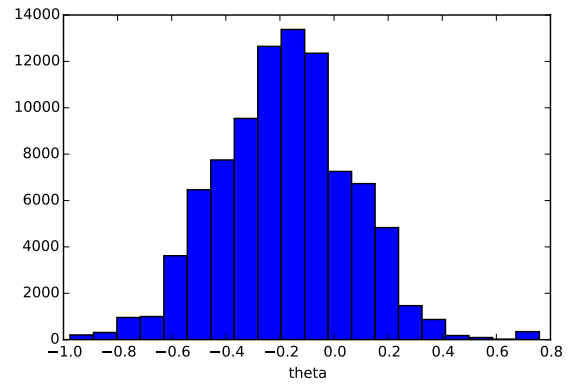


Figura 4.7: Histograma de θ .

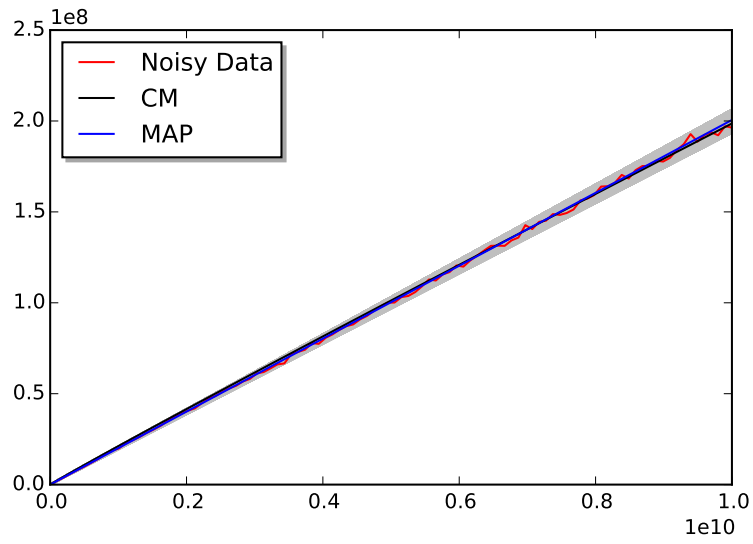


Figura 4.8: Estimadores y datos ruidosos.

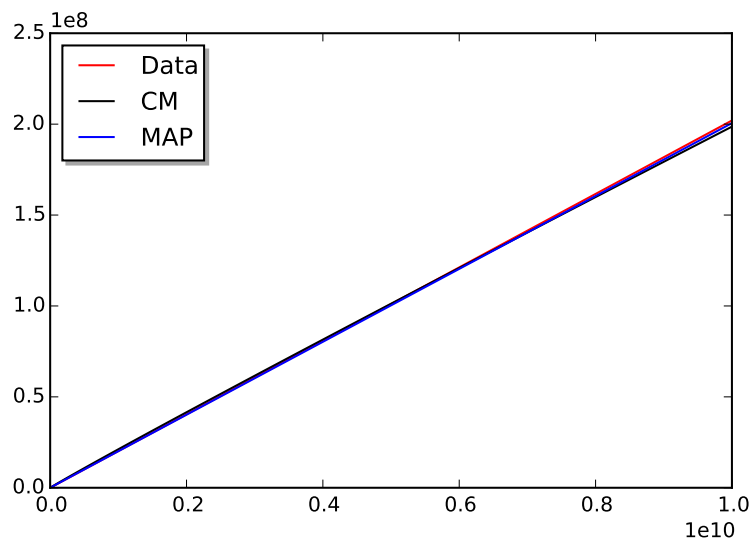


Figura 4.9: Estimadores y datos sin ruido.

- Caso 1: $d = 1,85, \alpha = 0,9, \beta = 1,1, \theta = -0,25$

Resultados:

	α	β	θ	Error rel. prom.
CM	0,91662151	1,0174732	0,03801173	0,01387
MAP	0,91576381	1,03291258	0,01484968	0,01750

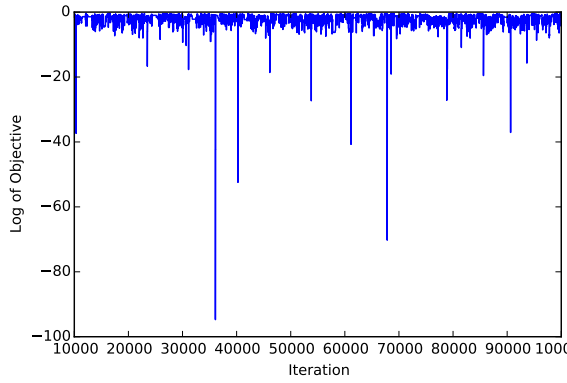


Figura 4.10: Análisis de convergencia.

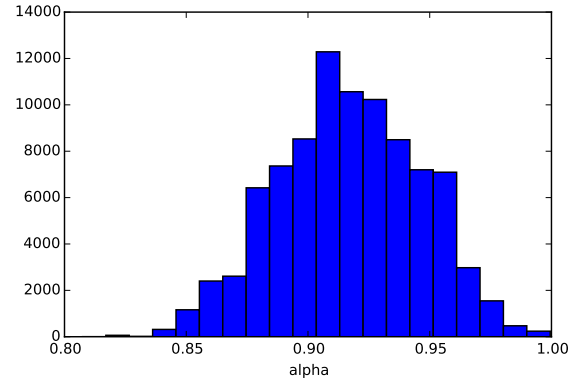


Figura 4.11: Histograma de α .

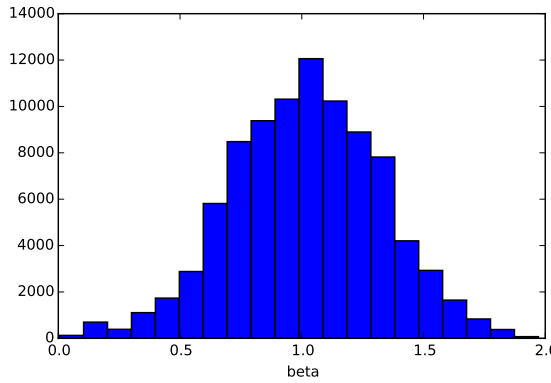


Figura 4.12: Histograma de β .

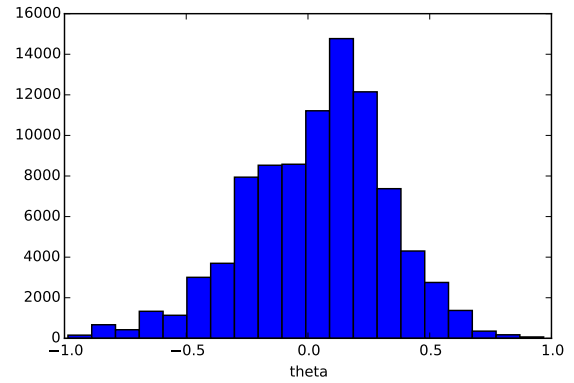


Figura 4.13: Histograma de θ .

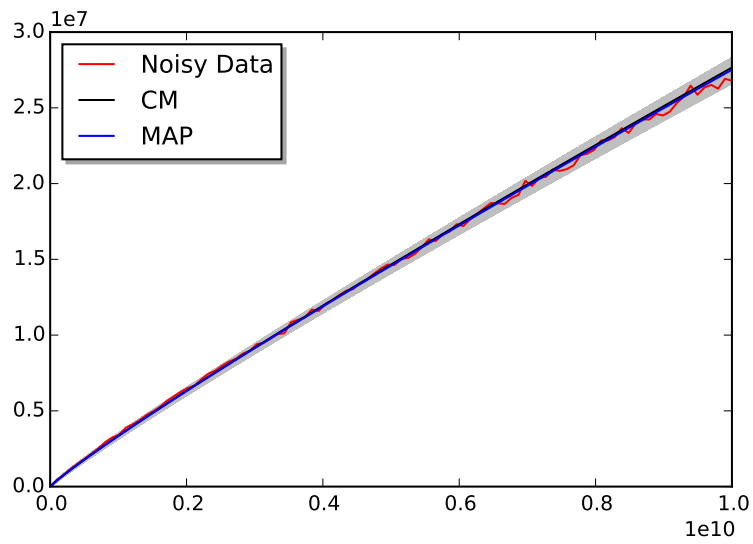


Figura 4.14: Estimadores y datos ruidosos.

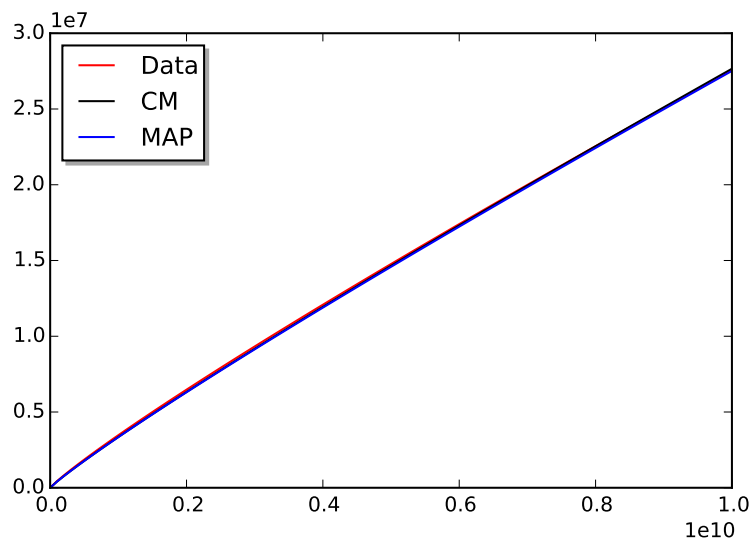


Figura 4.15: Estimadores y datos sin ruido.

- Caso 2: $d = 1,85$, $\alpha = 1$, $\beta = 1,1$ y $\theta = -0,25$.

Resultados:

	α	β	θ	Error rel. prom.
CM	0,97658094	0,78597552	-0,22486712	0,02013
MAP	0,99783985	0,9038751	-0,07228228	0,11062

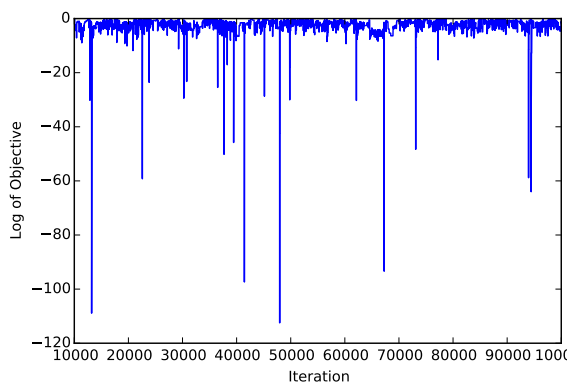


Figura 4.16: Análisis de convergencia.

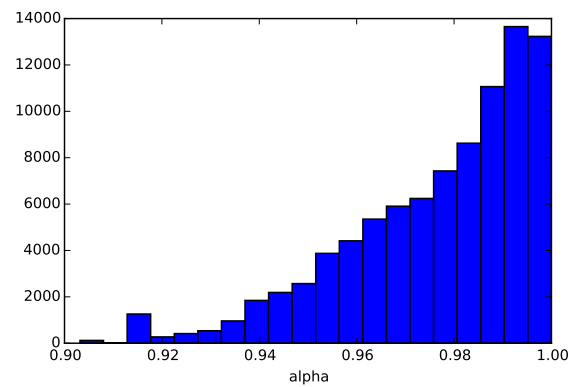


Figura 4.17: Histograma de α .

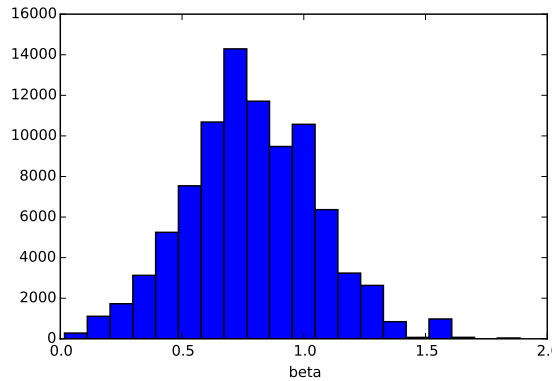


Figura 4.18: Histograma de β .

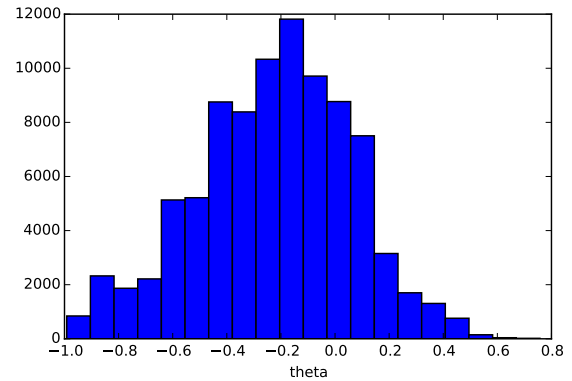


Figura 4.19: Histograma de θ .

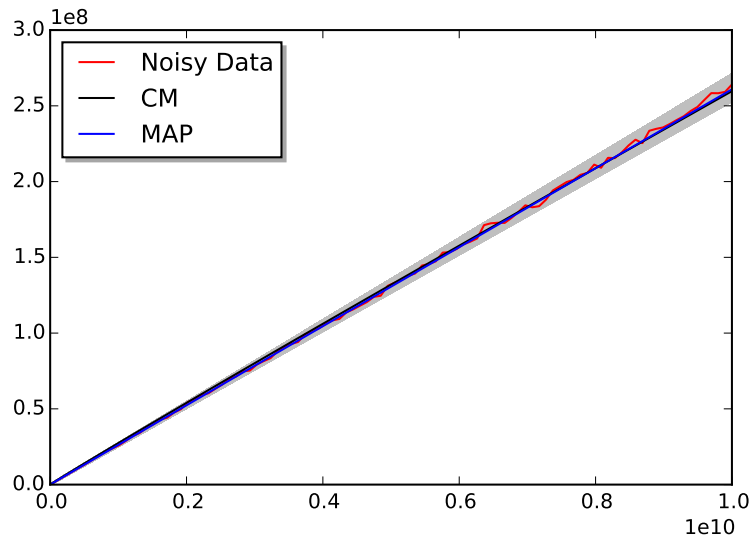


Figura 4.20: Estimadores y datos ruidosos.

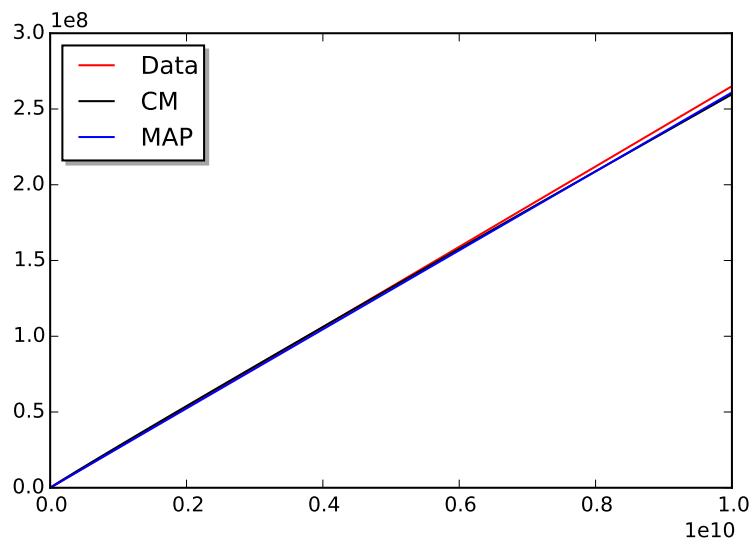


Figura 4.21: Estimadores y datos sin ruido.

- Caso 3: $d = 2$, $\alpha = 0,9$, $\beta = 1,25$ y $\theta = -0,25$.

Resultados:

	α	β	θ	Error rel. prom.
CM	0,90242768	1,04082675	-0,01257537	0,00288
MAP	0,90498434	1,04119505	0,02307665	0,00994

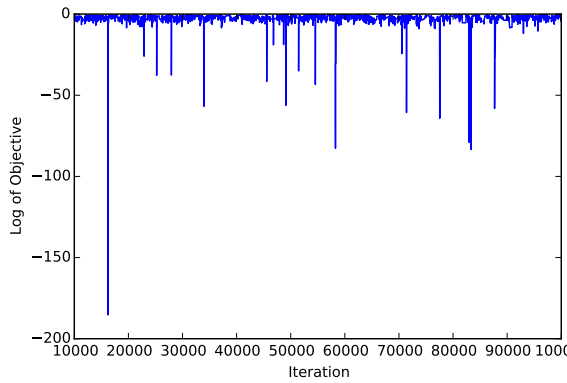


Figura 4.22: Análisis de convergencia.

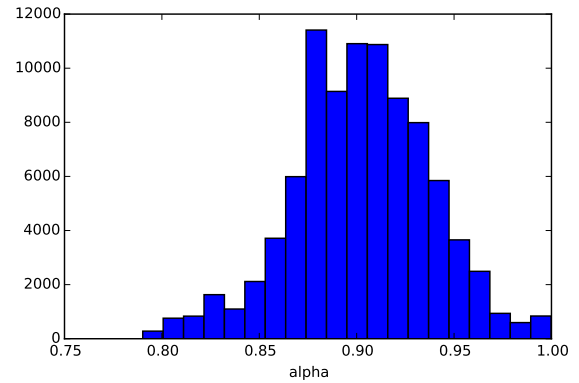


Figura 4.23: Histograma de α .

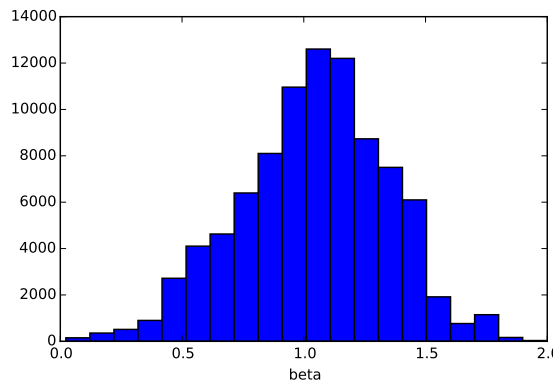


Figura 4.24: Histograma de β .

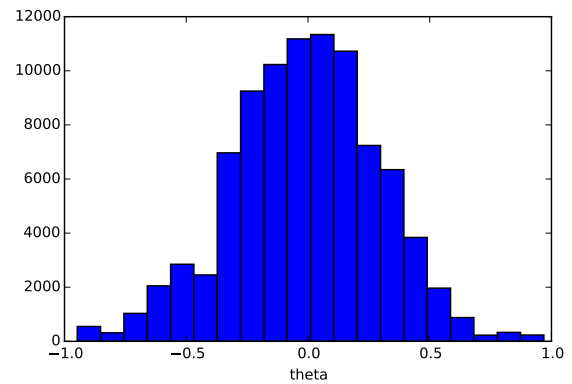


Figura 4.25: Histograma de θ .

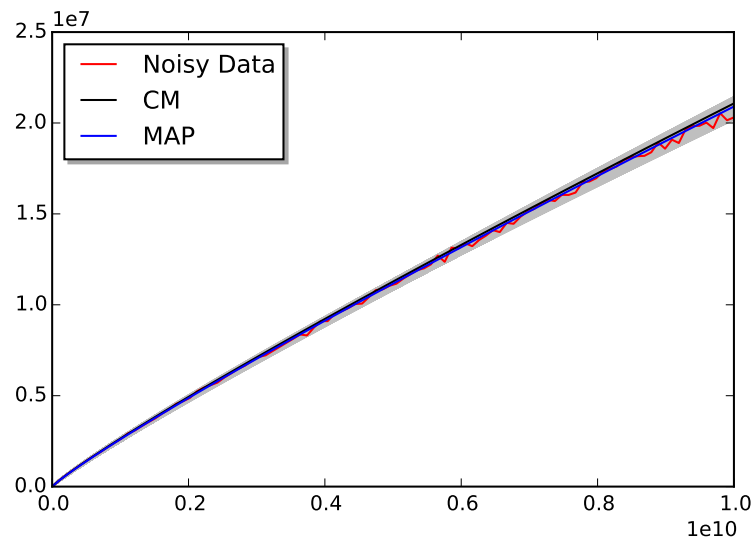


Figura 4.26: Estimadores y datos ruidosos.

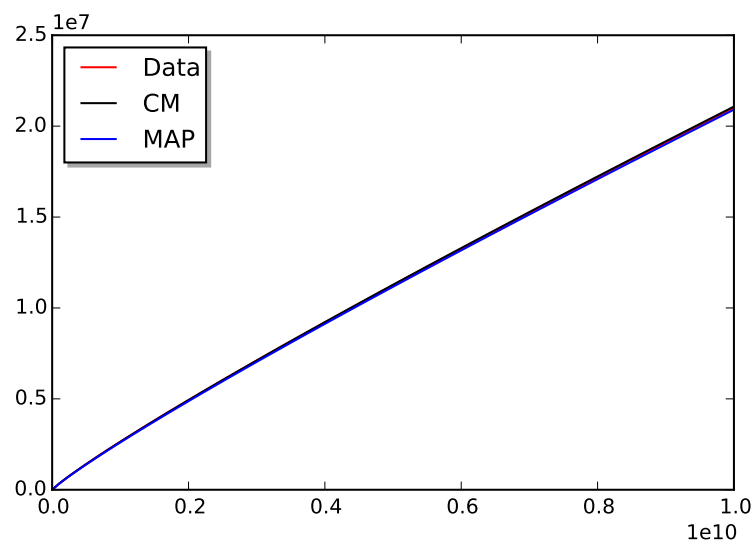


Figura 4.27: Estimadores y datos sin ruido.

- Caso 4: $d = 1,95$, $\alpha = 0,9$, $\beta = 1,2$ y $\theta = -0,25$.

Resultados:

	α	β	θ	Error rel. prom.
CM	0,90569393	1,00174048	0,02051438	0,00842
MAP	0,90856766	1,02524452	0,0364324	0,01777

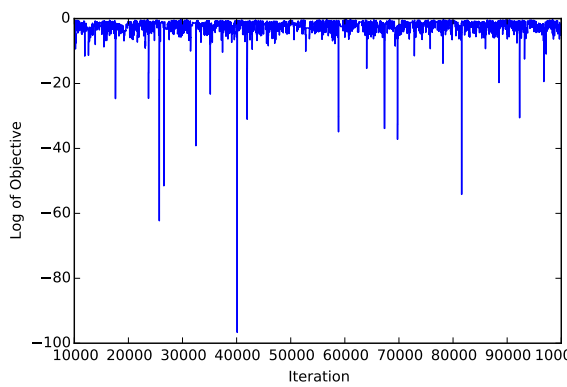


Figura 4.28: Análisis de convergencia.

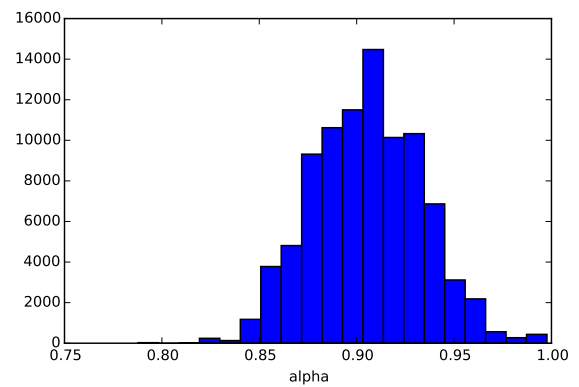


Figura 4.29: Histograma de α .

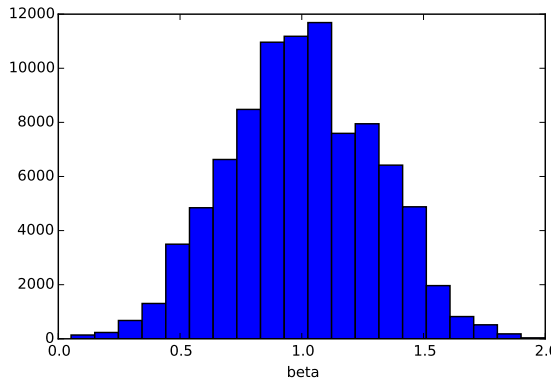


Figura 4.30: Histograma de β .

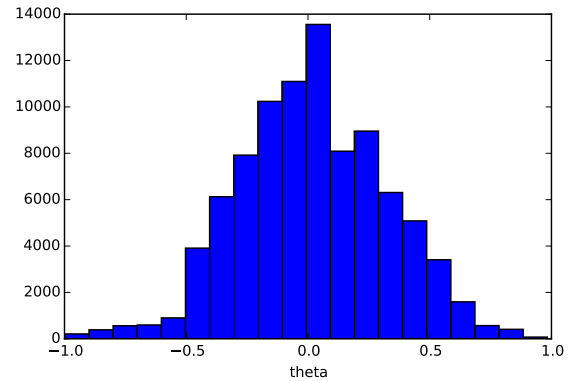


Figura 4.31: Histograma de θ .

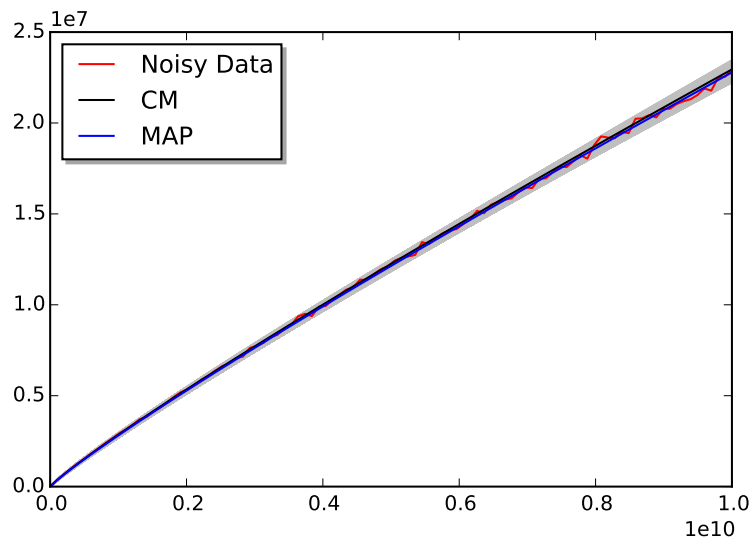


Figura 4.32: Estimadores y datos ruidosos.

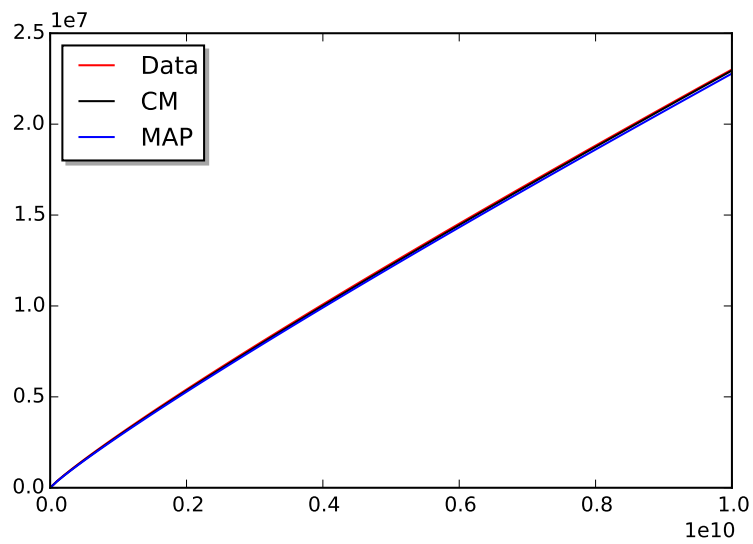


Figura 4.33: Estimadores y datos sin ruido.

Convergencia de la cadena

Dos indicadores de que el método está convergiendo son las cadenas y la autocorrelación en cada una de las cadenas de parámetros. En la primera opción se debe observar que se esta mezclando bien todo el espacio del parámetro. En la segunda, se espera que la autocorrelación disminuya con forme se aumenta el tamaño de la muestra.

Las dos opciones se analizaron nuevamente utilizando el Caso 1: $d = 1,85$, $\alpha = 0,9$, $\beta = 1,1$ y $\theta = -0,25$, se obtuvo:

Cadenas:

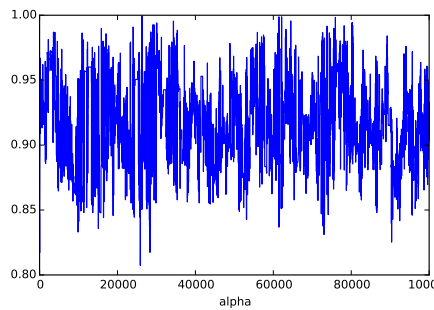


Figura 4.34: Cadena para α .

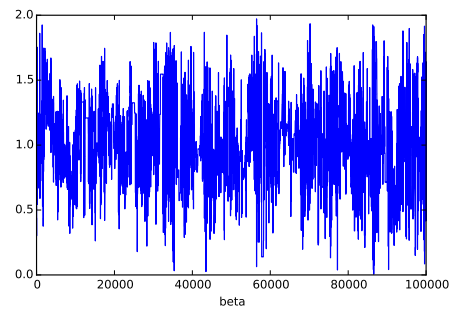


Figura 4.35: Cadena para β .

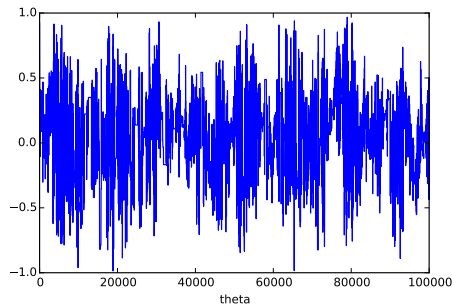


Figura 4.36: Cadena para θ .

Autocorrelación: una forma de tener una idea de la convergencia del muestreo del MCMC es estudiando la autocorrelación entre las muestras de la cadena.

El retraso k de autocorrelación, ρ_k , está definido como:

$$\rho_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} (x_i - \bar{x})(x_{i+k} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Se espera que el ρ_k sea pequeño conforme k crece.

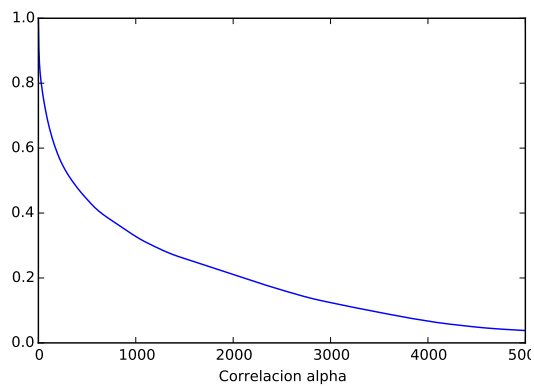


Figura 4.37: Correlación en cadena de α .

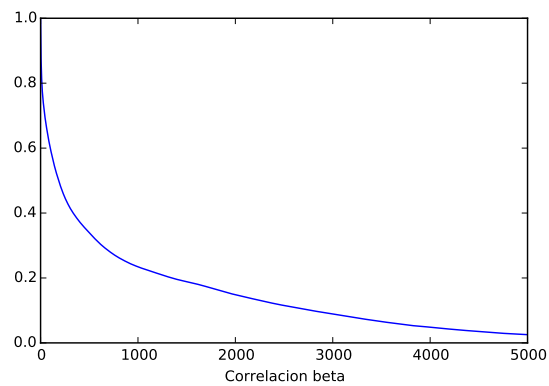


Figura 4.38: Correlación en cadena de β .

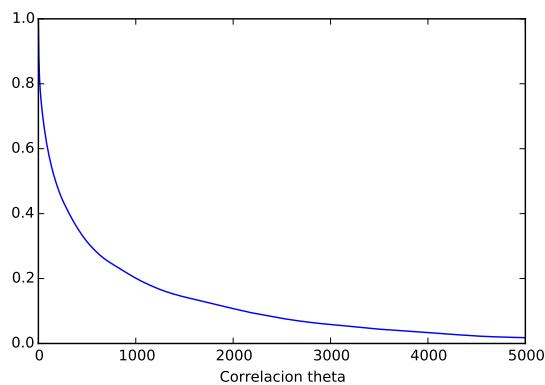


Figura 4.39: Correlación en cadena de θ .

4.3.1. Comentarios

- Los resultados presentados en este capítulo se basaron en una cantidad de 100 *mediciones* ruidosas (datos sintéticos). Esta cantidad se determinó así pues se realizaron pruebas con más datos y la aproximación no mejora considerablemente.
- Las aproximaciones de los parámetros son buenas, sin embargo, el parámetro θ tiene el error relativo más grande con los estimadores utilizados. Esto podría Mejorarse fijando uno de los otros parámetros e intentando estimar los otros dos.
- Los cambios en el intervalo de tiempo pueden representar una diferencia significativa en el trabajo de campo, por lo que se probó para diferentes magnitudes de estos intervalos. Los resultados fueron similares en cuanto al error relativo.
- Para que se *observe* convergencia del **MCMC** se necesitan bastante iteraciones. Con una cantidad de datos grandes en un intervalo de tiempo grande, se consumen bastantes recursos y tiempo. Sin embargo, tanto las cadenas como la autocorrelación señalan la convergencia del método.

Bibliografía

- [1] Abernethy, R. (1976). Production increase of heavy oils by electromagnetic heating. *Journal of Canadian Petroleum Technology* 15.03.
- [2] Beyer, L. y Clutson, F. (NA). Density and porosity of oil reservoirs and overlying formations from borehole gravity measurements. *United states geological survey*.
- [3] Camacho-Velázquez, R., Fuentes-Cruz, G., y Vásquez-Cruz, M. (2008). Decline curve analysis of fractured reservoirs with fractal geometry. *SPE Res. Eval.* 11(3), 609-619.
- [4] Carrizales, M. y Lake, L. (2009). Two-dimensional comsol simulation of heavy-oil recovery by electromagnetic heating. *COMSOL Conference held in Boston, Massachusetts, USA*.
- [5] Chen, Z. (1989). Transient flow of slightly compressible fluids through double-porosity, double-permeability systems - a state of the art review. *Transport in Porous Media*.
- [6] Chen, Z. (2007). *Reservoir Simulation*.
- [7] Chen, Z., Huan, G., y Ma, Y. (2006). *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*.

- [8] Christen, A. y Fox, C. (2015). <http://www.cimat.mx/jac/twalk/>. Consultado el 14-04-2015.
- [9] Davletbaev, A., Kovaleva, L., y Babadagli, T. ((2011): 646-653.). Mathematical modeling and field application of heavy oil recovery by radio-frequency electromagnetic stimulation. *Journal of Petroleum Science and Engineering* 78.3.
- [10] Elam, S., Tokura, I., y Saito, K. (1989). Thermal conductivity of crude oils. *University of Kentucky, Lexington*.
- [11] Energy-Information-Administration (2014). <http://www.eia.gov/countries/cab.cfm?fips=mx>. Consultado el 21 de noviembre de 2014.
- [12] Hassanzadeh, H. y Pooladi-Darvish, M. (NA). Comparison of different numerical laplace inversion methods for engineering applications. *Department of Chemical Petroleum Engineering, University of Calgary, Canada*.
- [13] Hoog, R. (1982). An improved method for numerical inversion of laplace transforms. *Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM*.
- [14] Kaipio, J. y Somersalo, E. (2005). *Statistical and Computational Inverse Problems*. Springer.
- [15] Lake, L. (1989). *Enhanced Oil Recovery*.
- [16] Metzler, R., Glöckle, W., y Nonnenmacher, T. (1994). Fractional model equation for anomalous diffusion. *Physica A(211):13-24*.
- [17] Moreles, M., Peña, J., Botello, S., y Iturriaga, R. (2013). On modeling flow in fractal media form fractional continuum mechanics and fractal geometry. *Transp Porous Med* 99:161-174.

- [18] Nield, D. y Bejan, A. (2013). *Convection in Porous Media*.
- [19] Petrowiki (2015). http://petrowiki.org/thermal_recovery_by_steam_injection. Consultado el 20-05-2015.
- [20] Quarteroni, A., Sacco, R., y Saleri, F. (2007). *Numerical Mathematics*. Springer.