

O teste de Bickel-Rosenblatt com janela fixa para uma hipótese de uniformidade

Carlos Tenreiro

CMUC e DMUC, Universidade de Coimbra

Resumo: O teste de ajustamento de Bickel-Rosenblatt com janela fixa foi introduzido por Fan em 1998 [*Econometric Theory* 14, 604–621]. Apesar das suas propriedades assintóticas terem sido estudadas por diversos autores para o teste de uma hipótese nula geral, o seu comportamento assintótico e a distância finita depende da hipótese nula em análise. Centrando a nossa atenção no teste de uma hipótese de uniformidade, apresentamos neste trabalho uma descrição do comportamento assintótico e não-assintótico do teste de Bickel-Rosenblatt em função da janela h .

Palavras-chave: Teste de ajustamento, estimador do núcleo, teste de Bickel-Rosenblatt, teste de uniformidade, eficiência de Bahadur.

Abstract: The Bickel-Rosenblatt goodness-of-fit test with fixed bandwidth was introduced by Fan in 1998 [*Econometric Theory* 14, 604–621]. Although its asymptotic properties have been studied by several authors, its asymptotic and finite sample performance depends on the considered null hypothesis. Restricting our attention to the test of an uniformity hypothesis, we present in this work a description of the asymptotic and finite sample behaviour of the Bickel-Rosenblatt test as a function of the bandwidth h .

Keywords: Goodness-of-fit test, kernel density estimator, Bickel-Rosenblatt test, uniformity test, Bahadur efficiency.

1 Introdução

Observadas realizações independentes das variáveis aleatórias reais X_1, \dots, X_n , que supomos independentes e identicamente distribuídas com densidade desconhecida f , o teste clássico de Bickel-Rosenblatt (cf. Bickel e Rosenblatt [2]) para testar

$$H_0 : f = f_0 \text{ contra } H_1 : f \neq f_0,$$

onde f_0 é uma densidade fixa em \mathbb{R} , é baseado na estatística

$$I_n^2(h_n) = n \int \{f_n(x) - E_0 f_n(x)\}^2 dx,$$

onde f_n é o estimador do núcleo de Parzen-Rosenblatt (cf. Rosenblatt [11] e Parzen [10]) definido, para $x \in \mathbb{R}$, por

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(x - X_i),$$

com K um núcleo em \mathbb{R} , isto é, uma função limitada e integrável em \mathbb{R} , (h_n) , a janela, uma sucessão de números reais estritamente positivos satisfazendo $h_n \rightarrow 0$, $K_{h_n}(\cdot) = K(\cdot/h_n)/h_n$, e $E_0 f_n(x)$ a esperança matemática de $f_n(x)$ sob a hipótese nula,

$$E_0 f_n(x) = \int K_{h_n}(x - y) f_0(y) dy.$$

As propriedades assintóticas do teste clássico de Bickel-Rosenblatt são descritas em Bickel e Rosenblatt [2], Fan [3], Gouriéroux e Tenreiro [5] e Tenreiro [13].

Apesar da condição anterior sobre a janela ser essencial para a convergência do estimador do núcleo para a densidade desconhecida f , Fan [4] mostra que ela não é essencial no contexto dos testes de ajustamento baseados na estatística $I_n^2(h_n)$. Na hipótese da transformada de Fourier de K ser quase em toda a parte não-nula, um teste assintoticamente convergente pode ser obtido a partir da estatística de Bickel-Rosenblatt com janela fixa, isto é,

$$h_n = h > 0, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Para outros trabalhos sobre o teste de Bickel-Rosenblatt com janela fixa ver, por exemplo, Henze e Zirkler [8], Henze e Wagner [7] e Tenreiro [12, 13].

A distribuição assintótica de $I_n^2(h)$ sob a hipótese nula decorre da sua representação como V-estatística degenerada

$$I_n^2(h) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n Q_h(X_i, X_j),$$

com

$$Q_h(u, v) = W_h(u - v) - W_h \star f_0(u) - W_h \star f_0(v) + W_h \star \bar{f}_0 \star f_0(0),$$

para $u, v \in \mathbb{R}$, $h > 0$, e $W = \bar{K} \star K$, onde \star representa o produto de convolução e $\bar{\Psi}(u) = \Psi(-u)$. Assim (cf. Gregory [6]),

$$I_n^2(h) \xrightarrow{d} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,h} Z_k^2,$$

onde $\{Z_k, k \geq 1\}$ são variáveis normais standard i.i.d., e $\{\lambda_{k,h}, k \geq 1\}$, com $\lambda_{1,h} \geq \lambda_{2,h} \geq \dots$, denota a família infinita de valores próprios estritamente positivos do operador integral A_h definido, para $q \in L_2(f_0)$, por

$$(A_h q)(u) = \langle Q_h(u, \cdot), q(\cdot) \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual em $L_2(f_0)$.

Neste trabalho descrevemos propriedades assintóticas e empíricas do teste de Bickel-Rosenblatt com janela fixa para uma hipótese de uniformidade, isto é, tomamos $f_0 = U$, onde U é a densidade uniforme sobre o intervalo $[0, 1]$. Apesar de diversas escolhas simples serem possíveis para K , limitar-nos-emos ao caso em que K é o núcleo normal standard. Comparações com os testes quadráticos clássicos de Anderson-Darling [1] e de Watson [14] baseados na função de distribuição empírica serão também apresentadas.

2 Local exact slopes de Bahadur

Se $\{f(\cdot; \theta) : \theta \in \Theta\}$, onde Θ é um intervalo fechado de números reais, é uma família de densidades de probabilidade contendo U , isto é, $U = f(\cdot; \theta_0)$, para algum $\theta_0 \in \Theta$, é prática usual comparar testes de ajustamento através da comparação dos respectivos *local exact slopes* de Bahadur, $C_{I_n^2(h)}(f(\cdot; \theta))$, quando $\theta \rightarrow \theta_0$ (ver Nikitin [9]). No que se segue consideraremos alternativas locais da forma

$$f(x; \theta) = 1 + \theta P_j(x),$$

para $\theta > 0$ e $0 \leq x \leq 1$, onde P_j é um dos polinómios de Legendre

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \sqrt{3}(2x - 1); \\ P_2(x) &= \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1); \\ P_3(x) &= \sqrt{7}(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1); \\ P_4(x) &= 3(70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1). \end{aligned}$$

Estes quatro polinómios, que pertencem ao espaço tangente a U definido por $H(U) = \{h \in L_2(U) : \langle h, U \rangle = 0\}$, são as componentes principais do teste de Anderson-Darling e descrevem desvios de localização, escala, simetria e forma, respectivamente, relativamente à hipótese nula de uniformidade.

Dos resultados de Tenreiro [12], sabemos que

$$C_{I_n^2(h)}(f(\cdot; \theta)) = \lambda_{1,h}^{-1} \langle W_h \star P_j, P_j \rangle \theta^2 (1 + o(1)), \text{ se } \theta \rightarrow 0,$$

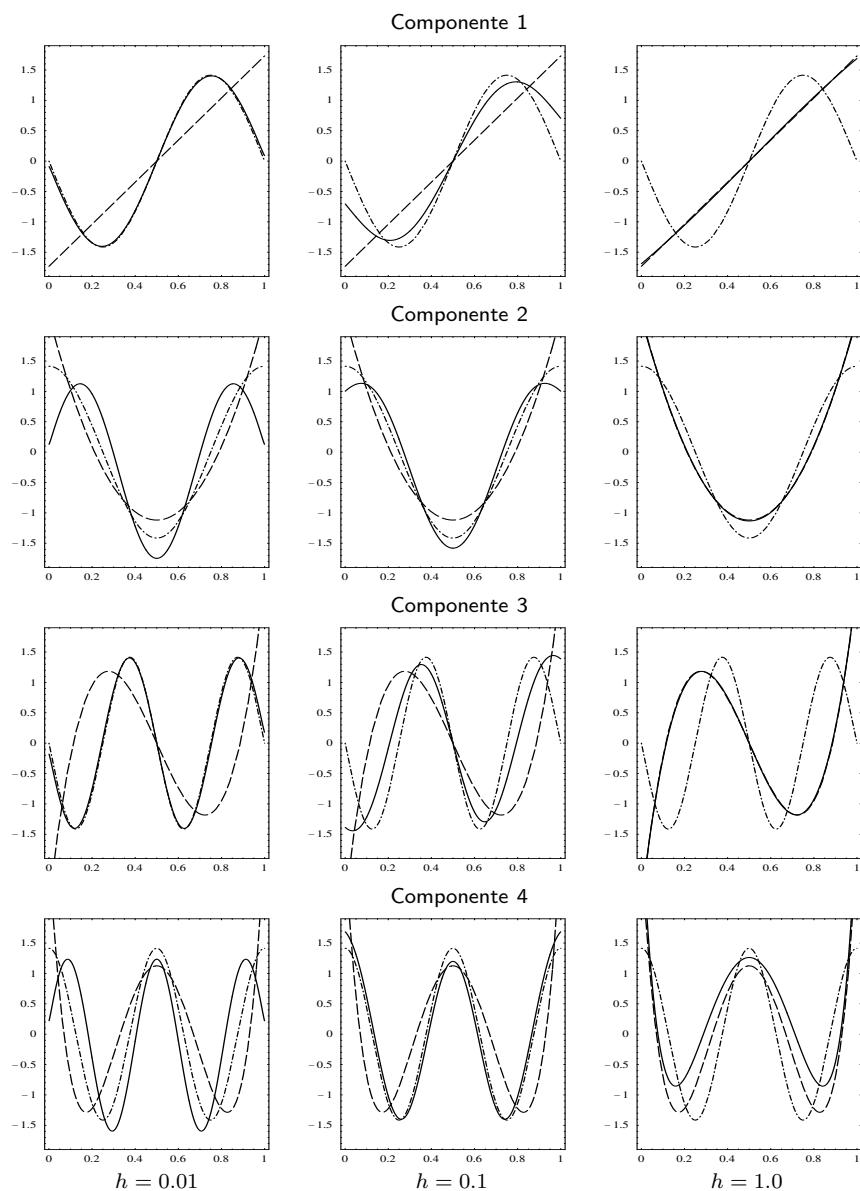
ou ainda,

$$C_{I_n^2(h)}(f(\cdot; \theta)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{1,h}^{-1} \lambda_{k,h} \langle q_{k,h}, P_j \rangle^2 \theta^2 (1 + o(1)), \text{ se } \theta \rightarrow 0,$$

onde as componentes principais $\{q_{k,h}, k \geq 1\}$ são uma base ortonormada do espaço $H(U)$ correspondente aos valores próprios $\{\lambda_{k,h}, k \geq 1\}$, isto é, para todo o k e j , $A_h q_{k,h} = \lambda_{k,h} q_{k,h}$, *q.t.p.*(U) e $\langle q_{k,h}, q_{j,h} \rangle = \delta_{kj}$, onde δ_{kj} é o delta de Kronecker.

Das representações anteriores, e em particular do facto dos valores próprios $(\lambda_{k,h})$ convergirem para zero, é claro que apenas um número finito de direcções alternativas contribuem efectivamente para $C_{I_n^2(h)}(f(\cdot; \theta))$. A questão natural que respondemos a seguir é saber quão rapidamente as direcções principais perdem influência.

Figura 1. Componentes principais para:
 $I_n^2(h)$ —linha contínua; A_n^2 —linha descontinua; U_n^2 —linha descontinua pontuada



O *local exact slope* de Bahadur do teste $I_n^2(h)$ depende das ponderações $\gamma_{k,h} = \lambda_{1,h}^{-1} \lambda_{k,h}$ e das componentes principais $q_{k,h}$. Aproximações numéricas

Tabela 1. Ponderações $\gamma_{k,h} = \lambda_{1,h}^{-1} \lambda_{k,h}$ para $I_n^2(h)$

	$h = 0.01$	$h = 0.1$	$h = 1.0$	A_n^2	U_n^2
$\gamma_{2,h}$	9.96×10^{-1}	7.40×10^{-1}	2.46×10^{-2}	3.33×10^{-1}	1.00×10^{-0}
$\gamma_{3,h}$	9.89×10^{-1}	4.25×10^{-1}	1.80×10^{-4}	1.67×10^{-1}	2.50×10^{-1}
$\gamma_{4,h}$	9.81×10^{-1}	2.40×10^{-1}	2.12×10^{-6}	1.00×10^{-1}	2.50×10^{-1}
$\gamma_{5,h}$	9.70×10^{-1}	1.07×10^{-1}	3.52×10^{-7}	6.67×10^{-2}	1.11×10^{-1}
$\gamma_{6,h}$	9.59×10^{-1}	4.72×10^{-2}	9.04×10^{-9}	4.76×10^{-2}	1.11×10^{-1}
$\gamma_{7,h}$	9.44×10^{-1}	1.69×10^{-2}	5.19×10^{-13}	3.57×10^{-2}	6.25×10^{-2}
$\gamma_{8,h}$	9.30×10^{-1}	6.04×10^{-3}	2.13×10^{-13}	2.78×10^{-2}	6.25×10^{-2}
$\gamma_{9,h}$	9.12×10^{-1}	1.79×10^{-3}	6.91×10^{-16}	2.22×10^{-2}	4.00×10^{-2}
$\gamma_{10,h}$	8.95×10^{-1}	5.35×10^{-4}	2.60×10^{-16}	1.82×10^{-2}	4.00×10^{-2}
$\gamma_{11,h}$	8.75×10^{-1}	1.35×10^{-4}	1.41×10^{-16}	1.52×10^{-2}	2.78×10^{-2}
$\gamma_{12,h}$	8.55×10^{-1}	3.44×10^{-5}	1.39×10^{-16}	1.28×10^{-2}	2.78×10^{-2}

das quatro primeiras componentes principais e das ponderações mais significativas para $h = 0.01, 0.1$ e 1.0 são apresentadas na Figura 1 e na Tabela 1, respectivamente. Para efeitos comparativos, apresentam-se também as componentes principais e ponderações dos testes A_n^2 de Anderson-Darling e U_n^2 de Watson (ver Nikitin [9] sobre os *local exact slopes* de Bahadur destes testes clássicos).

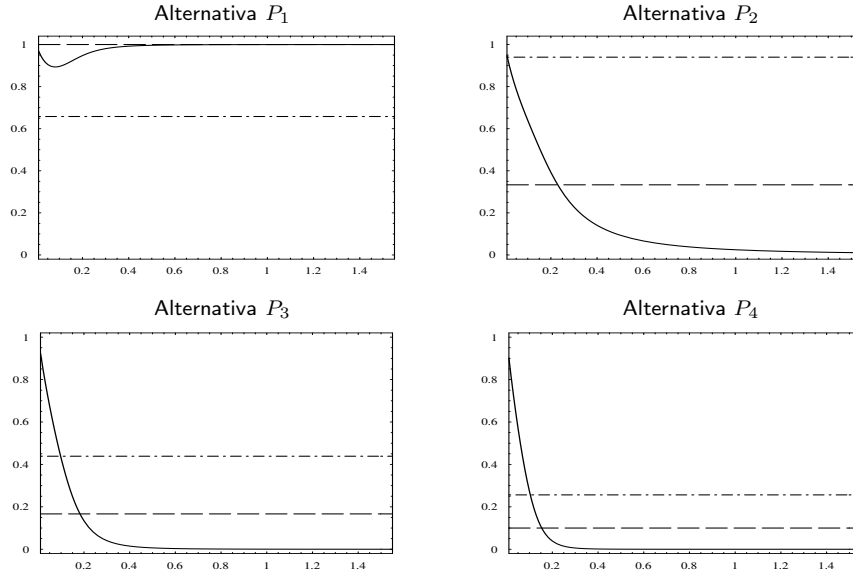
Da Figura 1, e analogamente às componentes principais do teste de Anderson-Darling, parece razoável pensar que, de alguma forma, as quatro primeiras componentes principais do teste $I_n^2(h)$ descrevem desvios de localização, escala, simetria e forma, respectivamente. Assim, tendo em conta a Tabela 1, esperamos que para pequenos valores de h o teste de Bickel-Rosenblatt seja adequado para detectar alternativas outras que as de localização, enquanto que para valores moderados ou grandes de h , ele deverá exclusivamente detectar alternativas de localização.

Estas conclusões são reforçadas pelo traçado dos índices locais de Bahadur (coeficiente de θ^2 nas representações anteriores do *local exact slope* de Bahadur) que apresentamos na Figura 2 para os testes de Bickel-Rosenblatt para uma malha de valores de $h \in [0.01, 1.5]$, bem como para os testes de Anderson-Darling e de Watson.

3 Alguns resultados de simulação

Para examinar o comportamento a distância finita do teste de Bickel-Rosenblatt para diversas escolhas de h , realizámos um estudo de simulação que incluiu os testes $I_n^2(0.02)$ (janela pequena), $I_n^2(0.1)$ (janela média) e $I_n^2(0.5)$ (janela grande). Estes valores de h foram considerados depois dum estudo preliminar com um vasto conjunto de janelas que permitiu identificar comportamentos sistemáticos da potência empírica dos testes de Bickel-Rosenblatt em função de h que estão globalmente de acordo com as conclusões anteriores baseadas nos índices locais de Bahadur.

Figura 2. Índices locais de Bahadur para:
 $I_n^2(h)$ —linha contínua; A_n^2 —linha descontinua; U_n^2 —linha descontinua pontuada



As propriedades de potência dos testes anteriores bem como as dos testes A_n^2 e U_n^2 foram investigadas para os seguintes conjuntos de distribuições alternativas:

1) Alternativas beta

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

para $a, b > 0$, com Γ a função gama.

2) Alternativas de Legendre da forma

$$f(x) = 1 + \rho P_j(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

para $\rho > 0$ e $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, onde P_j é o j -ésimo polinómio de Legendre.

3) Alternativas trigonométricas da forma

$$f(x) = 1 + \rho \cos(\pi j x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

para $\rho > 0$ e $j = 1, 2, 3, 4, 6, 8$.

As alternativas de Legendre permitem-nos descrever desvios relativamente à hipótese nula no que respeita à localização ($j = 1$), escala ($j = 2$), simetria ($j = 3$), forma ($j = 4$) e a momentos de ordem superior ($j = 5, 6$). No caso das alternativas trigonométricas o parâmetro j controla a frequência da alternativa

Tabela 2. Potência empírica ao nível 0.05 para alternativas beta

a	b	μ	σ^2	n	$I_n^2(0.02)$	$I_n^2(0.1)$	$I_n^2(0.5)$	A_n^2	U_n^2
Alternativas beta assimétricas									
0.5	0.75	0.4	0.107	20	0.35	0.41	0.41	0.60	0.36
				40	0.62	0.68	0.62	0.82	0.62
0.75	1.125	0.4	0.083	20	0.17	0.24	0.39	0.37	0.15
				40	0.30	0.45	0.60	0.62	0.27
1.0	1.5	0.4	0.069	20	0.15	0.27	0.36	0.32	0.18
				40	0.25	0.50	0.62	0.61	0.33
1.5	2.25	0.4	0.051	20	0.23	0.42	0.36	0.34	0.43
				40	0.49	0.77	0.69	0.76	0.77
2.0	3.0	0.4	0.040	20	0.39	0.68	0.38	0.46	0.73
				40	0.81	0.97	0.81	0.94	0.97
2.5	3.75	0.4	0.033	20	0.56	0.85	0.42	0.59	0.90
				40	0.95	1.00	0.86	0.99	1.00
Alternativas beta simétricas									
0.5	0.5	0.5	0.125	20	0.33	0.33	0.16	0.54	0.44
				40	0.60	0.59	0.18	0.79	0.74
0.75	0.75	0.5	0.100	40	0.12	0.13	0.09	0.16	0.18
				60	0.16	0.18	0.09	0.21	0.25
1.5	1.5	0.5	0.063	40	0.14	0.19	0.04	0.06	0.28
				60	0.21	0.28	0.04	0.11	0.41
2.0	2.0	0.5	0.050	20	0.21	0.29	0.03	0.04	0.39
				40	0.40	0.57	0.03	0.23	0.74
2.5	2.5	0.5	0.042	20	0.31	0.46	0.02	0.04	0.39
				40	0.69	0.87	0.03	0.56	0.95
3.5	3.5	0.5	0.031	20	0.47	0.67	0.02	0.16	0.82
				40	0.96	0.99	0.03	0.95	1.00

e permite avaliar o comportamento do teste em função da frequência da alternativa. Quer para as alternativas de Legendre, quer para as trigonométricas, o parâmetro ρ define a distância L_2 da alternativa à hipótese nula. Vários valores de ρ foram considerados tendo-se observado resultados qualitativamente semelhantes. Finalmente, os vários valores considerados para os parâmetros $a, b > 0$ conduziram a alternativas beta simétricas, quando $a = b$, e assimétricas, quando $a \neq b$.

Os resultados de potência que apresentamos nas Tabelas 2 e 3 ao nível 0.05 foram baseados em 2000 amostras simuladas de tamanho n , para $n = 20, 40$ ou 60 . Resultados semelhantes foram obtidos para os níveis 0.01 e 0.1. Os valores críticos das diversas estatísticas de teste foram obtidos por simulação a partir de 10^4 amostras de tamanho n da distribuição uniforme.

Os resultados empíricos obtidos estão, na generalidade, em conformidade com as conclusões baseadas nos índices locais de Bahadur. As exceções a esta regra geral foram os resultados obtidos para as alternativas de baixa frequência quando $h = 0.02$. Tendo por base os índices locais de Bahadur seria de esperar

Tabela 3. Potência empírica ao nível 0.05 para alternativas de Legendre e trigonométricas

ρ	j	μ	σ^2	n	$I_n^2(0.02)$	$I_n^2(0.1)$	$I_n^2(0.5)$	A_n^2	U_n^2
Alternativas de Legendre									
0.3	1	0.587	0.076	20	0.13	0.22	0.30	0.27	0.15
				60	0.29	0.53	0.66	0.63	0.37
0.3	2	0.5	0.105	20	0.12	0.15	0.08	0.14	0.19
				60	0.28	0.41	0.11	0.29	0.51
0.3	3	0.5	0.083	20	0.10	0.11	0.06	0.07	0.11
				60	0.25	0.26	0.06	0.11	0.25
0.3	4	0.5	0.083	20	0.10	0.09	0.05	0.07	0.08
				60	0.25	0.16	0.05	0.09	0.13
0.3	5	0.5	0.083	20	0.10	0.07	0.05	0.06	0.07
				60	0.23	0.10	0.05	0.07	0.09
0.3	6	0.5	0.083	20	0.10	0.05	0.06	0.06	0.05
				60	0.22	0.08	0.05	0.06	0.08
Alternativas trigonométricas									
1.0	1	0.297	0.042	20	0.55	0.90	0.95	0.94	0.74
				40	0.95	1.00	1.00	1.00	0.98
1.0	2	0.5	0.134	20	0.55	0.85	0.20	0.55	0.89
				40	0.95	1.00	0.28	0.93	1.00
1.0	3	0.477	0.083	20	0.53	0.57	0.07	0.16	0.40
				40	0.94	0.96	0.07	0.43	0.82
1.0	4	0.5	0.096	20	0.54	0.27	0.08	0.17	0.19
				40	0.94	0.69	0.06	0.28	0.59
1.0	6	0.5	0.089	20	0.49	0.07	0.06	0.10	0.10
				40	0.91	0.10	0.07	0.15	0.18
1.0	8	0.5	0.086	20	0.43	0.05	0.06	0.08	0.07
				40	0.87	0.05	0.05	0.10	0.10

melhores resultados do teste de Bickel-Rosenblatt $I_n^2(0.02)$ na detecção de tais alternativas.

O teste de Bickel-Rosenblatt com $h = 0.5$ revela bons resultados para alternativas puras de localização. No entanto, o teste de Anderson-Darling obteve, em geral, melhores resultados que $I_n^2(0.5)$ para o conjunto das alternativas consideradas. Para $h = 0.1$ o teste de Bickel-Rosenblatt atinge bons resultados para alternativas em momentos de ordem inferior (beta e Legendre com $j \leq 3$) e também para alternativas de baixa frequência (trigonométricas com $j \leq 3$). O teste $I_n^2(0.1)$ é para este tipo de distribuições uma alternativa válida aos testes A_n^2 e U_n^2 . Nenhum dos testes anteriores é adequado para a detecção de desvios em momentos de ordem superior (Legendre com $j > 3$) e de alta frequência (trigonométricas com $j > 3$). Para este tipo de alternativas o teste $I_n^2(0.02)$ obteve excelentes resultados sendo claramente superior aos restantes testes que considerámos.

Referências

- [1] Anderson, T.W., Darling, D.A. (1954). A test of goodness of fit. *J. Amer. Statist. Assoc.* 49, 765–769.
- [2] Bickel, P.J., Rosenblatt, M. (1973). On some global measures of the deviations of density function estimates. *Ann. Statist.* 1, 1071–1095.
- [3] Fan, Y. (1994). Testing the goodness of fit of a parametric density function by kernel method. *Econometric Theory* 10, 316–356.
- [4] Fan, Y. (1998). Goodness-of-fit tests based on kernel density estimators with fixed smoothing parameters. *Econometric Theory* 14, 604–621.
- [5] Gouriéroux, C., Tenreiro, C. (2001). Local power properties of kernel based goodness of fit tests. *J. Multivariate Anal.* 78, 161–190.
- [6] Gregory, G.G. (1977). Large sample theory for U -statistics and tests of fit. *Ann. Statist.* 5, 110–123.
- [7] Henze, N., Wagner, T. (1997). A new approach to the BHEP tests for multivariate normality. *J. Multivariate Anal.* 62, 1–23.
- [8] Henze, N., Zirkler, B. (1990). A class of invariante consistent tests for multivariate normality. *Comm. Stat. Theory Methods* 19, 3595–3617.
- [9] Nikitin, Y. (1995). *Asymptotic Efficiency of Nonparametric Tests*. Cambridge University Press.
- [10] Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *Ann. Math. Statist.* 33, 1065–1076.
- [11] Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some non-parametric estimates of a density function. *Ann. Math. Statist.* 27, 832–837.
- [12] Tenreiro, C. (2005). On the role played by the fixed bandwidth in the Bickel-Rosenblatt goodness-of-fit test. *SORT* 29, 201–216.
- [13] Tenreiro, C. (2007). On the asymptotic behaviour of location-scale invariant Bickel-Rosenblatt tests. *J. Statist. Plan. Inference* 137, 103–116.
- [14] Watson, G.S. (1961). Goodness-of-fit tests on a circle. *Biometrika* 48, 109–114.