I Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística
A Estatística e o Futuro e o Futuro da Estatística
Vimeiro, 14 a 17 de Junho de 1993

O Teste de Ajustamento de Bickel-Rosenblatt Generalizado a Processos Misturadores

Carlos Tenreiro
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

Resumo: Neste artigo estudamos um teste de ajustamento a uma dada densidade baseado no estimador do núcleo. Os resultados que aqui apresentamos são generalizações, ao caso multivariado e num contexto de independência assintótica, dos obtidos por Bickel e Rosenblatt (Ann.Stat., 1973, 1071-1095).

1. INTRODUÇÃO

Seja $(X_i, i\in \mathbb{Z})$ um processo estocástico de dimensão d fortemente estacionário, de lei marginal absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^d$. Denotemos por f a densidade marginal do processo.

Proposto por Rosenblatt (1956) e estudado por Parzen (1962), o estimador do núcleo da densidade f é definido por

$$f_n(x)=\frac{1}{nh^d}\sum_{i=1}^{n} K(\frac{x-X_i}{h}),\ x\in \mathbb{R}^d,$$

onde $h=h_n$ é um número real estritamente positivo dependente de n e K é um núcleo em $\mathbb{R}^d$, isto é, uma aplicação integrável de $\mathbb{R}^d$ em $\mathbb{R}$, tal que $\int K(u)du=1$ (quando não especificada, subentende-se que a região de integração é $\mathbb{R}^d$).

Neste artigo, consideramos o problema de teste da hipótese

$$H_0: f = f_0$$

com nível assintótico α, onde f_0 é uma densidade que supomos conhecida.

Com esse objectivo, estudamos o comportamento em lei da variável aleatória

$$T_n=nh^{d/2}\{\int \{f_n(x)-E_0f_n(x)\}^2dx - \frac{1}{nh^d}\int K^2(u)du\},$$

onde $E_0f_n(x)$ designa a esperança matemática de $f_n(x)$ sob H_0.

A lei limite desta variável aleatória (v.a.) foi estudada por diversos autores. No caso real, Bickel e Rosenblatt (1973) utilizaram uma técnica baseada na aproximação forte

Trabalho parcialmente subsidiado pela JNICT

de Brillinger, mais tarde melhorada por Komlós, Major e Tusnády, para a função de repartição empírica (ver Bickel e Rosenblatt, 1973, e Rosenblatt, 1976, para resultados e referências). Em 1984, Hall aborda o problema anterior no contexto das U-estatísticas degeneradas, obtendo a lei limite da estatística T_n para o caso multivariado sem precisar de impôr condições restritivas sobre a densidade f nem sobre a sucessão (h_n), o que acontecia nos resultados de Bickel e Rosenblatt. Todos estes resultados foram obtidos num quadro de independência.

Neste artigo generalizamos os resultados precedentes a variáveis aleatórias dependentes.

A lei limite da v.a. T_n, sob a hipótese nula, é obtida em duas etapas: na primeira, estudamos o comportamento assintótico da v.a.

$$nh^{d/2}\{\int \{f_n(x)-E_0f_n(x)\}^2dx -E_0 \int \{f_n(x)-E_0f_n(x)\}^2dx \},$$

cuja lei limite foi obtida por Takahata e Yoshihara (1987) para uma subclasse dos processos fortemente estacionários e absolutamente regulares. Deste resultado, apresentamos uma prova utilizando técnicas das U-estatísticas degeneradas que desenvolvemos na Secção 2. Numa segunda etapa, determinamos um desenvolvimento assintótico para $E_0\int \{f_n(x)-E_0f_n(x)\}^2dx$ com uma ordem de aproximação superior a $(nh^{d/2})^{-1}$. Necessitamos assim de um desenvolvimento mais preciso que o obtido por Meloche (1990).

A potência do teste obtido a partir dos resultados anteriores, cuja região crítica é apresentada na Secção 4, será analisada na Secção 5 através do estudo do comportamento da estatística de teste sob uma sucessão de alternativas locais, convergente para f_0, da forma:

$$g_n(x) = f_0(x) + a_ns(x) + o(a_n)s_n(x), \tag{1.1}$$

para $x\in \mathbb{R}^d$, onde (a_n) é uma sucessão de números reais convergente para zero, quando n tende para infinito e as funções s e s_n, $n\in \mathbb{N}$, satisfazem determinadas condições que precisaremos mais tarde.

Se considerarmos uma alternativa local g_n^1 da forma (1.1) com $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\ h^{d/4}}$, o teste proposto distingue entre g_n^1 e f_0. Se g_n^2 é uma alternativa local da forma (1.1) com $\sqrt{n}\ h^{d/4}\ a_n \to 0$, $n \to +\infty$, convergindo assim mais rapidamente para f_0 do que g_n^1, o teste já não distingue entre g_n^2 e f_0. Se $\sqrt{n}\ h^{d/4}\ a_n \to +\infty$, $n \to +\infty$, a potência do teste tende para 1.

As hipóteses sobre o processo observado, o núcleo e a sucessão h_n, necessárias à obtenção dos resultados anteriores são apresentadas na Secção 3.

2. TEOREMA DE LIMITE CENTRAL PARA U-ESTATÍSTICAS DEGENERADAS

Seja $(X_{in}, i\in \mathbb{Z})_{n\in \mathbb{N}}$ uma sucessão de processos estocásticos de dimensão d fortemente estacionários. Seja $F_i^j(n)$, $i,j\in \mathbb{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}$, a tribo gerada pelas variáveis aleatórias $\{X_{kn}, i \leq k \leq j\}$. Para cada $n\in \mathbb{N}$, a dependência entre o passado $F_{-\infty}^0(n)$ e o futuro $F_i^{+\infty}(n)$ pode ser medida por

$$\beta_n(i)=E[\sup_{A\in F_i^{+\infty}(n)} | P(A | F_{-\infty}^0(n)) - P(A) |], \tag{2.1}$$

(ver Volkonskii e Rozanov, 1959). Suponhamos que cada processo $(X_{in}, i\in \mathbb{Z})$ é β-misturador (ou absolutamente regular), ou seja, que $\beta_n(i)$ converge para zero quando i tende para infinito; mais precisamente, admitamos que existem $C>0$ e $\rho\in]0,1[$ tais que

$$\beta_n(i) \leq C\rho^i, \tag{2.2}$$

para todo o $i\in \mathbb{Z}$ e $n\in \mathbb{N}$ (ver Bradley, 1986, para referências e exemplos de processos que satisfazem as condições precedentes).

Nesta secção estudamos o comportamento em lei da U-estatística definida por

$$h_n = \frac{1}{n} \sum_{1\leq j<i\leq n} \{ H_n(X_{in},X_{jn}) - EH_n(X_{in},X_{jn}) \},$$

onde $(H_n(\cdot,\cdot), n\in \mathbb{N})$ é uma sucessão de aplicações simétricas de $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ em $\mathbb{R}$, tais que $E[H_n(X_{0n},y)]=0$ para todo o $n\in \mathbb{N}$ e $y\in \mathbb{R}^d$.

Para $r > 0$ e $n\in \mathbb{N}$, consideremos as notações seguintes:

$$u_n(r)=\max\{ \max_{1\leq i\leq n} \|H_n(X_{in},X_{0n})\|_r , \|H_n(Y_n,Z_n)\|_r\},$$

$$v_n(r)=\max\{ \max_{1\leq i\leq n} \|G_{n0}(X_{in},X_{0n})\|_r , \|G_{n0}(Y_n,Z_n)\|_r \},$$

$$w_n(r)=\|G_{n0}(X_{0n},X_{0n})\|_r,$$

$$z_n= \max_{0\leq i\leq n,1\leq j\leq n} \max\{\|G_{nj}(X_{in},X_{0n})\|_2,\|G_{nj}(X_{0n},X_{in})\|_2,\|G_{nj}(Y_n,Z_n)\|_2\},$$

onde Y_n e Z_n são variáveis aleatórias independentes e em distribuição iguais a X_{0n}, $G_{nj}(u,v)=E[H_n(X_{jn},u)H_n(X_{0n},v)]$ para $j\in \mathbb{N}_0$ e $u,v\in \mathbb{R}^d$ e para $r>0$, $\|\xi\|_r=E^{1/r}|\xi|^r$, para toda a variável aleatória ξ tal que $E|\xi|^r<\infty$.

O teorema seguinte, que generaliza ao caso misturador o Teorema 1 de Hall (1984), introduz condições suficientes para a convergência em lei de $\mathcal{H}_n$.

Teorema 2.1: Suponhamos que existem $\delta>0$, $\gamma_0<1/2$, $\gamma_1>0$, tais que, para n suficientemente grande,

i) $u_n(4+\delta) = O(n^{\gamma_0})$,

ii) $v_n(2+ \delta/2) = o(1)$,

iii) $w_n (2+ \delta/2) = o(n^{1/2})$,

iv) $z_n n^{\gamma_1} = O(1)$,

v) $E[H_n(Y_n,Z_n)]^2 = 2\sigma^2 + o(1)$, com $\sigma^2>0$.

Então a distribuição de $\mathcal{H}_n$ é assintoticamente normal de média zero e de variância σ^2.

Demonstração: Seguindo de perto a técnica usada por Takahata e Yoshihara (1987), na qual desempenham um papel fundamental as hipóteses formuladas sobre a estrutura de dependência da sucessão de processos $(X_{in}, i\in \mathbb{Z})_{n\in \mathbb{N}}$, concluímos que a variável aleatória $\mathcal{H}_n$ é em probabilidade, assintoticamente equivalente à martingala:

$$\sum_{s=1}^{k} \{U_{sn}-E[\, U_{sn} \mid X_{1n},\ldots,X_{a_s-m,n}\,]\},$$

onde $U_{sn}= \frac{1}{n} \sum_{i=a_s}^{b_s} \sum_{j=1}^{a_s-m} H_n(X_{in},X_{jn})$, $s=1,2,\ldots,k$, $k=k(n)=[\frac{n}{m+r}]$, $m=m(n)=[n^{\delta_1}]$, $r=r(n)=[n^{\delta_2}]$ com $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$ convenientemente escolhidos e $b_0=0$, $a_i=b_{i-1}+m+1$, $b_i=a_i+r-1$, para $i=1,2,\ldots,k$ (por $[x]$ designamos a parte inteira de x). O resultado pretendido é assim consequência do teorema central limite de Dvoretzky (1972), aplicado à sucessão de variáveis aleatórias duplamente indexadas

$$U_{sn}-E[U_{sn}|X_{1n},\ldots,X_{a_s-m,n}],\quad s=1,2,\ldots,k\ ,\ n=1,2,\ldots. \qquad \blacklozenge$$

3. HIPÓTESES

As hipóteses que a seguir introduzimos serão designadas por (P), (N) e (S).

3.1. Hipóteses sobre o processo (P)

Seja $(X_i, i\in \mathbb{Z})$ um processo estocástico de dimensão d fortemente estacionário. Designemos por $\beta(i)$ o seu coeficiente de mistura de ordem i, definido como em (2.1). Suponhamos que existem $C > 0$ e $\rho\in]0,1[$ tais que

$$\beta(i) \leq C\rho^i, \text{ para todo o } i\in \mathbb{N}. \qquad (3.1)$$

Supomos ainda que os vectores (X_i,X_0), $i\in \mathbb{N}$, admitem versões das densidades $f_{(X_i,X_0)}$, que satisfazem as restrições

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) < \infty$$

e

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \{u|f(u)>0\}, y \in \mathbb{R}^d} f_i(y|x) < \infty,$$

onde f é a densidade de X_0 e $f_i(y|x) = \frac{f_{(X_i,X_0)}(y,x)}{f(x)}$. A primeira destas condições é utilizada com frequência em teoremas de limite central para o erro quadrático integrado, como podemos constatar em Bickel e Rosenblatt (1973), Hall (1984) e Takahata e Yoshihara (1987). A segunda condição é num caso de independência, consequência da primeira, e é neste artigo uma condição importante permitindo por exemplo obter o desenvolvimento assintótico para o erro quadrático médio integrado, a que já fizemos referência na introdução.

3.2. **Hipóteses sobre o núcleo** (N)

Supomos que K é um núcleo limitado sobre $\mathbb{R}^d$, isto é, K satisfaz as condições

$$\int K(u)\, du = 1 \quad \text{e} \quad \sup_{u \in \mathbb{R}^d} |K(u)| < \infty.$$

3.3. **Hipóteses sobre a sucessão** h_n (S)

Suponhamos que

$$nh^d \to +\infty,\ n \to +\infty,$$

e que existe $\gamma \in]0,1[$ tal que

$$\limsup_{n \to +\infty} n^\gamma h^d < \infty. \qquad (3.2)$$

As condições $h \to 0$ e $nh^d \to +\infty$, quando $n \to +\infty$, são clássicas no estudo dos estimadores do núcleo. A condição (3.2) é pouco restritiva, sendo verificada se por exemplo $h = O(n^{-\delta})$, $0 < \delta < \frac{1}{d}$, desde que escolhamos $\gamma \in]0, \delta d]$.

4. O TESTE DA HIPÓTESE H_0

Designemos por ϕ a função de repartição da lei normal centrada e reduzida sobre $\mathbb{R}$ e por H_0^c a hipótese $f \neq f_0$. Por $K * \overline{K}$ denotamos o produto de convolução de K por $\overline{K}$, onde $\overline{K}$ é definida, para $u \in \mathbb{R}^d$, por $\overline{K}(u) = K(-u)$.

Teorema 4.1: Suponhamos satisfeitas as hipóteses (P), (N) e (S). Então

$$\{T_n \geq \phi^{-1}(1-\alpha)\,(2\sigma^2)^{1/2}\}, \tag{4.1}$$

onde

$$\sigma^2 = \int f_0^2(x)\,dx \int (K*\overline{K})^2(z)\,dz, \tag{4.2}$$

é a região crítica dum teste convergente da hipótese H_0 contra H_0^c, de nível assintótico α.

Demonstração: Sendo, para $u,v \in \mathbb{R}^d$, H_n definida por

$$H_n(u,v)=\frac{1}{h^{3d/2}}\int \{K(\tfrac{x-u}{h}) - E_0[K(\tfrac{x-X_0}{h})]\}\{K(\tfrac{x-v}{h}) - E_0[K(\tfrac{x-X_0}{h})]\}dx,$$

é válido o desenvolvimento assintótico

$$\begin{aligned} U_n &= nh^{d/2}\{\int \{f_n(x)-E_0f_n(x)\}^2dx - E_0 \int \{f_n(x)-E_0f_n(x)\}^2dx\} \\ &= \frac{2}{n}\sum_{1\leq j<i\leq n}\{H_n(X_i,X_j) - E_0H_n(X_i,X_j)\}+ o_p(1). \end{aligned}$$

Considerando, para $n\in\mathbb{N}$ e $r > 1$, as sucessões $u_n(r)$, $v_n(r)$, $w_n(r)$ e z_n definidas como na Secção 2 mas para o processo $(X_i, i\in\mathbb{Z})$, e tendo em conta as hipóteses (P) e (N), existe $C > 0$ tal que, para n suficientemente grande,

$$u_n(r) \leq C\,(h^d)^{1/r - 1/2},\ v_n(r) \leq C\,(h^d)^{1/r},\ w_n(r) \leq C \text{ e } z_n \leq C\,h^d .$$

As quatro primeiras condições do Teorema 2.1 são então satisfeitas com $\delta>0$ fixo, $\gamma_0=\frac{2+\delta}{8+2\delta} < \frac{1}{2}$ e $\gamma_1\in\,]0,\gamma]$, onde γ é tal que $\limsup_{n\to+\infty} n^\gamma h^d < \infty$ (hipótese (3.2)). Resta-nos determinar a forma da variância assintótica.

Como

$$\lim_{n\to+\infty} E_0[H_n(Y,Z)]^2 = \sigma^2 = \int f_0^2(x)\,dx \int (K*\overline{K})^2(z)\,dz,$$

onde Y e Z são variáveis aleatórias independentes e em distribuição iguais a X_0, concluímos do Teorema 2.1, que U_n converge em lei, quando n tende para infinito, para a lei normal de média zero e de variância $2\sigma^2$.

Estabeleçamos agora a normalidade assintótica de T_n. Fá-lo-emos, mostrando que as variáveis T_n e U_n são assintoticamente equivalentes.

Tendo em conta, a simetria da função H_n e a estacionaridade forte do processo

$(X_i, i\in\mathbb{Z})$, temos que

$$E_0\int \{f_n(x)-E_0f_n(x)\}^2dx =$$

$$= \frac{1}{nh^d}\int K^2(u)du + O(\frac{1}{n}) + \frac{1}{nh^{d/2}}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, E_0H_n(X_i,X_0),$$

onde da primeira das desigualdades anteriores, e do Lema 1 de Yoshihara (1976), se conclui que para n suficientemente grande e para $r > 1$:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, E_0H_n(X_i,X_0)\right| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |E_0H_n(X_i,X_0)| \leq 4\, C\, (h^d)^{1/r\,-\,1/2}\sum_{i=1}^{n-1} \beta^{(r-1)/r}(i).$$

A convergência exponencial do coeficiente de mistura, permite deduzir a convergência da soma $\sum_{i=1}^{n-1} \beta^{(r-1)/r}(i)$, e assim o termo de covariância é, em módulo, limitado superiormente, por uma sucessão que converge para zero com $\frac{1}{n}$, desde que $r < 2$.

Podemos então escrever:

$$E_0\int \{f_n(x)-E_0f_n(x)\}^2dx = \frac{1}{nh^d}\int K^2(u)du + o(\frac{1}{nh^{d/2}}),$$

o que permite concluir que a v.a. T_n é assintoticamente equivalente a U_n. Deste modo, (4.1) é a região crítica dum teste da hipótese H_0, de nível assintótico α.

De forma a obtermos a convergência do teste, suponhamos que $(X_i, i\in\mathbb{Z})$ tem densidade marginal g . Assim, como

$$\int \{f_n(x)-E_0f_n(x)\}^2dx = \int \{g(x)-f_0(x)\}^2dx + o_p(1),$$

T_n converge em probabilidade para $+\infty$, quando n tende para infinito. ♦

Observação 4.2: O teste de região crítica (4.1) tem nível assintótico α; seria obviamente interessante conhecer a influência duma escolha adequada de h_n na forma como o nível do teste se aproxima de α, à medida que n aumenta. A realização de estudos de simulação será importante na abordagem deste problema.

5. POTÊNCIA LOCAL DO TESTE

Nesta secção supomos que $(X_i, i\in\mathbb{Z})$ é um processo de dimensão d fortemente estacionário, sendo f_0 a sua densidade marginal. De forma a analisarmos a potência local do teste construído a partir de T_n, vamos estudar o comportamento da estatística de teste sob uma sucessão de alternativas locais, convergente para f_0, da forma:

$$g_n(x) = f_0(x) + a_ns(x) + o(a_n)s_n(x), \tag{5.1}$$

para $x\in\mathbb{R}^d$, onde

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |s(x)| < \infty, \ \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |s_n(x)| < \infty, \tag{5.2}$$

$$\int |s(x)|\, dx < \infty, \ \sup_{n\in\mathbb{N}} \int |s_n(x)|\, dx < \infty, \tag{5.3}$$

e (a_n) é uma sucessão que tende para zero, quando n tende para infinito.
As hipotéses seguintes serão designadas por (AL).

5.1. Hipóteses sobre a sucessão de alternativas locais (AL)

Seja $(X_{in}, i\in\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de processos estocásticos de dimensão d, fortemente estacionários e β-misturadores, cujos coeficientes de mistura definidos por (2.1) satisfazem (2.2). Para $n\in\mathbb{N}$, seja g_n, definida por (5.1), a densidade marginal do processo $(X_{in}, i\in\mathbb{Z})$; designemos por $g_{in}(\cdot|x)$, a densidade da lei de $X_{in} \mid X_{on}=x$. Supomos ainda que

$$\sup_{n,i\in\mathbb{N}} \ \sup_{x\in\{u|g_n(u)>0\}, y\in\mathbb{R}^d} g_{in}(y|x) < \infty.$$

Observação 5.1: As condições anteriores, com excepção da (5.1), são satisfeitas se considerarmos, para cada $i\in\mathbb{Z}$ e $n\in\mathbb{N}$, $X_{in} = X_i+\delta_n Z_i$, onde $(X_i, i\in\mathbb{Z})$ satisfaz a condição (P), (δ_n) tende para zero, quando n tende para infinito, e $(Z_i, i\in\mathbb{Z})$ é um processo fortemente estacionário de dimensão d, independente de $(X_i, i\in\mathbb{Z})$ que possui um coeficiente de mistura que satisfaz (3.1). Adequadas condições de regularidade sobre f_0 e de existência de momentos de terceira ordem de Z_0, são ainda necessárias para obtermos a decomposição (5.1).

5.2. Estudo da potência

Sejam

$$T_{nn}=nh^{d/2}\{\int \{f_{nn}(x)-E_0f_n(x)\}^2dx - \frac{1}{nh^d}\int K^2(u)du \},$$

onde f_{nn} é definido, para $n\in\mathbb{N}$ e $x\in\mathbb{R}^d$, por

$$f_{nn}(x)=\frac{1}{nh^d}\sum_{i=1}^{n} K(\frac{x-X_{in}}{h}).$$

Neste parágrafo σ^2 é definido pela fórmula (4.2).

Teorema 5.2: Suponhamos satisfeitas as hipóteses (AL), (N) e (S). Se f_0 é limitada em $\mathbb{R}^d$ e se

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\, h^{d/4}} ,$$

então a distribuição de T_{nn} é assintoticamente normal de média $\int s^2(x)dx$ e de variância $2\sigma^2$.

Demonstração: De forma análoga à do Teorema 4.1, a variável aleatória

$$nh^{d/2}\{\int \{f_{nn}(x)-Ef_{nn}(x)\}^2dx - \frac{1}{nh^d}\int K^2(u)du\},$$

converge em lei para a lei normal de média zero e de variância $2\sigma^2$. Para concluir, basta observar que

$$\int \{f_{nn}(x)-Ef_{nn}(x)\}^2dx = \int \{f_{nn}(x)-E_0f_n(x)\}^2dx + 2A_n - B_n ,$$

onde, tendo em conta (5.2) e (5.3),

$$A_n = \int \{f_{nn}(x)-Ef_{nn}(x)\}\{E_0f_n(x)-Ef_{nn}(x)\}dx = O_p(\frac{a_n}{\sqrt{n}}),$$

e

$$B_n = \int \{E_0f_n(x)-Ef_{nn}(x)\}^2dx = a_n^2 \int s^2(x)\, dx + o(a_n^2) . \qquad \blacklozenge$$

Observação 5.3: Se $h_n=O(n^{-\delta})$, $0 < \delta < d^{-1}$, obtemos para a_n ordens de convergência para zero sempre inferiores a $n^{-1/2}$. Contudo estas ordens são tão "próximas" de $n^{-1/2}$ quanto queiramos, desde que escolhamos δ "próximo" de zero. Isto não permite, no entanto, resolver o problema da escolha de h_n; para compreendermos esta afirmação basta notar que $\int \{\int K(z)s(x-zh)dz\}^2dx$ é uma melhor medida do verdadeiro desvio de T_{nn} do que $\int s^2(x)\, dx$. Independentemente da escolha de δ, este teste detecta as alternativas locais da forma considerada desde que a_n tenha uma ordem de convergência para zero igual ou inferior a $n^{-1/4}$.

REFERÊNCIAS

Bickel, P.J.; Rosenblatt, M. (1973). On Some Global Measures of the Deviations of Density Function Estimates. *Ann. Stat.*, **1**, 1071-1095.

Bradley, R.C. (1986). Basic Properties of Strong Mixing Conditions. *Dependence in Probability and Statistics, a survey of recent results*, 165-192. Eberlein,E., Taqqu,M., editors.

Brown, B.M. (1971). Martingale Central Limit Theorems. *Ann. Math. Stat.*, **42**, 59-66.

Dvoretzky, A. (1972). Asymptotic Normality for Sums of Dependent Random Variables. *Proc. 6th Berkeley Sympo. Math. Stat. Prob.*, Univ. Calif. 1970, **2**, 513-535.

Hall, P. (1984). Central Limit Theorem for Integrated Square Error Properties of Multivariate Nonparametric Density Estimators. *Jour. Mult. Anal.*, **14**, 1-16.

Meloche, J. (1990). Asymptotic Behaviour of the Mean Integrated Squared Error of Kernel Density Estimators for Dependent Observations. *Canadian Jour. Stat.*, **18**, 205-211.

Parzen, E. (1962). On Estimation of a Probability Density Function and Mode. *Ann. Math. Stat.*, **33**, 1065-1076.

Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some Non-parametric Estimates of a Density Function. *Ann. Math. Stat.*, **27**, 832-837.

Rosenblatt, M. (1976). On the Maximal Deviation of k-Dimensional Density Estimates. *Ann. Prob.*, **4**, 1009-1015.

Takahata, H.; Yoshihara, K. (1987). Central Limit Theorems for Integrated Square Error of Nonparametric Density Estimators Based on Absolutely Regular Random Sequences. *Yokohama Math. Jour.*, **35**, 95-111.

Volkonskii, V.A.; Rozanov, Yu.A. (1959). Some Limit Theorems for Random Functions, I. *Theory Prob. Appl.*, **4**, 178-197.

Yoshihara, K. (1976). Limiting Behavior of U-Statistics for Stationary, Absolutely Regular Processes. *Z. Wahrsch. Geb.*, **35**, 237-252.