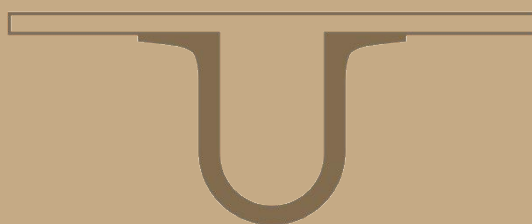




UNIVERSIDADE D
COIMBRA



Luisa Rodrigues Brilhante

OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA EM FINANÇAS

VOLUME 1

Dissertação no âmbito do Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças, orientada pelo Professor Doutor José Luís Esteves dos Santos e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia e à Faculdade de Economia.

Setembro de 2019

Otimização Estocástica em Finanças

Luisa Rodrigues Brilhante



UNIVERSIDADE D
COIMBRA



Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças

Master in Quantitative Methods in Finance

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

October 2019

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador, Professor Doutor José Luis Esteves dos Santos, pela orientação prestada, por todo apoio e disponibilidade em esclarecer-me qualquer questão e por não medir esforços em resolver os problemas que foram surgindo ao longo do mestrado.

Aos meus pais e à minha irmã pelo incentivo, compreensão e carinho demonstrado e ao Fábio pela ajuda, força, companheirismo e apoio incondicional durante todo este percurso.

Resumo

A otimização é uma área da matemática aplicada em que se pretende encontrar a solução ótima de uma determinada função, minimizando ou maximizando, dado um conjunto de restrições e variáveis. Geralmente, a construção do modelo do problema de otimização é feita admitindo que os dados são conhecidos com precisão. No entanto, em muitos problemas da vida real surgem incertezas fazendo com que esses modelos não sejam os mais adequados. Nesse contexto, surge a otimização estocástica que é uma abordagem muito utilizada sobretudo na área de Finanças quando os parâmetros incertos do problema são variáveis aleatórias com uma distribuição de probabilidade conhecida.

Nesta dissertação, pretende-se apresentar uma introdução e aprofundar os conceitos básicos de otimização estocástica e as suas formulações. Deste modo, será apresentado as vantagens em utilizar a otimização estocástica ao invés do modelo determinístico. A otimização estocástica é baseada em cenários que pretendem representar todas as possíveis concretizações dos parâmetros ou pelo menos indicar uma boa estimativa no caso da distribuição dos parâmetros ser contínua. Em problemas reais, o número de cenários costuma ser bastante elevado tornando os problemas computacionalmente difíceis de resolver. Estes problemas de otimização de larga escala, podem ser resolvidos mais eficientemente através do método da Decomposição de Benders, o qual é estudado neste trabalho. Por fim, como a otimização está muito presente na área das Finanças, uma aplicação da otimização estocástica a um problema financeiro é apresentado desde a modelação à resolução.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
2 Otimização Estocástica	3
2.1 Programação Estocástica a dois estágios com recurso	3
2.1.1 Caso Discreto	5
2.1.2 Caso Contínuo	12
2.2 Programação Estocástica de múltiplos estágios com recurso	27
3 Decomposição de Benders para a Otimização Linear Estocástica	31
3.1 Decomposição de Benders	32
3.2 Método <i>L-shaped</i>	39
4 Aplicação da Otimização Estocástica às Finanças	43
5 Considerações finais	51
Bibliografia	53
Anexos	55

Lista de Figuras

2.1	Representação gráfica da função $f_1(x_1)$ quando $\alpha = 0.2$	15
2.2	Representação gráfica da função $f_2(x_2)$ quando $\alpha = 0.2$	16
2.3	Representação gráfica da função $f_3(x_3)$ quando $\alpha = 0.2$	18
2.4	Representação gráfica da função g	22
2.5	Representação gráfica dos valores de x_1, x_2 e x_3 (e dos seus limites) no caso (vi)	24
2.6	Representação gráfica da variação do parâmetro λ em relação ao parâmetro α	25
2.7	Representação gráfica dos valores de x_1, x_2 e x_3 (e dos seus limites) no caso (vii)	25
2.8	Solução ótima (variáveis antecipativas) do problema em função de α	26
2.9	Valor ótimo do problema em função de α (a azul está apresentada a solução do caso (vi) e a roxo a solução do caso (vii))	26
2.10	Árvore com 3 estágios e 4 cenários	28
3.1	Representação gráfica da região admissível e uma curva de nível da função objetivo do problema (3.14)	36
3.2	Representação gráfica do problema e uma curva de nível da função objetivo do problema (3.17)	37
3.3	Representação gráfica do problema e uma curva de nível da função objetivo do problema (3.20)	38
3.4	Evolução do limite inferior (LB) e superior (UB) com o número de iterações no método de Benders aplicado ao problema (3.10)	39
3.5	Convergência do método da Decomposição de Benders para o problema do fazendeiro (2.8)	41
4.1	Árvore Cenário	44
4.2	Esquema dos trimestres	45
4.3	Evolução dos empréstimos e do saldo no cenário 1	48
4.4	Evolução dos empréstimos e do saldo no cenário 2	49
4.5	Evolução dos empréstimos e do saldo no cenário 3	49
4.6	Convergência do problema ALM	49

Lista de Tabelas

2.1	Dados do problema do agricultor	6
2.2	Solução ótima do problema determinístico	7
2.3	Resumo da análise dos dados quando a produção varia 20% relativamente a média	8
2.4	Solução ótima quando a produção é acima da média	9
2.5	Solução ótima quando a produção é abaixo da média	9
2.6	Solução ótima para o problema estocástico	11
2.7	Solução ótima para o problema estocástico quando $x_1 = 120$, $x_2 = 80$ e $x_3 = 300$	12
2.8	Solução do problema (2.35) para diferentes valores de α	27
4.1	Requisitos de caixa	44
4.2	Empréstimos associados à solução ótima	47
4.3	Saldo associado à solução ótima	47

Capítulo 1

Introdução

A otimização é um ramo da matemática aplicada que está presente em muitas áreas como as ciências, engenharia e finanças. Muitos problemas financeiros podem ser formulados como um problema de otimização, por exemplo: a detecção de arbitragem dos preços dos ativos, a seleção de carteiras, os problemas de bens e responsabilidades (*asset liability management*). Frequentemente, esses problemas financeiros exigem que as decisões devem ser feitas na presença de incerteza [13].

A solução de um problema de otimização tem uma alta sensibilidade a variação de parâmetros e como o modelo determinístico negligencia a incerteza dos parâmetros, não é o mais adequado a aplicações práticas [3]. Esses parâmetros correspondem a quantidades que só podem ser realizados no futuro ou que não podem ser conhecidos o momento exato que o problema deve ser formulado ou resolvido [4].

Ao longo dos anos, várias abordagens sobre a otimização sob incerteza foram desenvolvidas podendo destacar a otimização estocástica e a otimização robusta. A otimização estocástica é uma abordagem utilizada quando a incerteza dos parâmetros é aleatória, supondo conhecida a sua distribuição, onde normalmente se pretende otimizar o valor médio e a otimização robusta pretende encontrar a melhor solução possível no pior cenário [4]. Nesta dissertação, o foco principal será a otimização estocástica e as suas aplicações.

A otimização estocástica assume que os parâmetros incertos são variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade conhecida e é uma abordagem baseada em cenários, que representam os possíveis estados futuros e são gerados pela enumeração de combinações de resultados possíveis dos parâmetros incertos [18]. Em geral, a formulação mais simples de otimização estocástica considera apenas decisões feitas antes da incerteza ser revelada, sendo chamada de otimização estocástica sem recurso. Já a otimização estocástica a dois estágios com recurso dividem as variáveis em dois tipos: variáveis de decisão *here-and-now* que são as decisões feitas antes da incerteza ser revelada e variáveis de decisão *wait-and-see* que são as decisões que podem ser feitas depois de alguns, ou todos, os parâmetros incertos serem revelados.

Ao resolver um problema de otimização estocástica, a solução ótima encontrada é a melhor solução levando em conta todos os possíveis valores que os parâmetros aleatórios podem assumir. Assim, ao invés de fixar todos os cenários possíveis e resolver todos os problemas correspondentes para cada um dos cenários, estes são todos incorporados em um único problema.

A vantagem em utilizar um modelo de otimização estocástica pode ser quantificado pelo *Valor Esperado sob a Informação Perfeita* e pelo *Valor da Solução Estocástica*. O Valor Esperado sob a Informação Perfeita mede o valor máximo que se estaria disposto a pagar pela informação completa e precisa sob o futuro e é obtido pela diferença entre o lucro obtido sob a informação perfeita, que corresponde ao caso em que se sabe com precisão o cenário que ocorrerá no futuro, e o valor ótimo obtido no caso estocástico. Já o Valor da Solução Estocástica mede o ganho em considerar o modelo estocástico ao invés do modelo determinístico e pode ser obtido pela diferença entre o valor esperado da solução produzida a partir da formulação estocástica e o valor da solução produzida a partir da formulação determinística, que substitui a incerteza dos parâmetros pelo seu valor nominal.

Na literatura encontram-se várias aplicações da otimização estocástica em diversas áreas tais como: planeamento da produção [5], investimento energético e produção de eletricidade [12], telecomunicações [15], finanças [8], sendo este último a área de interesse desta dissertação. Em finanças, a programação estocástica tem um papel fundamental nos problemas de bens e responsabilidades visto que são problemas que lidam com a incerteza [8].

Como o problema de programação estocástica é baseada em cenários, o tamanho dos programas lineares depende do número de estágios e assim pode ser um factor que limita a resolução de problemas realísticos. De forma a enfrentar os problemas de programação estocástica em grande escala foram desenvolvidos métodos de decomposição, sendo os mais utilizados a Decomposição de Benders (*L-shaped method*) e a Decomposição Lagrangeana. Nessa dissertação, será abordado apenas a decomposição de Benders.

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos. O Capítulo 1 foca-se nesta breve introdução à otimização estocástica enquanto que no Capítulo 2 desenvolve-se de forma geral o tema de otimização estocástica e as suas duas formulações mais importantes: a otimização estocástica a dois estágios com recurso e multi estágios com recurso, sendo a primeira o foco principal deste trabalho. Nesta secção é apresentado um exemplo prático apoiado em [16], que foi dividido em dois casos: o caso em que a distribuição de probabilidade é discreta e outro em que a distribuição de probabilidade é contínua.

No Capítulo 3, será introduzido o conceito da Decomposição de Benders que é muito utilizada para resolver os problemas de otimização estocástica de larga escala, sendo apresentado um exemplo prático mais simples apoiado em [2] e posteriormente o exemplo prático utilizado do capítulo anterior.

O Capítulo 4 é dedicado à aplicação da otimização estocástica a um problema financeiro, explorando os conceitos adquiridos anteriormente.

Por fim, o Capítulo 5 é uma breve consideração geral de forma a concluir esta dissertação. Em anexo, estão incluídos os códigos que implementei e adaptei para a resolução computacional dos problemas propostos nesta dissertação.

Capítulo 2

Otimização Estocástica

A programação estocástica é uma estrutura utilizada para modelar problemas de otimização sob incerteza. Enquanto que os problemas de otimização dos modelos determinísticos são formulados assumindo que os parâmetros são conhecidos, em otimização estocástica os parâmetros envolvem incerteza.

A programação estocástica refere-se a um problema de otimização em que alguns dos parâmetros são variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade conhecida. O objetivo é transformar o problema estocástico em um problema determinístico que poderá ser um programa linear, um programa não-linear ou um programa inteiro.

A incerteza dos parâmetros é descrita por um espaço amostral Ω , uma tribo de eventos aleatórios e uma medida de probabilidade P . Na maioria dos casos, o espaço amostral deverá ser um conjunto finito de realizações $\{\omega_1, \dots, \omega_S\}$ e as probabilidades, $p(\omega_k)$, associadas as realizações devem satisfazer $p(\omega_k) \geq 0$ e $\sum_{k=1}^S p(\omega_k) = 1$.

Os modelos de programação estocástica incluem dois tipos de variáveis de decisão: variáveis antecipativas e adaptativas, que são respectivamente as variáveis *here-and-now* e *wait-and-see* descritas anteriormente. As variáveis de decisão antecipativas correspondem as decisões que não dependem da realização futura dos parâmetros aleatórios. Já as variáveis adaptativas correspondem as decisões que só podem ser feitas depois de alguns, ou todos, os parâmetros aleatórios serem realizados/observados. Os modelos que incluem esses dois tipos de variáveis são chamados de modelos de recurso. Esses modelos de recurso não só antecipam as observações futuras mas levam em conta que as observações são feitas sob incerteza e portanto podem adaptar-se tomando as decisões de recurso [8]. O modelo de recurso mais estudado e aplicado é o problema linear estocástico a dois estágios que pode ser estendido ao problema de múltiplos estágios.

2.1 Programação Estocástica a dois estágios com recurso

Em programação estocástica a dois estágios com recurso, tem-se um conjunto de variáveis de decisão de primeiro estágio que são as decisões que devem ser tomadas antes da realização das variáveis aleatórias. Após a realização das variáveis aleatórias, determinam-se as variáveis de decisão de segundo estágio que são as decisões tomadas de forma a adaptar as decisões feitas em um

primeiro estágio. Por essa razão, as variáveis de primeiro e segundo estágio são também conhecidas como variáveis antecipativas e adaptativas, e são representadas pelos vetores $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$, respectivamente.

O problema estocástico a dois estágios com recurso pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & a^T x + E \left(\max_{y(\omega)} c(\omega)^T y(\omega) \right) & (2.1) \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & B(\omega)x + C(\omega)y(\omega) = d(\omega) \\ & x \geq 0 \\ & y(\omega) \geq 0 \end{aligned}$$

Nesta formulação, A é uma matriz de coeficientes de restrição e b é um vetor que denota os recursos disponíveis no primeiro estágio, enquanto que para cada possível realização ω , as matrizes $B(\omega)$ e $C(\omega)$ assim como o vetor $d(\omega)$ definem os parâmetros estocásticos que ligam as decisões de segundo estágio $y(\omega)$ com as de primeiro estágio x . Na função objetivo desse problema maximiza-se o custo $a^T x$ das decisões de primeiro estágio somado com o valor ótimo esperado do custo $c(\omega)^T y(\omega)$ das decisões de segundo estágio.

Fixando a variável de decisão de primeiro estágio x , então o modelo em (2.1) pode ser representado por uma função que depende apenas da realização ω . Essa função é denominada por problema de recurso que pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x, \omega) = \max \quad & c(\omega)^T y(\omega) & (2.2) \\ \text{s.a.} \quad & C(\omega)y(\omega) = d(\omega) - B(\omega)x \\ & y(\omega) \geq 0 \end{aligned}$$

Seja $f(x) = E(f(x, \omega))$ o valor ótimo do problema de segundo estágio. Se $f(x)$ for conhecida, o problema em (2.1) pode ser reduzido a um problema não-linear determinístico dado por:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & a^T x + f(x) & (2.3) \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

As decisões de primeiro estágio devem ser tomadas antes da realização ω ser conhecida. No segundo estágio a realização ω torna-se conhecida e otimiza-se o seu comportamento resolvendo o problema (2.2).

Geralmente, não é fácil obter a expressão analítica de $f(x)$ e por isso discretiza-se o espaço amostral considerando apenas as S possíveis realizações. Admite-se, então, que Ω é um conjunto finito com S possíveis realizações, ou seja, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_S\}$ e considera-se $p = (p_1, \dots, p_S)$ a distribuição de probabilidade desse espaço amostral. Essas S realizações ω_k , com $k = 1, \dots, S$, são chamados de cenários. Portanto, a esperança da função objetivo do problema de segundo estágio pode ser escrito

da seguinte forma:

$$E\left(\max_{y(\omega)} c(\omega)^T y(\omega)\right) = \sum_{k=1}^S p_k \max_{y(\omega_k)} c(\omega_k)^T y(\omega_k) \quad (2.4)$$

De forma a simplificar a notação, será utilizado apenas c_k ao invés de $c(\omega_k)$ procedendo de forma semelhante nas restantes variáveis e parâmetros envolvendo incertezas. Com essa abordagem de cenários, o programa linear estocástico de dois estágios pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \max_x \quad & a^T x + \sum_{k=1}^S p_k \max_{y_k} c_k^T y_k \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & B_k x + C_k y_k = d_k, \quad \text{com } k = 1, \dots, S \\ & x \geq 0 \\ & y_k \geq 0, \quad \text{com } k = 1, \dots, S \end{aligned} \quad (2.5)$$

Note-se que para cada cenário k existe um vetor de variáveis de decisão de segundo estágio y_k e discretizando os cenários da função objetivo do problema acima, o máximo da função objetivo é atingido otimizando às variáveis x e y_k ao mesmo tempo. Assim, o problema de otimização estocástico é equivalente a:

$$\begin{aligned} \max_{x, y_1, \dots, y_S} \quad & a^T x + p_1 c_1^T y_1 + \dots + p_S c_S^T y_S \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & B_1 x + C_1 y_1 = d_1 \\ & \vdots \\ & B_S x + C_S y_S = d_S \\ & x \geq 0 \\ & y_1, \dots, y_S \geq 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Este problema de otimização, (2.6), tem S conjuntos idênticos de variáveis de decisão de segundo estágio e por isso podem ser muito maiores que o problema original antes de se considerar a incerteza dos parâmetros.

2.1.1 Caso Discreto

De forma a perceber melhor a praticabilidade da programação estocástica, analisa-se detalhadamente um exemplo retirado de [16]. Trata-se de um problema de otimização determinístico em que os seus parâmetros são conhecidos e será reformulado dando origem a um problema de otimização estocástica havendo incerteza em alguns dos seus parâmetros.

Considera-se um agricultor que possui um total de 500 hectares de terras disponíveis para a plantação de trigo, milho e beterraba. Denota-se por x_1 , x_2 e x_3 a quantidade de hectares de terra

dedicada para o trigo, milho e beterraba, respectivamente. Sabe-se que os custos de plantação por hectare são 150€ para o trigo, 230€ para o milho e 260€ para a beterraba.

O agricultor precisa de, no mínimo, 200 toneladas de trigo e 240 toneladas de milho para a alimentação do gado que pode ser cultivada na fazenda ou comprada de um retalhista. Denote-se por y_1 e y_2 a quantidade de trigo e milho que é comprada através de um retalhista, cujo preços de compra por cada tonelada são 238€ e 210€ para o trigo e milho, respectivamente.

A quantidade de trigo e milho produzida em excesso pode ser vendida pelo valor de 170€ ou 150€ por tonelada de trigo e milho, respectivamente. A beterraba é um cultivo que tem apenas a finalidade de dar lucro, ou seja, toda produção de beterraba é vendida. Contudo, existe uma cota na produção de 6000 toneladas para o agricultor. Qualquer quantidade de beterraba até a cota é vendida a 36€ a tonelada e o restante é vendida por 10€ a tonelada. Denota-se por z_1 e z_2 a quantidade em toneladas de trigo e milho vendida e por z_3 e z_4 a quantidade de beterraba em toneladas vendida pelo preço favorável e pelo preço mais baixo, respectivamente.

O agricultor sabe que a produção média na sua terra é 2.5, 3 e 20 toneladas por hectare de trigo, milho e beterraba, respectivamente. Os dados do problema estão resumidos na Tabela (2.1).

Tabela 2.1 Dados do problema do agricultor

	Trigo	Milho	Beterraba
Produção (t/ha)	2.5	3	20
Custos de plantação (€/ha)	150	230	260
Preço de compra (€/ha)	238	210	-
Preço de venda (€/ha)	170	150	36 (abaixo de 6000 t)
			10 (acima de 6000 t)
Requerimento mínimo (t)	200	240	-
Total de terras disponíveis: 500 hectares			

O objetivo do agricultor é maximizar o lucro. Com os dados da Tabela (2.1) é possível formular o programa linear onde se pretende maximizar o lucro:

$$\begin{aligned} \max \quad & -(150x_1 + 230x_2 + 260x_3) - (238y_1 + 210y_2) \\ & + (170z_1 + 150z_2 + 36z_3 + 10z_4) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ & 2.5x_1 + y_1 - z_1 \geq 200 \\ & 3x_2 + y_2 - z_2 \geq 240 \\ & z_3 + z_4 \leq 20x_3 \\ & z_3 \leq 6000 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, z_4 \geq 0 \end{aligned}$$

O problema foi resolvido utilizando o *software* IBM ILOG CPLEX *Optimization Studio*, estando a solução apresentada na Tabela (2.2).

Tabela 2.2 Solução ótima do problema determinístico

	Trigo	Milho	Beterraba
Área Plantada (ha)	120	80	300
Produção (t)	300	240	6000
Compra (t)	-	-	-
Venda (t)	100	-	6000
Lucro ótimo: 118600€			

De forma a perceber melhor a solução ótima obtida, analisemos detalhadamente os dados do problema. Assim, em primeiro lugar, calcula-se o lucro por hectare obtido com a venda de cada um dos produtos:

- Trigo: $2.5 \times 170 - 150 = 275\text{€}/ha$
- Milho: $3 \times 150 - 230 = 220\text{€}/ha$
- Beterraba (preço favorável): $20 \times 36 - 260 = 460\text{€}/ha$
- Beterraba (preço desfavorável): $20 \times 10 - 260 = -60\text{€}/ha$

Com esses valores facilmente percebe-se que a beterraba só dá lucro quando é vendida pelo preço mais favorável, sendo assim o produto mais rentável para vender. Como existe um requisito mínimo relativamente ao trigo e ao milho, ele obrigatoriamente tem de ser cumprido. Deste modo, temos de analisar se é preferível plantar trigo e milho ou se é vantajoso plantar beterraba até a cota e vender para então comprar os cereais necessários. Satisfazendo o requisito mínimo, por cada hectare de trigo substituído por plantação de beterraba obtém-se um aumento no lucro de $20 \times 36 - 2.5 \times 238 - 260 + 150 = 15\text{€} > 0$ e por cada hectare de milho substituído na plantação de beterraba tem-se um aumento no lucro $20 \times 36 - 3 \times 210 - 260 + 230 = 60\text{€} > 0$. Isto significa que é mais vantajoso produzir o máximo de beterraba possível, dentro do limite da cota estipulado, mesmo que seja necessário comprar algum cereal para alimentar o gado.

Depois de retirar a área para plantar a beterraba para atingir a cota estipulada e caso a área disponível não seja suficiente para produzir todos os cereais, é necessário verificar qual dos cereais é o mais rentável. Por cada hectare de trigo plantado podemos poupar na compra ao retalhista: $2.5 \times 238 - 150 = 445\text{€}$ e por cada hectare de milho pode-se poupar: $3 \times 210 - 230 = 400\text{€}$. Portanto, o cereal mais rentável para plantar ao invés de comprar é o trigo.

Caso a área do cultivo seja suficiente para atingir a cota da beterraba e os requisitos mínimo dos cereais, a área restante deverá ser cultivada com trigo por ser o cereal mais rentável.

Tendo em conta as indicações anteriores pode-se definir a seguinte estratégia:

- Cultivar beterraba até a cota estabelecida, isto é, $\frac{6000}{20} = 300\text{ha}$.
- Cultivar o trigo para o gado, pois é o cereal mais rentável para plantar, visto que fica mais caro comprar no retalhista, ou seja, $\frac{200}{2.5} = 80\text{ha}$.
- Cultivar milho para o gado, ou seja, $\frac{240}{3} = 80\text{ha}$.
- O restante da terra disponível é dedicado para o cultivo de trigo pois é o cereal mais rentável para a venda.

A solução ótima do problema determinístico foi baseada na produção média. Contudo, o agricultor sabe que os valores reais da produção podem ser diferentes dos valores obtidos visto que existem fenómenos externos, como às condições climáticas, que podem fazer com que a sua plantação possa variar. Deste modo, será analisado a solução para uma variação na produção de $\pm 20\%$. Assim, num ano mais favorável, admite-se que a produção é 20% maior que a sua produção média e em anos mais desfavoráveis, a produção diminui 20% [7]. Considera-se, então, mais dois cenários: produção acima da média e produção abaixo da média.

Nestes dois novos casos, procedeu-se a uma análise detalhada semelhante à realizada para o caso em que a produção é média. Os resultados desta análise estão descritos na Tabela (2.3), em que a coluna "Venda" indica o lucro por hectare obtido com a venda de cada um dos produtos, a coluna "Substituir" representa cada hectare de trigo e milho substituído por plantação de beterraba e por último, a coluna "Poupança" indica o quanto pode-se poupar na compra ao retalhista por cada hectare de trigo e milho plantado.

Tabela 2.3 Resumo da análise dos dados quando a produção varia 20% relativamente a média

	Lucro					
	Produção aumenta 20%			Produção diminui 20%		
	Venda	Substituir	Poupança	Venda	Substituir	Poupança
Trigo	360	40	564	190	-10	326
Milho	310	78	526	130	42	274
Beterraba	604	-	-	316	-	-
	-20	-	-	-100	-	-

Assim, é possível definir as seguintes estratégias:

- Estratégia quando a produção aumenta 20%:
 - Cultivar beterraba até a cota estabelecida, isto é, $\frac{6000}{24} = 250\text{ha}$.
 - Cultivar trigo para o gado pois é o cereal mais rentável para plantar, $\frac{200}{3} = 66.(6)\text{ha}$.
 - Cultivar milho para o gado, $\frac{240}{3.6} = 66.(6)\text{ha}$.
 - O restante da terra disponível para o cultivo de trigo pois é o mais rentável para a venda.
- Estratégia quando a produção diminui 20%:

- Cultivar beterraba até a cota estabelecida, isto é, $\frac{6000}{16} = 375$ ha.
- Cultivar trigo para o gado, $\frac{200}{2} = 100$ ha.
- O restante da área disponível é dedicado para o cultivo de milho e como o requisito mínimo não é satisfeito alguma quantidade de milho deverá ser comprada ao retalhista.

Cada problema foi realizado utilizando novamente o *software* IBM ILOG CPLEX *Optimization Studio* e as soluções estão presentes nas Tabelas (2.4) e (2.5), estando de acordo com as estratégias relativamente a cada caso.

Tabela 2.4 Solução ótima quando a produção é acima da média

	Trigo	Milho	Beterraba
Área Plantada (ha)	183.(3)	66.(6)	250
Produção (t)	550	240	6000
Compra (t)	-	-	-
Venda (t)	350	-	6000
Lucro ótimo: 167666.(6)€			

Tabela 2.5 Solução ótima quando a produção é abaixo da média

	Trigo	Milho	Beterraba
Área Plantada (ha)	100	25	375
Produção (t)	200	60	6000
Compra (t)	-	180	-
Venda (t)	-	-	6000
Lucro ótimo: 59950€			

O agricultor percebe que ao mudar $\pm 20\%$ na produção em relação a sua produção média faz com que a solução ótima difere em cada um dos cenários apresentados provocando uma variação no lucro entre 59950€ e 167667€ e, portanto, não existe uma solução que seja ótima em todos os casos [7]. Uma vez que a solução é sensível a condições climáticas e como não podem ser previstas com precisão, o agricultor deverá decidir qual é a melhor distribuição das áreas de plantação, ou seja, o valor das variáveis antecipativas x_1 , x_2 e x_3 , sem informação perfeita sobre a produção, visto que, o agricultor é incapaz de tomar uma decisão perfeita que seja a melhor em todas as situações. No que diz respeito as compras y_1 e y_2 e as vendas z_1 , z_2 , z_3 e z_4 que correspondem às variáveis de decisão de segundo estágio, também conhecidas como variáveis adaptativas pois elas são calculadas resolvendo o problema de recurso depois de conhecer os valores de x e o cenário correspondente.

Consequentemente, as decisões dependem dos cenários, em que $s = 1$ representa o cenário em que a produção está associada a condições climáticas favoráveis, $s = 2$ é o cenário em que a produção está associada aos valores médios e por fim, $s = 3$ representa o cenário em que a produção está associada a condições climáticas desfavoráveis.

Portanto, novas variáveis de decisão são introduzidas: y_{is} com $i \in \{1, 2\}$ e $s \in \{1, 2, 3\}$ e z_{is} com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $s \in \{1, 2, 3\}$. Por exemplo, a variável z_{21} representa a quantidade de milho que é vendida quando a produção está acima da média.

Assumindo que os três cenários podem ocorrer com a mesma probabilidade, ou seja $\frac{1}{3}$, pretende-se maximizar o lucro médio obtido. O problema está representado em (2.8) e é chamado de problema de otimização estocástico de dois estágios.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & - (150x_1 + 230x_2 + 260x_3) \\
 & + \frac{1}{3}(-238y_{11} + 170z_{11} - 210y_{21} + 150z_{21} + 36z_{31} + 10z_{41}) \\
 & + \frac{1}{3}(-238y_{12} + 170z_{12} - 210y_{22} + 150z_{22} + 36z_{32} + 10z_{42}) \\
 & + \frac{1}{3}(-238y_{13} + 170z_{13} - 210y_{23} + 150z_{23} + 36z_{33} + 10z_{43}) \\
 \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\
 & 3x_1 + y_{11} - z_{11} \geq 200 \\
 & 3.6x_2 + y_{21} - z_{21} \geq 240 \\
 & z_{31} + z_{41} \leq 24x_3 \\
 & z_{31} \leq 6000 \\
 & 2.5x_1 + y_{12} - z_{12} \geq 200 \\
 & 3x_2 + y_{22} - z_{22} \geq 240 \\
 & z_{32} + z_{42} \leq 20x_3 \\
 & z_{32} \leq 6000 \\
 & 2x_1 + y_{13} - z_{13} \geq 200 \\
 & 2.4x_2 + y_{23} - z_{23} \geq 240 \\
 & z_{33} + z_{43} \leq 16x_3 \\
 & z_{33} \leq 6000 \\
 & x, y, z \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

A solução encontrada para este problema encontra-se descrito na Tabela (2.6), considerando todos os cenários em simultâneo e não a otimização de cada cenário em separado. A análise dessa solução permite concluir que a decisão mais rentável para a alocação de terras relativamente à produção de beterraba é aquela que evita as vendas pelo preço desfavorável. A área dedicada ao trigo evita sempre à compra do cereal ao retalhista enquanto que a área dedicada para o milho é tal que preenche o requisito mínimo quando a produção está com os valores médios, o que implica que haverá vendas quando a produção está associada a condições climáticas favoráveis e haverá compras quando a produção está associada a condições climáticas desfavoráveis. O restante da área disponível será dedicada para a produção de trigo, a qual é grande o suficiente para cobrir o requisito mínimo, evitando a compra do cereal ao retalhista e assim haverá venda em todos os casos. Apesar de não haver uma solução que otimize todos os cenários em simultâneo, esta é a solução que maximiza o lucro médio.

Tabela 2.6 Solução ótima para o problema estocástico

		Trigo	Milho	Beterraba
1º estágio	Área Plantada (ha)	170	80	250
s = 1: produção acima da média	Produção (t)	510	288	6000
	Compra (t)	-	-	-
	Venda (t)	310	48	6000 (preço favorável)
s = 2: produção média	Produção (t)	425	240	5000
	Compra (t)	-	-	-
	Venda (t)	225	-	5000 (preço favorável)
s = 3: produção abaixo da média	Produção (t)	340	192	4000
	Compra (t)	-	48	-
	Venda (t)	140	-	4000 (preço favorável)
Lucro ótimo médio: 108390€				

Caso o agricultor pudesse prever as condições climáticas e tivesse uma informação perfeita da produção de cada um dos produtos, não seria preciso o modelo estocástico e o agricultor poderia escolher entre as soluções obtidas nas Tabelas (2.2), (2.4) e (2.5), dependendo do cenário previsto. O lucro médio entre esses três casos é dado por 115405.(6)€, o que corresponde à situação em que o agricultor sabe com precisão o que acontecerá no futuro e qual cenário será escolhido [7]. Como estamos perante ao caso em que o agricultor não tem uma informação perfeita sob a produção, o melhor seria, a longo prazo, o agricultor tomar como solução ótima a solução obtida na Tabela (2.6), e assim, teria uma riqueza esperada de 108390€. A diferença entre o valor da solução estocástica, 108390€, e o lucro médio dos três cenários, sob informação perfeita, 115405.(6)€ corresponde ao *valor esperado da informação perfeita*. Neste caso, a diferença é de 7015.(6)€ e representa a perda de lucro devido a presença de incerteza. Assim, se o agricultor pudesse prever o cenário futuro para a colheita na altura da plantação, o seu lucro aumentaria 7015.(6)€.

Um outro conceito importante em programação estocástica é o *valor da solução estocástica*, que mede o ganho em considerar o modelo estocástico ao invés de simplesmente basear a decisão na produção média. O *valor da solução estocástica* é a diferença entre o valor esperado da solução obtida na formulação estocástica e o valor esperado da solução obtida na formulação determinística. O valor esperado da solução determinística é obtido resolvendo o problema estocástico (2.8) com os valores das variáveis antecipativas x encontrados na Tabela (2.2). O valor das variáveis adaptativas é determinado, em cada cenário, resolvendo o problema de recurso correspondente. Deste modo, será tomado os valores $x_1 = 120$, $x_2 = 80$ e $x_3 = 300$ em cada um dos cenários. A solução está presente na Tabela (2.7), e portanto o lucro ótimo médio é de 107240€ que é menor que o valor ótimo encontrado na Tabela (2.6). Assim, a diferença $108390 - 107240 = 1150€$ é o valor da solução estocástica.

Tabela 2.7 Solução ótima para o problema estocástico quando $x_1 = 120$, $x_2 = 80$ e $x_3 = 300$

		Trigo	Milho	Beterraba
1º estágio	Área plantada (ha)	120	80	300
s = 1: produção acima da média	Produção (t)	360	288	7200
	Compra (t)	-	-	-
	Venda (t)	160	-	6000 (preço favorável) 1200 (preço desfavorável)
s = 2: produção média	Produção (t)	300	240	6000
	Compra (t)	-	-	-
	Venda (t)	100	-	6000 (preço favorável)
s = 3: produção abaixo da média	Produção (t)	240	192	4800
	Compra (t)	-	48	-
	Venda (t)	40	-	4800 (preço favorável)
Lucro ótimo médio: 107240€				

2.1.2 Caso Contínuo

No exemplo anterior, consideramos o caso em que o espaço amostral é um conjunto finito de realizações e portanto a distribuição de probabilidade é discreta. Assume-se, agora, que a produção para o trigo, milho e beterraba é modelada por um vetor aleatório contínuo para a produção cujas componentes são independentes.

Para simplificar a notação, designaremos o trigo por produto 1, o milho por produto 2 e a beterraba por produto 3. A produção para cada produto i , com $i \in \{1, 2, 3\}$, pode ser descrita, aproximadamente, por uma variável aleatória uniforme U_i no intervalo $[a_i, b_i]$, em torno da produção média μ_i indicada na Tabela (2.1). Assume-se que, a_i e b_i escrevem da seguinte forma: $a_i = (1 - \alpha)\mu_i$ e $b_i = (1 + \alpha)\mu_i$, sendo $\alpha \in]0, 1[$ um parâmetro que permite controlar a dispersão. Note-se que neste caso se verifica $0 < a_i < b_i$.

Já sabemos que as decisões sobre a alocação comum de terra são as variáveis de decisão de primeiro estágio pois são tomadas antes do conhecimento sobre a produção e as decisões sobre as compras e vendas correspondem as variáveis de decisão de segundo estágio visto que são tomadas após a produção (revelação da incerteza).

Neste exemplo, a formulação de segundo estágio pode ser descrita como $f(x) = E(f(x, \omega))$, onde $f(x, \omega)$ é uma variável aleatória que indica o valor ótimo do problema de segundo estágio para cada realização de ω .

O problema de segundo estágio é dado por:

$$f(x, \omega) = \max \quad - (238y_1(\omega) - 170z_1(\omega) + 210y_2(\omega) - 150z_2(\omega) - 36z_3(\omega) - 10z_4(\omega)) \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
s.a. \quad & U_1(\omega)x_1 + y_1(\omega) - z_1(\omega) \geq 200 \\
& U_2(\omega)x_2 + y_2(\omega) - z_2(\omega) \geq 240 \\
& z_3(\omega) + z_4(\omega) \leq U_3(\omega)x_3 \\
& z_3(\omega) \leq 6000 \\
& y_i(\omega), z_i(\omega) \geq 0
\end{aligned}$$

onde $U_i(\omega)$ representa a produção de cada produto i sob o cenário ω .

De forma a calcular o valor de $f(x, \omega)$ podemos separar entre as três plantações devido a independência dos subproblemas. Assim:

$$f(x) = E(f(x, \omega)) = \sum_{i=1}^3 E(f_i(x_i, \omega)) = \sum_{i=1}^3 f_i(x_i). \quad (2.10)$$

onde $f_i(x_i, \omega)$ é o valor ótimo do problema considerando apenas o produto $i = 1, 2, 3$.

Primeiramente, começaremos por calcular o valor ótimo do problema de segundo estágio para a produção de trigo, que se obtém resolvendo o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, \omega) = \max \quad & -(238y_1(\omega) - 170z_1(\omega)) \\
s.a. \quad & U_1(\omega)x_1 + y_1(\omega) - z_1(\omega) \geq 200 \\
& y_1(\omega) \geq 0 \\
& z_1(\omega) \geq 0
\end{aligned} \quad (2.11)$$

A solução ótima para este problema é comprar o trigo necessário para alcançar o requisito mínimo para a alimentação do gado ou vender o excesso de produção:

$$\begin{aligned}
y_1(\omega) &= \max\{0, 200 - U_1(\omega)x_1\} \\
z_1(\omega) &= \max\{U_1(\omega)x_1 - 200, 0\}
\end{aligned} \quad (2.12)$$

Substituindo o valor da solução ótima na função objetivo têm-se o seguinte:

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, \omega) &= -238 \times \max\{0, 200 - U_1(\omega)x_1\} + 170 \times \max\{U_1(\omega)x_1 - 200, 0\} \\
&= \begin{cases} -238(200 - U_1(\omega)x), & U_1(\omega)x_1 \leq 200 \\ 170(U_1(\omega)x - 200), & U_1(\omega)x_1 > 200 \end{cases}
\end{aligned} \quad (2.13)$$

Primeiramente, considera-se o caso descrito em (2.14), em que o requisito mínimo está compreendido entre os valores possíveis de produção. Deste modo, a superfície destinada para a plantação de trigo não será sempre tão grande por forma a exceder o requisito mínimo das 200 toneladas ou tão pequena que a produção seja sempre menor do que o requisito mínimo para qualquer possível produção. Assim, admitindo que $x_1 > 0$, tem-se:

$$a_1x_1 \leq 200 \leq b_1x_1 \Leftrightarrow \frac{200}{b_1} \leq x_1 \leq \frac{200}{a_1} \quad (2.14)$$

O valor esperado de $f_1(x_1, \omega)$ pode ser calculado nesse intervalo e é dado por:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) = E(f_1(x_1, \omega)) &= - \int_{a_1}^{\frac{200}{x_1}} 238(200 - tx_1) \times h(t) dt + \int_{\frac{200}{x_1}}^{b_1} 170(tx_1 - 200) \times h(t) dt \quad (2.15) \\ &= -119 \times \frac{(200 - a_1x_1)^2}{x_1(b_1 - a_1)} + 85 \times \frac{(200 - b_1x_1)^2}{x_1(b_1 - a_1)} \end{aligned}$$

onde $h(t)$ é a função densidade da distribuição uniforme no intervalo $[a_1, b_1]$, ou seja, $\frac{1}{b_1 - a_1}$.

O valor de $f_1(x_1)$ pode ser determinado em outras situações dado que a expressão (2.14) não é um fator limitante. Por exemplo, a área x_1 é tal que a produção excede o requerimento mínimo para qualquer possível realização da produção, ou seja, $a_1x_1 \geq 200 \Rightarrow x_1 \geq \frac{200}{a_1}$.

Neste caso têm-se que os valores ótimos das decisões de segundo estágio são dados por:

$$\begin{aligned} y_1(\omega) &= 0 \quad (2.16) \\ z_1(\omega) &= U_1(\omega)x_1 - 200 \end{aligned}$$

Com isso, $f_1(x_1, \omega) = 170U_1(\omega)x_1 - 34000$ e o seu valor esperado é: $f_1(x_1) = 170x_1\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) - 34000$.

De forma similar, a área x_1 é tal que a produção é mais pequena que o requerimento mínimo para qualquer possível realização da produção, ou seja, $b_1x_1 \leq 200 \Rightarrow x_1 \leq \frac{200}{b_1}$, em que os valores ótimos das decisões de segundo estágio são:

$$\begin{aligned} y_1(\omega) &= 200 - U_1(\omega)x_1 \quad (2.17) \\ z_1(\omega) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, $f_1(x_1, \omega) = -47600 + 238U_1(\omega)x_1$ e o seu valor esperado é: $f_1(x_1) = -47600 + 238x_1\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$.

A seguir, apresenta-se um resumo da função $f_1(x_1)$:

$$f_1(x_1) = \begin{cases} -47600 + 238x_1\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right), & x_1 < \frac{200}{b_1} \\ -\frac{119(200 - a_1x_1)^2}{x_1(b_1 - a_1)} + \frac{85(200 - b_1x_1)^2}{x_1(b_1 - a_1)}, & \frac{200}{b_1} \leq x_1 \leq \frac{200}{a_1} \\ 170x_1\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) - 34000, & x_1 > \frac{200}{a_1} \end{cases} \quad (2.18)$$

De forma a visualizar melhor esta função, apresenta-se na Figura (2.1) um exemplo em que $a_1 = 2$ e $b_1 = 3$, que corresponde ao caso em que o $\alpha = 0.2$.

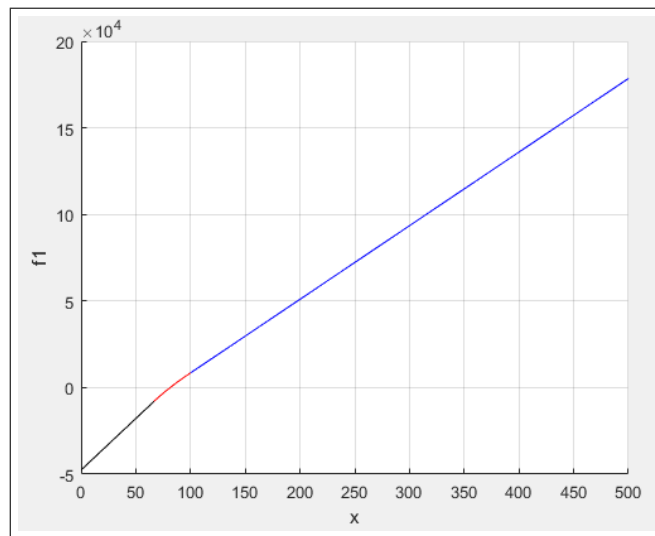


Figura 2.1 Representação gráfica da função $f_1(x_1)$ quando $\alpha = 0.2$

Para a produção de milho, o raciocínio é semelhante, sendo o seu problema de segundo estágio o seguinte:

$$\begin{aligned}
 f_2(x_2, \omega) &= \max \quad -(210y_2(\omega) - 150z_2(\omega)) & (2.19) \\
 \text{s.a.} \quad &U_2(\omega)x_2 + y_2(\omega) - z_2(\omega) \geq 240 \\
 &y_2(\omega) \geq 0 \\
 &z_2(\omega) \geq 0
 \end{aligned}$$

A solução ótima para este problema (2.19) é comprar milho de forma a alcançar o requerimento mínimo necessário para a alimentação de gado ou vender o excesso de produção:

$$\begin{aligned}
 y_2(\omega) &= \max\{0, 240 - U_2(\omega)x_2\}, & (2.20) \\
 z_2(\omega) &= \max\{U_2(\omega)x_2 - 240, 0\}
 \end{aligned}$$

Substituindo essa solução ótima na função objetivo, e efetuando o mesmo procedimento que foi referido para o trigo obtemos:

$$\begin{aligned}
 f_2(x_2, \omega) &= -210 \times \max\{0, 240 - U_2(\omega)x_2\} + 150 \times \max\{U_2(\omega)x_2 - 240, 0\} & (2.21) \\
 &= \begin{cases} -210(240 - U_2(\omega)x_2), & U_2(\omega)x_2 \leq 240 \\ 150(U_2(\omega)x_2 - 240), & U_2(\omega)x_2 > 240 \end{cases}
 \end{aligned}$$

De forma similar ao que foi feito para o trigo, será considerado os mesmos três casos e é apresentado de seguida um resumo da função $f_2(x_2)$:

$$f_2(x_2) = \begin{cases} -50400 + 210x_2 \left(\frac{a_2 + b_2}{2} \right), & x_2 < \frac{240}{b_2} \\ -\frac{105(a_2x_2 - 240)^2}{x_2(b_2 - a_2)} + \frac{75(b_2x_2 - 240)^2}{x_2(b_2 - a_2)}, & \frac{240}{b_2} \leq x_2 \leq \frac{240}{a_2} \\ 150x_2 \left(\frac{a_2 + b_2}{2} \right) - 36000, & x_2 > \frac{240}{a_2} \end{cases} \quad (2.22)$$

A Figura (2.2) representa esta função no caso em que $a_1 = 2.4$ e $b_1 = 3.6$ (situação que também corresponde ao caso em $\alpha = 0.2$).

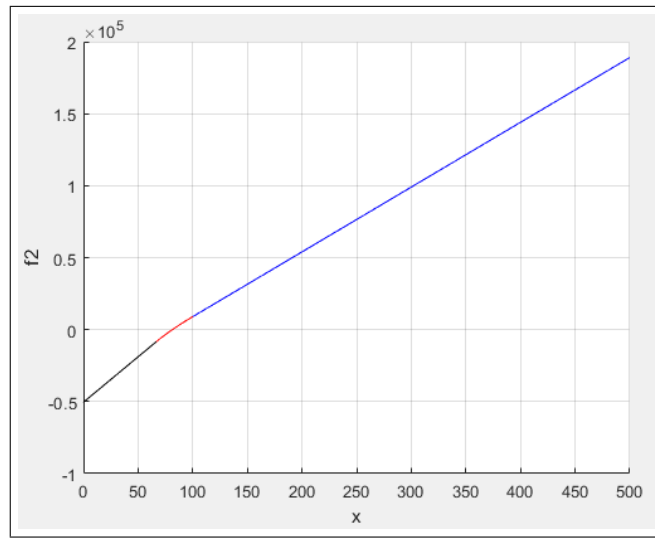


Figura 2.2 Representação gráfica da função $f_2(x_2)$ quando $\alpha = 0.2$

Por último, calcula-se o valor ótimo do problema de segundo estágio para a produção de beterraba, representada por $U_3(\omega)$. Neste caso, deve-se adaptar o procedimento anterior uma vez que não existe compra de beterraba e ela tem dois preços de venda, dependendo se a produção ultrapassa a cota estabelecida. Este problema é dado por:

$$\begin{aligned} f_3(x_3, \omega) &= \max \quad -(-36z_3(\omega) - 10z_4(\omega)) & (2.23) \\ \text{s.a.} \quad & z_3(\omega) + z_4(\omega) \leq U_3(\omega)x_3 \\ & z_3(\omega) \leq 6000 \\ & z_3(\omega), z_4(\omega) \geq 0 \end{aligned}$$

A solução ótima para este problema de segundo estágio (2.23) é vender a maior quantidade de beterraba pelo preço mais favorável e o restante da produção pelo preço reduzido, ou seja:

$$\begin{aligned} z_3(\omega) &= \min\{6000, U_3(\omega)x_3\} & (2.24) \\ z_4(\omega) &= \max\{U_3(\omega)x_3 - 6000, 0\} \end{aligned}$$

Substituindo esses valores ótimos na função objetivo, obtemos:

$$f_3(x_3, \omega) = 36 \times \min\{6000, U_3(\omega)x_3\} + 10 \times \max\{U_3(\omega)x_3 - 6000, 0\} \quad (2.25)$$

$$= \begin{cases} 36U_3(\omega)x_3, & U_3(\omega)x_3 \leq 6000 \\ 36 \times 6000 + 10U_3(\omega)x_3, & U_3(\omega)x_3 > 6000 \end{cases}$$

O primeiro caso analisado é quando a superfície destinada para a plantação de beterraba não é demasiado grande por forma a exceder sempre a cota de produção de 6000 toneladas ou tão pequena que a produção de beterraba seja sempre menor do que a cota para qualquer possível realização da produção. Portanto, têm-se a seguinte relação:

$$a_3x_3 \leq 6000 \leq b_3x_3 \Leftrightarrow \frac{6000}{b_3} \leq x_3 \leq \frac{6000}{a_3} \quad (2.26)$$

Assim,

$$f_3(x_3) = \int_{a_3}^{\frac{6000}{x_3}} 36tx_3h(t)dt + \int_{\frac{6000}{x_3}}^{b_3} (216000 + 10tx_3 - 60000)h(t)dt \quad (2.27)$$

$$= \frac{-18a_3^2x_3}{b_3 - a_3} + \frac{156000b_3x_3}{x_3(b_3 - a_3)} + \frac{5b_3^2x_3^2}{x_3(b_3 - a_3)} - \frac{468000000}{x_3(b_3 - a_3)} - \frac{18b_3^2x_3^2}{x_3(b_3 - a_3)} + \frac{18b_3^2x_3^2}{x_3(b_3 - a_3)}$$

$$= \frac{18(b_3^2 - a_3^2)x_3}{b_3 - a_3} - \frac{13(b_3x_3 - 6000)^2}{x_3(b_3 - a_3)}$$

Simplificando a expressão obtém-se:

$$f_3(x_3) = 18(b_3 - a_3)x_3 - \frac{13(b_3x_3 - 6000)^2}{x_3(b_3 - a_3)} \quad (2.28)$$

$$= 36\frac{b_3 + a_3}{2}x_3 - \frac{13(b_3x_3 - 6000)^2}{x_3(b_3 - a_3)}$$

Mais uma vez, a expressão (2.26) não é um fator limitante e, por isso, temos de considerar outras situações:

- A área de x_3 é tal que a produção excede a cota para qualquer possível produção, ou seja, $a_3x_3 \geq 6000 \Rightarrow x_3 \geq \frac{6000}{a_3}$. Os valores ótimos das decisões de segundo estágio são:

$$z_3(\omega) = 6000 \quad (2.29)$$

$$z_4(\omega) = U_3(\omega)x_3 - 6000$$

Portanto, $f_3(x_3, \omega) = 36 \times 6000 + 10 \times U_3(\omega)x_3 - 6000 = 156000 + 10U_3(\omega)x_3$. E o seu valor esperado é: $f_3(x_3) = 156000 + 10x_3E(U_3(\omega)) = 156000 + 10x_3\frac{a_3+b_3}{2}$.

- A área de x_3 é tal que a produção é menor que a cota para qualquer possível realização da produção, ou seja, $b_3x_3 \leq 6000 \Rightarrow x_3 \leq \frac{6000}{b_3}$. Os valores de segundo estágio são:

$$\begin{aligned} z_3(\omega) &= U_3(\omega)x_3 \\ z_4(\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Assim, $f_3(x_3, \omega) = 36U_3(\omega)x_3$ e portanto o seu valor esperado é $f_3(x_3) = 36x_3 \frac{a_3+b_3}{2}$.

De seguida, é apresentado um resumo da função $f_3(x_3)$:

$$f_3(x_3) = \begin{cases} 36x_3 \left(\frac{a_3+b_3}{2} \right), & x_3 < \frac{6000}{b_3} \\ 36x_3 \left(\frac{a_3+b_3}{2} \right) - \frac{13(b_3x_3 - 6000)^2}{x_3(b_3 - a_3)}, & \frac{6000}{b_3} \leq x_3 \leq \frac{6000}{a_3} \\ 156000 + 10x_3 \left(\frac{a_3+b_3}{2} \right), & x_3 > \frac{6000}{a_3} \end{cases} \quad (2.31)$$

Considerando novamente o caso $\alpha = 0.2$, tem-se $a_3 = 16$ e $b_3 = 24$, e o gráfico da função está representado na Figura (2.3).

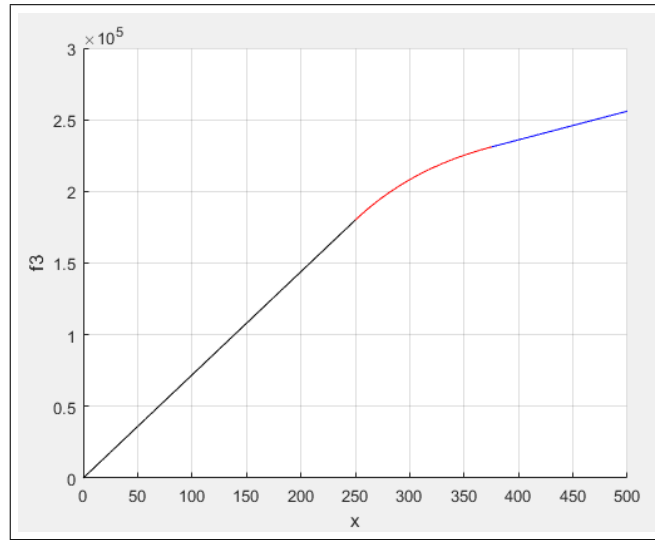


Figura 2.3 Representação gráfica da função $f_3(x_3)$ quando $\alpha = 0.2$

Atendendo que $\frac{a_i+b_i}{2}$ é o valor esperado da distribuição uniforme no intervalo $[a_i, b_i]$, em que $a_i = (1 - \alpha) \times \mu_i$ e $b_i = (1 + \alpha) \times \mu_i$ para $i = 1, 2, 3$, então $\frac{a_i+b_i}{2} = \mu_i$. Deste modo, as funções $f_i(x_i)$ podem ser reescritas em função de α da seguinte forma:

$$f_1(x_1) = \begin{cases} -47600 + 595x_1, & x_1 < \frac{200}{2.5+2.5\alpha} \\ -\frac{119(200 - (2.5 - 2.5\alpha)x_1)^2}{5x_1\alpha} + \frac{85(200 - (2.5 + 2.5\alpha)x_1)^2}{5x_1\alpha}, & \frac{200}{2.5+2.5\alpha} \leq x_1 \leq \frac{200}{2.5-2.5\alpha} \\ 425x_1 - 34000, & x_1 > \frac{200}{2.5-2.5\alpha} \end{cases} \quad (2.32)$$

$$f_2(x_2) = \begin{cases} -50400 + 630x_2, & x_2 < \frac{240}{3+3\alpha} \\ -\frac{105((3-3\alpha)x_2 - 240)^2}{6x_2\alpha} + \frac{75((3+3\alpha)x_2 - 240)^2}{6x_2\alpha}, & \frac{240}{3+3\alpha} \leq x_2 \leq \frac{240}{3-3\alpha} \\ 450x_2 - 36000, & x_2 > \frac{240}{3-3\alpha} \end{cases} \quad (2.33)$$

$$f_3(x_3) = \begin{cases} 720x_3, & x_3 < \frac{6000}{20+20\alpha} \\ 720x_3 - \frac{13((20+20\alpha)x_3 - 6000)^2}{40x_3\alpha}, & \frac{6000}{20+20\alpha} \leq x_3 \leq \frac{6000}{20-20\alpha} \\ 156000 + 200x_3, & x_3 > \frac{6000}{20-20\alpha} \end{cases} \quad (2.34)$$

O problema estocástico a dois estágios com recurso pode ser formulado como um problema determinístico, usando apenas as variáveis antecipativas e as funções $f_i(x_i)$ representadas em (2.32), (2.33), (2.34), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & -(150x_1 + 230x_2 + 260x_3) + f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Pelas Figuras (2.1), (2.2) e (2.3) pode-se observar que as três funções $f_i(x_i)$ são côncavas, contínuas e diferenciáveis e como a função objetivo do problema de primeiro estágio é linear, este problema estocástico de dois estágios é um programa convexo para a qual as condições de Karush-Kuhn-Tucker são necessárias e suficientes para o ótimo global.

De forma a mostrar que as três funções $f_i(x_i)$ são diferenciáveis, consideremos a primeira derivada de cada uma delas:

$$f_1'(x_1) = \begin{cases} 595, & x_1 < \frac{200}{2.5+2.5\alpha} \\ \frac{272000 - 42.5x_1^2 - 42.5x_1^2\alpha^2 + 510x_1^2\alpha}{x_1^2\alpha}, & \frac{200}{2.5+2.5\alpha} \leq x_1 \leq \frac{200}{2.5-2.5\alpha} \\ 425, & x_1 > \frac{200}{2.5-2.5\alpha} \end{cases} \quad (2.36)$$

$$f_2'(x_2) = \begin{cases} 630, & x_2 < \frac{240}{3+3\alpha} \\ \frac{288000 - 45x_2^2 + 45x_2^2\alpha^2 + 540x_2^2\alpha}{x_2^2\alpha}, & \frac{240}{3+3\alpha} \leq x_2 \leq \frac{240}{3-3\alpha} \\ 450, & x_2 > \frac{240}{3-3\alpha} \end{cases} \quad (2.37)$$

$$f'_3(x_3) = \begin{cases} 720, & x_3 < \frac{6000}{20+20\alpha} \\ \frac{11700000 - 130x_3^2 - 130x_3^2\alpha^2 + 460x_3^2\alpha}{x_3^2\alpha}, & \frac{6000}{20+20\alpha} \leq x_3 \leq \frac{6000}{20-20\alpha} \\ 200, & x_3 > \frac{6000}{20-20\alpha} \end{cases} \quad (2.38)$$

Como, a primeira derivada de cada uma das três funções $f_i(x_i)$ está bem definida em todo o domínio, as funções $f_i(x_i)$ são diferenciáveis.

As condições de KKT de primeira ordem para que a solução de um problema de programação não-linear seja candidata a solução ótima, desde que as condições de regularidade sejam satisfeitas e estão referidas no seguinte teorema [10]:

Teorema: Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $i = 1, \dots, m$. Considera-se o problema de otimização em que se pretende maximizar $f(x)$ sujeito a $g_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$. Seja \bar{x} uma solução admissível e denote-se I o conjunto $\{i: g_i(\bar{x}) = 0\}$. Suponhamos que f e g_i são diferenciáveis em \bar{x} , para $i \in I$, e que g_i é contínua em \bar{x} , para $i \notin I$. Para além disso, suponhamos que $\nabla g_i(\bar{x})$, para $i \in I$, são linearmente independentes. Se \bar{x} é maximizante local do problema então existem escalares λ_i tal que:

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) &= 0 \\ \lambda_i &\geq 0, \quad i \in I \end{aligned} \quad (2.39)$$

Para além das condições referidas em (2.39) temos ainda de adicionar mais duas condições: $g_i(\bar{x}) \leq 0$ e $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$.

No problema em causa, apenas existe uma restrição $x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$, cujo gradiente é linearmente independente pois é diferente de zero, pelo que existe apenas um multiplicador de Lagrange λ . Assim, denotando por c_i com $i = 1, 2, 3$, o coeficiente da função objetivo linear do problema de primeiro estágio, as condições de otimalidade deste exemplo são dadas por:

$$\begin{cases} c_i + \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i} - \lambda & = 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 500) & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 500 & \leq 0 \\ \lambda & \geq 0 \\ x_i & \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (2.40)$$

O primeiro conjunto de restrições impõe que $\lambda = c_i + \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i}$, com $i = 1, 2, 3$ pelo que só existe solução quando o valor do segundo membro coincide para $i = 1, 2, 3$. De forma a encontrar a solução ótima para o problema foram consideradas as 27 combinações entre os ramos das funções $f_i(x_i)$, com $i = 1, 2, 3$. Quando se utiliza os ramos lineares das funções f_i , as suas derivadas $f'_i(x_i)$ são independentes do ponto x_i escolhido. Deste modo, a análise destes casos torna-se muito mais simples. A título de exemplo, considerando o primeiro ramo de $f_1(x_1)$ e de $f_2(x_2)$, têm-se que $-150 + 595 = \lambda = -230 + 630$, o que é impossível. Desse modo, conclui-se que não existe solução

ótima do problema quando $x_1 < \frac{200}{2.5+2.5\alpha}$ e $x_2 < \frac{240}{3+3\alpha}$. Pode proceder-se de forma semelhante para os restantes casos, em que se considera ramos lineares em duas funções f_i . Deste modo, verificou-se que só é possível encontrar um valor para λ em 7 casos, que serão discutidos a seguir:

- Caso (i): $x_1 < \frac{200}{2.5+2.5\alpha}$, $\frac{240}{3+3\alpha} \leq x_2 \leq \frac{240}{3-3\alpha}$, $\frac{6000}{20+20\alpha} \leq x_3 \leq \frac{6000}{20-20\alpha}$

$$\begin{cases} -150 + 595 - \lambda & = 0 \\ -230 + \frac{288000 - 45x_2^2 + 540x_2^2\alpha - 45x_2^2\alpha^2}{x_2^2\alpha} - \lambda & = 0 \\ -260 + \frac{11700000 + 460x_3^2\alpha - 130x_3^2 - 130x_3^2\alpha^2}{x_3^2\alpha} - \lambda & = 0 \\ \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 500) & = 0 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema de equações, foi encontrada a seguinte solução não negativa: $\lambda = 445$, $x_2 = \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 + 3\alpha + 1}}$, $x_3 = \sqrt{\frac{90000}{\alpha^2 + \frac{49}{26}\alpha + 1}}$ e $x_1 = 500 - \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 + 3\alpha + 1}} - \sqrt{\frac{90000}{\alpha^2 + \frac{49}{26}\alpha + 1}}$.

Contudo, esta solução não é candidata a solução ótima pois o valor de x_2 não verifica os limites definidos neste caso, pois resolvendo o lado esquerdo da condição $\frac{240}{3+3\alpha} \leq \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 + 3\alpha + 1}} \leq \frac{240}{3-3\alpha}$, conclui-se que é impossível:

$$\begin{aligned} \frac{240}{3+3\alpha} \leq \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 + 3\alpha + 1}} &\Leftrightarrow \frac{57600}{9\alpha^2 + 18\alpha + 9} \leq \frac{6400}{\alpha^2 + 3\alpha + 1} & (2.41) \\ &\Leftrightarrow 172800\alpha \leq 115200\alpha \\ &\Leftrightarrow 3 \leq 2 \end{aligned}$$

- Caso (ii): $\frac{200}{2.5+2.5\alpha} \leq x_1 \leq \frac{200}{2.5-2.5\alpha}$, $x_2 < \frac{240}{3+3\alpha}$, $\frac{6000}{20+20\alpha} \leq x_3 \leq \frac{6000}{20-20\alpha}$

$$\begin{cases} -150 + \frac{272000 - 42.5x_1^2\alpha^2 - 42.5x_1^2 + 510x_1^2\alpha}{x_1^2\alpha} - \lambda & = 0 \\ -230 + 630 - \lambda & = 0 \\ -260 + \frac{11700000 + 460x_3^2\alpha - 130x_3^2 - 130x_3^2\alpha^2}{x_3^2\alpha} - \lambda & = 0 \\ \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 500) & = 0 \end{cases}$$

A solução não negativa do sistema é: $\lambda = 400$, $x_1 = \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 + \frac{16}{17}\alpha + 1}}$, $x_3 = \sqrt{\frac{90000}{\alpha^2 + \frac{20}{13}\alpha + 1}}$ e $x_2 = 500 - \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 + \frac{16}{17}\alpha + 1}} - \sqrt{\frac{90000}{\alpha^2 + \frac{20}{13}\alpha + 1}}$.

Neste caso não é fácil verificar analiticamente se a solução verifica os limites em que está definido. Contudo, a variável x_2 verifica o seu limite apenas se a função $g(\alpha) = 500 - \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 + \frac{16}{17}\alpha + 1}} - \sqrt{\frac{90000}{\alpha^2 + \frac{20}{13}\alpha + 1}} - \frac{240}{3+3\alpha}$ for negativa. Recorrendo ao *software* MATLAB, verifica-se que a solução não é admissível, e portanto x_2 não é candidato a solução ótima.

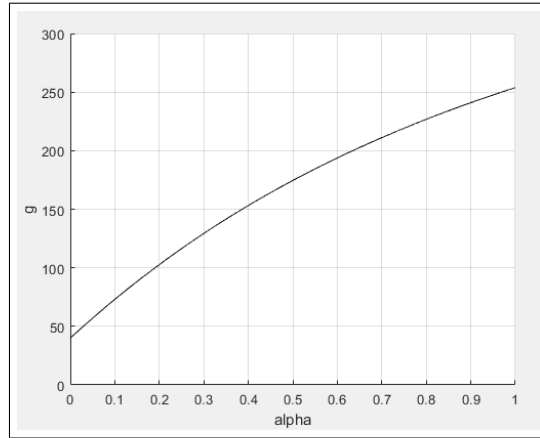


Figura 2.4 Representação gráfica da função g

- Caso (iii): $\frac{200}{2.5+2.5\alpha} \leq x_1 \leq \frac{200}{2.5-2.5\alpha}$, $\frac{240}{3+3\alpha} \leq x_2 \leq \frac{240}{3-3\alpha}$, $x_3 < \frac{6000}{20+20\alpha}$

$$\begin{cases} -150 + \frac{272000 - 42.5x_1^2\alpha^2 - 42.5x_1^2 + 510x_1^2\alpha}{x_1^2\alpha} - \lambda = 0 \\ -230 + \frac{288000 - 45x_2^2 + 540x_2^2\alpha - 45x_2^2\alpha^2}{x_2^2\alpha} - \lambda = 0 \\ -260 + 720 - \lambda = 0 \\ \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 500) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações, obtém-se a solução não negativa $\lambda = 460$, $x_1 = \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 + \frac{40}{17}\alpha + 1}}$,
 $x_2 = \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 + \frac{10}{3}\alpha + 1}}$ e $x_3 = 500 - \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 + \frac{40}{17}\alpha + 1}} - \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 + \frac{10}{3}\alpha + 1}}$.

Mais uma vez, o valor de x_2 encontrado não é candidato a solução ótima. Uma vez que a inequação $\frac{240}{3+3\alpha} \leq \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 + \frac{10}{3}\alpha + 1}}$, não é válida para os valores de α considerados:

$$\begin{aligned} \frac{240}{3+3\alpha} \leq \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 + \frac{10}{3}\alpha + 1}} &\Leftrightarrow \frac{57600}{9\alpha^2 + 18\alpha + 9} \leq \frac{6400}{\alpha^2 + \frac{10}{3}\alpha + 1} & (2.42) \\ &\Leftrightarrow 576000\alpha \leq 345600\alpha \\ &\Leftrightarrow 10 \leq 6 \end{aligned}$$

- Caso (iv): $\frac{200}{2.5+2.5\alpha} \leq x_1 \leq \frac{200}{2.5-2.5\alpha}$, $x_2 > \frac{240}{3-3\alpha}$, $\frac{6000}{20+20\alpha} \leq x_3 \leq \frac{6000}{20-20\alpha}$

$$\begin{cases} -150 + \frac{272000 - 42.5x_1^2\alpha^2 - 42.5x_1^2 + 510x_1^2\alpha}{x_1^2\alpha} - \lambda = 0 \\ -230 + 450 - \lambda = 0 \\ -260 + \frac{11700000 + 460x_3^2\alpha - 130x_3^2 - 130x_3^2\alpha^2}{x_3^2\alpha} - \lambda = 0 \\ \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 500) = 0 \end{cases}$$

O valor da solução não negativa é: $\lambda = 220$, $x_1 = \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 - \frac{56}{17}\alpha + 1}}$, $x_3 = \sqrt{\frac{90000}{\alpha^2 + \frac{2}{13}\alpha + 1}}$ e $x_2 = 500 - \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 - \frac{56}{17}\alpha + 1}} - \sqrt{\frac{90000}{\alpha^2 + \frac{2}{13}\alpha + 1}}$.

O valor de x_1 não está definido para $0.33832 < \alpha < 1$. Para $0 < \alpha < 0.33832$, x_1 não é candidato a solução ótima porque não verifica o limite correspondente a este caso.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 - \frac{56}{17}\alpha + 1}} &\leq \frac{200}{2.5 - 2.5\alpha} \Leftrightarrow \frac{6400}{\alpha^2 - \frac{56}{17}\alpha + 1} \leq \frac{40000}{6.25\alpha^2 - 12.5\alpha + 6.25} & (2.43) \\ &\Leftrightarrow -1360000 \leq -2240000 \\ &\Leftrightarrow -17 \leq -28 \end{aligned}$$

- Caso (v): $\frac{200}{2.5+2.5\alpha} \leq x_1 \leq \frac{200}{2.5-2.5\alpha}$, $\frac{240}{3+3\alpha} \leq x_2 \leq \frac{240}{3-3\alpha}$, $x_3 > \frac{6000}{20-20\alpha}$

$$\begin{cases} -150 + \frac{272000 - 42.5x_1^2\alpha^2 - 42.5x_1^2 + 510x_1^2\alpha}{x_1^2\alpha} - \lambda = 0 \\ -230 + \frac{288000 - 45x_2^2 + 540x_2^2\alpha - 45x_2^2\alpha^2}{x_2^2\alpha} - \lambda = 0 \\ -260 + 200 - \lambda = 0 \\ \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 500) = 0 \end{cases}$$

Como o λ encontrado é -60 , não é admissível e portanto, este caso também será excluído.

- Caso (vi): $x_1 > \frac{200}{2.5-2.5\alpha}$, $\frac{240}{3+3\alpha} \leq x_2 \leq \frac{240}{3-3\alpha}$, $\frac{6000}{20+20\alpha} \leq x_3 \leq \frac{6000}{20-20\alpha}$

$$\begin{cases} -150 + 425 + \lambda = 0 \\ -230 + \frac{288000 - 45x_2^2 + 540x_2^2\alpha - 45x_2^2\alpha^2}{x_2^2\alpha} - \lambda = 0 \\ -260 + \frac{11700000 + 460x_3^2\alpha - 130x_3^2 - 130x_3^2\alpha^2}{x_3^2\alpha} - \lambda = 0 \\ \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 500) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações, o valor da solução não negativa é $\lambda = 275$, $x_2 = \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 - \frac{7}{9}\alpha + 1}}$, $x_3 = \sqrt{\frac{90000}{\alpha^2 + \frac{15}{26}\alpha + 1}}$ e $x_1 = 500 - \sqrt{\frac{6400}{\alpha^2 - \frac{7}{9}\alpha + 1}} - \sqrt{\frac{90000}{\alpha^2 + \frac{15}{26}\alpha + 1}}$.

Analisando a Figura (2.5), observa-se que x_1 só é candidato a solução ótima quando $0 < \alpha \leq 0.554$. Para $\alpha \geq 0.555$, o valor de x_1 é menor que o seu limite inferior e portanto, a solução não é admissível.

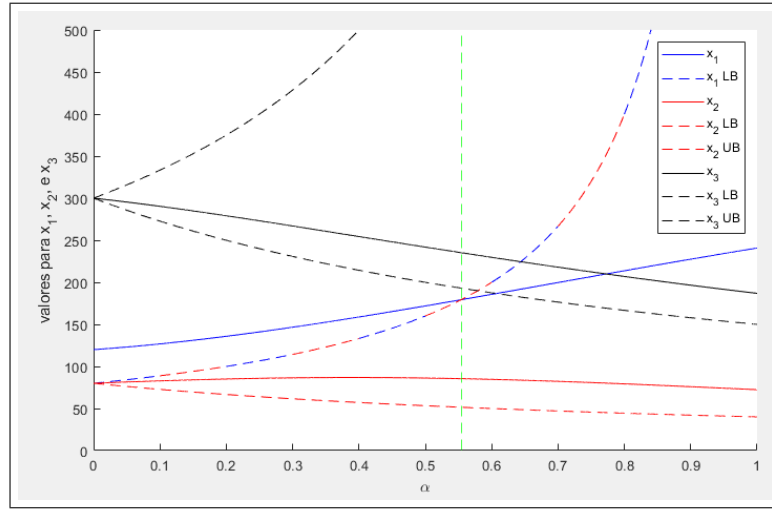


Figura 2.5 Representação gráfica dos valores de x_1, x_2 e x_3 (e dos seus limites) no caso (vi)

- Caso (vii): $\frac{200}{2.5+2.5\alpha} \leq x_1 \leq \frac{200}{2.5-2.5\alpha}$, $\frac{240}{3+3\alpha} \leq x_2 \leq \frac{240}{3-3\alpha}$, $\frac{6000}{20+20\alpha} \leq x_3 \leq \frac{6000}{20-20\alpha}$

$$\begin{cases} -150 + \frac{272000 - 42.5x_1^2\alpha^2 - 42.5x_1^2 + 510x_1^2\alpha}{x_1^2\alpha} - \lambda = 0 \\ -230 + \frac{288000 - 45x_2^2 + 540x_2^2\alpha - 45x_2^2\alpha^2}{x_2^2\alpha} - \lambda = 0 \\ -260 + \frac{11700000 + 460x_3^2\alpha - 130x_3^2 - 130x_3^2\alpha^2}{x_3^2\alpha} - \lambda = 0 \\ \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 500) = 0 \end{cases}$$

A partir do sistema de equações, os valores das decisões de primeiro estágio são os seguintes:

$$x_1 = \sqrt{\frac{272000}{42.5\alpha^2 + 42.5 - 360\alpha + \lambda\alpha}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{288000}{45\alpha^2 + 45 - 310\alpha + \lambda\alpha}} \quad e \quad x_3 = \sqrt{\frac{11700000}{130\alpha^2 + 130 - 200\alpha + \lambda\alpha}}$$

Neste caso, apenas conseguiu-se obter expressões para x_1, x_2 e x_3 em função de λ , mas não se conseguiu obter uma expressão explícita dependendo apenas de α para qualquer uma das variáveis. Porém, a última equação indica que $\lambda = 0$ ou $x_1 + x_2 + x_3 = 500$. Considerando o caso $\lambda = 0$, verifica-se que x_2 não é candidato a solução ótima pois resolvendo o lado direito da condição $\frac{240}{3+3\alpha} \leq \sqrt{\frac{288000}{45\alpha^2 + 45 - 310\alpha + \lambda\alpha}} \leq \frac{240}{3-3\alpha}$, com $\lambda = 0$ conclui-se que é impossível:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{288000}{45\alpha^2 - 310\alpha + 45}} \leq \frac{240}{3-3\alpha} &\Leftrightarrow \frac{288000}{45\alpha^2 - 310\alpha + 45} \leq \frac{57600}{9\alpha^2 - 18\alpha + 9} & (2.44) \\ &\Leftrightarrow -5184000\alpha \leq -17856000\alpha \\ &\Leftrightarrow -90 \leq -310 \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que $\lambda > 0$ e portanto $x_1 + x_2 + x_3 = 500$, pelo que λ deve satisfazer $\sqrt{\frac{272000}{42.5\alpha^2 + 42.5 - 360\alpha + \lambda\alpha}} + \sqrt{\frac{288000}{45\alpha^2 + 45 - 310\alpha + \lambda\alpha}} + \sqrt{\frac{11700000}{130\alpha^2 + 130 - 200\alpha + \lambda\alpha}} = 500$.

A última equação do sistema define implicitamente λ em função de α tendo utilizado a função *fzero* do software MATLAB para estimar numericamente os valores de λ em função de $\alpha \in]0, 1[$ (o

intervalo foi discretizado utilizando um passo de 0.001) os quais podem ser observados na Figura (2.6). A partir desse gráfico, conclui-se que para $\alpha < 0.0388$ o valor de λ é negativo, devendo ser excluído porque não satisfaz as condições de otimalidade. Para cada valor de $\alpha \in [0.0388, 1]$, substitui-se o valor de λ em x_i , obtendo os gráficos indicados na Figura (2.7). Pode observar-se que apenas quando $\alpha \geq 0.555$ os valores de x_i estão todos dentro dos respectivos limites.

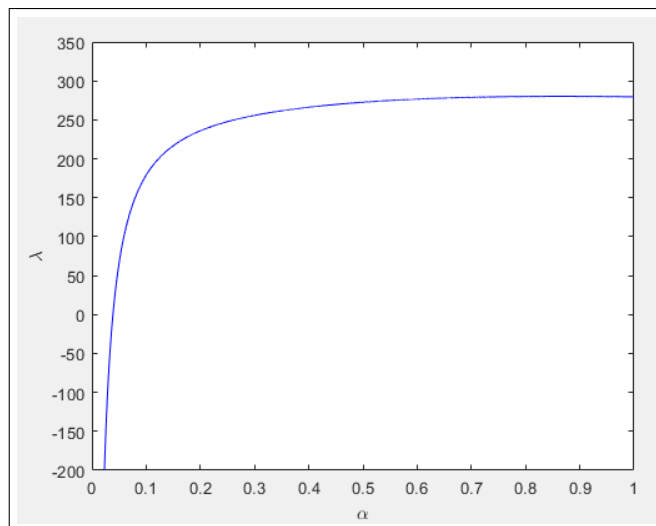


Figura 2.6 Representação gráfica da variação do parâmetro λ em relação ao parâmetro α

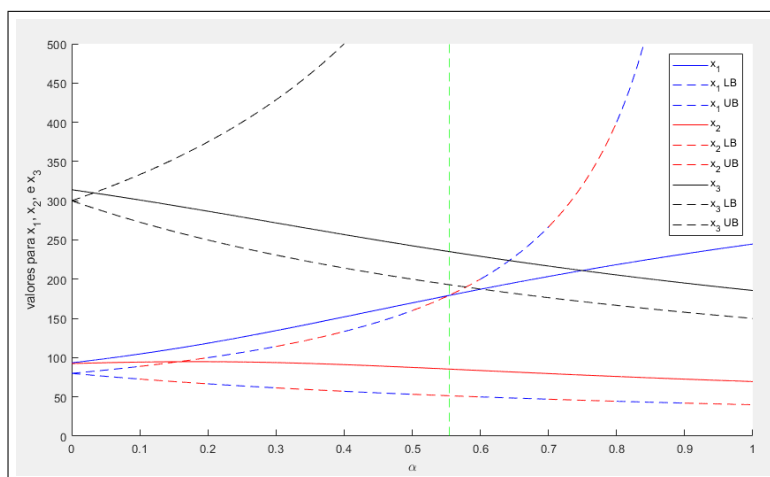


Figura 2.7 Representação gráfica dos valores de x_1, x_2 e x_3 (e dos seus limites) no caso (vii)

Para cada valor de $\alpha \in]0, 1[$, calculou-se o valor da função objetivo em cada um dos candidatos a maximizante local utilizando o *software* MATLAB permitindo deste modo encontrar o maximizante global da função. Assim, para $0 < \alpha < 0.555$ (resultado obtido numericamente), a solução ótima corresponde ao caso (vi) enquanto que para $0.555 \leq \alpha < 1$ a solução ótima corresponde ao caso (vii). A Figura (2.8) ilustra a solução ótima em função de α e a Figura (2.9) o respectivo valor ótimo do problema.

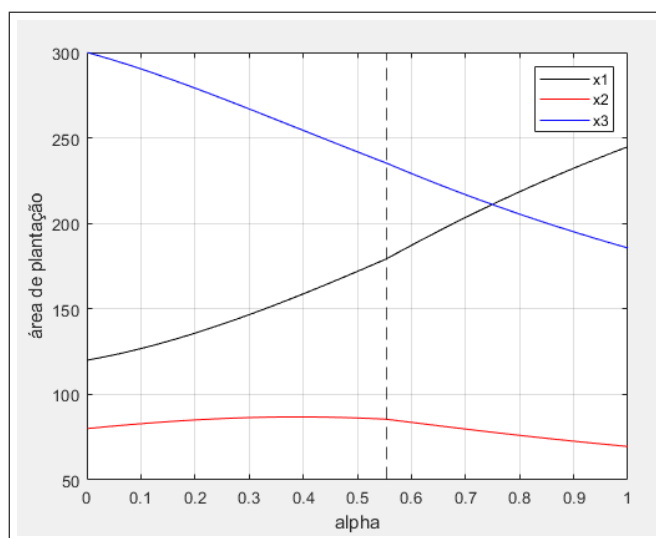


Figura 2.8 Solução ótima (variáveis antecipativas) do problema em função de α

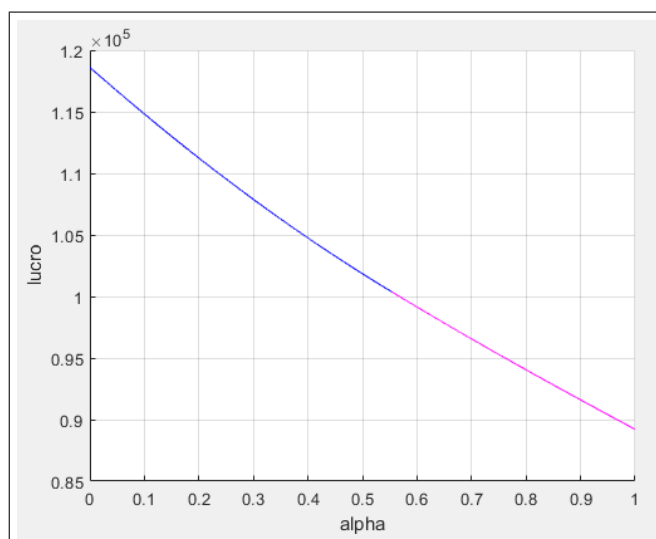


Figura 2.9 Valor ótimo do problema em função de α (a azul está apresentada a solução do caso (vi) e a roxo a solução do caso (vii))

O caso determinístico analisado na Tabela (2.2) corresponde ao caso $\alpha = 0$. A Figura (2.8) ilustra que o caso aqui estudado tende para essa solução quando α tende para zero, ou seja, quando não existe incerteza. À medida que a incerteza relativamente à produção, dada pelo parâmetro α , aumenta existe um maior investimento na área de plantação de trigo o que leva a ocorrer sempre vendas de trigo visto que a produção ultrapassa o requisito mínimo de $200t$. Há um desinvestimento na área de plantação de beterraba visto que x_3 diminui com aumento do parâmetro α de forma que a produção de beterraba não ultrapassa a cota de $6000t$ pelo que é sempre vendida pelo seu preço mais favorável. No caso da área da plantação de milho o seu valor mantém-se, não sofre grandes alterações com o parâmetro α .

Na Tabela (2.8) estão apresentadas as soluções obtidas para alguns valores do parâmetro α .

Tabela 2.8 Solução do problema (2.35) para diferentes valores de α

	$\alpha = 0.2$			$\alpha = 0.5$			$\alpha = 0.8$		
	Trigo	Milho	Beterraba	Trigo	Milho	Beterraba	Trigo	Milho	Beterraba
Área Plantada (ha)	135.83	85.07	279.1	169.84	87.57	242.59	218.5	76.05	205.45
Produção (t)	339.575	255.21	5582	424.6	262.71	4851.8	546.25	228.15	4109
Compra (t)	-	-	-	-	-	-	-	11,85	-
Venda (t)	139.575	15.21	5582	224.6	22.71	4851.8	346.25	-	4109

2.2 Programação Estocástica de múltiplos estágios com recurso

Na secção anterior deste capítulo foi desenvolvido a otimização estocástica a dois estágios com recurso. A maioria dos problemas práticos de decisão, no entanto, envolvem uma sequência de decisões que reagem para resultados que evoluem ao longo do tempo [16]. Assim, surge o modelo de otimização estocástica de múltiplos estágios com recurso em que as decisões podem ser tomadas em vários instantes de tempo, que são os estágios em que a incerteza pode ser revelada.

Nesta secção, considera-se que o número de estágios é $n \geq 2$. O evento aleatório ω é um vetor $(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ que é revelado progressivamente com o tempo. Primeiramente, estabelece-se as decisões de primeiro estágio antes de qualquer componente de ω ser revelado. A seguir, a primeira componente ω_1 é revelada. Com isso, são tomadas as decisões de segundo estágio. Posteriormente, uma nova componente de ω , ω_2 , é revelada e isto acontece sucessivamente alternando entre uma nova componente de ω ser revelada e as decisões de recurso serem determinadas. A partir de agora, considera-se apenas o caso em que o conjunto $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_S\}$ é finito, sendo p_k a probabilidade do cenário ω_k para $k = 1, \dots, S$.

De forma a ilustrar como os cenários ω_k , de $k = 1, \dots, S$, se ramificam em cada estágio, é conveniente introduzir a árvore cenário. Os nós da árvore cenário são numerados de 1 até N , em que o nó 1 é a raiz da árvore cenário e representa a variável de decisão de primeiro estágio. Cada nó i no estágio $k \geq 2$ é precedido por um único nó $a(i)$, que pode ser chamado de "pai" do nó i , no estágio $k - 1$. Os caminhos da raiz até as folhas da árvore representam os cenários. No último estágio haverá tantos nós, chamados nós terminais, quanto cenários.

Em cada nó i está associado um vetor x_i que são as variáveis de decisão, em que x_1 representa a variável de primeiro estágio e x_2, \dots, x_N são as variáveis de decisão de recurso. Para o nó i no estágio k , as decisões x_i são tomadas baseadas na informação revelada até ao estágio k . Considera-se q_i a soma de todas as probabilidades p_k sobre todos os cenários ω_k que passam pelo nó i . Assim, q_i é a probabilidade condicionada do nó i sabendo que está no estágio k . Com isso, o problema de múltiplos estágios com recurso pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \max_{x_1, \dots, x_N} \quad & \sum_{i=1}^N q_i c_i^T x_i & (2.45) \\
 \text{s.a.} \quad & Ax_1 = b \\
 & B_i x_{a(i)} + C_i x_i = d_i, \quad \text{com } i = 2, \dots, N \\
 & x_i \geq 0
 \end{aligned}$$

Nesta formulação, A e b são as restrições determinísticas da variável de primeiro estágio x_1 e B_i , C_i e d_i são as restrições estocásticas das decisões de recurso x_i e $x_{a(i)}$, $i \in \{2, \dots, N\}$.

De forma a perceber melhor a otimização estocástica de múltiplos estágios com recurso, é apresentado um exemplo de uma árvore cenário em que será transformado em um problema estocástico com múltiplos estágios.

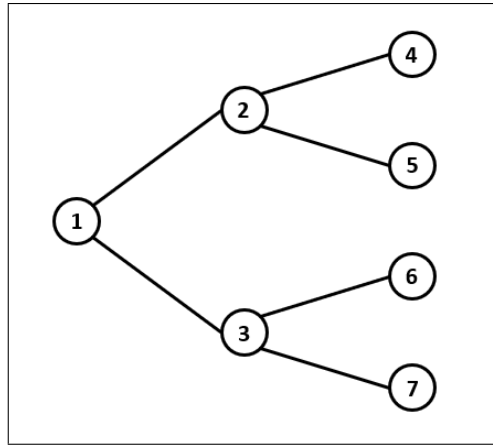


Figura 2.10 Árvore com 3 estágios e 4 cenários

Na Figura (2.10), em um primeiro estágio está o nó 1, que representa a variável de decisão de primeiro estágio, onde a decisão é tomada antes da incerteza ser revelada. A incerteza é então revelada e as decisões de segundo estágio são tomadas, sendo estas representadas pelos nós 2 e 3. A seguir, é necessário tomar uma nova decisão em um terceiro e último estágio e mais uma vez as decisões de recurso são tomadas e representa-se pelos nós 4, 5, 6 e 7, que também podem ser denominados de nós terminais.

A seguir, será apresentado a formulação estocástica do exemplo (2.10). Os nós terminais que vão do 4 até o 7, correspondem aos cenários de 1 até o 4. Então, tem-se que: $q_4 = p_1$, $q_5 = p_2$, $q_6 = p_3$ e $q_7 = p_4$, onde p_k é a probabilidade do cenário k . Também tem-se que: $q_2 = q_4 + q_5$, $q_3 = q_6 + q_7$ e $q_1 = 1$. Portanto, a formulação da Figura (2.10) é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & c_1^T x_1 + q_2 c_2^T x_2 + q_3 c_3^T x_3 + p_1 c_4^T x_4 + p_2 c_5^T x_5 + p_3 c_6^T x_6 + p_4 c_7^T x_7 & (2.46) \\
 \text{s.a.} \quad & Ax_1 & = b \\
 & B_2 x_1 + C_2 x_2 & = d_2 \\
 & B_3 x_1 + C_3 x_3 & = d_3 \\
 & B_4 x_2 + C_4 x_4 & = d_4 \\
 & B_5 x_2 + C_5 x_5 & = d_5 \\
 & B_6 x_3 + C_6 x_6 & = d_6 \\
 & B_7 x_3 + C_7 x_7 & = d_7 \\
 & x_i & \geq 0
 \end{aligned}$$

Pode-se notar que a formulação presente em (2.46) tem um crescimento exponencial com o aumento do número de cenários e estágios.

Esses modelos são computacionalmente intratáveis para problemas de tamanho real devido as complexidades de espaço e tempo [18]. Quando isso acontece, explora-se uma estrutura especial de forma a resolver o modelo, chamada de Decomposição de Benders. No Capítulo 3, será desenvolvido esse modelo para a otimização estocástica a dois estágios com recurso.

Capítulo 3

Decomposição de Benders para a Otimização Linear Estocástica

Os métodos de decomposição tem como objetivo separar um problema de programação matemática em problemas menores com a expectativa de que eles sejam mais fáceis de resolver separadamente e depois voltar a reintegrá-los para obter uma solução geral [11].

Em 1962, Jacques F. Benders aplicou a ideia de decomposição em problemas de programação inteira mista, em que algumas variáveis podem tomar valores reais e outras valores inteiros [1]. Como este tipo de problema pode ser muito difícil de resolver, Benders resolveu separar esse problema em dois: um problema de programação inteira relaxado e outro em um problema de programação linear. O método consistia em fixar um valor para as variáveis inteiras e resolver a parte linear resultante (muito mais simples de resolver). A solução deste problema permite estabelecer limites ao valor ótimo do problema original e adicionar restrições à relaxação do problema original. A resolução deste último propõe um novo valor para as variáveis inteiras e o processo repete-se.

A vantagem em utilizar métodos de decomposição é que esses dois subproblemas são bem mais fáceis em se obter uma solução e apesar de ter que resolver iterativamente cada subproblema, é provável que seja bem mais rápido do que resolver o problema original. Geralmente, os dois métodos de decomposição mais utilizados são a Decomposição de Benders e a Decomposição Lagrangeana. Nessa dissertação, será abordada apenas a Decomposição de Benders onde é possível garantir a convergência para a solução ótima do problema original em um número finito de iterações [3].

No Capítulo 2, estudamos a otimização estocástica aplicada a um problema de dois estágios em que analisamos dois tipos de distribuições: caso discreto e o caso contínuo. Vimos que mesmo quando as variáveis aleatórias tem uma distribuição contínua muito simples, como a distribuição uniforme, é, em geral, muito difícil de tratar. Desta forma, em problemas práticos consideram-se apenas distribuições discretas (ou aproximações discretas de uma distribuição contínua). Nesses casos, o número de cenários é muito grande, podendo ser um fator que limita a resolução de problemas realísticos. Em otimização linear estocástica, considera-se um número finito de cenários, que resulta assim num problema linear muito grande que apresenta a estrutura adequada para utilizar a Decomposição de Benders. Neste tipo de aplicações, o método é conhecido como Método *L-shaped*.

3.1 Decomposição de Benders

O objetivo da Decomposição de Benders é dividir o problema em subproblemas: um que envolve apenas às variáveis de primeiro estágio x , que será chamado de problema principal, e os restantes correspondem aos problemas de recurso independentes, em que cada um envolve um vetor diferente de variáveis de segundo estágio y , denominado por subproblema. Os subproblemas são resolvidos para um determinado vetor x e as suas soluções são utilizadas para gerar desigualdades que são adicionadas iterativamente ao problema principal que produz um novo valor para x e o processo repete-se [4]. O método pára quando o intervalo entre o limite superior e o limite inferior seja abaixo de uma certa tolerância ($LS - LI < \varepsilon$) e tem-se a solução ótima quando o limite superior é igual ao limite inferior.

Para descrever mais rigorosamente este método, considere-se o seguinte problema de otimização linear:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & c_1^T x + c_2^T y & (3.1) \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & Bx + Cy = d \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

onde x e y são variáveis de decisão do problema, e as restantes são constantes. Assume-se que o problema tem solução ótima, ou seja, não é impossível nem ilimitado. Além disso, admite-se que o conjunto $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$ deve ser limitado. Assim, esse problema pode ser reduzido a um problema não linear:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & c_1^T x + f(x) & (3.2) \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

em que:

$$\begin{aligned} f(x) = \max_y \quad & c_2^T y & (3.3) \\ \text{s.a.} \quad & Bx + Cy = d \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

O problema (3.2) é difícil de resolver por causa da função não linear $f(x)$. Deste modo, substituindo $f(x)$ por uma nova variável θ e impondo a restrição $f(x) \geq \theta$ obtemos a seguinte reformulação do problema original:

$$\begin{aligned} \max_{x,\theta} \quad & c_1^T x + \theta & (3.4) \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & f(x) \geq \theta \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Este novo problema tem uma função objetivo linear e a parte “difícil” está na restrição não linear $f(x) \geq \theta$. A vantagem desta reformulação é que a restrição “difícil” pode ser relaxada por um conjunto de restrições lineares, permitindo lidar sempre com problemas lineares. Numa primeira iteração considera-se uma relaxação de (3.4), removendo toda a ocorrência de θ :

$$\begin{aligned} \max_x \quad & c_1^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Resolvendo esse problema, obtém-se uma solução \bar{x} para a qual será resolvido o problema (3.3), também conhecido por subproblema. A resolução deste problema permite definir uma nova restrição que é adicionada ao problema principal. O processo repete-se até se encontrar uma solução ótima do problema ou até atingir uma precisão pretendida.

Do problema (3.3) apenas precisamos do valor ótimo (e não da solução ótima), razão pela qual iremos utilizar o dual do problema (3.3) para o valor \bar{x} encontrado. O problema é, então, dado por:

$$\begin{aligned} \min_u \quad & u^T (d - B\bar{x}) \\ \text{s.a.} \quad & C^T u \geq c_2 \\ & u \text{ livres} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Note-se que a região admissível do problema (3.6) não depende do valor de \bar{x} e que uma solução admissível do dual fornece um limite superior para o problema primal (3.3) - Teorema da dualidade fraca. Deste modo, existem três possibilidades que podem ocorrer para esse problema: pode ser impossível, pode ter solução ótima finita ou pode ser ilimitado.

- Caso 1: o problema (3.6) é impossível

Caso o problema (3.6) fosse impossível, então o problema original (3.1) seria ilimitado ou impossível, contrariando assim o que assumido inicialmente de que o problema original teria solução ótima finita.

- Caso 2: o problema (3.6) tem solução ótima finita

Se o problema (3.6) tem uma solução ótima \hat{u} então, pelo Teorema da dualidade forte, o problema (3.3) também tem uma solução ótima \hat{y} e o valor ótimo dos dois problemas coincide. Desse modo, verifica-se $f(\bar{x}) = c_2^T \hat{y} = (\hat{u})^T (d - B\bar{x})$. Assim, para um valor arbitrário de x tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf_u \left\{ (u)^T (d - Bx) : C^T u \geq c_2 \right\} \\ &\leq (\hat{u})^T (d - Bx) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Pela desigualdade $f(x) \geq \theta$ implica que $(\hat{u})^T (d - Bx) \geq \theta$, que representa o corte de otimalidade que pode ser adicionado ao problema principal (3.5).

- Caso 3: o problema (3.6) é ilimitado

Pela teoria da dualidade, o problema (3.3) não tem soluções admissíveis. Neste caso, \bar{x} não é uma solução admissível do problema (3.1) pois impede que exista algum vetor y admissível no problema (3.3). Desse modo, deve-se incluir uma restrição que exclua o valor \bar{x} . Uma vez que o problema (3.6) é ilimitado, existe um raio \bar{u} onde o valor da função decresce infinitamente, ou seja, $(\bar{u})^T(d - B\bar{x}) < 0$ e $C^T\bar{u} \geq c_2$.

Como estamos apenas interessados nas decisões x que levam a soluções admissíveis y para o problema (3.3) então $(\bar{u})^T(d - Bx) \geq 0$. Essa desigualdade é chamada de corte de admissibilidade que pode ser adicionada ao problema principal forçando o problema de recurso primal a ter soluções ótimas.

Adicionando os cortes de otimalidade ou de admissibilidade ao problema principal obtém-se um dos seguintes problemas:

$$\begin{aligned} \max \quad & a^T x + \theta & (3.8) \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & (\bar{u})^T(d - Bx) \geq 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \max \quad & a^T x + \theta & (3.9) \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & (\bar{u})^T(d - Bx) \geq \theta \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

O processo repete-se iterativamente até que o limite superior e inferior coincidam (caso em que se obtém solução ótima para o problema) ou até a diferença dos dois ser inferior a uma tolerância pré-estabelecida. Quando o problema original é de maximização, a solução do novo problema principal originado a partir da resolução do subproblema permite estimar limites superiores para o problema original. Já o limite inferior para o problema original é obtido a partir da junção do novo valor de x encontrado na resolução do problema principal da iteração anterior e a solução do subproblema associada a esse valor de x [14].

De forma a perceber melhor a praticabilidade do método da Decomposição de Benders, considere-se o seguinte exemplo retirado e adaptado de [2]:

$$\begin{aligned} \max \quad & -2x - 2y_1 - 3y_2 & (3.10) \\ \text{s.a.} \quad & x \leq 2 \\ & x + y_1 + 2y_2 = 3 \\ & 3x + 2y_1 - y_2 = 4 \\ & x \geq 0 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Como referido anteriormente, problema original (3.10) pode ser dividido em dois problemas. O problema principal corresponde a uma relaxação de (3.10) e apenas envolve a variável x :

$$\begin{aligned} \max_x \quad & -2x \\ \text{s.a.} \quad & 0 \leq x \leq 2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

O segundo problema, denominado de subproblema, é resolvido para um valor de x fixo admissível para o problema (3.11) e que será denotado por \bar{x} :

$$\begin{aligned} \max_y \quad & -2y_1 - 3y_2 \\ \text{s.a.} \quad & y_1 + 2y_2 = 3 - \bar{x} \\ & 2y_1 - y_2 = 4 - 3\bar{x} \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

O dual do problema (3.12) é dado por:

$$\begin{aligned} \min_{u_1, u_2} \quad & (3 - \bar{x})u_1 + (4 - 3\bar{x})u_2 \\ \text{s.a.} \quad & u_1 + 2u_2 \geq -2 \\ & 2u_1 - u_2 \geq -3 \\ & u_1, u_2 \text{ livres} \end{aligned} \quad (3.13)$$

O processo inicia-se resolvendo o problema (3.11) e encontramos a solução ótima $\bar{x} = 0$. Com esse valor de x , substituímos no problema dual (3.13) e resolvemos:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3u_1 + 4u_2 \\ \text{s.a.} \quad & u_1 + 2u_2 \geq -2 \\ & 2u_1 - u_2 \geq -3 \\ & u_1, u_2 \text{ livres} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para o problema dual acima, a solução ótima é $\hat{u} = (-1.6, -0.2)$ originando o valor ótimo de -5.6 . Pela Figura (3.1) percebe-se melhor que esta solução encontrada é ótima pois através da curva de nível consegue-se mostrar a direção para a qual a função objetivo melhora.

Neste caso o valor ótimo -5.6 , representa o valor de f em $x = 0$ (solução de (3.11)), e portanto, é um limite inferior para o problema original (3.10) visto que é uma solução admissível já que satisfaz as restrições do problema original. Uma vez que, estamos perante o caso em que o problema (3.12) tem uma solução ótima, então para um valor de x genérico deverá verificar-se:

$$\begin{aligned} f(x) & \leq (\hat{u})^T (d - Bx) \\ & = (3 - x) \times (-1.6) + (4 - 3x) \times (-0.2) \\ & = -5.6 + 2.2x \end{aligned} \quad (3.15)$$

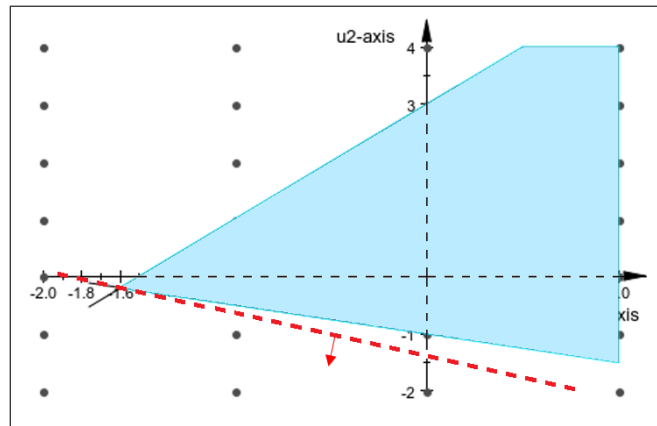


Figura 3.1 Representação gráfica da região admissível e uma curva de nível da função objetivo do problema (3.14)

Como já foi referido anteriormente, $f(x) \geq \theta$ e por isso deve adicionar-se o corte de otimalidade $-5.6 + 2.2x \geq \theta$ para atualizar ao problema principal:

$$\begin{aligned} \max \quad & -2x + \theta & (3.16) \\ \text{s.a} \quad & -5.6 + 2.2x \geq \theta \\ & 0 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

A solução ótima para este problema (que continua a ser uma relaxação do problema (3.10)) é $(\hat{x}, \hat{\theta}) = (2, -1.2)$ em que o valor ótimo obtido é -5.2 e corresponde a um limite superior para o problema original (3.10). Como $LI < LS$, continuamos e substituindo o novo valor de $\bar{x} = 2$ no problema dual (3.13) e obtém-se:

$$\begin{aligned} \min \quad & u_1 - 2u_2 & (3.17) \\ \text{s.a} \quad & u_1 + 2u_2 \geq -2 \\ & 2u_1 - u_2 \geq -3 \\ & u_1, u_2 \text{ livres} \end{aligned}$$

Verifica-se graficamente na Figura (3.2) que o problema acima é ilimitado pois a curva de nível cresce infinitamente.

Como o problema dual acima é ilimitado, estamos perante ao caso em que o problema (3.12) não tem soluções admissíveis. Deste modo, $x = 2$ também não é admissível para o problema (3.10) devendo então ser excluído do problema (3.16) através de um corte de admissibilidade. Uma vez que o problema (3.17) é ilimitado, existe uma direção \tilde{u} que define um raio admissível na qual a função objetivo do problema dual decresce infinitamente, ou seja, $(\tilde{u})^T (d - Bx) < 0$ e $C^T \tilde{u} \geq c_2$. Consegue-se visualizar que uma possível direção nestas condições é $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = (1, 2)$.

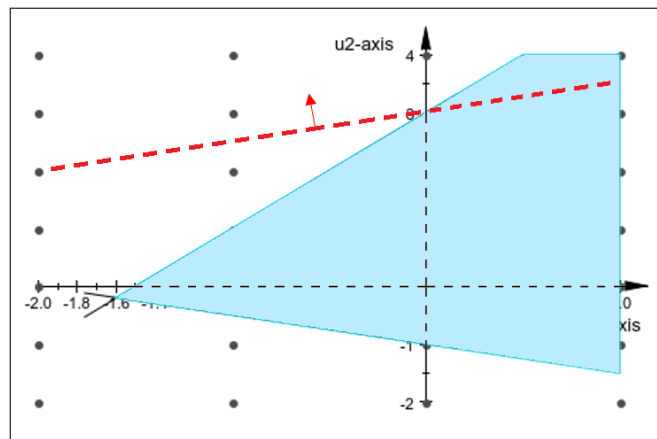


Figura 3.2 Representação gráfica do problema e uma curva de nível da função objetivo do problema (3.17)

Portanto, introduz-se o seguinte corte de admissibilidade ao problema (3.16):

$$\begin{aligned}
 (\bar{u})^T(d - Bx) \geq 0 &\Leftrightarrow (3 - x) \times (1) + (4 - 3x) \times (2) \geq 0 & (3.18) \\
 &\Leftrightarrow 11 - 7x \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow x \leq \frac{11}{7}
 \end{aligned}$$

Essa restrição é então adicionada ao problema (3.16) obtendo um novo problema principal:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & -2x + \theta & (3.19) \\
 \text{s.a} \quad & -5.6 + 2.2x \geq \theta \\
 & 0 \leq x \leq \frac{11}{7}
 \end{aligned}$$

A restrição $x \leq 2$ foi removida pois é redundante relativamente a $x \leq \frac{11}{7}$. A solução encontrada para esta relaxação é $(\hat{x}, \hat{\theta}) = (\frac{11}{7}, -\frac{15}{7})$ em que o valor ótimo é $-\frac{37}{7}$, sendo um limite superior para o problema original. Como nesta iteração não foi obtido um limite inferior para o problema então considera-se o limite inferior obtido na primeira iteração, ou seja, -5.6 . Uma vez que os dois limites não coincidem, o processo repete-se.

Mais uma vez, substitui-se o valor de x encontrado na iteração anterior no problema dual (3.13):

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \frac{10}{7}u_1 - \frac{5}{7}u_2 & (3.20) \\
 \text{s.a} \quad & u_1 + 2u_2 \geq -2 \\
 & 2u_1 - u_2 \geq -3 \\
 & u_1, u_2 \text{ livres}
 \end{aligned}$$

Para esse problema dual foi encontrado uma solução $\hat{u} = (-1.6, -0.2)$ com valor ótimo de $-\frac{15}{7}$ e verifica-se graficamente na Figura (3.3) que a solução encontrada é ótima pois através da curva de nível consegue-se mostrar a direção para a qual a função objetivo melhora.

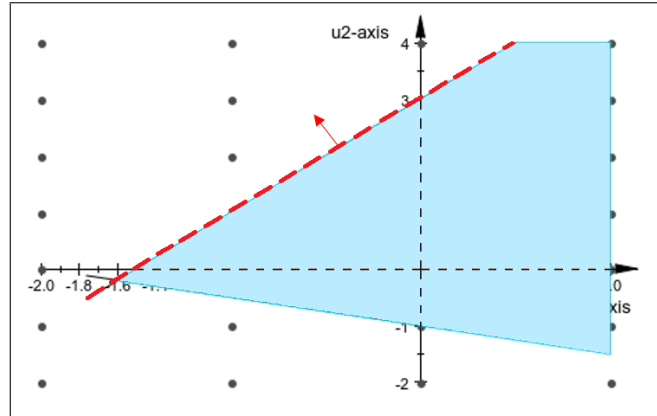


Figura 3.3 Representação gráfica do problema e uma curva de nível da função objetivo do problema (3.20)

Esse valor ótimo corresponde ao valor da função f em $x = \frac{11}{7}$ e permite determinar o seguinte limite inferior para o problema original (3.10): $-2 \times \frac{11}{7} + (-\frac{15}{7}) = -\frac{37}{7}$. Portanto, mais um corte de otimalidade será gerado e será dado por: $-5.6 + 2.2x \geq \theta$ e pode ser adicionado ao problema principal:

$$\begin{aligned} \max \quad & -2x + \theta & (3.21) \\ \text{s.a} \quad & -5.6 + 2.2x \geq \theta \\ & 0 \leq x \leq \frac{11}{7} \end{aligned}$$

A solução encontrada para o problema acima é $(\hat{x}, \hat{\theta}) = (\frac{11}{7}, -\frac{15}{7})$ com valor ótimo de $-\frac{37}{7}$, que neste caso é o limite superior para o problema original. Como, $LS = LI$ encontramos um valor ótimo para o problema (3.10) e o método da Decomposição de Benders pára ao fim de 3 iterações.

Foi utilizado a implementação da Decomposição de Benders através do *software* MATLAB proposta em [9], adaptando os seus dados de acordo com o exemplo formulado em (3.10). Na Figura (3.4) pode-se confirmar que o problema converge para o valor da função objetivo ao fim de 3 iterações.

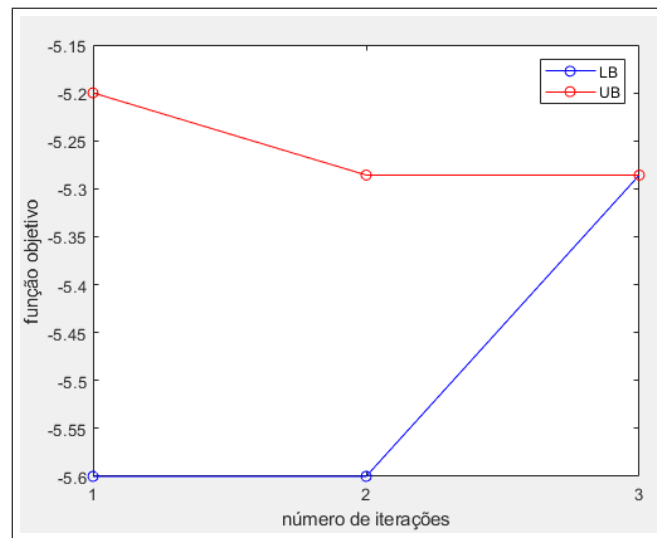


Figura 3.4 Evolução do limite inferior (LB) e superior (UB) com o número de iterações no método de Benders aplicado ao problema (3.10)

3.2 Método *L-shaped*

Como já dito anteriormente, o Método *L-shaped* é uma aplicação da Decomposição de Benders em programação estocástica. A estrutura de programação estocástica que queremos explorar é a formulação (2.6) apresentada no Capítulo 2 que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \max_x \quad & a^T x + \sum_{k=1}^S p_k f(x, \omega_k) \\
 \text{s.a.} \quad & Ax = b \\
 & x \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde para cada x admissível no problema anterior e para cada $k = 1, \dots, S$ têm-se:

$$\begin{aligned}
 f(x, \omega_k) = \max_{y_k} \quad & c_k^T y_k \\
 \text{s.a.} \quad & C_k y_k = d_k - B_k x \\
 & y_k \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Dualizando o problema primal acima, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & (u_k)^T (d_k - B_k x) \\
 \text{s.a.} \quad & C_k^T u_k \geq c_k \\
 & u_k \text{ livres}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Da mesma forma que foi realizado na secção (3.1), para cada cenário k é possível obter os cortes de otimalidade ou de admissibilidade, os quais podem ser adicionados ao problema original obtendo:

$$\begin{aligned}
\max \quad & a^T x + \sum_{k=1}^S p_k \theta_k & (3.25) \\
\text{s.a.} \quad & Ax = b \\
& (u_k^i)^T (d_k - B_k x) \geq \theta_k, \text{ para os valores de } k \text{ em que o problema (3.24)} \\
& \qquad \qquad \qquad \text{tem solução ótica finita na iteração } i \\
& (u_k^i)^T (d_k - B_k x) \geq 0, \text{ para os valores de } k \text{ em que o problema (3.24)} \\
& \qquad \qquad \qquad \text{é ilimitado na iteração } i \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

onde u_k^i é, respetivamente, a solução ótica do problema (3.24) ou a direção onde esse problema decresce infinitamente.

De forma a exemplificar o método, foi utilizado o problema (2.8) que apresenta 3 cenários, 3 variáveis de decisão de primeiro estágio, 6 variáveis de decisão de segundo estágio para cada cenário:

$$\begin{aligned}
\max \quad & -(150x_1 + 230x_2 + 260x_3) & (3.26) \\
& + \frac{1}{3}(-238y_{11} + 170z_{11} - 210y_{21} + 150z_{21} + 36z_{31} + 10z_{41}) \\
& + \frac{1}{3}(-238y_{12} + 170z_{12} - 210y_{22} + 150z_{22} + 36z_{32} + 10z_{42}) \\
& + \frac{1}{3}(-238y_{13} + 170z_{13} - 210y_{23} + 150z_{23} + 36z_{33} + 10z_{43}) \\
\text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\
& 3x_1 + y_{11} - z_{11} \geq 200 \\
& 3.6x_2 + y_{21} - z_{21} \geq 240 \\
& z_{31} + z_{41} \leq 24x_3 \\
& z_{31} \leq 6000 \\
& 2.5x_1 + y_{12} - z_{12} \geq 200 \\
& 3x_2 + y_{22} - z_{22} \geq 240 \\
& z_{32} + z_{42} \leq 20x_3 \\
& z_{32} \leq 6000 \\
& 2x_1 + y_{13} - z_{13} \geq 200 \\
& 2.4x_2 + y_{23} - z_{23} \geq 240 \\
& z_{33} + z_{43} \leq 16x_3 \\
& z_{33} \leq 6000 \\
& x, y, z \geq 0
\end{aligned}$$

Mais uma vez foi utilizado a implementação da Decomposição de Benders através do *software* MATLAB proposto em [9] que confirma a solução obtida na Tabela (2.6) e pela Figura (3.5) pode-se confirmar que o problema converge para o valor da função objetivo ao fim de 6 iterações.

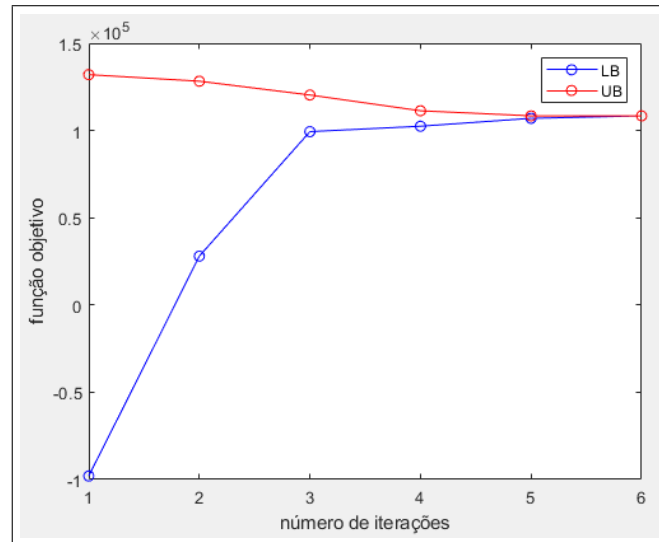


Figura 3.5 Convergência do método da Decomposição de Benders para o problema do fazendeiro (2.8)

Capítulo 4

Aplicação da Otimização Estocástica às Finanças

Em muitos problemas do quotidiano, os dados do problema são incertos fazendo com que a otimização estocástica tenha diversas aplicações em muitos problemas reais. Uma das áreas onde essa aplicação é notória é as Finanças dado que dependem muitas vezes de preços de ativos que variam de forma incerta.

Um dos problemas em Finanças onde a otimização estocástica é largamente utilizada é o problema de bens e responsabilidades. Geralmente, a gestão de bens e responsabilidades é também conhecida como gestão de ativos e passivos (ou *asset liability management*). Essa prática tem como objetivo principal gerenciar o risco das instituições financeiras de forma a evitar a incompatibilidade entre os ativos e passivos. Por ativo entende-se como todos os bens e direitos que uma instituição financeira possui em determinado momento e os passivos representam todas as obrigações e dívidas contraídas pela instituição financeira.

Os problemas de gestão de ativos e passivos são essenciais para as seguradoras e os bancos pois são instituições que envolvem grandes quantidades de liquidez e procuram estratégias de portfólio eficiente para o uso dos seus ativos e passivos sob a consideração de incerteza ligada ao retorno de portfólio, fluxos de caixa e consequentes custos [17].

A natureza temporal do cumprimento das responsabilidades (passivos) coloca o problema em vários períodos de tempo e daí a utilização da otimização estocástica onde as decisões podem ser tomadas em diversos momentos temporais.

De forma a ilustrar uma aplicação da otimização estocástica a um problema financeiro, será modelado um problema proposto em [4]. Considera-se uma empresa que enfrentará requisitos de caixa em 8 trimestres. Sabe-se que no primeiro trimestre o requisito de caixa necessário é de 100€, e para os restantes trimestres a empresa considera três cenários possíveis os quais estão representados na Tabela (4.1).

Note-se que os valores positivos representam necessidades de caixa enquanto que os valores negativos representam os excedentes de caixa, ou seja, o lucro. A empresa tem três tipos de empréstimos possíveis que pode recorrer:

Tabela 4.1 Requisitos de caixa

Cenário	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	$t = 8$
1	100	450	100	-650	-550	200	650	-850
2		500	100	-600	-500	200	600	-900
3		550	150	-600	-450	250	600	-800

- Empréstimo a dois anos no início do primeiro trimestre com taxa de juro de 1% por trimestre.
- Empréstimo a 6 meses no início de cada trimestre com taxa de juro de 1.8% por trimestre.
- Empréstimo a 3 meses no início de cada trimestre com taxa de juro de 2.5% por trimestre.

Note-se que qualquer excedente pode ser investido a uma taxa de juro de 0.5% por trimestre.

Pretende-se formular um problema que maximiza a riqueza esperada no fim do oitavo trimestre, assumindo que os três cenários podem ocorrer com a mesma probabilidade, ou seja, $\frac{1}{3}$.

A formulação de otimização estocástica utilizada nos problemas de gestão de bens e responsabilidades baseia-se na incerteza, em que há uma distribuição discreta de probabilidade e que podem ser organizados em uma estrutura de árvore que está representada na Figura (4.1).

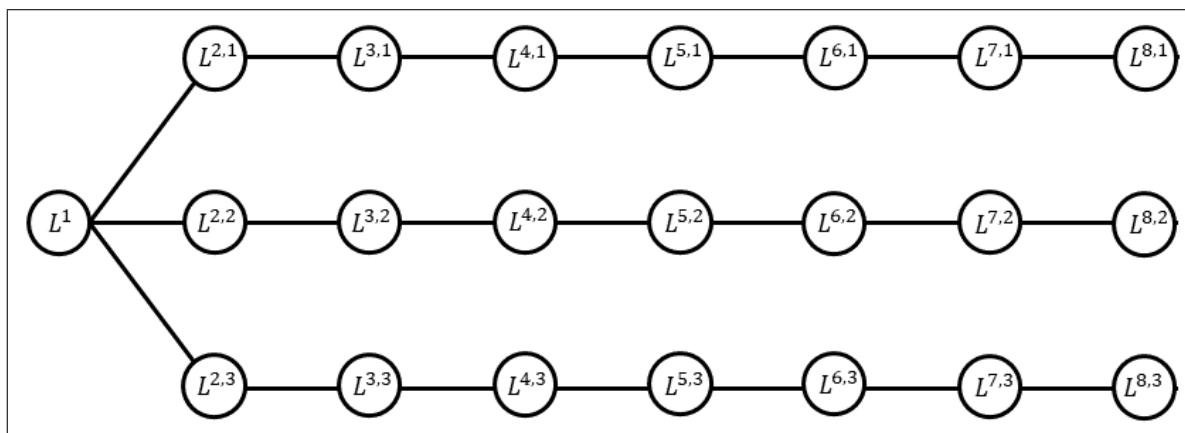


Figura 4.1 Árvore Cenário

O problema é apenas de dois estágios (apesar de envolver mais instantes temporais), uma vez que a incerteza apenas surge no segundo trimestre, isto é, quando é revelado o cenário no segundo trimestre onde são conhecidos todos os requisitos de caixa dos restantes trimestres.

Neste exemplo, a empresa têm de cumprir várias responsabilidades L^t , em que $t = 1, \dots, T$ em $T = 8$ períodos temporais dados trimestralmente. Para fazer face a essas responsabilidades a empresa forma uma carteira de investimento que consiste em tomar posição em um conjunto de $n = 3$ empréstimos e um depósito (valor em caixa). Os retornos associados a cada empréstimo/depósito são representados por R_i , com $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. De uma forma geral, considere-se $x_i^{t,c}$ o empréstimo contratado do tipo i , no período t e no cenário c , em que $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $t \in \{2, \dots, 8\}$ e $c \in \{1, 2, 3\}$.

Note-se que no primeiro trimestre ($t = 1$) não estão definidos cenários pelo que numa situação concreta o índice c será removido. Portanto, têm-se que:

- $x_0^{t,c}$: representa o saldo no início de cada trimestre no respectivo cenário que pode ser investido a uma taxa de juro de 0.5%.
- x_1^1 : representa o valor do empréstimo a 2 anos realizado no início do primeiro trimestre.
- $x_2^{t,c}, x_3^{t,c}$: representa o valor do empréstimo a 6 e a 3 meses no início do trimestre $t \geq 1, \dots, 8$.
- v^c : representa o saldo no fim do oitavo trimestre.
- R_0 : representa o valor do retorno quando o saldo é investido.
- R_1, R_2, R_3 : representam o valor do juro dos empréstimos a 2 anos, 6 meses e 3 meses, respectivamente.

A Figura (4.2) ilustra a relação destas variáveis com os instantes temporais associados ao problema.

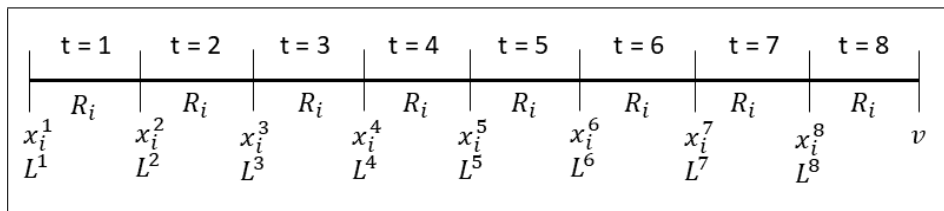


Figura 4.2 Esquema dos trimestres

De forma a definir as restrições para o problema deve-se ter em conta algumas observações:

- O empréstimo a 2 anos só pode ser realizado no início do primeiro trimestre, e deverá ser liquidado apenas no fim do oitavo trimestre. Os juros desse empréstimo $x_1^1 \times R_1$ deverão ser pagos em todos os trimestres.
- Os empréstimos a 6 meses feitos no início do período pagam juros no fim desse período e no seguinte. Desse modo, no início do período t deve ser pago os juros dos empréstimos realizados no início de $(t-1)$ e em $(t-2)$ e liquidando o empréstimo realizado no início do período $(t-2)$, isto é, $(x_2^{t-1,c} + x_2^{t-2,c}) \times R_2 + x_2^{t-2,c}$. Não se pode pedir empréstimo de 6 meses no último trimestre porque tem de estar liquidado no fim do oitavo trimestre.
- Os empréstimos a 3 meses podem ser realizados no início do período t onde pagam os respetivos juros e devem ser liquidados no fim desse período, isto é, no início do período t deve-se pagar $(1 + R_3) \times x_3^{t-1,c}$.

Portanto, as restrições são da seguinte forma:

- A primeira restrição para o problema representa o saldo no início do primeiro trimestre em que são pagas as responsabilidades que devem ser cumpridas no início desse trimestre, L_1 e a soma dos três empréstimos inicialmente realizados, portanto tem-se que: $x_0^1 = -L^1 + \sum_{i=1}^3 x_i^1$

- Quando $t = 2, \dots, 8$, essa restrição representa o respectivo saldo em cada um dos trimestres em que é investido no trimestre anterior, são pagas as responsabilidades que devem ser cumpridas e são pagos os juros relativamente aos empréstimos dos trimestres anteriores e a soma dos três empréstimos realizados no trimestre em questão e portanto, a seguinte restrição é adicionada: $x_0^{t,c} = (1 + R_0)x_0^{t-1,c} - L^{t,c} - R_1x_1^1 - R_2x_2^{t-1,c} - (1 + R_2)x_2^{t-2,c} - (1 + R_3)x_3^{t-1,c} + \sum_{i=1}^3 x_i^{t,c}$, com $t \in \{2, \dots, 8\}, c \in \{1, 2, 3\}$, onde se admite (para simplificar a notação) que $x_2^{0,c} = 0$.
- No fim do oitavo trimestre é necessário verificar que o saldo é positivo no fim de pagar todos os empréstimos e portanto, $v^c = (1 + R_0)x_0^{8,c} - L^{8,c} - (1 + R_1)x_1^1 - (1 + R_2)x_2^{7,c} - (1 + R_3)x_3^{8,c}$.

São impostas restrições de não negatividade em todas as variáveis e portanto $x_i^{t,c} \geq 0$ e $v^c \geq 0$. Além disso, sabe-se que o empréstimo a 2 anos é efetuado apenas no primeiro trimestre, ou seja, não é possível efetuar esse tipo de empréstimo em $t \in \{2, \dots, 8\}$. O empréstimo a 6 meses não pode ser efetuado no último trimestre pois não há possibilidade de ser liquidado, no período em estudo. Deste modo, adicionam-se as seguintes restrições ao problema:

- $x_1^{t,c} = 0, t \in \{2, \dots, 8\}, c \in \{1, 2, 3\}$
- $x_2^{8,c} = 0, c \in \{1, 2, 3\}$

Pretende-se maximizar a função objetivo do problema que consiste na riqueza esperada no fim do oitavo trimestre relativamente a cada um dos cenários possíveis, ou seja, $E(v) = \frac{1}{3}v^1 + \frac{1}{3}v^2 + \frac{1}{3}v^3$.

A versão determinística para esse problema estocástico de dois estágios é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \frac{1}{3}v^1 + \frac{1}{3}v^2 + \frac{1}{3}v^3 & (4.1) \\
 \text{s.a} \quad & x_0^1 - \sum_{i=1}^3 x_i^1 = -L^1, \quad c \in \{1, 2, 3\} \\
 & x_0^{2,c} - (1 + R_0)x_0^1 + R_1x_1^1 + R_2x_2^1 + (1 + R_3)x_3^1 - \sum_{i=1}^3 x_i^{2,c} = -L^{2,c}, \quad c \in \{1, 2, 3\} \\
 & x_0^{3,c} - (1 + R_0)x_0^{2,c} + R_1x_1^1 + R_2x_2^{2,c} + (1 + R_2)x_2^1 + (1 + R_3)x_3^{2,c} - \sum_{i=1}^3 x_i^{3,c} = -L^{3,c}, \quad c \in \{1, 2, 3\} \\
 & x_0^{4,c} - (1 + R_0)x_0^{3,c} + R_1x_1^1 + R_2x_2^{3,c} + (1 + R_2)x_2^{2,c} + (1 + R_3)x_3^{3,c} - \sum_{i=1}^3 x_i^{4,c} = -L^{4,c}, \quad c \in \{1, 2, 3\} \\
 & x_0^{5,c} - (1 + R_0)x_0^{4,c} + R_1x_1^1 + R_2x_2^{4,c} + (1 + R_2)x_2^{3,c} + (1 + R_3)x_3^{4,c} - \sum_{i=1}^3 x_i^{5,c} = -L^{5,c}, \quad c \in \{1, 2, 3\} \\
 & x_0^{6,c} - (1 + R_0)x_0^{5,c} + R_1x_1^1 + R_2x_2^{5,c} + (1 + R_2)x_2^{4,c} + (1 + R_3)x_3^{5,c} - \sum_{i=1}^3 x_i^{6,c} = -L^{6,c}, \quad c \in \{1, 2, 3\} \\
 & x_0^{7,c} - (1 + R_0)x_0^{6,c} + R_1x_1^1 + R_2x_2^{6,c} + (1 + R_2)x_2^{5,c} + (1 + R_3)x_3^{6,c} - \sum_{i=1}^3 x_i^{7,c} = -L^{7,c}, \quad c \in \{1, 2, 3\} \\
 & x_0^{8,c} - (1 + R_0)x_0^{7,c} + R_1x_1^1 + R_2x_2^{7,c} + (1 + R_2)x_2^{6,c} + (1 + R_3)x_3^{7,c} - \sum_{i=1}^3 x_i^{8,c} = -L^{8,c}, \quad c \in \{1, 2, 3\}
 \end{aligned}$$

$$v^c - (1 + R_0)x_0^{8,c} + (1 + R_1)x_1^1 + (1 + R_2)x_2^{7,c} + (1 + R_3)x_3^{8,c} = 0, c \in \{1, 2, 3\}$$

$$v^c \geq 0, c \in \{1, 2, 3\}$$

$$x_0^{t,c} \geq 0, t \in \{1, \dots, 8\}, c \in \{1, 2, 3\}$$

$$x_1^{t,c} = 0, t \in \{2, \dots, 8\}, c \in \{1, 2, 3\}$$

$$x_2^{8,c} = 0, c \in \{1, 2, 3\}$$

Neste problema, as variáveis de primeiro estágio correspondem aos empréstimos contratados e o saldo (reinvestido) no primeiro trimestre enquanto que as variáveis de segundo estágio correspondem aos restantes empréstimos contratados e saldos do modelo. Portanto, existem 4 variáveis de primeiro estágio e para cada cenário, 29 variáveis de segundo estágio.

Como se sabe, em um problema estocástico de dois estágios com recurso as variáveis de decisão de primeiro estágio são determinadas antes da realização dos possíveis acontecimentos. Após essa realização as variáveis de segundo estágio são determinadas de forma a adaptar as decisões feitas no primeiro estágio.

Este problema foi resolvido recorrendo o *software* IBM ILOG CPLEX *Optimization Studio*. Os valores obtidos para os empréstimos (apenas os valores não nulos) estão presentes na Tabela (4.2) e os valores obtidos para o saldo estão na Tabela (4.3). Note-se que na Tabela (4.3) a última coluna representa o saldo no final do oitavo trimestre v (valores em negrito) e as restantes representam $x_0^{t,c}$.

Tabela 4.2 Empréstimos associados à solução ótima

	x_1^1	$x_2^{2,c}$	$x_3^{3,c}$	$x_3^{7,c}$
Cenário 1	320.15	231.96	107.38	-
Cenário 2		281.96	108.28	103.86
Cenário 3		331.96	159.18	309.24

Tabela 4.3 Saldo associado à solução ótima

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	$t = 8$	
Cenário 1	220.15	-	-	300.61	848.91	649.95	-	846.8	527.69
Cenário 2		-	-	198.78	696.58	496.86	-	790.34	470.95
Cenário 3		-	-	95.712	542.99	292.5	-	479.83	158.88

Em um primeiro estágio, ou seja, no primeiro trimestre é feito um empréstimo a 2 anos no valor de 320.15€ para pagar a responsabilidade de 100€, sobrando 220.15€. São tomadas as decisões de segundo estágio em relação aos empréstimos em cada um dos 3 cenários possíveis.

A Figura (4.3) representa a evolução dos empréstimos totais e do saldo em cada trimestre, estando também indicados os valores acumulados das responsabilidades. Em $t = 1$ existe um requisito de caixa de 100€, pelo que é necessário fazer um empréstimo. A solução ótima indicou fazer um empréstimo

a dois anos maior do que o necessário em $t = 1$ pois tem um juro mais baixo e permitirá colmatar algumas necessidades de caixa futuras, como acontece em $t = 7$. Nos dois trimestres a seguir, existem novos requisitos de caixa (a linha azul aumenta), sendo necessário reforçar os empréstimos com o menor valor possível (razão pela qual o saldo será nulo). Os empréstimos realizados em $t = 2$ e $t = 3$ são empréstimos a 6 meses e 3 meses, respectivamente, uma vez que só em $t = 4$ irá haver entrada de dinheiro na empresa (a linha azul decresce) para liquidar esses empréstimos. Note-se que o excedente do empréstimo realizado em $t = 1$ permite, por um lado, suprimir parte dos juros (pois parte foi reinvestido) e por outro pagar os restantes juros acumulados. Em $t = 5$ existe uma nova entrada de dinheiro em caixa (a curva azul continua a diminuir) permitindo ter saldo suficiente para colmatar as necessidades de caixa nos restantes trimestres, sem necessidade de pedir novos empréstimos (a curva cinzenta é constante). Além disso, a linha laranja é sempre não negativa representando as restrições de não negatividade para o saldo. No fim do oitavo trimestre, não existe nenhum empréstimo por liquidar e o saldo representa o valor do saldo final para este cenário.

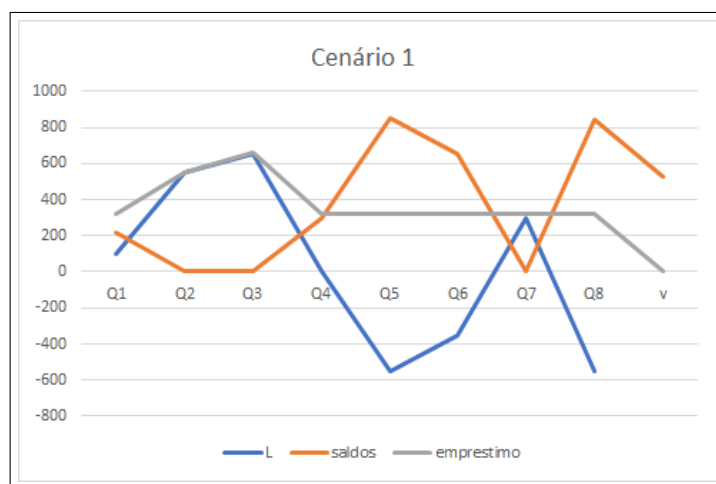


Figura 4.3 Evolução dos empréstimos e do saldo no cenário 1

De forma semelhante, acontece para os outros dois cenários presentes nas Figuras (4.4) e (4.5). Nestes casos, em $t = 7$ é realizado um empréstimo a 3 meses por forma a pagar o resto das responsabilidades que não conseguem ficar cobertas com o valor em caixa.

Neste problema, o objetivo é maximizar a riqueza esperada no fim do oitavo trimestre obtendo um valor ótimo de 385.8391€.

Apesar de o problema não ser de grande escala, utilizou-se a implementação do método de Decomposição de Benders proposta em [9] a este problema tendo obtido a mesma solução ótima descrita nas Tabelas (4.2) e (4.3). Note-se que ao utilizar o método da Decomposição de Benders, tivemos que adicionar a restrição $x_i^! \leq 10^3$, com $i = 0, 1, 2, 3$, no problema (4.1), de forma a que a região admissível da relaxação inicial do problema fosse limitada garantindo que o problema tem solução ótima. A evolução dos limites inferiores e superiores da função objetivo, utilizando este método, está representada na Figura (4.6), sendo possível observar que o método converge ao fim de 5 iterações.

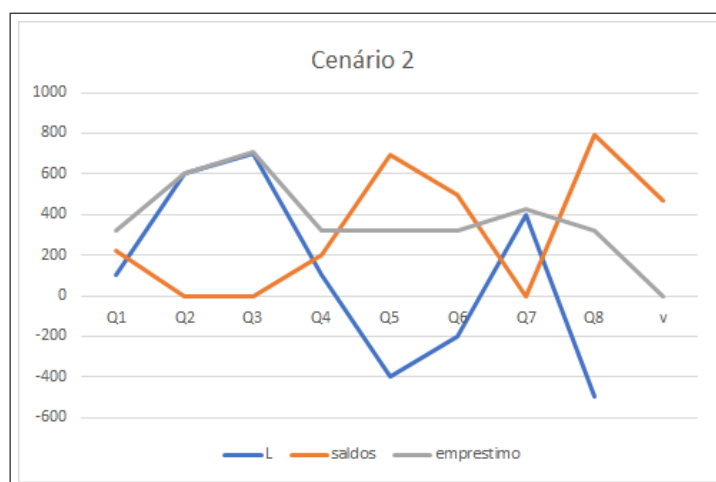


Figura 4.4 Evolução dos empréstimos e do saldo no cenário 2

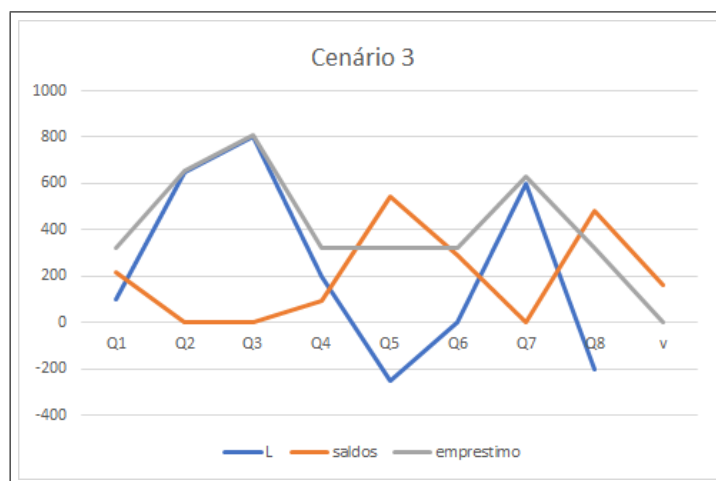


Figura 4.5 Evolução dos empréstimos e do saldo no cenário 3

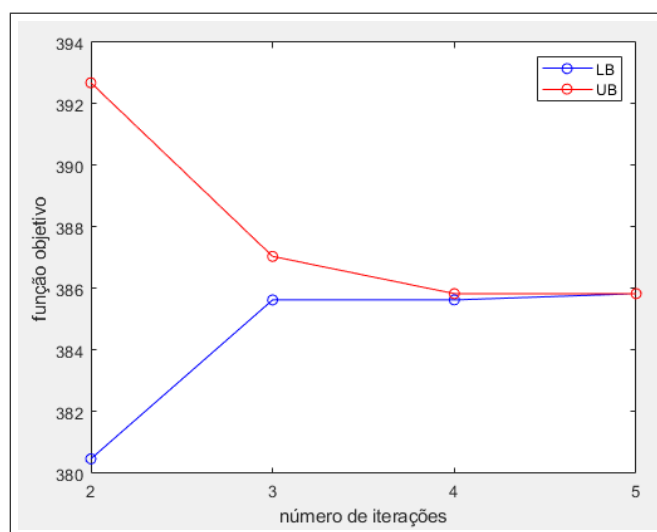


Figura 4.6 Convergência do problema ALM

Capítulo 5

Considerações finais

Esta dissertação teve como objetivo estudar o tema da otimização estocástica e as suas formulações, bem como o método da Decomposição de Benders que é muito utilizado para resolver problemas de grande dimensão e também a aplicação da otimização estocástica a um problema financeiro.

A maioria dos problemas financeiros requerem que as decisões sejam tomadas sob incerteza. Assim, a otimização estocástica aplicada às Finanças é uma área de grande interesse e pode ser aplicada a problemas de gestão de bens e responsabilidades, na alocação de ativos para planos de fundo de pensão e seguradoras, no gerenciamento de riscos para grandes empresas públicas.

Deste modo, conseguimos desenvolver um modelo estocástico de dois estágios para resolução de um problema de gestão de bens e responsabilidades. A solução analítica do problema é difícil de obter dado o número de variáveis envolvidas. Contudo, utilizou-se o *software* IBM ILOG CPLEX *Optimization Studio* para o resolver e analisou-se a solução ótima encontrada. Apesar de o problema ser de pequena dimensão para resolver computacionalmente, aplicou-se o método da Decomposição de Benders para exemplificar a sua utilização e observar a evolução dos limites inferior e superior do valor ótimo.

A Decomposição de Benders também é muito utilizada para problemas de otimização estocástica com múltiplos estágios. Neste caso, o método é chamado de Decomposição de Nested Benders. Num problema de 6 estágios, as variáveis dos dois primeiros estágios definem o problema principal e as variáveis dos últimos 4 estágios definem os problemas de recurso, em que as soluções desses problemas de recurso fornecem cortes de otimalidade e de admissibilidade que podem ser adicionados ao problema principal.

Em [6], foi resolvido um problema de gestão de bens e responsabilidades com mais de 4 milhões de cenários cuja formulação de programação linear tinha 12 milhões de restrições e 24 milhões de variáveis. A árvore cenário para esse problema tinha 6 níveis e 13 ramificações em cada nó. Os autores aplicaram a Decomposição de Benders a dois estágios, dividindo o problema dos 6 períodos em um problema de primeiro estágio contendo os três primeiros períodos e um problema de segundo estágio contendo os períodos de 4 a 6. Resultou em 2197 problemas de recurso lineares, envolvendo 2197 cenários.

Bibliografia

- [1] Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik*, 4(1):238–252.
- [2] Branda, M. (2016). An introduction to Benders decomposition Computational Aspects of Optimization Benders decomposition.
- [3] Chen, Y., Yuan, Z., and Chen, B. (2018). Process optimization with consideration of uncertainties- An overview. *Chinese Journal of Chemical Engineering*, 26(8):1700–1706.
- [4] Cornuejols, G. and Tutuncu, R. (2007). *Optimization Methods in Finance (Mathematics, Finance and Risk)*.
- [5] Dempster, M. A. H., Fisher, M. L., Jansen, L., Lageweg, B. J., Lenstra, J. K., and Rinnooy Kan, A. H. G. (2008). Analysis of Heuristics for Stochastic Programming: Results for Hierarchical Scheduling Problems. *Mathematics of Operations Research*, 8(4):525–537.
- [6] Gondzio, J. and Kouwenberg, R. (2000). High Performance Computing for Asset Liability Management High Performance Computing for Asset Liability Management y. *Operations Research*, 49(6):807–969.
- [7] Jos, H. and Pagnoncelli, B. K. (2008). *Uma Introdução à Otimização sob Incerteza*.
- [8] Kouwenberg, R. and Zenios, S. A. (2001). Stochastic Programming Models for Asset Liability Management. *Handbook of Asset and Liability Management - Set*, 1:253–303.
- [9] Li, B. (2016). OR705 : Large Scale Linear Programming Project Report Solving Two-Stage Stochastic Programs : A Benders Decomposition Based Approach. Technical report.
- [10] Mokhtar S. Bazaraa, Hanif D. Sherali, C. S. (2006). *Nonlinear Programming Theory and Algorithms*, volume 3.
- [11] Murphy, J. (2013). *Benders, Nested Benders and Stochastic Programming: An Intuitive Introduction James Murphy*.
- [12] Pereira, M. V. F. and Pinto, L. M. V. G. (1991). Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning. *Mathematical Programming*, 52(1-3):359–375.
- [13] Sahinidis, N. V. (2004). Optimization under uncertainty: State-of-the-art and opportunities. *Computers and Chemical Engineering*, 28(6-7):971–983.
- [14] Santos, D. A. d. O. (2015). *Decomposição em Programação Matemática Aplicada a Redes Computacionais Verdes*.
- [15] Tomasgard, A., Dye, S., Wallace, S. W., Audestad, J. A., Stougie, L., and van der Vlerk, M. H. (1998). Modelling Aspects of Distributed Processing in Telecommunication Networks. *Annals of Operations Research*, 82:161–184.

- [16] Wilson, J. M., Birge, J., and Louveaux, F. (2006). *Stochastic Programming. Introduction to Stochastic Programming.*, volume 49.
- [17] Yang, X. (2009). *Applying Stochastic Programming Models in Financial Risk Management.*
- [18] Zeng, Z. and Cremaschi, S. (2019). A general primal bounding framework for large-scale multistage stochastic programs under endogenous uncertainties. *Chemical Engineering Research and Design*, 141:464–480.

Anexos

Códigos implementados através do *software* IBM ILOG CPLEX *Optimization Studio*:

- Problema (2.7):

```
range variavel = 1..4;

dvar float+ x[variavel];

dvar float+ y[variavel];
dvar float+ w[variavel];

dexpr float lucro = (150*x[1] + 230*x[2] + 260*x[3] + 238*y[1]
- 170*w[1] + 210*y[2] - 150*w[2] - 36*w[3] - 10*w[4]);

maximize -(lucro);

subject to{
    x[1] + x[2] + x[3] <= 500;
    2.5*x[1] + y[1] - w[1] >= 200;
    3*x[2] + y[2] - w[2] >= 240;
    w[3] + w[4] <= 20*x[3];
    w[3] <= 6000;
}
```

Note-se que é feito de forma semelhante para os problemas em que a produção aumenta ou diminui 20%.

- Problema (2.8)

```
range cenario = 1..3;
range variavel = 1..4;

dvar float+ x[variavel];

dvar float+ y[variavel][cenario];
dvar float+ w[variavel][cenario];

dexpr float lucro = 150*x[1] + 230*x[2] + 260*x[3]
- (1/3)*(170*w[1][1] - 230*y[1][1] + 150*w[2][1] - 210*y[2][1]
+ 36*w[3][1] + 10*w[4][1])
-(1/3)*(170*w[1][2] - 230*y[1][2] + 150*w[2][2] - 210*y[2][2]
+ 36*w[3][2] + 10*w[4][2])
- (1/3)*(170*w[1][3] - 230*y[1][3] + 150*w[2][3] - 210*y[2][3]
+ 36*w[3][3] + 10*w[4][3]);
```

```

maximize -(lucro);

subject to{
  x[1] + x[2] + x[3] <= 500;
  3.0*x[1] + y[1][1] - w[1][1] >= 200;
  3.6*x[2] + y[2][1] - w[2][1] >= 240;
  w[3][1] + w[4][1] <= 24*x[3];
  w[3][1] <= 6000;
  2.5*x[1] + y[1][2] - w[1][2] >= 200;
  3.0*x[2] + y[2][2] - w[2][2] >= 240;
  w[3][2] + w[4][2] <= 20*x[3];
  w[3][2] <= 6000;
  2.0*x[1] + y[1][3] - w[1][3] >= 200;
  2.4*x[2] + y[2][3] - w[2][3] >= 240;
  w[3][3] + w[4][3] <= 16*x[3];
  w[3][3] <= 6000;
}

```

- Problema (4.1)

```

range emprestimo = 0..3;
range trimestre = 1..8;
range cenario = 1..3;

float L[trimestre][cenario] = ...;
float R[emprestimo] = ...;

dvar float+ x1[emprestimo];
dvar float+ x[emprestimo][trimestre][cenario];
dvar float+ v[cenario];

maximize (sum(c in cenario) v[c])/3;

subject to{
x1[0] - x1[1] - x1[2] - x1[3] == -L[1][1];

forall(c in cenario){

x[0][2][c] - (1+R[0])*x[0][1] + R[1]*x1[1] + R[2]*x1[2]
+ (1+R[3])*x1[3] - x[1][2][c] - x[2][2][c] - x[3][2][c]
== -L[2][c];

x[0][3][c] - (1+R[0])*x[0][2][c] + R[1]*x1[1] + R[2]*x[2][2][c]
+ (1+R[2])*x1[2] + (1+R[3])*x[3][2][c] - x[1][3][c] - x[2][3][c] - x[3][3][c]
== -L[3][c];

x[0][4][c] - (1+R[0])*x[0][3][c] + R[1]*x1[1] + R[2]*x[2][3][c]
+ (1+R[2])*x[2][2][c] + (1+R[3])*x[3][3][c] - x[1][4][c] - x[2][4][c] - x[3][4][c]
== -L[4][c];

x[0][5][c] - (1+R[0])*x[0][4][c] + R[1]*x1[1] + R[2]*x[2][4][c]
+ (1+R[2])*x[2][3][c] + (1+R[3])*x[3][4][c] - x[1][5][c] - x[2][5][c] - x[3][5][c]
== -L[5][c];

x[0][6][c] - (1+R[0])*x[0][5][c] + R[1]*x1[1] + R[2]*x[2][5][c]
+ (1+R[2])*x[2][4][c] + (1+R[3])*x[3][5][c] - x[1][6][c] - x[2][6][c] - x[3][6][c]
== -L[6][c];
}
}

```

```

x[0][7][c] - (1+R[0])*x[0][6][c] + R[1]*x1[1] + R[2]*x[2][6][c]
+ (1+R[2])*x[2][5][c] + (1+R[3])*x[3][6][c] - x[1][7][c] - x[2][7][c] - x[3][7][c]
== -L[7][c];

x[0][8][c] - (1+R[0])*x[0][7][c] + (R[1])*x1[1] + R[2]*x[2][7][c]
+ (1+R[2])*x[2][6][c] + (1+R[3])*x[3][7][c] - x[1][8][c] - x[2][8][c] - x[3][8][c]
== -L[8][c];

v[c] - (1 + R[0])*x[0][8][c] + (1 + R[1])*x1[1]
+ (1 + R[2])*x[2][7][c] + (1 + R[3])*x[3][8][c]
== 0;

forall(1 in 2..8){
x[1][1][c] == 0;
}

v[c] >= 0;
x[2][8][c] == 0;
}

em que:

L = [[100, 100, 100],
[450, 500, 550],
[100, 100, 150],
[-650, -600, -600],
[-550, -500, -450],
[200, 200, 250],
[650, 600, 600]
[-850, -900, -800]];

R = [0.005, 0.01, 0.018, 0.025];

```

Códigos implementados através do *software* MATLAB:

- Cálculo implícito do multiplicador de Lagrange através da função *fzero*

```

myfun = @(alpha, lambda)
sqrt(272000/(150*alpha + 42.5*(alpha^2)+42.5-(510*alpha)+lambda*alpha))
+ sqrt(288000/(230*alpha + 45*(alpha^2)+45-(540*alpha)+lambda*alpha))
+ sqrt(11700000/(260*alpha + 130*(alpha^2)+130-(460*alpha)+lambda*alpha))
- 500;
lam_prev = 1;
x1 = zeros(1,10000);
x2 = zeros(1,10000);
x3 = zeros(1,10000);
lam_plot = zeros(1,10000);
k = 0;
for a=0.0001:.0001:1
    k = k + 1;
    fun = @(lambda) myfun(a,lambda);
    [lam, fval, exitflag] = fzero(fun, lam_prev,
    optimset('Display','off'));
    if exitflag ~= 1
        lam = fzero(fun, [lam_prev-1, lam_prev+1]);
    end
end

```

```

end
lam_prev = lam; lam_plot(k) = lam;
x1(k) = sqrt(272000/(150*a + 42.5*(a^2)+42.5-510*a+lam*a));
x2(k) = sqrt(288000/(230*a + 45*(a^2)+45-540*a+lam*a));
x3(k) = sqrt(11700000/(260*a + 130*(a^2)+130-460*a+lam*a));
end

```

- Decomposição de Benders (adaptado de [9]).

Problema (3.10):

```

clear;
prob = [1];
nxi = length(prob);

a = [2 0]'; A = [1 1]; b = 2;

q = cell(nxi,1);
q{1} = [2 3]';
B = cell(nxi,1);
B{1} = [1 0; 3 0];
C = [1 2; 2 -1];
d = cell(nxi,1);
d{1} = [3 4]';

[x,obj,exitflag,output,lambda]=check(prob,a,q,A,B,C,b,d);
[x_benders,obj_benders,exitflag_benders,output_benders]
=bendersDecomposition(prob,a,q,A,B,C,b,d);

counter = output_benders.iterations;
UBs = -output_benders.LB(1:counter); LBs = -output_benders.UB(1:counter);
plot(1:counter, LBs(~isnan(LBs)), '-o blue');
hold on;
plot(1:counter, UBs(~isnan(UBs)), '-o red');
hold off;
legend('LB','UB');
xlabel('numero de iteracoes');
xticks(1:1:counter);
ylabel('funcao objetivo');

```

Problema (2.8):

```

clear; clc
prob = [1/3; 1/3; 1/3];
nxi = length(prob);

c = [150 230 260 0]'; A = [1 1 1 1]; b = 500;

f = cell(nxi,1);
f{1} = -1.*[170 -238 150 -210 36 10 0 0 0 0]';
f{2} = -1.*[170 -238 150 -210 36 10 0 0 0 0]';
f{3} = -1.*[170 -238 150 -210 36 10 0 0 0 0]';
B = cell(nxi,1);
B{1} = diag([3 3.6 24 0]);
B{2} = diag([2.5 3 20 0]);
B{3} = diag([2 2.4 16 0]);
D = [
-1 1 0 0 0 0 -1 0 0 0;
0 0 -1 1 0 0 0 -1 0 0;

```



```

0 0 0 0 -1 -1 0 0 -1 0;
0 0 0 0 -1 0 0 0 0 -1;
];
d = cell(nxi,1);
d{1} = [200 240 0 -6000]';
d{2} = [200 240 0 -6000]';
d{3} = [200 240 0 -6000]';

[x,obj,exitflag,output,lambda]=check(prob,c,f,A,B,D,b,d);
[x_benders,obj_benders,exitflag_benders,output_benders]
=bendersDecomposition(prob,c,f,A,B,D,b,d);

counter = output_benders.iterations;
UBs = -output_benders.LB(1:counter); LBs = -output_benders.UB(1:counter);
plot(1:counter, LBs(~isnan(LBs)), '-o blue');
hold on;
plot(1:counter, UBs(~isnan(UBs)), '-o red');
hold off;
legend('LB','UB');
xlabel('numero de iteracoes');
xticks(1:1:counter);
ylabel('funcao objetivo');

```

Problema (4.1):

```

clear; clc
prob = [1/3; 1/3; 1/3];
nxi = length(prob);

R0 = 0.005;
R1 = 0.01;
R2 = 0.018;
R3 = 0.025;

a = [0 0 0 0 0 0 0 0]'; A = [-1 1 1 1 0 0 0 0; 1 0 0 0 1 0 0 0;
0 1 0 0 0 1 0 0; 0 0 1 0 0 0 1 0; 0 0 0 1 0 0 0 1]; b = [100 10^3 10^3 10^3 10^3];

q = cell(nxi,1);
q{1} = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1]';
q{2} = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1]';
q{3} = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1]';

B = cell(nxi,1);
B{1} = [-(1+R0) R1 R2 (1+R3) 0 0 0 0; 0 R1 (1+R2) 0 0 0 0; 0 R1 0 0 0 0 0 0;
0 R1 0 0 0 0 0 0; 0 R1 0 0 0 0 0 0; 0 R1 0 0 0 0 0 0];
B{2} = [-(1+R0) R1 R2 (1+R3) 0 0 0 0; 0 R1 (1+R2) 0 0 0 0; 0 R1 0 0 0 0 0 0;
0 R1 0 0 0 0 0 0; 0 R1 0 0 0 0 0 0; 0 R1 0 0 0 0 0 0];
B{3} = [-(1+R0) R1 R2 (1+R3) 0 0 0 0; 0 R1 (1+R2) 0 0 0 0; 0 R1 0 0 0 0 0 0;
0 R1 0 0 0 0 0 0; 0 R1 0 0 0 0 0 0; 0 R1 0 0 0 0 0 0];

C = [1 0 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-(1+R0) 0 R2 (1+R3) 1 0 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 (1+R2) 0 -(1+R0) 0 R2 (1+R3) 1 0 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 (1+R2) 0 -(1+R0) 0 R2 (1+R3) 1 0 -1 -1 0 0

```

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 (1+R2) 0 -(1+R0) 0 R2 (1+R3) 1 0
-1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 (1+R2) 0 -(1+R0) 0
R2 (1+R3) 1 0 -1 -1 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
(1+R2) 0 -(1+R0) 0 R2 (1+R3) 1 0 0 1 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 (1+R2) 0 -(1+R0) 0 0 (1+R3) 1];

d = cell(nxi,1);
d{1} = -[450 100 -650 -550 200 650 -850 0]';
d{2} = -[500 100 -600 -500 200 600 -900 0]';
d{3} = -[550 150 -600 -450 250 600 -800 0]';

[x,obj,exitflag,output,lambda]=check(prob,a,q,A,B,C,b,d);
[x_benders,obj_benders,exitflag_benders,output_benders]
=bendersDecomposition(prob,a,q,A,B,C,b,d);

counter = output_benders.iterations;
UBs = -output_benders.LB(1:counter); LBs = -output_benders.UB(1:counter);
plot(2:counter, LBs(2:end), '-o blue');
hold on;
plot(2:counter, UBs(2:end), '-o red');
hold off;
legend('LB','UB');
xlabel('numero de iteracoes');
xticks(1:1:counter);
ylabel('funcao objetivo');

```

Note-se que para a Decomposição de Benders é necessário a função *check* e a função *bendersDecomposition*. Essas funções estão presentes em [9].