

# THESE

présentée à la  
**FACULTE DES SCIENCES DE TUNIS**

Pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR**

par  
**Ali KHALFALLAH**

Spécialité : **PHYSIQUE**  
Option : **MÉCANIQUE DES MATÉRIAUX**

## IDENTIFICATION DES LOIS DE COMPORTEMENT ÉLASTOPLASTIQUES PAR ESSAIS INHOMOGÈNES ET SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Soutenue le 14 Février 2004 devant la Commission d'Examen :

Président du jury :	T. LILI	Professeur à la Faculté des Sciences de Tunis
Rapporteur :	A. ZGHAL	Professeur à l'Ecole Sup. des Sciences et Tech. de Tunis
Rapporteur :	F. SIDOROFF	Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon (France)
Examineur :	B. HADJ SASSI	Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis
Directeur de Thèse :	A. DOGUI	Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir

LABORATOIRE DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ECOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE MONASTIR,  
AV, IBN ELJAZZAR, 5019-MONASTIR, TUNISIE.

## Remerciements

*Le présent travail a été effectué au sein du Laboratoire de Génie Mécanique à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir(LGM/ENIM).*

*Je voudrais ici témoigner toute ma gratitude à Monsieur le Professeur Abdelwaheb DOGUI, mon directeur de thèse, pour sa confiance, sa disponibilité et le grand intérêt qu'il a toujours manifesté pour ce travail. Sa rigueur scientifique, ses encouragements et son soutien m'ont permis de mener à bien ce travail dans le laboratoire dont il est le directeur.*

*Mes plus vifs remerciements s'adressent à Monsieur Taïeb LILI, Professeur à la faculté des sciences de Tunis, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider ce jury.*

*Mes plus profonds remerciements vont à Monsieur François SIDOROFF, Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon (France), d'avoir bien voulu accepter d'être rapporteur de cette thèse et membre du jury.*

*Egalement, j'exprime ma gratitude à Monsieur Ali ZGHAL, Professeur à l'Ecole Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant d'en être rapporteur et membre du jury.*

*J'adresse aussi mes remerciements à Monsieur, Béchir HADJ SASSI, Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse et d'examiner ce mémoire.*

*Je ne sais comment exprimer ma reconnaissance à Monsieur Hédi BEL HADJ SALAH, Maître de Conférence à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir, pour son aide, sa disponibilité, ses encouragements et son soutien avec bienveillance tout au long de ce travail. Je suis également très sensible au comportement chaleureux et amical qu'il a eu à mon égard et de sa gentillesse. J'avoue que les résultats présentés dans ce manuscrit n'auraient pu l'être sans son aide précieuse et sa contribution à l'enrichissement du présent travail. Qu'il trouve dans ces quelques mots le témoignage de toute ma reconnaissance et gratitude.*

*J'adresse mes remerciements à tous les membres du Laboratoire du Génie Mécanique pour leur sympathie et amitié qu'ils ont exprimé à mon égard.*

*Je remercie profondément toute ma famille et surtout mes parents pour m'avoir toujours apporté leur soutien durant mes études ainsi qu'à mes frères pour leur encouragement. J'adresse un grand merci à ma femme Zohra, pour m'avoir soutenu et encouragé dans mon travail. Qu'elle trouve ici un témoignage de toute ma reconnaissance et mon affection.*

*J'adresse particulièrement mes remerciements à mon frère Adel, pour son aide précieuse dans la typographie de cette thèse afin de sortir un manuscrit élégant et pour m'avoir initié au L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.*

*Merci enfin à tous ceux que j'ai peut-être oublié en espérant qu'ils ne m'en tiendront pas rigueur.*

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>11</b>
<b>1 Formulation et modélisation des lois de comportement élastoplastiques</b>	<b>15</b>
1.1 Introduction . . . . .	15
1.2 Formulation des lois de comportement élastoplastiques . . . . .	16
1.3 Critères de plasticité . . . . .	18
1.3.1 Critères de plasticité isotropes . . . . .	19
1.3.2 Critères isotropes transverses . . . . .	22
1.3.3 Critères de plasticité orthotropes . . . . .	25
1.4 Lois d'évolution . . . . .	32
1.4.1 Plasticité associée . . . . .	32
1.4.2 Plasticité non associée . . . . .	33
1.5 Conclusion . . . . .	35
<b>2 Essais expérimentaux et interprétations</b>	<b>37</b>
2.1 Introduction . . . . .	37
2.2 Essais expérimentaux . . . . .	37
2.2.1 Essai de traction simple . . . . .	38
2.2.2 Essais de traction hors-axes . . . . .	40
2.2.3 Essai de traction plane . . . . .	44
2.2.4 Essai de gonflement hydraulique . . . . .	45
2.2.5 Essai de cisaillement simple . . . . .	48
2.3 Conclusion . . . . .	49
<b>3 Méthode d'identification inverse</b>	<b>51</b>
3.1 Introduction . . . . .	51
3.2 Introduction aux problèmes inverses . . . . .	51
3.2.1 Problème mal posé . . . . .	51
3.2.2 Etude bibliographique . . . . .	52
3.3 Calcul direct par éléments finis . . . . .	55
3.3.1 Formulation du problème . . . . .	55
3.3.2 Problème élastique et problème résiduel . . . . .	56

3.3.3	Relation Force -déplacement . . . . .	57
3.3.4	Le problème élastoplastique . . . . .	58
3.3.5	Discrétisation du problème . . . . .	59
3.3.6	Algorithme de calcul élastoplastique . . . . .	60
3.4	Introduction à l'optimisation . . . . .	60
3.5	La méthode du Simplexe . . . . .	61
3.5.1	Les bases de la méthode . . . . .	62
3.5.2	Le Simplexe de Nelder-Mead . . . . .	63
3.5.3	Test de convergence . . . . .	66
3.5.4	Algorithme du Simplexe de Nelder-Mead . . . . .	66
3.5.5	Propriétés principales . . . . .	67
3.6	Conclusion . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Stratégie d'identification des modèles de comportement</b>	<b>69</b>
4.1	Introduction . . . . .	69
4.2	Stratégie d'identification . . . . .	70
4.3	Identification de la fonction d'érouissage . . . . .	70
4.4	Identification du modèle isotrope transverse associé . . . . .	71
4.4.1	Identification par le coefficient de Lankford $r$ . . . . .	72
4.4.2	Modèle isotrope transverse sous l'hypothèse d'homogénéité des essais . . . . .	74
4.4.3	Identification par les courbes d'érouissage . . . . .	75
4.4.4	Identification par méthode inverse . . . . .	76
4.4.5	Comparaison des deux méthodes d'identification . . . . .	79
4.4.6	Validation du modèle . . . . .	81
4.5	Identification du modèle isotrope transverse non associé . . . . .	84
4.5.1	Identification homogène du modèle . . . . .	84
4.5.2	Identification inverse du modèle . . . . .	84
4.5.3	Validation du modèle inverse . . . . .	87
4.6	Identification du modèle quadratique de Hill associé . . . . .	90
4.6.1	Identification par l'hypothèse d'homogénéité . . . . .	91
4.6.2	Identification inverse du modèle . . . . .	92
4.6.3	Comparaison des deux méthodes d'identification . . . . .	95
4.7	Identification du modèle de Hill non associé . . . . .	98
4.7.1	Identification homogène du modèle . . . . .	99
4.7.2	Identification inverse du modèle . . . . .	100
4.8	Identification du modèle non quadratique . . . . .	104
4.9	Conclusion . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Analyse de sensibilité paramétrique</b>	<b>109</b>
5.1	Introduction . . . . .	109
5.2	Méthode spécifique de calcul de sensibilité . . . . .	110

---

5.2.1	Calcul de sensibilité . . . . .	111
5.2.2	Validation de la méthode de calcul . . . . .	113
5.3	Analyse de sensibilité . . . . .	115
5.3.1	Indicateur de sensibilité . . . . .	115
5.3.2	Analyse de sensibilité des essais . . . . .	116
5.3.3	Analyse de sensibilité du modèle de Hill . . . . .	117
5.3.4	Analyse de sensibilité des contraintes . . . . .	120
5.4	Conclusion . . . . .	123
<b>Conclusion générale</b>		<b>125</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>129</b>
<b>Liste des Publications</b>		<b>135</b>
.1	Publication des articles . . . . .	135
.2	Communications . . . . .	135



# Liste des tableaux

2.1	<i>Les coefficients expérimentaux de Lankford.</i>	43
4.1	<i>Identification des constantes de la loi d'écroutissage de Swift.</i>	71
4.2	<i>Identification du coefficient de d'anisotropie à partir de la traction plane <math>r_{TP}</math> et comparaison avec les résultats trouvés par Benchouikh (Benchouikh, 1992).</i>	76
4.3	<i>Identification des coefficients d'anisotropie du modèle isotrope transverse avec plasticité associée avec l'approche homogène et la méthode inverse.</i>	77
4.4	<i>Les coefficients identifiés du modèle isotrope transverse avec plasticité non associée par la méthode homogène.</i>	84
4.5	<i>Les coefficients identifiés du modèle isotrope transverse avec plasticité non associée par la méthode inverse.</i>	87
4.6	<i>Identification des coefficients <math>a_{i,i=1,2,3}</math> par les courbes d'écroutissage et le calcul des coefficients de Lankford <math>r_{\psi}, \psi = 0^{\circ}, 45^{\circ}, 90^{\circ}</math>.</i>	92
4.7	<i>Identification des coefficients d'anisotropie <math>r_{\psi}</math>.</i>	93
4.8	<i>L'erreur relative entre les coefficients d'anisotropie expérimentaux et ceux identifiés par l'approche homogène et inverse.</i>	97
4.9	<i>Coefficients d'anisotropie du modèle de Hill non associé (approche homogène).</i>	100
4.10	<i>Coefficients d'anisotropie du modèle de Hill non associé.</i>	102
4.11	<i>L'identification du modèle de Barlat isotrope transverse avec plasticité associée.</i>	106
5.1	<i>Indicateur de sensibilité dans le cas orthotrope (Tôle 1).</i>	118
5.2	<i>Indicateur de sensibilité dans le cas orthotrope (Tôle 2).</i>	118
5.3	<i>Indicateur de sensibilité dans le cas orthotrope (Tôle 3).</i>	118



# Table des figures

1.1	<i>Représentation de la surface de plasticité correspondant aux critères de Tresca et de Von Mises, dans l'espace des contraintes principales.</i> . . . . .	20
1.2	<i>Représentation des surfaces de plasticité correspondants aux critères de Von Mises, Tresca et Drucker, dans le plan déviatorique.</i> . . . . .	21
1.3	<i>Comparaison de la prévision de trois critères (V Mises, Hill 1948, Hill 1993) avec des résultats expérimentaux (D'après Banabic et al.(1999)).</i> . . . . .	28
1.4	<i>Surfaces de charge pour un alliage Al-2.5% Mg, laminé à 17% à froid (figure à gauche) et laminé à 80% à froid (figure à droite). Comparaison des résultats expérimentaux avec un modèle polycristallin, et les prédictions des critères Yld91 et Yld94 (D'après Barlat et al., (1997))</i> . . . . .	31
1.5	<i>(à gauche, la description du critère Yld96 d'un modèle polycristallin (TBH) généré avec une texture cubique <math>\{100\} \langle 001 \rangle</math>); (à droite, la prédiction des coefficients d'anisotropie expérimentaux par le critère (Yld96) pou un alliage 6022-T4) (D'après Barlat et al., (1997))</i> . . . . .	32
2.1	<i>Simulation numérique de l'essai de la traction simple (essai homogène).</i> . . . . .	39
2.2	<i>Schéma d'une éprouvette de traction extraite d'une tôle suivant l'angle <math>\psi</math></i> . . . . .	40
2.3	<i>Courbes d'écroutissage hors-axes (Tôle 1).</i> . . . . .	41
2.4	<i>Courbes d'écroutissage hors-axes (Tôle 2).</i> . . . . .	41
2.5	<i>Courbes d'écroutissage hors-axes (Tôle 3).</i> . . . . .	42
2.6	<i>Représentation du coefficient d'anisotropie en fonction de la direction de traction.</i> . . . . .	43
2.7	<i>Géométrie de l'éprouvette de traction plane-Sollac (Gaaloul, 1993).</i> . . . . .	45
2.8	<i>Les isovaleurs de la déformation (a) et de la contrainte équivalente (b) dans l'éprouvette de traction plane.</i> . . . . .	45
2.9	<i>L'essai expérimental du gonflement hydraulique.</i> . . . . .	46
2.10	<i>Courbe expérimentale du gonflement hydraulique (pression-hauteur au pôle), Tôle1.</i> . . . . .	47
2.11	<i>Courbe expérimentale du gonflement hydraulique (pression-hauteur au pôle), Tôle2.</i> . . . . .	47
2.12	<i>Courbe expérimentale du gonflement hydraulique (pression-hauteur au pôle), Tôle3.</i> . . . . .	48
2.13	<i>Essai de cisaillement simple (tôle 1 et 3).</i> . . . . .	49
3.1	<i>Représentation schématique des chargements appliqués à un solide déformable.</i> . . . . .	55
3.2	<i>Construction du Simplexe initial dans l'espace des paramètres.</i> . . . . .	62
3.3	<i>L'étape de réflexion est l'opération de base dans la manipulation du Simplexe.</i> . . . . .	63

3.4	<i>L'étape d'expansion proposée par l'algorithme de Nelder-Mead.</i>	65
3.5	<i>L'étape de réduction du Simplexe.</i>	65
4.1	<i>Identification des courbes d'érouissage pour les tôles 1,2 et 3.</i>	71
4.2	<i>Validation par la traction plane et l'expansion équibiaxiale du modèle <math>r=\bar{r}</math> pour la Tôle 1.</i>	73
4.3	<i>Validation par la traction plane et l'expansion équibiaxiale du modèle <math>r=\bar{r}</math> pour la Tôle 2.</i>	73
4.4	<i>Validation par la traction plane et l'expansion équibiaxiale du modèle <math>r=\bar{r}</math> pour la Tôle 3.</i>	74
4.5	<i>Validation par l'essai de cisaillement simple du modèle <math>r=\bar{r}</math> pour la Tôle 1 et la Tôle 3.</i>	74
4.6	<i>Identification du modèle isotrope transverse associé par la méthode inverse pour la Tôle 1.</i>	77
4.7	<i>Identification du modèle isotrope transverse associé par la méthode inverse pour la Tôle 2.</i>	78
4.8	<i>Identification du modèle isotrope transverse associé par la méthode inverse pour la Tôle 3.</i>	78
4.9	<i>Comparaison de l'identification homogène et inverse pour la Tôle 1.</i>	80
4.10	<i>Comparaison de l'identification homogène et inverse pour la Tôle 2.</i>	80
4.11	<i>Comparaison de l'identification homogène et inverse pour la Tôle 3.</i>	81
4.12	<i>Validation du modèle par l'essai d'expansion pour la Tôle 1.</i>	82
4.13	<i>Validation du modèle par l'essai d'expansion pour la Tôle 2.</i>	82
4.14	<i>Validation du modèle par l'essai d'expansion pour la Tôle 3.</i>	83
4.15	<i>Validation du modèle par l'essai de cisaillement pour les Tôles 1 et 3.</i>	83
4.16	<i>Identification du modèle isotrope transverse non associé par la méthode inverse pour la Tôle 1.</i>	85
4.17	<i>Identification du modèle isotrope transverse non associé par la méthode inverse pour la Tôle 2.</i>	86
4.18	<i>Identification du modèle isotrope transverse non associé par la méthode inverse pour la Tôle 3.</i>	86
4.19	<i>Validation du modèle isotrope transverse non associé par l'essai d'expansion équibiaxiale pour la Tôle 1.</i>	88
4.20	<i>Validation du modèle isotrope transverse non associé par l'essai d'expansion équibiaxiale pour la Tôle 2.</i>	88
4.21	<i>Validation du modèle isotrope transverse non associé par l'essai d'expansion équibiaxiale pour la Tôle 3.</i>	89
4.22	<i>Validation du modèle isotrope transverse non associé par l'essai de cisaillement pour la Tôle 1.</i>	89
4.23	<i>Validation du modèle isotrope transverse non associé par l'essai de cisaillement pour la Tôle 3.</i>	90
4.24	<i>Evolution de la fonction objectif <math>E(a_3)</math> au cours des itérations (Tôle 1).</i>	92

4.25	<i>Evolution de la fonction objectif <math>E(a_3)</math> au cours des itérations (Tôle 1).</i>	93
4.26	<i>Identification du modèle de Hill associé par méthode inverse (Tôle 1).</i>	94
4.27	<i>Identification du modèle de Hill associé par méthode inverse (Tôle 2).</i>	94
4.28	<i>Identification du modèle de Hill associé par méthode inverse (Tôle 3).</i>	95
4.29	<i>Evolution des coefficients de Lankford <math>r_\psi</math> identifiés par l'approche homogène et inverse (Tôle 1).</i>	96
4.30	<i>Evolution des coefficients de Lankford <math>r_\psi</math> identifiés par l'approche homogène et inverse (Tôle 2).</i>	96
4.31	<i>Evolution des coefficients de Lankford <math>r_\psi</math> identifiés par l'approche homogène et inverse (Tôle 3).</i>	97
4.32	<i>L'évolution des contraintes seuils expérimentales et celles qui sont prévues par le modèle de Hill en fonction de l'angle <math>\psi</math>.</i>	98
4.33	<i>Identification du modèle de Hill non associé (Tôle 1).</i>	101
4.34	<i>Identification du modèle de Hill non associé (Tôle 2).</i>	101
4.35	<i>Identification du modèle de Hill non associé (Tôle 3).</i>	102
4.36	<i>L'évolution des coefficients expérimentaux et théoriques de Lankford en fonction de <math>\psi</math> (Tôle 1).</i>	103
4.37	<i>L'évolution des coefficients expérimentaux et théoriques de Lankford en fonction de <math>\psi</math> (Tôle 2).</i>	103
4.38	<i>L'évolution des coefficients expérimentaux et théoriques de Lankford en fonction de <math>\psi</math> (Tôle 3).</i>	104
4.39	<i>Identification inverse du modèle de Barlat Yld91 Tôle 2.</i>	105
4.40	<i>Identification inverse du modèle de Barlat Yld91 Tôle 3.</i>	106
5.1	<i>Validation de la méthode numérique du calcul de sensibilité pour l'essai de traction plane homogène.</i>	114
5.2	<i>Validation de la méthode numérique du calcul de sensibilité pour l'essai de cisaillement pure.</i>	114
5.3	<i>Sensibilité de la force par rapport à <math>r</math> pour l'essai de traction homogène et inhomogène.</i>	115
5.4	<i>Comparaison de l'indicateur de sensibilité des essais TP, EB et CS en fonction du coefficient d'anisotropie <math>r</math>.</i>	117
5.5	<i>Sensibilité de la force en traction plane par rapport aux coefficients d'anisotropie <math>r_0</math>, <math>r_{45}</math> et <math>r_{90}</math> dans le cas inhomogène (Tôle 1).</i>	119
5.6	<i>Sensibilité de la force en traction plane par rapport aux coefficients d'anisotropie <math>r_0</math>, <math>r_{45}</math> et <math>r_{90}</math> dans le cas homogène et inhomogène (Tôle 2).</i>	119
5.7	<i>Sensibilité de la force en traction plane par rapport aux coefficients d'anisotropie <math>r_0</math>, <math>r_{45}</math> et <math>r_{90}</math> dans le cas inhomogène (Tôle 3).</i>	120
5.8	<i>Représentation des isovaleurs de <math>\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r}</math> (Tôle 2).</i>	121
5.9	<i>Représentation des isovaleurs de <math>\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r}</math> (Tôle 2).</i>	122
5.10	<i>Représentation des isovaleurs de <math>\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r}</math> (Tôle 2).</i>	123



# Introduction générale

La mise en forme des tôles minces est un procédé industriel important (industrie automobile, etc...). La simulation numérique des procédés de mise en forme nécessite la mise au point de modèles de comportement basés sur les principes de la thermodynamique et qui tiennent compte des sollicitations que subissent les matériaux utilisés et rendent compte de l'anisotropie matérielle. La détermination des paramètres matériels intervenant dans les lois de comportement des matériaux est une étape importante. Elle permet une meilleure représentation possible des expériences par les modèles identifiés. En effet, une rigoureuse identification paramétrique avec le choix d'un modèle adéquat permet de simuler correctement les procédés de mise en forme. L'identification des paramètres des modèles est effectuée à l'aide des essais mécaniques, qui sont généralement des essais réalisés au laboratoire ou sur des structures industrielles. Classiquement l'identification des coefficients intervenant dans les modèles est effectuée par un lissage direct des points expérimentaux. Cette méthode est justifiée pour le cas des essais homogènes où le passage des grandeurs mesurées aux grandeurs locales intervenant dans les lois de comportement est direct. Dans le cas où les sollicitations sont complexes, conduisant à des essais hétérogènes, le passage des mesures effectuées par l'appareillage expérimental comme les forces ou couples appliqués, déplacements ou rotations d'ensembles vers les grandeurs locales telles que les champs de contraintes et de déformations n'est pas immédiat. Souvent des hypothèses d'homogénéité sont adoptées, elles ne sont que des approximations, parfois fortes, conduisant à des paramètres non représentatifs du comportement du matériau et par la suite un écart est observé entre la simulation numérique et la réalisation expérimentale d'un embouti.

La théorie des problèmes inverses peut conduire à la résolution de ce type de problème d'identification paramétrique à partir des essais hétérogènes sans tenir compte d'hypothèse d'homogénéité. Cette théorie fournit des algorithmes permettant la détermination des paramètres des lois de comportement en couplant en général une méthode d'optimisation avec une méthode de simulation numérique, telle que la méthode des éléments finis par exemple, afin de coïncider la réponse calculée par le modèle avec la réponse observée expérimentalement (Tarantola, 1987), (Bui, 1993), (Gelin, 1995), (Gavrus et *al.*, 1995), (Mahnken et Stein, 1997). Le modèle ainsi identifié peut être ensuite utilisé dans sa formulation exacte pour réaliser des simulations numériques des opérations de mise en forme.

Dans ce travail, nous proposons de définir et d'utiliser une stratégie d'identification paramétrique inverse applicable aux modèles élastoplastiques pour les ajuster aux essais mécaniques homogènes et non homogènes. Les critères de plasticité constituent une composante fondamentale dans la formulation des lois de comportement. Il est important de noter que le critère orthotrope quadratique de Hill (1948) constitue le début des efforts dans l'établissement de la théorie de la plasticité anisotrope pour la description et la modélisation de la surface de plasticité pour les métaux anisotropes. A partir de cette date, d'autres critères plus compliqués sont proposés pour mieux tenir compte de l'anisotropie et de l'écroutissement des différents matériaux et alliages destinés à l'emboutissage. En effet, nous disposons d'une bibliothèque de modèles que nous avons identifiés. Ces modèles sont basés sur les critères quadratiques isotrope transverse, orthotrope de Hill ainsi que sur un critère non quadratique de Barlat, en adoptant l'hypothèse de l'écroutissement isotrope et la formulation de lois de comportement élastoplastiques avec les lois d'écoulement plastique associées et non associées. Enfin, l'étude de sensibilité paramétrique peut être menée sur l'analyse intrinsèque des modèles où nous étudions l'influence des variations des paramètres sur la réponse du modèle.

Ce travail est réparti en cinq chapitres :

## **Chapitre 1**

Le premier chapitre présente la formulation des lois de comportement élastoplastiques en petites déformations dans le cadre général et dans le cadre thermodynamique. Nous présentons une synthèse des critères de plasticité des plus classiques (isotropes, isotropes transverses) aux modèles les plus récents (orthotropes et non quadratiques). Nous adoptons l'hypothèse d'un écroutissement isotrope et l'hypothèse de la plasticité associée et non associée.

## **Chapitre 2**

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des essais expérimentaux utilisés dans ce travail. La définition et l'interprétation des essais, du point de vue homogénéité des champs de contraintes et de déformations sont précisées. En particulier, l'essai de traction plane réalisé sur une éprouvette large, présente une forte inhomogénéité qui était démontrée expérimentalement et par une simulation numérique que nous avons effectuée. L'identification des paramètres de comportement à partir de cet essai, nécessite la mise au point d'un algorithme d'identification basé sur la théorie des problèmes inverses. Cet algorithme est réalisé au chapitre suivant.

## **Chapitre 3**

Dans le troisième chapitre, après avoir rappelé l'état de l'art dans le développement et l'utilisation des méthodes inverses pour identifier les paramètres de comportement des matériaux, nous présentons notre algorithme d'identification inverse. Cet algorithme est basé sur le couplage d'une nouvelle approche pour le calcul de structures par la méthode des éléments finis et d'une méthode d'optimisation (méthode du Simplexe). Les sorties du calcul

par éléments finis sont les courbes : force - déplacement (réponse globale de la structure) et grâce à la procédure d'optimisation qui agit d'une manière itérative, elle permet de coïncider ces réponses numériques avec les grandeurs mesurées expérimentalement.

## Chapitre 4

Le quatrième chapitre est dédié à la stratégie d'identification des modèles de comportement anisotrope à partir des essais expérimentaux. Une proposition d'identification des coefficients d'anisotropie pour des modèles élastoplastiques (avec des lois d'écoulement plastique associé et non associé et un écrouissage isotrope) intégrant ainsi des critères de plasticité relativement simples et compliqués est présentée. Nous identifions le modèle isotrope transverse et le modèle quadratique orthotrope de Hill. Un modèle basé sur un critère récent de Barlat est identifié, permettant ainsi de décrire l'écrouissage de l'essai de traction plane inhomogène et de prévoir l'évolution des écoulements plastiques (identification du coefficient d'anisotropie expérimental).

Cette stratégie d'identification est développée à partir des essais de la traction simple, et de la traction plane ainsi que des coefficients d'anisotropie, mesurés dans différentes directions par rapport à la direction du laminage. L'identification des paramètres de comportement est effectuée sur la base de l'interprétation homogène et non homogène des essais. Elle permet de dégager l'apport de l'utilisation de l'algorithme d'identification inverse et de comparer les résultats obtenus par les deux approches homogène et inhomogène (identification inverse).

## Chapitre 5

Dans le cinquième chapitre, nous nous proposons d'étudier l'effet de la variation des paramètres identifiés sur les réponses calculées des modèles. Ceci revient à calculer la sensibilité des réponses simulées par rapport aux paramètres d'anisotropie des modèles identifiés. Le calcul de sensibilité que nous avons développé dans ce chapitre est basé sur une méthode spécifique incrémentale qui découle d'une manière systématique de l'algorithme particulier que nous utilisons dans le calcul des structures par la méthode des éléments finis. Nous procédons par un calcul semi-analytique des équations constitutives des modèles pour dériver la réponse globale calculée par rapport aux paramètres identifiés.

Pour exprimer la capacité d'un essai, afin de mieux identifier les coefficients d'anisotropie d'un matériau par rapport à un autre essai, nous définissons un indicateur de sensibilité dans le but de classer la sensibilité d'un ensemble d'essais, pour déduire quel est l'essai le plus adéquat permettant ainsi l'identification avec plus de précision le coefficient d'anisotropie d'un modèle donné.

*Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse ont été réalisés au sein du Laboratoire de Génie Mécanique à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir, Tunisie.*



# Chapitre 1

## Formulation et modélisation des lois de comportement élastoplastiques

### 1.1 Introduction

**L**a simulation numérique des procédés de mise en forme a beaucoup évolué avec la performance des calculateurs ainsi qu'avec le développement rapide des outils numériques comme la méthode de calcul par éléments finis au cours de ces dernières décennies. Ces codes de calcul nécessitent des modèles ou des lois de comportement qui doivent satisfaire aux principes généraux de la mécanique, en particulier l'indifférence matérielle, et être physiquement "acceptables", c'est à dire, ils doivent respecter les principes de la thermodynamique et les symétries de la matière. Ces lois de comportement doivent être simples, afin de faciliter leur identification et leur implémentation dans les codes de calcul.

Les lois élastoplastiques constituent une classe importante de modèles utilisés en calcul de structures métalliques. Ces modèles se divisent en deux classes : Les modèles phénoménologiques, définis par des fonctions constitutives reliant un certain nombre de variables internes, qui pourraient tenir compte de la structure interne du matériau ainsi que de l'histoire des sollicitations. La deuxième classe est celle des modèles micro-macro basés sur des approches polycristallines et tenant compte de la texture cristallographique des matériaux.

On se limite aux modèles phénoménologiques à variables internes qui peuvent être de nature tensorielles ou scalaires. Ces modèles macroscopiques élastoplastiques sont basés sur l'hypothèse de la décomposition de la déformation totale en une partie élastique et une partie plastique et l'hypothèse de l'indépendance du comportement plastique de la vitesse de déformation. Plusieurs travaux sont menés pour définir, décrire et modéliser l'évolution de la surface de plasticité. Les travaux expérimentaux confrontés à ces modèles montrent leurs limites que se soit pour la description ou l'évolution de la surface de plasticité. Mais aucun modèle ne semble s'imposer et les efforts d'amélioration, d'extension ou encore de nouvelles propositions de modèles sont en croissance continue.

Nous exposons dans ce chapitre la formulation des lois de comportement dans un cadre général et thermodynamique pour que ces lois aient un sens physique. La formulation de

la plasticité dans le cadre des matériaux standard généralisés (plasticité associée) et de la plasticité non associée est présentée. Nous présentons une synthèse sur les critères de plasticité isotropes, isotropes transverses, orthotropes quadratiques et non quadratiques.

## 1.2 Formulation des lois de comportement élastoplastiques

La phénoménologie des lois élastoplastiques est basée essentiellement sur deux hypothèses :

- La décomposition de la déformation totale en deux composantes : une composante élastique réversible et une composante plastique irréversible.
- Le comportement plastique est supposé indépendant de la vitesse de déformation. La loi de comportement est homogène de degré zéro par rapport à la vitesse de déformation plastique, d'où l'existence d'un seuil de plasticité. L'écriture des lois élastoplastiques en utilisant un formalisme petites déformations peut se synthétiser sous la forme suivante :

$$\text{décomposition de la déformation} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (1.1)$$

$$\text{fonction seuil} \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{loi élastique} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (1.3)$$

$$\text{loi d'évolution plastique} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \quad (1.4)$$

$$\text{loi d'évolution des variables internes} \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \lambda l(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \quad (1.5)$$

La relation (1.1) définit la première hypothèse des modèles élastoplastiques. La relation (1.2) définit la fonction seuil ou le critère de plasticité; la fonction  $f$  définit la surface seuil dans l'espace des contraintes. A l'intérieur de cette surface, il ne peut évoluer que les déformations élastiques, néanmoins cette surface peut évoluer en fonction de l'écroutissage (variables internes  $\boldsymbol{\alpha}$ ). La relation (1.3) définit la loi élastique supposée linéaire élastique isotrope (elle est souvent suffisante pour décrire le comportement élastique des matériaux métalliques usuels).  $\mathbf{A}$  est un tenseur d'élasticité d'ordre 4. La relation (1.4) est la loi d'évolution de l'écoulement plastique, où  $\mathbf{h}$  est une fonction tensorielle constitutive du modèle. Le scalaire  $\lambda$ , est le multiplicateur plastique ( $\lambda > 0$ ), qui est déterminé par la condition de consistance ( $\dot{f} = 0$ ). La relation (1.5) définit l'évolution des variables d'écroutissage. La fonction  $l$  est peut être scalaire ou tensorielle suivant la nature de  $\boldsymbol{\alpha}$ .

### Cadre thermodynamique

L'étude des lois de comportement dans un cadre thermodynamique permet à la fois d'avoir des lois de comportement ayant une signification physique et satisfaisant aux principes de la thermodynamique. Dans le cadre des modèles thermodynamiques, deux hypothèses sont à énoncer :

### Hypothèse de l'état local

- La première hypothèse postule l'existence d'un potentiel thermodynamique  $\psi_p$  (énergie libre spécifique) et l'existence d'une famille de variables internes caractérisant l'état du matériau.

En petites perturbations (HPP), l'hypothèse de la décomposition de la déformation totale  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en une partie réversible  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  et en une partie irréversible  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  est admise. On admet alors que l'énergie libre spécifique  $\psi$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$\psi = \psi_p(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \alpha) \quad (1.6)$$

L'écriture de l'inégalité de Clausius-Duhem, traduit la combinaison du premier et du second principe de la thermodynamique permettant de définir les forces généralisées associées aux variables internes.

$$\left( \boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \frac{\partial \psi_p}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \geq 0 \quad (1.7)$$

Si on considère que toute transformation réversible n'induit aucune évolution de  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et des variables internes d'érouissage  $\alpha$ , alors cette transformation correspond à un comportement élastique du matériau au point étudié. L'inégalité (1.7) est alors vérifiée si :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (1.8)$$

Par analogie à (1.8), il est commode d'introduire les forces thermodynamiques  $q$  associées aux variables internes d'érouissage  $\alpha$  et définies par :

$$q = \rho \frac{\partial \psi_p}{\partial \alpha} \quad (1.9)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem prend finalement la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - q \dot{\alpha} \geq 0 \quad (1.10)$$

### Hypothèse de dissipativité normale

- La deuxième hypothèse (dissipativité normale, dans le cadre des matériaux standards généralisés), postule l'existence d'une fonction seuil  $f$  qui définit un domaine convexe de plasticité dans l'espace des contraintes, alors la relation (1.2) s'écrit sous la forme :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \quad (1.11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \mathbf{h} \quad \mathbf{h} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.12)$$

$$\dot{\alpha} = -\lambda l \quad l = -\frac{\partial f}{\partial q} \quad (1.13)$$

Les fonctions constitutives  $f$ ,  $q$ ,  $\mathbf{h}$  et  $l$  définissent ce que nous appelons un matériau modèle. Le choix des mesures des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ , des déformations  $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p)$  et des vitesses de déformations  $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$  constitue le cadre cinématique du modèle.

Dans le cadre des matériaux standards généralisés, la donnée des fonctions  $\psi$  et  $f$  (loi de normalité associée) permet de préciser les fonctions constitutives  $\mathbf{h}$  et  $l$  qui définissent complètement la loi de comportement.

### Plasticité non associée

Dans le cas où la loi d'évolution ne dérive pas du potentiel plastique  $f$ , il s'agit alors de la plasticité non associée. Les fonctions constitutives  $\mathbf{h}$  et  $l$  dérivent donc d'un potentiel  $g$  différent de  $f$ . La formulation du modèle nécessite alors trois fonctions : l'énergie libre massique, la fonction seuil et le potentiel plastique  $g$  qui s'écrit :

$$g(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \quad (1.14)$$

Les lois d'évolution des variables internes deviennent alors :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \mathbf{h} \quad \mathbf{h} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.15)$$

$$\dot{\alpha} = -\lambda l \quad l = -\frac{\partial f}{\partial q} \quad (1.16)$$

La forme des fonctions constitutives doit respecter les symétries matérielles. Comme on s'intéresse aux cas isotropes transverses (isotropie dans le plan) et orthotropes, ces fonctions vont dépendre des arguments  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $M_i$  ( $M_i$  représente un repère orthonormé définissant les directions d'orthotropie; les axes du repère se confondent généralement aux directions de laminage, transverse et normale pour une tôle). Si au cours de l'érouissage, ces symétries sont conservées; (généralement par rapport à  $\boldsymbol{\sigma}$ ) on dira qu'il s'agit d'un érouissage isotrope.

## 1.3 Critères de plasticité

Un critère de plasticité définit, pour un élément de volume dans un état de charge donné, l'atteinte du régime plastique. Une fonction  $f$  appelée fonction de charge décrit une surface de plasticité dans l'espace des contraintes. Si cette fonction  $f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) < 0$ , le comportement du matériau est élastique (déformations élastiques réversibles). Si  $f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0$  (relation (1.2)), le matériau est en chargement plastique (déformations irréversibles) et il subit alors le phénomène d'érouissage, tant que la relation  $f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0$  est vérifiée à chaque instant. Nous allons supposer par la suite que la variable interne qui caractérise l'érouissage est scalaire, d'où un érouissage isotrope. Cette hypothèse peut être raisonnable pour les tôles d'emboutissage tant que les déformations plastiques que subissent les tôles au cours du procédé de mise en forme ne modifie guère l'anisotropie initiale (anisotropie orthotrope) qui est fonction de l'histoire thermo-mécanique du matériau.

Un critère de plasticité doit être une fonction convexe dans l'espace des contraintes. La convexité de la surface de plasticité assure l'unicité d'un incrément de déformation plastique pour un état de contraintes donné. Mathématiquement parlant, la fonction de charge  $f$  est convexe, si elle est deux fois différentiable et sa matrice Hessienne  $H$  est semi-définie positivement. Ceci implique que les valeurs propres de  $H$  sont positives ou nulles. La matrice Hessienne  $H$  est définie par l'écriture suivante :

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} \quad (1.17)$$

Les critères isotropes expriment que le régime plastique est obtenu pour des états de contraintes indépendants de l'orientation du repère dans lequel sont appliquées les contraintes par rapport à un repère matériel quelconque. On peut donc aussi bien exprimer l'équation décrivant la surface de plasticité en fonction des contraintes principales :  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (1.18)$$

$$\text{où } f(I_1, I_2, I_3) = 0 \quad (1.19)$$

où  $I_1, I_2$  et  $I_3$  sont des invariants principaux, indépendants du repère dans lequel sont exprimés :

$$I_1 = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{kk} \quad (1.20)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[(\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}))^2 - \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^2)] = \frac{1}{2}[\sigma_{kk}^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ij}] \quad (1.21)$$

$$I_3 = \det|\boldsymbol{\sigma}| \quad (1.22)$$

Un écoulement plastique ne peut pas être engendré par une contrainte hydrostatique, alors seule la partie déviatorique du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})\text{Id}$  induit une déformation plastique. La fonction de charge est ré-exprimée sous la forme suivante :

$$f(J_2, J_3) = 0 \quad (1.23)$$

avec

$$J_2 = \frac{1}{2}\text{Tr}((\boldsymbol{\sigma}^D)^2) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D \quad (1.24)$$

$$J_3 = \frac{1}{3}\text{Tr}((\boldsymbol{\sigma}^D)^3) = \frac{1}{3}\sigma_{ij}^D \sigma_{jk}^D \sigma_{ki}^D. \quad (1.25)$$

### 1.3.1 Critères de plasticité isotropes

#### • Critère de Tresca (1864)

Le premier critère utilisé pour les matériaux métalliques a été proposé par Tresca (1864). Ce critère postule que la limite d'élasticité est atteinte lorsque la contrainte de cisaillement maximale atteint une valeur critique  $k$ . La surface de plasticité est donc déterminée par :

$$\text{Max} = \left[ \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|; \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|; \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3| \right] - k = 0 \quad (1.26)$$

La limite élastique en cisaillement  $k$  peut être déterminée par un essai de traction uniaxiale, pour lequel la limite élastique  $\sigma_0$  est égale à  $2k$ .

Sa représentation dans l'espace de contraintes principales (espace de Haigh-Westergaard) correspond à un prisme droit d'axe  $\Delta$  (Figure 1.1) ayant pour base un hexagone régulier dans le plan déviatoire (Figure 1.2).

- **Critère de Von Mises (1913)**

Le critère de Von Mises (1913) revient à considérer que la fonction de charge ne dépend que de l'invariant  $J_2$ . La surface de plasticité s'exprime sous la forme suivante :

$$f(J_2) = J_2 - k^2 = 0 \quad (1.27)$$

Où  $k$  est une mesure de la limite élastique en cisaillement ; elle est aussi liée à la limite élastique en traction - compression uniaxiale  $\sigma_0$  par la relation  $\sigma_0 = \sqrt{3}k$ . Sa représentation dans l'espace de Haigh-Westergaard correspond à un cylindre d'axe  $\Delta$  (Figure 1.1) à base circulaire de rayon  $\sqrt{2}k$  dans le plan déviatoire. En utilisant l'expression développée de  $J_2$ , on peut également représenter la surface de plasticité par les équations :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 6k^2 = 0 \quad (1.28)$$

dans les axes principaux de contraintes ou

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) - 6k^2 = 0 \quad (1.29)$$

dans un système d'axes quelconques. Ce critère peut être interprété en considérant soit que l'énergie élastique de cisaillement atteint une valeur critique, soit que la contrainte de cisaillement sur les plans octaédriques, d'équation  $x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0$  dans les axes principaux de contraintes, atteint une valeur critique.

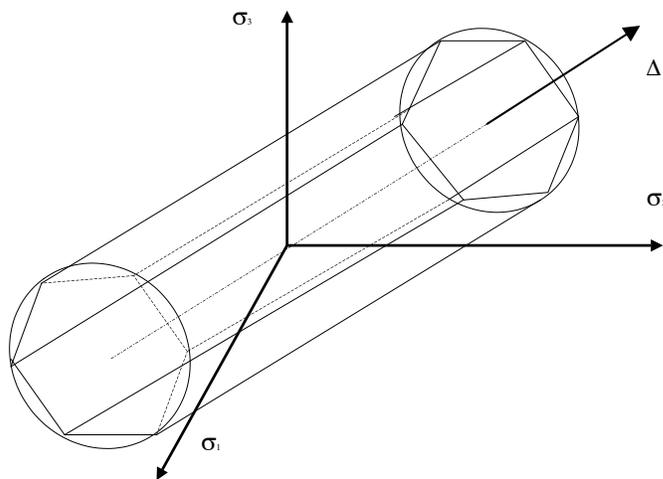


FIG. 1.1: Représentation de la surface de plasticité correspondant aux critères de Tresca et de Von Mises, dans l'espace des contraintes principales.

- **Critère de Drucker (1949)**

C'est un critère isotrope proposé par Drucker en 1949. Ce critère se situe, dans le plan déviatoire, entre l'hexagone de Tresca et le cercle de Von Mises. Il est exprimé en fonction des invariants  $J_2$  et  $J_3$ , sous la forme suivante :

$$f(J_2, J_3) = (3J_2)^3 \left( 1 - c \left( \frac{J_3^2}{J_2^3} \right) \right) = \left( 1 - \frac{4c}{27} \right) \sigma_0^6 = 0 \quad (1.30)$$

Où  $\sigma_0$  désigne la limite élastique en traction ou compression uniaxiale. La condition de convexité de ce critère est vérifiée quand  $c \leq \frac{9}{4}$ .

La figure (1.2) représente les surfaces de plasticité correspondant aux critères isotropes de Tresca, Von Mises et Drucker, dans le plan déviatoire.

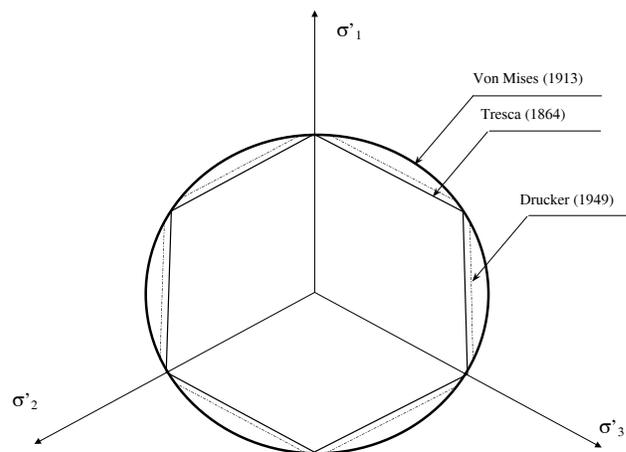


FIG. 1.2: Représentation des surfaces de plasticité correspondants aux critères de Von Mises, Tresca et Drucker, dans le plan déviatoire.

- **Critère de Hershey-Hosford**

C'est un critère isotrope non quadratique exprimé dans les axes principaux de l'orthotropie. Il est introduit par Hershey et Hosford (Hershey, 1954), (Hosford, 1972) et particulièrement convenable pour tenir compte des structures cristallographiques, cubiques centrées (CC) et cubiques à faces centrées (CFC) des matériaux isotropes. Le coefficient  $m$  est un paramètre matériel, basé sur des résultats de calculs microcrisallins. Des valeurs particulières de ce coefficient  $m$ , sont conseillés pour avoir des prédictions des modèles proches des résultats expérimentaux (Hosford, 1979, 1992, 1996) (Logan et Hosford, 1980) ( $m = 6$  pour une structure cristallographique cubique centrée (CC),  $m = 8$  pour une structure cubique à faces centrées (CFC)). Ce critère se présente formellement comme une extension non quadratique du critère isotrope de Von Mises sous la forme suivante :

$$f = |\sigma_1 - \sigma_2|^m + |\sigma_2 - \sigma_3|^m + |\sigma_3 - \sigma_1|^m - 2\bar{\sigma}^m = 0 \quad (1.31)$$

Où  $\sigma_i, i = 1, 2, 3$  représente les composantes principales du tenseur déviatoire de contraintes et  $\bar{\sigma}$  est la contrainte équivalente du critère. D'autres critères améliorés sont proposés par

(Hosford, 1985), (Barlat et Lian, 1989) pour tenir compte de la composante de la contrainte de cisaillement.

### 1.3.2 Critères isotropes transverses

- **Critère quadratique isotrope transverse de Hill**

Le critère isotrope transverse de Hill est un cas particulier de son critère orthotrope. La symétrie autour de l'axe normal au plan de la tôle (DN) réduit le nombre de paramètres du critère à un seul coefficient d'anisotropie que l'on peut choisir comme correspondant au coefficient de Lankford  $r = \frac{d\varepsilon_{22}}{d\varepsilon_{33}}$ . Ce critère s'écrit dans le repère d'orthotropie par la relation suivante :

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{r}{1+r}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \frac{1}{1+r}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2) + 2\frac{1+2r}{1+r}\sigma_{12}^2 \quad (1.32)$$

- **Critère non quadratique de Hosford (1972)**

Ce critère isotrope transverse se présente comme une extension non quadratique du critère quadratique de Hill (Hosford, 1972). Il s'exprime dans le repère principal de contraintes sous la forme suivante :

$$|\sigma_1|^m + |\sigma_2|^m + r|\sigma_1 - \sigma_2|^m - (1+r)\bar{\sigma}^m = 0 \quad (1.33)$$

Où  $\sigma_i, i = 1, 2, 3$  représente les composantes principales du tenseur déviatorique de contraintes et  $\bar{\sigma}$  est la contrainte équivalente du critère. Le paramètre  $m$  est un coefficient de forme du critère dépendant de la structure cristallographique du matériau et  $r$  est le coefficient d'anisotropie.

- **Critère non quadratique de Hill (1979)**

Le critère de Hill quadratique exprime une certaine anomalie de comportement pour certains nombre d'alliages d'aluminium et surtout pour ceux qui possèdent des coefficients d'anisotropie  $\leq 1$ . Hill a proposé des critères plus généralisés que le critère quadratique classique. Ces critères sont généralement plus complexes et non quadratiques avec des paramètres d'anisotropie supplémentaires.

Le critère proposé par Hill (1979) correspond à un critère orthotrope applicable uniquement dans le cas où les axes principaux des contraintes coïncident avec les directions d'orthotropie. L'expression de ce critère, s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f|\sigma_2 - \sigma_3|^m + g|\sigma_3 - \sigma_1|^m + h|\sigma_1 - \sigma_2|^m + a|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^m + \\ + b|2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1|^m + c|2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|^m - \bar{\sigma}^m = 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

Où les paramètres  $f, g, h, a, b$  et  $c$ , caractérisent l'anisotropie du matériau. La contrainte  $\bar{\sigma}$  représente la contrainte équivalente du critère et  $m$  est le coefficient de forme du critère. Ce coefficient doit être supérieur à l'unité pour assurer la convexité du critère. Tous ces paramètres sont déterminés à partir des essais expérimentaux. A partir de cette expression

généralisée, cinq cas sont à distinguer, pour permettre avec certaines valeurs de ces coefficients d'anisotropie, de bien prédire le comportement anisotrope des matériaux. Si nous considérons un essai de traction uniaxiale, Hill a montré que dans le cas isotrope transverse, le coefficient d'anisotropie  $r$ , s'écrit d'une façon générale à partir du critère, sous la forme suivante (Hill, 1979) :

$$r = \frac{(2^{m-1} + 2)a - c + h}{(2^{m-1} - 1)a + 2c + f} \quad (1.35)$$

Tous ces cas sont écrits sous l'hypothèse de l'isotropie transverse, où ( $a = b$ ,  $f = g$ ) et ils sont exprimés pour un état de contraintes planes sous les formes suivantes :

**cas(1) :**  $a = b = 0, h = 0, f = g$

$$(2r + 1)(|\sigma_1|^m + |\sigma_2|^m) - r|\sigma_1 + \sigma_2|^m - (r + 1)\bar{\sigma}^m = 0 \quad (1.36)$$

**cas(2) :**  $a = b, c = f = g = 0$

$$\begin{aligned} [2^{m-1}(r - 1) - (r + 2)]|\sigma_1 - \sigma_2|^m + (|2\sigma_1 - \sigma_2|^m \\ + |2\sigma_2 - \sigma_1|^m - (2^{m-1} - 1)(r + 1)\bar{\sigma}^m = 0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

**cas(3) :**  $a = b, f = g, c = h = 0$

$$\begin{aligned} [(2^{m-1}(1 - r) + (r + 2)](|\sigma_1|^m + |\sigma_2|^m) \\ + r(|2\sigma_1 - \sigma_2|^m + |2\sigma_2 - \sigma_1|^m) - (2^{m-1} + 2)(r + 1)\bar{\sigma}^m = 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

**cas(4) :**  $a = b = f = g = 0$

$$(1 + 2r)|\sigma_1 - \sigma_2|^m + |\sigma_1 + \sigma_2|^m - 2(r + 1)\bar{\sigma}^m = 0 \quad (1.39)$$

**cas(5) :**  $a = b = c = 0, f = g$

$$|\sigma_1|^m + |\sigma_2|^m + r|\sigma_1 - \sigma_2|^m - (r + 1)\bar{\sigma}^m = 0 \quad (1.40)$$

Les quatre premiers cas sont originellement proposés par Hill (Hill, 1979), alors que le cinquième cas est proposé par Hosford. Pour la condition de convexité, Zhu et Lian (Lian et al., 1989) ont montré que les cas (1), (2) et (3) conduisent à des fonctions non convexes, pour plusieurs combinaisons de paramètres  $r$  et  $m$ , alors que les cas (4) et (5) sont convexes à condition que le coefficient  $m > 1$ . Le cas (4) satisfaisant la condition de convexité, a plusieurs applications industrielles pour l'analyse des processus de la mise en forme des tôles. Pour cette raison, Chu (Chu, 1995) a proposé de généraliser ce cas pour introduire la composante de contrainte de cisaillement en s'inspirant de la formulation proposée par Barlat et Lian (Barlat et Lian, 1989).

• **Formulation paramétrique du critère de Budiansky (1984)**

Budiansky (1984) a développé une représentation en coordonnées polaires de la surface de plasticité pour un matériau isotrope transverse, soumis à un état de contraintes planes. La surface de plasticité est décrite sous une forme paramétrique par :

$$x_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2\sigma_b} = g(\theta) \cos(\theta) \quad (1.41)$$

$$x_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\tau} = g(\theta) \sin(\theta) \quad (1.42)$$

Où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les contraintes principales,  $g(\theta)$  est une fonction représentant le rayon polaire du point courant de la surface de plasticité normée par  $\sigma_b$  et  $\tau$ , qui sont respectivement les contraintes d'écoulement en traction équibiaxiale et en cisaillement, et  $\theta$  l'angle polaire associé.

La condition de convexité de la surface de plasticité s'exprime par l'inégalité suivante :

$$g^2 + 2g'^2 - gg'' \geq 0 \quad (1.43)$$

La condition de traction uniaxiale  $\sigma_u$  est obtenue avec  $\sigma_1 = 0$  dans les équations (1.41, 1.42). Ce qui donne :

$$\sigma_u = 2\tau g(\theta_u) \sin(\theta_u) = 2\sigma_b g(\theta_u) \cos(\theta_u) \quad (1.44)$$

où l'angle polaire  $\theta_u$  correspondant à la traction uniaxiale est lié au rapport des contraintes  $\sigma_b$  et  $\tau$  par :

$$\tan(\theta_u) = \frac{\sigma_b}{\tau} = Y \quad (0 < \theta_u < \frac{\pi}{2}) \quad (1.45)$$

La contrainte de traction uniaxiale  $\sigma_u$  étant prise comme contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$ , les contraintes principales s'expriment finalement par :

$$\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} = -\frac{Xg(\theta) \sin(\theta - \theta_u)}{\sin(\theta_u)} \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_2}{\bar{\sigma}} = \frac{Xg(\theta) \sin(\theta + \theta_u)}{\sin(\theta_u)} \quad (1.46)$$

où  $X = \frac{\sigma_b}{\bar{\sigma}}$

Enfin, une condition relie le coefficient d'anisotropie  $r$ , le paramètre  $Y$  et les valeurs de  $g$  et de  $g'$  pour  $\theta = \theta_u$  ; cette condition s'écrit :

$$\frac{g'(\theta_u)}{g(\theta_u)} = \frac{Y^2 - 1 - 2r}{2Y(1 + r)} \quad (1.47)$$

Par conséquent, le tracé d'une surface de plasticité à l'aide du critère de Budiansky nécessite la connaissance des paramètres  $X$ ,  $Y$ ,  $r$ ,  $\theta_u$  et de la fonction  $g(\theta)$ . Budiansky a proposé d'utiliser pour  $g(\theta)$  un développement en série de Fourier sous la forme suivante :

$$g(\theta) = \sum a_n \cos(2n\theta) \quad (1.48)$$

qui, en prenant suffisamment de termes, permet a priori d'obtenir une surface de plasticité rendant compte, avec précision, des points expérimentaux ou des résultats de calculs d'homogénéisation.

Pour  $g(\theta) = 1$ , les relations ci-dessus se réduisent à celles qui s'appliquent dans le cas du critère quadratique de Hill (avec  $X = \sqrt{\frac{1+r}{2}}$  et  $Y = \sqrt{1+2r}$ ) ou celui de Von Mises (avec  $X = 1$  et  $Y = \sqrt{3}$ ). Les fonctions non quadratiques proposées par Hill (1979) et par Bassani (1977) représentent aussi des cas particuliers de la formulation de Budiansky.

### 1.3.3 Critères de plasticité orthotropes

L'orthotropie correspond à un cas particulier de l'anisotropie, pour lequel le matériau présente trois plan de symétrie orthogonaux. La prise en compte de cette anisotropie est importante, du fait que les procédés mécaniques de fabrication des tôles (le laminage, par exemple) confèrent à ces matériaux une anisotropie initiale orthotrope.

- **Critère quadratique de Hill (1948)**

Parmi les critères de plasticité initialement anisotropes, le plus classique, pour les matériaux métalliques, (surtout pour les tôles) est le critère de Hill (1948). C'est un critère quadratique en contraintes et de symétrie orthotrope. Ce critère est souvent associé à un écrouissage isotrope, donc la plasticité reste toujours orthotrope. Soit  $\vec{M}_i$  un repère orthonormé définissant les directions d'orthotropie. De manière générale, un critère orthotrope quadratique en contraintes avec écrouissage isotrope s'écrit (Dogui, 1989) :

$$\bar{\sigma}^2 = a_i[\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M}_i]^2 + b_i[\boldsymbol{\sigma}^2 : \mathbf{M}_i] + c_{ij}[\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M}_i][\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M}_j] \quad (1.49)$$

où  $\mathbf{M}_i = \vec{M}_i \otimes \vec{M}_i$  désigne le produit tensoriel. Sachant que, le critère de plasticité ne dépend que de la partie déviatorique du tenseur de contraintes, les 9 scalaires  $a_i, b_i$  et  $c_{ij}$  ( $c_{ij} = c_{ji}; i \neq j$ ) doivent vérifier les relations suivantes :

$$a_1 + b_1 - c_{12} - c_{13} = 0; \quad a_2 + b_2 - c_{21} - c_{23} = 0; \quad a_3 + b_3 - c_{31} - c_{32} = 0 \quad (1.50)$$

Donc, ces 9 coefficients se réduisent à 6 coefficients indépendants. Une autre forme d'expression du critère est possible et découle de l'écriture et des considérations précédentes :

$$\bar{\sigma}^2 = A_{ij}(\mathbf{M}_i \boldsymbol{\sigma}^D) : (\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{M}_j) + B_{ij}(\boldsymbol{\sigma}^D : \mathbf{M}_i)(\boldsymbol{\sigma}^D : \mathbf{M}_j) \quad (1.51)$$

avec :

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & N & M \\ N & 0 & L \\ M & L & 0 \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} G + H & -H & -G \\ -H & H + F & -F \\ -G & -F & F + G \end{bmatrix}$$

Finalement, dans un repère orthonormé définissant les directions d'orthotropie  $\vec{M}_i$ , le critère est usuellement écrit sous la forme suivante :

$$\bar{\sigma}^2 = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 \quad (1.53)$$

Où  $\bar{\sigma}$  est la contrainte équivalente de Hill. Les  $\sigma_{ij}$  représentent les composantes du tenseur de contraintes de Cauchy dans le repère d'orthotropie et  $\sigma^D$  représente le déviateur du tenseur  $\sigma$  ( $\sigma^D = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma)I$ ). La fonction d'écrouissage  $\sigma_s(\alpha)$  est isotrope, elle dépend de la variable scalaire interne  $\alpha$ . Les coefficients  $F, G, H, L, M$  et  $N$  étant les coefficients de Hill qui sont généralement constants indépendants des variables d'écrouissage  $\alpha$ . Cependant, rien n'empêche ces coefficients pour dépendre de la variable interne d'écrouissage  $\alpha$ .

Dans le cas particulier d'un état de contraintes planes  $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$ , ce critère s'écrit dans le repère d'orthotropie :

$$\bar{\sigma}^2 = (G + H)\sigma_{11}^2 - 2H\sigma_{11}\sigma_{22} + (F + H)\sigma_{22}^2 + 2N\sigma_{12}^2 \quad (1.54)$$

Dans le cas particulier, où nous avons une symétrie autour de la normale à la tôle (DN), les relations suivantes sont déduites :  $F = G$  et  $N = G + 2H$ . Nous retrouvons alors, le critère isotrope transverse défini par l'expression (1.32).

Le critère quadratique de (Hill, 1948) est largement utilisé pour décrire le comportement des tôles. Ce critère a été très utile pour expliquer les phénomènes en relation avec l'anisotropie plastique, essentiellement pour les matériaux métalliques. La proposition de ce critère a été considérée comme étant le point de départ des efforts pour l'établissement de la théorie de la plasticité anisotrope. Néanmoins, pour certains matériaux comme les alliages d'aluminium, (Barlat et al., 1997b), (Yoon, 1998), (Lademo, 1999), le critère quadratique de Hill n'était pas assez précis pour décrire le comportement de tels matériaux.

Par conséquent, un certain nombre de critères ont été proposés pour mieux prévoir le comportement des matériaux (Hill, 1979) (Hill, 1990), (Hill, 1993), (Karafillis et al., 1993), (Barlat et Lian, 1989), (Barlat et al., 1991).

#### • Critère de Hill (1990)

Hill propose en 1990 un nouveau critère, comme une extension du critère proposé en 1979. Dans ce dernier, les directions de chargement sont limitées dans les directions principales d'orthotropie. Le critère de Hill(1990) envisage des chargements de directions différentes par rapport aux directions d'orthotropie. Ce critère se limite à un état de contraintes planes. L'expression de ce critère est la suivante :

$$|\sigma_1 + \sigma_2|^m + \left(\frac{\sigma_B}{\tau}\right)^m |\sigma_1 - \sigma_2|^m + |\sigma_1^2 + \sigma_2^2|^{(m/2)-1} \{-2a(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + b(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos(2\alpha)\} \cos(2\alpha) - (2\sigma_B)^m = 0 \quad (1.55)$$

Où  $\tau$  est la limite élastique en cisaillement, parallèlement aux axes d'orthotropie et  $\sigma_B$  est la limite élastique en traction équilibriaxiale,  $\alpha$  représente l'angle entre les directions d'orthotropie

et les directions principales de contraintes. Les constantes  $a$  et  $b$  sont les coefficients du matériau, qui s'expriment en fonction des paramètres classiques d'anisotropie de Hill (1948).

$$a = \frac{(F - G)}{(F + G)} \quad \text{et} \quad b = \frac{(F + G + 4H - 2N)}{(F + G)} \quad (1.56)$$

Ce critère se réduit au critère quadratique de Hill (1948) quand  $m = 2$  et il recouvre le critère de Hill (1979) quand les paramètres  $a$  et  $b$  sont nuls.

Pour un essai de traction uniaxiale dans une direction  $\alpha$ , le coefficient d'anisotropie  $r_\alpha$  est exprimé par cette relation :

$$1 + 2r_\alpha = \frac{(\sigma_B/\tau)^m - a \cos(2\alpha) + [(m + 2)/2m]b \cos^2(2\alpha)}{1 - a \cos(2\alpha) + [(m - 2)/2m]b \cos^2(2\alpha)} \quad (1.57)$$

L'expression de la contrainte élastique uniaxiale  $\sigma_\alpha$  prise dans une direction  $\alpha$  est donnée par la relation suivante :

$$\left(\frac{2\sigma_B}{\sigma_\alpha}\right)^m = 1 + \left(\frac{\sigma_B}{\tau}\right)^m - 2a \cos 2\alpha + b \cos^2 2\alpha \quad (1.58)$$

L'équation (1.57) peut être aussi écrite sous la forme suivante :

$$2(1 + r_\alpha) = \frac{\left(\frac{2\sigma_B}{\sigma_\alpha}\right)^m}{1 - a \cos(2\alpha) + [(m - 2)/2m]b \cos^2(2\alpha)} \quad (1.59)$$

En réalisant des essais de traction hors axes dans les directions  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$ , on peut mesurer les coefficients d'anisotropie  $r_0$ ,  $r_{45}$  et  $r_{90}$  par la suite déterminer les paramètres  $a$  et  $b$  :

$$a = \frac{r_0 - r_{90}}{r_0 + r_{90}} \left( 1 + \frac{m - 2}{2} \frac{r_{45}(r_0 + r_{90}) - 2r_0r_{90}}{r_0r_{90}(m - 2) - (r_0 + r_{90})} \right) \quad (1.60)$$

$$b = \frac{m (r_{45}(r_0 + r_{90}) - 2r_0r_{90})}{r_0r_{90}(m - 2) - (r_0 + r_{90})} \quad (1.61)$$

La relation suivante est utilisée pour obtenir le rapport  $\left(\frac{\sigma_B}{\tau}\right)^m$  :

$$1 + 2r_{45} = -\left(\frac{\sigma_B}{\tau}\right)^m \quad (1.62)$$

La condition de convexité du critère est assurée pour  $m > 1$  et  $a \geq 0$ , alors que le coefficient  $b$  peut être positif ou négatif, tant que les limites suivantes sont vérifiées pour  $m < 2$  :

$$b > -2^{(m-2)-1} \left(\frac{\sigma_B}{\tau}\right)^m \quad (1.63)$$

$$b > a^2 - \left(\frac{\sigma_B}{\tau}\right)^m \quad (1.64)$$

La condition (1.64) implique la condition (1.63) pour  $m \geq 2$ .

- **Critère de Hill (1993)**

Ce critère est défini seulement pour un état de contraintes planes et pour des chargements appliqués selon les axes d'orthotropie (pas de composante de cisaillement). Ceci permet soit d'identifier  $r_0$  et  $r_{90}$  quand  $\sigma_0$  est presque égale à  $\sigma_{90}$ , soit d'identifier  $\sigma_0$  et  $\sigma_{90}$  quand  $r_0$  et  $r_{90}$  sont presque identiques. L'expression du critère est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_0^2} - C \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_0 \sigma_{90}} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{90}^2} + \left( (A + B) - \frac{A\sigma_x + B\sigma_y}{\sigma_b} \right) \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_0 \sigma_{90}} = 1 \quad (1.65)$$

Les constantes  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont déterminées à partir des relations suivantes qui nécessitent des résultats des essais de traction dans les directions  $0^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à la direction de laminage et d'un essai d'expansion équi-biaxiale :

$$\frac{C}{\sigma_0 \sigma_{90}} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma_{90}^2} + \frac{1}{\sigma_B^2} \quad (1.66)$$

$$\left( \frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_{90}} - \frac{1}{\sigma_B} \right) A = \frac{2r_0(\sigma_B - \sigma_{90})}{(1 + r_0)\sigma_0^2} - \frac{2r_{90}\sigma_B}{(1 + r_{90})\sigma_{90}^2} + \frac{C}{\sigma_0} \quad (1.67)$$

$$\left( \frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_{90}} - \frac{1}{\sigma_B} \right) B = \frac{2r_{90}(\sigma_B - \sigma_0)}{(1 + r_{90})\sigma_{90}^2} - \frac{2r_0\sigma_B}{(1 + r_0)\sigma_0^2} + \frac{C}{\sigma_{90}} \quad (1.68)$$

La figure (1.3) montre une comparaison entre la prédiction de trois critères. Le critère de Hill (1993) est en bonne corrélation avec les résultats expérimentaux. Ce critère a été utilisé par Banabic pour prédire théoriquement les courbes limites de formage (CLF), dans une version isotrope transverse de ce critère (Banabic, 1997).

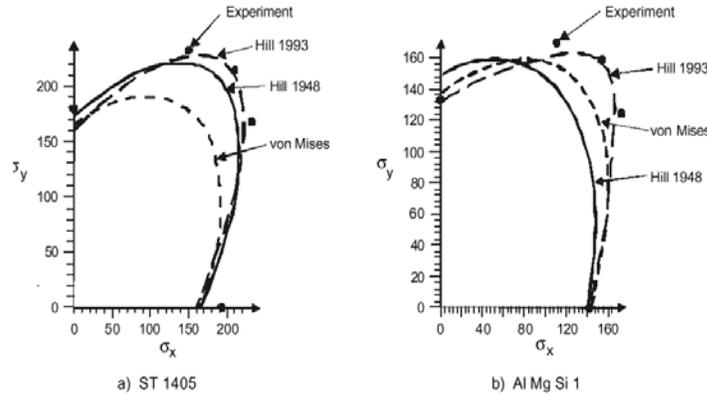


FIG. 1.3: Comparaison de la prédiction de trois critères (V Mises, Hill 1948, Hill 1993) avec des résultats expérimentaux (D'après Banabic et al.(1999)).

- **Critère de Barlat et Lian (1989)**

Le critère de Barlat et Lian (Barlat et Lian, 1989) est exprimé pour un état de contraintes planes et dans les axes d'orthotropie, sous la forme suivante :

$$A_B |K_1 + K_2|^m + A_B |K_1 - K_2|^m + (2 - A_B) |2K_2|^m = 2\bar{\sigma}^m \quad (1.69)$$

$$K_1 = \frac{\sigma_x + H_B \sigma_y}{2} \quad (1.70)$$

$$K_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - H_B \sigma_y}{2}\right)^2 + (P_B \sigma_{xy})^2} \quad (1.71)$$

Les paramètres matériels de ce critère sont  $A_B$ ,  $H_B$ ,  $P_B$  et  $m$ . Pour ce critère, les constantes  $A_B$ ,  $H_B$  sont données en termes de coefficients d'anisotropie plane  $r_0$  et  $r_{90}$ , comme c'est donné dans (Barlat et Lian, 1989) :

$$A_B = 2 - 2\sqrt{\frac{r_0 r_{90}}{(1+r_0)(1+r_{90})}} \quad (1.72)$$

$$H_B = \sqrt{\frac{r_0 r_{90}}{(1+r_0)(1+r_{90})}} \quad (1.73)$$

La condition  $A_B > 0$  est nécessaire pour assurer la convexité du critère. Une fois les paramètres  $A_B$  et  $H_B$  sont déterminés, le paramètre  $P_B$  est calculé par la relation suivante :

$$P_B = \frac{\sigma_u}{\tau_c} \left( \frac{2}{2A_B + 2^m(2 - A_B)} \right)^{1/m} \quad (1.74)$$

où  $\sigma_u$  est la contrainte seuil en traction uniaxiale,  $\tau_c$  est la contrainte seuil de cisaillement pure parallèle aux axes d'orthotropie ( $\sigma_x = \sigma_y = 0$  et  $\sigma_{xy} = \tau_c$ ). En pratique,  $P_B$  varie du fait que le rapport  $\frac{\sigma_u}{\tau_c}$  n'est pas une fonction constante de la déformation équivalente. Ceci a pour effet d'affecter la forme de la surface de plasticité.

- **Critère de Barlat et al. Yld91**

Dans ce critère, Barlat et al. ont proposé une généralisation pour un état de contraintes quelconque appliqué à un matériau orthotrope (Barlat et al., 1991). L'expression du critère est la suivante :

$$|s_1 - s_2|^m + |s_2 - s_3|^m + |s_3 - s_1|^m = 2\bar{\sigma}^m \quad (1.75)$$

Où  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  sont les valeurs principales du tenseur de contraintes modifiées par un opérateur linéaire  $\mathbf{L}$ , pour avoir les propriétés anisotropes du matériau. Le tenseur  $\mathbf{s}$ , dont les valeurs propres sont les  $s_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , s'écrit en fonction du tenseur de contrainte déviatorique  $\boldsymbol{\sigma}^D$ , par la relation suivante :

$$\mathbf{s} = \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}^D \quad (1.76)$$

Dans le cas d'une symétrie orthotrope, seulement six coefficients indépendants du tenseur  $\mathbf{L}$  sont non nuls. Ce tenseur est représenté par une matrice  $6 \times 6$  dans les axes d'orthotropie :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} (c_2 + c_3)/3 & -c_3/3 & -c_2/3 & 0 & 0 & 0 \\ -c_3/3 & (c_1 + c_3)/3 & -c_1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2/3 & -c_1/3 & (c_1 + c_2)/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 \end{bmatrix} \quad (1.77)$$

Les propriétés anisotropes du matériaux sont représentées par les paramètres  $c_i, i = 1..6$ . Quand ces coefficients sont égaux à l'unité, le matériau est isotrope. On retrouve le critère de Tresca pour  $m = 1$  ou  $2$  et le critère de Von Mises pour  $m = 2$  ou  $m = 4$ . La convexité du critère est obtenue pour  $m \geq 1$ . Généralement des valeurs du coefficient de  $m$  sont utilisées. Les coefficients  $m = 8$  et  $m = 6$  sont recommandées pour les matériaux dont les structures sont respectivement (CFC) et (CC). Dans un état de contraintes planes, seulement quatre coefficients indépendants  $c_1, c_2, c_3$  et  $c_6$  caractérisent l'anisotropie du matériau. Ce critère a été utilisé pour décrire le comportement expérimental et prédire un modèle polycristallin (Modèle Taylor-Bishop-Hill, "TBH") d'un alliage d'aluminium Al-2.5% Mg, laminé d'un taux de 17% (Figure : (1.4) à gauche), alors qu'une différence est observée pour le même alliage quand le taux de laminage atteint les 80% (Figure : (1.4) à droite).

- **Critère de Barlat et al. Yld94**

Le critère de Barlat et al.(Yld94) est une extension du critère précédent (Yld91). Il fait intervenir d'autres paramètres d'anisotropie pour tenir compte du comportement de l'alliage d'aluminium Al-2.5%Mg avec un taux de laminage à froid de 80%. L'expression du critère proposé par Barlat et al. est la suivante :

$$\alpha_x |s_y - s_z|^m + \alpha_y |s_z - s_x|^m + \alpha_z |s_x - s_y|^m = 2\bar{\sigma}^m \quad (1.78)$$

où  $s_x, s_y$  et  $s_z$  sont les composantes principales du tenseur de transformation linéaire  $\mathbf{L}$ , définie dans l'équation (1.76). Dans un état de contraintes planes et quand les contraintes de cisaillement sont considérées comme nulles, les coefficients  $c_1, c_2, c_3$  sont à retenir du tenseur de transformation linéaire  $\mathbf{L}$ . Dans ces conditions, les paramètres du critère Yld94, décrivant l'anisotropie du matériau sont :  $c_1, c_2, c_3, \alpha_x, \alpha_y$  et  $\alpha_z$ . Quand  $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 1$ , ce critère se réduit au critère de Barlat (Yld91). D'après la figure (1.4 à droite), ce critère permet de décrire le comportement anisotrope de l'alliage d'aluminium Al-2.5%Mg avec un taux de laminage à froid de 80%. Ce critère permet de prédire aussi les coefficients d'anisotropie  $r$ . En effet, il apparaît capable de prédire les coefficients d'anisotropie expérimentaux  $r_0$  et  $r_{90}$ , mais il sous estime significativement le coefficient  $r_{45}$ . Ces observations ont conduit Barlat et al. à introduire un paramètre supplémentaire pour corriger la prédiction du coefficient  $r_{45}$  (Barlat et al., 1997b).

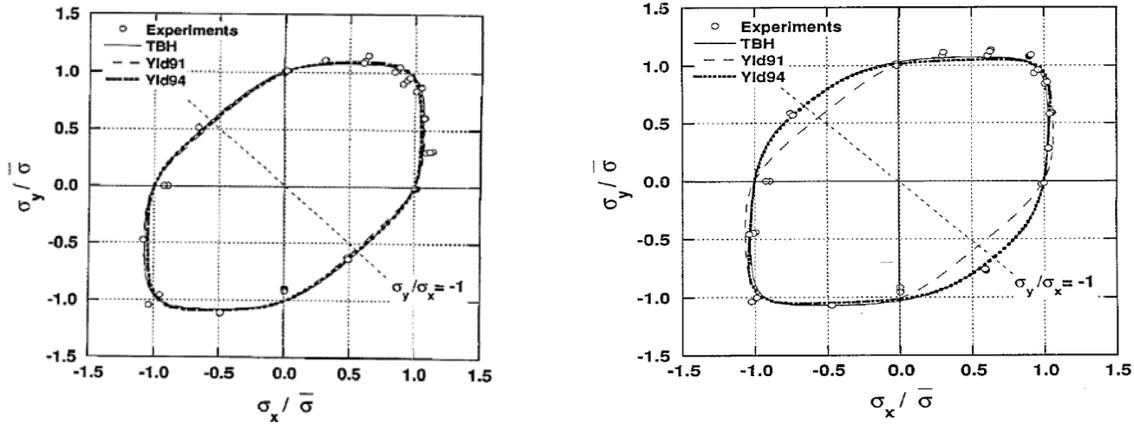


FIG. 1.4: Surfaces de charge pour un alliage Al-2.5% Mg, laminé à 17% à froid (figure à gauche) et laminé à 80% à froid (figure à droite). Comparaison des résultats expérimentaux avec un modèle polycristallin, et les prédictions des critères Yld91 et Yld94 (D'après Barlat et al., (1997))

#### • Critère de Barlat et al. Yld96

Récemment, Barlat et al. ont proposé un critère amélioré qui permet une meilleure description de l'anisotropie plastique des alliages d'aluminium (Barlat et al., 1997a). Le critère de plasticité est défini comme suit :

$$\alpha_1 |s_2 - s_3|^m + \alpha_2 |s_3 - s_1|^m + \alpha_3 |s_1 - s_2|^m = 2\bar{\sigma}^m \quad (1.79)$$

Où  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  sont les valeurs propres du tenseur  $\mathbf{s}$  ( $\mathbf{s} = \mathbf{L} \boldsymbol{\sigma}$ ). Soit  $\mathbf{p}$  la matrice de passage des directions d'orthotropie (x, y et z) aux directions principales du tenseur  $\mathbf{s}$ , alors :

$$\alpha_k = \alpha_x p_{1k}^2 + \alpha_y p_{2k}^2 + \alpha_z p_{3k}^2, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1.80)$$

où  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  et  $\alpha_z$  sont trois fonctions données par :

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_{x0} \cos^2(2\theta_1) + \alpha_{x1} \sin^2(2\theta_1) \\ \alpha_y &= \alpha_{y0} \sin^2(2\theta_2) + \alpha_{y1} \cos^2(2\theta_2) \\ \alpha_z &= \alpha_{z0} \cos^2(2\theta_3) + \alpha_{z1} \sin^2(2\theta_3) \end{aligned} \quad (1.81)$$

Les angles  $\theta_i$  désignent les angles de rotation permettant le passage du repère principal du tenseur  $\mathbf{s}$  au repère d'orthotropie (x=direction du laminage, y=direction transverse et z=direction normale).

Pour vérifier la convexité de ce critère, Barlat et al. (Barlat et al., 1997b) ont utilisé la condition de convexité de Budianski (1984). Pour un cas simple, l'utilisation de cette condition de convexité conduit à :

$$1 + (1 - m) \left[ \frac{2^m \sin 4\theta_3 (\alpha_{z0} - \alpha_{z1})}{2m} \left( \frac{\rho}{\bar{\sigma}} \right)^m \right]^2 - \frac{2^m \cos 4\theta_3 (\alpha_{z0} - \alpha_{z1})}{m} \left( \frac{\rho}{\bar{\sigma}} \right)^m \geq 0 \quad (1.82)$$

En ce moment, la condition de convexité de la surface de plasticité de ce critère n'est pas définitivement prouvée (Barlat et al., 2002). D'après les utilisations et les bons résultats prévus (figure 1.5) par ce critère, il pourrait être probablement convexe.

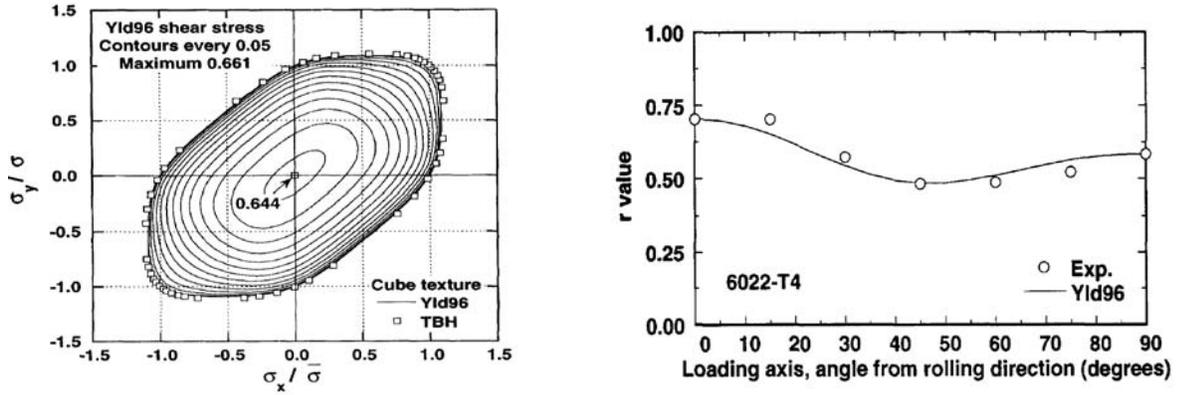


FIG. 1.5: (à gauche, la description du critère Yld96 d'un modèle polycristallin (TBH) généré avec une texture cubique $\{100\}\langle 001 \rangle$ );(à droite, la prédiction des coefficients d'anisotropie expérimentaux par le critère (Yld96) pour un alliage 6022-T4) (D'après Barlat et al., (1997))

## 1.4 Lois d'évolution

Nous présentons dans cette section, les lois d'évolution plastiques pour les modèles orthotropes quadratiques de Hill. Ce sont ces lois d'évolution associées et non associées qui seront adoptées pour identifier les modèles de comportement.

### 1.4.1 Plasticité associée

La loi d'évolution plastique dans le cadre des matériaux standards généralisés ou loi d'écoulement avec plasticité associée (le critère est celui du potentiel plastique) s'écrit :

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}; \quad \lambda \geq 0; \quad \lambda f = 0; \quad \lambda \dot{f} = 0 \quad (1.83)$$

La loi d'évolution de la variable interne d'écrouissage est :

$$\dot{\alpha} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_s} = \lambda \quad (1.84)$$

Dans un état de contraintes planes, et quand  $f$  représente la fonction de charge correspondant au critère orthotrope quadratique de Hill, nous avons donc :

$$\dot{\epsilon}_{11}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} = \dot{\alpha} \frac{(G+H)\sigma_{11} - H\sigma_{22}}{\sigma_c} \quad (1.85)$$

$$\dot{\epsilon}_{22}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} = \dot{\alpha} \frac{(G+H)\sigma_{22} - H\sigma_{11}}{\sigma_c} \quad (1.86)$$

$$\dot{\epsilon}_{12}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} = \dot{\alpha} \frac{(2H+G)\sigma_{12}}{\sigma_c} \quad (1.87)$$

L'incompressibilité plastique conduit à :

$$\dot{\varepsilon}_{33}^p = -(\dot{\varepsilon}_{11}^p + \dot{\varepsilon}_{22}^p) = -\dot{\alpha} \frac{G(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\sigma_c} \quad (1.88)$$

Un essai de traction simple dans la direction 1 permet de mesurer le coefficient d'anisotropie de Lankford. Ce coefficient est exprimé sous la forme suivante :

$$r = \frac{\dot{\varepsilon}_{22}^p}{\dot{\varepsilon}_{33}^p} = \frac{H}{G} \quad (1.89)$$

La loi d'écoulement plastique associée dans le cas du critère quadratique isotrope transverse de Hill s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_{11}^p = \dot{\alpha} \frac{(1+r)\sigma_{11} - r\sigma_{22}}{(1+r)\sigma_c} \quad (1.90)$$

$$\dot{\varepsilon}_{22}^p = \dot{\alpha} \frac{(1+r)\sigma_{22} - r\sigma_{11}}{(1+r)\sigma_c} \quad (1.91)$$

$$\dot{\varepsilon}_{12}^p = \dot{\alpha} \frac{(1+2r)\sigma_{12}}{(1+r)\sigma_c} \quad (1.92)$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}^p = -(\dot{\varepsilon}_{11}^p + \dot{\varepsilon}_{22}^p) = -\dot{\alpha} \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{(1+r)\sigma_c} \quad (1.93)$$

La variable interne d'écrouissage isotrope  $\dot{\alpha}$  est classiquement identifiée à la déformation plastique équivalente de Hill  $\dot{\varepsilon}_c^p$ .

$$\dot{\varepsilon}_c^p = \sqrt{\left( \frac{1+r}{1+2r} \left( (1+r)(\dot{\varepsilon}_{11}^{p2} + \dot{\varepsilon}_{22}^{p2}) + 2r\dot{\varepsilon}_{11}^p\dot{\varepsilon}_{22}^p + 2\dot{\varepsilon}_{12}^{p2} \right) \right)} \quad (1.94)$$

### 1.4.2 Plasticité non associée

En introduisant une loi d'évolution non associée, nous découplons l'évolution de l'état d'écrouissage et de déformations pendant l'écoulement plastique. Donc, nous supposons l'existence d'une fonction potentiel plastique, notée  $g$  différente de la fonction de charge  $f$ . Ceci n'empêche pas que cette fonction potentiel  $g$  peut avoir la même forme quadratique, par exemple, par rapport aux contraintes, similaire à celle de la fonction de charge  $f$ .

Le potentiel plastique  $g$  dans le cas de l'écrouissage isotrope s'écrit :

$$g(\boldsymbol{\sigma}, q) = \sigma_p(\boldsymbol{\sigma}) - q \quad (1.95)$$

Où  $\sigma_p$  désigne la contrainte équivalente du potentiel plastique et  $q = \sigma_s(\alpha)$ , désigne la fonction d'écrouissage isotrope. Nous pouvons choisir l'expression du  $\sigma_p$  sous une forme orthotrope et quadratique en contraintes, similaire à la forme de la contrainte équivalente  $\sigma_c$  du critère de Hill :

$$\sigma_p^2(\boldsymbol{\sigma}) = F'(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G'(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H'(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L'\sigma_{23}^2 + 2M'\sigma_{31}^2 + 2N'\sigma_{12}^2 \quad (1.96)$$

où  $F'$ ,  $G'$ ,  $H'$ ,  $N'$ ,  $L'$ ,  $M'$  sont les constantes de la fonction potentiel plastique qui définissent les coefficients d'anisotropie de cette fonction.

Pour un état de contraintes planes ( $\sigma_{i3} = 0, i = 1, 2, 3$ ), cette expression se réduit à :

$$\sigma_p^2(\boldsymbol{\sigma}) = (G' + H')\sigma_{11}^2 - 2H'\sigma_{11}\sigma_{22} + (F' + H')\sigma_{22}^2 + 2N'\sigma_{12}^2 \quad (1.97)$$

La loi d'écoulement plastique est donnée par le potentiel  $g$  :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda \frac{\partial \sigma_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}}; \quad \lambda f = 0; \quad \lambda \dot{f} = 0 \quad (1.98)$$

La loi d'évolution de la variable interne scalaire  $\alpha$  s'écrit :

$$\dot{\alpha} = \lambda \quad (1.99)$$

Dans un état de contraintes planes, les composantes du tenseur des vitesses de déformations plastiques s'écrivent dans le repère d'orthotropie :

$$\dot{\varepsilon}_{11}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{11}} = \dot{\alpha} \frac{(G' + H')\sigma_{11} - H'\sigma_{22}}{\sigma_p} \quad (1.100)$$

$$\dot{\varepsilon}_{22}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{22}} = \dot{\alpha} \frac{(G' + H')\sigma_{22} - H'\sigma_{11}}{\sigma_p} \quad (1.101)$$

$$\dot{\varepsilon}_{12}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{12}} = \dot{\alpha} \frac{(2H' + G')\sigma_{12}}{\sigma_p} \quad (1.102)$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}^p = -(\dot{\varepsilon}_{11}^p + \dot{\varepsilon}_{22}^p) = -\dot{\alpha} \frac{G'(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\sigma_p} \quad (1.103)$$

En supposant que la contrainte équivalente du potentiel coïncide avec la contrainte de l'essai de traction dans la direction 1, ( $G' + H' = 1$ ), on obtient :

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{22}^p}{\dot{\varepsilon}_{33}^p} = \frac{H'}{G'} = r' \quad (1.104)$$

Ce coefficient est classiquement identifié au coefficient d'anisotropie de Lankford.

La variable interne d'écrouissage  $\alpha$  s'identifie à la déformation équivalente du potentiel  $\varepsilon_p^p$ , qui s'écrit en fonction de  $r'$  sous la forme suivante :

$$\varepsilon_p^p = \sqrt{\left( \frac{1+r'}{1+2r'} \left( (1+r')(\dot{\varepsilon}_{11}^{p2} + \dot{\varepsilon}_{22}^{p2}) + 2r'\dot{\varepsilon}_{11}^p\dot{\varepsilon}_{22}^p + 2\dot{\varepsilon}_{12}^{p2} \right) \right)} \quad (1.105)$$

Il est important de noter que les modèles de comportement avec plasticité non associée sont déterminés par la donnée des coefficients d'anisotropie du critère de plasticité, des coefficients d'anisotropie du potentiel plastique et évidemment d'une fonction d'écrouissage  $\sigma_s(\alpha)$ . Par exemple dans le cas particulier du modèle quadratique isotrope transverse avec plasticité non associée, il est nécessaire de connaître le coefficient  $r$  du critère et le coefficient  $r'$  relatif au potentiel plastique.

## 1.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, la formulation des lois de comportement élastoplastiques dans le cadre des petites perturbations. Cette formulation est basée sur les principes de la thermodynamique, pour que les lois de comportement aient une signification physique. C'est à dire qu'elles sont censées de tenir compte de la nature et de l'anisotropie des matériaux. Nous avons également exposé une synthèse des critères de plasticité les plus utilisés pour prédire le comportement des matériaux anisotropes et de symétrie orthotrope. Nous avons exposé en particulier, les critères de plasticité orthotropes et quadratiques (isotrope transverse et orthotrope de Hill) avec des lois d'écoulement associée et non associée. Une synthèse de critères de plasticité non quadratiques est présentée. Ces critères sont développés pour mieux décrire le comportement de certains matériaux fortement anisotropes (alliages d'aluminium).

Nous avons implémenté dans le code de calcul par éléments finis les critères quadratiques de Hill (isotrope transverse et orthotrope) ainsi que le critère non quadratique de Barlat (Yld96) afin d'identifier les coefficients d'anisotropie des tôles, que nous allons les présenter au chapitre suivant.



## Chapitre 2

# Essais expérimentaux et interprétations

### 2.1 Introduction

**L**a réalisation d'essais expérimentaux constitue une étape très importante dans la procédure d'identification des paramètres de comportement. C'est une tâche parfois difficile (des exigences pour réaliser des essais qui soient homogènes) et coûteuse (des investissements dans la matière première et dans les équipements d'expérimentation,...). Malgré ceux-ci, l'expérimentateur doit chercher à réaliser des essais qui doivent souligner les propriétés physiques et de s'approcher des types de sollicitations que subit le matériau dans les situations réelles de mise en oeuvre (conditions industrielles). Au cours d'une opération d'emboutissage, la tôle subit différents modes de déformation (de la traction, de l'expansion, de la traction plane, du cisaillement, du pliage, ...).

Cependant, la réalisation d'essais expérimentaux dont les trajets de chargement sont similaires à ceux que subit le matériau pendant sa déformation sont d'une grande utilité. Ceci permet d'exploiter les différents essais tels que la traction simple, la traction plane, de l'expansion équibiaxiale et du cisaillement simple dans l'identification des paramètres matériels ainsi que pour la validation des modèles choisis pour la description du comportement des matériaux.

Dans ce chapitre nous présentons ces essais en précisant leurs définitions ainsi que leurs interprétations du point de vue homogénéité des contraintes et déformations.

### 2.2 Essais expérimentaux

La base de données expérimentales est relative aux essais de la traction simple, de la traction hors-axes, de la traction plane, du gonflement hydraulique et du cisaillement simple. Les essais dont nous disposons sont effectués pour trois tôles qui présentent des propriétés mécaniques différentes.

Ces tôles (tôles minces d'épaisseur 0.8 mm) portent les références 1, 2, 3. C'est uniquement pour les tôles 1 et 3 que nous disposons des essais de cisaillement simple. Ces tôles sont

destinées pour la mise en forme par emboutissage dans l'industrie automobile. Ces matériaux sont :

1. Tôle 1 : D280 acier microallié à haute limite élastique.
2. Tôle 2 : IF acier sans interstitiels.
3. Tôle 3 : ES acier extra doux.

Les essais réalisés sont effectués dans le plan de la tôle et pour les essais de la traction simple, ils sont effectués dans plusieurs directions par rapport à la direction de laminage considérée comme la direction de référence (traction hors-axes). L'état de contraintes pour les courbes d'érouissage est un état de contraintes planes. Les tenseurs de contraintes et de déformations, représentés dans le repère d'orthotropie s'écrivent :

$$[\sigma] : \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & x\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [\varepsilon] : \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & y\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\sigma_2 = x\sigma_1$$

$$\varepsilon_2 = y\varepsilon_1$$

Les deux paramètres  $x$  et  $y$  définissent le trajet de chargement radial soit en contrainte ou en déformation. Un trajet de chargement est dit radial si au cours du chargement les directions en contraintes et en déformations restent constantes. Ceci se traduit par :  $\sigma = \sigma a$  et  $\varepsilon = \varepsilon b$  avec  $a = \text{Cte}$  et  $b = \text{Cte}$ .

La notion de chargement radial est très intéressante car elle rend l'identification indépendante de l'essai.

### 2.2.1 Essai de traction simple

#### Définition et interprétation

C'est l'essai mécanique le plus simple à réaliser et celui dont les résultats sont les plus "fiables".

Pour les tôles minces ( $e < 3$  mm), les éprouvettes sont normalisées (NF A 03 160). Dans l'essai de la traction simple (TS), la courbe de la traction rationnelle, souvent appelée courbe d'érouissage est la représentation graphique de la contrainte vraie appliquée à l'éprouvette en fonction de la déformation rationnelle. La contrainte et la déformation uniaxiales sont données par :

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{F}{S_0} e^{\varepsilon_{11}} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{11} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (2.3)$$

où  $F$  représente la force appliquée et  $S_0$  est la section initiale de l'éprouvette. La déformation vraie  $\varepsilon_{11}$  est la déformation logarithmique.

Où  $l$  et  $l_0$  représentent respectivement la longueur actuelle et la longueur initiale de la zone utile de l'éprouvette de traction.

Ce calcul de la fonction d'écroutissage  $\sigma = f(\varepsilon)$ , à partir des grandeurs globales (Force-déplacement fournie par la machine de traction) n'a de sens que si nous considérons l'hypothèse d'homogénéité des champs de contraintes et de déformations, au moins dans la partie utile de l'éprouvette. Il est admis que l'essai de traction simple est un essai classique et largement connu. C'est à partir de cet essai qu'on peut déduire les caractéristiques mécaniques les plus fondamentales telles que le module d'Young<sup>1</sup>  $E$ , la limite élastique  $R_e$ , la résistance à la rupture  $R_m$ , l'allongement uniforme  $A$ , l'allongement à la rupture  $A_r$ , et avec certaines hypothèses le coefficient d'écroutissage<sup>2</sup>  $n$ , le coefficient de Lankford ...

La définition du coefficient d'anisotropie de Lankford est basée sur des mesures à partir de cet essai. Nous allons revenir à la notion de ce coefficient ultérieurement.

L'essai de la traction simple est un essai de référence : d'une part il permet d'avoir des informations considérables caractérisant les matériaux, d'autre part il est bien interprété comme étant un essai homogène. Pour ces raisons, cet essai est généralement qualifié d'essai fiable. La figure (2.1) représente une simulation numérique de l'essai de traction simple, où nous observons un état de contraintes homogènes dans la zone utile de l'éprouvette.



FIG. 2.1: Simulation numérique de l'essai de la traction simple (essai homogène).

Néanmoins, l'essai de traction simple reste insuffisant, pour pouvoir l'utiliser seul dans l'identification des modèles de comportement plus fins, pour des tôles qui, au cours de leur mise en forme par emboutissage, subissent des trajets de chargement complexes. D'où la nécessité d'apporter d'autres essais qui soient à la fois relativement faciles à réaliser et surtout bien maîtrisés et interprétés du point de vue homogénéité des champs de contraintes et de déformations dans l'éprouvette.

<sup>1</sup>Généralement pour des raisons de précision on utilise des méthodes dynamiques pour déterminer le module d'Young

<sup>2</sup>Si la loi d'écroutissage obéit à la loi de Hollomon  $\sigma = k\varepsilon_p^n$ , le coefficient d'écroutissage correspond à la déformation plastique à la striction  $n = \varepsilon_p$

Nous avons utilisé un ensemble d'essais réalisables au laboratoire d'essais mécaniques. Cependant, la réalisation expérimentale d'essais homogènes est une tâche relativement difficile. Pour cette raison, une attention particulière sera prise pour l'interprétation de ces essais, afin de justifier l'approche d'identification inverse adoptée.

### 2.2.2 Essais de traction hors-axes

#### Définition et interprétation

Expérimentalement, l'essai consiste à tirer sur une éprouvette identique à l'éprouvette de la traction simple, mais dont la direction fait un angle  $\psi$  par rapport à la direction de laminage (figure 2.2). L'effort de traction  $F$  et le déplacement de la zone utile de l'éprouvette  $u$  sont enregistrés simultanément. Avant d'exprimer la fonction d'écrouissage à partir des grandeurs mesurées (force-déplacement) pour les essais de traction hors-axes, il faut s'assurer de l'hypothèse d'homogénéité de ces essais.

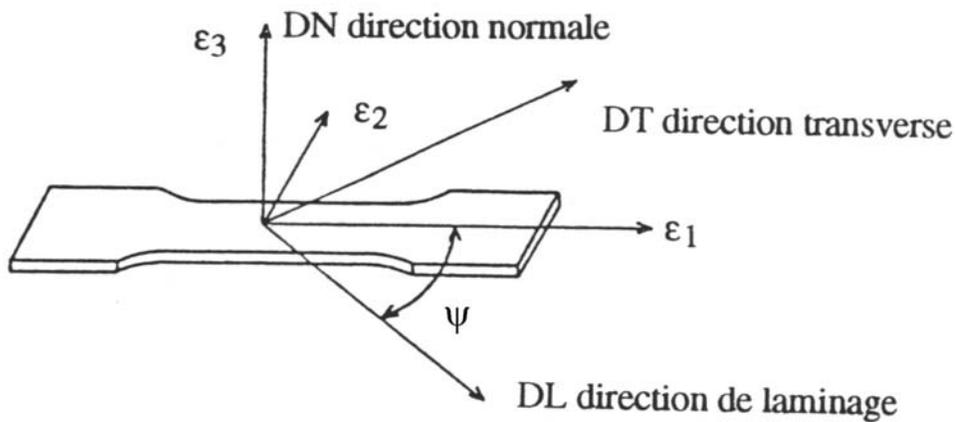


FIG. 2.2: Schéma d'une éprouvette de traction extraite d'une tôle suivant l'angle  $\psi$

Dogui a analysé ces essais dans le cas rigide plastique (Dogui, 1989). L'auteur a montré que si l'on considère les essais expérimentaux de traction hors-axes comme des essais homogènes alors, pour un acier doux, l'évolution des directions d'orthotropie en petites déformations est peu importante et la rotation des sections droites des éprouvettes est négligeable.

Gaaloul a vérifié par des simulations numériques de ces essais et pour des modèles plus ou moins anisotropes, les hypothèses d'homogénéité de l'état de contraintes dans la zone utile de l'éprouvette de traction (Gaaloul, 1993). Ces analyses ont montré que ces essais peuvent s'interpréter de façon homogène et que l'utilisation des mors fixes ne semble pas trop affecter l'homogénéité de la zone utile de l'éprouvette de traction.

Les fonctions d'écrouissage sont calculées de façon identique à celles calculées pour la traction simple par les relations données par les équations (2.2) et (2.3).

Nous donnons les figures (2.3), (2.4) et (2.5) qui représentent respectivement les courbes d'érouissage des essais de traction hors-axes pour les aciers 1, 2 et 3. L'anisotropie au niveau de ces courbes d'érouissage n'est pas très prononcée, c'est-à-dire qu'elle est peu sensible à la direction de la traction. Cependant, est ce que c'est le même cas pour le coefficient d'anisotropie ?

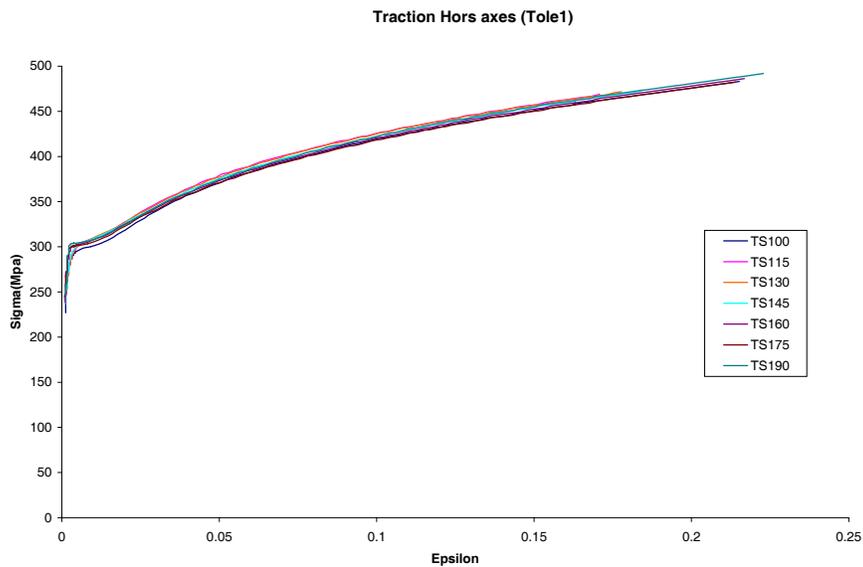


FIG. 2.3: Courbes d'érouissage hors-axes (Tôle 1).

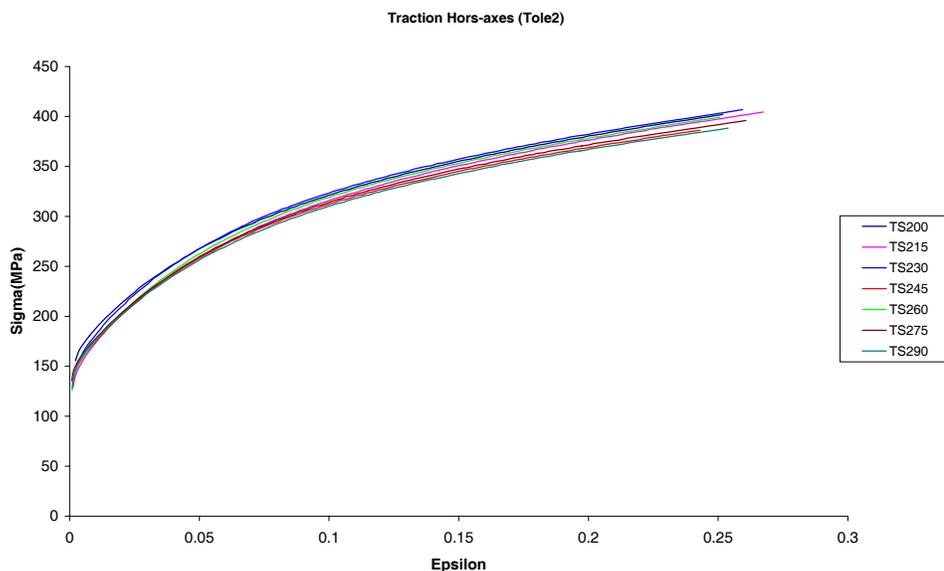


FIG. 2.4: Courbes d'érouissage hors-axes (Tôle 2).

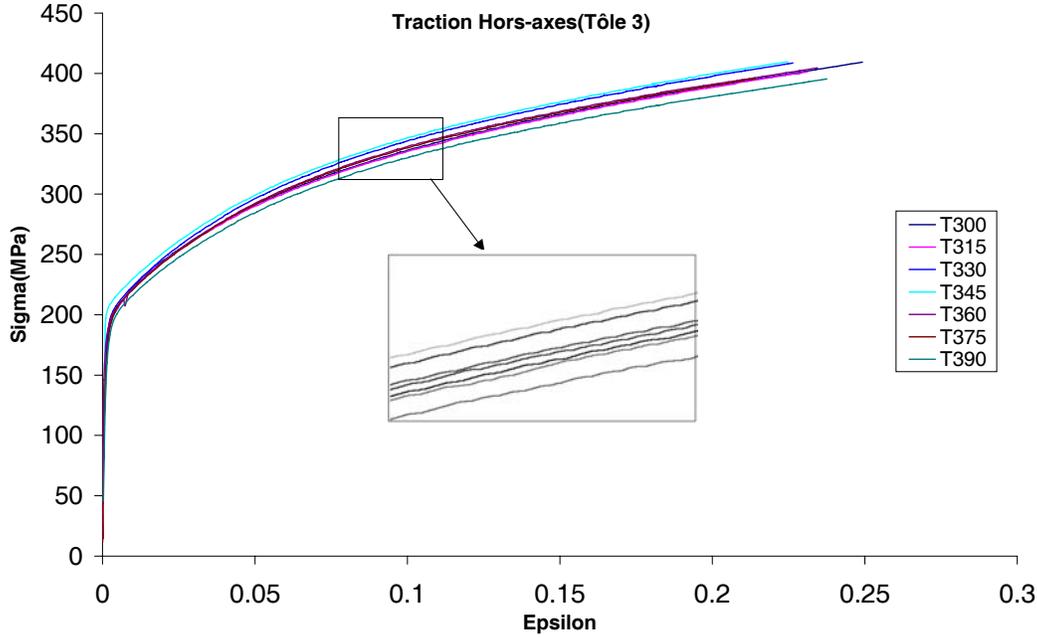


FIG. 2.5: Courbes d'écroutissage hors-axes (Tôle 3).

### Coefficient d'anisotropie

Ce coefficient d'anisotropie est déterminé à partir de l'essai de la traction simple. Il est défini par le rapport de vitesse de déformation plastique transversale et normale au plan de la tôle. Pour pratiquement la majorité des alliages métalliques et en particulier pour les matériaux dont on dispose, ce coefficient demeure constant en fonction de la déformation (Genevois, 1992). Expérimentalement, ce coefficient est déterminé graphiquement comme étant la pente de la droite de la représentation de  $\varepsilon_{22}^p$  en fonction de  $\varepsilon_{33}^p$ .

$$r = \frac{\dot{\varepsilon}_{22}^p}{\dot{\varepsilon}_{33}^p} = \frac{d\varepsilon_{22}^p}{d\varepsilon_{33}^p} \quad (2.4)$$

Les tôles étudiées présentent une anisotropie plus au moins marquée par la variation du coefficient d'anisotropie par rapport à la direction de prélèvement de l'éprouvette. Le tableau (2.1) présente les coefficients d'anisotropie des tôles qui ont été mesuré à partir des essais de la traction hors-axes dans les directions de  $\psi = 00^\circ$  jusqu'à  $\psi = 90^\circ$  par un pas de  $15^\circ$ .

A partir de  $r_\psi$ , le coefficient d'anisotropie moyen  $\bar{r}$  et le coefficient d'écart moyen  $\Delta r$  sont calculés par les formules suivantes :

$$\bar{r} = \frac{1}{2(n-1)} \left( r_0 + 2 \sum_{i=2}^{n-1} r_{\psi_i} + r_{90} \right) \quad (2.5)$$

$$\Delta r = \frac{1}{n-1} \left( |r_0 - \bar{r}| + 2 \sum_{i=2}^{n-1} |r_{\psi_i} - \bar{r}| + |r_{90} - \bar{r}| \right) \quad (2.6)$$

La comparaison de ces coefficients fixera pour les tôles étudiées, la plus ou moins grande validité de l'hypothèse d'isotropie transverse.

Dans le tableau ci-dessous, nous pouvons remarquer que pour les aciers 2 et 3, le coefficient d'écart moyen est relativement important, ce qui marquera l'anisotropie de ces tôles. Pour l'acier 1, le coefficient  $\Delta r$  est très faible et le coefficient  $\bar{r}$  est proche de l'unité, ce qui permet de conclure a priori que ce matériau est isotrope.

Tôles	$r_{00}$	$r_{15}$	$r_{30}$	$r_{45}$	$r_{60}$	$r_{75}$	$r_{90}$	$\bar{r}$	$\Delta r$
Tôle 1	1.03	1.04	0.97	1.06	1.10	1.19	1.28	1.09	0.07
Tôle 2	2.19	1.98	1.86	1.82	2.15	2.61	2.72	2.15	0.26
Tôle 3	1.81	1.80	1.68	1.54	1.70	2.09	2.26	1.81	0.17

TAB. 2.1: Les coefficients expérimentaux de Lankford.

Contrairement aux courbes d'érouissage hors-axes qui dépendent relativement peu de la direction de traction, le coefficient d'anisotropie varie d'une façon très significative de cette direction (voir figure (2.6)). Ceci se traduit par une distribution anisotrope des déformations

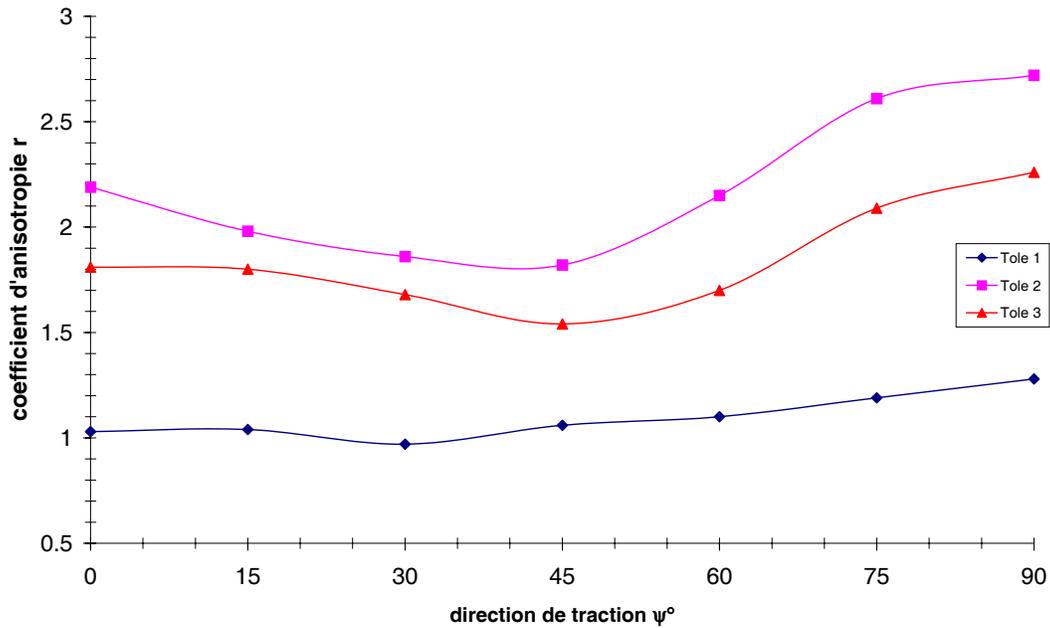


FIG. 2.6: Représentation du coefficient d'anisotropie en fonction de la direction de traction.

### 2.2.3 Essai de traction plane

#### Définition de l'essai

La traction plane est un essai mécanique effectué sur une éprouvette large, où sa largeur vaut entre 5 à 6 fois sa longueur. La géométrie de l'éprouvette est donnée par la figure (2.7). Les dimensions de l'éprouvette sont les suivantes :  $a_0 = 285mm$  ;  $b_0 = 50mm$  ;  $c_0 = 30mm$  ;  $L = 295mm$  ;  $R_0 = 25mm$ . Expérimentalement, on tire sur l'éprouvette et on enregistre l'effort appliqué  $F(t)$ , en même temps une méthode ultra-son est utilisée pour mesurer l'épaisseur instantanée  $e(t)$  au centre de l'éprouvette.

L'éprouvette est relativement large, ce qui suppose en première approximation que  $\varepsilon_{22} = 0$ . Dans ces conditions la courbe d'érouissage en traction plane sous l'hypothèse d'homogénéité est donnée par :

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{F}{S_0} \exp \varepsilon \quad (2.7)$$

$$\varepsilon = \ln \frac{e_0}{e} \quad (2.8)$$

Mais est ce que cette approximation est justifiée pour ce type d'essais ?

#### Interprétation de l'essai

Pour interpréter la traction plane et définir la limite de validité de l'hypothèse d'homogénéité, nous nous proposons la simulation numérique de cet essai sur l'éprouvette donnée par la figure(2.7). Les résultats de cette simulation sont donnés sur la figure (2.8). Nous représentons les isovalues de la déformation équivalente et de la contrainte équivalente au sens de V.Mises dans la structure. Nous constatons une répartition non homogène de ces grandeurs, ce qui traduit une distribution hétérogène des champs de déformations et de contraintes au sein de l'éprouvette.

D'une part, pour vérifier la non validité de l'interprétation homogène de l'essai de la traction plane, Genevois a mené des mesures expérimentales où il a évalué les déformations longitudinales et transversales le long des axes de symétrie de l'éprouvette  $OX$  et  $OY$  à différents stades de chargement (Genevois, 1992). L'auteur a mis en évidence la forte hétérogénéité de cet essai, quelque soit l'amplitude de déformation et la position du point considéré (La condition d'homogénéité n'est même pas réalisée au centre de l'éprouvette). L'auteur a conclu aussi que ces essais de la traction plane paraissent beaucoup trop hétérogènes pour qu'on puisse les interpréter comme homogènes.

D'autre part, Gaaloul a effectué une simulation numérique de cet essai, en considérant le cas homogène et non homogène. L'auteur a constaté un écart important entre les deux réponses des simulations (Gaaloul, 1993).

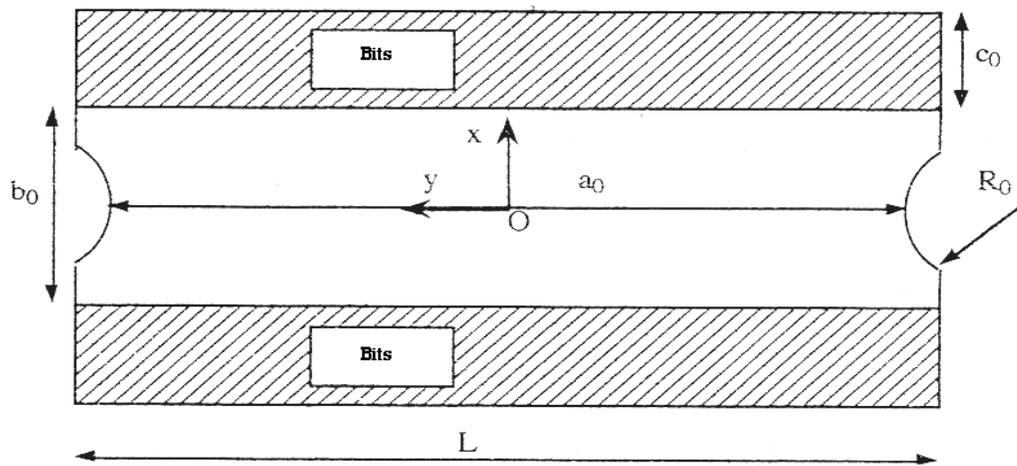


FIG. 2.7: Géométrie de l'éprouvette de traction plane-Sollac (Gaaloul, 1993).

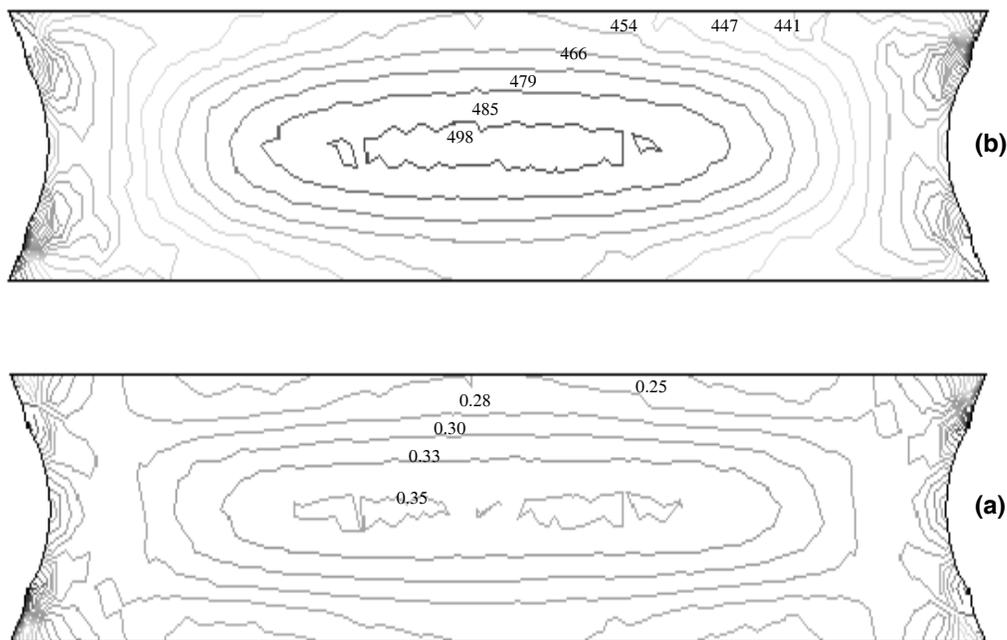


FIG. 2.8: Les isovaleurs de la déformation (a) et de la contrainte équivalente (b) dans l'éprouvette de traction plane.

## 2.2.4 Essai de gonflement hydraulique

### Définition et interprétation

L'essai de gonflement hydraulique consiste à appliquer une pression d'huile sur un flan bloqué à ces bords. L'avantage de cet essai réside dans sa réponse qui ne fait intervenir que les propriétés intrinsèques du matériau en s'affranchissant des problèmes de contact et de frotte-

ment. Généralement l'essai de gonflement hydraulique est facile à réaliser et il est considéré comme étant une alternative à l'essai d'expansion équibiaxiale. Les essais sont réalisés sur des matrices de forme circulaire ou elliptique (essais Jovignot). Les mesures expérimentales portent sur la hauteur au pôle et la pression appliquée, mesurées respectivement par un capteur de déplacement et un capteur de pression.

L'interprétation classique de l'essai de gonflement hydraulique sur une matrice circulaire consiste à supposer que la déformée est une calotte sphérique. Dans ce cas il s'agit d'un état de tension et de déformation isotrope autour de la normale au pôle. Ces hypothèses peuvent être justifiées pour un matériau isotrope ou isotrope transverse. La courbe d'écrouissage déduite de l'essai de gonflement hydraulique sur une matrice circulaire et avec l'hypothèse du modèle de la calotte sphérique, découle de la pression et de la géométrie de l'éprouvette déformée. La contrainte et la déformation sont données par les relations suivantes :

$$\sigma = \frac{P\rho}{2.e}; \quad \rho = \frac{d^2 + 4h^2}{8h} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon = -\varepsilon_3 = -\ln \frac{e}{e_0} = -\ln\left(1 + \frac{4h^2}{d^2}\right) \quad (2.10)$$

Avec  $\rho$  est le rayon de courbure,  $h$  est la hauteur au pôle,  $P$  est la pression appliquée,  $d$  est le diamètre de la matrice,  $e$  et  $e_0$  représentent l'épaisseur actuelle et initiale du flan (figure 2.9). Dans le cas d'un matériau anisotrope quel est le trajet de chargement subi par le pôle? est-ce qu'il s'agit d'un état de tension équibiaxiale ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ) ou d'un état de déformation isotrope ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ )? Des simulations numériques sont effectuées par Gaaloul, en utilisant des modèles anisotropes (Gaaloul, 1993). L'analyse de l'état de contraintes et de déformations au pôle, conduit l'auteur a constaté qu'il s'agit d'un état de déformations isotrope ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ), plutôt qu'un état de tension isotrope.

Les figures (2.10), (2.11), (2.12) montrent les courbes brutes (pression -hauteur au pôle) de l'essai du gonflement hydraulique pour les trois tôles qui sont considérées dans cette étude.

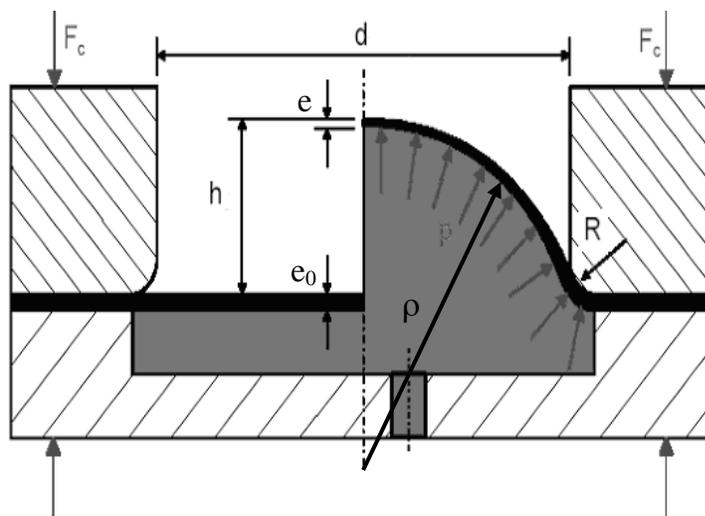


FIG. 2.9: L'essai expérimental du gonflement hydraulique.

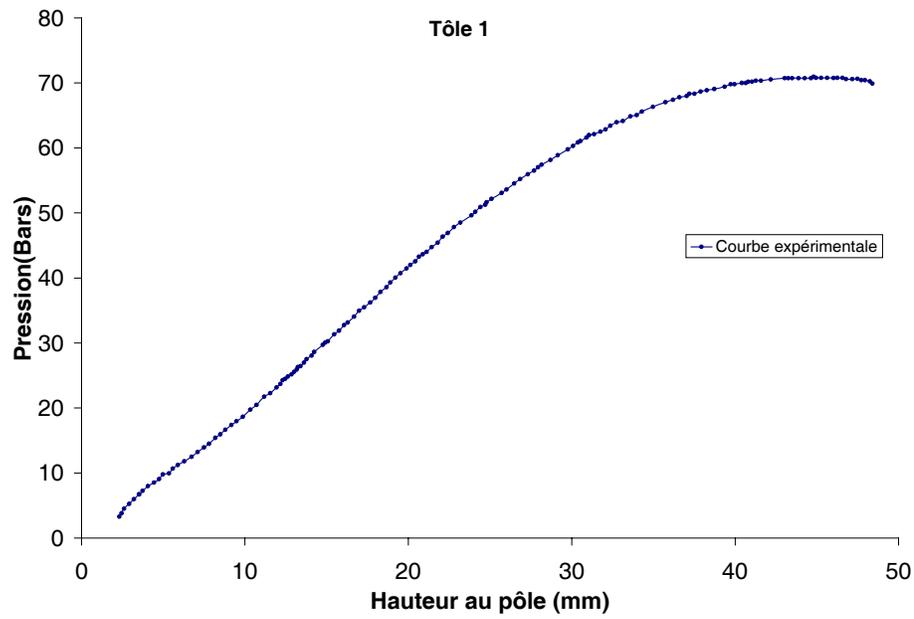


FIG. 2.10: Courbe expérimentale du gonflement hydraulique (pression-hauteur au pôle), Tôle1.

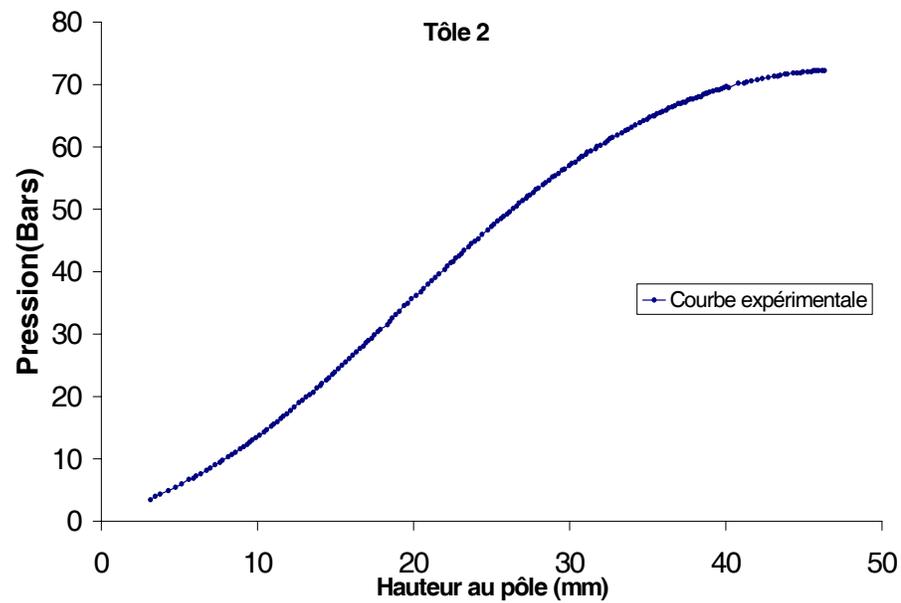


FIG. 2.11: Courbe expérimentale du gonflement hydraulique (pression-hauteur au pôle), Tôle2.

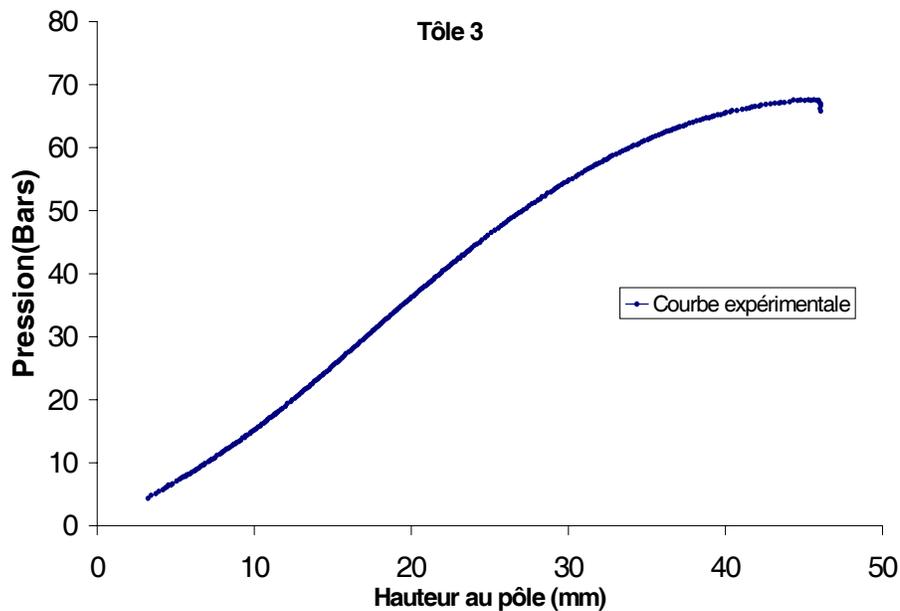


FIG. 2.12: Courbe expérimentale du gonflement hydraulique (pression-hauteur au pôle), Tôle3.

### 2.2.5 Essai de cisaillement simple

L'essai de cisaillement simple est considéré à la fois fort intéressant et innovateur. En effet, cet essai permet d'atteindre des déformations plastiques assez grandes sans qu'il y ait de localisation de la déformation ; les rotations matérielles sont du même ordre de grandeur que la déformation, ce qui permet une identification, voire une validation plus étendue des modèles de comportement en grandes déformations. L'essai de cisaillement est le seul essai, mis à part l'essai de traction simple, que l'on puisse considérer avec une bonne approximation comme homogène. Bien que le principe de cet essai soit simple, la réalisation expérimentale de cet essai requiert des montages spécifiques et un choix bien judicieux de la géométrie de l'éprouvette pour garder l'hypothèse d'homogénéité de l'essai valide. Une synthèse expérimentale bien détaillée de l'essai de cisaillement est présentée par (Genevois, 1992).

Nous ne disposons de résultats expérimentaux de l'essai de cisaillement que pour la tôle 1 et 3. Néanmoins, nous allons utiliser ces données pour une éventuelle validation de nos modèles, mais nous gardons des réserves sur les résultats de validation, du fait que nous travaillons avec l'hypothèse des petites perturbations (HPP).

La figure (2.13) représente les essais de cisaillement simple réalisés sur les tôles 1 et 3.

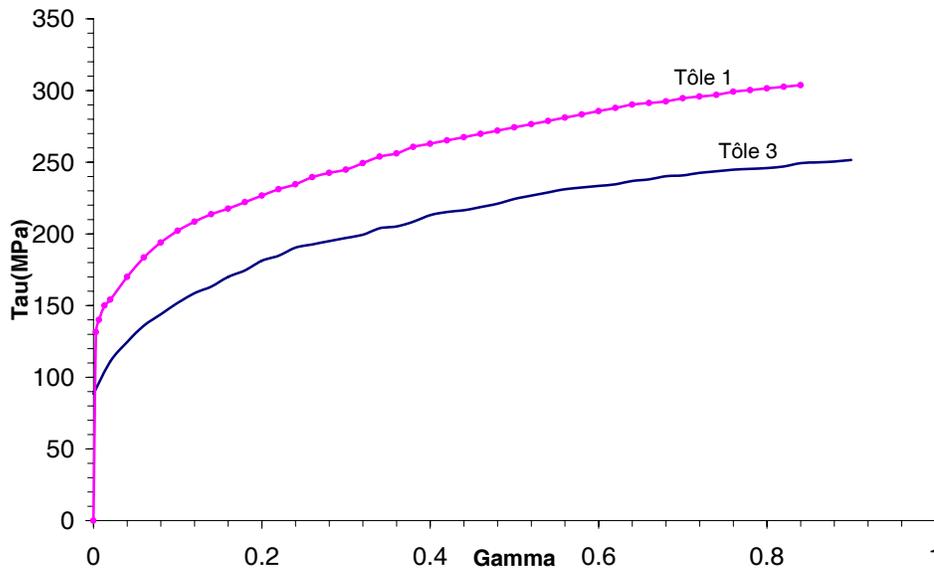


FIG. 2.13: Essai de cisaillement simple (tôle 1 et 3).

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un ensemble d'essais mécaniques destinés à l'identification et à la validation des lois de comportement des tôles emboutissables. Nous avons présenté ces essais, en précisant leurs définitions et leurs interprétations. L'essai de la traction plane est l'essai de base sur lequel nous menons l'identification des modèles de comportement. Nous avons effectué une analyse très fine de cet essai, et nous avons montré que l'hypothèse d'homogénéité, couramment adoptée dans l'identification est une hypothèse forte pour l'essai de la traction plane.

Les essais réalisés, doivent représenter, même en partie, l'ensemble des trajets de chargement que subit une pièce lors de sa mise en forme (emboutissage) ainsi que l'anisotropie du matériau. Pour cette raison, nous disposons d'essais de traction dans les axes et hors-axes, de traction plane, de l'expansion ainsi que du cisaillement. Des essais de pliage peuvent être probablement de grande utilité (Arnold et *al.*, 2001). Il est relativement difficile de garantir une homogénéité des champs de contraintes et de déformations pendant la réalisation de tous ces essais.

Classiquement, l'identification paramétrique des lois de comportement, postule pour l'hypothèse d'homogénéité. Dans ce cas, pour identifier avec précision les paramètres de comportement, l'expérimentateur doit fournir des efforts importants et des coûts élevés dans la recherche des géométries des éprouvettes adéquates et parfois des montages d'essais spécifiques, lui conduisant à des états de contraintes et de déformations homogènes.

En effet, une définition et une interprétation rigoureuses des essais réalisés du point de vue homogénéité et avec l'application de nouvelles techniques d'identification (méthodes d'identification inverses), que nous allons présenter, peuvent conduire à une identification précise et fiable des lois de comportement sans tenir compte des hypothèses simplificatrices.

# Chapitre 3

## Méthode d'identification inverse

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une introduction aux problèmes inverses et l'adaptation de cette notion aux problèmes d'identification paramétriques en mécanique de structures. Nous discutons brièvement le caractère mal posé du problème inverse, puis nous présentons une étude sur l'état de l'art de l'évolution et de l'utilisation de ces méthodes inverses. Nous présentons une synthèse sur les différents travaux réalisés dans ce domaine. A partir de ceux-ci, nous présentons notre algorithme d'identification paramétrique inverse que nous avons utilisé pour identifier les paramètres de comportement à partir des essais décrits au chapitre précédent. Le type d'algorithme d'identification inverse que nous envisageons d'utiliser est constitué par le couplage d'une méthode de calcul par éléments finis et d'une méthode d'optimisation. Cet algorithme consiste à minimiser par un processus itératif, l'écart entre la réponse de l'essai simulé par la méthode des éléments finis et la mesure expérimentale. Nous adoptons une nouvelle approche de calcul par la méthode des éléments finis. Dans notre méthode nous n'utilisons pas de matrice tangente, ce qui permet de découpler presque la partie structure élastique de la loi de comportement plastique. La méthode d'optimisation que nous avons couplée avec l'algorithme de calcul par éléments finis est la méthode d'optimisation du Simplexe. C'est une procédure d'ordre zéro, n'exigeant pas le calcul du vecteur gradient, permettant ainsi de converger vers le minimum global cherché.

### 3.2 Introduction aux problèmes inverses

#### 3.2.1 Problème mal posé

Les problèmes inverses peuvent être répartis en deux catégories. Ceux qui, pour toute mesure  $\mathbf{m}$  (ex. effort-déplacement), admettent une solution unique  $\mathbf{s}$  (ex. paramètres matériels) continue par rapport à la mesure  $\mathbf{m}$ , sont dits "bien posés". Ils sont généralement résolus (de manière exacte ou approchée) par des méthodes classiques. Cependant, dans les problèmes inverses ou les problèmes "mal posés" c'est à dire qui ne respectent pas les conditions d'existence, d'unicité et de continuité de la solution pour le jeu de mesure  $\mathbf{m}$ , à cause des différentes

modélisations introduites dans le calcul par éléments finis, des erreurs numériques inévitables, des données expérimentales bruitées, du choix inadéquat des modèles de comportement à optimiser, etc ... qui mènent inévitablement à l'inexistence d'une solution conduisant parfaitement aux résultats souhaités.

La régularisation des problèmes "mal posés", due initialement à Tikhonov qui cherche à définir les notions d'inversion de la solution (Tikhonov, 1977), (Tikhonov et Arsenine, 1976), c'est à dire, trouver une quasi-solution ou une solution approchée, de façon que la solution régularisée obtenue par inversion régularisée dépende continûment des données et soit proche de la solution "exacte". De cette manière nous changeons le concept de solution par une solution approchée, donc nous surmontons le problème de l'existence. Il reste de s'assurer de l'unicité et de la continuité de la solution par rapport aux mesures. Tikhonov a également montré que si l'application, (problème direct) menant à  $\mathbf{m}$ , à partir d'un jeu de paramètres considérés est continue, (ce qui est bien le cas avec la méthode des éléments finis), et s'il existe un sous-espace du domaine de variation des paramètres dans lequel la solution définie ci-dessus est unique, alors la solution possède le caractère de continuité par rapport aux mesures. Les problèmes inverses dans les domaines non linéaires se mettent donc sous la forme d'un problème de minimisation d'une fonction objectif, permettant ainsi de s'assurer de l'existence d'au moins d'une solution au problème.

### 3.2.2 Etude bibliographique

La théorie des problèmes inverses, dans le sens le plus large du terme, a été développée par les géophysiciens. Elle s'est répandue par la suite dans d'autres domaines de la physique. Parmi les applications de cette théorie on peut citer l'identification des sources (Bui et Maigre, 1988), ou des caractéristiques internes d'un matériaux (Chicone et Gerlach, 1987), la prospection géophysique (Bamberger et *al.*, 1980), le contrôle non- destructif thermique (Balageas et *al.*, 1987), l'identification des contraintes résiduelles, le recalage des modèles vibratoires, et bien d'autres domaines (Bui, 1993).

Au début des années 1990, la détermination précise des paramètres des modèles de comportement devient rapidement un problème important. L'identification des paramètres de modèles sophistiqués nécessite des techniques très précises et sans l'introduction d'hypothèses supplémentaires qui peuvent nuire à la qualité de prévision de ces modèles pour représenter les essais expérimentaux.

La simulation numérique par la méthode des éléments finis (méthode de calcul direct), nécessite des paramètres très précis qui sont identifiés à partir des essais expérimentaux. L'approche classique d'identification consiste à réaliser des essais simples permettant de vérifier l'hypothèse d'homogénéité des champs de contraintes et de déformations dans l'éprouvette. Des méthodes analytiques basées sur l'hypothèse d'homogénéité, permettent de transformer les mesures expérimentales (forces, couples, déplacements, angles de rotations, ...) en valeurs de contraintes et de déformations dans l'éprouvette. L'identification des paramètres matériels revient à effectuer un lissage du modèle choisi sur la courbe contrainte-déformation "expéri-

mentale”. Toutefois, ces méthodes de calculs analytiques permettant de déterminer les couples contrainte-déformation souffrent de la forte limitation due à l’hypothèse d’homogénéité des contraintes et des déformations dans l’éprouvette. En effet, des analyses comme celles qui sont discutées au chapitre précédent montrent que certains essais expérimentaux sont inhomogènes. Par conséquent, une interprétation homogène de ces essais, conduit à une identification paramétrique non précise qui influe sur la prévision des modèles identifiés. Afin de surmonter l’hypothèse d’homogénéité, une technique qui fut introduite par Schnur et Zabaras (Schnur et Zabaras, 1992) et qui consiste à utiliser le couplage d’un code de calcul par éléments finis avec une méthode d’optimisation en vue de l’identification du comportement d’un matériau. Classée parmi les types de problèmes inverses qui consistent à minimiser par un procédé itératif une évaluation de l’écart entre le résultat obtenu et la mesure expérimentale, cette technique est basée sur une certaine norme, généralement la norme Euclidienne. Depuis, l’identification du comportement des matériaux formulée dans ce cadre de problèmes inverses est largement utilisée.

Gavrus et ces collaborateurs (Gavrus et *al.*, 1994, 1995, 1996) ont appliqué le principe de la méthode inverse pour identifier le comportement rhéologique de matériaux thermoviscoplastique sollicités en traction et en torsion dans des conditions sévères de déformation. Ces conditions sont comparables à celles atteintes pour des applications industrielles (des phénomènes d’auto-échauffement et de localisation de la déformation). L’algorithme développé par ces auteurs consiste à coupler la méthode des éléments finis qui permet de simuler l’essai (l’essai de torsion, traction ou torsion-traction) avec un module d’optimisation. La différence entre la mesure expérimentale et la réponse thermoviscoplastique du modèle est définie par une fonction objectif formulée dans le sens des moindres carrés et l’algorithme de minimisation utilise la procédure de Gauss-Newton.

Mahnken et Stein (Mahnken et Stein, 1994, 1996, 1997) ont identifié les paramètres de modèles viscoplastiques en utilisant la même technique d’identification que celle utilisée par Gavrus et *al.*

Mahnken et Kuhl ont continué à utiliser et élargir cette technique d’identification paramétrique vers d’autres applications (Mahnken et Kuhl, 1999). Les auteurs ont proposé d’identifier les paramètres de modèles d’endommagement pour lesquels une distribution non uniforme de contraintes et de déformations, avec la prise en compte des variables d’endommagement.

Gelin et Ghouati ont largement utilisé cette technique d’identification inverse pour déterminer les paramètres de comportement viscoplastiques d’alliages d’aluminium (Ghouati, 1994), (Gelin, 1995), (Gelin, 1996), (Ghouati, 1997; Ghouati et Gelin, 1998), (Ghouati et Gelin, 2001). Les essais utilisés sont des essais de traction, de compression à différentes vitesses de déformation et de températures sur des éprouvettes (lopins) cylindriques et annulaires. Un autre essai est également utilisé est le test de bipoinçonnement qui consiste à l’écrasement d’une tranche d’un massif parallélépipédique entre deux poinçons plans, rectangulaires, symétriques et parallèles.

Lam et Khoddam (Lam et *al.*, 1998) ont utilisé une méthode d'identification inverse à partir des essais de torsion à chaud, de déformation plane et de la compression axisymétrique, pour déterminer les paramètres de comportement de lois viscoplastiques. Les auteurs ont défini une fonction objectif représentant la différence entre les grandeurs mesurées et calculées. La méthode d'optimisation du Simplexe est utilisée pour minimiser cette fonction objectif.

Cailletaud et Pilvin généralisent cette technique d'identification aux cas des modèles de comportement non linéaire par une combinaison du code de calcul par éléments finis non linéaires en grandes transformations avec un outil d'optimisation, SiDoLo. Les auteurs ont choisi de minimiser la fonction objectif représentant la différence entre les valeurs expérimentales et celles calculées au moyen de deux méthodes d'optimisation. La méthode de la plus grande pente est utilisée lors des premières itérations pour améliorer l'approximation des paramètres. Ensuite, la méthode de Levenberg-Marquart permet d'atteindre l'optimum recherché. Ces deux méthodes sont des méthodes du gradient d'ordre 1, nécessitant le calcul du vecteur gradient, réalisé par différences finies. Cailletaud et Pilvin ont identifié plusieurs lois de comportement de matériaux élasto-visco-plastiques, des modèles polycristallins, et des modèles probabilistes de fissuration, . . . .

Actuellement, ce champ scientifique d'identification paramétrique par la résolution d'un problème inverse ne cesse d'augmenter. De nombreuses publications sur ce sujet ont permis l'identification des lois de comportement très sophistiqués (thermoviscoplastique, modèles microscopiques, modèles d'endommagement, . . . ).

De nombreuses symposia traitent de ce sujet, où des conférences sont présentées (Picart et *al.*, 1999), (Pietrzyk et *al.*, 1998) dans ces congrès de mécanique, de méthodes numériques directes et inverses tels que NUMIFORM, ESAFORM, NUMISHEET, ECCOMAS, . . .

Il semble que la formulation d'un problème d'identification paramétrique comme un problème inverse attire bien les chercheurs à développer des modèles d'autant précis, riches, et sans avoir recours à négliger des phénomènes importants rendant compte des phénomènes réels se manifestant au cours de la déformation. La formulation mathématique de l'écart à minimiser est presque inchangée d'un auteur à l'autre. La norme Euclidienne est la plus répandue et ceci pour plusieurs raisons (facilité d'utilisation des informations statistiques sur la dispersion des résultats expérimentaux et erreurs de mesure, norme continûment dérivable d'ordre minimum, . . . ).

La différence reste dans le choix des méthodes d'optimisation qui dépendent de l'auteur. Les méthodes d'optimisation rencontrées sont principalement les méthodes de la plus grande pente, du gradient conjugué, de Quasi-Newton (BFGS ou DFP), de Gauss-Newton et de Levenberg-Marquart. Pour ces méthodes du gradient d'ordre 1, il est nécessaire d'effectuer un calcul de sensibilité, c'est-à-dire le calcul de la dérivée de la fonction objectif par rapport aux paramètres à identifier. Selon le type de problème à identifier et la forme de la fonction objectif à minimiser (forte non linéarité, implicite, . . . ), les techniques de différences finies, de dérivation semi-analytique ou analytique sont très utilisées.

D'autres méthodes d'optimisation d'ordre zéro, comme la méthode du Simplexe et les algo-

rithmes génétiques sont également utilisées (Lam et *al.*, 1998). Ces méthodes ne nécessitent pas le calcul de la sensibilité (le vecteur gradient), seulement des évaluations successives de la fonction objectif sont calculées.

### 3.3 Calcul direct par éléments finis

Nous présentons l'algorithme de calcul de structure basé sur la méthode des éléments finis. Cet algorithme nous fournit les réponses globales : force - déplacement. Seules, ces grandeurs nous intéressent au cours de l'identification. Par rapport aux situations classiques, cet algorithme de calcul de structure élastoplastique n'utilise pas de matrice tangente, c'est un code qui a été développé dans notre laboratoire (LGM<sup>1</sup>) (Bel Hadj Salah et *al.*, 1996, 1999, 2000). La caractéristique majeure de cette approche de calcul de structure est la réduction de l'intégration spatiale à un calcul élastique, qui en petites déformations, peut être réalisé une fois pour toutes. Ce qui permet de découpler presque complètement la partie structure élastique de la partie loi de comportement plastique. Cet algorithme présente une flexibilité quant à la loi de comportement plastique, d'où une grande versatilité pour le calcul par des lois de comportement très raffinées. Ceci montre que cet algorithme est bien adapté pour l'identification des lois de comportement.

#### 3.3.1 Formulation du problème

On considère une structure (éprouvette) occupant un domaine  $\Omega$  (ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ) soumis à un déplacement imposé  $U^d$  sur une partie  $\Gamma_u$  de sa frontière et libre de contrainte sur la partie complémentaire. ( $\Gamma = \Gamma_f \cup \Gamma_u$ ) avec  $\Gamma_u$  une mesure strictement positive.

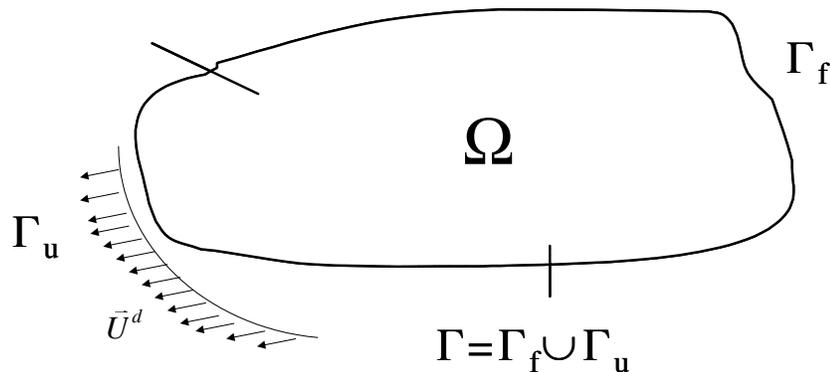


FIG. 3.1: Représentation schématique des chargements appliqués à un solide déformable.

On suppose que  $\vec{U}^d$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{U}^d(x, t) = \bar{U}(t)\vec{d}(x) \quad x \in \Gamma_u \quad (3.1)$$

<sup>1</sup>Laboratoire de Génie Mécanique, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir- Tunisie.

où le champ  $\vec{d}(x) = \vec{d}$  est fixé, tandis que les déplacements généralisées  $\bar{U}(t)$ , variables de commande de la structure, varient au cours du temps définissant aussi le chargement. Le calcul élastoplastique d'une telle structure s'effectue d'une manière incrémentale. Considérons un état d'équilibre sous un chargement  $\vec{U}^d$ , Calculons l'état d'équilibre suivant sous le chargement  $\vec{U}^d + d\vec{U}^d$ . Dans le cadre élastoplastique avec écrouissage isotrope, un état d'équilibre est défini par un champ de déplacement  $\vec{u}(x)$ , un champ de contrainte  $\sigma(x)$ , un champ de déformation  $\varepsilon(x)$ , un champ de déformation plastique  $\varepsilon^p(x)$  et un champ de variables internes d'écrouissage  $\alpha(x)$ , définis sur  $\Omega(x \in \Omega)$  vérifiant, en l'absence des forces volumiques, les équations d'équilibres locales s'expriment classiquement sous la forme suivante :

$$\operatorname{div} \sigma = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \quad (3.2)$$

$$\sigma \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_f \quad (3.3)$$

$$\vec{u} = \vec{U}^d = \bar{U}(t) \vec{d}(x) \quad \text{sur} \quad \Gamma_u \quad (3.4)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) \quad (3.5)$$

$$\sigma = \mathbf{A} : (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (3.6)$$

### 3.3.2 Problème élastique et problème résiduel

Si le champ de déformation plastique  $\varepsilon^p(x)$  est connu et figé, il s'agit là d'un problème élastique avec contraintes résiduelles. Le problème est classique et il est commode de décomposer en deux :

#### Problème élastique P1( $\varepsilon^p(x) = 0$ )

Il consiste à trouver un champ de déplacement  $\vec{u}$ , un champ de contraintes  $\sigma$  et un champ de déformations  $\varepsilon$ , définis sur  $\Omega$ , vérifiant les équations d'équilibres (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) et la loi élastique  $\sigma = \mathbf{A}\varepsilon$ . Ce problème d'élasticité linéaire est classique. Il admet une solution unique définie par un champ de contraintes, noté  $\sigma^e(x, \bar{U})$ , et un champ de déplacements, noté  $\vec{v}(x, \bar{U})$ . En notant  $\mathbf{s}$  et  $\vec{\chi}$  respectivement, le champ des contraintes et le champ des déplacements solutions de (P1) pour  $\vec{U}^d = \vec{d}$ . Ces deux champs s'écrivent sous la forme :

$$\sigma^e(x, \bar{U}) = \bar{U} \mathbf{s} \quad (3.7)$$

$$\vec{v}(x, \bar{U}) = \bar{U} \vec{\chi} \quad (3.8)$$

### Problème résiduel P2( $\bar{U} = 0$ )

Il s'agit de trouver, pour un champ de déformation résiduelle donné  $\varepsilon^p = \varepsilon^o(x)$ , un champ de déplacements  $\vec{u}$ , un champ de contraintes  $\sigma$  et un champ de déformations  $\varepsilon$ , définis sur  $\Omega$  vérifiant toujours les équations d'équilibres locales et conditions aux limites homogènes :

$$\vec{u} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_u \quad (3.9)$$

Le problème (P2) est un problème élastique à contraintes résiduelles. Pour  $\varepsilon^o$  suffisamment régulier, le problème (P2) admet une solution unique (Duvaut, 1990). Cette solution est linéaire par rapport à  $\varepsilon^o$  et ne dépend que de la géométrie de la structure et de ses propriétés élastiques. On désignera la solution en contrainte et en déplacement de (P2) respectivement par  $\sigma^r(\varepsilon^o)$  et  $\vec{w}(\varepsilon^o)$ . La solution du problème complet s'écrit donc finalement sous la forme suivante :

$$\vec{u} = \bar{U}\vec{\chi} + \vec{w}(\varepsilon^p) \quad (3.10)$$

et

$$\sigma = \bar{U}s + \sigma^r(\varepsilon^p) \quad (3.11)$$

Le calcul s'effectuera classiquement à partir de la formulation variationnelle du problème élastique : Trouver  $u \in V_{ad}$  vérifiant :

$$a(u, v - u) = l(v - u) \quad \forall v \in V_{ad} \quad (3.12)$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A\varepsilon(u)\varepsilon(v)d\Omega \quad (3.13)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} A\varepsilon^p\varepsilon(v)d\Omega \quad (3.14)$$

et  $V_{ad}$  est l'espace des champs cinématiquement admissibles :

$$V_{ad} = \{v \in \mathbb{R}^n, v_i \in H^1(\Omega), \text{ et } v = \bar{U} \text{ sur } \Gamma_u\}$$

#### 3.3.3 Relation Force -déplacement

Les forces généralisées  $P$  associées aux déplacements  $\delta U$  s'obtiennent en écrivant le travail virtuel des efforts extérieurs :

$$\delta W^* = \int_{\Gamma_u} \sigma_n \delta U d\Gamma = P \delta U \quad (3.15)$$

où

$$P = \int_{\Gamma_u} U^d \sigma_n d\Gamma \quad (3.16)$$

En utilisant dans l'expression (3.16) le champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  donné par la relation (3.11) on obtient :

$$P = \bar{U} \int_{\Gamma_u} U^d s n d\Gamma + \int_{\Gamma_u} U^d \boldsymbol{\sigma}^r n d\Gamma = K\bar{U} + P^\circ \quad (3.17)$$

avec

$$K = \int_{\Gamma_u} U^d s n d\Gamma \quad \text{et} \quad P^\circ = \int_{\Gamma_u} U^d \boldsymbol{\sigma}^r n d\Gamma \quad (3.18)$$

Par utilisation de la formule de Green on peut aussi écrire :

$$K = \int_{\Omega} s \varepsilon(\chi) d\Omega \quad \text{et} \quad P^\circ = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^r(\varepsilon^p) \varepsilon(\chi) d\Omega \quad (3.19)$$

La relation (3.17) exprime la force généralisée en fonction du déplacement imposé. C'est cette relation qui permet de donner, une fois déterminée, l'évolution des déformations plastiques, et la courbe forces- déplacements. C'est le calage de cette courbe aux résultats expérimentaux qui permettra l'identification des paramètres matériels.

### 3.3.4 Le problème élastoplastique

On peut réécrire notre problème sous la forme suivante : connaissant  $u$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et  $\alpha$  vérifiant les relations d'équilibres (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), trouver pour un incrément de charge  $d\bar{U}^d$  donné, les incréments  $d\boldsymbol{\sigma}$ ,  $d\alpha$  et  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$  vérifiant d'une part :

$$d\boldsymbol{\sigma} = d\bar{U} \mathbf{s} + \boldsymbol{\sigma}^r(d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.20)$$

et

$$d\bar{u} = d\bar{v} + \bar{w}(d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.21)$$

et d'autre part en chaque point la loi d'évolution plastique reliant  $d\boldsymbol{\sigma}$ ,  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et  $d\alpha$ . L'intérêt de cette formulation tient au fait que tout le problème de structure est résumé dans la formule (3.20) et donc obtenue par un calcul purement élastique. La composante dissipative de la loi de comportement n'apparaît que localement en chaque point. Si l'on considère, par exemple, un modèle standard à écrouissage isotrope :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_s(\alpha) \leq 0 \quad (3.22)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\alpha} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}; \quad \dot{\alpha} \geq 0, \dot{\alpha} f = 0, \dot{\alpha} \dot{f} = 0 \quad (3.23)$$

où  $\bar{\sigma}$  est la contrainte équivalente du critère de plasticité et  $\sigma_s(\alpha)$  est la fonction d'écrouissage. L'écriture de la condition de consistance  $df = 0$  compte tenu de (3.20) donne en chaque point :

$$(d\bar{U} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{s}) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma}^r(d\alpha \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}) + \frac{\partial f}{\partial \alpha} : d\alpha = 0 \quad (3.24)$$

On en tire en chaque point la valeur de  $d\alpha$  puis de  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ . Ainsi formulée, l'approche proposée résout un problème de structures élastiques et intègre localement en chaque point la loi d'évolution.

### 3.3.5 Discrétisation du problème

#### Opérateurs de localisation

Dans une formulation primale, l'ouvert  $\Omega$  sera discrétisé par éléments finis. On écrira donc :

$$\vec{u}(x) = \sum_I u^I \vec{\phi}^I(x) \quad (3.25)$$

Cette discrétisation est supposée telle que le champ de déformation reste constant sur chaque élément  $E_a$  ( $a = 1, n_E$ ). Ceci limite l'approche aux éléments de type P1. L'extension à d'autres types d'élément peut être envisagée, mais nous n'en parlerons pas ici.

$$\varepsilon_{ij}^a(x) = \sum_I \Phi_{ij}^{Ia}(x) \quad \text{si } x \in E_a \quad (3.26)$$

pour

$$\Phi_{ij}^I = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_i^I}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi_j^I}{\partial x_i} \right) \quad (3.27)$$

Il en résulte, par écriture de la loi de comportement pour un matériau supposé homogène que toutes les autres variables  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}^p$ , et  $\alpha$  seront aussi constantes sur chaque élément. En particulier :

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^{pa} \quad \text{si } x \in E_a \quad (3.28)$$

Le problème élastique discrétisé conduira à :

$$\sigma_{ij}^a(x) = \bar{U} s_{ij}^a + \sum_b S_{ijpq}^{ab} \varepsilon_{pq}^{pb} \quad (3.29)$$

où  $i, j = 1, 2, 3$  représentent les composantes des vecteurs de l'espace physique.

$a, b = 1, 2, \dots, n_E$  représentent les numéros d'éléments.

L'équivalent discret de la formulation variationnelle donnée par les relations (3.12) à (3.14) s'écrit en utilisant la formule (3.26) sous la forme suivante :

$$a_h(u, v - u) = l_h(v - u) \quad \forall x \in V_{adh} \quad (3.30)$$

$$a_h(u, v) = \sum_a \sum_I \sum_J A v_a u^I v^J \Phi^{Ia} \Phi^{Ja} \quad (3.31)$$

$$l_h(v) = \sum_a \sum_J A v_a \varepsilon^{pa} v^J \Phi^{Ja} \quad (3.32)$$

$v_a$  est le volume de l'élément  $a$  et  $V_{adh}$  est le sous espace de  $V_{ad}$  engendré par les fonctions bases  $\Phi^I$ .

### 3.3.6 Algorithme de calcul élastoplastique

La condition de consistance sur un élément "a" s'écrit :

$$df^a = \frac{\partial f^a}{\partial \sigma^a} : d\sigma^a + \frac{\partial f^a}{\partial \alpha^a} : d\alpha^a = 0 \quad (3.33)$$

A partir de la relation (3.29) et pour  $\varepsilon^o = d\varepsilon^p$  on peut écrire :

$$d\sigma_{ij}^a(x) = d\bar{U} s_{ij}^a + \sum_b S_{ijmn}^{ab} d\varepsilon_{mn}^{pb} \quad (3.34)$$

où  $d\bar{U}$  est imposé et  $d\varepsilon^{pa}$  doit satisfaire la loi d'écoulement plastique :

$$d\varepsilon^{pa} = d\alpha \frac{\partial f^a}{\partial \sigma^a} \quad (3.35)$$

### Conclusion partielle

Dans cette partie nous avons présenté un algorithme d'intégration de lois de comportement élastoplastiques. L'idée de base est l'écriture d'un problème élastoplastique comme une suite de problèmes élastiques linéaires. En effet, la partie structure élastique est presque découplée de la partie loi de comportement plastique et par suite la matrice tangente n'est pas utilisée. Les modèles que nous avons formulés au chapitre 1 sont implémentés dans cet algorithme particulier de calcul par éléments finis.

## 3.4 Introduction à l'optimisation

Avant 1940, les méthodes numériques d'optimisation des fonctions à plusieurs variables étaient peu connues (les premières tentatives de minimisation des fonctions sont attribuées à Cauchy, qui en 1847, a utilisé une méthode dite de la plus grande pente, largement modifiée depuis). En 1959, Davidson (Davidson, 1959) introduit la notion de "variables métriques", lui permettant de minimiser des fonctions à plusieurs variables en un temps record. C'est le début de la période où sont développés les outils applicables à des domaines très variés comme les sciences, l'ingénierie, les mathématiques, l'économie...

Ces techniques d'optimisation ont une importance capitale dans les applications techniques, entre autres la mécanique. Elles offrent à l'ingénieur ou au chercheur, la possibilité d'améliorer et d'optimiser les résultats d'une étude. Au stade de la modélisation et du calcul, l'optimisation est un outil essentiel qui permet d'améliorer les résultats d'une étude et d'aboutir à la meilleure solution possible. Fletcher, (Fletcher, 1980) propose de définir l'optimisation comme la science qui détermine la "meilleure" solution d'un problème mathématique, qui traduit le plus souvent une réalité physique.

En mécanique de structures on parle d' :

- optimisation de forme : les paramètres de conception sont des données géométriques de la structure ou du maillage (diamètre, longueur, épaisseur, coordonnées des points...)

- optimisation structurale : les paramètres de conception sont des caractéristiques mécaniques de comportement de la structure ou d'une façon générale, les paramètres des lois de comportement.

Dans la littérature, nous distinguons les méthodes d'optimisation qui exigent le calcul du gradient de la fonction à minimiser et les méthodes d'exploration directe qui n'utilisent pas le calcul du gradient. Les méthodes du gradient sont classiques en optimisation. Elles comprennent principalement les méthodes de *la plus grande pente* "Steepest Descent", du *gradient conjugué*, la méthode de *Gauss-Newton* (Gavrus et al., 1995, 1996) et la méthode de *Levenberg-Marquardt* (Gelin, 1995), (Ghouati et Gelin, 1998), (Ghouati et Gelin, 2001). Les méthodes dites de *Newton* nécessitent la détermination de la matrice Jacobienne et la matrice Hessienne de la fonction à minimiser. La matrice Hessienne n'est pas toujours facile à inverser, pour cette raison, il existe essentiellement deux méthodes dites de *Quasi-Newton*. La méthode (BFGS) est utilisée par Batoz, pour optimiser les paramètres matériels dans un procédé de mise en forme industriel (Batoz et al., 2000). La méthode (DFP) est utilisée par Jin pour identifier les paramètres matériels d'alliages d'aluminium (Jin, 2000). Ces méthodes de *quasi-Newton* sont des méthodes d'ordre 1. Elles tentent par des approximations successives de la matrice Hessienne, de retrouver la méthode de *Newton*.

Les méthodes d'exploration directe ou d'ordre zero, explorent l'espace des paramètres par l'évaluation des valeurs de la fonction objectif au cours des itérations. On peut citer la méthode d'exploration au hasard de *Monte-Carlo*, les *méthodes génétiques* et la méthode du *Simplexe* non-linéaire (Lam et al., 1998).

Toutes ces méthodes sont caractérisées par des schémas itératifs, exigeant que l'on définisse un point initial et que l'on progresse en engendrant une suite de points qui présentent des améliorations successives de la solution.

La méthode du *Simplexe Nelder-Mead* constitue une technique d'optimisation appartenant aux méthodes d'exploration directe. Elle est très efficace pour des cas où le nombre de variables est relativement petit (Lagarias et al., 1998). Nous allons détailler cette méthode qui apparaît bien adaptée au type de problèmes que nous envisageons résoudre.

### 3.5 La méthode du Simplexe

La méthode du Simplexe appartient à la famille des méthodes d'exploration directe (méthodes d'optimisation non-linéaire sans contraintes), contrairement aux méthodes du gradient qui nécessitent l'évaluation des dérivées partielles de la fonction objectif à minimiser. La méthode du Simplexe repose uniquement sur le calcul des valeurs de la fonction à minimiser et des informations acquises au cours des itérations antérieures. La méthode opère en considérant les valeurs prises par la fonction objectif aux sommets d'une figure géométrique située dans l'espace des paramètres à chercher.

La méthode du Simplexe a connu une célébrité dès la publication des travaux de Spendley, Hex et Himsworth (Spendley et al., 1962). Ces méthodes ont vu leur âge d'or entre 1960 et 1971 (Fletcher et Powell, 1963), (Nelder et Mead, 1965), (Fletcher, 1965), (Box et al.,

1969), (Powell, 1964), (Swann, 1972). Elles continuent à être développées et appliquées jusqu'à maintenant avec des algorithmes plus élaborés pour les perfectionner en termes de robustesse, convergence et rapidité (Rykov, 1980, 1983), (Torczon, 1989), (Wright, 1995), (Lewis et *al.*, 2000).

### 3.5.1 Les bases de la méthode

Les travaux de Spendley, Hex et Himsworth (Spendley et *al.*, 1962) qui ont contribué à la définition et à la construction du Simplexe, en y introduisant des opérations d'évolution. Un Simplexe est une forme géométrique non dégénérée (de sommets distincts), construite de  $n + 1$  sommets dans l'espace des paramètres et ceci pour résoudre un problème d'optimisation de  $n$  variables indépendants. Par exemple, si le nombre de paramètres à optimiser est deux, le Simplexe aura la forme d'un triangle. Si le nombre de paramètres est trois, le Simplexe est un tétraèdre, pas forcément régulier. Une fois le Simplexe initial est construit à partir des valeurs initiales. L'évolution du Simplexe s'effectue comme suit :

Soient  $x_0, x_1, \dots, x_n$  les sommets du Simplexe et  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$  sont les calculs de la fonction objectif aux sommets du Simplexe, de telle sorte que :

$f(x_0) \leq f(x_1) \leq \dots \leq f(x_n)$ . La figure(3.2) représente un exemple du Simplexe à trois sommets de sorte que  $f(x_0) \leq f(x_1) \leq f(x_2)$  (cas de deux paramètres à optimiser).

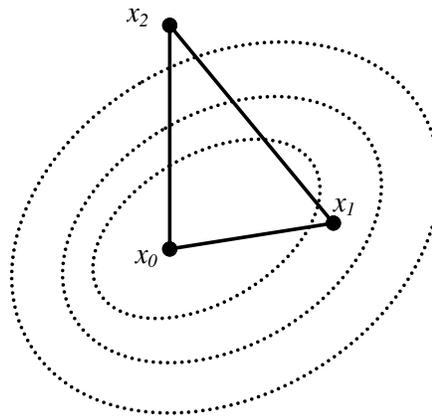


FIG. 3.2: Construction du Simplexe initial dans l'espace des paramètres.

Maintenant, on sait que le sommet  $x_n$  a la plus grande valeur  $f(x_n)$  de tous les sommets du Simplexe. Il est désirable alors de remplacer  $x_n$  par un nouveau point où la valeur de la fonction objectif en ce point est inférieure à  $f(x_n)$ . Ceci est effectué par la *réflexion* du point  $x_n$  par rapport au centre de gravité  $\bar{x}$  des  $n$  sommets restant ( $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i$ ). Cette étape de réflexion permet au Simplexe de s'éloigner de la région des grandes valeurs des fonctions objectifs. D'autres nouvelles régions sont explorées, où les valeurs des fonctions objectifs aux sommets du Simplexe sont inférieures à  $f(x_n)$  et même si possible à  $f(x_0)$ .

Sur la figure (3.3) suivante, un cas simple illustre la construction initiale du Simplexe et son évolution.

Les sommets du Simplexe sont  $x_0, x_1$ , et  $x_2$  de telle sorte qu'on a  $f(x_0) \leq f(x_1) \leq f(x_2)$ . Le sommet  $x_2$  a la plus grande valeur de la fonction objectif. Ce sommet a subi une réflexion par rapport au centre du segment  $x_0$  et  $x_1$  vers un autre nouveau sommet  $x_r$ . Un nouveau Simplexe est obtenu à partir des sommets  $x_0, x_1$  et  $x_r$ ; figure (3.3). De nouveau le calcul de la fonction objectif aux nouveaux sommets du Simplexe est évalué et par la suite, ces sommets sont ordonnés pour effectuer l'opération de réflexion sur le sommet qui présente la plus grande valeur de sa fonction objectif.

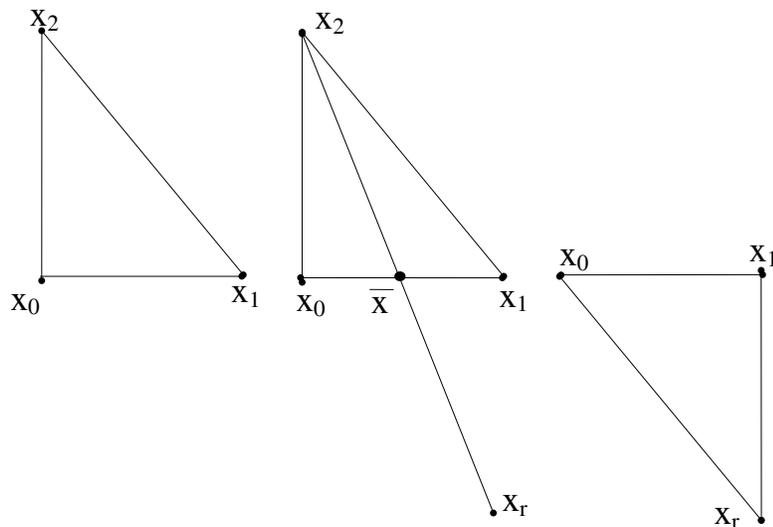


FIG. 3.3: L'étape de réflexion est l'opération de base dans la manipulation du Simplexe.

Quelque fois, à proximité du minimum, nous observons une rotation sur les sommets, c'est à dire le Simplexe revient sur des positions occupées précédemment. Dans ce cas, le Simplexe oscille autour de lui même et la progression vers la solution n'est plus possible.

Nelder et Mead ont constaté ces faits et l'algorithme du Simplexe pourrait s'améliorer si le Simplexe avait la possibilité de changer de forme au cours des itérations.

### 3.5.2 Le Simplexe de Nelder-Mead

L'algorithme du Simplexe de Nelder -Mead (Nelder et Mead, 1965), et l'algorithme du Simplexe de Dantzig pour la programmation linéaire sont deux algorithmes totalement différents, pourtant ils portent la même nomination (méthode du Simplexe).

La facilité d'implémenter l'algorithme du Simplexe de Nelder-Mead, l'inscrit parmi les algorithmes d'exploration directe les plus utilisés. Un livre de Walters (Walters, 1991) qui contient des milliers de références, est dédié entièrement à la méthode de Nelder-Mead et ses variétés. Cet algorithme apparaît dans "Numerical recipes" (Press, 1988) où il est appelé

"amoeba algorithm" et dans la boîte à outils d'optimisation " Optimization tool box" de MATLAB (Maths Works, 1994) sous le nom de "fminsearch".

L'algorithme de Nelder-Mead est similaire à celui de Spendley, Hex, and Himsworth, sauf qu'ici le Simplexe a la possibilité de changer de forme. Nelder-Mead permettent des opérations d'évolution comme une *réflexion*, une *expansion*, une *contraction* et une *reduction*.

En effet, le but de l'algorithme de Nelder-Mead est de fournir un moyen, par lequel le Simplexe effectue une expansion le long des directions d'amélioration (les directions où la fonction objectif a la tendance à diminuer sa valeur) et se contracter dans des directions opposées quand le Simplexe ne trouve pas d'amélioration. Si au nouveau point de réflexion, la valeur de la fonction objectif est inférieure à  $f(x_0)$ , il pourrait être avantageux de continuer dans la même direction d'exploration. Ceci est en fait le but de l'étape d'expansion. Le Simplexe subit une expansion à l'extérieur à partir de  $\bar{x}$  dans la direction où la fonction objectif a une tendance de décroissance. Si les étapes de réflexion et d'expansion ne vont pas dans le sens d'amélioration de la décroissance des valeurs de la fonction objectif, alors le Simplexe est à proximité d'un minimum. Le Simplexe se contracte dans l'une des deux voies suivantes :

Si  $f(x_n)$  a une valeur inférieure à  $f(x_r)$  au point de réflexion  $x_r$ , alors le point  $x_n$  est plus proche du minimum. Dans ce cas, le Simplexe se contracte à partir de  $x_n$  vers le centre de gravité  $\bar{x}$ . Autrement, si la valeur de  $f(x_r)$  est inférieure à  $f(x_n)$ , le Simplexe se contracte à partir de  $x_r$  vers  $\bar{x}$ . Finalement, si aucune amélioration n'est trouvée, le Simplexe se réduit (étape de réduction) à  $x_0$ .

Sur la figure (3.4) et la figure (3.5), nous illustrons les étapes que subit le Simplexe au cours de l'exploration de la direction donnant la plus faible valeur de la fonction objectif :

- a) La première étape est une opération de réflexion classique (similaire à celle de Spendley, Hext et Himsworth).
- b) L'étape d'expansion réfléchit ensuite le sommet  $x_2$  par rapport à  $\bar{x}$  pour obtenir le sommet obtenu par expansion  $x_e$ .
- c) Si  $f(x_2) \leq f(x_r)$ , effectuer une contraction à l'intérieure à partir de  $\bar{x}$  vers  $x_2$  pour trouver  $x_{ci}$ .
- d) Si  $f(x_2) > f(x_r)$ , effectuer une contraction à l'extérieure à partir de  $\bar{x}$  vers  $x_r$  pour trouver le sommet  $x_{ce}$ .
- e) Si à une étape quelconque, les transformations précédentes n'apportent aucune amélioration vers la solution optimale ou le Simplexe repasse par les points précédents, alors la taille du Simplexe doit changer pour mieux progresser vers l'optimum. Il s'agit de réduire de moitié les distances qui relient le sommet  $x_0$  à tous les autres sommets du Simplexe (figure 3.5).

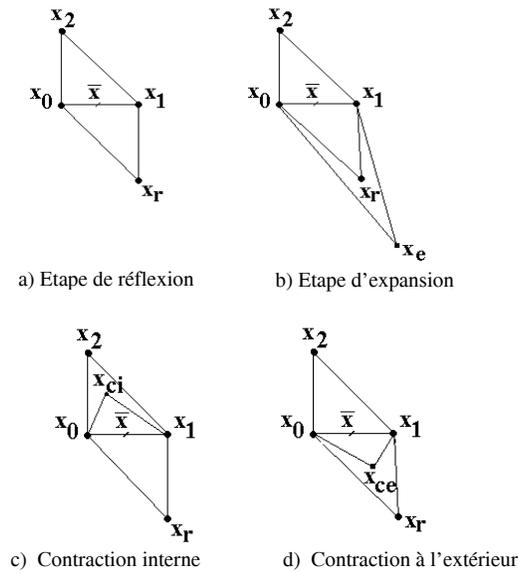


FIG. 3.4: L'étape d'expansion proposée par l'algorithme de Nelder-Mead.

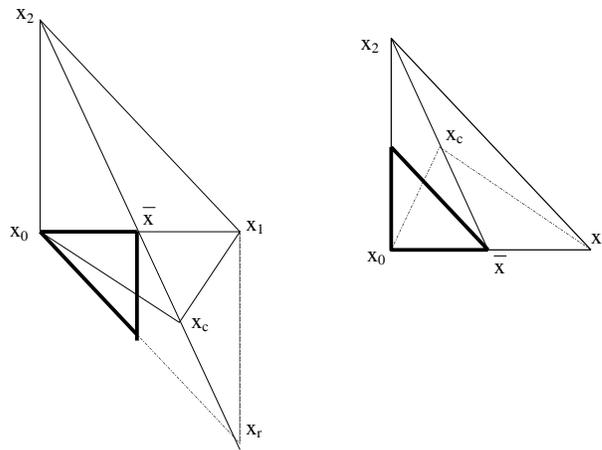


FIG. 3.5: L'étape de réduction du Simplexe.

Des coefficients sont attribués à chaque étape de l'évolution de la forme du Simplexe :  $\rho$ (réflexion),  $\chi$ (expansion),  $\gamma$ (contraction) et  $\sigma$ (réduction).

où  $\rho > 0$ ,  $\chi > 1$ ,  $\chi > \rho$ ,  $0 < \gamma < 1$ , et  $0 < \sigma < 1$ .

Ceux-ci sont des règles générales, alors qu'en pratique ces coefficients prennent les valeurs suivantes :

$$\rho = 1, \chi = 2, \gamma = \frac{1}{2}, \sigma = \frac{1}{2}.$$

Les coefficients  $\gamma$  et  $\sigma$  ont conventionnellement la même valeur  $\frac{1}{2}$ , mais ils ont un rôle différent dans l'algorithme. La constante  $\gamma$  est utilisée pendant l'opération de contraction pour ajuster

un seul sommet du Simplexe, alors que la constante  $\sigma$  est utilisée pendant l'étape de réduction pour déterminer l'ajustement de  $n$  sommets du Simplexe.

### 3.5.3 Test de convergence

Le test de convergence est la recherche et la définition d'un critère d'arrêt, pour lequel l'algorithme sort des itérations en fournissant un résultat avec la précision voulue. Un des critères de convergence est proposé en définissant une valeur  $\Delta$  qui représente généralement la longueur du plus grand côté du Simplexe. Pendant l'exécution de l'algorithme, le Simplexe continue à se réduire, et  $\Delta$  diminue aussi. Quand  $\Delta$  devient plus petite qu'une constante de tolérance  $\varepsilon$  pré-définie, il est supposé alors que le Simplexe est suffisamment réduit à un point, et l'algorithme doit s'arrêter. Enfin, le critère de convergence le plus usuel dans l'algorithme de Nelder-Mead est proposé par Avriel (Avriel, 1976). Trouver la moyenne,  $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ , des valeurs de la fonction en tous sommets du Simplexe sauf au meilleur point. Arrêter l'algorithme si la condition suivante est vérifiée :

$$\sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [f(x_i) - \mu]^2} < \varepsilon,$$

où  $\varepsilon$  est plus petit à une constante de tolérance fixée.

### 3.5.4 Algorithme du Simplexe de Nelder-Mead

1. **Initialisation** : Commencer avec un Simplexe de  $n+1$  sommets et calculer les valeurs de la fonction objectif pour chaque sommet. Puis à chaque itération  $k$ ,  $k \geq 0$  :

2. **Ordonnement** : Ordonner les sommets  $x_0^k, x_1^k, \dots, x_{n-1}^k, x_n^k$ , de telle sorte que :

$$f(x_0^k) \leq f(x_1^k) \leq \dots \leq f(x_{n-1}^k) \leq f(x_n^k)$$

3. **Réflexion** : Après avoir calculer le centre de gravité  $\bar{x}^k = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i^k$ , Calculer le *point*

de réflexion  $x_r^k$  à partir de :

$$x_r^k = \bar{x}^k + \rho(\bar{x}^k - x_n^k).$$

Si  $f(x_0^k) \leq f(x_r^k) < f(x_{n-1}^k)$ , remplacer  $x_n^k$  par  $x_r^k$  et aller à l'étape 7.

4. **Expansion** : Si  $f(x_r^k) < f(x_0^k)$ , calculer le *point d'expansion*  $x_e^k$  à partir de :

$$x_e^k = \bar{x}^k + \chi(x_r^k - \bar{x}^k).$$

Si  $f(x_e^k) < f(x_r^k)$ , remplacer  $x_n^k$  par  $x_e^k$  et aller à l'étape 7, sinon ( $f(x_e^k) \geq f(x_r^k)$ ), remplacer  $x_n^k$  par  $x_r^k$  et aller à l'étape 7.

5. **Contraction** : Si  $f(x_r^k) \leq f(x_{n-1}^k)$ , effectuer une *contraction* entre  $\bar{x}^k$  et soit  $x_r^k$  ou  $x_n^k$  qui correspond à la plus faible valeur de la fonction objectif.

a. **Contraction extérieure** Si  $f(x_{n-1}^k) \leq f(x_r^k) < f(x_n^k)$ , effectuer une *contraction extérieure* : calculer

$$x_{ce}^k = \bar{x}^k + \gamma(x_r^k - \bar{x}^k).$$

Si  $f(x_{ce}^k) \leq f(x_r^k)$ , remplacer  $x_n^k$  avec  $x_{ce}^k$  et aller à l'étape 7 ; sinon effectuer une réduction (étape 6).

**b. Contraction intérieure** Si  $f(x_r^k) \geq f(x_n^k)$  effectuer une *contraction intérieure* : calculer

$$x_{ci}^k = \bar{x}^k + \gamma(x_n^k - \bar{x}^k).$$

Si  $f(x_{ci}^k) < f(x_n^k)$ , remplacer  $x_n^k$  par  $x_{ci}^k$  et aller à l'étape 7 ; sinon effectuer une réduction (étape 6).

6. **Réduction** : Réduire le Simplexe autour de  $x_0^k$  en remplaçant  $x_i^k$  par

$$\hat{x}_i^k = x_i^k + \frac{1}{2}(x_0^k - x_i^k), \quad i = 1, \dots, n.$$

7. **Test d'arrêt** : Arrêter si un des critères d'arrêt est satisfait. Sinon, passer à l'itération suivante  $k = k + 1$  et retour à l'étape 2.

### 3.5.5 Propriétés principales

La méthode du Simplexe comme les méthodes d'exploration directe, présente avant tout un grand avantage de ne pas nécessiter le calcul des dérivées de la fonction objectif. D'ailleurs les méthodes basées sur le calcul du gradient (calcul de la sensibilité de la fonction objectif) trouvent des complexités dans les calculs de la matrice Jacobienne (fonction objectif est fortement non-linéaire, implicite et non convexe) à part le coût élevé en temps de calcul (Kleiner mann, 2000). Une propriété particulièrement intéressante de la méthode du Simplexe est sa convergence vers le minimum global et non vers un minimum local comme les méthodes basées sur le calcul du gradient. En effet, celle-ci étant basée uniquement sur les valeurs de la fonction objectif et pas sur ses dérivées, ne peut converger, cependant dans des minima locaux. L'algorithme du Simplexe est bien adapté pour l'optimisation des problèmes de structures où le nombre de paramètres à optimiser n'est pas élevé (Lagarias et *al.*, 1998).

Toutefois, le nombre d'itérations nécessaire pour la convergence du Simplexe est relativement plus grand que celui que nécessitent les méthodes du gradient.

## 3.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un algorithme de calcul par la méthode des éléments finis dans lequel nous avons intégré des lois de comportement élastoplastiques. Ces problèmes élastoplastiques sont écrits comme une suite de problèmes élastiques linéaires. La particularité de cet algorithme réside dans la non nécessité de l'écriture de la matrice tangente classique.

La méthode d'optimisation utilisée est la méthode du Simplexe non linéaire. La méthode du Simplexe présente l'avantage d'une robustesse et d'une convergence vers un minimum global sans se préoccuper de la nature de la fonction à minimiser. Elle permet d'éviter le calcul, parfois incertain, des gradients ou l'évaluation fastidieuse de la matrice Hessienne dans le cas où la fonction objectif est complexe (non convexe et implicite).

Le couplage de la méthode des éléments finis et la méthode d'optimisation constitue un algorithme d'identification paramétrique inverse. Nous avons mis au point cet algorithme

pour identifier des lois de comportement élastoplastiques anisotropes à partir d'essais mécaniques, généralement inhomogènes. Ceci permet d'avoir des paramètres matériels précis et de surmonter l'hypothèse d'homogénéité classique.

## Chapitre 4

# Stratégie d'identification des modèles de comportement

### 4.1 Introduction

**D**ans ce chapitre, nous présentons l'application de l'algorithme d'identification inverse que nous avons présenté dans le chapitre précédent. Nous développons également des stratégies d'identification à partir des essais expérimentaux homogènes et non homogènes.

L'essai de traction plane est un essai non homogène à partir duquel les coefficients d'anisotropie d'un ensemble de modèles sont identifiés par la méthode inverse. Pour évaluer l'ampleur de l'interprétation homogène de cet essai sur les coefficients d'anisotropie, nous avons identifié les modèles de comportement sous l'hypothèse d'homogénéité des contraintes et de déformations dans l'éprouvette. Ces résultats sont comparés aux résultats obtenus par identification inverse ainsi qu'aux résultats expérimentaux.

Dans ce travail, nous avons voulu mettre en oeuvre et appliquer l'algorithme d'identification inverse pour chercher les coefficients d'anisotropie à partir des essais relativement complexes (inhomogènes). Nous présentons ainsi, une technique d'identification permettant de déterminer les paramètres de comportement des matériaux avec plus de rigueur et de précision. Tout d'abord, pour exhiber l'apport de cette technique et sa fiabilité, nous commençons par l'identification du coefficient d'anisotropie d'un modèle simple. Il s'agit du modèle isotrope transverse associé où un seul coefficient est à déterminer. Une fois la procédure d'identification inverse est établie, nous identifions ensuite le modèle quadratique de Hill dans le cadre de la plasticité associée. Les modèles isotropes transverses et orthotropes quadratiques de Hill dans le cadre de la plasticité non associée sont également identifiés, en précisant dans chaque cas, la stratégie adoptée pour déterminer les coefficients d'anisotropie de chaque modèle.

Toutefois, l'insuffisance que présente ces modèles pour la prédiction du comportement anisotrope des tôles, nous a conduit à choisir et envisager les modèles non quadratiques les plus récents. En effet, le modèle de type Barlat(Yld96) est facilement implémenté dans notre code d'éléments finis pour mieux prédire l'anisotropie du comportement des tôles considérés.

## 4.2 Stratégie d'identification

Les essais expérimentaux que nous avons présentés dans le chapitre 2, fournissent les courbes d'érouissage et les coefficients d'anisotropie de Lankford pour les essais de traction, la force en fonction de la variation de l'épaisseur (au centre de l'éprouvette) pour la traction plane, la pression en fonction de la hauteur au pôle pour l'essai de gonflement hydraulique, ... L'identification des modèles de comportement consiste à trouver les paramètres matériels, en coïncidant (méthodes classiques ou méthodes inverses) la mesure expérimentale avec la réponse calculée du modèle. Cette réponse du modèle est la réponse optimisée quand le processus d'identification converge. Un modèle de comportement est complètement identifié si ce dernier puisse prévoir d'autres réponses expérimentales.

Dans notre cas, deux stratégies peuvent être utilisées :

- identification à partir des coefficients d'anisotropie expérimentaux
- identification à partir des courbes d'érouissage ou des couples (force-déplacement) dans le cas d'une identification inhomogène.

C'est la deuxième stratégie d'identification que nous choisissons pour identifier les coefficients d'anisotropie des tôles dans tous les cas (Khalfallah et *al.*, 2001). Cependant, l'identification à partir des coefficients d'anisotropie expérimentaux est effectuée pour le modèle isotrope transverse dans un premier temps.

La stratégie d'identification que nous évoquons ici est basée sur le choix d'essais à partir desquels les modèles de comportement seront identifiés. Pour identifier le modèle isotrope transverse associé, nous avons besoin de la courbe d'érouissage en traction simple et la courbe expérimentale de l'essai de traction plane. L'identification des coefficients du modèle quadratique de Hill, nécessite les courbes d'érouissage des essais de traction hors axes ainsi que la courbe de l'essai de traction plane. Les coefficients expérimentaux d'anisotropie de Lankford sont nécessaires dans l'identification des modèles isotropes transverses et quadratiques de Hill avec plasticité non associée, ainsi que les courbes d'érouissage de traction dans les différentes directions par rapport à la direction de laminage.

Des identifications de ces modèles sous l'hypothèse d'homogénéité sont effectuées. L'identification des coefficients d'anisotropie par l'approche homogène permet la comparaison des deux approches utilisées. Nous utilisons ces coefficients pour les introduire dans l'algorithme d'identification inverse comme des valeurs initiales dans les itérations du calcul.

Avec les techniques d'identification inverse, nous identifions des modèles plus réalistes et plus précis, c'est-à-dire qui tiennent compte de l'état de déformation réelle des éprouvettes sans avoir recours à des hypothèses d'approximation.

## 4.3 Identification de la fonction d'érouissage

La fonction d'érouissage  $\sigma_s(\alpha)$  est identifiée à partir de l'essai de traction simple dans la direction de laminage (direction de référence). Nous notons que dans la bibliographie

(Gronostajski, 2000), plusieurs lois d'érouissage sont proposées. Nous choisissons la loi de Swift pour décrire la fonction d'érouissage des tôles considérées. Les constantes d'érouissage de la loi de Swift  $\sigma_s(\alpha) = K(\varepsilon_0 + \alpha)^n$  sont obtenues par ajustement de la courbe de traction simple expérimentale avec cette loi. Les résultats de cette identification sont représentés dans le tableau (4.1). D'après la figure(4.1), la loi de Swift avec ces trois paramètres est largement suffisante pour d'écrire l'érouissage isotrope des tôles étudiées.

Tôles	coefficients identifiés		
	$K$ [MPa]	$\varepsilon_0$	$n$
Tôle 1	643	0.010	0.19
Tôle 2	580	0.004	0.26
Tôle 3	557	0.007	0.23

TAB. 4.1: Identification des constantes de la loi d'érouissage de Swift.

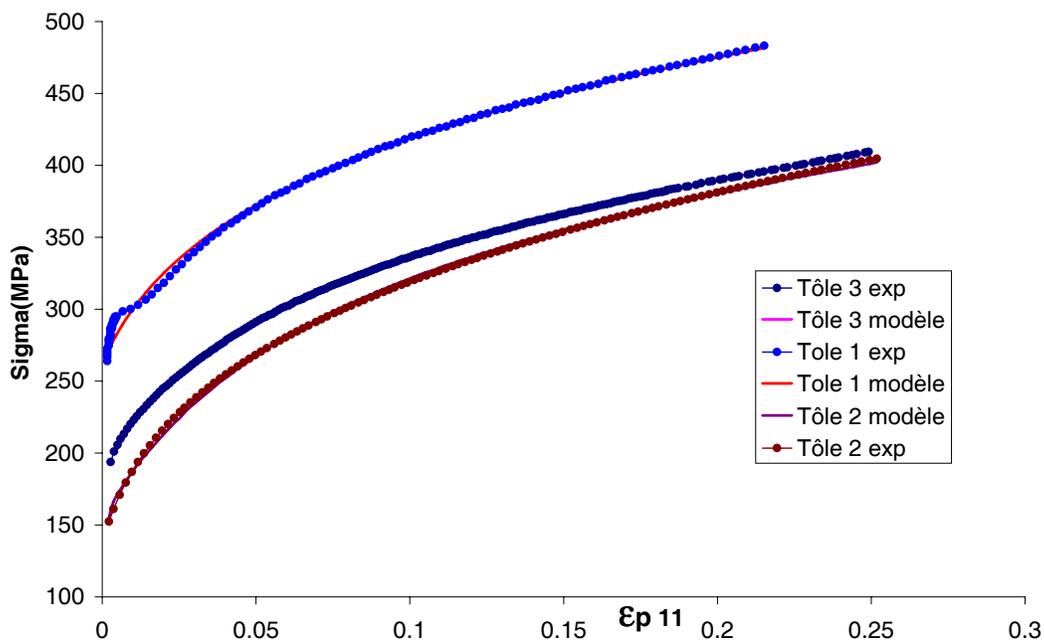


FIG. 4.1: Identification des courbes d'érouissage pour les tôles 1, 2 et 3.

Pour les propriétés élastiques des tôles, nous prenons le modèle linéaire isotrope avec un module d'Young  $E = 2.10 \times 10^5$ MPa et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

#### 4.4 Identification du modèle isotrope transverse associé

L'identification du modèle isotrope transverse de Hill avec plasticité associée et dans l'état de contraintes planes nécessite :

- Une fonction d'érouissage  $\sigma_s(\alpha)$ .

- Un coefficient d'anisotropie  $r$ .

Le coefficient  $r$  représente l'anisotropie du critère de plasticité. Nous considérons que l'écroutissage est isotrope (une seule variable interne  $\alpha$  qui est prise égale à la déformation plastique équivalente en traction uniaxiale).

Deux cas peuvent se présenter :

- Soit ce coefficient d'anisotropie est identifié à partir du coefficient d'anisotropie de Lankford expérimentale ( $r = r_{exp}$ ).
- Soit ce coefficient est identifié à partir de la courbe d'écroutissage d'un essai donné, comme par exemple l'essai de traction plane, l'essai d'expansion équibiaxiale ou l'essai de cisaillement simple.

#### 4.4.1 Identification par le coefficient de Lankford $r$

Cette identification utilise la valeur moyenne du coefficient d'anisotropie de Lankford  $\bar{r}$  déterminé expérimentalement à partir des essais hors-axes dans plusieurs directions par rapport à la direction de laminage (relation 2.5). L'avantage de ce modèle est qu'il permet de tenir compte des coefficients d'anisotropie. La validation est effectuée par la prédiction des courbes d'écroutissage des différents essais disponibles (traction plane, expansion equibiaxiale, et cisaillement simple). Nous représentons sur les figures suivantes les courbes d'écroutissage expérimentales et celles calculées pour  $r = \bar{r}$ . Ce modèle prévoit, de par sa construction, une bonne représentation de l'écoulement plastique et une mauvaise représentation des courbes d'écroutissage. Nous allons par la suite, adopter la stratégie permettant d'identifier les coefficients d'anisotropie à partir des courbes d'écroutissage.

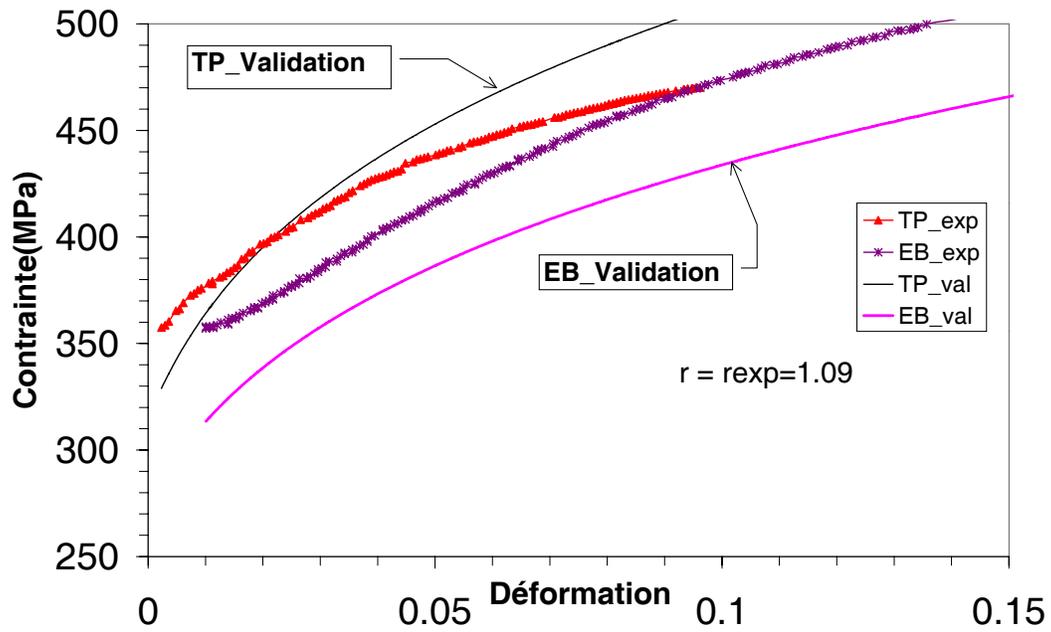


FIG. 4.2: Validation par la traction plane et l'expansion équilibrée du modèle  $r = \bar{r}$  pour la Tôle 1.

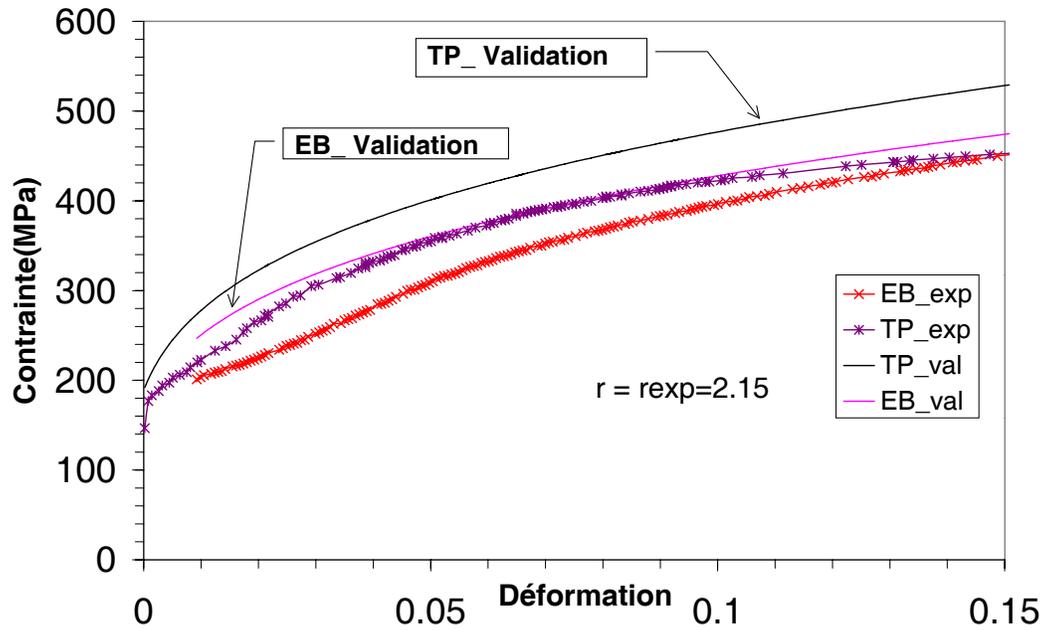


FIG. 4.3: Validation par la traction plane et l'expansion équilibrée du modèle  $r = \bar{r}$  pour la Tôle 2.

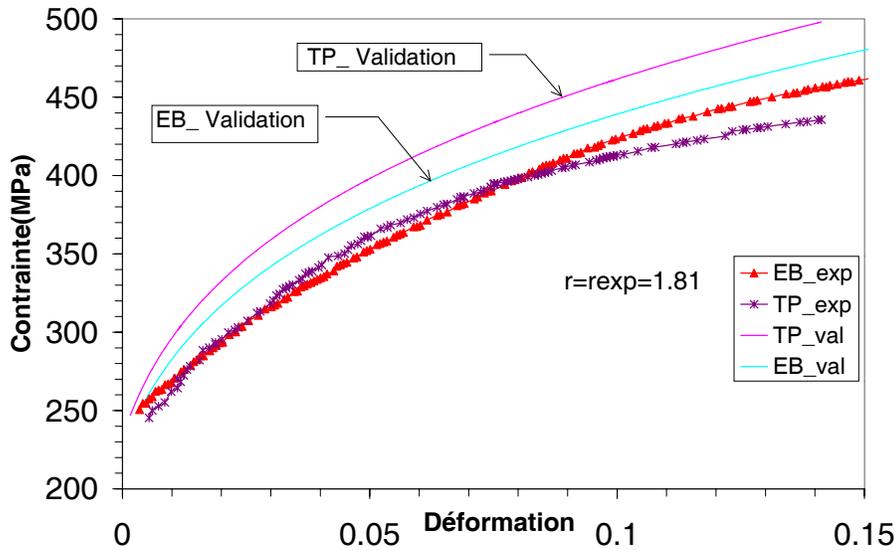


FIG. 4.4: Validation par la traction plane et l'expansion équibiaxiale du modèle  $r = \bar{r}$  pour la Tôle 3.

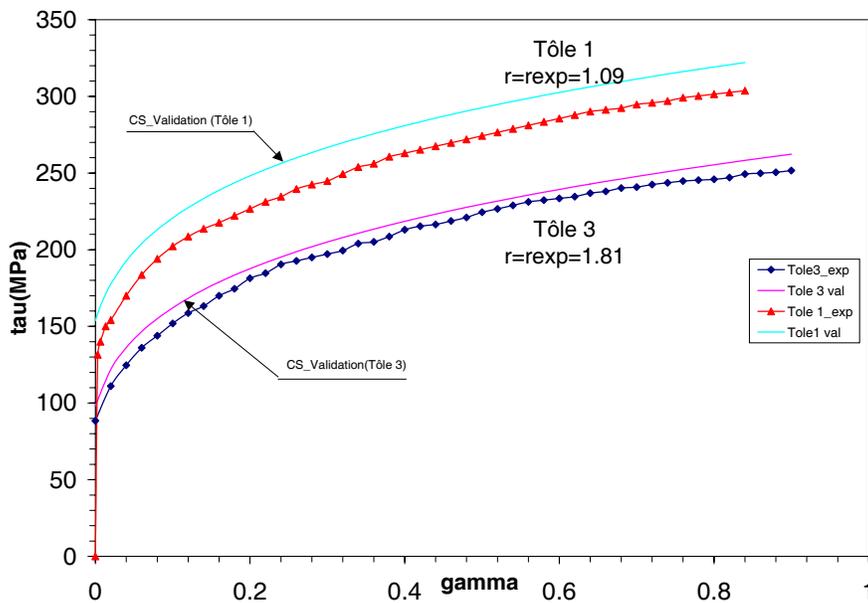


FIG. 4.5: Validation par l'essai de cisaillement simple du modèle  $r = \bar{r}$  pour la Tôle 1 et la Tôle 3.

#### 4.4.2 Modèle isotrope transverse sous l'hypothèse d'homogénéité des essais

Les essais expérimentaux suivants sont considérés comme homogènes. Dans le cas d'un modèle isotrope transverse quadratique et avec plasticité associée, les contraintes et les déformations des essais de traction plane, gonflement hydraulique (expansion équibiaxiale) et le cisaillement simple sont écrits en fonction du seul coefficient d'anisotropie  $r$ , des contraintes et des déformations équivalentes comme suit :

- Essai de traction plane (TP) :

$$\sigma_c = \frac{\sqrt{(1+2r)}}{1+r} \sigma_{TP} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_c = \frac{1+r}{\sqrt{(1+2r)}} \varepsilon_{TP} \quad (4.2)$$

Où  $\sigma_{TP}$  et  $\varepsilon_{TP}$  sont la contrainte et la déformation de la courbe d'érouissage en traction plane.

- Essai du gonflement hydraulique (EB) :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2}{1+r}} \sigma_{EB} \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_c = \sqrt{\frac{1+r}{2}} \varepsilon_{EB} \quad (4.4)$$

Où  $\sigma_{EB}$  et  $\varepsilon_{EB}$  sont la contrainte et la déformation de la courbe d'érouissage en expansion équilibaxiale.

- Essai de Cisaillement simple (CS) :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2(1+2r)}{1+r}} \sigma_{CS} \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_c = \sqrt{\frac{(1+r)}{2(1+2r)}} \varepsilon_{CS} \quad (4.6)$$

Où  $\sigma_{CS} = \tau$  et  $\varepsilon_{CS} = \gamma$  sont la contrainte et la déformation (glissement) de la courbe d'érouissage en cisaillement simple.

### 4.4.3 Identification par les courbes d'érouissage

Cette stratégie d'identification des coefficients d'anisotropie est basée sur le lissage des courbes d'érouissage. Nous déterminons le coefficient de Lankford du modèle isotrope transverse de sorte que la courbe calculée coïncide avec la courbe expérimentale. Cette approche classique considère l'hypothèse homogène des essais. L'essai d'expansion équilibaxiale est utilisé, sous l'hypothèse homogène, par Benchouikh (Benchouikh, 1992) pour approcher au mieux ces deux courbes. L'auteur a pu déterminer le coefficient de Lankford pour chaque tôle, mais ces coefficients ne permettent de décrire ni l'évolution des déformations plastiques ni la description des courbes d'érouissage des autres essais tels que la traction plane et le cisaillement simple.

Nous proposons d'utiliser l'essai de traction plane pour identifier le coefficient d'anisotropie du modèle isotrope transverse pour les tôles considérées. Nous utilisons la méthode d'optimisation du Simplexe en définissant une fonction objectif  $E(r)$  (équation : 4.7) à minimiser ce qui représente l'écart entre la réponse expérimentale et la prédiction du modèle.

$$E(r) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\sigma_i^{cal}(r) - \sigma_i^{exp}}{\sigma_i^{exp}} \right)^2} \quad (4.7)$$

Où  $N$ ,  $\sigma^{exp}$  et  $\sigma^{cal}$  représentent respectivement, le nombre de points expérimentaux, la contrainte expérimentale et la contrainte calculée en traction plane ( $\sigma_{TP}$ ) à partir du modèle (relations 4.1 et 4.2). Nous présentons dans le tableau suivant (4.2) les résultats que nous avons trouvés en identifiant le coefficient d'anisotropie  $r_{TP}$  à partir de la courbe d'érouissage en traction plane. Nous présentons aussi les résultats trouvés par Benchouikh, qui a utilisé l'essai d'expansion équibiaxiale pour identifier le même coefficient d'anisotropie  $r_{EB}$ .

Tôles	$r_{TP}$	$r_{EB}$
Tôle 1	0.94	1.28
Tôle 2	1.41	1.66
Tôle 3	1.16	1.73

TAB. 4.2: Identification du coefficient de d'anisotropie à partir de la traction plane  $r_{TP}$  et comparaison avec les résultats trouvés par Benchouikh (Benchouikh, 1992).

Le coefficients de Lankford que nous avons identifiés à partir de la traction plane pour les trois tôles sont inférieurs aux coefficients trouvées par Benchouikh (Benchouikh, 1992). Ceci peut être attribué à la forte hypothèse d'homogénéité adoptée dans cette identification pour l'essai de traction plane. Les coefficients identifiés décrivent correctement les courbes d'érouissage en traction plane, sauf pour la tôle 1. Cependant, ils ne peuvent pas tenir en compte de l'évolution des déformations plastiques. Remarquons que le coefficient que nous avons identifié pour la tôle 1 à partir de la traction plane est plus proche de la valeur expérimentale que celui identifié à partir de l'expansion équibiaxiale.

#### 4.4.4 Identification par méthode inverse

L'identification du modèle isotrope transverse avec plasticité associée par la méthode d'identification inverse à partir du couple (force - variation d'épaisseur) revient à minimiser l'écart entre cette courbe expérimentale et la réponse calculée par éléments finis. Ces grandeurs représentent la réponse globale de l'éprouvette de traction plane aux sollicitations appliquées. Rappelons ici, qu'aucune approximation ou hypothèse n'est introduite. C'est l'avantage de la technique d'identification inverse. En effet, le coefficient d'anisotropie optimal est obtenu quand la différence entre la courbe expérimentale et la réponse du modèle soit minimale. Nous avons choisi la norme donnée par l'équation (4.8) qui représente l'écart entre les réponses

expérimentales et les réponses simulées par la méthode des éléments finis.

$$E(r) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{F_i^{cal}(r) - F_i^{exp}}{F_i^{exp}} \right)^2} \quad (4.8)$$

Où  $F^{cal}$  et  $F^{exp}$  représentent respectivement, la force généralisée calculée par éléments finis et la force expérimentale de l'essai de traction plane.

Les résultats de l'identification des coefficients d'anisotropie du modèle isotrope transverse avec plasticité associée par l'approche homogène et par la méthode d'identification inverse sont représentés dans le tableau ci-dessous (4.3).

Tôles	$r_{homog}$	$r_{inv}$	$r_{exp}$
Tôle 1	0.94	1.25	1.09
Tôle 2	1.41	1.83	2.15
Tôle 3	1.16	1.45	1.81

TAB. 4.3: Identification des coefficients d'anisotropie du modèle isotrope transverse avec plasticité associée avec l'approche homogène et la méthode inverse.

Les courbes ci-dessous (4.6, 4.7 et 4.8) représentent les réponses de l'essai de traction plane des trois tôles pour les coefficients d'anisotropie identifiés par la méthode inverse. Pour les tôles 2 et 3, nous observons une bonne description des courbes expérimentales de la traction plane par le modèle isotrope transverse moyennant les coefficients identifiés. D'après la figure (4.6), ce modèle ne permet pas de décrire la courbe expérimentale de la tôle 1 en traction plane.

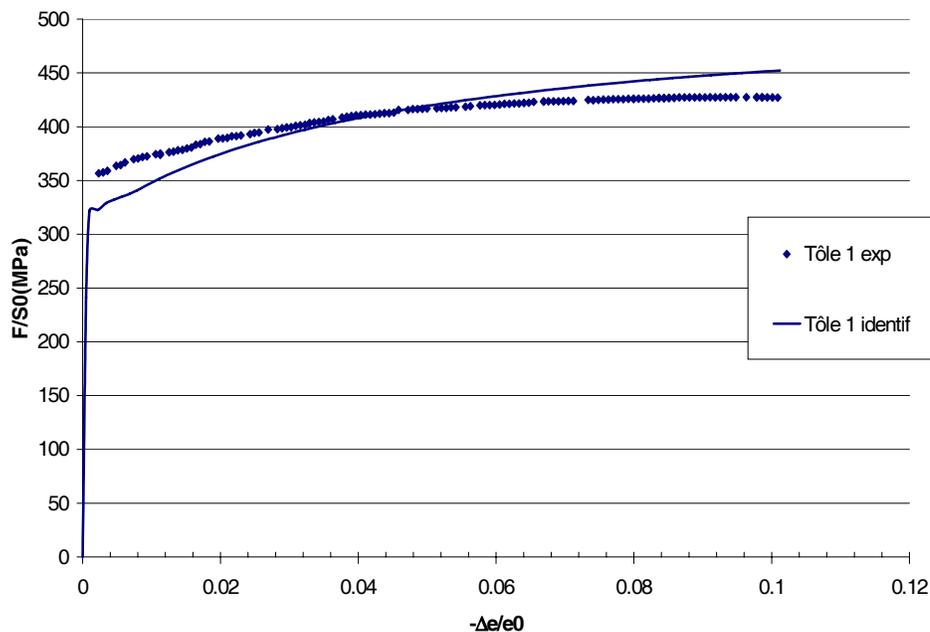


FIG. 4.6: Identification du modèle isotrope transverse associé par la méthode inverse pour la Tôle 1.

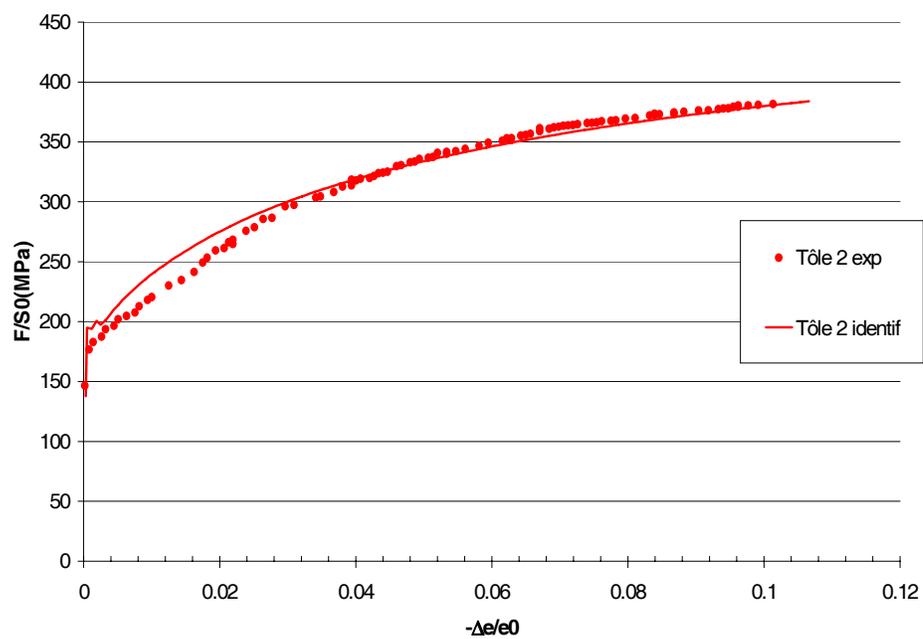


FIG. 4.7: Identification du modèle isotrope transverse associé par la méthode inverse pour la Tôle 2.

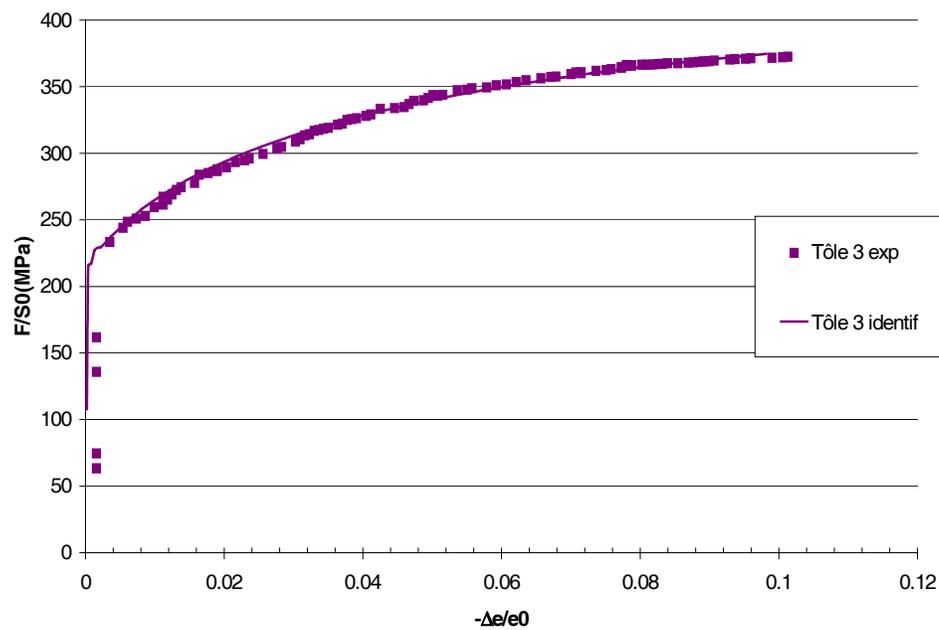


FIG. 4.8: Identification du modèle isotrope transverse associé par la méthode inverse pour la Tôle 3.

#### 4.4.5 Comparaison des deux méthodes d'identification

La comparaison des résultats d'identification des coefficients d'anisotropie du modèle isotrope transverse par la méthode classique homogène et par la méthode inverse est effectuée sur deux niveaux :

Pour le premier niveau, nous comparons les coefficients d'anisotropie identifiés par les deux méthodes par rapport aux coefficients d'anisotropie expérimentaux. D'après les résultats qui figurent sur le tableau (4.3), nous constatons que les coefficients qui sont identifiés par la méthode inverse sont plus proches des coefficients expérimentaux par rapport à ceux identifiés par la méthode classique homogène.

Pour le deuxième niveau, nous comparons les courbes obtenues par la méthode homogène et la méthode inverse d'identification. Pour comparer ces deux courbes, nous transformons la courbe d'érouissage de la traction plane identifiée par l'approche homogène ( $\sigma_{TP}, \varepsilon_{TP}$ ) dans la même échelle que celle de la courbe globale ( $F/S_0, \Delta e/e_0$ ). Dans le cas homogène, la variation de l'épaisseur relative  $\Delta e/e_0$  est égale à l'allongement relatif  $\Delta l/l_0$  du fait que  $\varepsilon_{22} = 0$  dans la traction plane homogène.

Les figures (4.9), (4.10), et (4.11) représentent pour les trois tôles, la différence entre les courbes qui sont identifiées par l'approche homogène et inverse. Nous remarquons aussi que les courbes qui correspondent à l'identification inverse sont plus proches des courbes expérimentales. La différence entre les réponses identifiées par l'approche homogène et inverse peut paraître non importante. Néanmoins l'impact de la méthode d'identification inverse sur les coefficients d'anisotropie qui sont identifiés par cette méthode est significatif. Malgré l'incapacité du modèle isotrope transverse de prévoir les coefficients d'anisotropie expérimentaux, les coefficients identifiés par l'approche inverse sont meilleurs par rapport à ceux identifiés par l'approche homogène, relativement aux données expérimentales.

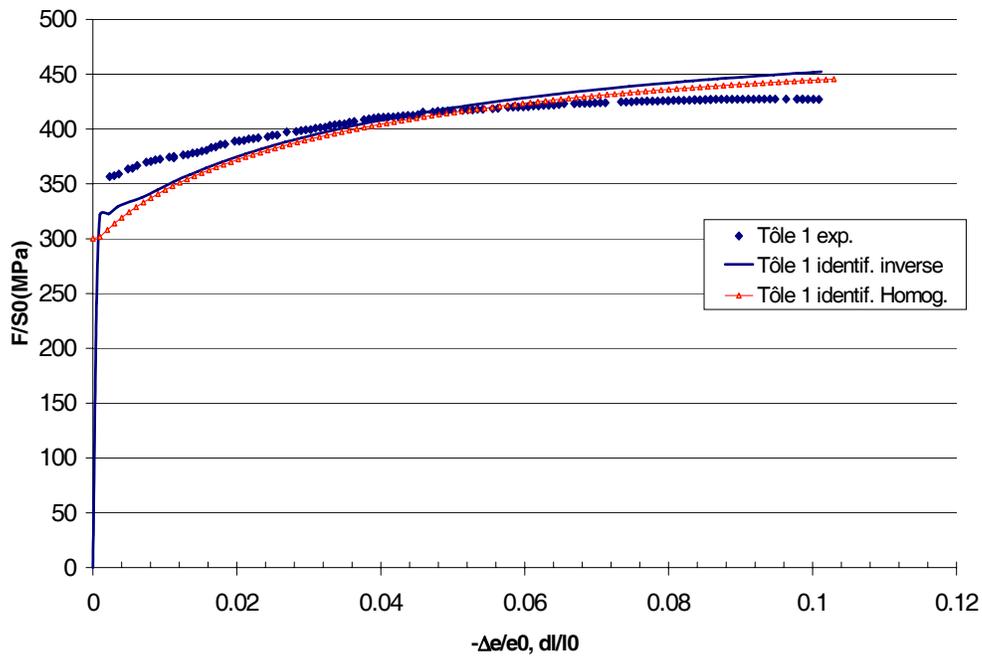


FIG. 4.9: Comparaison de l'identification homogène et inverse pour la Tôle 1.

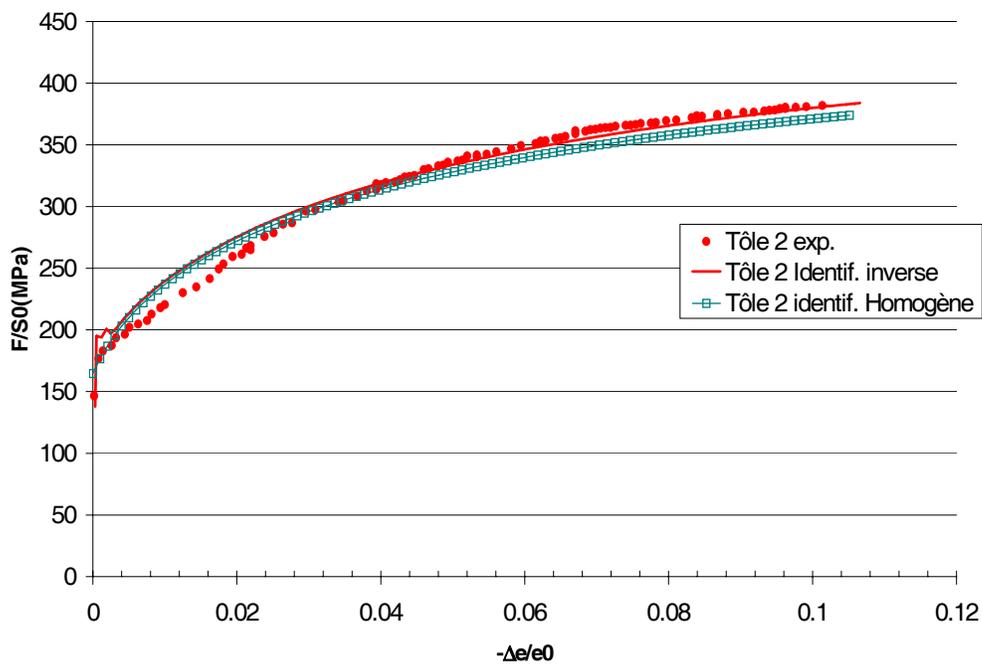


FIG. 4.10: Comparaison de l'identification homogène et inverse pour la Tôle 2.

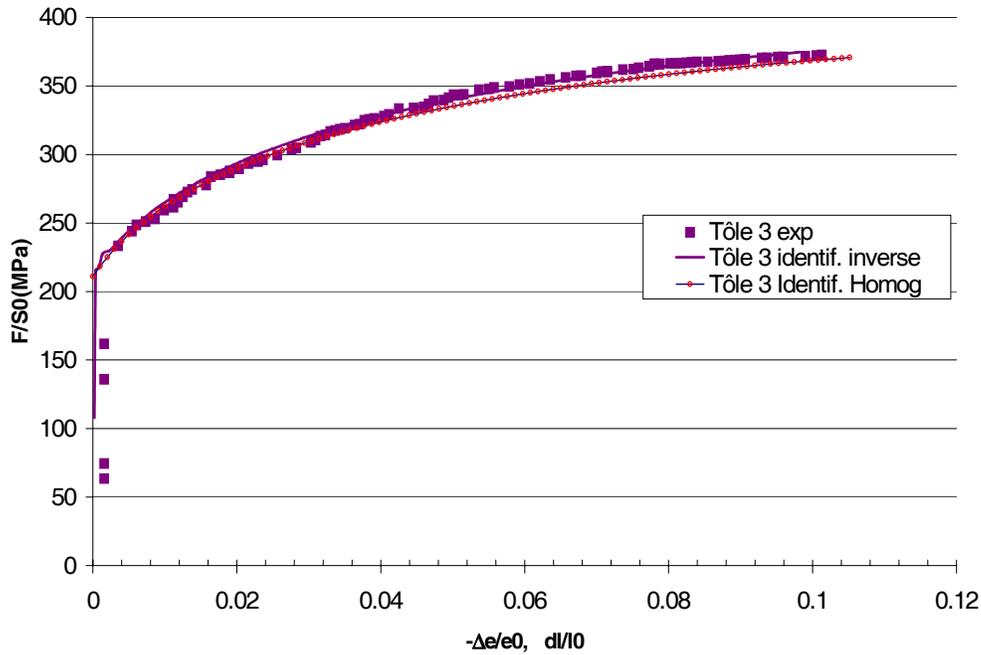


FIG. 4.11: Comparaison de l'identification homogène et inverse pour la Tôle 3.

#### 4.4.6 Validation du modèle

La validation du modèle isotrope transverse associé est basée sur les coefficients d'anisotropie qui sont identifiés par la méthode inverse à partir de l'essai de traction plane. La comparaison des coefficients identifiés avec les coefficients expérimentaux représente une première validation concernant la description de ce modèle pour l'évolution des déformations plastiques. Une deuxième validation sera présentée dans ce paragraphe, concernant la capacité de prévision de ce modèle identifié pour décrire le comportement des autres essais, comme pour l'expansion équibiaxiale ou le cisaillement simple. En effet, nous avons substitué les coefficients qui sont identifiés à partir de l'essai de traction plane par la méthode inverse dans les équations de comportement des essais d'expansion et de cisaillement.

Les figures (4.12), (4.13) et (4.14) représentent les résultats de validation pour les coefficients d'anisotropie par l'essai d'expansion équibiaxiale pour les tôles 1, 2 et 3. Nous constatons pour la tôle 1 que le coefficient d'anisotropie identifié décrit bien la réponse en expansion équibiaxiale. Pour la tôle 2, le coefficient que nous avons identifié, avec une bonne approximation, peut être représentatif pour la description du comportement de cette tôle en expansion. Le trajet de chargement en expansion pour la tôle 3 est au-dessus de la prévision de ce modèle pour le coefficient d'anisotropie identifié à partir de l'essai de traction plane.

Dans la figure (4.15), nous représentons la validation du modèle isotrope transverse associé, identifié à partir de l'essai de traction plane par l'essai de cisaillement pour les tôles 1 et 3. Nous rappelons que nous ne disposons des essais de cisaillement que pour ces dernières tôles. Nous remarquons que les coefficients que nous avons identifié, ne rendent pas compte du comportement de ces deux tôles en cisaillement.

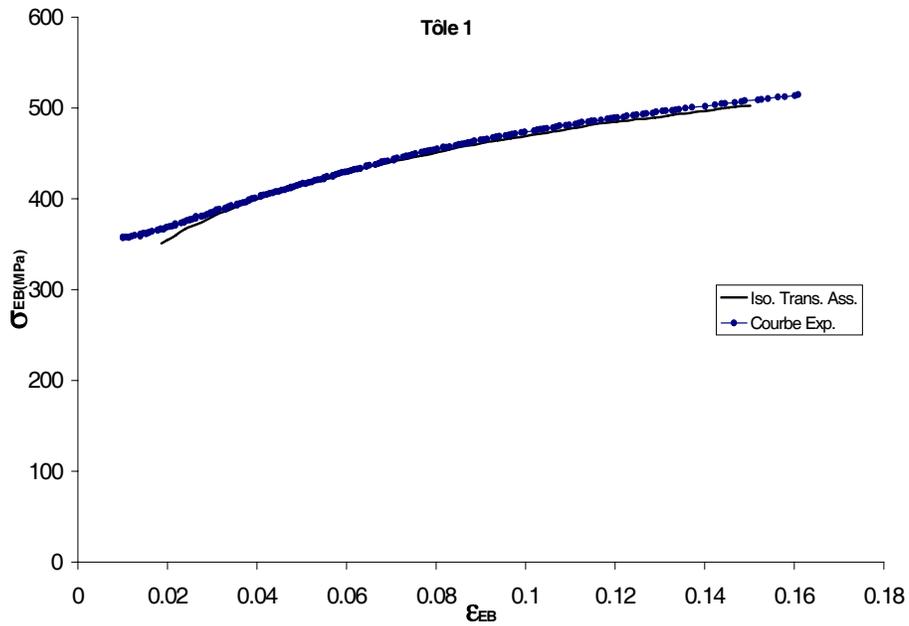


FIG. 4.12: Validation du modèle par l'essai d'expansion pour la Tôle 1.

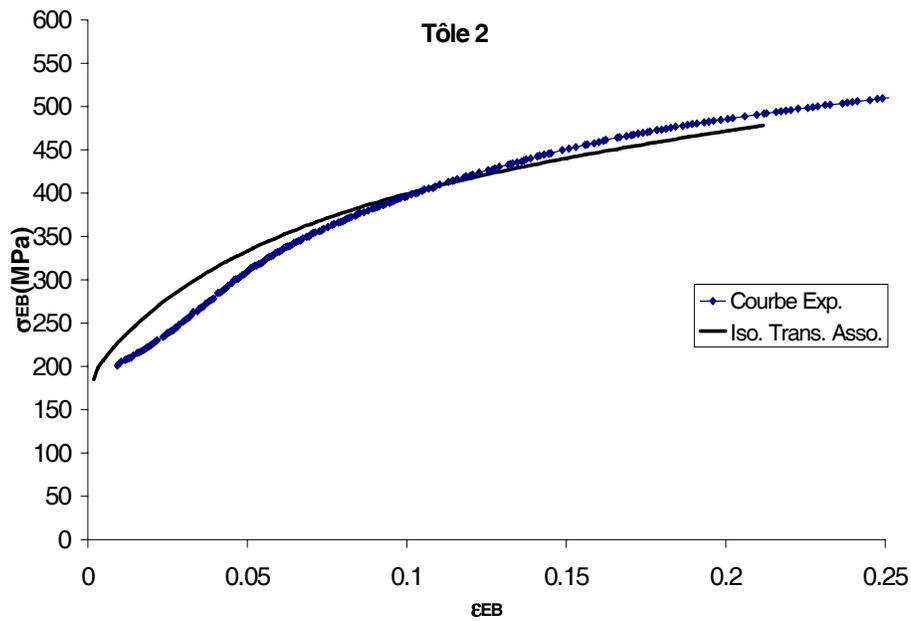


FIG. 4.13: Validation du modèle par l'essai d'expansion pour la Tôle 2.

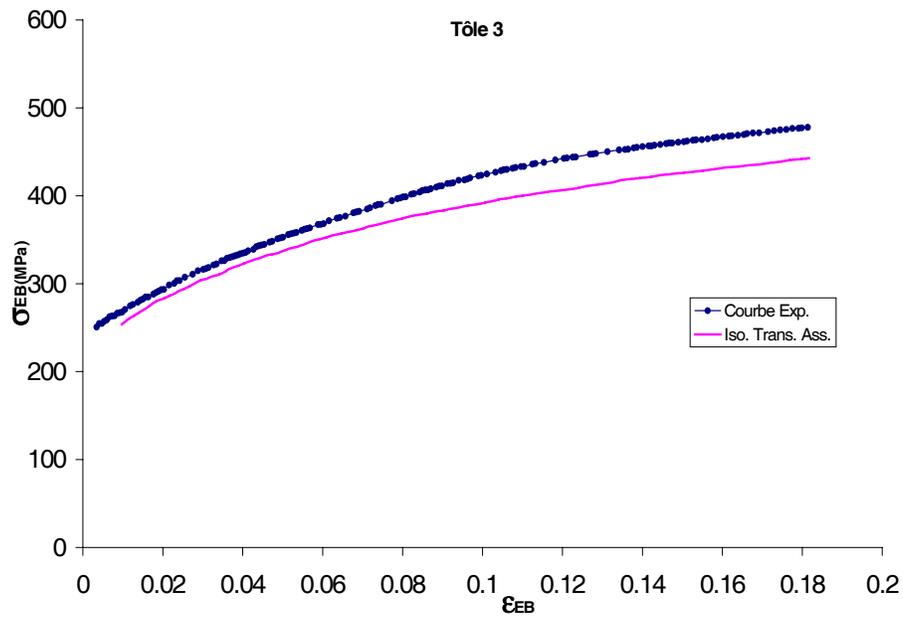


FIG. 4.14: Validation du modèle par l'essai d'expansion pour la Tôle 3.

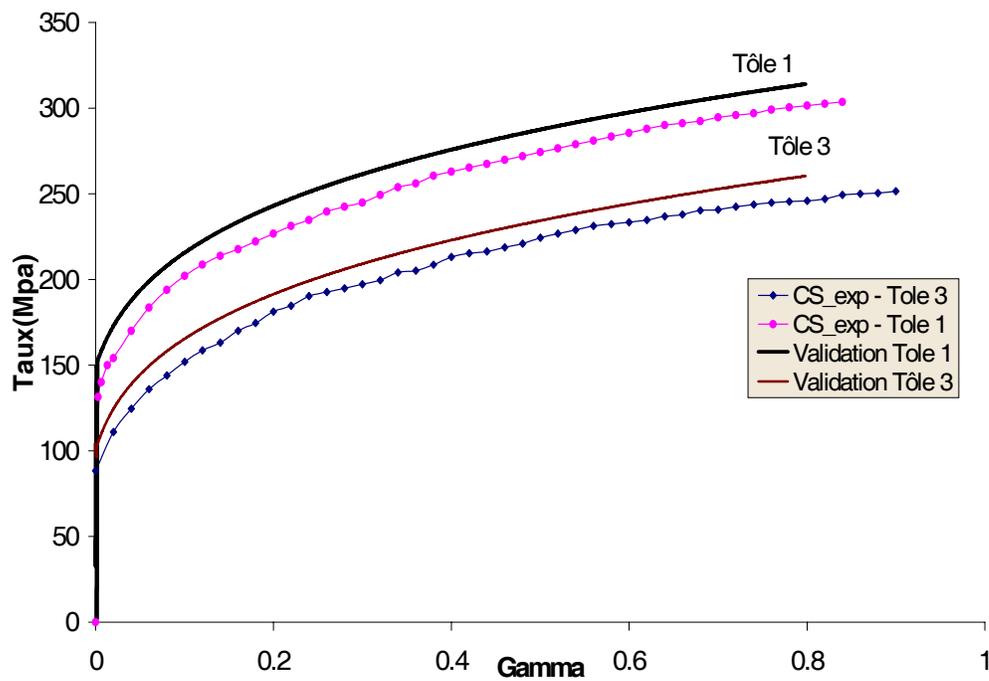


FIG. 4.15: Validation du modèle par l'essai de cisaillement pour les Tôles 1 et 3.

## 4.5 Identification du modèle isotrope transverse non associé

L'identification du modèle isotrope transverse avec plasticité non associée et dans l'état de contrainte plane nécessite :

- Une fonction d'écouissage  $\sigma_s(\alpha)$ .
- Un coefficient d'anisotropie du critère  $r$ .
- Un coefficient d'anisotropie du potentiel plastique  $r'$ .

Le coefficient d'anisotropie  $r$  est différent du coefficient  $r'$ . Dans le cas de la plasticité non associée, nous choisissons une fonction potentiel plastique  $\sigma_p(\sigma)$  différente du critère de plasticité  $\sigma_c(\sigma)$ . Ceci n'empêche pas de prendre une forme quadratique de la fonction potentiel plastique similaire à celle du critère.

$$\sigma_p(\sigma)^2 = \frac{r'}{1+r'}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \frac{1}{1+r'}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2) + 2\frac{1+2r'}{1+r'}\sigma_{12}^2 \quad (4.9)$$

### 4.5.1 Identification homogène du modèle

Le modèle isotrope transverse avec plasticité non associée et sous l'hypothèse de l'homogénéité de l'essai de traction plane, la contrainte équivalente et la déformation équivalente sont données par les relations suivantes :

$$\sigma_c = \frac{\sqrt{(1+2r)}}{1+r}\sigma_{TP} \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_c = \frac{1+r'}{\sqrt{(1+2r')}}\varepsilon_{TP} \quad (4.11)$$

Le coefficient  $r'$  représente l'anisotropie du potentiel plastique. Nous prenons le coefficient  $r' = \bar{r}_{exp}$  et nous identifions le coefficient d'anisotropie  $r$  du critère par un lissage de la réponse du modèle avec la courbe expérimentale. Dans le tableau (4.4), nous présentons les résultats de cette identification homogène du modèle isotrope transverse non associé.

Sheets	$r_{homog}$	$r'$
Tôle 1	0.93	1.09
Tôle 2	1.25	2.15
Tôle 3	1.05	1.81

TAB. 4.4: Les coefficients identifiés du modèle isotrope transverse avec plasticité non associée par la méthode homogène.

### 4.5.2 Identification inverse du modèle

Il s'agit d'identifier le modèle isotrope transverse avec plasticité non associée par la méthode inverse. Cette identification nécessite la donnée :

- d'une fonction d'écouissage  $\sigma_s(\alpha)$

- d'un coefficient d'anisotropie du critère  $r$
- d'un coefficient d'anisotropie du potentiel plastique  $r'$

La fonction potentiel plastique est une forme quadratique donnée par la relation (4.9). Nous choisissons le coefficient d'anisotropie du potentiel  $r'$  de sorte qu'il soit égal au coefficient d'anisotropie expérimental moyen  $\bar{r}_{exp}$ . Le coefficient d'anisotropie du critère  $r$  est identifié en minimisant, l'écart entre la courbe expérimentale de l'essai de traction plane ( $F/S_0, \Delta e/e_0$ ) et la réponse globale du même essai, calculée par la méthode des éléments finis.

Les figures (4.16), (4.17) et (4.18) représentent les courbes des réponses expérimentales de l'essai de traction plane pour les tôles 1, 2 et 3, ainsi que les réponses optimales lorsque la différence entre ces deux réponses est minimale.

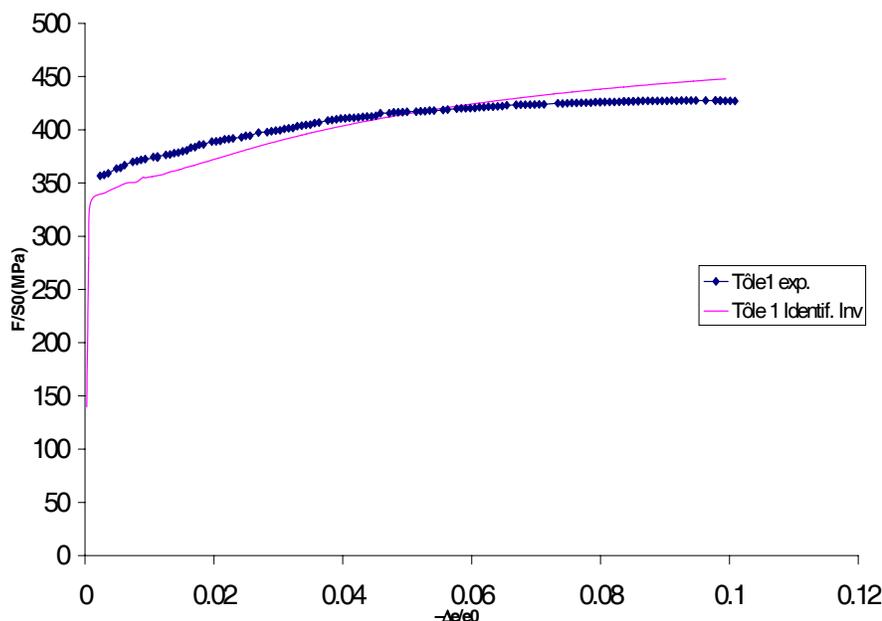


FIG. 4.16: Identification du modèle isotrope transverse non associé par la méthode inverse pour la Tôle 1.

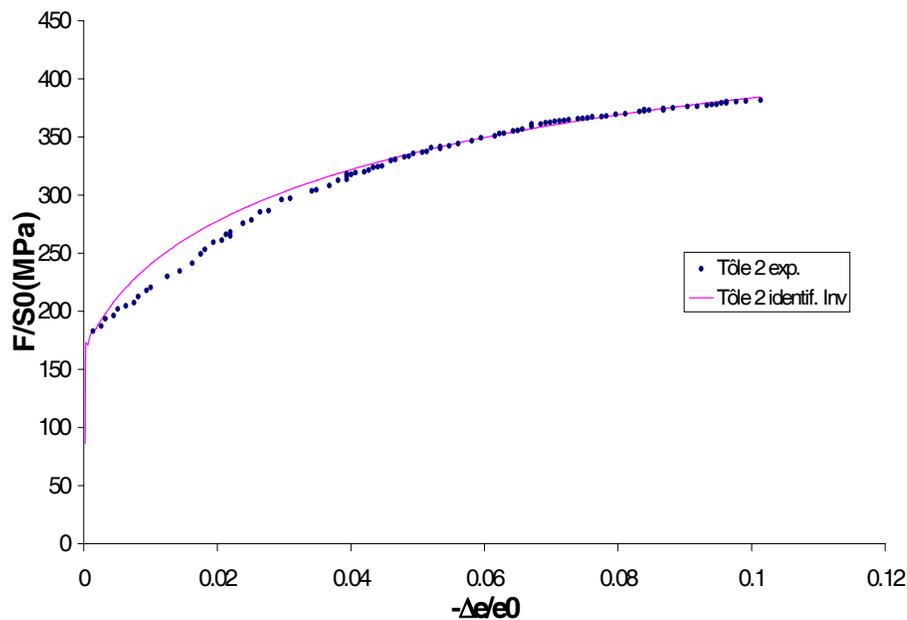


FIG. 4.17: Identification du modèle isotrope transverse non associé par la méthode inverse pour la Tôle 2.

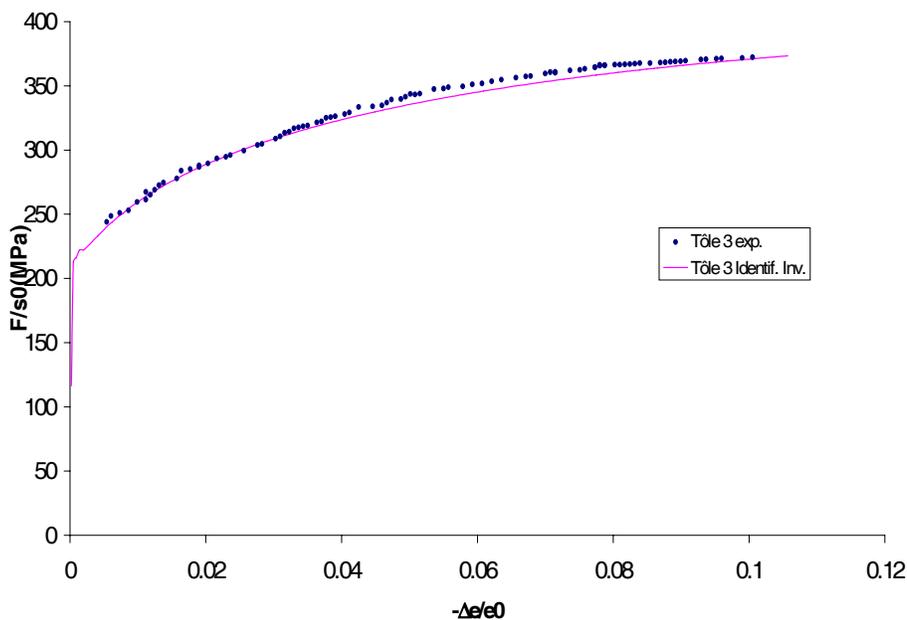


FIG. 4.18: Identification du modèle isotrope transverse non associé par la méthode inverse pour la Tôle 3.

Ce modèle isotrope transverse non associé décrit bien les courbes expérimentales de l'essai de traction plane pour les tôles 2 et 3. Il reste encore moins représentatif pour la description du comportement de la tôle 1 en traction plane. Dans le paragraphe suivant, nous présentons la

capacité de ce modèle pour la prévision des réponses d'autres essais tels que l'essai d'expansion équibiaxiale et l'essai de cisaillement simple.

Dans le tableau (4.5), nous présentons les coefficients d'anisotropie du modèle isotrope transverse non associé identifié par l'approche inverse.

Tôles	$r_{inhomog}$	$r'$
Tôle 1	1.21	1.09
Tôle 2	1.71	2.15
Tôle 3	1.19	1.81

TAB. 4.5: *Les coefficients identifiés du modèle isotrope transverse avec plasticité non associée par la méthode inverse.*

### 4.5.3 Validation du modèle inverse

Dans cette section, nous allons présenter la validation du modèle isotrope transverse non associé. Cette validation permettra de voir si ce modèle a la possibilité de prévoir la description du comportement de ces tôles pour d'autres trajets de chargements. Nous utilisons les coefficients d'anisotropie de ce modèle que nous avons identifié par la méthode inverse, pour enfin, les substituer dans les équations de comportement de l'essai d'expansion et de cisaillement.

Les figures (4.19), (4.20) et (4.21) représentent les tests de validation du modèle isotrope transverse non associé par l'essai d'expansion pour les trois tôles 1, 2 et 3. Dans les figures (4.22) et (4.23), nous présentons les tests de validation par les essais de cisaillement simple pour les tôles 1 et 3.

Nous constatons que, de par sa construction, ce modèle tient compte de l'anisotropie des déformations plastiques, mais il est incapable de prédire les courbes d'écroutissage des essais d'expansion et de cisaillement simple. La validation de ce modèle isotrope transverse non associé par l'essai d'expansion sous-estime les réponses expérimentales. Toutefois, la validation de ce modèle par l'essai de cisaillement surestime les courbes expérimentales de cet essai.

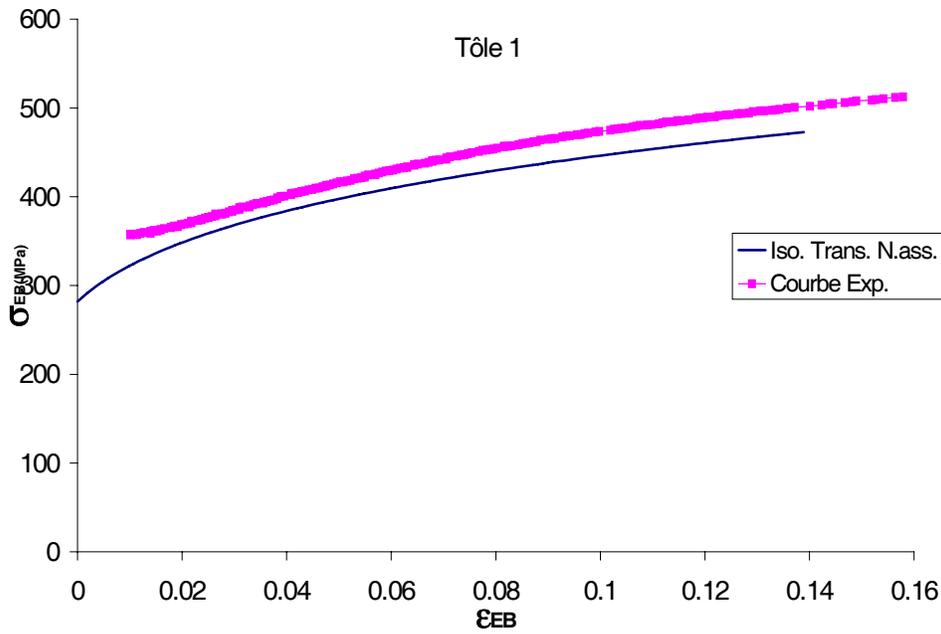


FIG. 4.19: Validation du modèle isotrope transverse non associé par l'essai d'expansion équilibaxiale pour la Tôle 1.

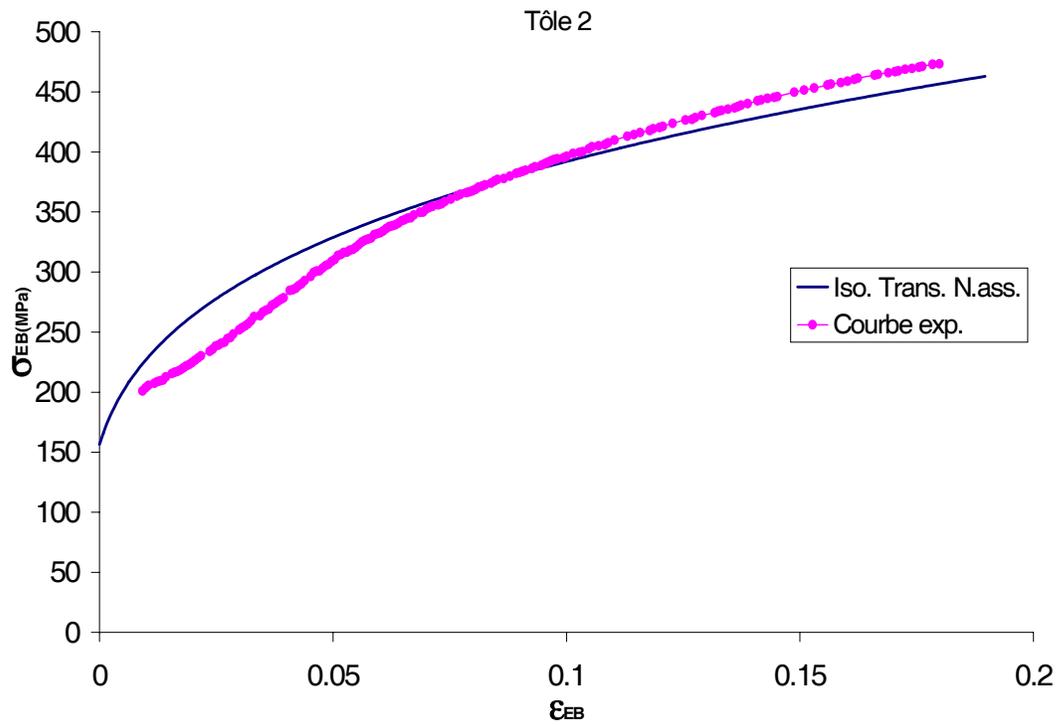


FIG. 4.20: Validation du modèle isotrope transverse non associé par l'essai d'expansion équilibaxiale pour la Tôle 2.

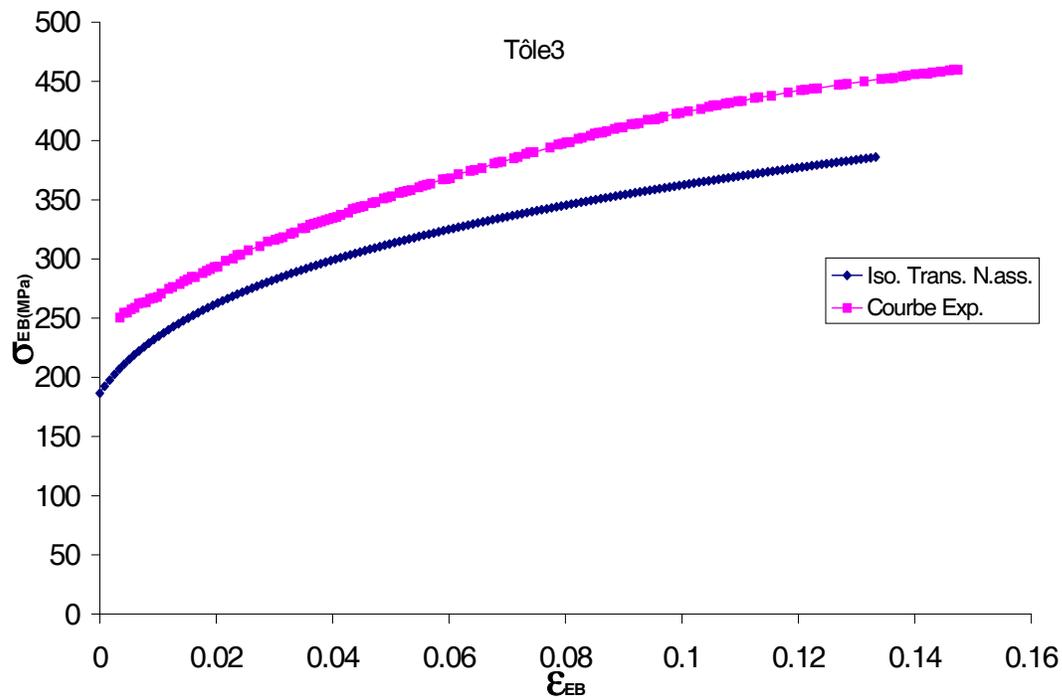


FIG. 4.21: Validation du modèle isotrope transverse non associé par l'essai d'expansion équibiaxiale pour la Tôle 3.

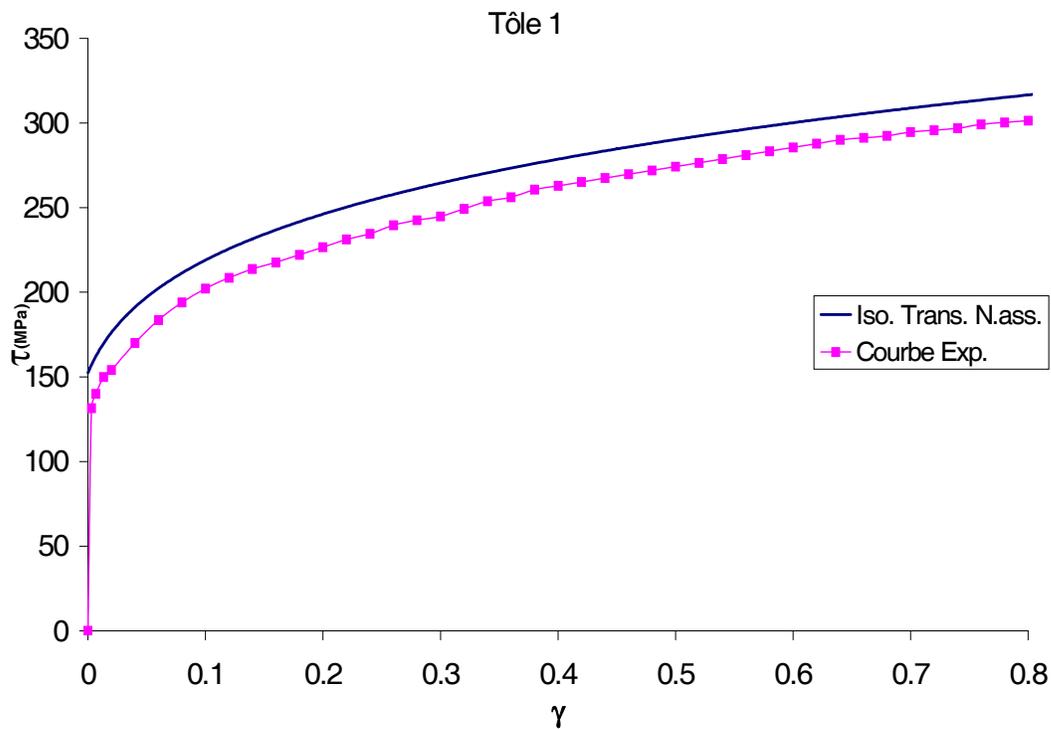


FIG. 4.22: Validation du modèle isotrope transverse non associé par l'essai de cisaillement pour la Tôle 1.

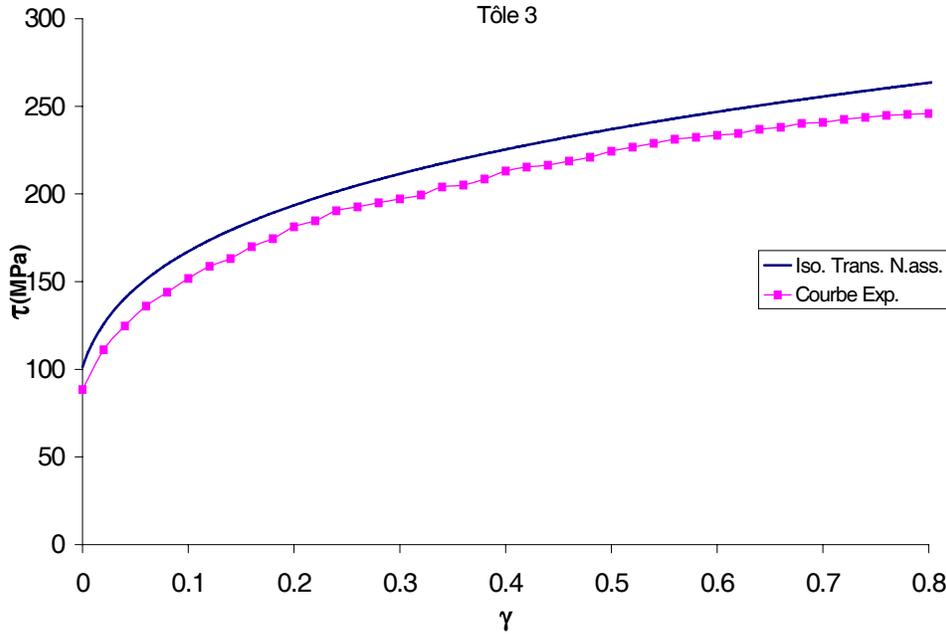


FIG. 4.23: Validation du modèle isotrope transverse non associé par l'essai de cisaillement pour la Tôle 3.

## 4.6 Identification du modèle quadratique de Hill associé

Le modèle orthotrope est basé sur le critère orthotrope de Hill(1948). C'est un modèle plus riche que le modèle isotrope transverse. L'identification de ce modèle en contraintes planes et avec l'hypothèse de plasticité associée nécessite celle :

- d'une courbe d'érouissage  $\sigma_s(\alpha)$
- des coefficients d'anisotropie du modèle ( $F, G, H$ , et  $N$  du critère)

Le critère (1.54) est défini à un coefficient multiplicatif près. Nous choisissons la contrainte équivalente de sorte qu'elle coïncide avec la contrainte en traction simple selon la direction 1 (direction de laminage), ce qui est équivalent à imposer la relation  $G + H = 1$ . En effet, seulement trois coefficients d'anisotropie sont à identifier  $a_1, a_2$  et  $a_3$ . Ces coefficients sont exprimés en fonction des coefficients classiques de Hill comme suit :

$$a_1 = \frac{F + G + 4H - 2N}{4(G + H)} \quad (4.12a)$$

$$a_2 = \frac{F - G}{2(G + H)} \quad (4.12b)$$

$$a_3 = \frac{G - H}{2(G + H)} \quad (4.12c)$$

Dans un essai de traction effectué dans la direction  $\psi$  par rapport à la direction de laminage, la contrainte et la déformation sont données par les relations suivantes (Dogui, 1989) :

$$\sigma_\psi = \frac{\sigma_s}{a(\psi)} \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_\psi = \alpha \cdot a(\psi) \quad (4.14)$$

Où

$$a(\psi) = \sqrt{1 + 2a_2 \sin^2(\psi) - a_1 \sin^2(2\psi)} \quad (4.15)$$

L'identification de ce modèle nécessite la détermination des coefficients  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  et la donnée d'une courbe d'érouissage  $\sigma_s(\alpha)$ . Toutes les courbes d'érouissage hors-axes ne peuvent déterminer que les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  (Eq. 4.15). Pour déterminer le troisième coefficient du modèle  $a_3$ , nous avons besoin d'autres informations supplémentaires. Ce coefficient peut être déterminé soit à partir des coefficients d'anisotropie de Lankford  $r_\psi$  (équation 2.6), soit à partir d'un autre essai. Nous choisissons la courbe d'érouissage de l'essai de traction plane pour identifier le coefficient  $a_3$ .

#### 4.6.1 Identification par l'hypothèse d'homogénéité

La contrainte et la déformation équivalente de Hill sont exprimées dans un essai de traction plane homogène en fonction de  $a_2$  et de  $a_3$  par les relations suivantes :

$$\sigma_c = \sqrt{1 - \frac{(1 - 2a_3)^2}{4(1 + 2a_2)}} \sigma_{TP} \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(1 - 2a_3)^2}{4(1 + 2a_2)}}} \varepsilon_{TP} \quad (4.17)$$

Les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  sont déterminés à partir de toutes les courbes d'érouissage dans les différentes directions par rapport à la direction de laminage en minimisant l'écart, défini par la relation (4.18) entre les courbes d'érouissage expérimentales et celles calculées.

$$E(a_1, a_2) = \sum_\psi \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i^N \left( \frac{\sigma_{i\psi}^{cal}(a_1, a_2) - \sigma_{i\psi}^{exp}}{\sigma_{i\psi}^{exp}} \right)^2} \quad (4.18)$$

La courbe d'érouissage suivant une direction  $\psi$  par rapport à la direction de laminage est donnée par la relation suivante :

$$\sigma_\psi = \frac{1}{a(\psi)} K \left( \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_\psi}{a(\psi)} \right)^n \quad (4.19)$$

Pour identifier le coefficient  $a_3$ , nous ajustons la courbe d'érouissage expérimentale de la traction plane avec la courbe d'érouissage calculée en utilisant les expressions (4.16) et (4.17).

Nous présentons dans le tableau suivant (4.6), les résultats d'identification de ce modèle et également les coefficients d'anisotropie de Lankford  $r_\psi$  que nous calculons à partir des coefficients  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ , par la relation (4.20) :

$$r(\psi) = \frac{1 - 2a_3 - 2a_1 \sin^2(2\psi)}{1 + 2a_3 + 4a_2 \sin^2(\psi)} \quad (4.20)$$

Tôles	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$r_{00}$	$r_{15}$	$r_{30}$	$r_{45}$	$r_{60}$	$r_{75}$	$r_{90}$
Tôle 1	0.0170	-0.0096	0.0174	0.95	0.94	0.93	0.92	0.93	0.94	0.95
Tôle 2	-0.0023	0.0282	-0.1050	1.53	1.52	1.48	1.44	1.39	1.35	1.34
Tôle 3	0.0539	0.0156	-0.0474	1.21	1.17	1.10	1.05	1.07	1.11	1.13

TAB. 4.6: Identification des coefficients  $a_{i,i=1,2,3}$  par les courbes d'érouissage et le calcul des coefficients de Lankford  $r_\psi, \psi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ .

#### 4.6.2 Identification inverse du modèle

L'identification inverse du modèle quadratique orthotrope de Hill nécessite une courbe d'érouissage  $\sigma_s(\alpha)$  et la détermination des trois paramètres  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ . Les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  sont identifiés à partir des courbes d'érouissage hors-axes. Afin d'identifier le paramètre  $a_3$ , nous appliquons la procédure d'identification inverse pour minimiser l'écart défini par la relation (4.21), entre la courbe qui représente la force globale calculée ( $F^{cal}(a_3)$ ) en traction plane inhomogène et celle expérimentalement mesurée ( $F^{exp}$ ).

$$E(a_3) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{F_i^{cal}(a_3) - F_i^{exp}}{F_i^{exp}} \right)^2} \quad (4.21)$$

Nous représentons dans la figure (4.24), la fonction objectif  $E(a_3)$  qui diminue au cours des itérations. Au début des itérations, nous remarquons une diminution progressive de la fonction objectif marquée par une réduction de la taille du Simplexe, par la suite, des oscillations qui montrent que la méthode du Simplexe explore au voisinage du minimum pour le cerner. Enfin, le Simplexe devient assez compact vérifiant ainsi la condition d'arrêt pour la convergence.

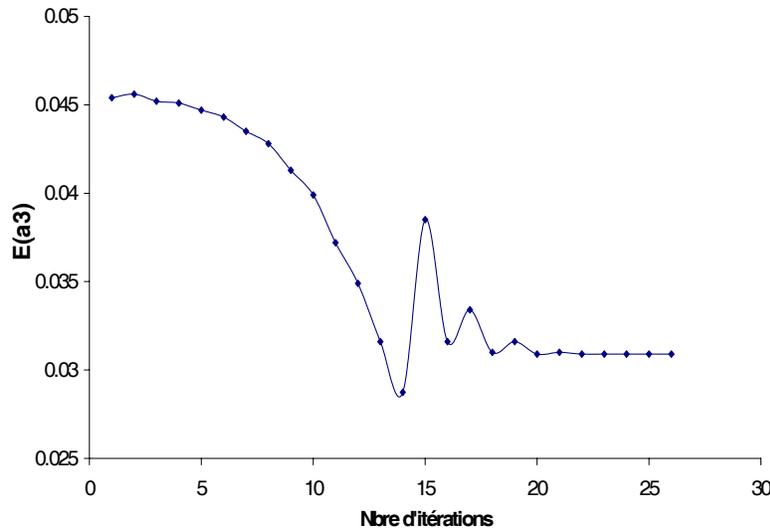


FIG. 4.24: Evolution de la fonction objectif  $E(a_3)$  au cours des itérations (Tôle 1).

Dans la figure (4.25), nous représentons l'évolution de la fonction objectif  $E(a_3)$  en fonction du paramètre à identifier. Nous observons qu'il s'agit d'un minimum global vers lequel la fonction objectif converge.

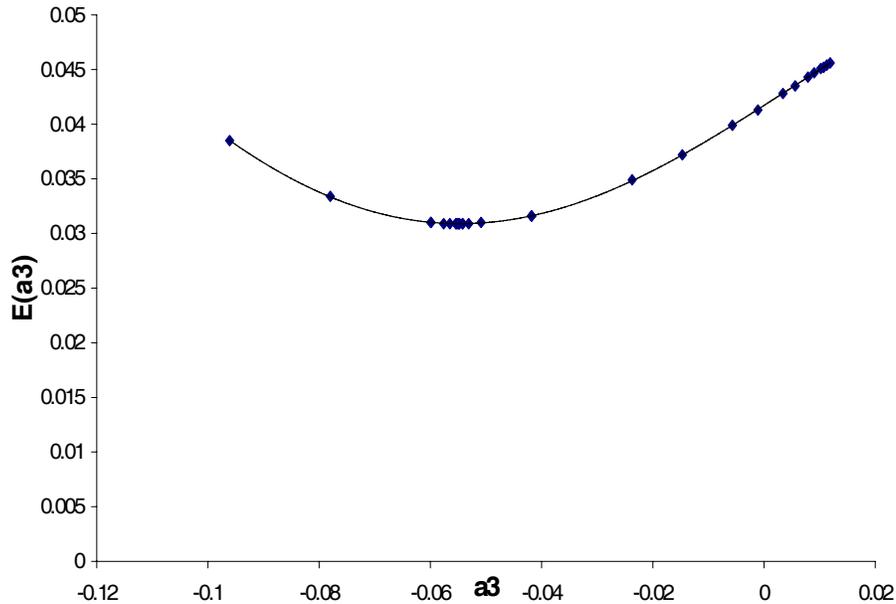


FIG. 4.25: Evolution de la fonction objectif  $E(a_3)$  au cours des itérations (Tôle 1).

A partir des coefficients identifiés  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ , nous calculons les coefficients d'anisotropie dans n'importe quelle direction  $\psi$  par rapport à la direction de laminage. En effet, nous déterminons ces coefficients par pas de  $15^\circ$ . Ces résultats sont représentés dans le tableau (4.7).

Tôles	Coef. d'anisotropie (Méthode inverse)						
	$r_0$	$r_{15}$	$r_{30}$	$r_{45}$	$r_{60}$	$r_{75}$	$r_{90}$
Tôle 1	1.20	1.19	1.18	1.17	1.18	1.20	1.21
Tôle 2	1.96	1.94	1.90	1.83	1.76	1.71	1.69
Tôle 3	1.48	1.44	1.36	1.31	1.32	1.37	1.39

TAB. 4.7: Identification des coefficients d'anisotropie  $r_\psi$ .

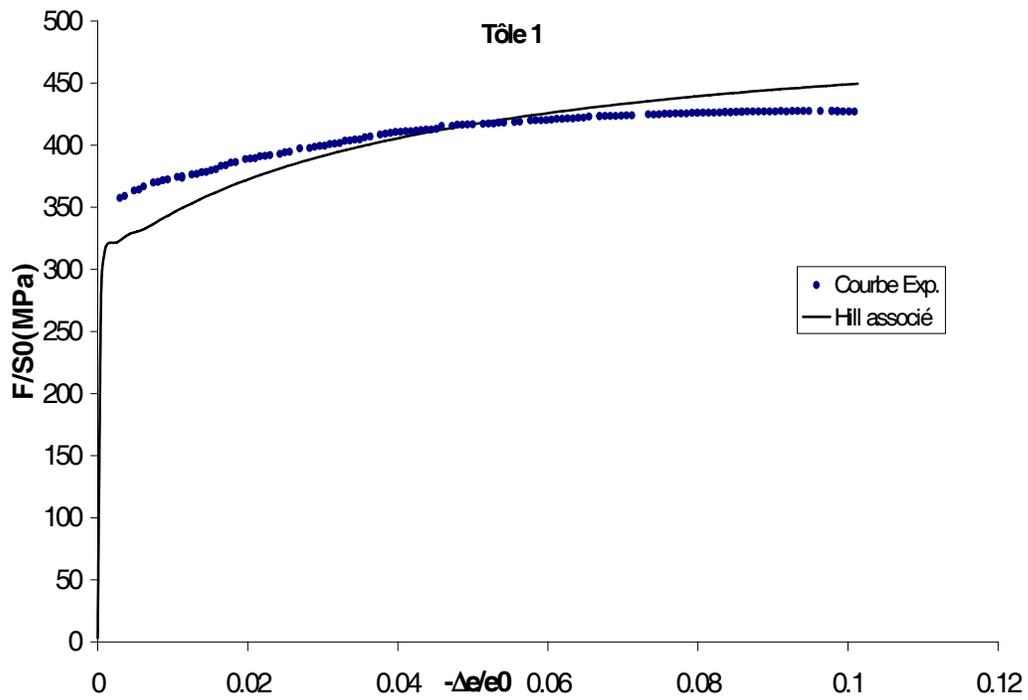


FIG. 4.26: Identification du modèle de Hill associé par méthode inverse (Tôle 1).

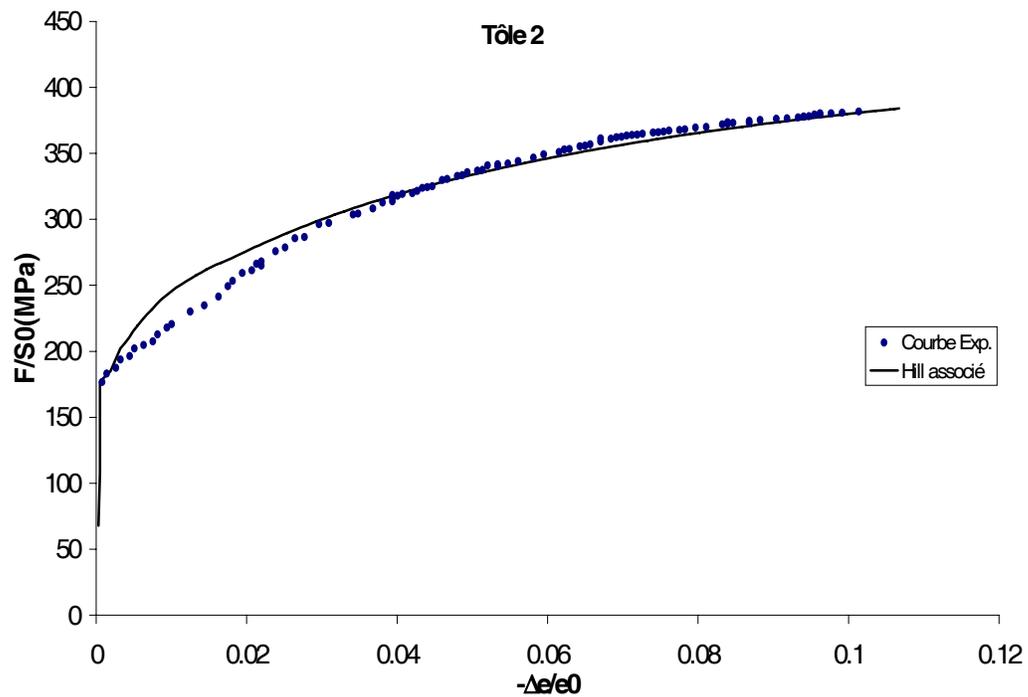


FIG. 4.27: Identification du modèle de Hill associé par méthode inverse (Tôle 2).

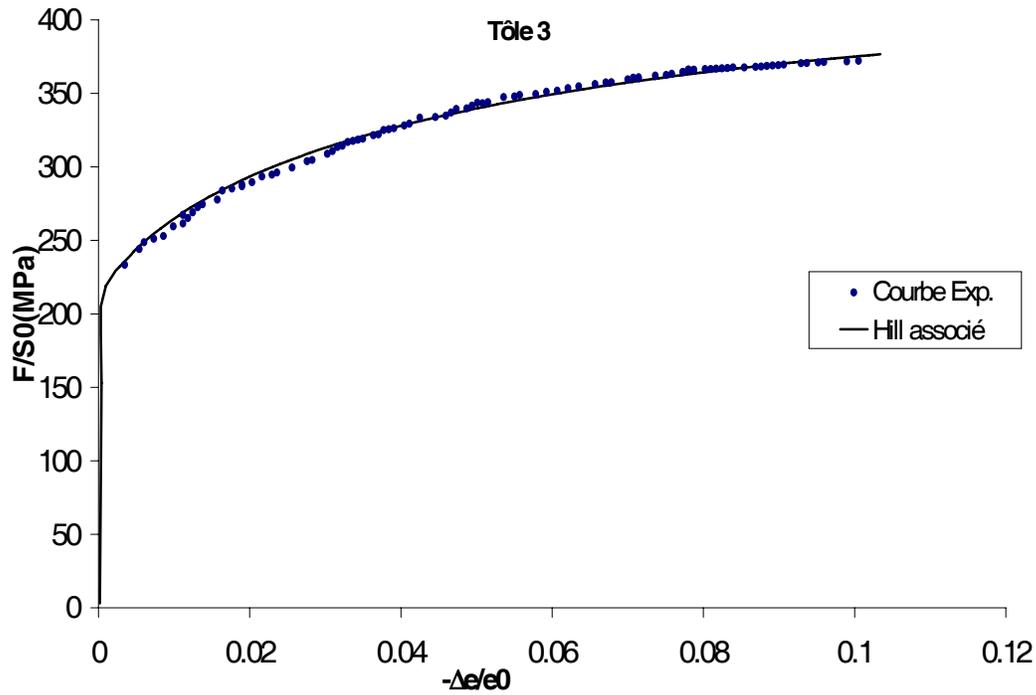


FIG. 4.28: Identification du modèle de Hill associé par méthode inverse (Tôle 3).

### 4.6.3 Comparaison des deux méthodes d'identification

Nous avons représenté l'évolution des coefficients d'anisotropie identifiés par la méthode inverse, l'approche homogène et les coefficients expérimentaux, dans les figures (4.29), (4.30) et (4.31). Ces coefficients d'anisotropie sont donnés selon les angles  $\psi$  par rapport à la direction du laminage. Nous constatons d'après ces figures que les coefficients identifiés par la méthode inverse sont plus proches des coefficients expérimentaux.

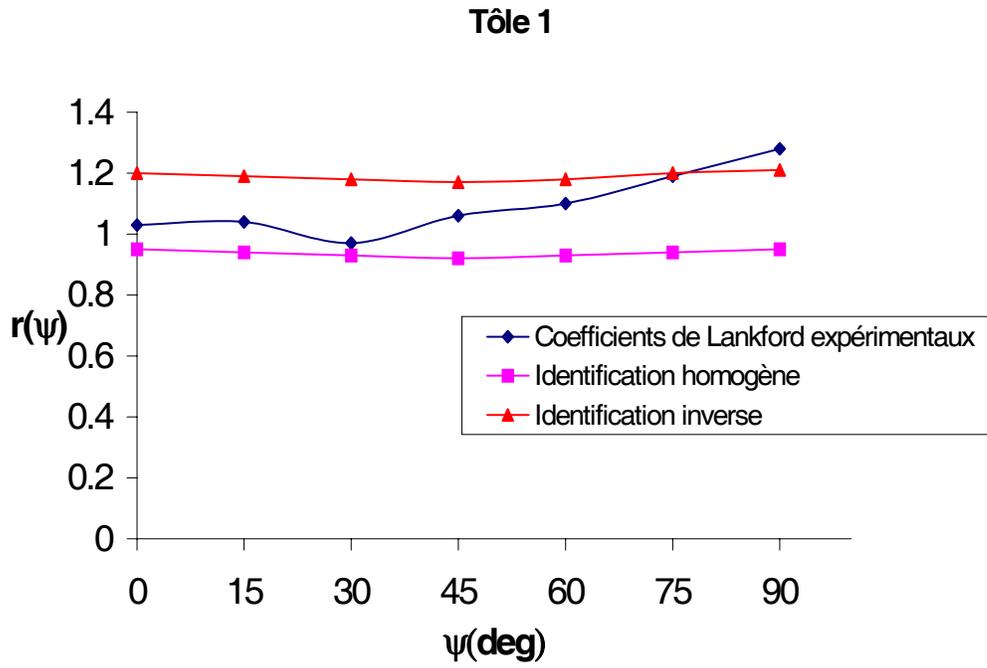


FIG. 4.29: Evolution des coefficients de Lankford  $r_\psi$  identifiés par l'approche homogène et inverse (Tôle 1).

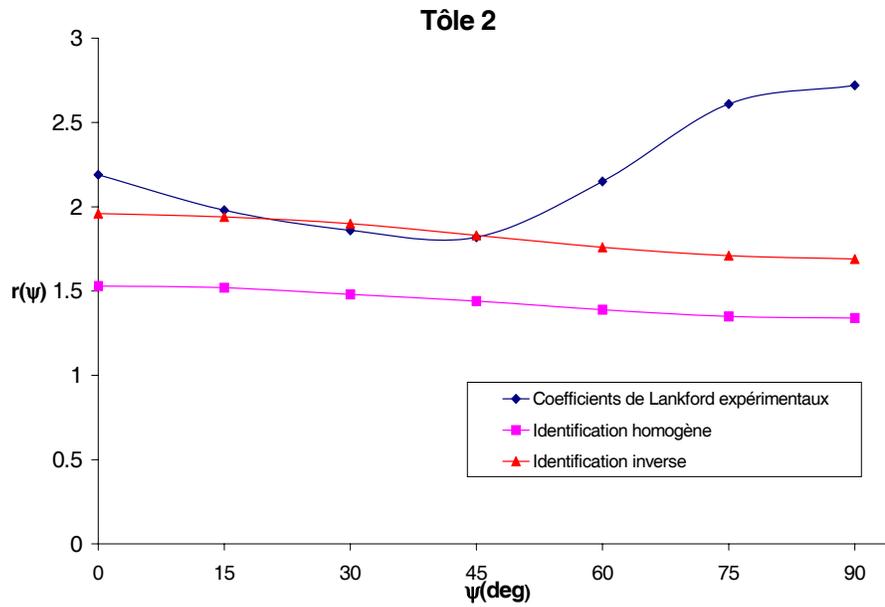


FIG. 4.30: Evolution des coefficients de Lankford  $r_\psi$  identifiés par l'approche homogène et inverse (Tôle 2).

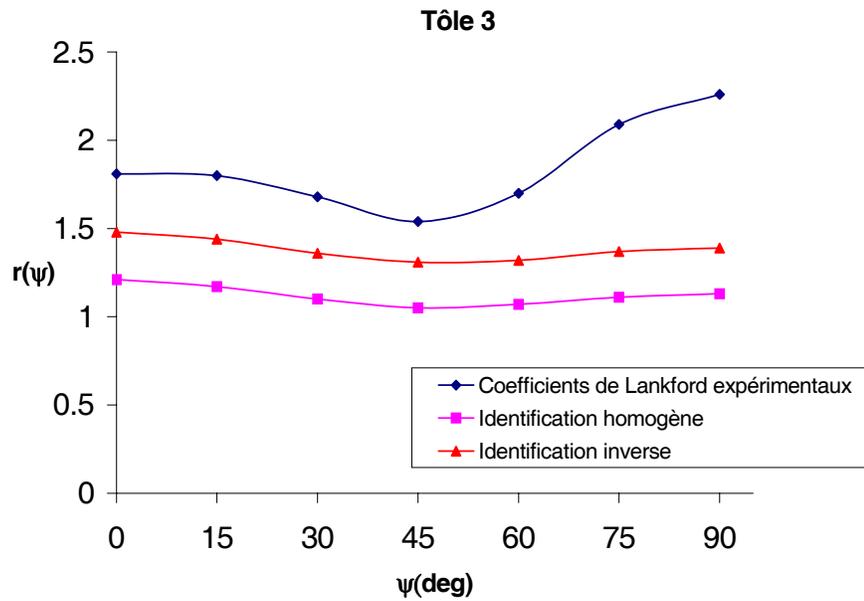


FIG. 4.31: Evolution des coefficients de Lankford  $r_\psi$  identifiés par l'approche homogène et inverse (Tôle 3).

Pour déployer l'attribut de la méthode inverse, nous avons calculé l'erreur relative définie par la relation (4.22) entre les coefficients d'anisotropie expérimentaux et ceux identifiés par les deux méthodes homogène et inverse. Ces résultats sont résumés dans le tableau (4.8). Ceci confirme l'avantage de la technique d'identification inverse sur la méthode classique homogène.

$$E_r = \frac{\sqrt{\sum_{\psi} (r_{\psi}^{cal} - r_{\psi}^{exp})^2}}{\sqrt{\sum_{\psi} (r_{\psi}^{exp})^2}} \quad (4.22)$$

Tôles	$Er_{Homogène}$	$Er_{Inverse}$
Tôle 1	0.16	0.11
Tôle 2	0.38	0.24
Tôle 3	0.40	0.27

TAB. 4.8: L'erreur relative entre les coefficients d'anisotropie expérimentaux et ceux identifiés par l'approche homogène et inverse.

### Prévision des contraintes seuils

Pour mieux voir la validité du modèle de Hill et décrire le comportement anisotrope des tôles considérées dans cette étude, nous avons calculé à partir des coefficients d'anisotropie

identifiés du modèle de Hill ( $a_i$ ), les contraintes seuils  $\sigma_\psi$  dans les différentes directions  $\psi$  par rapport à la direction de laminage (DL). L'évolution de la contrainte seuil  $\sigma_\psi$  en fonction de l'angle  $\psi$ , par rapport à la direction de laminage, est représentée dans la figure(4.32). Une validation expérimentale est effectuée ; les contraintes seuils calculées et celles mesurées expérimentalement sont représentées dans la même figure. Cette validation montre que le modèle orthotrope quadratique de Hill ne tient pas correctement compte de l'anisotropie des contraintes. Il paraît que les surfaces seuil de plasticité expérimentales des tôles sont plus anisotropes que celles qui sont prévues par le critère de Hill(1948).

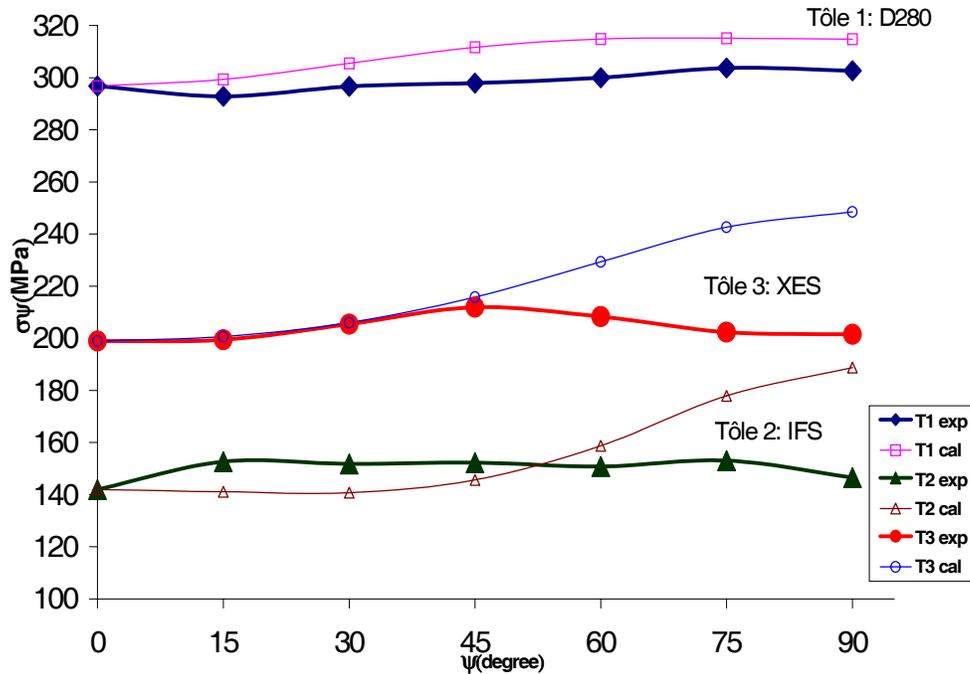


FIG. 4.32: L'évolution des contraintes seuils expérimentales et celles qui sont prévues par le modèle de Hill en fonction de l'angle  $\psi$ .

## 4.7 Identification du modèle de Hill non associé

L'identification de ce modèle nécessite celle :

- d'une fonction d'écroutissage  $\sigma_s(\alpha)$
- des coefficients d'anisotropie du critère ( $F, G, H$  et  $N$ )
- des fonctions d'anisotropie du potentiel plastique ( $F', G', H'$  et  $N'$ )

Si nous imposons les relations suivantes ( $G + H=1$ ) et ( $G' + H'=1$ ), alors l'identification de ce modèle nécessite la détermination de six coefficients indépendants que nous notons  $a_1, a_2, a_3, a'_1, a'_2$  et  $a'_3$ . Les trois premiers coefficients sont exprimés en fonction des coefficients d'anisotropie de Hill ( $F, G, H$  et  $N$ ) par la relation (4.12), alors que les trois autres coefficients du potentiel plastique sont exprimés en fonction des paramètres ( $F', G', H'$  et  $N'$ ) par la

relation suivante :

$$a'_1 = \frac{F' + G' + 4H' - 2N'}{4(G' + H')} \quad (4.23a)$$

$$a'_2 = \frac{F' - G'}{2(G' + H')} \quad (4.23b)$$

$$a'_3 = \frac{G' - H'}{2(G' + H')} \quad (4.23c)$$

Les coefficients d'anisotropie du potentiel plastique sont identifiés à partir des coefficients expérimentaux d'anisotropie de Lankford dans les différentes directions (dans chaque  $15^\circ$  par rapport à la direction de laminage)  $\psi$  par rapport à la direction de laminage. La procédure d'identification des coefficients d'anisotropie du potentiel plastique consiste à chercher les coefficients  $a'_1$ ,  $a'_2$  et  $a'_3$  de telle sorte que la différence entre les coefficients d'anisotropie de Lankford expérimentaux et ceux calculés par la relation (4.24) soit minimale.

$$r'(\psi) = \frac{1 - 2a'_3 - 2a'_1 \sin^2(2\psi)}{1 + 2a'_3 + 4a'_2 \sin^2(\psi)} \quad (4.24)$$

L'identification des coefficients d'anisotropie du critère  $a_1$  et  $a_2$  est effectuée à partir des courbes d'écroutissage des essais de traction hors axes dans toutes directions  $\psi$  disponibles par rapport à la direction de laminage en minimisant la fonction objectif  $E(a_1, a_2)$  et ceci identiquement à ce qui a été présenté antérieurement dans l'identification du modèle de Hill associé. La fonction d'écroutissage dans la direction  $\psi$  par rapport à la direction de laminage, dans ce cas de modèle non associé, est donnée par la relation suivante :

$$\sigma_\psi = \frac{1}{a(\psi)} K \left( \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_\psi}{a'(\psi)} \right)^n \quad (4.25)$$

Où  $a'_\psi = \sqrt{1 + 2a'_2 \sin^2(\psi) - a'_1 \sin^2(2\psi)}$  est facilement déterminée à partir des coefficients d'anisotropie de Lankford  $r_\psi$ . Finalement, le coefficient d'anisotropie du critère  $a_3$  est identifié à partir de l'essai de traction plane, soit en appliquant l'approche homogène pour une interprétation homogène de l'essai ou la méthode inverse pour une interprétation inhomogène de l'essai de traction plane.

#### 4.7.1 Identification homogène du modèle

L'identification homogène du modèle de Hill non associé, suppose que tous les essais sont interprétés comme étant homogènes. En effet, la contrainte et la déformation équivalente de Hill dans le cas d'un modèle non associé sont données, dans un essai de traction plane homogène par les relations suivantes :

$$\sigma_c = \sqrt{1 - \frac{(1 - 2a_3)^2}{4(1 + 2a_2)}} \sigma_{TP} \quad (4.26)$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(1 - 2a_3)^2}{4(1 + 2a_2)}}} \varepsilon_{TP} \quad (4.27)$$

Où  $\sigma_{TP}$  et  $\varepsilon_{TP}$  sont respectivement, la contrainte et la déformation dans la direction de sollicitation de l'éprouvette d'essai de traction plane. Les coefficients  $a'_2$  et  $a'_3$  étant déterminés à partir des coefficients d'anisotropie de Lankford expérimentaux. Il reste alors, à identifier le coefficient  $a_3$  à partir du lissage de la courbe d'érouissage en traction plane et la réponse homogène du modèle qui vérifie les équations (4.26) et (4.27). Etant donné que les six coefficients du modèle sont identifiés, nous calculons les coefficients d'anisotropie du critère  $r_\psi$  et les coefficients d'anisotropie du potentiel plastique  $r'_\psi$  dans chaque direction  $\psi$  par rapport à la direction de laminage. Ces résultats sont présentés dans le tableau (4.9).

Tôles	$\psi$	00°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Tôle 1	$r'$	1.03	1.02	1.00	1.02	1.11	1.21	1.26
	$r$	0.95	0.94	0.92	0.90	0.90	0.90	0.91
Tôle 2	$r'$	2.13	2.03	1.86	1.83	2.12	2.56	2.77
	$r$	1.35	1.36	1.35	1.30	1.22	1.14	1.11
Tôle 3	$r'$	1.90	1.80	1.60	1.54	1.74	2.09	2.26
	$r$	1.05	1.04	1.00	0.96	0.95	0.96	0.96

TAB. 4.9: Coefficients d'anisotropie du modèle de Hill non associé (approche homogène).

#### 4.7.2 Identification inverse du modèle

L'identification inverse du modèle nécessite aussi la détermination des six coefficients d'anisotropie  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a'_1$ ,  $a'_2$  et  $a'_3$ . Les coefficients d'anisotropie du potentiel plastique sont déterminés à partir des coefficients d'anisotropie de Lankford expérimentaux. Les deux coefficients d'anisotropie du critère  $a_1$  et  $a_2$  sont identifiés à partir des courbes d'érouissage hors axes. Le coefficient d'anisotropie  $a_3$  est identifié de telle sorte que la différence entre la réponse globale expérimentale de l'essai de traction plane et calculée soit minimale. Après avoir appliqué l'algorithme d'identification inverse, les réponses optimales sont représentées sur les figures (4.33), (4.34) et (4.34) ainsi que les courbes expérimentales pour les tôles 1, 2 et 3. D'après ces résultats, le modèle orthotrope de Hill non associé est capable de décrire correctement le comportement des tôles 2 et 3 en traction plane. Cependant, il s'avère moins adéquat pour la description de la tôle 1 en traction plane.

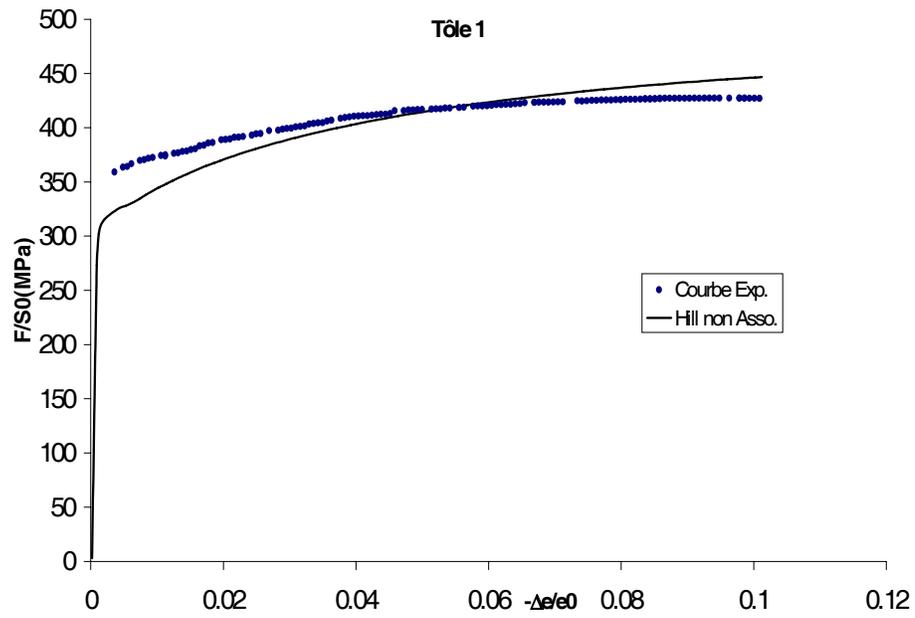


FIG. 4.33: Identification du modèle de Hill non associé (Tôle 1).

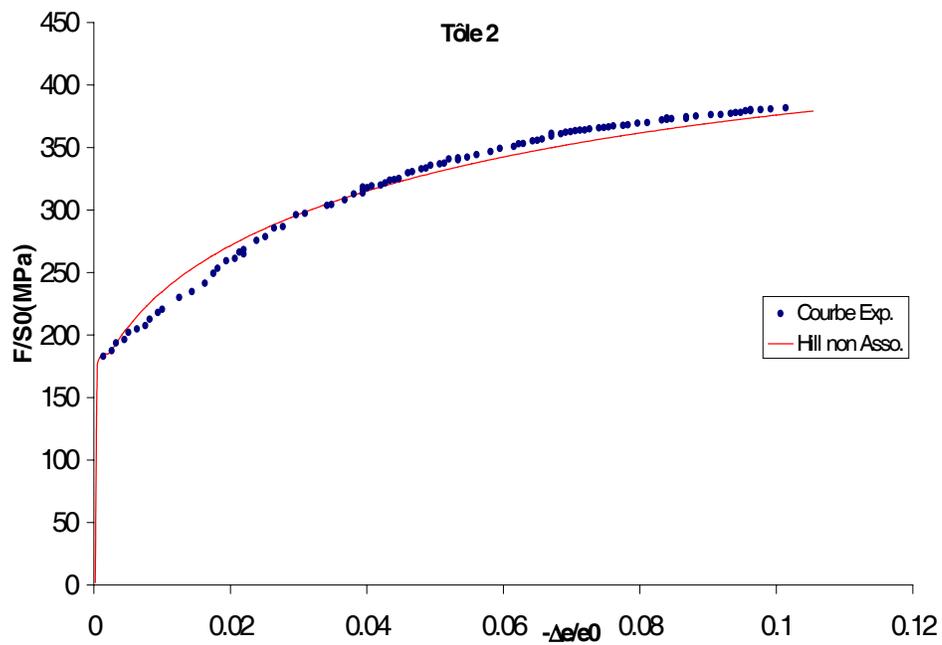


FIG. 4.34: Identification du modèle de Hill non associé (Tôle 2).

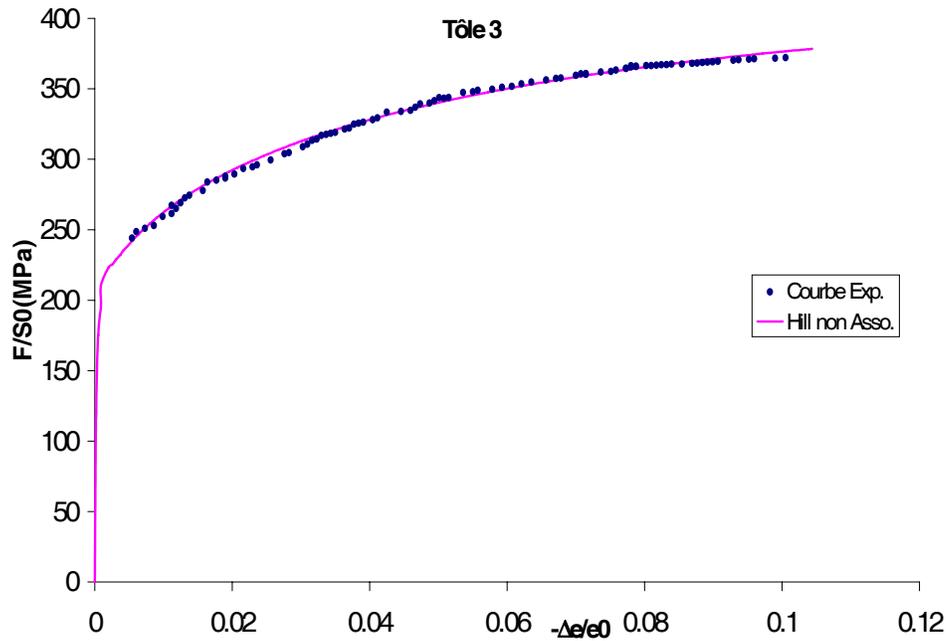


FIG. 4.35: Identification du modèle de Hill non associé (Tôle 3).

Les résultats d'identification de ce modèle sont alors illustrés dans le tableau (4.10).

Tôles	$\psi$	00°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Tôle 1	$r'$	1.03	1.02	1.00	1.02	1.11	1.21	1.26
	$r$	1.24	1.23	1.19	1.17	1.16	1.17	1.17
Tôle 2	$r'$	2.13	2.03	1.86	1.83	2.12	2.56	2.77
	$r$	1.44	1.45	1.45	1.40	1.31	1.22	1.18
Tôle 3	$r'$	1.90	1.80	1.60	1.54	1.74	2.09	2.26
	$r$	1.38	1.36	1.31	1.26	1.24	1.24	1.24

TAB. 4.10: Coefficients d'anisotropie du modèle de Hill non associé.

Dans les figures (4.36), (4.37) et (4.38), nous représentons les coefficients d'anisotropie de Lankford dans des directions de pas de 15° par rapport à la direction de laminage et les coefficients calculés à partir des coefficients identifiés d'anisotropie  $a'_1$ ,  $a'_2$  et  $a'_3$ . Nous constatons qu'une fonction potentiel plastique de forme quadratique est suffisante pour d'écrire l'évolution des déformations plastiques pour les trois tôles considérées.

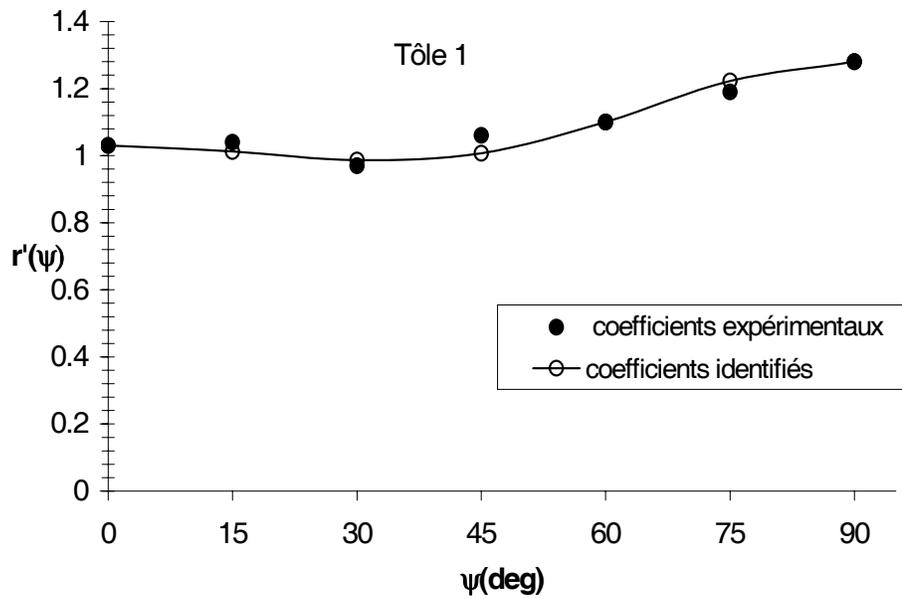


FIG. 4.36: L'évolution des coefficients expérimentaux et théoriques de Lankford en fonction de  $\psi$  (Tôle 1).

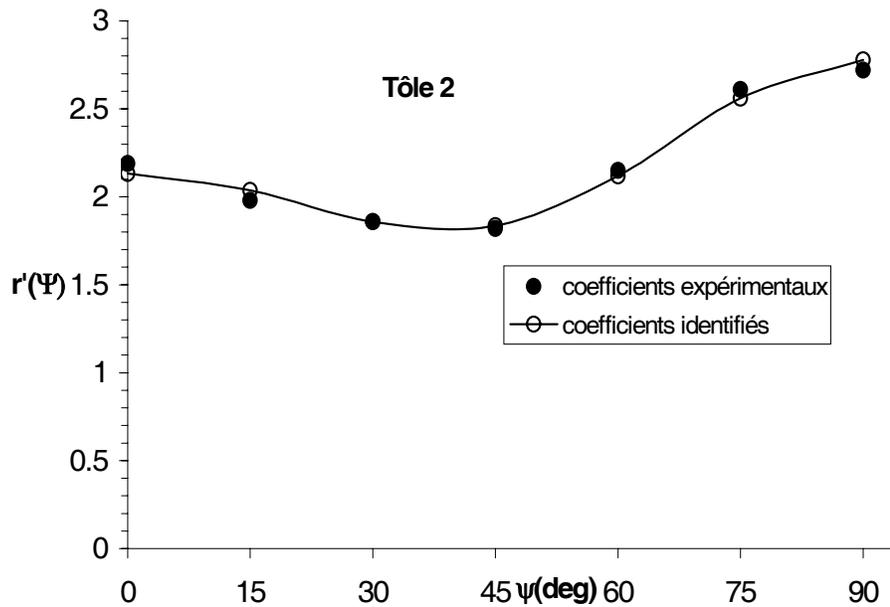


FIG. 4.37: L'évolution des coefficients expérimentaux et théoriques de Lankford en fonction de  $\psi$  (Tôle 2).

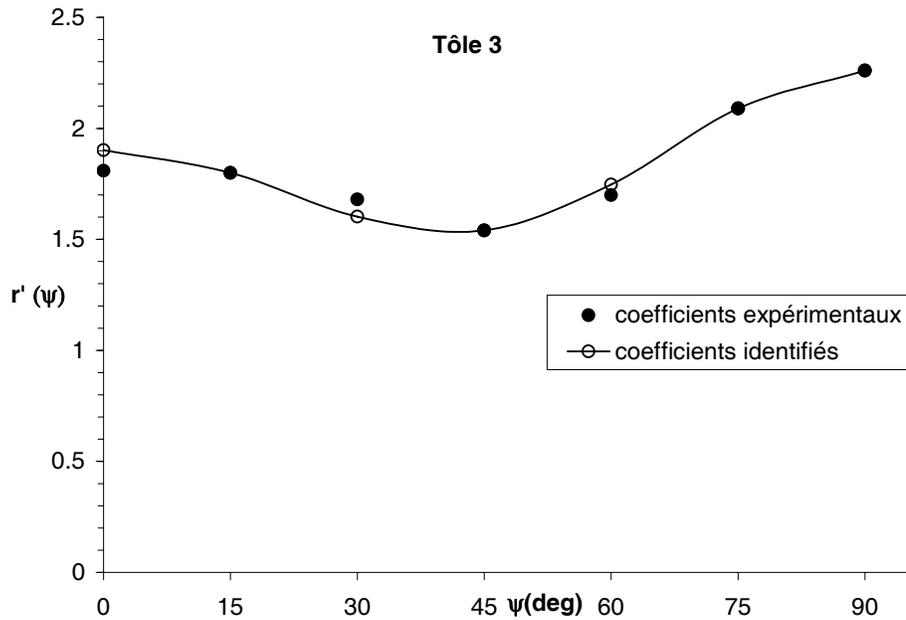


FIG. 4.38: L'évolution des coefficients expérimentaux et théoriques de Lankford en fonction de  $\psi$  (Tôle 3).

## 4.8 Identification du modèle non quadratique

Dans ces dernières décennies, des critères de plasticité non quadratiques sont proposés pour tenir compte du comportement anisotrope des tôles (Barlat et Lian, 1989), (Hill, 1990, 1993), (Barlat et *al.*, 1991), (Karafillis et *al.*, 1993). Des efforts sont encore déployés, que se soit dans la direction du développement de critères de plasticité, dont certains sont destinés à la modélisation du comportement de l'aluminium et ces alliages, (Barlat et *al.*, 1997b), (Barlat et *al.*, 2002), ou dans la direction du développement des fonctions potentiels plastiques pour la description de l'anisotropie plastique (Hill, 1987), (Barlat et *al.*, 1993).

En effet, nous avons implémenté dans notre code de calcul par la méthode des éléments finis, un critère non quadratique récent, celui proposé par Barlat (Yld96) (Barlat et *al.*, 1997b). L'écriture de ce critère est présentée dans le chapitre 1. Nous avons utilisé la forme du critère qui se réduit à la forme du critère (Yld91) ( $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{z1}$  sont égales à l'unité), sans que la forme implémentée ne perde sa généralité. Nous avons voulu tester la facilité d'intégration de tel critère dans notre code de calcul (calcul direct) et sa capacité pour l'implémentation d'autres critères.

Nous avons appliqué l'algorithme d'identification inverse (l'approche inhomogène) pour identifier les coefficients d'anisotropie des deux tôles 2 et 3 dans le cas du modèle isotrope transverse avec plasticité associée. Cette identification nécessite la détermination :

- d'une fonction d'écroutissage  $\sigma_s(\alpha)$
- des coefficients d'anisotropie  $c_1, c_2, c_3, c_6$  et  $m$

La fonction d'écrouissage est déterminée à partir de l'essai de traction uniaxiale dans la direction de laminage. Les coefficients d'anisotropie sont identifiés de sorte que la réponse de l'essai de traction plane coïncide avec la réponse expérimentale globale du même essai. Le coefficient  $m$ , couramment appelé coefficient de forme, a été montré qu'il est en relation avec la structure cristallographique des matériaux (Logan et Hosford, 1980), (Hosford, 1992, 1996). Le coefficient de forme  $m$  est pris comme étant égal à 6 dans le cas des matériaux de structure cubique centrée et  $m = 8$  pour des structures cubiques à faces centrées.

Nous présentons, sur les figures (4.39) et (4.40) l'identification inverse du modèle de Barlat isotrope transverse non quadratique à partir des réponses des essais de traction plane. Nous constatons que ce modèle décrit le comportement des tôles 2 et 3 en traction plane. Les résultats de cette identification inverse sont illustrés dans le tableau (4.11). Si nous comparons les coefficients d'anisotropie  $r$  pour les deux tôles aux valeurs expérimentaux  $r_{exp}$ , nous constatons clairement que ce modèle tient compte à la fois de l'anisotropie des contraintes ainsi que l'anisotropie des déformations plastiques. Une telle description de l'anisotropie du comportement n'est pas obtenue pour le modèle quadratique de Hill dans le cas de la plasticité associée (Khalfallah et *al.*, 2002a). Nous avons remarqué pour le modèle de Hill que, s'il permet de prévoir l'anisotropie des contraintes, alors il sera incapable de prédire l'anisotropie des déformations plastiques et vis-versa.

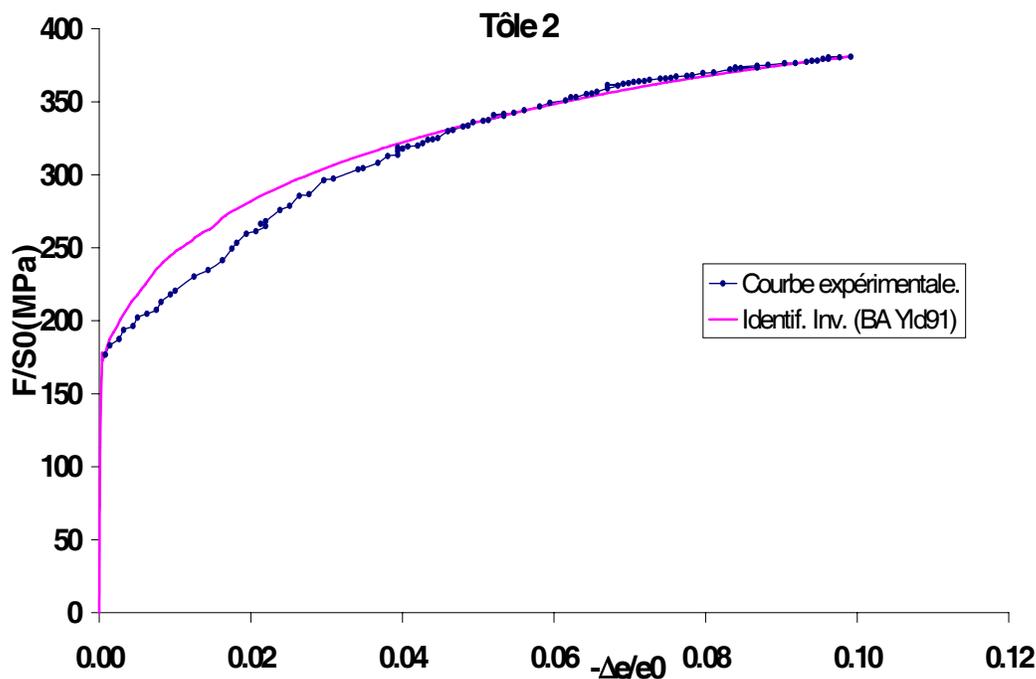


FIG. 4.39: Identification inverse du modèle de Barlat Yld91 Tôle 2.

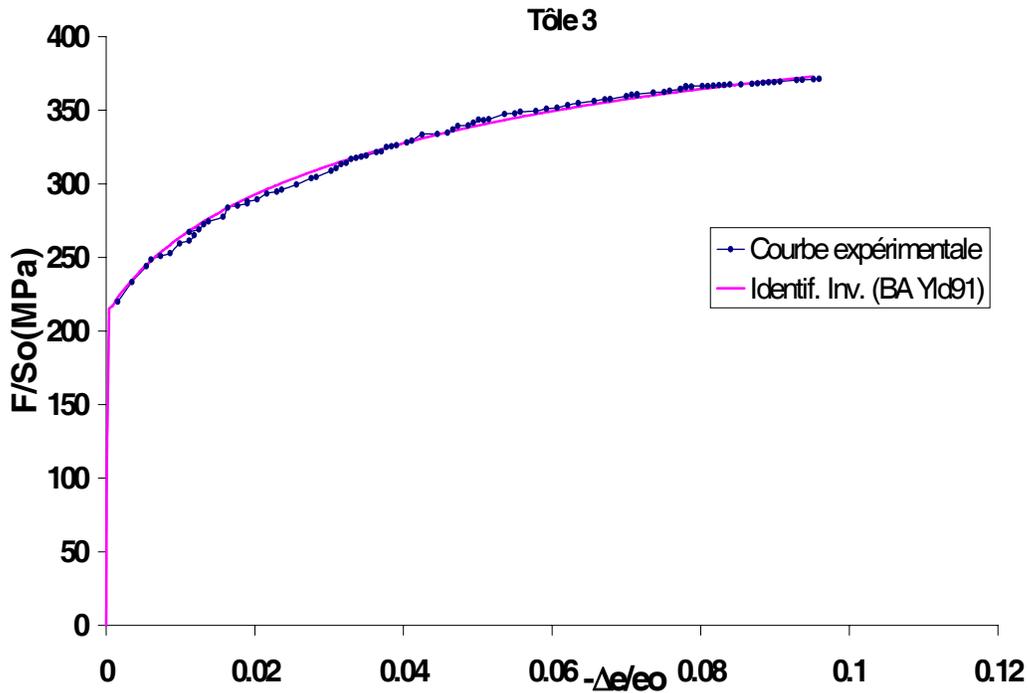


FIG. 4.40: Identification inverse du modèle de Barlat Yld91 Tôle 3.

Tôles	Coefficients d'anisotropie de Barlat					Valeurs de r	
	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_6$	$m$	$r$	$r_{exp}$
Tôle 2	0.7981	0.7981	1.1891	1.0588	8	2.14	2.15
Tôle 3	0.8377	0.8377	1.1539	1.0485	8	1.85	1.81

TAB. 4.11: L'identification du modèle de Barlat isotrope transverse avec plasticité associée.

## 4.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons contribué à la définition et la mise en oeuvre d'une stratégie d'identification de lois de comportement anisotropes à partir d'une base de données d'essais expérimentaux. Selon la définition et l'interprétation de ces essais, une stratégie d'identification est présentée. Notre effort est concentré sur l'interprétation de l'essai de traction plane que Benchouikh (Benchouikh, 1992) considérait comme essai "moins fiable" que les autres. Ceci peut être expliqué par l'hypothèse d'homogénéité que l'auteur a adoptée dans ses travaux. En effet, nous avons conduit notre identification des coefficients d'anisotropie pour un ensemble de modèles élastoplastiques et avec écrouissage isotrope à partir de la réponse de cet essai. L'identification des coefficients d'anisotropie, pour une interprétation homogène de cet essai, conduit à des coefficients inférieurs à ceux qui sont mesurés expérimentalement. Ceci nous a mené à réfléchir sur une méthode d'identification permettant de surmonter l'hypothèse d'homogénéité de l'essai de traction plane, surtout que nous avons prouvé dans l'interprétation

de cet essai dans le chapitre 2 que l'essai de traction plane est fortement hétérogène. L'application de la méthode d'identification inverse pour déterminer les coefficients d'anisotropie est une approche assez pertinente pour identifier ces coefficients avec précision et rend compte du comportement du matériau, si le choix du modèle est judicieux. Cette méthode consiste à minimiser, par une procédure d'optimisation, la différence entre la réponse du modèle calculée par la méthode des éléments finis et la réponse expérimentale de l'essai de traction plane. L'identification des coefficients d'anisotropie sous l'hypothèse d'homogénéité est également effectuée et ceci pour deux buts : Le premier but est de quantifier l'ampleur de l'adoption de cette hypothèse sur les coefficients identifiés, pour des fins de comparaison. Le deuxième but de cette identification homogène est de prendre ces coefficients comme des valeurs initiales pour démarrer le processus itératif de la méthode d'identification inverse. Ceci permet un gain en nombre d'itérations si ces valeurs initiales sont prises d'une façon aléatoire ou intuitive. Les résultats obtenus par cette technique d'identification inverse, montrent une meilleure prédiction des coefficients d'anisotropie que ceux identifiés par l'approche homogène quand ils sont comparés aux coefficients expérimentaux.

Toutefois, une différence réside entre les coefficients identifiés par la méthode inverse qui doit fournir les coefficients le plus représentatifs du comportement des tôles. Nous notons que les modèles avec plasticité non associée peuvent être satisfaisants pour décrire l'anisotropie de l'état de contraintes (critère de plasticité) et l'anisotropie des déformations plastiques (le potentiel plastique est identifié à partir des coefficients expérimentaux de Lankford). Cependant, la validation de ces modèles pour décrire d'autres trajets de chargement (d'autres essais) donne de mauvais résultats. Nous pensons que la capacité des modèles isotropes transverses et quadratiques de Hill est mise en cause, pour tenir compte à la fois de l'anisotropie des contraintes et des déformations plastiques .

Dans la littérature, plusieurs critères de plasticité non quadratiques sont proposés pour mieux améliorer la prédiction du comportement anisotrope des tôles mieux que celle prévue par le critère quadratique de Hill. Nous avons implémenté dans notre code maison de calcul par éléments finis un critère non quadratique relativement récent. Ce critère est proposé par Barlat et ces collaborateurs (1997). L'identification inverse du modèle est basée sur ce critère conduit à des résultats, permettant de tenir compte à la fois de l'anisotropie des courbes d'érouissage en traction plane ainsi que de l'anisotropie des déformations plastiques.



# Chapitre 5

## Analyse de sensibilité paramétrique

### 5.1 Introduction

**L**e calcul de sensibilité est défini comme étant la méthode permettant d'obtenir l'influence de la variation des paramètres d'optimisation sur la réponse (force, déplacement, contrainte, déformation, etc . . . ) fournie par un code de simulation par éléments finis intégrant un modèle de comportement. A partir de cette définition, nous pensons directement au calcul des dérivées de cette réponse simulée du modèle par rapport aux variables d'optimisation. Nous écrivons d'une manière formelle la définition de

$$\mathbf{S} = \frac{\partial R}{\partial p} \quad (5.1)$$

où  $\mathbf{S}$  représente la matrice de sensibilité (matrice Jacobienne) d'un vecteur de réponses  $R$  macroscopiques fournies par un calcul par la méthode des éléments finis par rapport à un vecteur de paramètres  $p$  à optimiser. L'analyse de sensibilité joue un rôle important dans les procédés pour l'optimisation des géométries en mise en forme, les problèmes inverses et plus généralement, dans les problèmes d'identification paramétriques.

Les méthodes d'optimisation d'ordre 1 nécessitant le calcul du gradient de la fonction objectif à minimiser. Ceci revient à calculer la sensibilité de cette fonction par rapport aux variables d'optimisation. La qualité de la convergence de ces méthodes est fortement dépendante de la précision du calcul de la dérivée de la fonction objectif (Kleiner mann, 2000), (Ghouati et Gelin, 1998).

La méthode la plus classique de dérivation, couramment utilisée, est la méthode de différences finies (MDF) (Forestier et *al.*, 2001), (Boyer, 2001). C'est une méthode de dérivée purement numérique. Son principe consiste à perturber chaque paramètre successivement, positivement puis négativement d'une valeur à définir et à calculer dans chaque cas la réponse de la simulation. Bien que la méthode (MDF), soit facile à implémenter, elle est lourde (le calcul des dérivées par la méthode des différences finis prendrait environ de 80 à 95 % du temps CPU de la résolution du problème d'optimisation) (Kleiner mann, 2000) et par conséquent, très lente pour un nombre important de paramètres. Elle sera donc peu intéressante pour un

grand nombre de paramètres (Forestier et *al.*, 2001).

Une deuxième classe de méthode de calcul de sensibilité est la méthode de différenciation directe (MDD). C'est une méthode de dérivation analytique permettant une très bonne précision. Cependant, (Forestier et *al.*, 2001) trouve dans cette méthode les inconvénients suivants : la méthode de dérivation analytique nécessite la connaissance du modèle direct puisque les dérivées sont implémentées au coeur du solveur. Elle semble peu flexible, étant spécifique à la loi de comportement utilisée. Des fois le calcul des dérivées peut se révéler très lourd et donc être source d'erreurs ou imposer l'utilisation d'outils de calculs formels. Pour palier à ces inconvénients, une autre classe de méthode de calcul de dérivées est proposée. C'est la méthode semi-analytique, qui associe le calcul des dérivées analytiques et numériques (Bakshi, 2000), (Srikanth, 2000), (Law, 1997).

Plusieurs études sont menées sur les méthodes de calcul des sensibilités dans l'analyse des paramètres sur le comportement des structures. Le lecteur trouvera de plus amples détails sur ces méthodes dans les références suivantes : (Tortorelli et Michaleris, 1994a; Tortorelli, 1994b), (Atrek, 1996), (Atrek, 1999).

Une autre méthode d'analyse de sensibilité qui est relativement différente de ces méthodes de dérivation. C'est une méthode d'analyse de sensibilité statistique, encore appelée méthode des plans d'expériences (MPE). Cette méthode s'inscrit comme une technique d'analyse de sensibilité, au sens où elle permet de prédire les effets induits par des changements de valeurs des paramètres sur la réponse simulée. Son apport fondamental a consisté à montrer que le fait de faire varier les paramètres simultanément et non pas successivement permettait d'une part une efficacité beaucoup plus grande et d'autre part la prise en compte d'éventuelles interactions entre les paramètres étudiées. Nous n'évoquons pas dans ce travail, ce type de méthode d'analyse de sensibilité.

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode de calcul semi-analytique, spécifique, de la sensibilité de la réponse globale (force de traction) qui découle de manière systématique de la méthode particulière que nous utilisons pour résoudre le problème élastoplastique. La sensibilité de la force de traction plane est étudiée par rapport au coefficient d'anisotropie  $r$  du modèle isotrope transverse et par rapport aux coefficients d'anisotropie  $r_0$ ,  $r_{45}$ ,  $r_{90}$  du modèle orthotrope de Hill. Pour mieux exprimer la capacité d'un essai et mieux identifier les coefficients d'anisotropie d'un matériau par rapport à un autre, nous avons définis un indicateur de sensibilité permettant de classer les essais de traction plane, d'expansion et de cisaillement simple selon la sensibilité de leurs réponses par rapport au coefficient d'anisotropie.

## 5.2 Méthode spécifique de calcul de sensibilité

Nous présentons une méthode spécifique de calcul de sensibilité permettant de calculer la variation de la réponse globale d'un essai par rapport aux paramètres identifiés. Ceci revient

à calculer la variation des champs de contraintes par rapport à ces paramètres. Le calcul est effectué d'une manière incrémentale. Il est basé sur une méthode spécifique qui découle, de manière systématique de l'algorithme particulier, que nous utilisons dans le calcul des structures par la méthode des éléments finis (Khalfallah *et al.*, 2002b).

L'expression de la force généralisée  $\vec{F}$  associée à la vitesse de déplacement  $\dot{\vec{U}} \cdot \vec{d}$  est donnée par le principe des puissances virtuelles :

$$F = \|\vec{F}\| = \frac{1}{\dot{\vec{U}}} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega \quad (5.2)$$

Le calcul de la variation de la force globale par rapport à un paramètre  $r$  à partir de la relation (5.2) s'écrit :

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{\dot{\vec{U}}} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial r} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\partial r} \right) d\Omega \quad (5.3)$$

### 5.2.1 Calcul de sensibilité

L'évaluation de la quantité  $\frac{\partial F}{\partial r}$ , nécessite le calcul des termes  $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial r}$  et  $\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\partial r}$ . Le calcul de  $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial r}$  s'effectue d'une manière incrémentale. Si nous supposons que nous connaissons l'incrément initial  $(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial r})_0$ , nous calculons l'incrément suivant  $(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial r})_1$  par l'évaluation du terme  $\frac{\partial(d\boldsymbol{\sigma})}{\partial r}$  :

$$\left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial r} \right)_1 = \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial r} \right)_0 + \frac{\partial(d\boldsymbol{\sigma})}{\partial r} \quad (5.4)$$

La formulation en déplacement du problème et sa discrétisation par des éléments finis permettent d'écrire la forme discrétisée suivante :

$$\sigma_{ij}^a = \bar{U} \sigma_{ij}^e + \sum_b S_{ijkl}^{ab} \varepsilon_{kl}^{pb} \quad (5.5)$$

Où  $a$  et  $b$  désignent des numéros d'éléments,  $\mathbf{S}$  désigne un tenseur d'ordre 4 ne dépend que de la géométrie de la structure et de ses propriétés élastiques. Cette dernière relation peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$d\sigma_{ij} = d\bar{U} \sigma_{ij}^e + \sum_b S_{ijkl}^{ab} d\varepsilon_{kl}^{pb} \quad (5.6)$$

La dérivation de l'équation (5.5) par rapport au paramètre  $r$  permet d'écrire :

$$\frac{\partial(d\boldsymbol{\sigma})}{\partial r} = \sum_b \mathbf{S}^{ab} : \frac{\partial(d\boldsymbol{\varepsilon}^{pb})}{\partial r} \quad (5.7)$$

Pour évaluer  $\frac{\partial(d\boldsymbol{\varepsilon}^{pb})}{\partial r}$ , la dérivation de la loi d'évolution plastique  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\alpha \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  par rapport au paramètre  $r$ .

$$\frac{\partial(d\boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(d\alpha) \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + d\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \quad (5.8)$$

L'équation (5.7) s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial(d\sigma)}{\partial r} = \sum_b S^{ab} : \frac{\partial}{\partial r}(d\alpha) \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \sum_b S^{ab} : d\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \quad (5.9)$$

Le calcul de  $\frac{\partial}{\partial r}(d\alpha)$  est déterminé à partir de la fonction de charge :

$$f(\sigma_c, \alpha) = \sigma_c(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) - \sigma_s(\alpha + d\alpha) = 0 \quad (5.10)$$

La dérivation de l'équation (5.10) par rapport au paramètre  $r$  donne :

$$\frac{d\sigma_c}{dr}(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) = \frac{d\sigma_s}{dr}(\alpha + d\alpha) \quad (5.11)$$

La dérivée de la fonction d'écroûissage  $\sigma_s(\alpha)$  par rapport à  $r$  conduit :

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \alpha}(\alpha + d\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial r} \quad (5.12)$$

La différentielle de la contrainte équivalente s'écrit :

$$d\sigma_c = \frac{\partial \sigma_c}{\partial r} dr + \frac{\partial \sigma_c}{\partial \sigma} d\sigma \quad (5.13)$$

La dérivée de la contrainte équivalente par rapport au paramètre  $r$  s'écrit :

$$\frac{d\sigma_c}{dr} = \frac{\partial \sigma_c}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_c}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dr} \quad (5.14)$$

Finalement, l'expression (5.11) s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_c}{\partial \sigma} : \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\partial(d\sigma)}{\partial r} \right) = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{\partial(d\alpha)}{\partial r} \right) \quad (5.15)$$

L'expression de  $\frac{\partial}{\partial r}(d\alpha)$  s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial r}(d\alpha) = \frac{\partial \sigma_c}{\partial r} \left( \frac{\partial \sigma_s}{\partial \alpha} \right)^{-1} + \frac{\partial \sigma_c}{\partial \sigma} : \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\partial(d\sigma)}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial \sigma_s}{\partial \alpha} \right)^{-1} - \frac{\partial \alpha}{\partial r} \quad (5.16)$$

Si nous substituons l'équation (5.16) dans l'équation (5.15) nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(d\sigma)^a}{\partial r} &= \sum_b S^{ab} : \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial \sigma_c}{\partial r} \left( \frac{\partial \sigma_s}{\partial \alpha} \right)^{-1} + \frac{\partial \sigma_c}{\partial \sigma} : \left( \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\partial(d\sigma)}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial \sigma_s}{\partial \alpha} \right)^{-1} - \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right\} + \\ &+ \sum_b S^{ab} : \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) d\alpha \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(d\sigma)^a}{\partial r} &- \sum_b S^{ab} : \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma_c}{\partial \sigma} : \frac{\partial(d\sigma)^b}{\partial r} \left( \frac{\partial \sigma_s}{\partial \alpha} \right)^{-1} = \sum_b S^{ab} : \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \sigma_c}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial \sigma_s}{\partial \alpha} \right)^{-1} + \\ &+ \sum_b S^{ab} : \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left\{ \left( \frac{\partial \sigma_c}{\partial \sigma} : \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial \sigma_s}{\partial \alpha} \right)^{-1} - \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right\} + \\ &+ \sum_b S^{ab} : \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) d\alpha \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ceci est équivalent au système linéaire suivant :

$$\sum_b \mathbf{A}_{ab} \frac{\partial}{\partial r}(d\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{B}_a \quad (5.19)$$

où

$$\mathbf{A}_{ab} = \left\{ \mathbf{I}_d - \mathbf{S}^{ab} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \sigma_c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \frac{\partial \sigma_s}{\partial \alpha} \right)^{-1} \right\} \quad (5.20)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_a = & \sum_b \mathbf{S}^{ab} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \sigma_c}{\partial r} \left( \frac{\partial \sigma_s}{\partial \alpha} \right)^{-1} + \\ & + \sum_b \mathbf{S}^{ab} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left\{ \left( \frac{\partial \sigma_c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial \sigma_s}{\partial \alpha} \right)^{-1} - \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right\} + \\ & + \sum_b \mathbf{S}^{ab} : \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) d\alpha \end{aligned} \quad (5.21)$$

### 5.2.2 Validation de la méthode de calcul

La validation de la méthode de calcul de sensibilité est effectuée sur des cas simples. En effet, nous avons considéré l'essai de traction plane homogène et l'essai de cisaillement simple. Pour ces essais et dans le cas du modèle isotrope transverse, le calcul de sensibilité de la réponse du modèle est déterminé analytiquement. Le même calcul de sensibilité est effectué par la méthode de calcul que nous avons établie pour déterminer la dérivée de la réponse de ce modèle. Les figures (5.1) et (5.2) représentent les tests de validation de la méthode spécifique pour le calcul de la sensibilité des réponses calculées par le code de calcul par éléments finis. Nous remarquons une très bonne coïncidence entre la sensibilité calculée analytiquement à partir des réponses des modèles et celle calculée par la méthode spécifique que nous avons présentée.

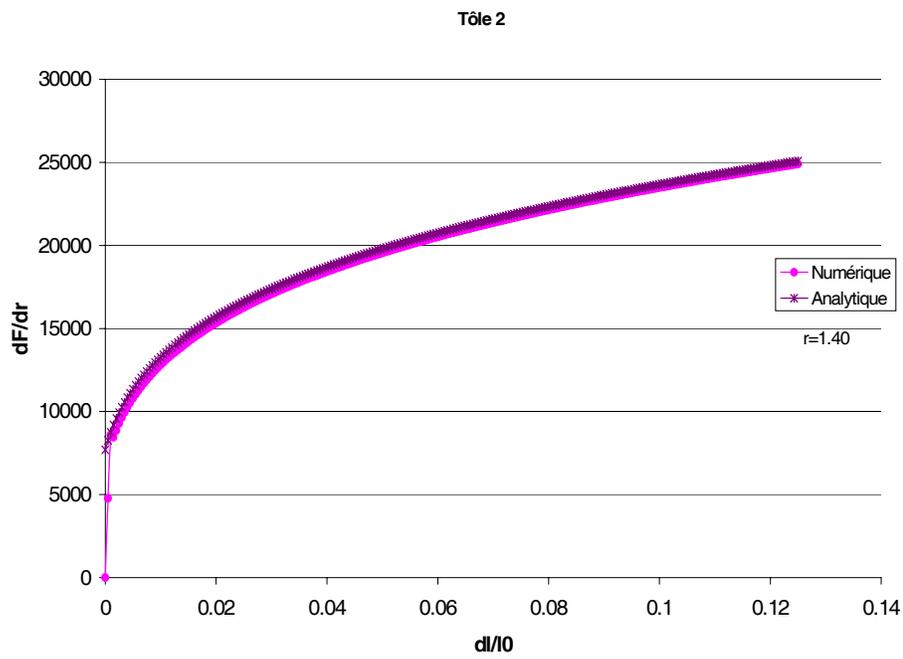


FIG. 5.1: Validation de la méthode numérique du calcul de sensibilité pour l'essai de traction plane homogène.

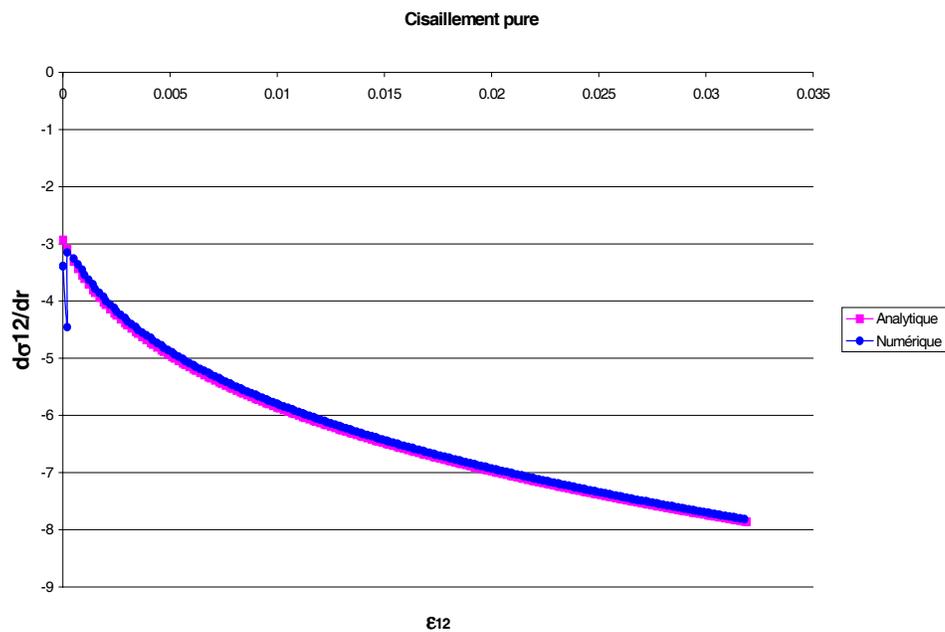


FIG. 5.2: Validation de la méthode numérique du calcul de sensibilité pour l'essai de cisaillement pure.

Comme une première application, nous calculons la sensibilité de la réponse de l'essai de traction plane. C'est à dire la variation de la force globale par rapport au paramètre d'anisotropie, lorsque cette réponse est simulée par le modèle isotrope transverse associé. Nous choisissons un coefficient d'anisotropie  $r = 1.41$  pour lequel nous calculons l'évolution de la sensibilité  $\frac{\partial F}{\partial r}$  en fonction du déplacement. Nous avons déterminé la sensibilité dans le cas classique où l'hypothèse d'homogénéité est considérée. De même, la courbe de sensibilité de la force par rapport au coefficient  $r$  est aussi calculée dans l'essai de traction plane quand il est supposé non homogène. D'après la figure (5.3), nous remarquons l'influence de l'hypothèse d'homogénéité de l'essai de traction plane sur la sensibilité de la force par rapport au paramètre  $r$ . La courbe représentant la sensibilité de la force de l'essai de traction plane inhomogène par rapport à  $r$  est au-dessous, de la courbe de sensibilité de la force de traction, quand l'essai est considéré comme étant homogène. Mais l'allure des courbes de la sensibilité de la force de traction plane, n'est pas modifiée lorsque cette dernière est considérée homogène ou non homogène. Nous constatons que la sensibilité de la force  $F$  est une fonction croissante de l'évolution des déplacements pour un coefficient d'anisotropie  $r$  donné.

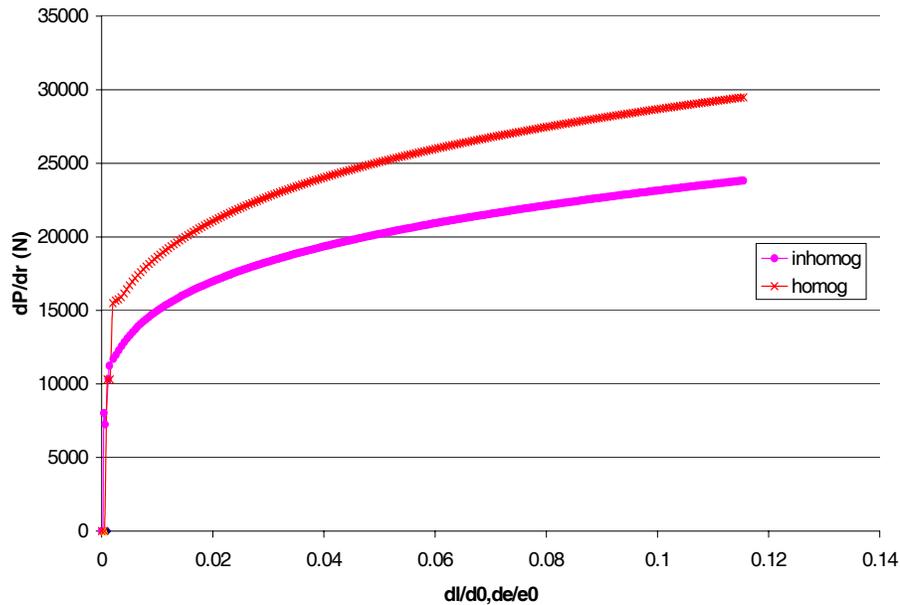


FIG. 5.3: Sensibilité de la force par rapport à  $r$  pour l'essai de traction homogène et inhomogène.

## 5.3 Analyse de sensibilité

### 5.3.1 Indicateur de sensibilité

Pour exprimer la capacité d'un essai et mieux identifier les coefficients d'anisotropie d'un matériau par rapport à un autre essai, nous définissons l'indicateur de sensibilité qui s'écrit

sous la forme suivante :

$$s = \sum \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 / \sum \left( \frac{F}{r} \right)^2 \quad (5.22)$$

Où  $F$  est la force globale, désignant la réponse d'un modèle pour un coefficient d'anisotropie  $r$  optimal donné et "s" représente l'indicateur de sensibilité qui est une grandeur normalisée. Un indicateur de sensibilité "s" élevé, signifie que la petite perturbation dans le paramètre d'anisotropie impliquera des changements significatifs dans la réponse du modèle. Autrement dit, plus cet indicateur de sensibilité est important, plus la réponse du modèle est sensible au paramètre donné. Nous avons calculé cet indicateur de sensibilité de la force globale pour l'essai de traction plane par rapport au coefficient d'anisotropie  $r$  pour le modèle isotrope transverse. La sensibilité de la réponse de ce modèle est déterminée lorsque l'essai de traction plane est supposé homogène et non homogène (figure 5.3). Pour le coefficient d'anisotropie  $r = 1.41$ , l'indicateur de sensibilité est  $s_{Hom} = 6.93 \times 10^{-2}$  et  $s_{Inho} = 4.54 \times 10^{-2}$  pour respectivement le cas homogène et inhomogène. La sensibilité de l'essai de traction plane homogène est supérieure à celle où l'essai est inhomogène. Ceci est attribué au fait que la force de traction dans le cas homogène est aussi élevée par rapport à celle où l'essai de traction est inhomogène.

### 5.3.2 Analyse de sensibilité des essais

L'indicateur de sensibilité "s", peut être considéré comme un indice à partir duquel nous pouvons juger quel essai est plus sensible par rapport à un paramètre identifié d'un modèle donné. Si nous disposons d'un ensemble d'essais expérimentaux (essai de traction simple, essai de traction plane, essai d'expansion équi-biaxiale, essai de cisaillement, ...) et un modèle de comportement donné, la question qu'on doit se poser, quel est l'essai le plus fiable permettant d'identifier avec précision un tel paramètre mieux qu'un autre essai ?

Pour répondre à cette question, nous avons considéré trois types d'essais : l'essai de traction plane, l'essai d'expansion et l'essai de cisaillement. Nous avons calculé l'indicateur de sensibilité pour ces essais en fonction du coefficient d'anisotropie pour le modèle isotrope transverse. Nous avons constaté d'après la figure (5.4), que l'indicateur de sensibilité de l'essai d'expansion est plus élevé que celui de l'essai de traction plane, plus élevé encore de l'indicateur de l'essai de cisaillement simple. Nous constatons alors, que l'essai d'expansion équi-biaxiale possède l'indicateur le plus élevé, donc c'est l'essai le plus sensible au coefficient d'anisotropie  $r$ . L'essai de traction plane arrive en seconde position quand à la sensibilité de cet essai, relativement à ce coefficient d'anisotropie. Donc l'identification du coefficient d'anisotropie du modèle isotrope transverse à partir de l'essai d'expansion est plus précise que celle à partir d'autres essais. Toutefois, la réalisation d'essai d'expansion équi-biaxile pure, pose encore des problèmes techniques, même si cet essai est réalisable, les déformations plastiques atteintes ne sont pas importantes (Toshihiko et al., 1998). L'essai de gonflement hydraulique est un essai alternatif à l'essai d'expansion équi-biaxiale pure, quand la pression

appliquée au pôle est prélevée en fonction de la hauteur au pôle. Mais, l'utilisation d'une méthode inverse pour identifier le coefficient d'anisotropie à partir d'un essai du gonflement hydraulique est très coûteuse en temps de calcul. Le temps pour effectuer un calcul direct est très important. Il apparaît que, l'identification inverse des coefficients d'anisotropie à partir de l'essai de traction plane conduit à un bon compromis entre la précision des coefficients identifiés et le temps de calcul dans la résolution du problème inverse.

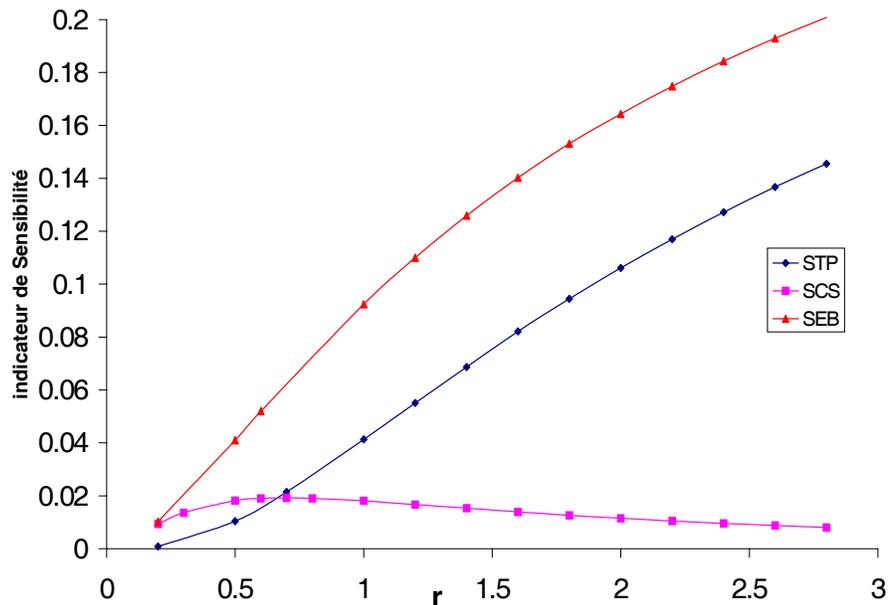


FIG. 5.4: Comparaison de l'indicateur de sensibilité des essais TP, EB et CS en fonction du coefficient d'anisotropie  $r$ .

### 5.3.3 Analyse de sensibilité du modèle de Hill

L'identification du modèle orthotrope quadratique de Hill conduit à la détermination des coefficients d'anisotropie de Lankford  $r_\psi$  du modèle. Dans ce paragraphe, nous étudions la sensibilité de la réponse du modèle orthotrope quadratique de Hill par rapport aux coefficients d'anisotropie  $r_0$ ,  $r_{45}$  et  $r_{90}$ ,  $(\frac{\partial F}{\partial r_0}, \frac{\partial F}{\partial r_{45}}, \text{ et } \frac{\partial F}{\partial r_{90}})$ . A partir de cette analyse de sensibilité, nous pouvons déterminer quel est le coefficient d'anisotropie le plus influant sur la réponse de l'essai de traction plane. Par la suite, nous choisissons cet essai à partir duquel ce coefficient sera identifié.

Nous avons évalué l'indicateur de sensibilité "s", défini par la relation (5.22) pour l'essai de traction plane, dans le cas homogène et non homogène pour les trois tôles 1, 2 et 3. Nous constatons que la sensibilité de l'essai de traction plane homogène est supérieure à celle dans le cas inhomogène et que la réponse homogène est indépendante du coefficient d'anisotropie  $r_{45}$ . Cette constatation est observée dans les valeurs des indicateurs de sensibilité présentées dans les tableaux (5.1), (5.2) et (5.3).

Tôle 1		$s_{Hom}$	$s_{Inho}$
$r_0$	1.20	$1.23 \times 10^{-2}$	$1.06 \times 10^{-2}$
$r_{45}$	1.17	0	$1.09 \times 10^{-4}$
$r_{90}$	1.21	$1.20 \times 10^{-2}$	$9.09 \times 10^{-3}$

TAB. 5.1: Indicateur de sensibilité dans le cas orthotrope (Tôle 1).

Tôle 2		$s_{Hom}$	$s_{Inho}$
$r_0$	1.96	$3.73 \times 10^{-2}$	$3.17 \times 10^{-2}$
$r_{45}$	1.83	0	$6.48 \times 10^{-4}$
$r_{90}$	1.69	$2.72 \times 10^{-2}$	$1.96 \times 10^{-2}$

TAB. 5.2: Indicateur de sensibilité dans le cas orthotrope (Tôle 2).

Tôle 3		$s_{Hom}$	$s_{Inho}$
$r_0$	1.48	$1.63 \times 10^{-2}$	$1.36 \times 10^{-2}$
$r_{45}$	1.31	0	$9.43 \times 10^{-4}$
$r_{90}$	1.39	$1.75 \times 10^{-2}$	$1.41 \times 10^{-2}$

TAB. 5.3: Indicateur de sensibilité dans le cas orthotrope (Tôle 3).

La figure (5.5) représente, pour la tôle 1, les courbes de sensibilité de la force de traction plane inhomogène par rapport aux coefficients d'anisotropie  $r_0$ ,  $r_{45}$  et  $r_{90}$ . Il apparaît que le coefficient  $r_0$  a une influence plus élevée que le coefficient  $r_{90}$  et  $r_{45}$  sur la réponse du modèle.

La figure (5.6) présente, pour la tôle 2, les courbes de sensibilité de la force appliquée  $F$  dans l'essai de traction plane par rapport aux coefficients d'anisotropie  $r_0$ ,  $r_{45}$  et  $r_{90}$  aussi bien dans le cas homogène que non homogène. Nous constatons que la réponse de l'essai de traction plane est plus sensible au coefficient  $r_0$  qu'au coefficient  $r_{90}$ . Dans le cas où l'essai de traction plane est supposé homogène, il est alors indépendant du coefficient  $r_{45}$ , tandis que dans le cas inhomogène, le coefficient  $r_{45}$  est presque 50 fois moins sensible que les coefficients  $r_0$  et  $r_{90}$ .

En effet, l'identification du modèle orthotrope quadratique de Hill, nécessite la détermination des coefficients d'anisotropie  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ . Le coefficient  $a_3$  est identifié à partir de l'essai de traction plane, ceci apparaît le bon choix pour identifier ce coefficient à partir de la traction plane, puisque le coefficient d'anisotropie  $r_0$  est exprimé uniquement en fonction du coefficient d'anisotropie  $a_3$  :  $r_0 = \frac{1 - 2a_3}{1 + 2a_3}$ .

Cependant, la figure (5.7) représente un cas relativement différent de celui rencontré avec les tôles 1 et 2. Dans ce cas de figure, nous constatons que le coefficient  $r_{90}$  a une influence relativement supérieure à celle du coefficient  $r_0$  sur la réponse du modèle. Pourtant la différence entre les deux sensibilités n'est pas important, il faut noter que le calcul des

indicateurs de sensibilité ou les courbes de sensibilité dépendent de la valeur des paramètres identifiés.

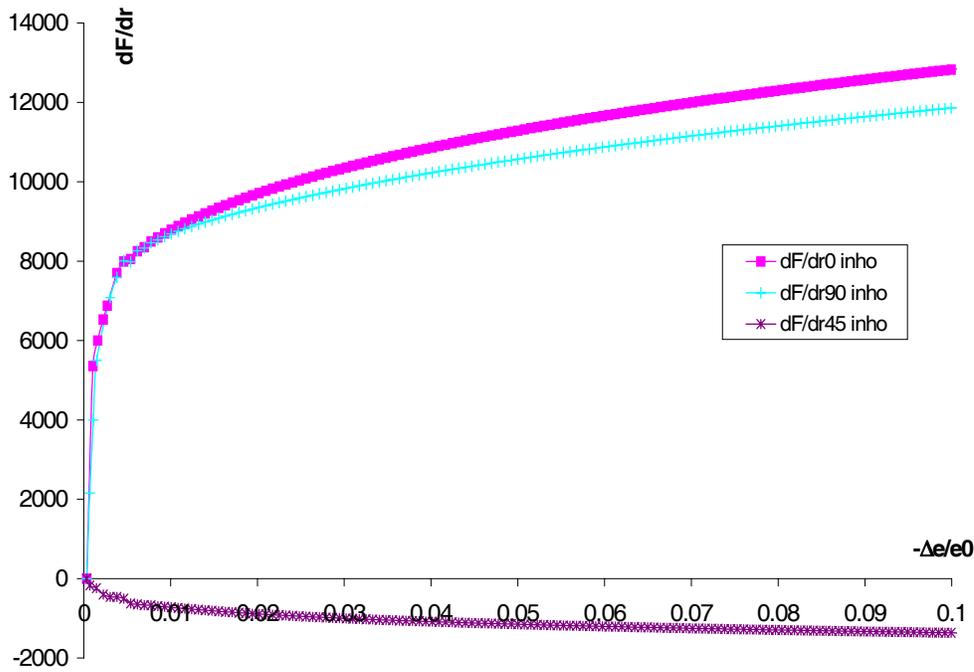


FIG. 5.5: Sensibilité de la force en traction plane par rapport aux coefficients d'anisotropie  $r_0$ ,  $r_{45}$  et  $r_{90}$  dans le cas inhomogène (Tôle 1).

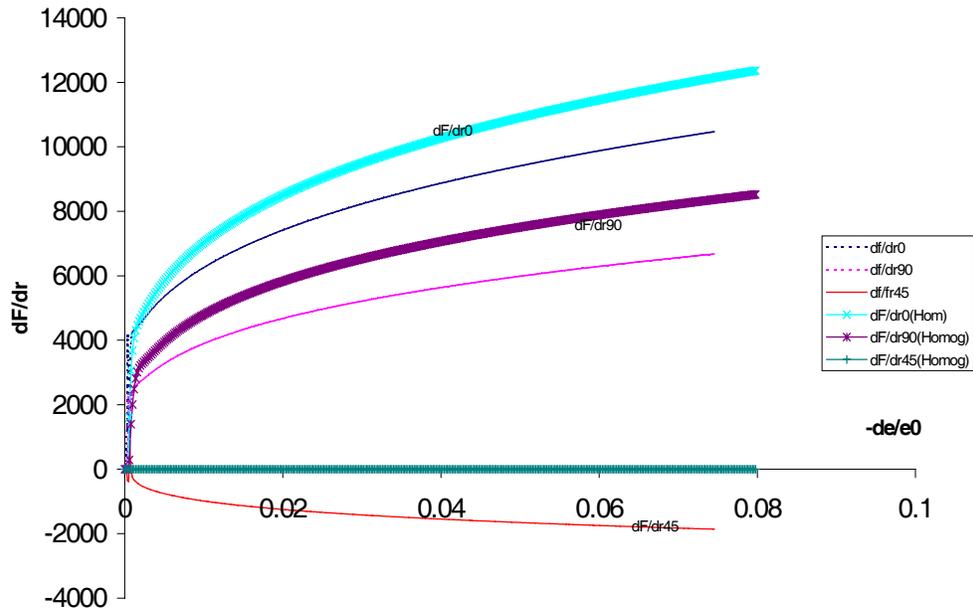


FIG. 5.6: Sensibilité de la force en traction plane par rapport aux coefficients d'anisotropie  $r_0$ ,  $r_{45}$  et  $r_{90}$  dans le cas homogène et inhomogène (Tôle 2).

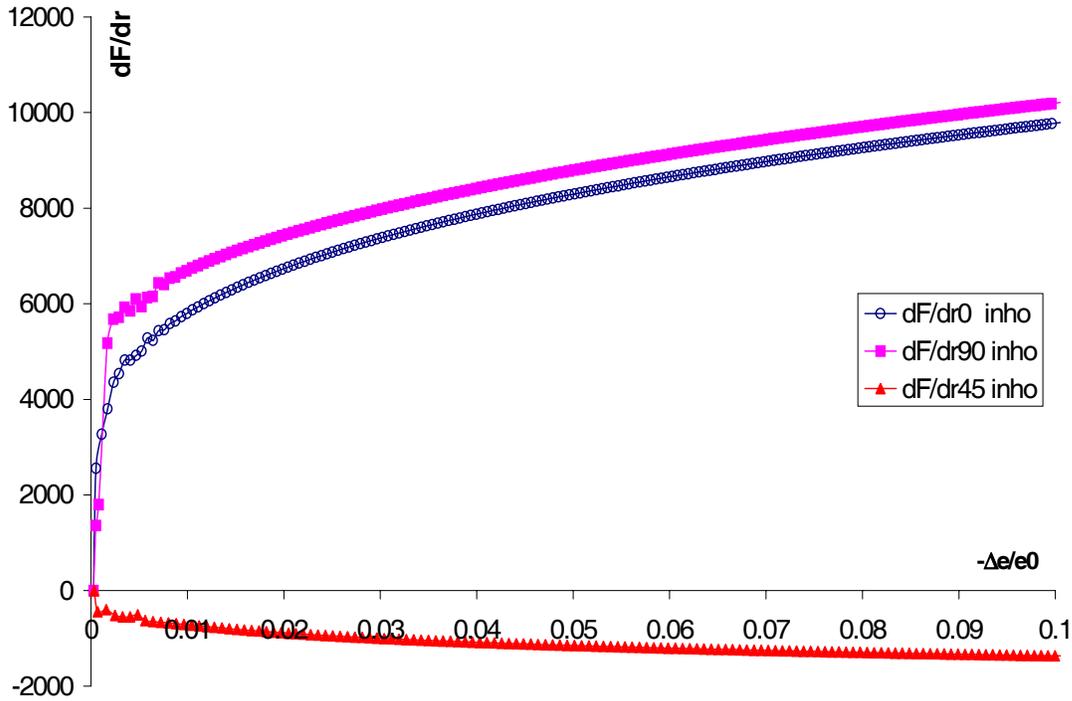


FIG. 5.7: Sensibilité de la force en traction plane par rapport aux coefficients d'anisotropie  $r_0$ ,  $r_{45}$  et  $r_{90}$  dans le cas inhomogène (Tôle 3).

### 5.3.4 Analyse de sensibilité des contraintes

Le calcul de la sensibilité de la réponse globale, c'est à dire, la force de traction de l'essai de traction s'effectue à partir du calcul de la sensibilité des composantes du tenseur de contraintes de Cauchy (relation (5.3)). Dans ce paragraphe, nous avons déterminé la distribution de la variation des contraintes dans la structure (éprouvette de traction plane) après un chargement donné. Ceci revient à représenter les isovaleurs de la sensibilité des contraintes par rapport au coefficient d'anisotropie  $r$ . Nous avons pris comme exemple de cette représentation, la distribution de  $\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r}$  dans l'éprouvette de traction plane, pour la tôle 2 et avec  $r = 1.83$ , qui représente le coefficient identifié du modèle isotrope transverse.

La figure (5.8) représente les isovaleurs de  $\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r}$  dans la structure. Nous observons une distribution non homogène dans la totalité de l'éprouvette. Ceci nous semble une preuve supplémentaire sur la non homogénéité de l'essai de traction plane.

La figure (5.9) représente les isovaleurs de  $\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r}$  dans l'éprouvette. Nous constatons que la composante  $\sigma_{22}$  est plus sensible à la variation du coefficient d'anisotropie  $r$  que la composante  $\sigma_{11}$ . Si nous prenons, à titre d'exemple, un point au centre de l'éprouvette, nous trouvons que  $\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r}$  est de l'ordre de 200 MPa, alors que  $\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r}$  est approximativement égale à 6000 MPa.

La figure (5.10) représente les isovaleurs  $\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r}$  dans la structure. Nous remarquons que, contrairement au cas où l'hypothèse d'homogénéité est considérée et où ce terme doit être nul, dans ce cas inhomogène, la variation de la composante  $\sigma_{12}$  par rapport à  $r$  est presque

du même ordre de grandeur que le terme  $\frac{\partial \sigma_{11}}{dr}$ .

En effet, au centre de l'éprouvette,  $\frac{\partial \sigma_{12}}{dr}$  est de l'ordre de -77 MPa.

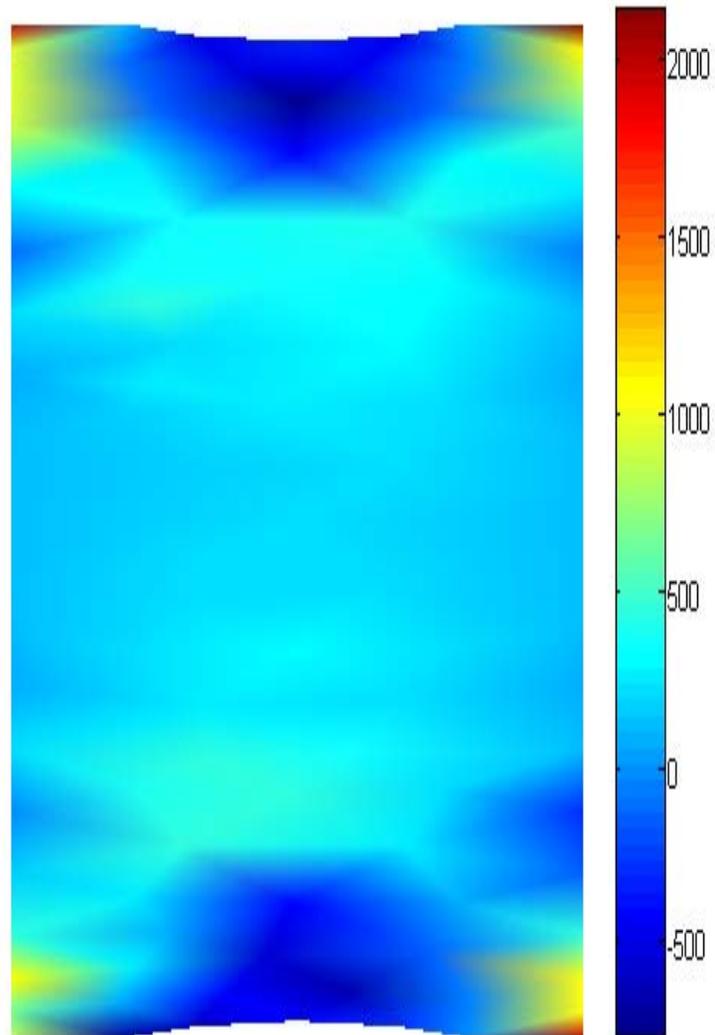


FIG. 5.8: Représentation des isovaleurs de  $\frac{\partial \sigma_{11}}{dr}$  (Tôle 2).

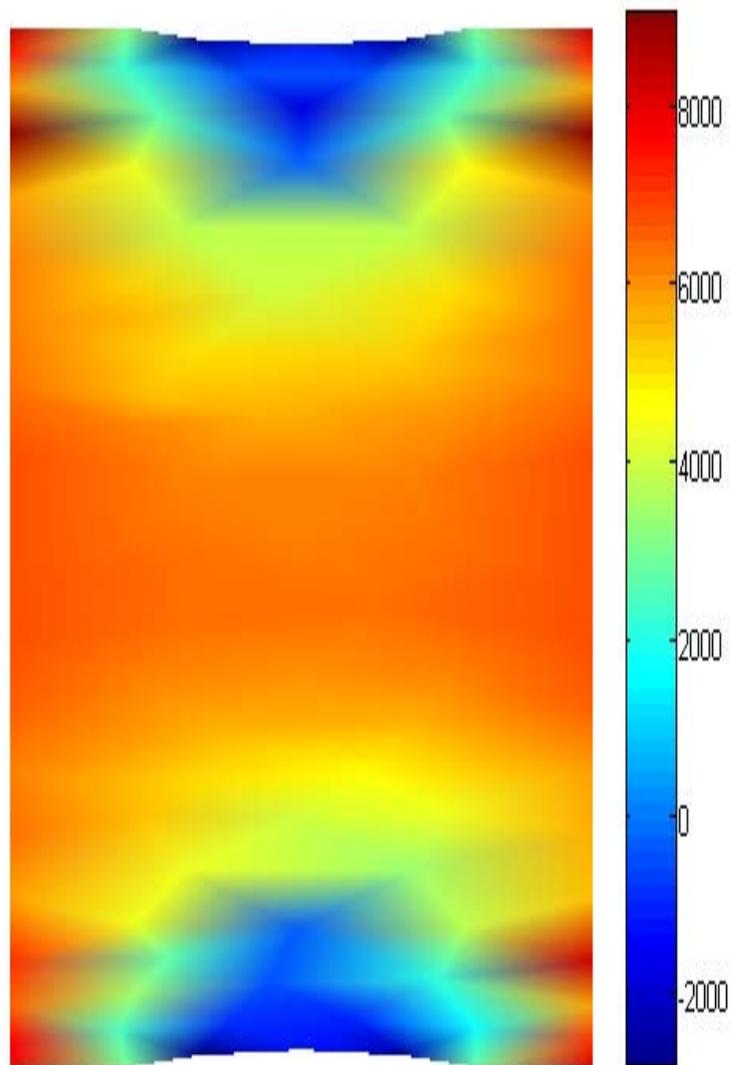


FIG. 5.9: Représentation des isovaleurs de  $\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r}$  (Tôle 2).

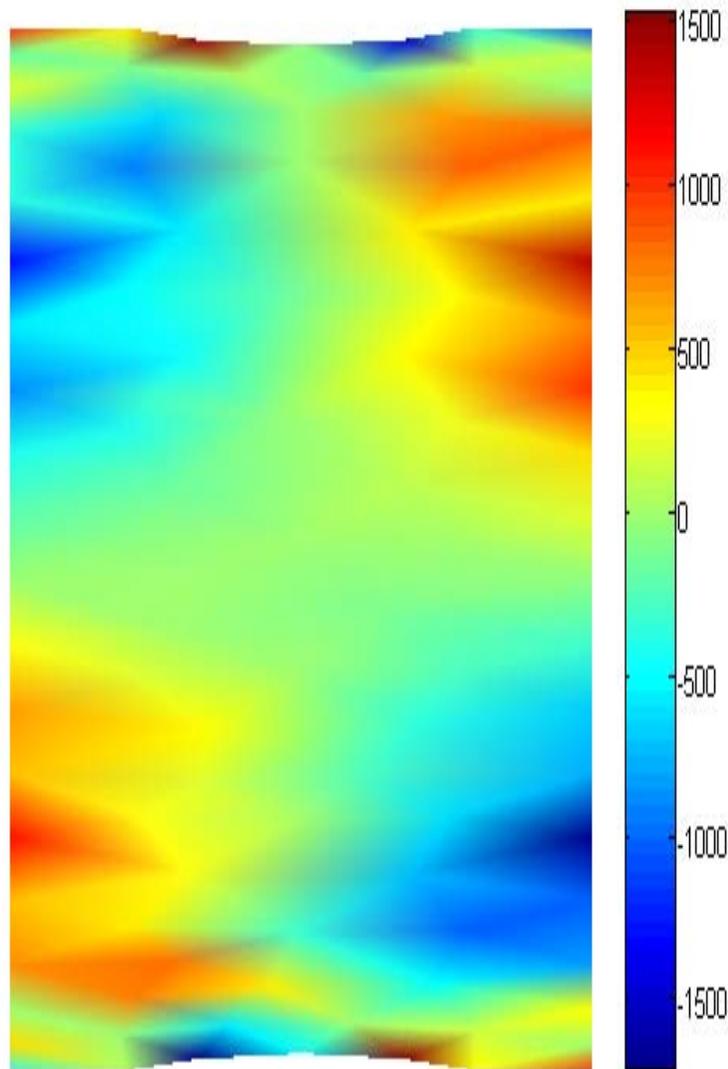


FIG. 5.10: Représentation des isovaleurs de  $\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r}$  (Tôle 2).

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthodologie spécifique pour l'analyse de sensibilité des réponses des modèles de comportement par rapport aux coefficients d'anisotropie identifiés est présentée. Cette méthode de calcul de sensibilité est développée sur la base d'une méthode de différenciation semi analytique de la réponse globale (effort) d'un modèle de comportement par rapport à un coefficient d'anisotropie donné. Cette méthode découle de manière systématique de la méthode particulière que nous utilisons pour résoudre le problème élastoplastique. Cette méthode a la faveur d'être rigoureuse et précise, comparé à une méthode purement numérique et classique, c'est la méthode des différences finis. Cette dernière méthode, bien qu'elle soit facile à implémenter dans des codes de calcul, mais elle est lourde et moins précise dans le calcul de la dérivée d'une réponse donnée.

Pour classer un ensemble d'essais, afin de chercher quel est l'essai le mieux placé, à partir duquel nous identifions les paramètres de comportement avec précision ? Cet essai devra posséder la sensibilité la plus élevée par rapport à ces paramètres, comparé à la sensibilité des autres essais par rapport à ces mêmes paramètres. Nous avons défini un indicateur de sensibilité permettant de qualifier la sensibilité des essais de traction plane, expansion équi-biaxiale et le cisaillement simple par rapport au coefficient d'anisotropie.

Nous avons montré que l'essai d'expansion est relativement plus sensible que la traction plane et le cisaillement simple, mais l'expansion reste un essai qu'il faut bien maîtriser expérimentalement.

Une analyse de sensibilité de la réponse de l'essai de traction plane est effectuée. Nous avons considéré dans cette analyse l'hypothèse d'homogénéité et non homogène de l'essai. Nous avons calculé la sensibilité de la force de traction plane où cette force est calculée par le modèle orthotrope quadratique de Hill. Cette sensibilité de la force est évaluée par rapport aux coefficients d'anisotropie  $r_0$ ,  $r_{45}$  et  $r_{90}$ . Généralement, cette force calculée est plus sensible au coefficient d'anisotropie  $r_0$  qu'aux coefficients  $r_{45}$  et  $r_{90}$ . D'ailleurs, la réponse de cet essai est sensible au coefficient  $a_3$ , que nous avons identifié à partir de la traction plane. Toutefois, il ne faut pas perdre de vue que le calcul de sensibilité de la réponse d'un modèle donné dépend de la valeur des coefficients identifiés.

Finalement, et pour conclure, nous avons pu établir une méthode permettant de calculer la dérivée de la force avec précision. Sachant calculer le gradient de la fonction objectif à minimiser avec précision dans un problème d'identification, nous pouvons intégrer toutes les méthodes d'optimisation d'ordre 1 (les méthodes du gradient) pour les coupler enfin, avec la méthode des éléments finis dans une identification inverse envisageable avec toute rigueur.

# Conclusion générale

**L**e but de ce travail était essentiellement de contribuer à la définition et à la mise en oeuvre d'une stratégie d'identification des lois de comportement de tôles anisotropes à travers une interaction expérience-calcul. Les essais expérimentaux que nous avons utilisés dans cette identification sont relativement complexes (non homogènes). En particulier, nous avons montré que l'essai de traction plane est fortement hétérogène, même au centre de l'éprouvette. L'identification classique des coefficients d'anisotropie à partir de cet essai, lorsqu'il est interprété comme homogène, conduit à des résultats, parfois dérisoires, car cette hypothèse représente une forte approximation.

Dans ce travail, nous avons mis en oeuvre un algorithme d'identification inverse basé sur le couplage d'une méthode particulière pour le calcul de structures par éléments finis et une procédure d'optimisation (méthode du Simplexe). Cet algorithme permet d'identifier les coefficients d'anisotropie d'une manière rigoureuse en surmontant l'hypothèse d'homogénéité qui n'est pas toujours vérifiée pour tous les essais mécaniques réalisés. Nous avons utilisé un algorithme de calcul de structures par éléments finis convivial pour l'intégration de modèles de comportement élastoplastiques. L'idée de base est d'écrire le problème élastoplastique comme une succession de problèmes élastiques linéaires, où la matrice tangente n'est pas utilisée. La méthode d'optimisation du Simplexe que nous avons utilisée pour coïncider la réponse calculée (force de traction) par la méthode des éléments finis avec la réponse expérimentale correspondante, a l'avantage d'être robuste et elle ne nécessite pas l'évaluation du gradient de la fonction objectif à minimiser.

Pour identifier les coefficients d'anisotropie, deux stratégies peuvent être considérées :

- soit que ces coefficients sont identifiés aux coefficients d'anisotropie expérimentaux
- soit qu'ils sont identifiés à partir des courbes d'écroutissement des essais mécaniques

En effet, nous avons défini et mis en oeuvre une méthode basée sur la deuxième stratégie. La première application de l'algorithme d'identification inverse est envisagée pour identifier un modèle de comportement simple, basé sur le critère quadratique isotrope transverse. Dans un premier temps, nous considérons une loi d'évolution plastique associée et un écroutissement isotrope. Dans ce cas, un seul coefficient caractérisant l'anisotropie du matériau est identifié. L'identification inverse de ce modèle simple, nécessite une courbe d'écroutissement à partir de l'essai de traction simple et la courbe expérimentale (force - variation d'épaisseur) de l'essai de traction plane au centre de l'éprouvette. Le but de cette application est double : d'une

part, nous avons testé la capacité de l'algorithme d'identification inverse que nous avons développé, sur un cas simple, afin de s'assurer de la robustesse et la rigueur de l'algorithme, pour l'appliquer à l'identification d'autres modèles de comportement plus complexe ; d'autre part, ce modèle est simple et facile à identifier, donc il est naturel de passer par celui-ci avant d'aller chercher d'autres modèles plus riches. Nous avons également identifié ce modèle, en adoptant l'hypothèse d'homogénéité de l'essai de traction plane. Nous avons constaté que la différence entre l'identification par l'approche homogène et l'approche inhomogène à partir des courbes d'érouissage en traction plane est très significative au niveau des coefficients d'anisotropie, alors qu'elle est peu importante si nous comparons les courbes d'érouissage optimales pour chaque approche. Les coefficients d'anisotropie identifiés par la méthode inverse présentent une meilleure approximation des coefficients d'anisotropie expérimentaux. La validation de ce modèle, en utilisant les coefficients d'anisotropie identifiés par la méthode inverse, pour décrire le comportement d'autres essais (trajets de chargement), a montré que ces coefficients permettent de prévoir d'une manière relativement satisfaisante l'anisotropie des courbes d'érouissage en expansion équibiaxiale, alors qu'ils sont non représentatives pour l'essai de cisaillement simple. Le deuxième modèle que nous avons identifié est le modèle isotrope transverse non associé. Son identification nécessite une courbe d'érouissage de l'essai de traction simple et deux coefficients d'anisotropie. Ces coefficients représentent respectivement le coefficient d'anisotropie du critère plastique et le coefficient d'anisotropie du potentiel plastique, qui est souvent identifié au coefficient d'anisotropie expérimental de Lankford. Ce modèle permet, généralement, de tenir compte à la fois de l'anisotropie de la courbe d'érouissage et de l'anisotropie des déformations plastiques. La validation de ce modèle est moins bonne pour prévoir d'autres trajets de chargement. Par conséquent, le passage à d'autres critères plus anisotropes que les deux modèles précédents est nécessaire. Par la suite, nous avons identifié un modèle associé basé sur le critère orthotrope quadratique de Hill. Pour un état de contraintes planes, ce critère présente trois paramètres d'anisotropie indépendants. Afin d'identifier ces paramètres, nous avons développé une stratégie qui consiste à utiliser les courbes d'érouissage des essais de traction hors axes et l'essai de traction plane inhomogène. Nous avons constaté que les coefficients d'anisotropie de ce modèle de comportement qui sont identifiés par la méthode inverse sont plus proches des coefficients d'anisotropie expérimentaux que ceux identifiés par la méthode d'identification homogène. Le modèle de Hill avec plasticité non associée est identifié. Son identification nécessite une fonction d'érouissage, trois paramètres d'anisotropie indépendants pour le critère et trois autres paramètres indépendants pour le potentiel plastique. La stratégie d'identification des paramètres du critère plastique que nous définissons est basée sur les courbes d'érouissage des tractions hors axes et la courbe expérimentale de la traction plane, alors que pour les paramètres du potentiel plastique, nous les identifions à partir des coefficients d'anisotropie expérimentaux dans différentes directions par rapport à la direction du laminage. D'après les résultats obtenus, nous concluons que la forme quadratique du potentiel plastique, similaire à la forme du critère est suffisante pour décrire l'anisotropie des déformations plastiques. Bien que les modèles quadratiques de Hill soient relativement faciles à identifier et utilisés,

ils présentent moins de flexibilité que les critères non quadratiques qui sont en évolution continue. Néanmoins, les critères classiques de Hill restent les critères de base les plus utilisés dans les codes commerciaux de calculs par la méthode des éléments finis. Ces codes sont généralement plus ou moins ouverts pour intégrer d'autres critères de plasticité.

En effet, dans notre code maison de calcul par la méthode des éléments finis, nous avons implémenté, sans difficultés majeures, un critère non quadratique de Barlat relativement récent. Ce critère fait intervenir un coefficient supplémentaire  $m$ , généralement supérieur à 2 et qui dépend de la nature du réseau cristallin du matériau. Ce modèle de Barlat qui a été développé pour décrire le comportement anisotrope des alliages d'aluminium et que nous avons utilisé pour nos tôles, permet en effet de tenir compte de la traction plane et de l'anisotropie des déformations plastiques, c'est à dire de prévoir les coefficients d'anisotropie expérimentaux pour au moins deux tôles.

En général, dans les problèmes d'identification des modèles, l'analyse de sensibilité paramétrique est très importante. Pour étudier l'influence de la variation des paramètres d'anisotropie sur la réponse de modèles de comportement identifiés, nous avons développé une nouvelle méthode de calcul de sensibilité permettant de calculer la dérivée de la force de traction simulée par rapport aux paramètres d'anisotropie. Cette approche est semi-analytique, elle découle d'une manière systématique de l'algorithme que nous utilisons pour le calcul de structures par éléments finis. Elle a l'avantage d'être aussi rigoureuse que la méthode de sensibilité purement analytique et plus précise que la méthode des différences finies purement numérique.

Nous avons, également défini et développé un indice de sensibilité permettant de classer un ensemble d'essais mécaniques (la traction plane, l'expansion équi-biaxiale, le cisaillement simple . . . ) selon leur sensibilité par rapport au coefficient d'anisotropie identifié d'un modèle de comportement donné. A partir de cet indice, nous pouvons déterminer quel est l'essai le plus adéquat à partir duquel nous identifions, avec précision, quel coefficient d'anisotropie.

En conclusion, on peut envisager plusieurs perspectives du présent travail, afin de compléter, voire améliorer les résultats obtenus.

Tout d'abord, le calcul par la méthode des éléments finis que nous avons effectué en petites déformations est envisageable dans une formulation des lois de comportement en grandes déformations. Quand aux critères de plasticité, on peut envisager l'implémentation des critères récemment développés pour mieux tenir compte du comportement d'autres matériaux bien anisotropes.

L'identification inverse que nous avons envisagée dans ce travail, peuvent être effectuée par l'utilisation d'autres méthodes d'optimisation du type gradient. Le calcul de sensibilité développé ici, est d'une grande efficacité dans la précision des paramètres à identifier.

Finalement, ce travail présenté dans ce mémoire constitue une approche pour l'identification fine des modèles de comportement à partir d'essais relativement complexes (des

essais inhomogènes) et une stratégie d'identification qui pourra s'exploiter facilement dans la détermination des coefficients d'anisotropie des tôles destinées à l'emboutissage.

# Bibliographie

- Arnold, G., Hubert, O., Billardon, R. (2001) Identification inverse du comportement élastoplastique de tôles minces à l'aide d'une machine de flexion pure. 15eme Congrès Français de Mécanique, 3-7 Sep. 2001, Nancy, France.
- Atrek, E. (1996) Virtual Loads in Response, Sensitivity analysis. 6<sup>th</sup> AIAA/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimisation. September 4-6, 1996. Bellevue, Washington.
- Atrek, E. (1999) The Virtual Load Method for the Response Sensitivity Analysis of Nonlinear Structures Modeled by Finite Elements. 3<sup>rd</sup> ISSMO/UBCAD/UB/AIAA World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimisation WCSMO-3 May 17-21, 1999, Buffalo, New York.
- Avriel, M. (1976) Nonlinear programming : Analysis and methods. Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, NJ.
- Bakshi, P., Pandey, P.C. (2000) Semi-analytical using hybrid finite elements. *Compt. and Struct.*, No. 77, pp. 201-213.
- Balageas, D.L., Deom, A.A., Boscher, D.M. (1987) Characterization of non destructive testing of Carbon-Epoxy composites by pulsed photothermal method. *Materials Evaluation* 45(4), pp. 461-465.
- Bamberger, A., Chavent, G., Lailly, P. (1980) An optimal control solution of the inverse problem of reflexion seismics. In *Comp. Met.Appl.Sc.Eng* (R.Glowinski, J.L.Lions editors), North Holland.
- Banabic, D. (1997) Sheet metal formability predicted by using the new (1993) Hill's yield criterion. *Advanced Methods in Materials Processing Defects*. (Eds) M. Predeleanu and P. Gilormini, Elsevier Science B.V., pp. 257-264.
- Barlat, F. et al. (1997) Yielding description for solution strengthened aluminium alloys, *Int.J. Plasticity*, Vol. 13, No. 4, pp. 385-401.
- Barlat, F., Lian, J. (1989) Plastic behavior and stretchability of sheet metals Part I : yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions. *Int. J. Plasticity* 5, 51.
- Barlat, F., Lege, D.J., Brem, J.C. (1991) A six-component yield function for anisotropic metals. *Int. J. Plasticity* 7, 693.
- Barlat, F., Chung, K., Richmond, O. (1993) Strain rate potential for metals and its application to minimum plastic work path calculations. *Int. J. Plasticity* 9, 1.
- Barlat, F., Maeda, Y., Chung, K., Yanagawa, M., Brem, J.C., Hayashida, Y., Lege, D.J., Matsui, K., Murtha, S. J., Hattori, S., Becker, R.C., Makosey, S. (1997) Yield function development for aluminium alloy sheets. *J. Mech. Phys. Solids*. 45(11/12), pp. 1727-1763.
- Barlat, F., Brem, J.C., Yoon, J.W., Chung, K., Dick, R.E, Lege, D.J., Pourboghrat, F., Choi, S.H, Chu, E. (2002) Plane Stress yield function for aluminium alloy sheets-part1 :theory. *Int. Jour. of Plasticity* (article in press).

- Bassani, J.L. (1977) Yield characterization of metals with transversely isotropic plastic properties. *Int. J. Mech. Sci.* 19, 151.
- Batoz, J.L., Guo, Y.Q., Naceur, H., Delméziere, A., Knipf-lenoir, C. (2000) Recent improvements on the analysis and optimum process design in deep drawing using inverse approach. *Proceeding ECCOMAS 2000, Barcelona-Spain.*
- Bel Hadj Salah, H., Sidoroff, F., Dogui, A. (1996) Sur une nouvelle approche de calcul de structures élastoplastiques CIMASI'96, 14-16 novembre 1996, Casablanca, Maroc.
- Bel Hadj Salah, H., Sidoroff, F., Dogui, A. (2000) A new approach to elastoplastic calculation in finite deformation. *proceeding of COM 2000 Conference (CD-ROM), Ottawa, Canada, 20-23 Aout 2000.*
- Bel Hadj Salah, H., Sidoroff, F., Dogui, A. (1999) Un algorithme de calcul de structures élastoplastiques pour l'identification des lois de comportement des matériaux. *Rev. Eur. des éléments finis* 8, pp. 879-902.
- Benchouikh, A. (1992) Formulation et identification de loi de comportement anisotropes pour tôles minces en emboutissage. Thèse de doctorat, Ecole centrale de Lyon, France.
- Benchouikh, A., Dogui, A., Sidoroff, F. (1989) Formulation et identification de lois de comportements anisotropes pour tôles minces en emboutissage 2/89. Rapport de contrat RNOV-GIE PSA-IRSID/ECL.
- Box, M.J. (1966) A comparaison of several current optimization methods, and the use of transformations in constrained problems, *Comput. J.* 9, pp. 67-77.
- Box, M.J., Davies, D., Swann, W.H. (1969) *Non-linear optimization Techniques*, ICI Monograph, N.5, Oliver & Boyd, Edinburgh.
- Boyer, B., Massoni, E. (2001) Inverse analysis for identification of parameters during thermomechanical tests. *Numiform 2001, Toyohashi University of technology, june, 18-20, 2001.*
- Budianski, B. (1984) Anisotropic plasticity of plane-isotropic sheets. In : Dvork, G.J., Shield, R.T. (Eds.), *Mechanics of Material Behavior*. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.
- Bui, H.D., Maigre, M. (1988) Facteur d'intensité dynamique des contraintes tiré des grandeurs mécaniques globales, *Compte Rendus de l'Académie des Sciences, Série II, tome 306*, pp. 1213-1216.
- Bui, H.D. *Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux*. Editions : Eyrolles, Paris, (1993).
- Carroll, C.W. (1961) The created response surface technique for optimizing non-linear restrained systems. *Operations Res.*, 9, pp. 169-184.
- Chicone, C., Gerlach, J. (1987) Identifiability of distributed parameters, In *inverse and ill-posed problems*(H.W.Engl, C.W.Greoetsch, editors), Academic Press.
- Chu, E. (1995) Generalisation of Hill's 1979 anisotropic yield criteria. *J. Mat. Process. Tech.* 50, pp. 207-215.
- Davidson, W.C. (1959) Variable metric method for minimization, *SIAM J. Optim.* (1991)1-17(the article was originally published as Argonne National Laboratory Research and Development Report 59990, May 1959(revised November 1959)).
- Dogui, A. (1989) Plasticité anisotrope en grandes déformations. Thèse d'état es-sciences, Université Claude Bernard-Lyon-I, France.
- Duvaut, G. *Mécanique des milieux continus*. Editions : Masson, Paris, (1990).
- Fletcher, R. (1965) Function minimization without evaluating derivatives- a review, *Comput. J.* 8, pp. 33-41.

- Fletcher, R & Powell, M. D.(1963) A rapidly convergent descent method for minimization, *Comput. J.* 6, pp. 163-168.
- Fletcher, R. (1980) *Practical methods of optimization*, volume 1, John Wiley & sons.
- Forestier, R., Boyer, B., Massoni, E., Chastel, Y. (2001) Analyse de sensibilité par dérivation semi-analytique : Identification de paramètres par analyse inverse 3D. 15eme Congrès Français de Mécanique, 3-7 Sep. 2001, Nancy, France.
- Gaaloul, H. (1993) Contribution a la modélisation de l'élastoplasticité anisotrope en grandes déformations- Application aux tôles d'emboutissage. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, France.
- Gavrus, A., Massoni, E., Chenot, J.L. (1994) Computer aided rheology for non linear large strain thermo-viscoplastic behaviour formulated as an inverse problem, in Bui, Tanaka et *al.* (Eds.) *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, Balkema, pp. 123-130.
- Gavrus A, Massoni, E., Chenot, J.L. (1995) Computer aided rheology for constitutive parameter identification, *Proceeding of the fourth International Conference*, Barcelona, Spain.
- Gavrus A, Massoni, E., Chenot, J.L. (1996) An inverse analysis using a finite element model for identification of rheological parameters. *J. Mat. Processing Tech.* 60, pp. 447-454.
- Gelin, J.C., Ghouati, O. (1995) An inverse method for material parameters estimation in the inelastic range, *Comput.Mech.* 16, pp. 143-150.
- Gelin, J.L., Ghouati,O. (1996) An inverse solution procedure for material parameters identification in large plastic deformations, *Comm. in Num. Meth. in Eng.* 12, pp. 161-173.
- Genevois, P. (1992) Etude expérimentale et modélisation du comportement plastique anisotrope de tôles d'acier en grandes transformations. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, France.
- Ghouati, O. (1994) Identification et modélisation numérique directe et inverse du comportement viscoplastique des alliages d'aluminium, Thèse de Doctorat à l'U.F.R. des Sciences et techniques de l'Université de Franche-Comté, France.
- Ghouati, O., Gelin J.L. (1997) An inverse approach for the identification of complex material behaviours, in : H.Sol, C.W.J. Oomens (Eds.), *Material Identification Using Mixed Numerical Experimental Methods*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 93-102.
- Ghouati, O., Gelin, J.C. (1998) Identification of material parameters directly from metal forming processes ,*J.Mat.Proc.Tech.*,80-81, pp. 560-564.
- Ghouati, O., Gelin, J.C. (1998) Sensitivity Analysis in Forming Processes. *Int. Jour. of Forming Proc.*, Vol 1-n3, pp. 297-322.
- Ghouati, O., Gelin, J.C. (2001) A finite element-based identification method for complex metallic material behaviours. *Computational Mat. Science*, 21, pp. 57-68.
- Gotoh,M. (1977) A theory of plastic anisotropy based on a yield function of fourth order(Plane stress state), *Int.J.Mech.Sci.*19, pp. 505-513.
- Gronostajski, Z. (2000) The constitutive equations for FEM analysis. *J. of Mat.Processing Tech.* 106, pp. 40-44
- Hershey, A.V. (1954) The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face centered cubic crystals. *J. Appl. Mech.* 30, 241.
- Hill, R. (1948) A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proc.Roy.Soc.London A*193,281.

- Hill, R. (1979) Theoretical plasticity of textured aggregates. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 85, 179.
- Hill, R. (1990) Constitutive modeling of anisotropic plasticity in sheet metals. *J. Mech. Phys. Solids* 38, 405.
- Hill, R. (1993) A user-friendly of orthotropic plasticity in sheet metals. *Int. J. Mech. Sci.* 35, pp. 19-25.
- Hill, R. (1987) Constitutive dual potential in classical plasticity. *J.Mech.Phys.Solids* 38, 405-417.
- Hosford, W.F. (1972) A generalized isotropic yield criterion. *J. Appl. Mech.* 39, 607.
- Hosford, W.F. (1979) On yield loci of anisotropic cubic metals. 7th North American Metalworking Conf., SME, Dearborn MI, pp. 191-197.
- Hosford, W.F. (1985) Comments on anisotropic yield criteria. *Int. J. Mech. Sci.* 27, pp. 423-427.
- Hosford, W.F. (1992) *The plasticity of Crystal and Polycrystals*. Oxford University Press, Oxford.
- Hosford, W.F. (1996) On the crystallographic basis of yield criteria. *Textures and Micro-structures* 26-27, pp. 479-493.
- Jin, Q., Wu, H. (2000) The parameter identification of superplastic constitutive model using optimisation. *Advances in Engineering Plasticity*, vol.177-180, pp. 607-424.
- Karafillis, A.P, Boyce, M.C. (1993) A general anisotropic yield criterion using bounds and transformation Weighting tensor. *J.Mech.Phys.Solids*. Vol.41.No.12,pp. 1859-1886.
- Khalfallah, A., Bel Hadj Salah, H., Dogui, A. (2001) Anisotropic parameter identification using inverse method. (Eds.), *Proc. 4th Int. ESAFORM. Conf. on Metal Forming.*, Liège, Belgium.
- Khalfallah, A., Bel Hadj Salah, H., Dogui, A. (2002a) Anisotropic parameter identification using inhomogeneous tensile test. *European Journal of Mechanics A/Solids* 21,(6), pp. 927-942.
- Khalfallah, A., Bel Hadj Salah, H., Dogui, A. (2002b) Identification paramétrique et analyse de sensibilité. (Eds :) Dogui, A., Saanouni, K., Debordes, O. *Actes des 4eme Jour. Sc. et Tech. en Méca. et Mat., Les Procédés de formages : Réalité et Simulation.*, pp. 63-70. 25-26 Oct 2002, Monastir, Tunisie.
- Kleinermann, J.P. (2000) Identification paramétrique et optimisation des procédés de mise à forme par problèmes inverse. Thèse de Doctorat, Université de Liège, Belgique.
- Lademo, O.-G., Hopperstad, O.S., Langseth, M. (1999) An evaluation of yield criteria and flow rules for aluminium alloys. *Int. J. of Plast.* 15, pp. 191-208.
- Lagarias, J.C, Reeds, J.A, Wright, M.H et Wright, P.E. (1998) Convergence properties of the Nelder-Mead Simplex method in low dimensions. *Society for Industrial and Applied Mathematics*.
- Lam, Y.C., Khoddam, S. Thomson, P.F. (1998) Inverse computational method for constitutive parameters obtained from torsion, plane-strain and axisymmetric compression tests. *J. of Materials Processing Tech.* 83 pp. 6271.
- Law, V.J., Sharma, Y. (1997) Computation of the gradient and sensitivity coefficients in sum of squares minimization problems with differential equations models. *Compters chem. Engn.* Vol. 21, No. 12, pp. 1471-1479.
- Lewis, R.M., Torczon, V., Trosset, M.W. (2000) Direct search methods : then and now. *J. Comput. and Applied Mathematics*, 124, pp. 191-207.
- Lian, J., Zhou, D., Baudelet, B. (1989) Application of Hill's new yield theory to sheet metal forming. Part I : Hill's 1979 criterion and its application to predict sheet forming limit. *Int. J. Mech. Sci.*, 31 (41) 23.

- Logan, R.W., Hosford, W.F. (1980) Upper-bound anisotropic yield locus calculations assuming  $\langle 111 \rangle$ -pencil glide. *Int. J. Mech. Sci.* 22, 419.
- Mahnken, R., Stein, E. (1994) The identification of parameters for viscoplastic models via finite element methods and gradient methods, modelling simul. *Mater.Eng.* 2, pp. 597-616.
- Mahnken, R., Stein, E. (1996) Parameter identification of viscoplastic model based on analytical derivatives of a least-squares functional and stability investigations. *Int.J.Plast.* 12(4), pp. 451-479.
- Mahnken, R., Stein, E. (1997) Parameter identification for finite element deformation elasto-plasticity in principal directions. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 147, pp. 17-39.
- Mahnken, R. Kuhl, E. (1999) Parameter identification of gradient enhanced damage models with finite element method. *Eur.J.Mech. A/Solids*, 18, pp. 819-835.
- Matlab, The Maths Works, Natick, MA, 1994.
- Nelder, J.A & Mead R.A. (1965) Simplex method for function minimization, the computer journal, 7, pp. 308-313.
- Nocedal, J. (1992) Theory of algorithms for unconstrained optimisation. *Acta Numerica*, pp. 199-242.
- Picart, P., Michel, J.F., Ghouati, O. (1999) Identification by inverse method of material behavior with size effect in sheet metal forming, in : J.L. Gelin, P.Picart(Eds.), *Proceedings of NUMISHEET'99*, vol. 1, pp. 375-380.
- Pietrzyk, M., Kedzierkiski, Z., Lenard, J.G. (1998) Inverse analysis applied to the evaluation of rheological and microstructural parameters in hot forming of sheets, in : J. Huétnik, F.P.T. Baaijens(Eds.), *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications*, NUMIFORM'98, Balkema, pp. 163-168.
- Powell, M.J.D. (1964) An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, *Compt. J.* 7, pp. 155-162.
- Powell, M.J.D. (1998) *Direct search algorithms for optimisation calculations*. Acta Numerica, Vol 7, Cambridge University Press, pp. 287-336.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. and Vettering, W.T,(1988) *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Rykov, A. (1980) Simplex methods of direct search, *Engineering Cybernetics*, 18, pp. 12-18.
- Rykov, A. (1983) Simplex algorithms for unconstrained optimisation, *Problems of control and information theory*, 12, pp. 195-208.
- Schnur, D.S, Zabarar, N. (1992) An inverse method for determining elastic material properties and a material interface *Int.J.Numer. Methods Engrg.* 33, pp. 2039-2057.
- Spendley, W., Hext, G.R., Himsforth, F.R. (1962) Sequential application of simplex designs in optimisation and evolutionary operation, *Technometrics* 4, pp. 441-461.
- Srikanth, A., Zabarar, N. (2000) Shape optimization and perform design in metal forming processes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190, pp. 1859-1901.
- Swann, W. H. (1972) Direct search methods, in : W. Murray, Eds., *Numerical methods for unconstrained optimization*, Academic Press, New York, pp. 13-28.
- Tarantola, A., *Inverse Problem theory*, Elsevier, (1987).
- Tikhonov, A.N., Arsenine, V. (1976) *Méthode de résolution de problèmes mal posés*. Editions Mir, Moscow.

- Tikhonov, A.N. (1977) Solutions of ill posed problems. Winston, Washington DC.
- Torczon, A. (1989) Multi-directional search : A direct search algorithm for parallel machines, Ph.D. thesis, Rice University, Houston, TX.
- Tortorelli, D.A., Michaleris, P. (1994) Design sensitivity analysis : Overview and Review, Inverse problems in Engineering, Vol.I, pp. 71-105.
- Tortorelli, D.A., Michaleris, P., Vidal, C.A. (1994) Tangent operators and design sensitivity formulations for transient non-linear coupled problems with application to elastoplasticity. Int. J. Numerical Mech. in Engrg., 37, pp. 2471-2499.
- Toshihiko, K. (1998) Measurement and analysis of differential work hardening in cold-rolled steel sheet under biaxial tension", J.Mat.Proc.Tech 80-81, pp. 517-523.
- Walters, F. H., Parkar, L. R., Morgan, S. L. and Deming, S. N. (1991) Sequentiel simplex optimization, CRC Press, Boca Raton, FL.
- Wright, M. H. (1995) Direct search methods : once scorned, now respectable, in Numerical analysis 1995 : Proceedings of the 1995 Dundee Biennial conference in numerical analysis, D. F. Griffiths and G. A. Watson, eds., Addison Wesley Longman, Harlow, UK, pp. 191-208.
- Yoon, J.W., F. Barlat, Chung, K., Pourboghrat, F., D.Y., Yang, D.Y. (1998) Influence of initial back stress on the earing prediction of drawn cups for planar anisotropic aluminum sheets. J. of Mat. Processing Tech. 80-81, pp. 433-437.

## LISTE DES PUBLICATIONS

### .1 Publication des articles

1. Ali KHALFALLAH, Hédi BEL HADJ SALAH, Abdelwaheb DOGUI  
**Parameter identification and sensitivity analysis**  
International Journal of Forming Processes (2004)
2. Hédi BEL HADJ SALAH, Ali KHALFALLAH, Amna ZNAIDI, Abdelwaheb DOGUI,  
François SIDOROFF  
**Constitutive parameters identification for elastoplastic materials in finite  
deformation**  
Journal de Physique IV EDP Sciences, Ulis. p.03-10 (2003)
3. Ali KHALFALLAH, Hédi BEL HADJ SALAH, Abdelwaheb DOGUI  
**Anisotropic parameter identification using inhomogeneous test**  
European Journal of Mechanics A/Solids, pp.927-942 (2002)

### .2 Communications

1. Hédi BEL HADJ SALAH, Ali KHALFALLAH, Amna ZNAIDI, Abdelwaheb DOGUI,  
François SIDOROFF  
**Constitutive parameters identification for elastoplastic materials in finite  
deformation**  
6th Euromech-Mecamat Conference on non-linear Mechanics of Anisotropic materials,  
University of Liège, September 9-12, 2002, Belgium.
2. Ali KHALFALLAH, Hédi BEL HADJ SALAH, Abdelwaheb DOGUI  
**Identification paramétrique et analyse de sensibilité**  
JSTMM'02, Octobre 2002, Monastir-Tunisie.
3. Ali KHALFALLAH, Hédi BEL HADJ SALAH, Abdelwaheb DOGUI  
**Anisotropic parameter identification using inverse method**  
4th International ESAFORM Conference on Material Forming, April 2001, Liège -  
Belgium.
4. Ali KHALFALLAH, Hédi BEL HADJ SALAH, Abdelwaheb DOGUI  
**Identification des coefficients d'anisotropie des matériaux par une méthode  
inverse**  
3ème JMI'00, Avril 2000, Sfax-Tunisie.
5. Hédi BEL HADJ SALAH, Ali KHALFALLAH, Abdelwaheb DOGUI  
**A new approach to elastoplastic structure analysis for material behavior  
identification**  
International Conference on Scientific Computations, 1999, Lebanon.

# IDENTIFICATION DES LOIS DE COMPORTEMENT ÉLASTOPLASTIQUES PAR ESSAIS INHOMOGÈNES ET SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Auteur : Ali KHALFALLAH

## Résumé :

Le sujet de thèse que nous abordons concerne l'identification des lois de comportement élastoplastiques anisotropes en vue de leur utilisation pour la simulation numérique des procédés de mise en forme par déformation plastique de tôles minces métalliques d'emboutissage. Nous avons essentiellement contribué à la définition et à la mise en oeuvre de stratégies et techniques d'identification des lois de comportement à partir d'essais expérimentaux. Les essais classiquement utilisés pour l'identification des modèles : la traction simple, dans les axes et hors axes, la traction plane et le gonflement hydraulique (un essai alternatif à l'essai d'expansion équibiaxée) sont présentés et analysés du point de vue homogénéité des déformation pour aboutir à la relation contrainte-déformation à partir des mesures globales force-déplacement. L'identification des modèles de comportement à partir des essais inhomogènes nécessite une simulation numérique couplée avec une méthode d'optimisation (méthode du Simplexe) pour minimiser l'écart entre les résultats expérimentaux et la réponse du modèle calculée par une méthode d'éléments finis. Nous avons identifié des lois de comportement élastoplastiques anisotropes avec écrouissage isotrope. Ces lois sont basées, en particulier, sur le choix d'une ou deux fonctions "contrainte équivalente" définissant le critère de plasticité et le potentiel plastique (cadre de la normalité non associée) ayant la même structure que la fonction seuil. Plusieurs critères quadratiques et non quadratiques sont alors utilisés. Nous avons développé une technique spécifique d'analyse de sensibilité des essais par rapport aux différents paramètres à identifier de la loi de comportement. Cette technique est mise en oeuvre sur des exemples pratiques.

**Mots clés :** *Identification, traction plane, Elastoplasticité, Anisotropie, Analyse de sensibilité.*

## Abstract :

The subject of the thesis deals with the anisotropy elastoplastic constitutive behavior law identification, in the aim of its use for the numerical simulation of the metal sheet deep drawing processes. Essentially, we have contributed to the definition and the application of constitutive behavior identification techniques and strategies from experimental tests. The classical tests used for the identification : Simple tensile test, in the axes and off-axes, plane tensile test and the bulge test (as an alternatif of the equibiaxial test) are presented and analyzed from the point of view of the deformation homogeneity to outcome to the stress-strain relation from the globales measurements force-displacement. The identification of the behavior laws from inhomogeneous tests needs numerical simulation coupled with an optimisation procedure (simplex method) for minimizing the difference between measured results and model responses calculated by finite element method. We have identified anisotropy elastoplastic behaviour laws with isotropy hardening law. These laws are based on the choice of the constitutive functions "equivalent stress" which defines the yield locus and plasticity potential (non associated plasticity) that has the same form as the yield function. Several quadaratic and non quadratic yield loci are then used. We have developed a specific sensitivity analysis method of the tests in relation to the identified behaviour law parameters. This method is applied on practical examples.

**Key Words :** *Identification, Plane tensile test, Elastoplasticity, Anisotropy, Sensitivity analysis.*