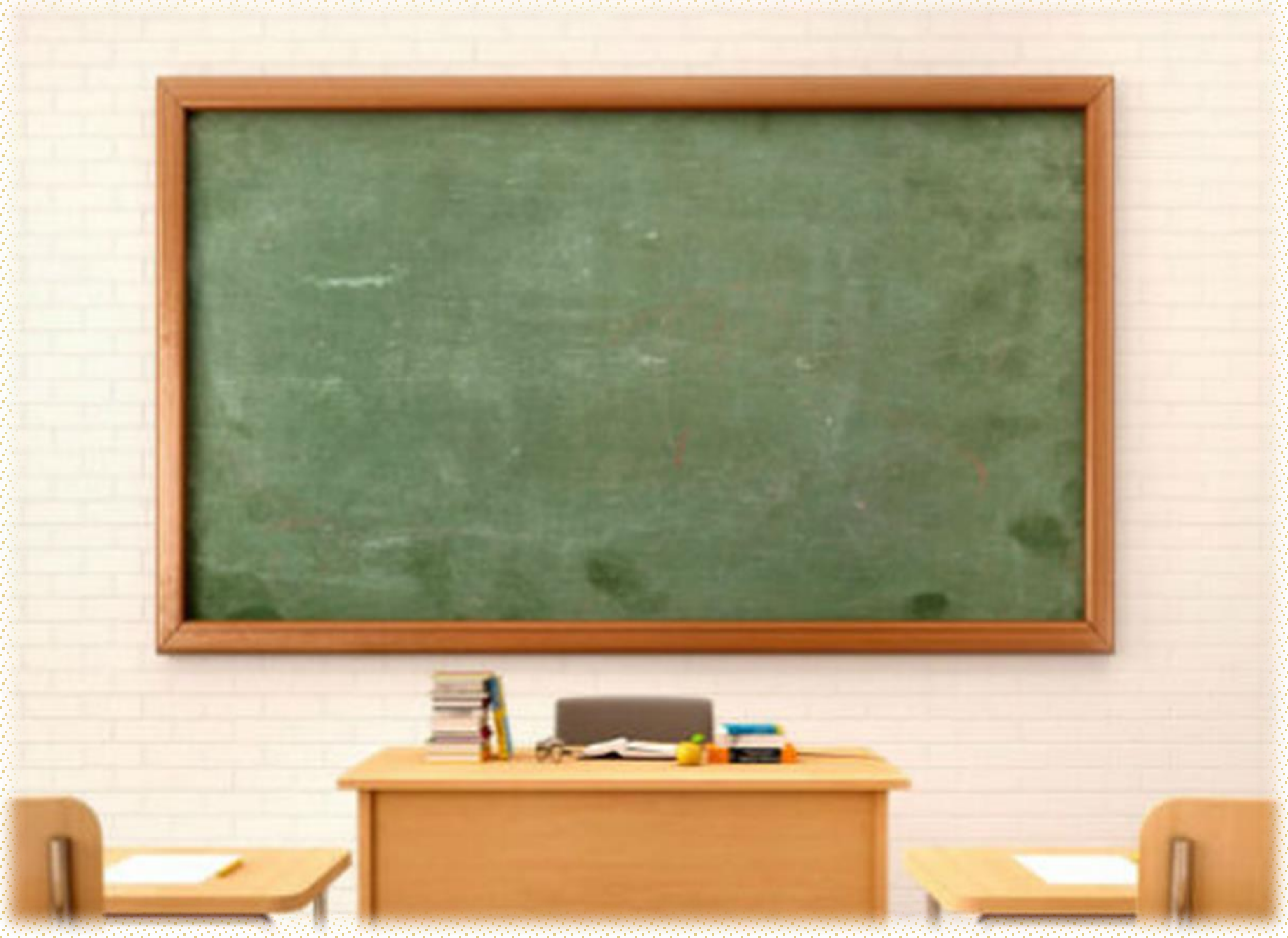


Carla Simões

Professor, uma função com vários domínios

Relatório de Estágio do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, orientado pelo Professor Doutor Jaime Silva e Doutor Valter Roque, apresentado ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

julho de 2018

· U C ·

Universidade de Coimbra

Professor, uma função com vários domínios

Carla Alexandra Lopes Simões

Universidade de Coimbra

Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Master in Mathematics Teaching in the 3rd Cycle of Basic and Secondary Education

Relatório de Estágio | Report of Stage

julho de 2018

Agradecimentos

O presente relatório remete-se ao atual ano de estágio onde foram diversos os apoios que me conduziram neste percurso repleto tanto de desafios e adversidades como de alegrias e superações.
Correndo o risco de não mencionar, por esquecimento, algum contributo ao longo desta fase, expresso agora algumas palavras de gratidão:

- Ao professor cooperante, Valter Roque, pela prontidão manifestada para orientar o estágio em questão, pelo tempo dedicado, pela incansável orientação e confiança que sempre me transmitiu e por ser, sem dúvida, um amigo que levo para o resto da vida e que muito me apoiou nos momentos mais decisivos ao longo deste ano;
- Ao meu marido, João, cujo matrimónio decorreu durante o estágio e com todo o carinho e compreensão me concedeu a energia e tempo para a execução do mesmo;
- Aos meus pais, Paula e José, pela oportunidade de ingressar no ensino superior e posteriormente realizar o Mestrado apesar das dificuldades;
- Ao meu irmão, João, por me ouvir nos momentos em que precisei de um ombro amigo;
- Aos docentes da escola por me acolherem e transmitirem ensinamentos que certamente me ajudarão na jornada que me espera;
- Aos funcionários que muito me ajudaram ao longo desta etapa;
- Aos meus alunos pelo respeito, atenção e amizade;
- A todos os meus professores até à data, principalmente ao professor Doutor Jaime Carvalho e Silva pela disponibilidade.

Resumo

O presente relatório responde a um dos quesitos específicos do Estágio Curricular inerente ao segundo ano do Mestrado em Ensino da Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, cuja principal finalidade visa a apresentação e análise das atividades desenvolvidas ao longo do ano letivo 2017/2018.
Sob a supervisão do professor cooperante, professor Valter Roque, e do orientador científico, professor Doutor Jaime Carvalho e Silva, exerci a minha função de professora estagiária na Escola Secundária de Emídio Navarro, localizada no distrito de Viseu.
O relatório em questão encontra-se dividido em seis partes: introdução, contextualização, componente letiva, componente não letiva, atividades extracurriculares e conclusão.
No primeiro capítulo, realizo uma breve síntese do meu percurso antes do Estágio salientando alguns obstáculos e inquietações.
No segundo capítulo, procedo a uma breve descrição da escola e das três turmas orientadas, bem como a receção dos diferentes elementos da comunidade escolar.
No terceiro capítulo, relato as atividades vivenciadas ao longo destes dez meses alusivas à componente letiva como por exemplo a direção de turma e os encargos característicos na prática da mesma.
No quarto capítulo, menciono algumas tarefas não exigidas pelo cargo de professor, mas recorrentes para a maioria dos profissionais associados a disciplinas exatas como a Matemática tais como concursos relativos a esta área a nível nacional e internacional.
No quinto capítulo, apresento algumas atividades intrínsecas ao Estágio Curricular e outras situações relativas à Matemática e à prática docente.
Termino com uma reflexão global do presente ano de Estágio e com a fundamentação da escolha do título deste relatório.

Palavras-Chave: Alunos, Estágio, Mestrado, Professor, Turma

Abstract

The present report answers to one of the specific requirements of the Curricular Internship inherent to the second year of the Master's Degree in Mathematics Teaching in the 3rd cycle of Basic and Secondary Education of the Department of Mathematics of the University of Coimbra, whose main purpose is to present and analyze the activities developed during the academic year of 2017/2018.
Under the supervision of the cooperating professor, Professor Valter Roque, and the scientific advisor, Professor Jaime Carvalho e Silva, I worked as a trainee teacher at the Emídio Navarro High School, located in the district of Viseu.
The report in question is divided into six parts: introduction, contextualization, learner component, non-learner component, extracurricular activities and completion.
In the first chapter, I make a brief summary of my academic course before the internship highlighting some obstacles and concerns.
In the second chapter, I make a brief description of the school and the three oriented classes, as well as the reception of the different elements of the school community.
In the third chapter, I report on the activities experienced during these ten months alluding to the teaching component such as class management direction and the inherent concerns in the practice of the same. In the fourth chapter, I mention some tasks not required by the poslicy of professor, but recurring to most professionals associated with scientific curriculums such as Mathematics, such as contests relating to this area at national and international level.
In the fifth chapter, I present some activities intrinsic to the Curricular Internship and other situations related to Mathematics and the practice of being a teacher.
I finish with an overall reflection of the current internship year and with the reasoning for choosing the title of this report.

Keywords: Students, Internship, Teacher, Master's Degree, Class

Conteúdo

Lista de Abreviaturas

ESEN	Escola Secundária de Emídio Navarro
DMUC	Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
FCTUC	Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
NEE	Necessidades Educativas Especiais
PEE	Projeto Educativo de Escola
OPM	Olimpíadas Portuguesas de Matemática

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Após ter concluído o ensino secundário, realizaram-se as candidaturas para o acesso ao ensino superior, tendo colocado como primeira opção a Licenciatura de Matemática na Universidade de Coimbra.
Desde essa altura, quando era questionada sobre o curso que escolhera, as pessoas estranhavam a minha opção, uma vez que o curso teria, obviamente, muita matemática e, principalmente, pelo seu elevado grau de dificuldade, o que não agrada a maioria da sociedade.
No entanto não me dei por vencida e, apesar de alguns desafios, conclui o curso com muito orgulho.
Posteriormente, terminada esta etapa e com a possibilidade de realizar o Mestrado, foi altura de fazer a escolha entre a razão e o sonho. A razão (e a sociedade em geral) dizia-me para escolher uma profissão com saídas profissionais e alta taxa de empregabilidade, porém o meu sonho era ser professora, talvez por ter tido bons exemplos ao longo dos meus anos de escolaridade ou por acreditar que conseguia levar tão grande missão a bom porto.
Por fim, decidi segui r o coração e ingressei no Mestrado em Ensino da Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário da FCTUC.
Ao longo do primeiro ano letivo fui alertada, nem sempre de uma forma muito motivadora mas realista, para as escassas saídas profissionais que a carreira docente proporciona. Há muito que a profissão tinha perdido os seus "momentos gloriosos". Entretanto, concluído o ano curricular deste Mestrado e sendo a hora de iniciar o Estágio Curricular surgiram as principais preocupações: "Será que vou ser capaz?", "Terei eu a força para enfrentar e dirigir uma turma com muitos alunos?", "Será que eles vão compreender quando eu estiver a explicar?",...
Por outro lado, foram algumas as críticas relativamente à minha maneira de ser, alegre e extrovertida, pronta a agraciar as pessoas com um sorriso sempre que possível, pois consideravam que tal atitude ia encorajar os alunos a serem mais desordeiros em ambiente de sala de aula.
Sem nunca desistir, retrato agora algumas das experiências vivenciadas ao longo do Estágio Curricular, que vieram confirmar, para mim mesma, que vale a pena seguir o sonho.

Capítulo 2

Contextualização

2.1 Descrição da Escola

A Escola Secundária de Emídio Navarro nasceu a 9 de dezembro de 1898 como Escola de Desenho Industrial de Viseu tendo iniciado o seu funcionamento em janeiro de 1900. Em 31 de Agosto de 1915 transformou-se em Escola Industrial e, em 1926, com a fusão das Escolas Industrial e de Comercial denominou-se Escola Industrial e Comercial de Viseu.
Com o passar dos anos teve diferentes designações: em 1930, Escola Industrial e Comercial Dr. Azeredo Neves, em 1948, Escola Industrial e Comercial de Viseu, e em 1979, Escola Secundária de Emídio Navarro.
Esta instituição é o resultado de mais de um século de história marcado por figuras como:

- Emídio Júlio Navarro (célebre viseense e notório governante, o patrono da escola);
- Francisco Ribas de Sousa (diretor de escola, professor ilustre e criador de uma fundação com o seu nome que, associado à escola, entrega prémios aos melhores alunos e auxilia monetariamente os mais desfavorecidos);
- entre outras pessoas de diferentes classes (alunos, professores) com igual contribuição.

A ESEN situa-se no interior do tecido urbano de Viseu sendo assim uma escola citadina.
Contudo, contém uma comunidade estudantil que predomina principalmente de freguesias medianamente urbanas e rurais.
Atualmente, a escola oferece ensino desde o 3° ciclo, incluindo o ensino articulado de música e de dança, e ensino secundário, cursos científico-humanísticos e cursos profissionais.
Para além disso, a escola proporciona vários serviços como:

- Serviços de Psicologia e Orientação (SPO);
- Educação Especial;
- Biblioteca Escolar (BE);
- Espaço Lúdico;

- Gabinete de Apoio ao Aluno (GAA);
- Ação Social Escolar (ASE);
- Projeto de Educação para a Saúde e Educação Sexual (PESES);
- Entre outros.

Fig. 2.1 Interior da Escola Secundária de Emídio Navarro

2.2 Descrição das Turmas

2.2.1 9º A

A turma estava inserida no ensino articulado de dança e música e era constituída por vinte e oito alunos, dezoito do sexo feminino e dez do sexo masculino. O grupo era bastante homogéneo, residente, na sua grande maioria, na zona urbana de Viseu, com uma média de idades de catorze anos e um nível socioeconómico e cultural médio alto.

Contudo, verificou-se uma disparidade de resultados ao longo do ano, alternando as classificações desde o nível mais elevado, cinco, até ao segundo nível mais reduzido, dois. Nesta turma estavam referenciadas duas alunas com necessidades educativas especiais. É de realçar que para a problemática das alunas em questão não houve necessidade de se realizarem alterações a nível das provas de avaliação, sendo de notar que não eram os casos de insucesso mais preocupantes da turma. Apesar da diversidade de resultados foi notório como alguns alunos se destacaram pelas excelentes classificações. Quando confrontados em situação de provas de avaliação e questões problemáticas em sala de aula, apresentavam raciocínios elaborados e profundamente fundamentados.

Foi uma turma que, apesar de nem sempre ser fácil de acompanhar devido à grande energia inerente à sua faixa etária e às muitas atividades curriculares (dança e música) em que estava envolvida, revelou-se muito companheira e solidária.

Fig. 2.2 Alunos do 9ºA no dia da Prova Final de Matemática

2.2.2 9º B

A turma era constituída por vinte e oito alunos, treze do sexo feminino e quinze do sexo masculino. Apesar de ser um grupo com a mesma dimensão, local de residência e idade do mencionado anteriormente (9ºA), eram evidentes as diferenças ao nível socioeconómico e cultural.
No início do ano letivo, o professor cooperante referiu que esta turma havia apresentado mais dificuldades nos dois anos letivos anteriores. Isto foi visível ao longo dos três períodos pelos resultados em momentos de avaliação, relativamente inferiores aos obtidos pela outra turma, na generalidade das provas. Contudo, também possuía alunos com excelentes classificações e, independentemente dos valores obtidos nessas etapas avaliativas, verificou-se um imenso empenho pela maioria do grupo. A turma continha uma aluna com necessidades educativas especiais de grau elevado, sendo necessário, por esse motivo, a realização de provas adaptadas, que incluía a leitura dos enunciados.
A turma era muito conversadora, sendo necessário aplicar um maior controlo disciplinar dentro da sala de aula. Apesar disso o grupo era unido e muito simpático.

Fig. 2.3 Alunos do 9ºB no dia da Prova Final de Matemática

2.2.3 11º B

A turma do décimo primeiro ano era constituída por vinte e quatro alunos, onze raparigas e treze rapazes, sem que nenhum dos alunos apresentasse necessidades educativas especiais.
Ainda que a dimensão fosse inferior às turmas do nono ano, também esta apresentava uma uniformidade quanto à zona de residência, a cidade de Viseu, à idade, em média dezoito anos, e ao nível socioeconómico e cultural, médio alto.
Embora fosse um ano de escolaridade superior e, consequentemente, um nível de dificuldade relativamente aos conteúdos a lecionar mais elevado, foi o grupo de quem mais me aproximei. Isto deveu-se ao facto de serem a direção de turma do professor cooperante, concedendo-me a possibilidade de assistir às reuniões inerentes ao cargo, aos contactos com os encarregados de educação e, principalmente, à participação na visita de estudo de dois dias que realizámos a Lisboa. Apesar de a maioria dos alunos da turma já se conhecer, uma vez que eram colegas da turma do décimo ano, estes souberam receber muito bem os novos colegas.
Quanto à avaliação da turma, não pode haver uma comparação direta com os grupos anteriores dado que os níveis de classificação são distintos, contudo foi notória uma ampla variedade de resultados, destacando-se um pequeno núcleo de alunos com excelentes resultados.

Fig. 2.4 Alunos do 11ºB e professora estagiária Carla Simões no segundo dia da visita de estudo a Lisboa

2.3 Receção da Comunidade Escolar

A Escola Secundária de Emídio Navarro foi o local onde realizei o meu ensino secundário. Nessa altura a escola estava em remodelações estruturais tendo sido concluídas no final do primeiro período. Desde essa altura o grupo de funcionários não sofreu alterações. A maioria das pessoas já me conhecia e ficaram felizes pelo meu regresso à escola. Uma vez que a minha diferença etária com os alunos não era muito significativa, os poucos que não se recordavam de mim confundiam-me, inicialmente, com uma aluna, nada que depois de devidamente explicado não fosse ultrapassado.

Fig. 2.5 Funcionários da ESEN

Por outro lado, os órgãos executivos sofreram diversas alterações, sendo de destacar que apesar de não conhecer nenhum dos elementos da atual direção fui recebida de braços abertos desde o primeiro dia em que me apresentei na escola até aos diversos momentos que tive que me dirigir a esta repartição para solucionar questões intrínsecas às atividades letivas e não letivas.
Relativamente aos professores, devido às características da profissão, apenas uma parte se manteve. Os restantes tinham-se aposentado ou mudado de escola o que, consequentemente, levou à entrada de novos profissionais. Independentemente do tempo nesta instituição, todos me acolheram como uma colega, sem nunca me diferenciarem por ser estagiária. Recebi vários conselhos e foram partilhadas muitas experiências que me descreveram múltiplas situações problemáticas vividas com os alunos. Lidamos com jovens estudantes que têm diferentes histórias de vida e estas experiências transmitidas serão certamente uteis para mim no futuro. Quanto aos alunos, poucos foram os que se mantiveram desde a minha entrada no ensino superior como seria de esperar. Porém, apesar de algumas vezes passar despercebida pelos que não me conheciam, todos foram respeitosos e educados.

Capítulo 3

Componente Letiva

3.1 Horário

Como todo o profissional tem uma escala de trabalho também o professor estagiário tem um horário onde estão indicadas as turmas e salas onde decorreram as aulas entre outras atividades referentes à prática docente.
Assim sendo, foi-me atribuído no início do ano letivo o seguinte horário:

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
08:25 09:10	Matemática 9ºA B22	Apoio 9ºA B15	Matemática A 11ºB B26		Direção de Turma
09:10 09:55					
10:10 10:55	Orientação de Estágio	Matemática 9ºB B15	Matemática 9ºB B25	Matemática 9ºA B22	Dir. Turma
10:55 11:40					Dir. Turma
11.50 12:35		Matemática A 11ºB B22		Matemática 9ºB B22	Matemática A 11ºB B27
12:35 13:20					
13:35 14:20					
14:20 15:05			Prep. OPM B13		
15:15 16:00					
16:00 16:45					
16:55 17:40		Apoio 9ºB B13			
17:40 18:25		Matemática 9ºA B25			

Fig. 3.1 Horário da professora estagiária Carla Simões

3.2 Apoios à turma

O apoio à turma é um auxílio prestado aos alunos encaminhados por recomendação do professor ou que por iniciativa própria o procuram para aprimorar conhecimentos ou ultrapassar dificuldades nas matérias lecionadas.
A decisão dos anos e turmas que terão esse apoio com o próprio professor ou outro docente da mesma disciplina recai sobre a Direção dependendo dos profissionais envolvidos e da conjugação de horários.

3.2.1 Presencial do 9ºA

O apoio de matemática dirigido aos alunos do 9ºA ocorria semanalmente, das 8h25 às 9h10, ou seja, durava quarenta e cinco minutos, todas as terças-feiras.
Foi visível ao longo dos três períodos que havia alguns alunos que apareciam frequentemente, porém um número pequeno comparado com a dimensão da turma.
A maioria dos restantes estudantes apenas usufruía desta oferta da escola nas vésperas dos momentos de avaliação.

3.2.2 Presencial do 9ºB

A turma 9ºB tinha apoio todas as terças-feiras, com a duração de quarenta e cinco minutos, das 16h55 às 17h40.
Tal como os anteriores, estes alunos não tinham por hábito frequentar este apoio sendo de salientar um pequeno grupo de rapazes que comparecia para, principalmente, conversar com o professor.
Por sua vez, estes estudantes também utilizavam mais este espaço para momentos antes das provas de avaliação.

3.2.3 Online do 11º B

Ao contrário das turmas do nono ano que usufruíam de apoio à turma com o próprio professor os alunos do 11ºB não tinham essa oportunidade.
Com o intuito de colmatar esta lacuna, criei um grupo online fechado na rede social Facebook onde, para além de mim, apenas estavam os alunos com conta aberta neste site. Pretendeu-se exibir as fichas de trabalho, as suas resoluções e colmatar possíveis dúvidas. Dado que alguns alunos não tinham acesso e não pretendiam criar associações a tal rede foi estipulado que a delegada da turma enviaria via email todo o conteúdo exposto a esses colegas.
Uma vez que a internet é um mundo de informação e comunicação em tempo real é também um ambiente perigoso para aqueles que não a sabem utilizar. Assim, os representantes dos encarregados de educação foram informados, no primeiro Conselho de Turma, do grupo e dos seus objetivos.
Relativamente ao apoio presencial são algumas as vantagens e desvantagens deste apoio.
Por um lado, não é possível confirmar que o aluno tenha entendido a explicação mesmo quando este indica que sim mas também a dificuldade de expressar certas ideias por palavras.

Por outro lado, este tipo de apoio garante a possibilidade do aluno escolher se quer expor a sua dúvida a todos ou falar apenas com o professor sem que outros possam ouvir e permite falar com o docente fora do horário convencional do funcionamento da escola se este assim o aceitar.
Foram vários os alunos que utilizaram este grupo de ajuda online ao longo do ano de forma mais ou menos assídua, tendo sido um dos aspetos muito positivos a salientar no trabalho com esta turma.

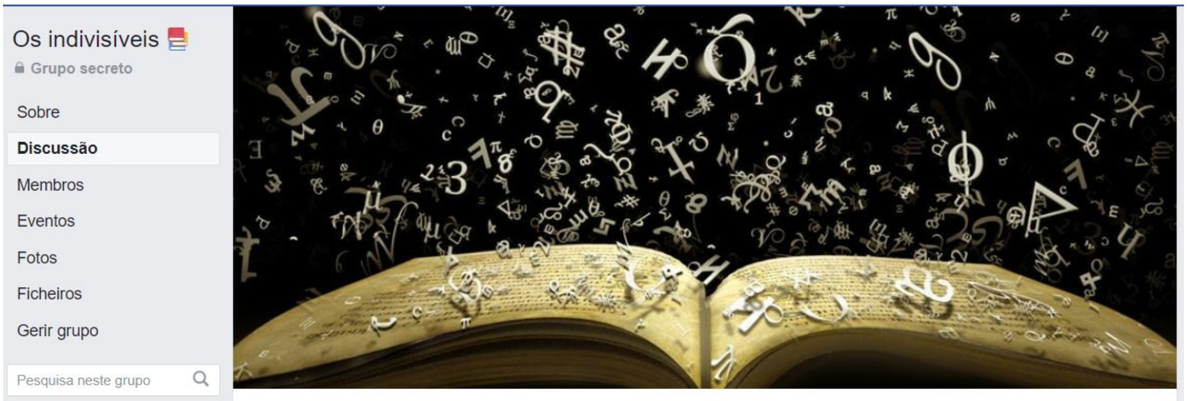


Fig. 3.2 Cabeçalho do grupo online "Os indivisíveis"

3.3 Provas de avaliação

Consoante o plano de avaliação utilizado pelas escolas são realizadas várias provas de diferentes tipos para consagrar ao aluno um determinado nível de acordo com as suas prestações nestas.
De seguida será descrita a avaliação de cada ano sendo que os enunciados e resoluções encontram-se nos anexos do presente relatório.

3.3.1 9º ano

Ao longo dos primeiros dois períodos foram realizados dois testes e duas questões-aula em cada.
No terceiro período, dado que este foi mais curto e considerando a opinião dos alunos, foram realizadas apenas quatro questões-aula e um teste.

3.3.2 11º ano

Nos primeiros dois períodos foi determinado que seriam realizados dois testes e duas questões-aula.
Como mencionado anteriormente, o terceiro período teve uma duração menor e consequentemente apenas foram realizados dois testes.

3.3.3 Necessidades Educativas Especiais

Como referido no segundo capítulo, apenas existiu, nas três turmas, uma aluna com necessidades educativas especiais que necessitava de provas diferenciadas e com leitura assistida dos enunciados. Segue-se um exemplo de uma prova apresentada à aluna em questão.

Escola Secundária Emídio Navarro

Questão-aula 7 – Matemática - 9ºAno

Ano letivo 2017/18

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Nome: ______________________ **Nº:** ____ **Turma:** ________ **Duração: 30 min.**

Classificação: ________ **Professor:** ____________ **Encarregado de Educação:** ______________

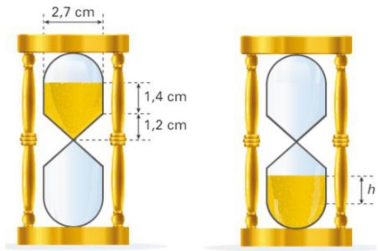
Justifica convenientemente todas as tuas respostas

Questões	1.1	1.2	2	3	Total
Cotações	4	6	7	3	20

1. Na figura ao lado está representada uma ampulheta formada por duas partes simétricas.

Cada parte é formada por uma semiesfera, um cilindro e um cone.

Como se pode verificar na imagem da esquerda, a areia ocupa o cilindro e o cone.



1.1 Determina o volume do cilindro.

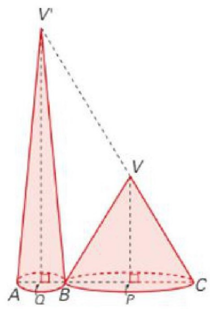
1.2 Calcula o volume do cone.

2. A figura ao lado representa dois cones retos com bases tangentes e pertencentes ao mesmo plano.

Sabe-se que:

- $\overline{VP} = 5$ cm
- $\overline{PC} = 3$ cm

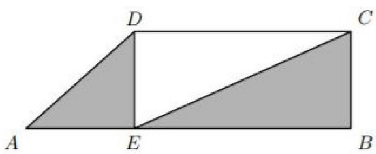
Determina o volume do cone $[VBC]$.



3. Na figura seguinte, está representado o trapézio rectângulo $[ABCD]$. O ponto E pertence ao lado $[AB]$.

Sabe-se que:

- $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AB}$;
- $\overline{EB} = \overline{DC}$;
- a área do trapézio $[ABCD]$ é 20 cm^2.



Qual é a área da região representada a sombreado?

(A) 10 cm^2 (B) 12 cm^2 (C) 14 cm^2 (D) 16 cm^2

Nota: Quando for necessário realizar arredondamentos usa uma casa decimal para resultados finais e pelo menos três em cálculos auxiliares.

7ª Questão Aula – Matemática - 9º ano Página 1 de 1

Fig. 3.3 Prova para aluna NEE

3.4 Direção de Turma

O Diretor de turma é o elemento designado pelo Diretor da escola para coordenar o trabalho do Conselho de turma.
No entanto, este também tem outras grandes responsabilidades, nomeadamente no acompanhamento do percurso escolar de cada aluno e na turma no seu todo, bem como no estabelecimento de uma relação de cooperação que deve existir entre a escola e a família.

3.4.1 Responsabilidades intrínsecas ao cargo

Indicam-se agora algumas das responsabilidades subjacentes à função de diretor de turma:

- Promover a comunicação entre os professores, alunos e encarregados de educação;
- Realizar, caso necessário, um programa educativo individual em simultâneo com o professor de educação especial e o encarregado de educação organizando a sua aplicação;
- Incentivar a rentabilização dos serviços e recursos ao dispor da comunidade escolar, informando todos os interessados da sua existência;
- Regularizar o processo avaliativo dos alunos assegurando as sua índole holística e integradora;
- Assegurar a execução das medidas disciplinares aplicadas aos estudantes no âmbito de processos disciplinares;
- Presidir todos os Conselhos de turma e reuniões com os encarregados de educação no final de cada período;
- Conduzir a eleição do delegado e subdelegado de turma;
- Justificar as faltas dos alunos, informando os encarregados de educação quando estas ocorrem;
- Entre outras.

3.4.2 Contactos com os encarregados de educação

Apesar das diversas funções do cargo de diretor de turma, o contacto com os pais foi a que mais me impressionou.
Foram vários os momentos em que tais situações decorreram: horário de atendimento dos encarregados de educação, reuniões de encarregados de educação ou contactos telefónicos.
O horário de atendimento dos encarregados de educação estava marcado para as sextas, das 10h10 às 11h40. Contudo, este nem sempre ocorreu nestas datas devido ao facto que certos pais não terem horário de trabalho compatível.
As reuniões de encarregados de educação realizaram-se quatro vezes ao longo do ano. A primeira reunião teve como objetivo a apresentação do diretor de turma aos pais uma vez que este era novo no

conselho de turma, informar sobre diversos assuntos como o período para justificar faltas, o horário dos apoios que os alunos poderiam usufruir e a presença de professora estagiária nas aulas de Matemática.
Os contactos telefónicos resultaram no sentido de informar os encarregados de educação sobre diferentes situações que estavam a decorrer com o educando.
Foi nestes diversos momentos que se pôde conhecer um pouco mais dos alunos pelas situações que os pais nos relataram e desmistificar um pouco a sua maneira de ser.

3.5 Reuniões

São várias as situações ao longo do período letivo onde decorreram estes encontros, cada um com o seu intuito específico. São de destacar as reuniões de Diretores de Turma, Professores, Departamentos, Conselhos de turma e Encarregados de Educação.

3.5.1 Diretores de turma

No dia 7 de setembro de 2017 estive presente na Reunião de Diretores de Turma do ensino secundário pelas 16h. Após todos estarem presentes iniciou-se esta reunião com a seguinte ordem de trabalhos:

- Escolha da secretária da reunião;
- Aprovação do regimento do conselho de diretores de turma;
- Programa INOVAR;
- Informações sobre a articulação do diretor de turma com outras estruturas;
- Orientações para as reuniões dos conselhos de turma de início de ano;
- Preparação para a receção aos alunos.

3.5.2 Professores

No dia 8 de setembro de 2017 estive presente no auditório da ESEN na Reunião Geral de Professores ministrada pelo Diretor da escola, Dr. José Rosa, pelas 14h30.
Inicialmente, o orador expôs, para antigos e novos docentes, algumas informações gerais como a estrutura da escola, os serviços por ela fornecidos e o respetivo horário de funcionamento.
Posteriormente foram apresentados os coordenadores dos vários departamentos curriculares e os responsáveis pelos diversos serviços.
Por último, foram referidas algumas informações relativas à receção dos alunos.

3.5.3 Departamento de Matemática

Participei em cinco reuniões do Departamento de Matemática.
A primeira teve início pelas 11h30 do dia 13 de setembro de 2017 onde foram debatidos os seguintes pontos:

- Aprovação do regimento do departamento;
- Critérios de avaliação;
- Propostas para o Plano Anual de Atividades;
- Outros assuntos.

Procederam-se mais quatro reuniões ao longo do ano letivo:

29 de novembro de 2017

- Informações gerais;
- Aulas de 45 minutos versus aulas de 50 minutos;
- Atividades a realizar ao longo do ano letivo;
- Outros assuntos.

31 de janeiro de 2018

- Informações;
- Partilha sobre o trabalho desenvolvido e a desenvolver, em cada um dos anos de escolaridade;
- Breve análise e reflexão das classificações do 1º período;
- Outros assuntos.

1 de março de 2018

- Informações dos Conselhos Pedagógicos;
- Breve partilha sobre o trabalho desenvolvido e a desenvolver, em cada um dos anos de escolaridade;
- Plano de Ação Estratégica;
- Análise/discussão/propostas de alteração do PEE;
- Outros assuntos.

11 de junho de 2018

- Informações;
- Partilha sobre o trabalho desenvolvido e a desenvolver, em cada um dos anos de escolaridade;
- Breve análise e reflexão das classificações do 2º período;
- Apresentação e discussão de propostas para o próximo ano letivo, que visem melhorar o trabalho a desenvolver com os alunos e promover a qualidade do ensino em Matemática;
- Outros assuntos.

3.5.4 Conselhos de turma

O conselho de turma é composto pelos professores da turma, sendo presidido pelo diretor da mesma. Este grupo coordena e aprecia todas as atividades desenvolvidas e a desenvolver ao longo do ano facilitando também a articulação entre a comunidade escolar.
Ao longo do estágio participei em quatro reuniões deste tipo sendo que a primeira foi o única onde inicialmente estiveram presentes os dois representantes dos encarregados de educação, a delegada e o subdelegado da turma.
Foi de destacar que em todas as reuniões houve uma transparência dos elementos sobre as aulas e a prestação dos alunos nas mesmas o que ajudou a entender algumas situações que estavam a ocorrer com os estudantes.

3.6 Verificação de atas e pautas dos Conselhos de Turma

No decorrer das diversas reuniões são elaboradas as atas correspondentes que posteriormente são revistas e aprovadas. As atas são documentos escritos onde se encontram mencionados os acontecimentos ocorridos na reunião alvo.
Com o intuito de verificar em que se baseia este processo foi solicitado pelo professor cooperante à comissão de verificação que estava a realizar essa ação para que eu pudesse acompanhar o trabalho destes profissionais.
A responsável por esta equipa concordou e para além de observadora pude rever, com sua ajuda, uma ata completa.

3.7 Prova Final de Matemática

Como é de conhecimento público, os alunos do nono ano de escolaridade têm de realizar um exame de Matemática a nível nacional, ou seja, todos os alunos executam a mesma prova, à mesma hora, com os mesmos critérios de correção.

Porém, existem situações específicas de alunos como é o caso dos estudantes com necessidades educativas especiais, que realizam uma prova (código 82), elaborada a nível de escola e corrigida no agrupamento de exames distrital.

3.7.1 Necessidades Educativas Especiais

Dado que havia alunos do nono ano com estas características foi necessário realizar uma prova a nível de escola.
Uma vez que ao longo do ano letivo houve uma cooperação entre os professores que lecionavam este ano, também na realização desta prova houve colaboração do professor Valter Roque e onde pude ter ocasião de dar sugestões e corrigir alguns pormenores da prova.

3.7.2 PESES

Todas as escolas têm que escolher um dos projetos de Educação para a Cidadania que pretende auxiliar os estudantes, guiando-os para se tornarem adultos responsáveis e autónomos.
Entre estes estão:

- Educação Financeira;
- Educação para a Segurança, a Defesa e a Paz;
- Educação para o Voluntariado;
- Educação para a Saúde e para a Sexualidade.

A ESEN tem por hábito escolher o último e, com isso em vista, foi designado um espaço próprio onde decorre o PESES (Projeto Educação para a Saúde e Educação Sexual). Uma professora coordenadora organiza as atividades a desenvolver ao longo do ano letivo.
Como é estipulado por lei, todas as turmas têm que cumprir um determinado número de horas. No primeiro Conselho de Turma é decidido quais os professores que realizam este papel tão importante para os jovens.
Assim, decorreu no dia 20 de abril de 2018, na turma do 11ºB, uma ação de formação, na aula de Matemática, sobre a igualdade de género onde os alunos tiveram que dramatizar uma situação criada por eles sobre um tópico que lhes foi atribuído e, posteriormente, debater os vários vídeos apresentados ao longo da aula.
No final, em conversa com as oradoras, estas referiram que a turma tinha uma mente bastante aberta quanto aos assuntos em questão.

Capítulo 4

Componente Não Letiva

4.1 Olimpíadas Portuguesas da Matemática

As OPM, organizadas anualmente pela Sociedade Portuguesa de Matemática, são um concurso de problemas de Matemática, dirigido aos estudantes que vão desde o ensino básico até ao ensino secundário, a fim de despertar o gosto e interesse pela Matemática.
Assim, os participantes são divididos em cinco categorias: Mini-Olimpíadas, Pré-Olimpíadas, Categoria Júnior, Categoria A e Categoria B. A Categoria Mini-Olimpíadas destina-se a alunos que frequentam o terceiro ou quarto ano de escolaridade, a Pré-Olimpíadas a alunos do quinto ano, a Júnior a sexto ou o sétimo ano, a A a alunos que frequentam o oitavo ou o nono ano, e por fim, a B é realizada por alunos do ensino secundário.
As OPM decorrem em três fases: a primeira eliminatória acontece em todas as escolas interessadas; a segunda eliminatória, que funciona como uma final regional e ocorre em algumas escolas do país; e por último, a Final Nacional, que decorre numa escola convidada na qual participam 30 alunos de cada uma das categorias.

4.1.1 Sensibilização

Nos três dias seguintes à inscrição no concurso percorri as turmas da escola durante as aulas de matemática com o objetivo de divulgar as Olimpíadas Portuguesas da Matemática e incentivar os alunos na participação destas.
Para isso expus uma pequena apresentação em Prezi onde expliquei em que consistia esta prova e um pouco da história com a ESEN.
Posteriormente foi distribuída em cada turma uma folha de inscrição para quem estivesse interessado que o professor me entregaria mais tarde.
Verificou-se uma grande adesão por parte dos alunos do ensino regular, sendo visível uma indiferença por parte dos estudantes dos cursos profissionais.

4.1.2 Preparação

Com o intuito de esclarecer possíveis dúvidas e preparar os alunos para esta experiência foi designado que às quartas-feiras, das 14h20 às 15h05, reunir-me-ia com os estudantes que estivessem interessados. Este apoio destinava-se a todos os alunos da escola não sendo, no entanto, obrigatório. Esta atividade foi divulgada através cartazes espalhados pelo recinto escolar bem como através do site da escola.

Fig. 4.1 Cartaz de divulgação dos apoios para a preparação das OPM

4.1.3 1ª Eliminatória

No dia 8 de novembro de 2017 realizou-se na escola a primeira eliminatória das Olimpíadas Portuguesas de Matemática. Participaram nesta atividade trinta e três alunos, dois na categoria Júnior, quinze na categoria A e dezasseis na categoria B.
A ESEN já organizou e recebeu por duas vezes a Final Nacional das Olimpíadas, sendo a última em 2017.
Os alunos Núria Carvalho, 7ºC, Nicolau Pereira, 9ºA, e Catarina Dias, 12ºC, foram apurados para a 2ª eliminatória desta competição.

Fig. 4.2 Alunos a realizarem a prova referente à primeira eliminatória das OPM

4.1.4 2ª Eliminatória

No dia 10 de janeiro de 2018 decorreu a segunda eliminatória das Olimpíadas Portuguesas de Matemática na ESEN tendo recebido alunos de outras escolas: dois estudantes da Escola Básica dos 2º e 3º Ciclos do Viso, três da Escola Básica dos 2º e 3º Ciclos de Mundão e dois do Colégio da Imaculada Conceição.

4.2 Canguru Matemático sem Fronteiras

O Canguru Matemático sem Fronteiras é um concurso que consiste numa única prova constituída por vários itens de escolha múltipla de dificuldade crescente que habitualmente acontece no mesmo dia em todas as escolas do país. Esta prova tem o intuito de tentar que os alunos se divirtam a resolver questões matemáticas, mesmo aqueles que por algum motivo têm receio da disciplina, vendo a resolução deste questionário como um desafio gratificante.
Portugal participou nesta prova pela primeira vez em 2005, estando a organização da mesma a cargo do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, com o apoio da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM).
Este concurso é constituído por oito categorias de acordo com o nível de escolaridade dos alunos:

- Mini-Escolar - nível I (para alunos do 2º ano de escolaridade);
- Mini-Escolar - nível II (para alunos do 3º ano de escolaridade);
- Mini-Escolar - nível III (para alunos do 4º ano de escolaridade);
- Escolar (para alunos dos 5º e 6º anos de escolaridade);
- Benjamim (para alunos dos 7º e 8º anos de escolaridade);
- Cadete (para alunos do 9º ano de escolaridade);
- Júnior (para alunos dos 10º e 11º anos de escolaridade);
- Estudante (para alunos do 12º ano de escolaridade).

Uma vez que os estudantes da escola pertencem ao terceiro ciclo do ensino básico ou ao ensino secundário foram aplicadas apenas as últimas quatro categorias. Sendo o Canguru Matemático uma prova única, foi decidido atribuir um prémio aos três melhores alunos de cada nível. Este prémio consistiu num livro de teor matemático. Foram agraciados seis alunos: três da categoria Benjamim, um da categoria Cadete e dois da categoria Estudante. Em virtude da Coordenadora do Departamento de Matemática, professora Graça Martins, conhecer um dos autores destes livros, Alexandre Aibéo, foi o mesmo a entregar o respetivo prémio aos alunos da categoria Estudante. A reunião com alunos e professores ocorreu no dia 14 de junho de 2018 na sala dos professores. Para além de uma conversa intimista entre os alunos e o escritor seguiu-se a entrega das obras devidamente dedicadas aos vencedores.

Fig. 4.3 Alexandre Aibéo na entrega dos prémios da categoria Estudante do Canguru Matemático

4.3 Problema do Mês

Esta atividade surgiu como forma de incentivar os alunos a explorar a matemática desenvolvendo neles um gosto por esta arte dando-lhes um desafio no início do mês e tendo eles que entregar a resolução na Biblioteca Escolar até ao final desse período.
O primeiro problema foi colocado em novembro e último em maio.

Problema de Novembro

BIBLIOTECA ESCOLAR ESEN

Os filhos do emir

O emir Abdel Azir ficou famoso por vários motivos. Um deles foi o grande número de filhos gémeos que teve. O historiador Ahmed Aab afirma num dos seus escritos que todos os filhos do emir eram gémeos duplos exceto 39, todos eram gémeos triplos exceto 39 e todos eram gémeos quádruplos exceto 39.

Quantos filhos teve o emir?

Dinamizadora: Carla Simões
Trabalho Colaborativo com a Biblioteca Escolar

Fig. 4.4 Problema do mês de novembro

4.4 Jornal da escola

A pedido da coordenadora do jornal da escola, professora Graça Rocha, foi me solicitada a participação nesta publicação trimestral.
Foram produzidos artigos referentes à Matemática bem como a apresentação de desafios e curiosidades e ainda a divulgação das atividades da disciplina na escola.

janeiro 2018 Navarro 11

Momento de Poesia ...

Natal...

No Natal,
falamos sempre da mesma coisa,
comida, família e as outras pessoas que
[não ajudamos.
Se esse não é o espírito de Natal
Então porque é que ainda o celebramos?

Ajudar as pessoas que não têm obrigação,
mas que a chama de Natal ainda reside
[no seu coração.
Não é só dar comida, mas um pouco de
[alegria.
Não é só dar abrigo,
Mas uma fala de amigo.

A amizade é um bem para a sociedade.
Não faz revoluções, nem guerras
e desperta a humanidade.

Se queres o verdadeiro espírito de Natal,
Vai lá fora e começa a ajudar,
porque isso não te fica mal.

As famílias que não têm lar,
alegria querem ter,
então alegria vamos dar
para ninguém se perder.

Não te contorças na solidão com a família.
Há gente que precisa de viver,
ser amada,
Não sofrer e ficar sem nada.

É por isso que eu digo:
Espírito de Natal
É para criarmos uma união
e festejarmos como tal!

Manuel Frazão, n.º14, 9.ºD

Se eu fosse um Espanta-Pardais

Se eu fosse um Espanta-Pardais, ia
[aproveitar
o meu tempo todo para os humanos
[observar.

Eles apressados, alguns a chorar,
eu ali parado a rir sem parar.

Eles interessados numa coisa com
[ponteiros,
eu aqui mesmo como se fosse sinaleiro.

Eles em prédios que chegam até ao céu,
mas eu não gosto de tanto escarcéu.

As crianças, pobrezinhas,
numas mantas velhas deitadinhas.

Eu ainda não falei da minha petiz
que, sentada ao meu lado, pensa num
[mundo mais feliz.

Beatriz Oliveira, n.º 4, 7.º C

Matemática

A matemática é divertida,
Deixa-te levar
Pelas operações e sequências
E tua amiga vai-se tornar.

Tanto para aprender,
Tanto por descobrir.
Com a Matemática
Há sempre motivo para rir.

A matemática está em todo lado,
Vê o mundo com outros olhos.
Um retângulo e um quadrado
Verás sempre aos molhos.

Jacinta Lourenço, 7.ºA

Escrever é esquecer...

Quando escrevo, é nele (papel) que deito tudo para fora como se fosse o único que me compreendesse…

Escrevo nele, porque sei que posso confiar, que não conta nada do que escrevo, se o contasse a alguém nem quero pensar como seria…

Sempre que acontece algo é a ele que recorro para poder desabafar e contar tudo o que que se passa comigo.

Escrevo para exprimir os meus sentimentos.

Escrevo para esquecer certos problemas.

Escrevo para, por vezes, não ter o que dizer certas coisas a certas pessoas.

Escrevo para um dia, mais tarde, ter a oportunidade de ler tudo o que escrevi e entender o porquê de o ter feito.

Escrevo para, um dia, mais tarde, poder recordar momentos bons e outros menos bons.

Escrevo, porque me deixa um pouco aliviada.

Escrevo, porque escrever deixa-me feliz.

Escrevo, de coração cheio.

Escrevo, porque me traz conforto.

Nada melhor do que escrever sem problemas, sem ter medo do que vou escrever.

Escrevo sem preconceitos.

E quanto mais escrevo…

Mais vontade tenho de escrever.

Escrevo, porque sim…

Rita Ferreira, 12.ºN

Matemática Divertida

Carla Simões

Problema do Mês

O **Problema do Mês** é uma atividade dinamizada pela professora estagiária de matemática, Carla Simões, em colaboração com a Biblioteca Escolar, que pretende apresentar um desafio matemático, periodicamente ao longo do ano. O desiderato nuclear desta atividade é desenvolver o raciocínio matemático dos alunos num contexto lúdico.

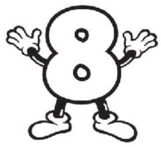
Problema de novembro
Os filhos do emir

O emir Abdel Azir ficou famoso por vários motivos. Um deles foi o grande número de filhos gémeos que teve. O historiador Ahmed Aab afirma, num dos seus escritos, que todos os filhos do emir eram gémeos duplos, exceto 39, todos eram gémeos triplos, exceto 39 e todos eram gémeos quádruplos, exceto 39.

Quantos filhos teve o emir?

Problema de dezembro
Oito oitos

Usando apenas o algarismo 8 por oito vezes e todas as operações que quiseres, obter o resultado 1000.

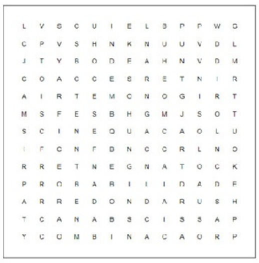


De quantas maneiras diferentes o consegues fazer?

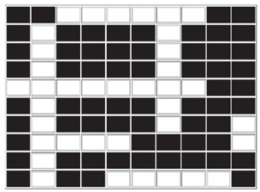
Quem é o matemático?

- Nasceu em 1499 na cidade de Veneza e morreu em 1557.
- Somente aos 14 aprendeu a escrever.
- Deve-se-lhe a 1.ª edição italiana dos Elementos de Euclides.
- O seu nome está ligado a um triângulo numérico infinito, formado por números binomiais.
- Contribuiu, juntamente com Cardano, para a história da matemática com a descoberta da resolução das equações cúbicas.

Sopa de Letras



Palavras Cruzadas



Horizontal
1.Simetrias do gráfico de uma função (estudo das)
2.Nome da representação gráfica de uma função de segundo grau
3. Nome da representação gráfica de uma função de primeiro grau
4. log(1000)+2

Vertical
1. Nome do símbolo que representa a soma de um certo número de parcelas
2. Nome do coeficiente m nas funções de primeiro grau do tipo y=mx+b
3. Número que representa a razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência

Soluções - Sopa de letras

ARREDONDAR; COMBINACAO; CONE; COTANGENTE; INEQUACAO; INTERSECCAO; PRISMA; PROBABILIDADE; TRIGONOMETRIA

Soluções - Palavras cruzadas

Horizontais: 1-paridade; 2- parábola; 3-reta; 4-cinco
Verticais: 1-somatório; 2-declive; 3-pi

Fig. 4.5 Página relativa à Matemática do primeiro jornal "Navarro" de 2017/2018

Multiplicação na China

Carla Simões

A civilização chinesa desenvolveu-se nas margens do rio Amarelo, tendo sido encontrados os seus primeiros registos matemáticos nos cascos de tartarugas e ossos.

Dada a abundância de canas de bambu, este povo desenvolveu um método de multiplicação através da interseção de barras verticais e horizontais.

Supõe que se deseja multiplicar dois números naturais A e B, A x B.

Procedimento:

1. Desenha o número de linhas referente ao primeiro algarismo de A, no sentido de cima para baixo;
2. Deixa um espaço e traça tantas linhas quanto o segundo algarismo de A. Executa este passo sucessivamente até percorrer todos os algarismos de A;
3. No sentido da esquerda para a direita, desenha as linhas relativas ao primeiro algarismo de B;
4. Após guardar um espaço, constrói o segundo algarismo de B. Realiza esta etapa ininterruptamente até percorrer todos os algarismos de B;
5. O número de cruzamentos que se encontra no canto inferior direito corresponde às unidades do resultado;
6. A soma dos números de interseções que se encontram na diagonal mais à direita corresponde às dezenas do resultado. Efetua este procedimento consecutivamente percorrendo todas as diagonais até à que se encontra mais à esquerda;
7. O número de cruzamentos que se encontra no canto superior esquerdo corresponde ao(s) primeiro(s) algarismo(s) do resultado.

Nota: Caso nos passos 5 e 6 o número de cruzamentos seja superior a 9 escreve o algarismo das unidades e soma o das dezenas na diagonal seguinte.

Exemplo 1: 32x21

Traçam-se cinco linhas horizontais, 3 + 2, e três linhas verticais, 2 + 1.

Assim, o número correspondente às unidades é 2, o das dezenas é o 7 (3 + 4) e o das centenas é 6.

Logo, tem-se que 32x21 = 672.

Exemplo 2: 321x21

Desenhe-se seis linhas horizontais, 3+2+1, e três linhas verticais, 2 + 1.

Tem-se assim que 1 é o dígito das unidades, 4 (2 + 2) o das dezenas, 7 (3 + 4) o das centenas, e 6 o dos milhares.

Conclui-se então que 321x21 = 6 741.

Exemplo 3: 201x13

Se algum dos números contiver um zero, este é representado por uma linha de outra cor. As interseções com esta linha não são contadas.

Traçam-se quatro linhas horizontais, 2+1+1, e três quatro verticais, 1+3.

Logo, 3 é o dígito das unidades, 1 o das dezenas, 6 o das centenas, e 2 o dos milhares.

Conclui-se então que 201x13 = 2 613.

A Tabuada da Soraia

Soraia Patrícia, 11.º D

Tabuada do 2 Tabuada do 3

Tabuada do 2 Tabuada do 3 Tabuada do 4

Tabuada do 5 Tabuada do 6 Tabuada do 7

É múltiplo Não é múltiplo

Problema do mês de janeiro

Carla Simões

A herança do velho senhor

Um velho homem, prestes a morrer, mandou chamar os filhos para se despedir deles e distribuir o dinheiro que guardava num cofre. No entanto, o homem estava tão mal que já não se lembrava do valor da sua fortuna nem sequer de quantos filhos tinha.

Apesar disso pediu ao filho mais velho para tirar 5000 euros mais a sétima parte do que sobrasse. Depois disse ao segundo filho para tirar 10000 euros mais a sétima parte do que ainda houvesse. A seguir o terceiro filho recebeu 15000 euros mais a sétima parte do restante. E assim sucessivamente. Quando os filhos compararam o que tinham recebido, verificaram que todos tinham recebido exatamente o mesmo.

Quantos filhos tinha o homem e quanto recebeu cada um?

Canguru Matemático Sem Fronteiras

Carla Simões

No dia 22 de março de 2017, realizou-se na ESEN o *Canguru Matemático Sem Fronteiras*. Participaram nesta atividade 46 alunos (25 na categoria Benjamim (7.º e 8.º anos); 1 na categoria Cadete (9.º ano); 14 na categoria Júnior (10.º e 11.º anos) e 6 na categoria Estudante (12.º ano).

A Associação Canguru sem Fronteiras é uma associação de caráter internacional, que reúne personalidades do mundo da matemática de 55 países. O seu objetivo é promover a divulgação da matemática elementar por todos os meios ao seu alcance e, em particular, pela organização anual do Concurso *Canguru Matemático sem Fronteiras*. Pretende-se, deste modo, estimular e motivar o maior número possível de alunos para a matemática e é um complemento a outras atividades, tais como as olimpíadas.

Em Portugal, a organização deste concurso está a cargo do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, com o apoio da Sociedade Portuguesa de Matemática.

O concurso consiste numa única prova: não existe nenhuma seleção prévia nem existe uma prova final. Esta baseia-se num questionário de escolha múltipla de várias questões de dificuldade crescente.

Os alunos Rodrigo Santos (7.ºA), Tiago Lopes (8.ºA) e Carolina Cabral (8.ºA) foram os primeiros classificados na categoria Benjamim.

Na categoria Cadete o primeiro classificado foi o aluno Nuno Loureiro (9.ºB).

Os alunos do 11.ºA, Samuel Casaquinha, Paulo Pereira e Ana Isabel Rocha foram os primeiros qualificados na Categoria Júnior.

Os alunos José Miguel Pereira (12.ºB), Catarina Dias (12.ºC) e João Almeida (12.ºD) alcançaram os primeiros lugares na categoria Estudante.

Parabéns a todos pela sua participação.

Fig. 4.6 Página relativa à Matemática do segundo jornal "Navarro" de 2017/2018

4.5 Visita de Estudo

No dia 18 de abril de 2018, os alunos das turmas 11ºA e 11ºB da Escola Secundária Emídio Navarro realizaram uma visita de estudo de dois dias a Sintra e Lisboa.
Após nos reunirmos na ESEN entrámos no autocarro onde distribuí pelos alunos e professores um panfleto informativo sobre a Exposição de Escher que iríamos ver no final da visita.

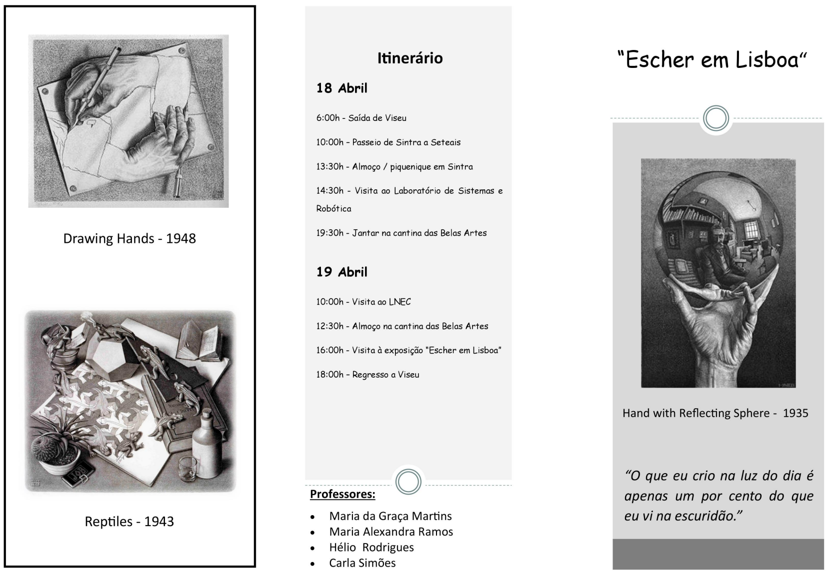


Fig. 4.7 Primeira página do panfleto sobre "Escher em Lisboa"

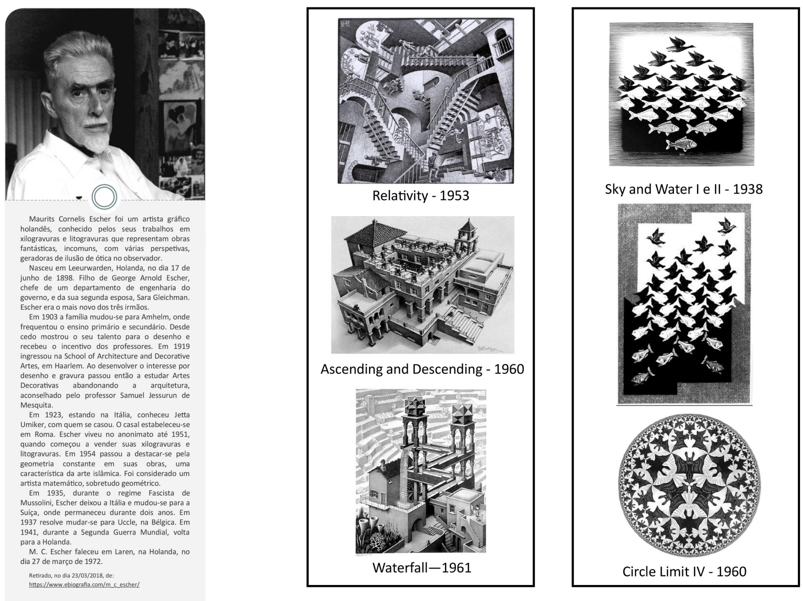


Fig. 4.8 Segunda página do panfleto sobre "Escher em Lisboa"

Posteriormente à viagem de autocarro, os alunos iniciaram o percurso pedestre de Sintra a Seteais, onde ao longo do trajeto puderam contemplar a paisagem verdejante própria da cidade e realizar a leitura de alguns excertos do livro "Os Maias".
Nesse mesmo dia, depois de almoçarem, os estudantes tiveram a oportunidade de visitar o Laboratório de Sistemas e Robótica, localizado em Lisboa. O ISR-Lisboa (Instituto de Sistemas e Robótica de Lisboa) é uma unidade de investigação do Instituto Superior Técnico (IST) onde se desenvolvem soluções inovadoras nas áreas da Robótica e Processamento de Informação.

Fig. 4.9 Alunos no Instituto de Sistemas e Robótica de Lisboa

No dia seguinte, os alunos deslocaram-se ao Laboratório Nacional de Engenharia Civil onde puderam compreender aquilo que esta entidade realiza em prol da comunidade, nomeadamente nos domínios da investigação e inovação, na elaboração de pareceres e na aposta da qualidade de construção na área da engenharia civil.

Fig. 4.10 Alunos no Laboratório Nacional de Engenharia Civil

Mais tarde, visitaram a exposição “Escher em Lisboa”, no Museu de Arte Popular, em Lisboa. Dentro da vasta exposição, cerca de 200 obras, é de destacar a capacidade de o artista despertar no observador a representação de mundos completamente transfigurados do real, quer seja através de figuras geométricas, perspetivas ou até mesmo ilusões de ótica.

Fig. 4.11 Aluna do 11ºB numa das atividades presentes da exposição

Finalmente, à hora marcada, 18h, iniciou-se o regresso a Viseu, acabando o autocarro por chegar às 20h à escola.

Capítulo 5

Atividades Extracurriculares

5.1 Formações

A formação consiste na aquisição de conhecimentos e competências relativos a uma determinada área que são indispensáveis para o bom desempenho de determinada profissão.
Assim, a formação nada mais é do que uma ferramenta necessária para o aumento da qualidade e produtividade em determinada atividade.

5.1.1 Ciclo de Formação Areal, Para um Ensino de Sucesso!

A formação oferecida pela editora Areal teve como objetivo ajudar os professores presentes na árdua tarefa de ensinar, reforçando o papel do docente como coach e ator.
Esta decorreu no dia 18 de novembro de 2017, pelas 9h30, no Campus Politécnico da Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Viseu.
Inicialmente, assistimos a uma palestra ministrada pela professora Susana Garcês denominada "Coaching Educativo".
O coaching aplicado ao ensino é uma tendência relativamente recente e inovadora, mas que já dá frutos, nomeadamente no aprimoramento das competências de professores, no controlo da indisciplina, melhores níveis de aprendizagens, etc.
No entanto, estas vantagens só são visíveis quando se verifica uma articulação entre três elementos: professor, corpo docente e alunos.
Finalmente, tivemos uma aula com a ilustre atriz Lídia Franco intitulada "A técnica do Ator é uma vantagem para o Professor" com o objetivo de aperfeiçoar a comunicação de um professor em contexto de sala de aula. Esta sessão abordou diferentes técnicas de relaxamento, abstração, respiração e colocação de voz.
A abordagem do professor como ator remonta às associações: docente/intérprete e sala de aula/palco.
É de salientar que ambos carecem de se adaptar ao seu público.

Fig. 5.1 Atriz Lídia Franco na formação "A técnica do Ator é uma vantagem para o Professor"

5.1.2 Formação Software TI-Nspire™

O Centro de Formação de Associação de Escolas de Viseu - Visprof promoveu a formação de curta duração "Formação Software TI-Nspire™ " orientada pelo formador Alexandre Augusto dos Reis Gomes que decorreu na Escola Secundária de Emídio Navarro nos dias 24 de novembro de 2017 e 5 de janeiro de 2018 com a duração total de seis horas.
Esta ação tinha como objetivo apresentar as potencialidades das calculadoras TI-Nspire aos professores de disciplinas exatas de modo a aplicar em sala de aula na realização das diferentes atividades, uma vez que, atualmente, os alunos do ensino secundário são estimulados a utilizar tal tecnologia.

5.2 Aulas Assistidas

As aulas assistidas consistem na observação das mesmas e consequente discussão destas devendo ser encaradas como uma estratégia de progresso profissional.
As regências têm como objetivo a superação das fragilidades dado que permite uma reflexão sobre o trabalho desenvolvido e uma possível mudança que poderá passar pela adoção de novas abordagens mais motivadoras quer para o professor quer para os alunos.

5.2.1 Primeira

No dia 23 de janeiro de 2018 decorreu a primeira aula assistida, na sala B22, das 11h50 às 13h20, na turma do 11ºB.

Inicialmente abordei as sucessões definidas por recorrência utilizando como exemplo a sucessão de Fibonacci.
Posteriormente, introduzi as progressões aritméticas apresentando os dois termos gerais e a expressão da soma de um número finito de termos destas.
Por fim, conclui a aula com a resolução de exercícios com o intuito de cimentar os conhecimentos adquiridos.

Fig. 5.2 Primeira aula assistida da professora estagiária Carla Simões

5.2.2 Segunda

A segunda aula assistida realizou-se no dia 11 de abril de 2018 das 10h10 às 11h40 na sala B25 na turma do 9ºB.
O intuito desta regência era introduzir o tema "Trigonometria". Com isso em vista, iniciei a aula com a contextualização histórica desta área.
De seguida, apresentei as razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo. Posteriormente, indiquei a relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares.
Finalmente, dei por terminada a aula com a resolução de exercícios de forma a consolidar os novos conteúdos.

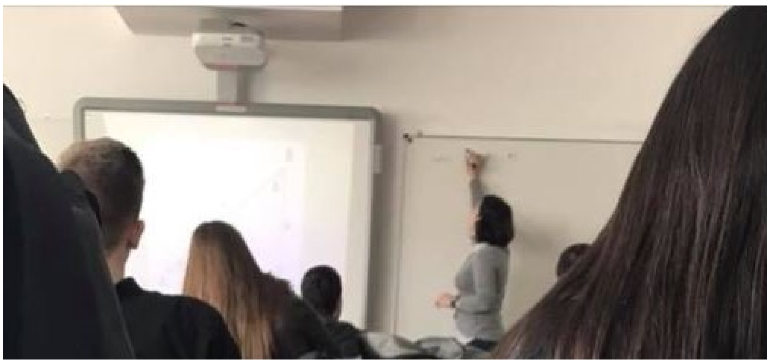
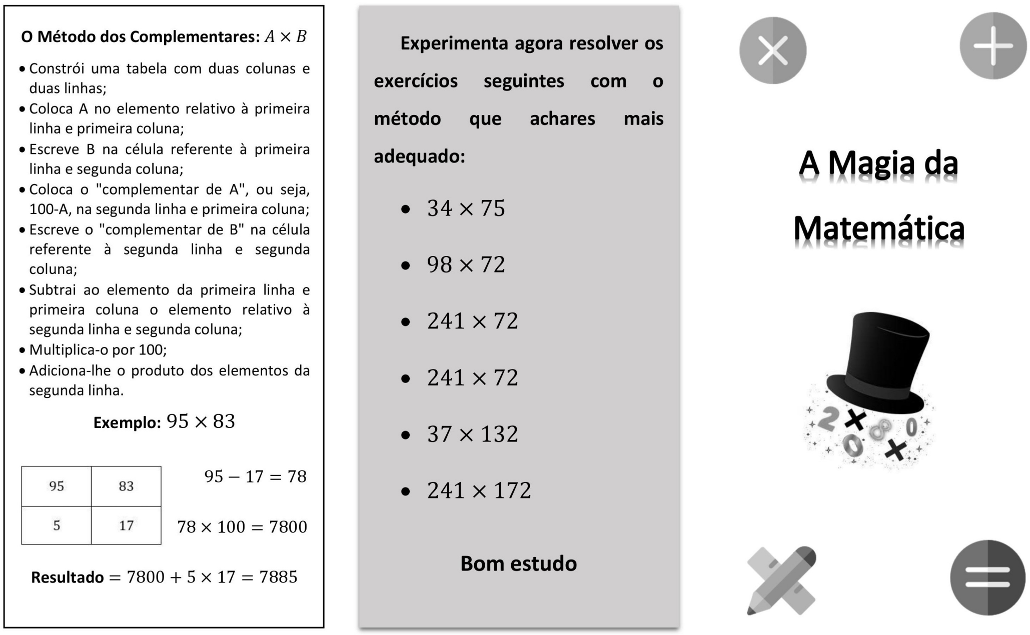


Fig. 5.3 Segunda aula assistida da professora estagiária Carla Simões

5.2.3 Projeto Educacional II

Uma das partes constituintes do segundo ano do Mestrado consiste na realização de um trabalho escrito sobre um tema específico ao qual se dá o nome de Projeto Educacional I.
Em conversação com o orientador científico foi estipulado que eu trataria de Matemática Recreativa. Uma vez que os estudantes necessitam de conhecer como a multiplicação se realiza, não só para aplicá-la em certos momentos da sua vida académica, nomeadamente, nos exames nacionais do 9º e 12º anos, mas, principalmente, em situações do quotiano, decidi abordar este assunto.
O documento intitulado "A Magia da Multiplicação" apresentava ao leitor diferentes métodos de multiplicação ao longo da história com exemplos demonstrativos e algumas curiosidades matemáticas com o intuito de atrair a atenção dos alunos.
O Projeto Educacional II, também constituinte deste Mestrado, consiste na apresentação do Projeto Educacional I.
Assim, no dia 9 de maio de 2018, apresentei parte deste trabalho aos alunos do 9ºB. Esta palestra teve uma duração de noventa minutos sendo que no final foi entregue aos alunos um panfleto onde eram descritos os métodos exibidos e os exercícios propostos para que com os materiais fornecidos (mikado, geoplanos e pauzinhos de espetada) pudessem experimentar novos métodos.


O Método dos Complementares: $A \times B$

- Constrói uma tabela com duas colunas e duas linhas;
- Coloca A no elemento relativo à primeira linha e primeira coluna;
- Escreve B na célula referente à primeira linha e segunda coluna;
- Coloca o "complementar de A", ou seja, 100-A, na segunda linha e primeira coluna;
- Escreve o "complementar de B" na célula referente à segunda linha e segunda coluna;
- Subtrai ao elemento da primeira linha e primeira coluna o elemento relativo à segunda linha e segunda coluna;
- Multiplica-o por 100;
- Adiciona-lhe o produto dos elementos da segunda linha.

Exemplo: 95×83

95	83
5	17

$95 - 17 = 78$

$78 \times 100 = 7800$

Resultado $= 7800 + 5 \times 17 = 7885$

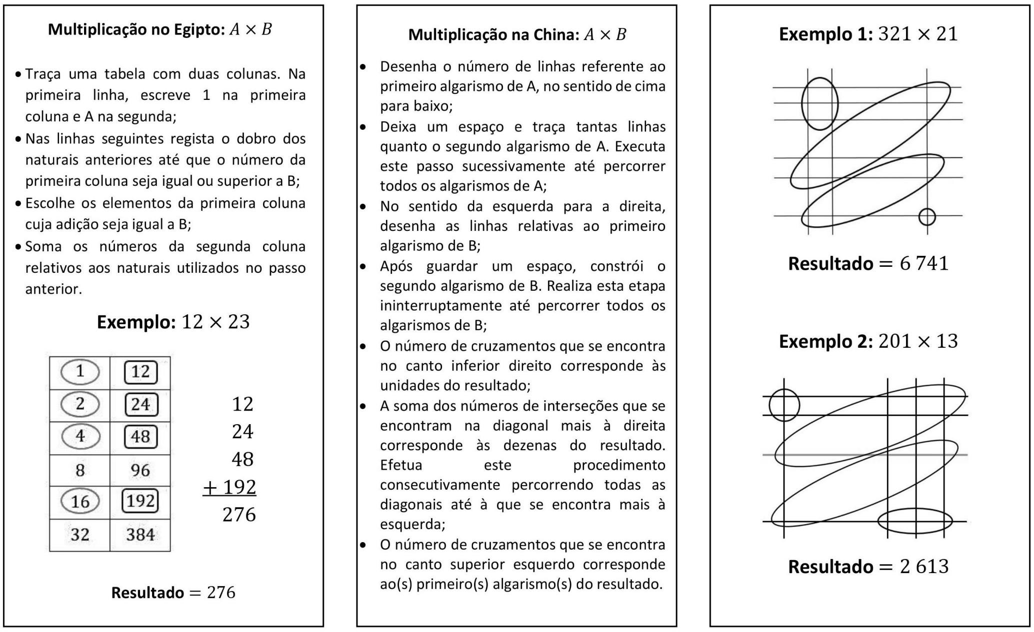
Experimenta agora resolver os exercícios seguintes com o método que achares mais adequado:

- 34×75
- 98×72
- 241×72
- 241×72
- 37×132
- 241×172

Bom estudo

A Magia da Matemática

Fig. 5.4 Primeira página do panfleto apresentado em sala de aula



Multiplicação no Egipto: $A \times B$

- Traça uma tabela com duas colunas. Na primeira linha, escreve 1 na primeira coluna e A na segunda;
- Nas linhas seguintes regista o dobro dos naturais anteriores até que o número da primeira coluna seja igual ou superior a B;
- Escolhe os elementos da primeira coluna cuja adição seja igual a B;
- Soma os números da segunda coluna relativos aos naturais utilizados no passo anterior.

Exemplo: 12×23

1	$\boxed{12}$
2	$\boxed{24}$
4	$\boxed{48}$
8	96
16	$\boxed{192}$
32	384

$$\begin{array}{r} 12 \\ 24 \\ 48 \\ \underline{+\,192} \\ 276 \end{array}$$

Resultado = 276

Multiplicação na China: $A \times B$

- Desenha o número de linhas referente ao primeiro algarismo de A, no sentido de cima para baixo;
- Deixa um espaço e traça tantas linhas quanto o segundo algarismo de A. Executa este passo sucessivamente até percorrer todos os algarismos de A;
- No sentido da esquerda para a direita, desenha as linhas relativas ao primeiro algarismo de B;
- Após guardar um espaço, constrói o segundo algarismo de B. Realiza esta etapa ininterruptamente até percorrer todos os algarismos de B;
- O número de cruzamentos que se encontra no canto inferior direito corresponde às unidades do resultado;
- A soma dos números de interseções que se encontram na diagonal mais à direita corresponde às dezenas do resultado. Efetua este procedimento consecutivamente percorrendo todas as diagonais até à que se encontra mais à esquerda;
- O número de cruzamentos que se encontra no canto superior esquerdo corresponde ao(s) primeiro(s) algarismo(s) do resultado.

Exemplo 1: 321×21

Resultado = 6 741

Exemplo 2: 201×13

Resultado = 2 613

Fig. 5.5 Segunda página do panfleto apresentado em sala de aula

5.3 Palestras ministradas pelo Orientador Científico

5.3.1 A vida e obra de Alan Turing

No dia 23 de janeiro de 2018, o professor Doutor Jaime Carvalho e Silva dirigiu-se, pela primeira vez, à ESEN onde, para além de observar a primeira aula assistida, dirigiu uma palestra sobre a vida e obra de Alan Turing, tendo como público alvo os alunos do décimo primeiro ano, contudo aberta a toda a comunidade escolar.
Com esse objetivo exibiu uma apresentação da sua autoria e pequenos excertos do filme "O Jogo da Imitação" baseado no livro "Alan Turing: The Enigma", de Andrew Hodges.

Fig. 5.6 Primeira palestra ministrada pelo professor Doutor Jaime Silva

5.3.2 Medindo distâncias inacessíveis: até ao infinito e mais além!

Com o objetivo de contextualizar a introdução do capítulo de Trigonometria aos estudantes do nono ano, o orientador científico apresentou, no dia 11 de abril de 2018, a palestra denominada "Medindo distâncias inacessíveis: até ao infinito e mais além!".
No decorrer da apresentação o orientador científico abordou para além do enquadramento histórico, a aplicação desta área atualmente e especulou sobre possíveis utilidades da trigonometria no futuro.

Fig. 5.7 Segunda palestra ministrada pelo professor Doutor Jaime Silva

5.3.3 A importância da Matemática no mundo atual

A última palestra ministrada pelo orientador científico ocorreu no dia 9 de maio de 2018, das 11h50 às 13h20. Esta foi a única ação fechada tendo como público a turma do 10ºA da professora Lurdes Frias. A palestra intitulada "A importância da Matemática no mundo atual" evidenciou as diversas utilidades desta área ao longo do tempo tendo apresentado algumas curiosidades a nível informático, como meio de motivar os alunos.
Foi mencionado posteriormente pela docente da turma que os alunos tinham ficado bastante impressionados com a apresentação do orador.

Fig. 5.8 Terceira palestra ministrada pelo professor Doutor Jaime Silva

5.4 Encontro de Estágios

No dia 16 de junho de 2018 realizou-se no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra a reunião aberta "Encontro de Estágios" com início às 9h30 onde estiveram presentes as cinco estagiárias, alguns professores cooperantes, os orientadores científicos, entre outros elementos.
Como estabelecido, iniciou-se o encontro com as apresentações das professoras estagiárias:

- "Perdi a conta..." dirigida pela Inês Francisco;
- "Um ano de estágio" ministrada pela Daniela Silva;
- "Sala de Matemática - Dia Aberto - Escola Secundária de Pombal" exposta pela Catarina Pereira
- "Um ano de mudanças" dissertada por mim.

Após um breve intervalo, os orientadores científicos ofereceram aos professores cooperantes e às estagiárias o livro "Principios Mathematicos" de José Anastácio da Cunha.

Fig. 5.9 Professora Helena Albuquerque, professora estagiária Carla Simões e o Professor Jaime Silva

Posteriormente, foi visualizada a curta-metragem "A sentença de José Anastácio da Cunha" que recebeu uma menção honrosa no Concurso Jovens "Iluminados" José Anastácio da Cunha - O Tempo, as Ideias a Obra...
Finalmente, decorreu a Conferência "Os novos exames finlandeses do final do ensino secundário, totalmente digitais a partir de 2019" lecionada pelo professor Doutor Jaime Carvalho e Silva.

5.5 Teatro

No dia 21 de junho de 2018, realizou-se na Escola Secundária Emídio Navarro uma noite teatral onde foram apresentadas duas peças: "Despopeia" e "Deus vs Mathema".
A primeira obra consistiu uma desmistificação da epopeia de Luís de Camões, "Os Lusíadas", escrita por uma antiga aluna da escola.

Fig. 5.10 Alunos, autora e professora organizadora da peça "Despopeia"

A segunda apresentação da noite baseou-se na exposição da narrativa criada pelo professor Sérgio Machado, ilustre docente cadidato ao prêmio "Professor do Ano", no âmbito do projeto "Erasmus + Math and Science: practices with fun" onde relata a história de um rapaz que não entendia a importância da Matemática até ao dia em que uma professora o desafia a encontrar algo onde esta não estivesse envolvida. Depois de uma vasta pesquisa o jovem deslumbra-se com as descobertas realizadas agradecendo à docente pela nova perspetiva do mundo.
A noite deu-se por concluída com um momento de dança onde é notória a simetria das dançarinas.

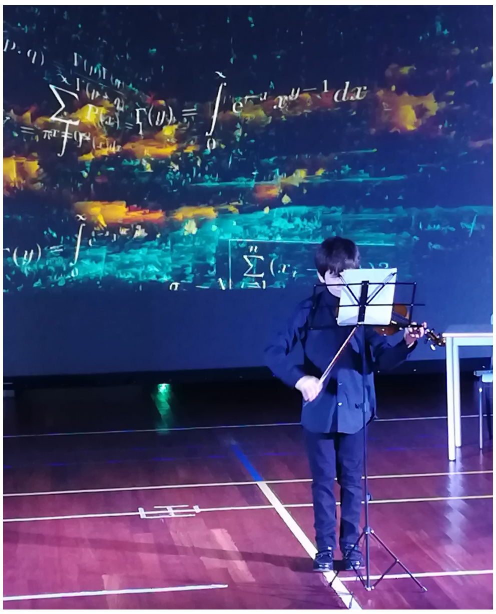


Fig. 5.11 Aluno a tocar violino no decorrer da peça

Capítulo 6

Conclusão

Agora, findo o Estágio Curricular, é essencial refletir sobre a relevância desta parte do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário.

A Escola Secundária de Emídio Navarro soube-me receber muito bem e apoiou-me em todas as fases deste ano. Acredito que não poderia ter escolhido melhor escola para realizar esta etapa e principalmente melhor orientador cooperante. Apesar de não o conhecer, este demonstrou-se mais sábio do que eu poderia acreditar e ensinou-me a primeira lição das muitas que se seguiram: "um professor é um ator". Inicialmente não entendi o que aquilo significava na sua totalidade, mas foi com o decorrer do ano letivo que percebi tal associação. Independentemente do nosso estado de espírito um professor tem que estar sempre no seu melhor "eu". Ainda que a matéria seja a mesma será necessário explicá-la de diferentes formas para que todos os alunos, o nosso público, compreendam, porque para nós o que é básico e simples para eles assemelha-se a um novo idioma.

Descobri também que nós não conhecemos os alunos durante a aula, mas sim nas pequenas pausas que ocasionalmente decorrem, nos intervalos, mesmo que durem cinco minutos, ou nas atividades extracurriculares. Aí constata-se que não são apenas pessoas com determinadas notas e certas dúvidas, mas seres humanos com mais história do que nós conhecemos e mais questões do que aquelas que podemos colmatar. Daqui surgem algumas conversas que nos impelem a guardar os livros, sentarmo-nos como num consultório de psicologia improvisado, aconselhar o melhor que podemos ou apenas ouvirmos.

Em suma, professor não é só o indivíduo que ensina a matéria e avalia os alunos por uma escala pré-definida com testes e trabalhos de casa. É um educador, apesar de não ser parente, que transmite, sem impor, valores morais e regras de cidadania segundo o seu ponto de vista do mundo. É um psicólogo, por ouvir aquilo que os alunos necessitam desabafar, não acreditando muitas vezes nas situações apresentadas, mas cuidando para orientar o aluno. É um amigo, por partilhar vivências, seja dentro ou fora do ambiente de sala de aula.

Certamente, todas as experiências desenvolvidas ao longo desta etapa e todos os ensinamentos transmitidos foram essenciais na edificação da base onde futuramente construirei uma carreira de professora, esta tão importante função na sociedade que agrega tantos domínios.

Bibliografia

As seguintes referências bibliográficas referem-se aos manuais onde foram retirados os exercícios utilizados na realização de fichas de trabalho, planificação de aulas e provas de avaliação presentes nos anexos.

Manuais Adoptados

- Fontão, O. e Pimenta, P. (2015). *XIS Matemática - 9.º Ano*. 2ª edição, Texto Editores. Lisboa.
- Costa, B. e Rodrigues, E. (2017). *Novo Espaço – 11° ano. 1ª edição*, Porto Editora. Porto.

Manuais Online

- Costa, B. e Rodrigues, E. *Novo Espaço – 9° ano*. Porto Editora. Porto.
- Neves, M. e Silva, A. *Matemática - 9.º Ano*. Porto Editora. Porto.
- Neves, M., Guerreiro, L. e Silva A. *Máximo - Matemática A - 11.º Ano*. Porto Editora. Porto.

Anexo A

Fichas de Trabalho

A.1 9º ano

Escola Secundária Emídio Navarro

Ficha de trabalho

Ano letivo 2017/18 **9º Ano**

Nome: ______________________ **Nº:** ______ **Turma:** ____________

1. Sabendo que a é um número positivo, completa com os sinais $<$ ou $>$ de modo a obteres afirmações verdadeiras.

a) $5a$ ____ $-5a$ **b)** $-\frac{15}{a}$ ____ $-\frac{1,5}{a}$ **c)** $\frac{a}{4}$ ____ $\frac{a}{3}$

2. Considera a afirmação seguinte:

"Dados quaisquer dois números reais a e b, se $a < b$, então a $a^2 < b^2$."

Apresenta valores para a e b que permitam mostrar que esta afirmação é falsa.

3. Sejam q e r números reais, tais que $q < r$.
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $2q > 2r$ (B) $-2q > -2r$

(C) $q + 2 > r + 2$ (D) $q - 2 > r - 2$

4. Sejam a e b dois números reais não nulos.
Classifica como verdadeiras ou falsas e justifica as seguintes afirmações.

a) Se $a < b$ então $-a > -b$

b) Se $a - 1 > 0$ então $-a > -1$

c) Se $2a < 2b$ então $a < b$

d) Se $a < b$ então $2a < 2b$

5. Qual dos seguintes números é uma aproximação de 3π com erro inferior a $0,01$?

(A) $9,40$ (B) $9,41$

(C) $9,43$ (D) $9,44$

6. Sejam x e y dois números reais. Completa cada uma das seguintes expressões com um dos símbolos $>$ ou $<$ de modo que sejam verdadeiras.

a) Se $x < 0$ então $-\frac{1}{2}x$ ____ 0.

b) Se $x > 2$, então $\frac{1}{2}x$ ____ 1.

c) Se $x < 2$ e $y < 4$, então $x + y$ ____ 6.

d) Se $x > 1$ e $y > 10$, então xy ____ 10.

e) Se $0 < x < 10$ então x^2 ____ 100.

1.a) Sabe-se que $a > 0$.

Assim, pela *monotonia parcial da multiplicação*,

$(*)\ 5 \times a > 5 \times 0 \Leftrightarrow 5a > 0$

$(**)\ (-5) \times a < (-5) \times 0 \Leftrightarrow -5a < 0$

Logo, pela *transitividade*,

$5a > -5a$

1.b) 1ª Resolução:

Dado $a > 0$, tem-se

$$\frac{15}{a} > \frac{1,5}{a}$$

Pela *monotonia parcial da multiplicação*, tem-se

$$-\frac{15}{a} < -\frac{1,5}{a}$$

2ª Resolução:

Dado $a > 0$ e $1,5 > 0$ tem-se

$$\frac{1,5}{a} > 0$$

Por outro lado, $-1 > -10$ então, pela *monotonia parcial da multiplicação*, tem-se

$$-1 \times \frac{1,5}{a} > -10 \times \frac{1,5}{a}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1,5}{a} > -\frac{15}{a}$$

1.c) Dado $a > 0$ verifica-se $\frac{a}{4} < \frac{a}{3}$.

2. Existem vários exemplos para esta questão. Segue uma possibilidade de resposta.

Seja $a = -5$ e $b = 4$.

Sabe-se que $-5 < 4$.

Porém, $25 > 16$.

3. Se $q < r$ então, pela *monotonia parcial da multiplicação*,

$-2 \times q > -2 \times r$

$\Leftrightarrow -2q > -2r$

Logo a opção correta é a (B).

4.a) Verdade. Pela *monotonia parcial da multiplicação*

4.b) Falso. Pela *monotonia parcial da multiplicação*, $a - 1 > 0 \Leftrightarrow a > 1 \Leftrightarrow -a < -1$

4.c) Verdade. Pela *monotonia parcial da multiplicação*

4.d) Verdade. Pela *monotonia parcial da multiplicação*

5. Se $3\pi \approx 9,4247$ então $9,42 < 3\pi < 9,43$ com um erro de $0,01$.
Logo (C) é a hipótese certa.

6.a) Se $x < 0$ então, pela *monotonia parcial da multiplicação*,
$$-\frac{1}{2} \times x > -\frac{1}{2} \times 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x > 0$$

6.b) Se $x > 2$ então, pela *monotonia parcial da multiplicação*,
$$\frac{1}{2} \times x > \frac{1}{2} \times 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x > 1$$

6.c) Se $x < 2$ então, *monotonia da adição* tem-se
$$x < 2 \Leftrightarrow x + 4 < 2 + 4 \Leftrightarrow x + 4 < 6$$
Se $y < 4$ então, *monotonia da adição* tem-se
$$y < 4 \Leftrightarrow x + y < x + 4$$
Assim, $x + y < x + 4 < 6$
Logo, pela *transitividade*, $x + y < 6$

6.d) Se $y > 10$ então y é positivo.
Se $x > 1$ então, pela *monotonia parcial da multiplicação*,
$$x \times y > 1 \times y \Leftrightarrow xy > y$$
Assim, $xy > y > 10$
Logo, pela *transitividade*, $xy > 10$

6.e) Se $0 < x < 10$ então x é positivo.
Se $x < 10$ então, pela *monotonia parcial da multiplicação*,
$$(*)\ x \times x < 10 \times x \Leftrightarrow x^2 < 10x$$
$$(**)\ x \times 10 < 10 \times 10 \Leftrightarrow 10x < 100$$
Assim, $x^2 < 10x < 100$
Logo, pela *transitividade*, $x^2 < 100$

Nome: ____________________ Nº: ______ Turma: ______________

1. Considera os conjuntos A, B e C tais que

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 3(1-2x) < 2(x+1) + x - 7\}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} < \frac{1-x}{4}\right\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : 3\left[1 - 2(x-1)\right] \leqslant 2\}$$

Representa geometricamente e na forma de intervalo os conjuntos:

a) A

b) B

c) C

d) $A \cup B$ e $A \cap B$

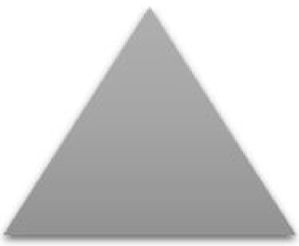
e) $A \cup C$ e $A \cap C$

f) $B \cup C$ e $B \cap C$

g) $A \cup B \cup C$ e $A \cap B \cap C$

2. Nas figuras abaixo encontram-se representados um triângulo equilátero e um quadrado.

Sabe-se que o lado do triângulo tem $x + 3$ unidades de comprimento e o lado do quadrado é 2 vezes maior que o lado do triângulo.



a) Indica os valores de x para o qual o perímetro do quadrado é maior que o perímetro do triângulo.

b) Indica o maior inteiro que não satisfaz a condição anterior.

c) Indica o perímetro do triângulo se o perímetro do quadrado for 36 u.c..

Escola Secundária Emídio Navarro

Ficha de trabalho

Ano letivo 2017/18 **Resolução** **9º Ano**

1.a) Resolvendo a inequação tem-se:

$$3(1-2x) < 2(x+1) + x - 7$$
$$\Leftrightarrow 3 - 6x < 2x + 2 + x - 7$$
$$\Leftrightarrow -6x - 2x - x < 2 - 3 - 7$$
$$\Leftrightarrow -9x < -8$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{8}{9}$$

Logo $A = \left]\frac{8}{9}, +\infty\right[$.

1.b) Resolvendo a inequação tem-se:

$$\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} < \frac{1-x}{4}$$
$$\Leftrightarrow \frac{4x}{12} - \frac{6x+6}{12} < \frac{3-3x}{12}$$
$$\Leftrightarrow 4x - 6x - 6 < 3 - 3x$$
$$\Leftrightarrow 4x - 6x + 3x < 3 + 6$$
$$\Leftrightarrow x < 9$$

Logo $B =]-\infty, 9[$.

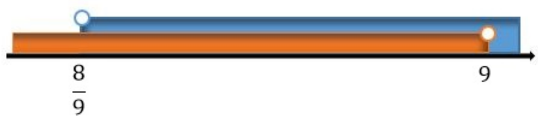
1.c) Resolvendo a inequação tem-se:

$$3\left[1 - 2(x-1)\right] \leqslant 2$$
$$\Leftrightarrow 3(1 - 2x + 2) \leqslant 2$$
$$\Leftrightarrow 3 - 6x + 6 \leqslant 2$$
$$\Leftrightarrow -6x \leqslant 2 - 6 - 3$$
$$\Leftrightarrow -6x \leqslant -7$$
$$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{7}{6}$$

Logo $C = \left[\frac{7}{6}, +\infty\right[$.

1.d) Verifica-se que:

$$A \cup B = \mathbb{R}$$
$$A \cap B = \left]\frac{8}{9}, 9\right[$$



1.e) Verifica-se que:

$$A \cup C = \left]\frac{8}{9}, +\infty\right[$$

$$A \cap C = \left[\frac{7}{6}, +\infty\right[$$

1.f) Verifica-se que:

$$B \cup C = \mathbb{R}$$

$$B \cap C = \left[\frac{7}{6}, 9\right[$$

1.g) Verifica-se que:

$$A \cup B \cup C = \mathbb{R}$$

$$A \cap B \cap C = \left[\frac{7}{6}, 9\right[$$

2.a) Sejam l_T e l_Q as medidas dos lados do triângulo e quadrado, respetivamente, e P_T e P_Q os perímetros dos mesmos.

Se $l_T = x + 3$ então $l_Q = 2 \times (x + 3)$.

Assim

$$P_T = 3 \times (x + 3) = 3x + 9$$

$$P_Q = 4 \times (2x + 6) = 8x + 24$$

Logo

$$P_Q > P_T \Leftrightarrow 8x + 24 > 3x + 9 \Leftrightarrow 5x > -15 \Leftrightarrow x > -3$$

Também sabemos que

$$x + 3 > 0 \text{ e } 2x + 6 > 0$$

Em suma, $x > -3$

2.b) -3

2.c) Se

$$P_Q = 36$$

$$\Leftrightarrow 8x + 24 = 36 \Leftrightarrow 8x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{8} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

então

$$P_T = 3 \times \frac{3}{2} + 9 = \frac{27}{2}$$

Ficha de trabalho

Ano letivo 2017/18 9º Ano

Nome: ______________________________ Nº: ______ Turma: ____________

1. Num estudo estatístico recolheram-se 180 dados, sendo o valor mínimo registado 15 e o valor máximo 82.

Pretende-se agrupar os dados em classes com amplitudes 12 sendo o 15 o extremo inferior da primeira classe.

Quantas classes é necessário formar?

2. O espaço amostral associado a uma experiência aleatória é constituído pelos acontecimentos elementares A, B, C, D e E, que são equiprováveis.

Qual o valor, em percentagem, de $P(A \cup B)$?

3. A tabela apresentada a seguir representa a distribuição das pessoas que trabalham numa empresa, por setor de atividade e género.

	Produção	Qualidade	Administração	Manutenção
Homens	114	6	7	3
Mulheres	86	9	13	2

a) Do setor de produção foi escolhido, ao acaso, um trabalhador. Determina a probabilidade de o elemento escolhido ser do sexo feminino. Apresenta o resultado na forma de percentagem.

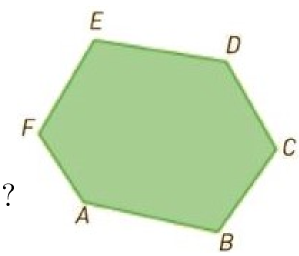
b) Do conjunto dos trabalhadores da empresa, escolhe-se um, ao acaso. Determina a probabilidade do trabalhador escolhido pertencer ao setor da qualidade. Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

c) O Jorge, o Luís, o Pedro, a Ana e a Francisca são as cinco pessoas que trabalham no setor da manutenção. O Pedro e a Francisca são casados. Neste setor escolhe-se, ao acaso, uma equipa de dois elementos: um homem e uma mulher. Determina a probabilidade de a equipa escolhida ser formada pelo casal Pedro e Francisca. Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

4. Na figura ao lado está representado um hexágono $[ABCDEF]$.

Através de um segmento de reta, une-se o vértice A a outro vértice do hexágono, escolhido ao acaso.

Qual a probabilidade de ser traçada uma diagonal do hexágono?



Escola Secundária Emídio Navarro

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Ficha de trabalho

Ano letivo 2017/18 | **Resolução** | **9º Ano**

1. Sabe-se que o valor mínimo é 15 e o valor máximo é 82.

Assim, a amplitude total é $82 - 15 = 67$.

Se a amplitude de cada classe é 12 então

$$\frac{67}{12} \approx 5,6 \quad \text{e} \quad 5 < 5,6 < 6$$

Logo devem formar-se 6 classes.

2. Se A, B, C, D e E são acontecimentos equiprováveis então

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = P(E).$$

Se A, B, C, D e E são acontecimentos elementares então

$$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) = 1.$$

Assim

$$5 \times P(A) = 1 \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{5}.$$

Logo, como quaisquer dois acontecimentos elementares são disjuntos, tem-se

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

3.a) No setor de produção trabalham 200 pessoas, sendo 86 destas mulheres.

Logo, probabilidade pretendida é

$$\frac{86}{200} \times 100 = 43\%$$

3.b) O número total de trabalhadores da empresa é 240, dos quais 15 fazem parte do setor da qualidade.

A probabilidade pretendida é

$$\frac{15}{240} = \frac{1}{16}.$$

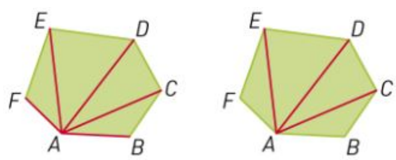
3.c)

	Jorge	Luís	Pedro
Ana	Ana e Jorge	Ana e Luís	Ana e Pedro
Francisca	Francisca e Jorge	Francisca e Luís	**Francisca e Pedro**

Há 1 caso favorável em 6 possíveis, logo, a probabilidade pedida é $\frac{1}{6}$.

4. Na figura ao lado verifica-se que há 3 casos favoráveis e 5 possíveis.

A probabilidade pretendida é $\frac{3}{5} = 0,6$.



Escola Secundária Emídio Navarro

Ficha de trabalho

Ano letivo 2017/18 9º Ano

Nome: ______________________________ Nº: ______ Turma: __________

1. Sabe-se que x e y são duas grandezas inversamente proporcionais.

x		8	5	
y	0,4	0,5		2

a) Completa a tabela e indica a constante de proporcionalidade inversa.

b) Sabendo que y depende de x, escreve uma expressão algébrica que relacione as duas grandezas.

2. Considera todos os triângulos retângulos de área 72.

Representa por x e y as medidas de comprimento dos catetos dos triângulos.

a) Determina o valor de y se $x = 7,2$.

b) Que tipo de proporcionalidade existe entre as duas grandezas x e y?
Indica o valor da constante de proporcionalidade.

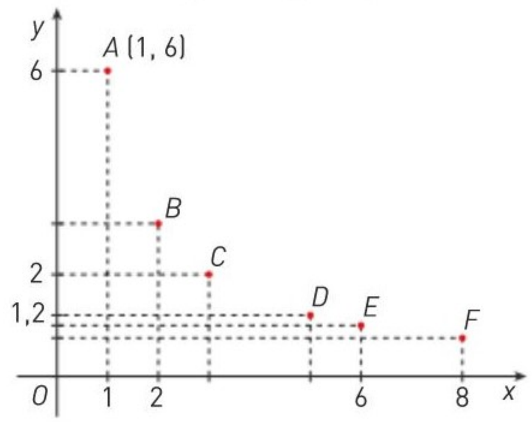
3. Duas grandezas x e y são inversamente proporcionais.

a) A partir da informação dada no referencial apresentado na figura seguinte, determina:

.i) as abcissas dos pontos C e D.

.ii) as ordenadas dos pontos B, E e F.

b) Mostra que $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 24$.



4. Considera as funções f e g, tais que:

$f(x) = ax^2,\ a \neq 0 \quad$ e $\quad g(x) = bx^2,\ b \neq 0$

Sabe-se que $f(2) = 2$ e $g(3) = -f(6)$

a) Determina o valor de a.

b) Determina o valor de b.

c) Mostra que $f\left(\frac{1}{2}\right) + \left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)^3 = 0$

1.a)

x	10	8	5	2
y	0,4	0,5	0,8	2

Como existe proporcionalidade inversa entre as variáveis x e y e $8 \times 0,5 = 4$, pode concluir-se que e a constante de proporcionalidade inversa é 4.

1.b) Sabemos que $x \times y = 4$ logo $y = \frac{4}{x}$.

2.a) Como a área dos triângulos retângulos é 72 então $\frac{x \times y}{2} = 72 \quad \Leftrightarrow \quad x \times y = 144$.

Como $y = \frac{144}{x}$, o valor de y se $x = 7,2$ é $\frac{144}{7,2} = 20$.

2.b) Como $x \times y = 144$, as grandezas x e y são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 144.

3.a.i) Como as grandezas x e y são inversamente proporcionais então $x \times y = k$, em que k é a constante de proporcionalidade inversa.

Se considerarmos o ponto $A(1,6)$, temos $K = 1 \times 6 = 6$.

Seja $C(c,2)$ e $D(d;1,2)$ então

$c \times 2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad c = 3$

$d \times 1,2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad d = 5$

Logo, as coordenadas dos pontos C e D são $(3,2)$ e $(5;1,2)$, respetivamente.

3.a.ii) Seja $B(2,b)$, $E(6,e)$ e $F(8,f)$.

Assim,

$2 \times b = 6 \quad \Leftrightarrow \quad b = 3$

$6 \times e = 6 \quad \Leftrightarrow \quad e = 1$

$8 \times f = 6 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0,75$

Logo, as coordenadas dos pontos B,E e F são $(2,3)$, $(6,1)$ e $(8;0,75)$, respetivamente.

3.b) Tem-se que

$(x+y)^2-(x-y)^2$

$=x^2+2xy+y^2-(x^2-2xy+y^2)$

$=x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2$

$=4xy$

Como a constante de proporcionalidade inversa é 6 tem-se $x \times y = 6$.

Assim, $4xy = 4 \times 6 = 24$

Logo, $(x+y)^2-(x-y)^2 = 24$

4.a) Tem-se

$$f(2)=2 \quad \Leftrightarrow \quad a \times 2^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a=\frac{2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad a=\frac{1}{2}$$

4.b) Como $g(3)=-f(6)$ e $a=\dfrac{1}{2}$ tem-se

$$b \times 3^2 = -\frac{1}{2} \times 6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 9b=-18 \quad \Leftrightarrow \quad b=-2$$

4.c) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)+\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)^3$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\left(-2\times\frac{1}{4}\right)^3$$

$$=\frac{1}{8}+\left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}$$

$$=0$$

Nome: ____________________ Nº: ______ Turma: ________

1. Identifica em cada uma das seguintes funções, definidas em $\mathbb{R}$, os valores de a, b e c:

a) $f(x) = 2x\,(3x-1)$

b) $g(x) = (x+2)\,(x-2) - 4$

c) $f(x) = 2\,(x+1)^2$

2. Dada a função quadrática $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, determina:

a) $f(1)$

b) $f(\sqrt{2})$

c) $f(h+1)$

d) x de modo que $f(x) = 1$

3. Determina, se existirem, os zeros das funções quadráticas seguintes:

a) $f(x) = x^2 - 3x$

b) $f(x) = x^2 + 4x + 5$

c) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

d) $f(x) = -x^2 - 5 + 3x$

4. Os 180 alunos de uma escola estão dispostos de forma retangular, em filas, de tal modo que o número de alunos de cada fila supera em 8 o número de filas. Quantos alunos há em cada fila?

5. De uma folha de papel retangular de 30 cm por 20 cm são retirados, dos seus quatro cantos, quadrados de lado x cm. Determina a expressão que indica a área da parte que sobrou em função de x.

6. Um posto de combustível vende 10 000 litros de gasóleo por dia a 1,50€ cada litro.

O proprietário percebeu que, para cada cêntimo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do gasóleo foi 1,48€, foram vendidos 10 200 litros.

Considerando x o valor, em cêntimos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor arrecadado por dia com a venda do gasóleo, indica a expressão que relaciona V e x.

1.a) $f(x) = 2x\,(3x-1) = 6x^2 - 2x$

Logo $a = 6$, $b = -2$ e $c = 0$.

1.b) $g(x) = (x+2)\,(x-2) - 4 = x^2 - 2x + 2x - 4 - 4 = x^2 - 8$

Logo $a = 1$, $b = 0$ e $c = -8$.

1.c) $f(x) = 2\,(x+1)^2 = 2\,(x^2 + 2x + 1) = 2x^2 + 4x + 2$

Logo $a = 2$, $b = 4$ e $c = 2$.

2.a) $f(1) = 3 \times 1^2 - 4 \times 1 + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$

2.b) $f(\sqrt{2}) = 3 \times (\sqrt{2})^2 - 4 \times (\sqrt{2}) + 1 = 6 - 4\sqrt{2} + 1 = 7 - 4\sqrt{2}$

2.c) $f(h+1) = 3 \times (h+1)^2 - 4 \times (h+1) + 1 = 3 \times (h^2 + 2h + 1) - 4h - 4 + 1$

$= 3h^2 + 6h + 3 - 4h - 4 + 1 = 3h^2 + 2h$

2.d) $f(x) = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(3x-4) = 0$

Pela Lei do Anulamento do Produto,

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ 3x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \dfrac{4}{3}$

Logo C.S.$= \left\{0, \dfrac{4}{3}\right\}$.

3.a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0$

Pela Lei do Anulamento do Produto,

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 3$

Logo C.S.$= \{0, 3\}$.

3.b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = 0$

Assim, $a = 1$, $b = 4$ e $c = 5$.

Pela Fórmula Resolvente das Equações de 2° Grau

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Equação impossível em $\mathbb{R}$.
Logo a função não tem zeros.

3.c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0$
Assim, $a = -1$, $b = 2$ e $c = 8$.
Pela Fórmula Resolvente das Equações de 2° Grau

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times (-1) \times 8}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 6}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2-6}{-2} \lor x = \frac{-2+6}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8}{-2} \lor x = \frac{4}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \lor x = -2$$

Logo C.S.$= \{-2, 4\}$.

3.d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 5 + 3x = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 5 = 0$
Assim, $a = -1$, $b = 3$ e $c = -5$.
Pela Fórmula Resolvente das Equações de 2° Grau

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-1) \times (-5)}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-20}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{-2}$$

Equação impossível em $\mathbb{R}$.
Logo a função não tem zeros.

4. Seja x o número de filas e $x+8$ o número de alunos em cada fila.

Assim, tem-se

$$x\,(x+8)=180$$
$$\Leftrightarrow x^2+8x-180=0$$

Assim, $a=1$, $b=8$ e $c=-180$.

Pela Fórmula Resolvente das Equações de 2° Grau

$$\Leftrightarrow x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times1\times(-180)}}{2\times1}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-8\pm\sqrt{64+720}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-8\pm\sqrt{784}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-8\pm28}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-8-28}{2}\ \vee x=\frac{-8+28}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-36}{2}\ \vee x=\frac{20}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=-13\ \vee x=10$$

Dado que $x>0$ tem-se que $x=10$.

Logo, há 18 alunos em cada fila.

5. Área da folha de papel retangular é igual a $20\times30=60\,\text{cm}^2$.

Área do quadrado de lado x é igual a $x^2\,\text{cm}^2$.

Área da parte que sobrou é igual à área da folha de papel retangular menos a área de quatro quadrados de lado x, ou seja, $(60-4x^2)\,\text{cm}^2$.

6. O valor arrecadado será o resultado do produto entre a quantidade de litros vendida e o preço pago por litro.

Assim, tem-se

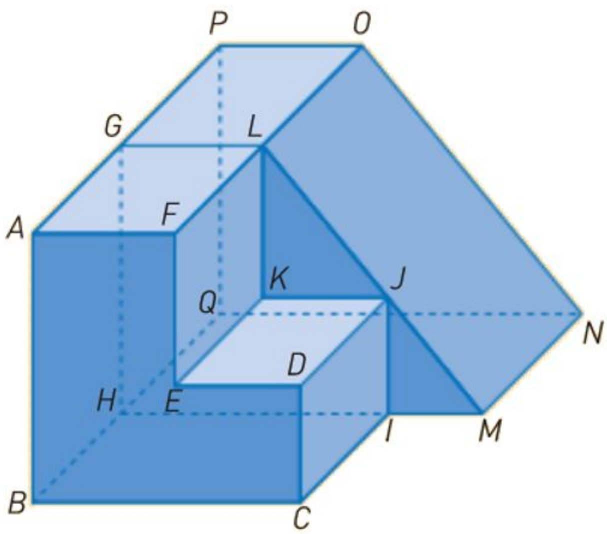
$$V=(10\,000+100x)\times(1,50-0,01x)$$
$$\Leftrightarrow V=15\,000-100x+150x-x^2$$
$$\Leftrightarrow V=15\,000+50x-x^2$$

Nome: ____ Nº: ______ Turma: ______________

1. A peça representada na figura é constituida por dois prismas retos sendo um de bases $[ABCDEF]$ e $[GHIJKL]$ e outro de bases $[GHML]$ e $[PQNO]$.

Sabe-se que:

$I \in [HM]$ e $J \in [LM]$.



1.1 Recorrendo a pontos assinalados na figura, indica:

1.1.1 Dois planos estritamentos paralelos;

1.1.2 Uma reta estritamente paralela ao plano DJK;

1.1.3 Duas retas não complanares;

1.1.4 O pé da perpendicular traçada a partir de E sobre o plano MLG;

1.1.5 Uma reta que passe por J e seja perpendicular ao plano NOP.

1.2 Indica, justificando a posição relativa:

1.2.1 Dos planos MNO e PGL;

1.2.2 Da reta GP relativamente ao plano MNO.

1.3 Quantas retas contidas no plano MNO passam por J e são paralelas ao plano IMN? Justifica.

1.4 Quantas retas contidas no plano ABC são perpendiculares à reta AG? Justifica.

1.5 Justifica que há uma infinidade de planos perpendiculares simultaneamente a MNO e a IMN.

1.1.1) Por exemplo, BCI e AFL.

1.1.2) Por exemplo, FL.

1.1.3) Por exemplo, AB e MN.

1.1.4) K.

1.1.5) DJ

1.2.1) São planos concorrentes.

Intersetam-se segundo uma reta: LO.

1.2.2) GP é estritamente paralela a MNO pois é paralela a LO que está contida em MNO.

1.3) Uma reta.

Se existissem duas retas paralelas a IMN, elas seriam concorrentes em J o que significaria que o plano MNO seria paralelo a IMN, o que não acontece.

1.4) Uma infinidade.

Como AG é perpendicular ao plano ABC em A, é perpendicular a todas as retas deste plano que passam por A.

1.5) Os planos MNO e IMN intersetam-se segundo MN.

Qualquer plano perpendicular a MN é perpendicular a MNO pois MN está contida em MNO.

Como MN também está contida em IMN, o referido plano também é perpendicular a IMN.

Há uma infinidade de planos perpendiculares a MN (por exemplo JMI e todos os que lhe são paralelos).

Escola Secundária Emídio Navarro

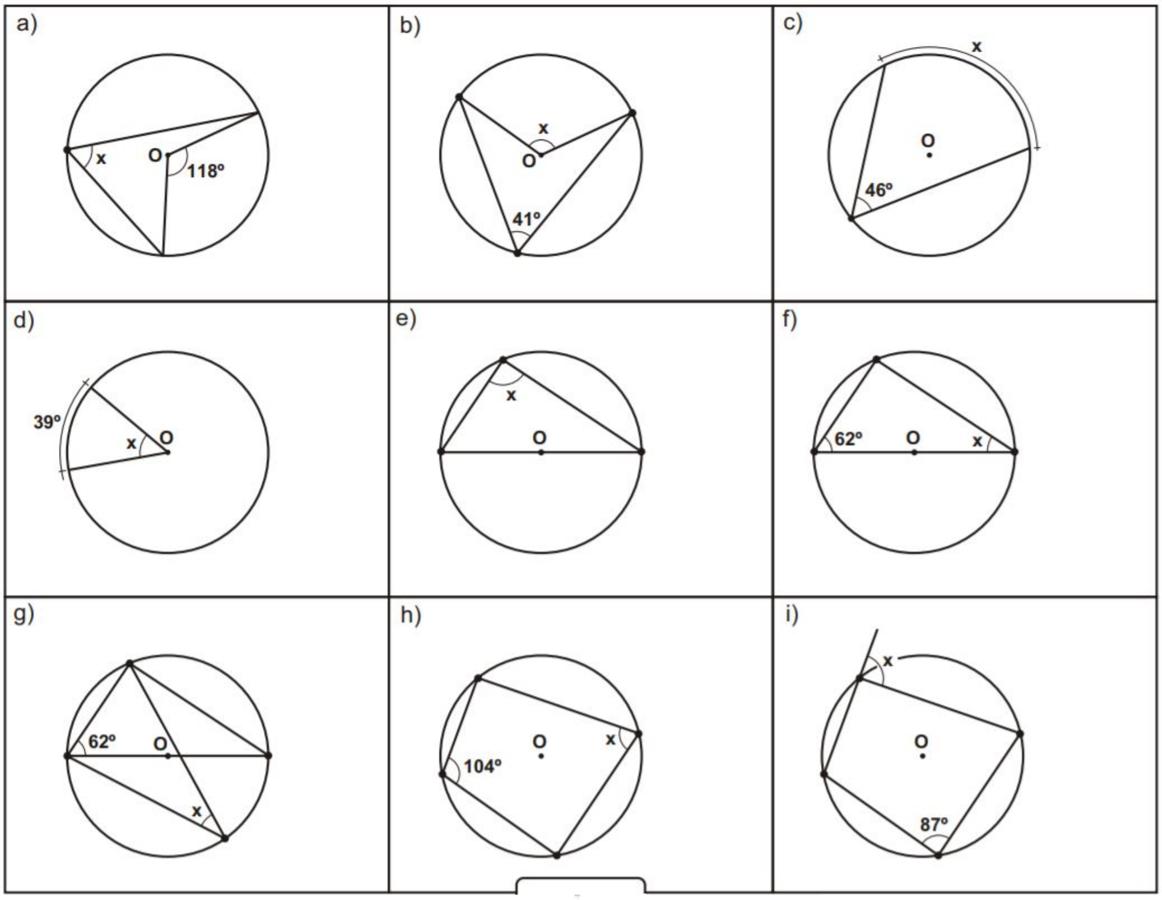
GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Ficha de trabalho

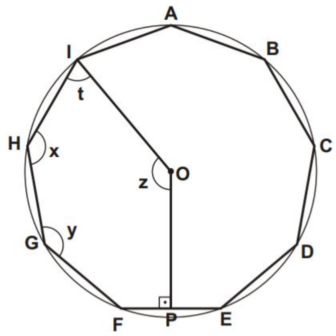
Ano letivo 2017/18 **9º Ano**

Nome: ____ **Nº:** ______ **Turma:** ______________

1. Determina, nas circunferências seguintes, a amplitude do ângulo ou do arco x.



2. A figura abaixo representa um eneágono regular $[ABCDEFGHI]$ de centro O. Sendo OI a bissetriz do ângulo AIH e OP a mediatriz do segmento FE, determina as medidas dos ângulos x, y, z e t.



3. Dada uma circunferência de diâmetro AB, seja P um ponto da circunferência distinto de A e de B. Pode-se afirmar que:

(A) $\overline{PA} = \overline{PB}$

(B) $\overline{PA} + \overline{PB} =$ constante

(C) $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 =$ constante

(D) $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 =$ constante

1.a) $x = \dfrac{118°}{2} = 59°.$

1.b) $x = 41° \times 2 = 82°.$

1.c) $x = 46° \times 2 = 92°.$

1.d) $x = 39°.$

1.e) $x = 90°.$

1.f) $x = 180° - 90° - 62° = 28°.$

1.g) $x = 180° - 90° - 62° = 28°.$

1.h) $x = \dfrac{360° - 2 \times 104°}{2} = \dfrac{152°}{2} = 76°$

1.i) $x = 180° - \dfrac{360° - 2 \times 87°}{2} = 180° - \dfrac{186°}{2} = 180° - 93° = 87°$

2. $\dfrac{360°}{9} = 40°$

$180° - 40° = 140°$

Assim, $x = y = 140°$.

$\dfrac{140°}{2} = 70°$

Então, $t = 70°$.

$3 \times 40° + 20° = 140°$

Logo, $z = 140°$.

3. Uma vez que o triângulo $[APB]$ está contido na semicircunferência verifica-se que $A\hat{P}B = 90°$.

Assim, pelo Teorema de Pitégoras, $\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2$.

Tem-se que $[AB]$ é diâmetro, e, consequentemente, $\overline{AB}$ é uma constante.

Logo, $\overline{AB}^2$ também é constante e a opção correta é a (D).

Nome: ______________________________ **Nº:** _____ **Turma:** ___________

1. Preenche os espaços considerando os pontos notáveis de um triângulo:

B - Baricentro, C - Circuncentro, I - Incentro e O - Ortocentro

a) ( ) Ponto de encontro das medianas.

b) ( ) Ponto de encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo.

c) ( ) Ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo.

d) ( ) Ponto de encontro das retas suporte das alturas.

e) ( ) Ponto que divide cada mediana numa razão de 2 para 1.

f) ( ) Centro da circunferência inscrita num triângulo.

g) ( ) Centro da circunferência circunscrita a um triângulo.

h) ( ) Ponto interior de um triângulo equidistante aos vértices desse triângulo.

2. Quais pontos notáveis de um triângulo nunca se posicionam externamente em relação à sua região triangular?

a) Baricentro e Ortocentro

b) Incentro e Circuncentro

c) Baricentro e Circuncentro

d) Incentro e Ortocentro

e) Baricentro e Incentro

3. Um ponto Q pertence à região interna de um triângulo $[DEF]$ e é equidistante aos lados desse triângulo. O ponto Q é:

a) O baricentro do triângulo $[DEF]$.

b) O incentro do triângulo $[DEF]$.

c) O circuncentro do triângulo $[DEF]$.

d) O ortocentro do triângulo $[DEF]$.

1.a) B

1.b) C

1.c) I

1.d) O

1.e) B

1.f) I

1.g) C

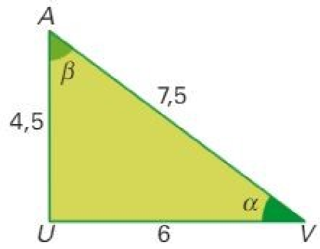
1.h) I

2. A alínea correta é a opção (e).

3. A alínea correta é a opção (b).

Nome: ______________________________ Nº: ______ Turma: ______________

1. Considera o triângulo $[UVA]$.

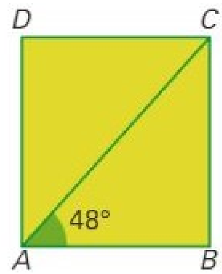


1.1 Verifica que o triângulo é retângulo.

1.2 Representa sob a forma de fração irredutível:

a) $\sin\alpha$ **b)** $\cos\alpha$ **c)** $\tan\alpha$
d) $\sin\beta$ **e)** $\cos\beta$ **f)** $\tan\beta$

2. Considera o retângulo $[ABCD]$.

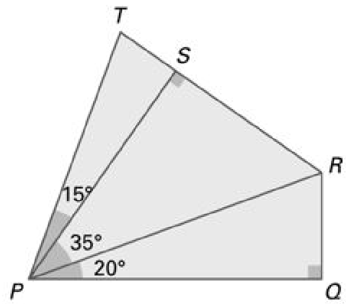


- $[AC]$ é uma diagonal;
- $B\hat{A}C = 48°$;
- $\overline{AB} = 60$ m.

Qual a área do retângulo?

Apresenta o resultado arredondado às décimas.

3. Observa a figura ao lado.



Sabe-se que:

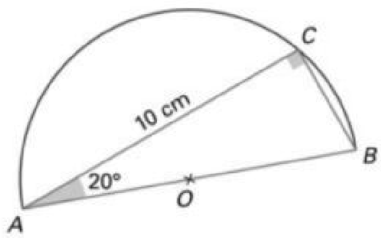
- $\overline{PT} = 72$ cm
- $\overline{RQ} \perp \overline{PQ}$
- $\overline{TS} \perp \overline{PS}$
- $R\hat{P}S = 35°$
- $S\hat{P}T = 15°$
- $Q\hat{P}R = 20°$

Determina $\overline{RQ}$.

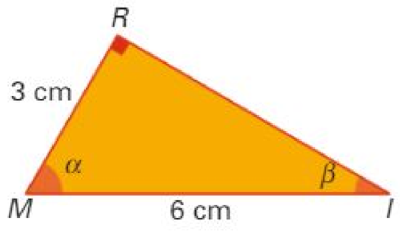
Nos cálculos intermédios utiliza quatro casas decimais.

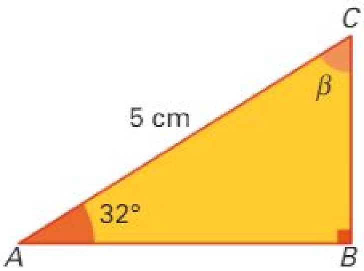
Apresenta a resposta com aproximação à décima do centímetro.

4. Na figura ao lado pode observar-se um triângulo inscrito numa semicircunferência de centro em O.
De acordo com os dados da figura calcula a área de um círculo de diâmetro $[AB]$.
Apresenta o resultado arredondado às centésimas.



5. Para cada um dos triângulos determina os lados e os ângulos desconhecidos.





Apresenta a resposta em centímetros com aproximação às décimas.

1.1 $7,5^2 = 4,5^2 + 6^2$

$\Leftrightarrow 56,25 = 56,25$

Verifica-se assim, pelo recíproco do Teorema de Pitágoras, que o triângulo é retângulo.

1.2.a) $\sin\alpha = \dfrac{4,5}{7,5} = \dfrac{3}{5}$

1.2.b) $\cos\alpha = \dfrac{6}{7,5} = \dfrac{4}{5}$

1.2.c) $\tan\alpha = \dfrac{4,5}{6} = \dfrac{3}{4}$

1.2.d) $\sin\beta = \dfrac{6}{7,5} = \dfrac{4}{5}$

1.2.e) $\cos\beta = \dfrac{4,5}{7,5} = \dfrac{3}{5}$

1.2.f) $\tan\beta = \dfrac{6}{4,5} = \dfrac{4}{3}$

2. $\tan 48° = \dfrac{\overline{BC}}{60}$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = 60 \times \tan 48°$

Área $= \overline{AB} \times \overline{BC} = 60 \times 60 \times \tan 48° \approx 3998,2 \text{ m}^2$

3. $\cos 15° = \dfrac{\overline{PS}}{72} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{PS} = 72 \times \cos 15° \quad \Leftrightarrow \quad \overline{PS} \approx 69,5467$

$\cos 35° = \dfrac{69,5467}{\overline{PR}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{PR} = \dfrac{69,5467}{\cos 35°} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{PR} \approx 84,9008$

$\sin 20° = \dfrac{\overline{RQ}}{84,9008} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{RQ} = 84,9008 \times \sin 20° \quad \Leftrightarrow \quad \overline{RQ} \approx 29,0378$

Logo, $\overline{RQ}$ é aproximadamente $29,0$ cm.

4. $\cos 20^\circ = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

$\Leftrightarrow \cos 20^\circ = \dfrac{10}{\overline{AB}}$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = 10 \times \cos 20^\circ$

$$\text{Área} = \pi \times \left(\frac{10 \times \cos 20^\circ}{2}\right)^2 = \pi \times (5 \times \cos 20^\circ)^2 \approx 15,76 \text{ cm}$$

5. Figura da esquerda

$\overline{RI}^2 = \overline{MI}^2 - \overline{RM}^2$

$\Leftrightarrow \overline{RI}^2 = 6^2 - 3^2$

$\Leftrightarrow \overline{RI}^2 = 27$

Como $\overline{RI} > 0$ então

$\overline{RI} = \sqrt{27} \approx 5,2$ cm

$\cos \alpha = \dfrac{3}{6}$

$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \alpha = 60^\circ$

$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Figura da direita

$\cos 32^\circ = \dfrac{\overline{AB}}{5}$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = 5 \times \cos 32^\circ$

$\Leftrightarrow \overline{AB} \approx 4,2$ cm

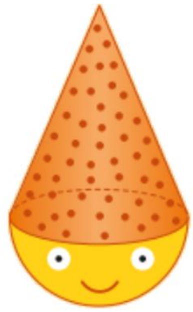
$\sin 32^\circ = \dfrac{\overline{CB}}{5}$

$\Leftrightarrow \overline{CB} = 5 \times \sin 32^\circ$

$\Leftrightarrow \overline{CB} \approx 2,6$ cm

$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$

Nome: ____Nº: ______ Turma: _______________



1. Na figura encontra-se representado um boneco formado por uma semiesfera de 6 cm de diâmetro e um cone cuja base tem diâmetro igual ao da esfera.

Sabe-se que o cone tem o mesmo volume que a semiesfera que o sustenta.

1.1 Determina a altura do cone.

1.2 Na figura seguinte está representada a planificação de uma caixa cilíndrica para construir uma embalagem para o boneco.

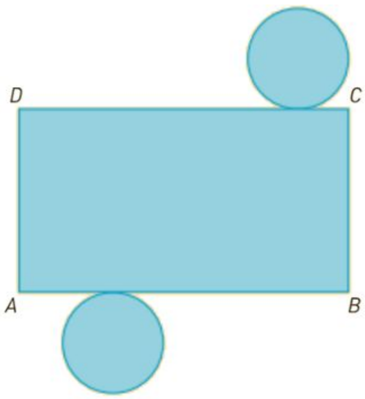
Sabe-se que:

• as bases da caixa têm o mesmo diâmetro que o cone e a semiesfera que formam o boneco;

• o vértice do cone coincide com o centro da base superior.

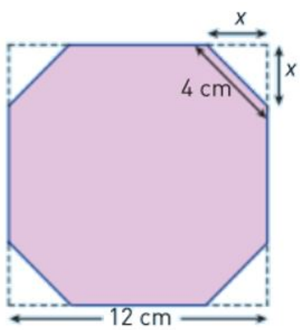
Que dimensões deve ter o retângulo $[ABCD]$?

Apresenta o resultado arredondado às décimas.



2. A caixa tem a forma de um prisma octogonal.

As bases foram construídas a partir de quadrados com 12 cm de lado, sendo-lhes retirados nos cantos triângulos geometricamente iguais, como é sugerido na figura.



2.1 Calcula a área da base da caixa.

2.2 Calcula o voluma da caixa no caso de ter 5 cm de altura.

1.1 O diâmetro da base do cone é 6 cm, logo o raio da sua base é 3 cm. O volume do cone é dado por

$$V_{\text{Cone}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{Base}} \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times h = 3\pi h$$

O volume da semiesfera é dado por

$$V_{\text{Semiesfera}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 18\pi$$

A equação que traduz o problema é

$$3\pi h = 18\pi \quad \Leftrightarrow \quad h = 6$$

Logo, a altura do cone é 6 cm.

1.2 Como a altura do cone é 6 cm e o raio da semiesfera é igual a 3 cm, então a altura do boneco é igual a 9 cm.

O perímetro da base da caixa é dado por

$$2 \times 3 \times \pi = 6\pi \approx 18,8$$

Logo, as dimensões do retângulo $[ABCD]$ são $\overline{BC} = 9$ cm e $\overline{AB} = 18,8$ cm.

2.1 Repare-se que os triângulos retirados dos cantos da base da caixa são triângulos retângulos, cujo comprimento da hipotenusa é 4 cm e os comprimentos dos catetos é x. Aplicando-se o Teorema de Pitágoras, tem-se que

$$4^2 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow 16 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 8$$

Como $x > 0$ então $x = \sqrt{8}$

$$A_{\text{Triângulo}} = \frac{x \times x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{(\sqrt{8})^2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Quadrado}} = 12 \times 12 = 144 \text{ cm}^2$$

A área da base da caixa é dada por

$$144 - 4 \times 4 = 144 - 16 = 128 \text{ cm}^2$$

2.2 O volume da caixa é dado por

$$V_{\text{Caixa}} = A_{\text{base}} \times h = 128 \times 5 = 640 \text{ cm}^2$$

A.2 11º ano

Escola Secundária Emídio Navarro

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Ficha de trabalho

Ano letivo 2017/18 **11º Ano**

Nome: ______________________ **Nº:** ______ **Turma:** ____________

1. Resolve as seguintes alíneas.

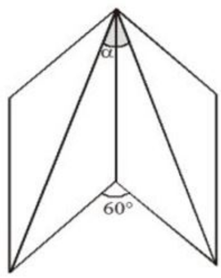
a) Qual o valor do cosseno do ângulo de maior amplitude do triângulo cujos lados medem 5, 6 e 7 u.c.?

b) Qual o valor do cosseno do ângulo de menor amplitude do triângulo cujos lados medem 7, 8 e 10 u.c.?

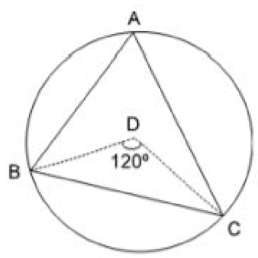
c) Num triângulo cujos lados medem 5 e 6 u.c. e ângulo por eles formado é $60°$, qual a medida do lado oposto ao ângulo mencionado?

d) Qual o valor do cosseno do ângulo de maior amplitude do triângulo cujos lados medem 2, 3 e 5 u.c.?

2. Observa a figura abaixo. As páginas de um livro medem 1 dm de base e $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ dm de altura. Se este livro for parcialmente aberto, de tal forma que o ângulo entre duas páginas é $60°$, qual será a medida do ângulo α, formado pelas diagonais das páginas?



3. Na figura seguinte tem-se o triângulo $[ABC]$ inscrito numa circunferência de centro D.



Se $\overline{AB} = 6$ cm e $\overline{AC} = 9$ cm, o perímetro do triângulo $[ABC]$, em centímetros, é aproximadamente igual a:

(A) 18,4 (B) 19,8

(C) 20,6 (D) 22,9

Escola Secundária Emídio Navarro

Ficha de trabalho

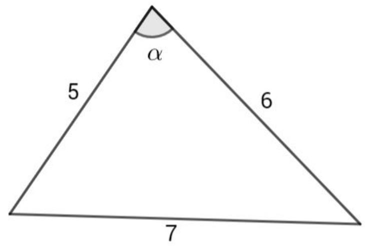
Ano letivo 2017/18 — Resolução — 11º Ano

1.a) O ângulo de maior amplitude de um triângulo é o ângulo oposto ao lado de maior comprimento.

Seja α esse ângulo.

Assim, pela *Lei dos Cossenos*, tem-se

$$7^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow 49 = 61 - 60 \times \cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow 60 \times \cos\alpha = 12$$
$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{5}$$

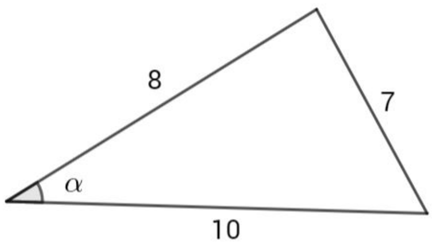


1.b) O ângulo de menor amplitude de um triângulo é o ângulo oposto ao lado de menor comprimento.

Seja α esse ângulo.

Assim, pela *Lei dos Cossenos*, tem-se

$$7^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \times 8 \times 10 \times \cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow 49 = 164 - 160 \times \cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow 160 \times \cos\alpha = 115$$
$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{23}{32}$$



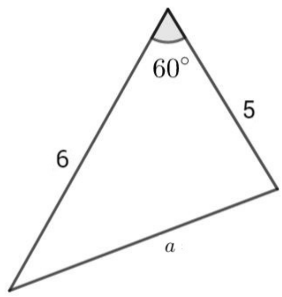
1.c) Seja a o lado oposto ao ângulo de $60°$.

Assim, pela *Lei dos Cossenos*, tem-se

$$a^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos 60°$$
$$\Leftrightarrow a^2 = 61 - 60 \times \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow a^2 = 31$$

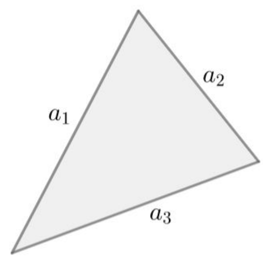
como $a > 0$,

$$\Rightarrow a = \sqrt{31}$$



1.d) Pela desigualdade triangular:

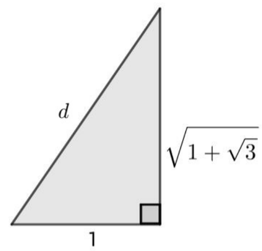
$$a_1 < a_2 + a_3$$
$$a_2 < a_1 + a_3$$
$$a_3 < a_1 + a_2$$



Porém, $5 = 2 + 3$.

Logo, o triângulo com os lados indicados não existe.

2. Seja d a diagonal da página.

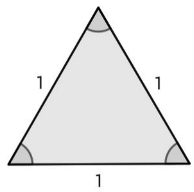


Pelo *Teorema de Pitágoras*, tem-se

$$\left(\sqrt{1+\sqrt{3}}\right)^2 + 1^2 = d^2$$
$$\Leftrightarrow 2+\sqrt{3} = d^2$$

como $d > 0$,

$$\Rightarrow d = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$



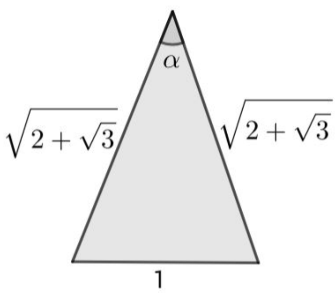
Pode-se verificar que o triângulo que contém as bases das páginas e o ângulo de 60° é equilátero.

Assim, pela *Lei dos Cossenos*, obtém-se

$$1^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 - 2\times\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\times\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\times\cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow 1 = 4+2\sqrt{3} - \left(4+2\sqrt{3}\right)\times\cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$$
$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\times\frac{4-2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}$$

(método do conjugado)

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Logo, $\alpha = 30°$.

3. Uma vez que $B\widehat{A}C$ é um ângulo inscrito na circunferência tem-se que

$$B\widehat{A}C = \frac{B\widehat{D}C}{2} = 60°$$

Assim, pela *Lei dos Cossenos*, tem-se

$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 9^2 - 2\times 6\times 9\times\cos 60°$$
$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 63$$

como $\overline{BC} > 0$

$$\Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{63}$$

Então,

$$\text{perímetro} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$$
$$= 6 + 9 + \sqrt{63}$$
$$\approx 22.9$$

Logo, a opção correta é a alínea (D).

Escola Secundária Emídio Navarro

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Ficha de trabalho

Ano letivo 2017/18 **11º Ano**

Nome: ______________________________ **Nº:** ______ **Turma:** ____________

1. Sabe-se que $\sin(180° - \alpha)$ é positivo e $\cos\alpha$ é negativo. Logo α pertence ao:

A) 1º Quadrante B) 2º Quadrante

C) 3º Quadrante D) 4º Quadrante

2. Considera as afirmações seguintes e escolhe a opção correta.

I - $\exists \alpha \in 4°\text{Quadrante} : \sin\alpha = \dfrac{7}{2}$

II - $\forall \alpha \in 2°\text{Quadrante} : \sin\alpha\cos\alpha < 0$

A) I e II são verdadeiras B) I e II são falsas

C) I é falsa e II é verdadeira D) I é verdadeira e II é falsa

3. Escolhe a opção que indica o(s) valor(es) de m tal que se verifiquem simultaneamente as seguintes condições:

$\sin\alpha = m \quad \wedge \quad \cos\alpha = m - 1$

A) $\{0, 1\}$ B) $\{0\}$ C) $\{0, -1\}$ D) $\{1\}$

4. Considera a expressão $A(x) = \sin^2 x - \cos x$.

a) Determina o valor de $A(x)$ se $\sin x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ e $x \in 2°$ Quadrante.

b) Calcula o(s) valor(es) de $x \in]0°, 360°[$ tal que $A(x) + \cos(x) = \dfrac{1}{2}$.

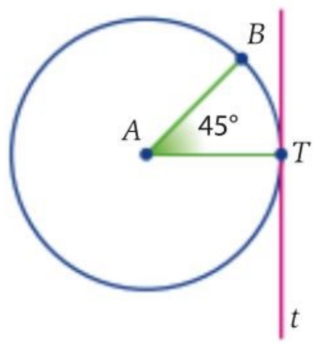
5. Qual o valor de $\cos x$ se $\cos x \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $\tan x = \sqrt{2}$ e $0 < x < 90°$.

6. Calcula o valor da expressão: $\dfrac{\cos^2 225° + \tan 330°}{\sin^2 113° + \cos^2 113°}$.

7. Considera a figura lateral onde está representada uma circunferência de centro A e 5 cm de raio. A reta t é tangente à circunferência no ponto T.

O ponto B pertence à circunferência e forma com o ponto T um arco de centro em A com 45° de amplitude.

Qual a distância de B à reta t, em centímetros, arredondado às décimas?



1. Como $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ tem-se

$$\sin\alpha > 0 \quad \wedge \quad \cos\alpha < 0$$

Assim, $\alpha \in 2°$ Quadrante.

Logo opção (B).

2. Se $\alpha \in 4°$ Quadrante então $\sin\alpha < 0$.

Assim, a afirmação I é falsa.

Se $\alpha \in 2°$ Quadrante então $\sin\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$.

Assim, $\cos\alpha\sin\alpha < 0$.

Consequentemente, a afirmação II é verdadeira.

Logo (C) é a opção certa.

3. Sabe-se que

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1 \quad \wedge \quad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$$

Se $m = -1$ então $\sin\alpha = -1$ e $\cos\alpha = -2$. Impossível

Se $m = 0$ então $\sin\alpha = 0$ e $\cos\alpha = -1$. Possível

Se $m = 1$ então $\sin\alpha = 1$ e $\cos\alpha = 0$. Possível

Logo (A) a opção correta.

4.a) Se $\sin x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ então, pela *Fórmula Fundamental da Trigonometria*,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{9}$$

como $x \in 2°$ Quadrante,

$$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{3}$$

Assim,

$$A(x) = \sin^2 x - \cos x$$
$$= \frac{8}{9} + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{11}{9}.$$

4.b) Como

$$A(x) = \sin^2 x - \cos x$$

então

$$A(x) + \cos x = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos x + \cos x = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sabe-se que:

- $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ se $x = 45°$ ou $x = 315°$
- $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ se $x = 135°$ ou $x = 225°$

Logo $x \in \{45°, 135°, 225°, 315°\}$.

5. Se $0° < x < 90°$ então $\cos \neq 0$.

Assim,

$$\cos x \sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\cos^2 x}$$
$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\cos^2 x}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\cos^2 x}$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{3}$$

como $0° < x < 90°$,

$$\Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

6. Pela *Fórmula Fundamental da Trigonometria*,

$$\sin^2 113° + \cos^2 113° = 1$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\cos^2 225° + \tan 330°}{\sin^2 113° + \cos^2 113°} &= \cos^2 225° + \tan 330° \\ &= (-\cos 45°)^2 - \tan 30° \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

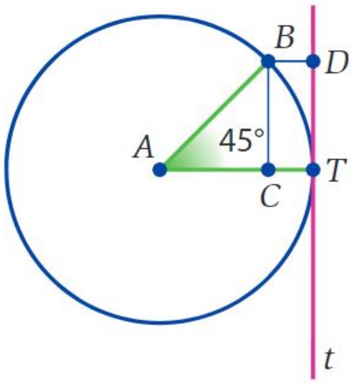
7. Seja D o pé da perpendicular à reta t que passa pelo ponto B.

A distância de B à reta t é igual a $\overline{BD}$.

Como $[BDTC]$ é um retângulo tem-se que $\overline{BD} = \overline{CT}$.

Logo,

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \overline{AT} - \overline{AC} \\ &= 5 - 5 \times \cos 45° \\ &= 5 - \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ &\approx 1,5\end{aligned}$$



Nome: ________________ Nº: ______ Turma: ________

1. Simplifica, em $\mathbb{R}$, a seguinte expressão:

$$\left(\sin x \times \cos x + \tfrac{\cos^3 x}{\sin x} + \cos x\right) \times \tan x$$

2. Considera a função real de variável real definida por $f(x) = \arcsin(5x)$, cujo conjunto de chegada é $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

a) Determina o domínio e o contradomínio da função f.

b) Justifica que a função f é bijetiva.

c) Determina a expressão algébrica da função inversa, f^{-1}.

3. Considera a função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + 2\cos x$.

a) Determina o contradomínio de f.

b) Prova que $(1 + \cos x)^2 - \cos^2 x = f(x)$

c) Estuda quanto à paridade a função f.

d) Simplifica a expressão $f\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) - 2f(\pi + x)$

e) Sabendo que $f(\pi - x) = \dfrac{3}{2}$ e $x \in \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$, calcula $f\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

f) Averigua se a função f é injetiva.

g) Determina uma expressão dos maximizantes de f e indica o máximo de f no intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

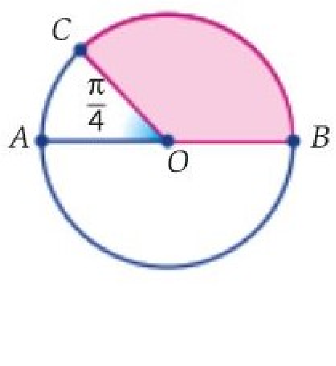
4. Quais as soluções da equação $\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$, considerando $x \in [0, 2\pi]$.

5. Se $x \in [0, \pi]$, determina todas as soluções da equação $2\cos(2x) + 1 = 0$.

6. Na figura ao lado está representada uma circunferência de centro O e raio 5 cm.

$[AB]$ é o diâmetro da circunferência e C é um ponto desta tal que $A\hat{O}C = \dfrac{\pi}{4}$.

Calcula o perímetro e a área da parte colorida da figura.



1. $\left(\sin x \times \cos x + \dfrac{\cos^3 x}{\sin x} + \cos x\right) \times \tan x$

$= \left(\dfrac{\sin^2 x \times \cos x + \cos^3 x + \sin \times \cos x}{\sin x}\right) \times \tan x$

$= \dfrac{\left(\sin^2 x \times \cos x + \cos^3 x + \sin \times \cos x\right) \sin x}{\sin x \cos x}$

$= \dfrac{\left(\sin^2 x \times \cos x + \cos^3 x + \sin \times \cos x\right)}{\cos x}$

$= \dfrac{\cos x \left(\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x\right)}{\cos x}$

$= \sin^2 x + \cos^2 x + \sin x$

$= 1 + \sin x$

2.a) $-1 \leqslant 5x \leqslant 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{5} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{5}$

$Df = \left[-\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}\right]$

$D'f = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

2.b) A função f é injetiva dado que todos os pontos do gráfico têm ordenadas distintas.

A função f é sobrejetiva uma vez que o seu contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

2.c) $y = \arcsin(5x) \Leftrightarrow \sin y = 5x \Leftrightarrow \dfrac{1}{5}\sin y = x$

Logo

$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{5}\sin x$

3.a) Tem-se

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 \leqslant 2\cos x \leqslant 2 \Leftrightarrow -1 \leqslant 1 + 2\cos x \leqslant 3$

Logo

$D'f = [-1, 3]$

3.b) $(1 + \cos x)^2 - \cos^2 x = 1 + 2\cos x + \cos^2 x - \cos^2 x = 1 + 2\cos x = f(x)$

3.c) Tem-se

$f(-x) = 1 + 2\cos(-x) = 1 + 2\cos x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Logo f é uma função par.

3.d) $f\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)-2f(\pi+x)$
$=1+2\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)-2\left(1+2\cos(\pi+x)\right)$
$=1-2\sin x-2(1-2\cos x)$
$=1-2\sin x-2+4\cos x$
$=4\cos x-2\sin x-1$

3.e) $f(\pi-x)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 1+2\cos(\pi-x)=\frac{3}{2}$
$\Leftrightarrow \cos(\pi-x)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow -\cos x=\frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{4}$
$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1+2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
$=1+2\sin x$

Pela *Fórmula Fundamental da Trigonometria* tem-se
$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{15}{16}$
$\Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{15}}{4}\vee \sin x=-\frac{\sqrt{15}}{4}$

Como $x\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$ então
$\sin x=-\frac{\sqrt{15}}{4}$

Logo
$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1+2\sin x=1-2\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{2-\sqrt{15}}{2}$

3.f) A função f não é injetiva porque existem dois objetos distintos com a mesma imagem.

Exemplo:
$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1+2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=1+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$
$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=1+2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=1+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$

3.g) $1+2\cos x=3\Leftrightarrow \cos x=1\Leftrightarrow x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

No respetivo intervalo, o máximo é 3.

4. $\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -\sin^2 x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = 1$

como $x \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = \dfrac{\pi}{2}$

5. $2\cos(2x) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi$

como $x \in [0, \pi]$

$\Rightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right\}$

6. 2π rad ——— $2\pi \times 5$ cm

$\pi - \dfrac{\pi}{4}$ rad ——— x cm

$\Leftrightarrow x = \dfrac{10\pi \times \frac{3\pi}{4}}{2\pi} \Leftrightarrow x = \dfrac{15\pi}{4}$

Perímetro $= \dfrac{15\pi}{4} + 5 + 5 = 10 + \dfrac{15\pi}{4}$

2π rad ——— $\pi \times 5^2$ cm

$\pi - \dfrac{\pi}{4}$ rad ——— y cm

$\Leftrightarrow y = \dfrac{25\pi \times \frac{3\pi}{4}}{2\pi} \Leftrightarrow y = \dfrac{75\pi}{8}$

Área $= \dfrac{75\pi}{8}$

Escola Secundária Emídio Navarro

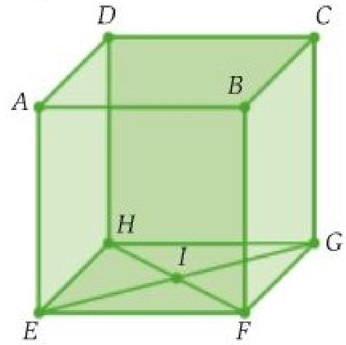
Ficha de trabalho

Ano letivo 2017/18 **11º Ano**

Nome: ______________________________ **Nº:** ______ **Turma:** ______________

1. Considera o cubo $[ABCDEFGH]$ de aresta $x > 1$.

Indica o valor lógico das proposições.



a) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = \sqrt{3}\,x^2$

b) $\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{HC} = x^2$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BG} = \sqrt{2}\,x$

d) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{IG} = x^2$

2. Averigua se o triângulo $[PQR]$ é retângulo sabendo que $P(2, 1, -3), Q(-1, 3, 4)$ e $R(-3, 0, 2)$.

3. Determina a amplitude do ângulo, com aproximação, se necessário, às décimas de grau, formado pelas retas r e s de equações:

a) $r : x - \sqrt{2}y = 4$ e $s : x + 2\sqrt{2}y - 10 = 0$

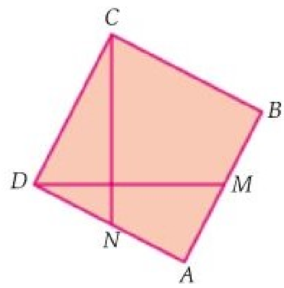
b) $r : y = 3x - 8$ e $s : y = \dfrac{1}{2}x + 5$

c) $r : (x, y) = (3, -1) + k(2, 3), k \in \mathbb{R}$ e $s : (x, y) = (-4, -2) + k(3, -4), k \in \mathbb{R}$

4. Na figura ao lado está representado o quadrado $[ABCD]$.

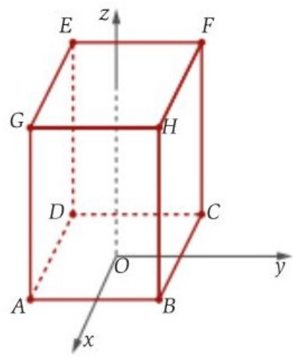
Os pontos M e N são os pontos médios dos lados $[AB]$ e $[DA]$, respetivamente.

Mostra que $[MD] \perp [NC]$.



5. Na figura ao lado está representado um prisma quadrangular reto. O ponto O, origem do referencial ortonormado, é o cento do quadrado $[ABCD]$.

As faces do prisma são paralelas aos planos coordenados do referencial e o ponto H tem coordenadas $(3, 3, 12)$.



a) Determina $\overrightarrow{EC} . \overrightarrow{EB}$.

b) Calcula $\left\|\overrightarrow{EC}\right\|$ e $\left\|\overrightarrow{EB}\right\|$.

c) Escreve as equações vetoriais das retas EC e EB.

d) Determina, com aproximação às décimas de grau, a amplitude do ângulo formado pelas retas EC e EB.

1.a) $\overrightarrow{EF} \,.\, \overrightarrow{EG} = \overline{EF} \times \overline{EF} = x^2$ Falsa

1.b) $\overrightarrow{HG} \,.\, \overrightarrow{HC} = \overline{HG} \times \overline{HG} = x^2$ Verdadeira

1.c) $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{BG} = 0$, pois $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BG}$ são perpendiculares. Falsa

1.d) $\overrightarrow{AF} \,.\, \overrightarrow{IG} = \left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}\right) \,.\, \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AE} \,.\, \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{EF} \,.\, \overrightarrow{IG}$ Falsa

$= \overrightarrow{AE} \,.\, \overrightarrow{IG} = \overline{AE} \times \dfrac{\overline{AE}}{2} = \dfrac{x^2}{2}$

2. $\overrightarrow{PQ}\,(-1-2\,,\, 3-1\,,\, 4-(-3)\,) = \overrightarrow{PQ}\,(-3\,,\, 2\,,\, 7\,)$

$\overrightarrow{PR}\,(-3-2\,,\, 0-1\,,\, 2-(-3)\,) = \overrightarrow{PR}\,(-5\,,\, -1\,,\, 5\,)$

$\overrightarrow{QR}\,(-3-(-1)\,,\, 0-3\,,\, 2-4\,) = \overrightarrow{QR}\,(-2\,,\, -3\,,\, -2\,)$

$\overrightarrow{PQ} \,.\, \overrightarrow{PR} = -3 \times (-5) + 2 \times (-1) + 7 \times 5 = 48 \neq 0$

$\overrightarrow{PQ} \,.\, \overrightarrow{QR} = -3 \times (-2) + 2 \times (-3) + 7 \times (-2) = -14 \neq 0$

$\overrightarrow{PR} \,.\, \overrightarrow{QR} = -5 \times (-2) - 1 \times (-3) + 5 \times (-2) = 3 \neq 0$

Logo, o triângulo $[PQR]$ não é retângulo.

3.a) $\vec{r}(\sqrt{2}, 1)$ e $\vec{s}(2\sqrt{2}, -1)$ são vetores diretores das retas r e s, respetivamente.

$\vec{r} \,.\, \vec{s} = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} + 1 \times (-1) = 3$

$\|\vec{r}\| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$\|\vec{s}\| = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2} = 3$

Seja α o ângulo formado pelos vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$.

$\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{3} \times 3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Logo $\alpha \approx 57.4°$.

3.b) $\vec{r}(1, 3)$ e $\vec{s}(2, 1)$ são vetores diretores das retas r e s, respetivamente.

$\vec{r} \,.\, \vec{s} = 1 \times 2 + 3 \times 1 = 5$

$\|\vec{r}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\|\vec{s}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Seja α o ângulo formado pelos vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$.

$\cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{10} \times \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Logo $\alpha = 45°$.

3.c) $\overrightarrow{r}(2,3)$ e $\overrightarrow{s}(3,-4)$ são vetores diretores das retas r e s, respetivamente.

$\overrightarrow{r}\,.\,\overrightarrow{s} = 2\times 3 + 3\times(-4) = -6$

$\|\overrightarrow{r}\| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

$\|\overrightarrow{s}\| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$

Seja α o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$.

$$\cos\alpha = \frac{-6}{\sqrt{13}\times 5} = -\frac{6\sqrt{13}}{65}$$

Logo $\alpha \approx 109.4°$.

4. $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{MD}\,.\,\overrightarrow{NC} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\right)\,.\,\left(\overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DC}\right)$

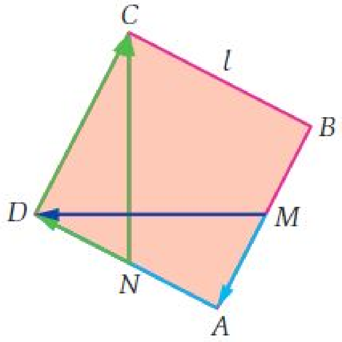
$= \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{ND} + \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{ND} + \overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{ND}$

Designe-se por l a medida do lado do quadrado.

$\overrightarrow{MD}\,.\,\overrightarrow{NC} = -\frac{l}{2}\times l + l\times\frac{l}{2} = 0$

Como $\overrightarrow{MD}\,.\,\overrightarrow{NC} = 0$ tem-se $\overrightarrow{MD} \perp \overrightarrow{NC}$



5.a) Tem-se $B(3,3,0), C(-3,3,0)$ e $E(-3,-3,12)$

$\overrightarrow{EB} = (3-(-3), 3-(-3), 0-12) = \overrightarrow{EB}(6,6,-12)$

$\overrightarrow{EC}(-3-(-3), 3-(-3), 0-12) = \overrightarrow{EC}(0,6,-12)$

$\overrightarrow{EC}\,.\,\overrightarrow{EB} = 0\times 6 + 6\times 6 + (-12)\times(-12) = 180$

5.b) $\left\|\overrightarrow{EC}\right\| = \sqrt{0^2+6^2+(-12)^2} = 6\sqrt{5}$

$\left\|\overrightarrow{EB}\right\| = \sqrt{6^2+6^2+(-12)^2} = 6\sqrt{6}$

5.c) $EC : (x,y,z) = (-3,-3,12) + k(0,6,-12),\ k\in\mathbb{R}$

$EB : (x,y,z) = (-3,-3,12) + k(6,6,-12),\ k\in\mathbb{R}$

5.d) Seja α o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{EC}$ e $\overrightarrow{EB}$.

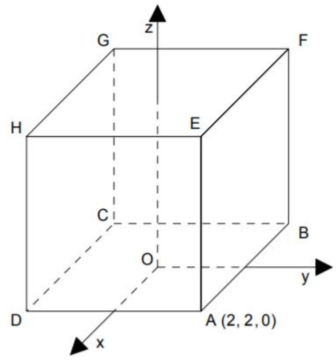
$$\cos\alpha = \frac{180}{6\sqrt{5}\times 6\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

Logo $\alpha \approx 24.1°$.

Nome: ______________________________ Nº: ______ Turma: ______________

1. No referencial ortonormado $Oxyz$ está representado um cubo de faces paralelas aos planos coordenados. O perímetro de cada face é, na unidade considerada, igual a 16.

a) Escreve uma equação cartesiana do plano que contém os pontos D, G e F.



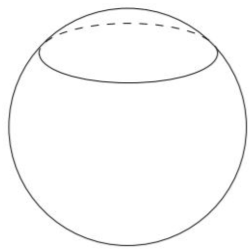
b) Define analiticamente a superfície esférica tangente a todas as faces do cubo.

c) Determina k, caso exista, de modo que o vetor $\overrightarrow{u} = (k^2 + 2k, k^2 - 1, 3)$ seja colinear com $\overrightarrow{CH}$.

d) Sendo M e N os pontos médios das arestas $[AB]$ e $[EF]$, respetivamente, determine as coordenadas do ponto $P \in [HE]$ sabendo que a secção plana determinada no cubo pelo plano MNP é um quadrado.

2. A embalagem de um certo gelado é uma superfície esférica. Num referencial ortonormado essa superfície tem por equação: $x^2 + y^2 + z^2 = 13$.

a) O bordo da "tampa" da embalagem é uma circunferência que se obtém seccionando a superfície esférica por um plano β, de cota positiva e paralelo a xOy. Sabendo que, na unidade considerada, o bordo da "tampa" tem perímetro igual a 2π, escreve uma equação do plano β.



b) Verifica que o ponto $A(2, 3, 0)$ pertence à superfície esférica e determine as coordenadas do ponto B, de modo que $[AB]$ seja diâmetro da superfície esférica.

c) Seja α o plano mediador do segmento $[AB]$. Determina $k \in \mathbb{R}$ de modo que α seja perpendicular ao plano definido por $ky - 2x = z$.

3. Seja α o plano de equação $5x + y = 3z + 3$.

a) Define por uma equação vetorial a reta perpendicular a α e que passa pelo ponto de intersecção de α com o eixo Oy.

b) Para cada número real k a equação $kx + (3 - 5k)y + z = 0$ representa um plano π_k.

.i) Mostra que qualquer que seja k , π_k e α são perpendiculares.

.ii) Indica, justificando, se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que π_k seja plano mediador do segmento $[OA]$, sendo O a origem do referencial e $A(1, -2, 1)$.

1.a) Sabe-se que $D(2,-2,0)$, $G(-2,-2,4)$ e $F(-2,2,4)$.

Tem-se

$\overrightarrow{DG} = (-2-2,-2-(-2),4-0) = (-4,0,4)$

$\overrightarrow{DF} = (-2-2,2-(-2),4-0) = (-4,4,4)$

Seja $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ um vetor normal ao plano.

Então $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{DG} = 0 \wedge \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{DF} = 0 \;\Leftrightarrow\; (a,b,c)\,.\,(-4,0,4) = 0 \wedge (a,b,c)\,.\,(-4,4,4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a+4c=0 \\ -4a+4b+4c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a=-4c \\ 4b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=0 \end{cases}$$

Qualquer vetor $\overrightarrow{u} = (a,0,a),\ a \in \mathbb{R}$, é normal ao plano.

Por exemplo, se $a=1$, tem-se $\overrightarrow{u}(1,0,1)$.

Como o ponto D pertence ao plano tem-se

$1 \times (x-2) + 0 \times (y+2) + 1 \times (z-0) = 0$

$\Leftrightarrow x-2+z=0$

$\Leftrightarrow x+z=2$

1.b) Verifica-se que o ponto P de coordenadas $P(0,0,2)$ é o centro da superfície esférica e que o raio desta é igual a 2.

Logo, a superfície esférica tangente a todas as faces do cubo é definida por

$$x^2+y^2+(z-2)^2=4$$

1.c) Sabe-se que $C(-2,-2,0)$ e $H(2,-2,4)$.

Tem-se que

$\overrightarrow{CH} = (2-(-2),-2-(-2),4-0) = (4,0,4)$

Para $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{CH}$ serem colineares tem que se verificar $\overrightarrow{u} = a\,\overrightarrow{CH},\ a \in \mathbb{R}$.

Assim

$(k^2+2k,k^2-1,3) = a\,(4,0,4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2+2k=4a \\ k^2-1=0 \\ 3=4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2+2k=3 \\ k^2=1 \\ a=\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \vee k=-3 \\ k=1 \vee k=-1 \\ a=\frac{3}{4} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad k=1$

1.d) Sabe-se que $M(0,2,0)$ e $N(0,2,4)$.

Assim $\overline{MN} = 4$

Tem-se que $P(x,y,z) = E + k\,\overrightarrow{EH},\ k \in]0,1[$

$= (2,2,4) + k(2-2,-2-2,4-4),\ k \in]0,1[$

$= (2,2,4) + k(0,-4,0),\ k \in]0,1[$

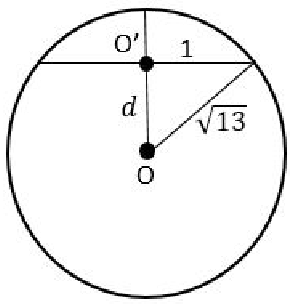
Como $\overline{NP}=4$ verifica-se

$$\sqrt{2^2+(2-4k-2)^2+(4-4)^2}=4$$
$$\Rightarrow 4+16k^2=16$$
$$\Leftrightarrow 16k^2=12$$
$$\Leftrightarrow k^2=\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow k=\frac{\sqrt{3}}{2} \ \vee \ k=-\frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge \ k\in]0,1[$$
$$\Leftrightarrow k=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $P=(2,2,4)+\frac{\sqrt{3}}{2}(0,-4,0)=(2,2-2\sqrt{3},4)$

2.a) Se o perímetro é igual a 2π então o raio é igual a 1.

Assim obtemos a figura ao lado.



Tem-se então que $d=\overline{OO'}$

$$d^2=(\sqrt{13})^2-1^2$$
$$\Leftrightarrow d^2=12 \ \wedge \ d>0$$
$$\Leftrightarrow d=\sqrt{12}$$
$$\Leftrightarrow d=2\sqrt{3}$$

Logo $\beta : z=2\sqrt{3}$.

2.b) Substituindo o ponto A na expressão obtém-se

$$2^2+3^2+0^2=13$$
$$\Leftrightarrow 4+9+0=13$$
$$\Leftrightarrow 13=13$$

Logo, A pertence à superfície esférica.

Sabe-se que

$$B=A+2\overrightarrow{AO}$$
$$\Leftrightarrow B=(2,3,0)+2(-2,-3,0)$$
$$\Leftrightarrow B=(2,3,0)+(-4,-6,0)$$
$$\Leftrightarrow B(-2,-3,0)$$

2.c) O ponto médio de $[AB]$ é O.

O plano mediador de $[AB]$ é definido por

$$\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{OP}=0$$
$$\Leftrightarrow (-4,-6,0)\ .\ (x,y,z)=0$$
$$\Leftrightarrow -4x-6y=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+3y=0$$

Seja θ o plano definido por $ky - 2x = z$.

Tem-se que $\overrightarrow{u}\,(2,3,0)$ e $\overrightarrow{v}\,(-2,k,-1)$ são vetores normais a α e θ, respetivamente.

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = 0\\
\Leftrightarrow\ &(2,3,0)\,.\,(-2,k,-1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &-4 + 3k + 0 = 0\\
\Leftrightarrow\ &k = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

3.a) $5 \times 0 + y = 3 \times 0 + 3 \Leftrightarrow y = 3$

O ponto de intersecção de α com o eixo Oy é $P(0,3,0)$.

O vetor $\overrightarrow{u}\,(5,1,-3)$ é normal a α e diretor da reta em questão.

Logo, a equação vetorial da reta perpendicular a α e que passa pelo ponto de intersecção de α com o eixo Oy é

$$(x,y,z) = (0,3,0) + k(5,1,-3),\ k \in \mathbb{R}$$

3.b.i) Se os planos são perpendiculares então o produto interno dos seus vetores normais é igual a 0.

Sabe-se que $\overrightarrow{u}\,(5,1,-3)$ e $\overrightarrow{v}\,(k,3-5k,1)$ são vetores normais de α e π_k, respetivamente.

Assim

$$\begin{aligned}
&(5,1,-3)\,.\,(k,3-5k,1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &5k + 3 - 5k - 3 = 0\\
\Leftrightarrow\ &0 = 0
\end{aligned}$$

Logo, $\forall k \in \mathbb{R}$, verifica-se que os planos são perpendiculares.

3.b.ii) O ponto $M\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$ é o ponto médio de $[OA]$.

Seja $P(x,y,z)$ um ponto do plano mediador do segmento $[OA]$.

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{MP} = 0\\
\Leftrightarrow\ &(1,-2,1)\,.\,\left(x - \frac{1}{2}, y+1, z - \frac{1}{2}\right) = 0\\
\Leftrightarrow\ &x - \frac{1}{2} - 2y - 2 + z - \frac{1}{2} = 0\\
\Leftrightarrow\ &x - 2y + z = 3
\end{aligned}$$

Comparando a equação de π_k com a obtida observa-se que não existe k que verifique a condição:

$$\begin{cases} kx = x \\ 3 - 5k = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k = 1 \quad \Rightarrow \quad x - 2y + z = 0 \quad \neq \quad x - 2y + z = 3$$

Nome: ______________________________ Nº: ______ Turma: ______________

1. Seja a sucessão (a_n) definida por recorrência.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}\ , n \geqslant 1 \end{cases}$$

Utilizando o princípio de indução matemática, demonstra que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. De uma progressão geométrica sabe-se que a razão é $\dfrac{2}{3}$ e que a soma dos cinco primeiros termos é $-\dfrac{422}{81}$.

2.1 Determina o primeiro termo da progressão.

2.2 Escreve o termo geral da progressão.

2.3 Estuda a monotonia da progressão.

3. Considera a sucessão (u_n) definida por recorrência como se segue:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3\ , n \geqslant 1 \end{cases}$$

3.1 Calcula os cinco primeiros termos.

3.2 A sucessão é uma progressão aritmética crescente? Justifica.

3.3 Escreve o termo geral da progressão.

3.4 Calcula a soma dos 20 primeiros termos da sucessão.

4. Mostra que a sucessão de termo geral $u_n = 3 \times 2^{-n+2}$ é uma progressão geométrica e indica a razão e o primeiro termo.

5. Considera as sucessões (u_n) e (v_n) definidas da seguinte forma:

$$u_n = n^2 + 7n - 60 \quad \text{e} \quad v_n = \frac{1}{n+12}$$

5.1 Indica os termos da sucessão (u_n) que verificam a condição $u_n < 0$.

5.2 Estuda a sucessão $(u_n \times v_n)$ quanto à monotonia.

1. Queremos mostrar que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Para $n = 1$, obtemos uma proposição verdadeira:

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Para averiguar a hereditariedade da propriedade, consideramos que a propriedade é válida para n, isto é, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{n}{n+1} \text{ (hipótese de indução)}$$

e vamos provar, usando a hipótese de indução, que a propriedade é válida para $n+1$, ou seja, que se verifica

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

Com efeito, temos

$$a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

Como a propriedade é válida para n=1 e é hereditária, pode-se afirmar que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{n}{n+1}$$

2.1) $S_5 = u_1 \times \dfrac{1 - r^5}{1 - r}$

$$\Leftrightarrow -\frac{422}{81} = u_1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow u_1 = -2$$

2.2) $u_n = u_1\, r^{n-1}$

$$\Rightarrow u_n = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

2.3) $u_{n+1} - u_n = 2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} = 2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \times \left(\dfrac{2}{3} + 1\right) = \dfrac{10}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} > 0$

Logo a sucessão é crescente.

3.1) $u_1 = 2$

$u_2 = u_1 + 3 = 2 + 3 = 5$

$u_3 = u_2 + 3 = 8$

$u_4 = u_3 + 3 = 11$

$u_5 = u_4 + 3 = 14$

3.2) $u_{n+1} = u_n + 3 \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} - u_n = 3$

Como $u_{n+1} - u_n = 3$, (u_n) é uma progressão aritmética crescente de razão 3.

3.3) $u_n = u_1 + r \times (n-1) = 2 + 3 \times (n-1) = 3n - 1$

3.4) $u_{20} = 3 \times 20 - 1 = 59$

$$S_{20} = \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = 610$$

4. $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 2^{-(n+1)+2}}{3 \times 2^{-n+2}} = \frac{3 \times 2^{-n+1}}{3 \times 2^{-n+2}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Como $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}$, (u_n) é uma progressão geométrica.

O primeiro termo é $u_1 = 3 \times 2^{-1+2} = 6$ e a razão é $r = \dfrac{1}{2}$.

5.1) $u_n < 0 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + 7n - 60 < 0$

Cálculo Auxiliar:

$n^2 + 7n - 60 = 0$

$\Leftrightarrow n = -12 \quad \vee \quad n = 5$

Sendo a concavidade da parábola definida por $y = x^2 + 7x - 60$ voltada para cima e $n \in \mathbb{N}$, as soluções de $u_n < 0$ são os número naturais que satisfazem $-12 < n < 5$.

Concluindo, os 1°, 2°, 3° e 4° termos de (u_n) satisfazem $u_n < 0$.

5.2) $$\begin{aligned} u_n \times v_n &= (n^2 + 7n - 60) \times \frac{1}{n+12} \\ &= \frac{n^2 + 7n - 60}{n+12} \\ &= n - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} \times v_{n+1} - u_n \times v_n &= (n+1) - 5 - (n-5) \\ &= n + 1 - 5 - n + 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

A sucessão $(u_n \times v_n)$ é crescente pois

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \times v_{n+1} - u_n \times v_n > 0.$

Nome: ________________________________ Nº: ______ Turma: ____________

1. Considere duas sucessões (u_n) e (v_n) tais que:

- $u_n = \dfrac{1}{n}$
- $\lim v_n = +\infty$

Relativamente ao $\lim(u_n \times v_n)$, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim(u_n \times v_n) = 0$

(B) $\lim(u_n \times v_n) = +\infty$

(C) Nada se pode concluir quanto ao seu valor.

(D) $\lim(u_n \times v_n) = -\infty$

2. Determina:

a) $\lim(n^2 - n^5)$

b) $\lim \dfrac{1-3n}{9n+2}$

c) $\lim \dfrac{(n+\sqrt{3})^2}{n^2-3}$

d) $\lim \dfrac{5}{1+\frac{1}{3^n}}$

e) $\lim \dfrac{n^2}{n^4-1}$

f) $\lim \left(\dfrac{4-n^5}{n^2}\right)^3$

g) $\lim \dfrac{(2n-1)^2}{(n+1)(2n+1)}$

h) $\lim \dfrac{\sqrt{2n^2+3}-3n}{2n+5}$

i) $\lim \dfrac{\sqrt{n}-2}{n-4}$

Escola Secundária Emídio Navarro

Ficha de trabalho

Ano letivo 2017/18 — **Resolução** — 11º Ano

1. $\lim(u_n \times v_n)$

$$= \lim u_n \times \lim v_n$$

$$= \lim \frac{1}{n} \times \lim v_n$$

$$= 0 \times (+\infty)$$

Todavia, $0 \times (+\infty)$ é uma indeterminação e sem o conhecimento do termo geral da sucessão nada se pode concluir quanto ao valor do limite.

2.a) $$\lim\left(n^2 - n^5\right) = \lim n^5\left(\frac{1}{n^3} - 1\right) = -\infty$$

2.b) $$\lim \frac{1-3n}{9n+2} = \lim \frac{-3n}{9n} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

2.c) $$\lim \frac{(n+\sqrt{3})^2}{n^2-3} = \lim \frac{n^2+2\sqrt{3}+3}{n^2-3} = \lim \frac{n^2}{n^2} = 1$$

2.d) $$\lim \frac{5}{1+\frac{1}{3^n}} = 5 \quad \text{porque} \quad 3^n \to +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{3^n} \to 0$$

2.e) $$\lim \frac{n^2}{n^4-1} = \lim \frac{n^2}{n^4} = \lim \frac{1}{n^2} = 0$$

2.f) $$\lim \left(\frac{4-n^5}{n^2}\right)^3 = \left[\lim \frac{4-n^5}{n^2}\right]^3 = \left[\lim \frac{-n^5}{n^2}\right]^3 = [\lim(-n^3)]^3 = (-\infty)^3$$

2.g) $$\lim \frac{(2n-1)^2}{(n+1)(2n+1)} = \lim \frac{4n^2-4n+1}{2n^2+3n+1} = \lim \frac{4n^2}{2n^2} = \lim \frac{4}{2} = 2$$

2.h) $$\lim \frac{\sqrt{2n^2+3}-3n}{2n+5} = \lim \frac{\sqrt{n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}-3n}{2n+5} = \lim \frac{n\sqrt{2+\frac{3}{n^2}}-3n}{2n+5}$$

$$= \lim \frac{n\left(\sqrt{2+\frac{3}{n^2}}-3\right)}{n\left(2+\frac{5}{n}\right)} = \lim \frac{\sqrt{2+\frac{3}{n^2}}-3}{2+\frac{5}{n}} = \frac{\sqrt{2}-3}{2}$$

2.i) $$\lim \frac{\sqrt{n}-2}{n-4} = \lim \frac{(\sqrt{n}-2)(\sqrt{n}+2)}{(n-4)(\sqrt{n}+2)} = \lim \frac{n-4}{(n-4)(\sqrt{n}+2)} = \lim \frac{1}{\sqrt{n}+2} = 0$$

Nome: ______________________ Nº: ______ Turma: ____________

1. Considera a função f, real de variável real, definida por:

$$f(x) = x - \frac{1}{x}$$

a) Determina o domínio da função.

b) Determina os zeros da função f.

c) Resolve a inequação $f(x) < 0$.

2. Seja g a função, real de variável real, definida por:

$$g(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 3x}$$

a) Determina o domínio de g.

b) Mostra que -1 é zero da função g.

c) Simplifica $g(x)$ no respetivo domínio.

3. Sejam f e g duas funções, reais de variável real, tais que:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$$

Seja A o ponto de interseção dos gráficos das funções f e g.

Determina as coordenadas do ponto A.

4. Seja $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x - 1}$.

Sabendo que $f(x) = x + a + \dfrac{b}{x + c}$, tem-se:

(A) $a = 4$, $b = -3$, e $c = -1$

(B) $a = 4$, $b = -5$, e $c = -1$

(C) $a = -1$, $b = 5$, e $c = 4$

(D) $a = 4$, $b = 5$, e $c = -1$

5. Considere a função definida por $g(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 1}$.

Indica o domínio da função.

1.a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$
$$= \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

1.b) $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \quad \wedge \quad x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \quad \wedge \quad x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \vee \quad x = 1$$

1.c)

	$-\infty$	**-1**		**0**		**1**	$+\infty$
x^2-1	+	0	-	-	-	0	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$\dfrac{x^2-1}{x}$	-	0	+	S.S.	-	0	+

Verifica-se $f(x) < 0$ quando $x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[$

2.a) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x \neq 0\}$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x(x-3) \neq 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x - 3 \neq 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x \neq 3\}$$
$$= \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

2.b) $g(-1) = \dfrac{-1-4-1+6}{1+3} = \dfrac{0}{4} = 0$

2.c) $$g(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 3x}$$
$$= \frac{(x+1)(x^2 - 5x + 6)}{x(x-3)}$$
$$= \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{x(x-3)} \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$
$$= \frac{(x+1)(x-2)}{x}, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

3. $$f(x) = g(x)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \quad \wedge \quad x^2 - 1 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow (x = -2 \vee x = 1) \quad \wedge \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$
$$\Leftrightarrow x = -2$$

As coordenadas de A são $(-2, f(-2)) = \left(-2, \frac{2}{3}\right)$

4. $$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 1}$$
$$= \frac{(x-1)(x+4) + 5}{x-1} = \frac{(x-1)(x+4)}{x-1} + \frac{5}{x-1} = x + 4 + \frac{5}{x-1}$$

Logo, a alínea (D) é a opção correta.

5. $$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \wedge x \neq 1\}$$
$$= \mathbb{R} \setminus \{-1, \, 1\}$$

Nome: ______________________________ Nº: ______ Turma: __________

1. Seja f a função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-4,2\}$ representada ao lado.

1.1 Indica os valores dos seguintes limites, sugeridos pela representação gráfica:

a) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)$

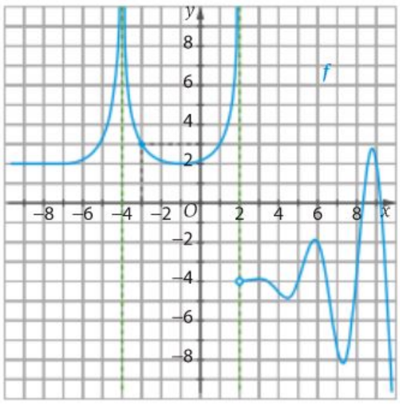
c) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$



1.2 Indica, caso exista, o valor de $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Caso o limite não exista justifica este facto.

2. A expressão que se segue define uma função real de variável real, f_k, para cada valor real de k.

$$f_k(x)=\begin{cases} k(x-2)^2-1 & \text{se } x<1 \\ x^3-kx^2 & \text{se } x>1 \end{cases}$$

2.1 Determina, em função de k, os limites laterais de $f_k(x)$ quando x tende para 1.

2.2 Determina o valor de k para o qual existe limite de $f_k(x)$ em $x=1$. Indica o valor desse limite.

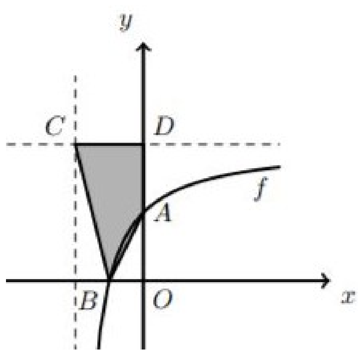
3. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, definida por $f(x)=4-\dfrac{4}{x+2}$.

Sem recorrer à calculadora, resolva os itens seguintes:

3.1 Determina o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x)\geqslant 3$.

3.2 Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy:

- parte do gráfico da função f;
- as retas r e s cujas equações são $y=4$ e $x=-2$, respetivamente;
- o quadrilátero $[ABCD]$;
- A e B são os pontos de interseção do gráfico da função f com os eixos coordenados.
- C é o ponto de interseção das retas r e s.
- D é o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy.



Determina a área do quadrilátero $[ABCD]$.

1.1.a) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = +\infty$

1.1.b) $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = +\infty$

1.1.c) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 3$

1.1.d) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = 3$

1.1.e) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -4$

1.1.f) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

1.1.g) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

1.2 $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 3$

Não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, pois $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

2.1 $\lim\limits_{x\to 1^-} f_k(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (k(x-2)^2-1) = (k(1-2)^2-1) = k-1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f_k(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^3-kx^2) = 1-k$

2.2 $\lim\limits_{x\to 1^-} f_k(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f_k(x) \Leftrightarrow k-1 = 1-k \Leftrightarrow k=1$

$\lim\limits_{x\to 1} = 1-1 = 0$

3.1 Para $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, temos que:

$$f(x) \geqslant 3 \quad\Leftrightarrow\quad 4-\frac{4}{x+2} \geqslant 3 \quad\Leftrightarrow\quad 1-\frac{4}{x+2} \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-2}{x+2} \geqslant 0$$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
Q	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

C.S. $=]-\infty,-2[\cup [2,\infty[$

3.2 Pode-se calcular a área do quadrilátero como a diferença entre a área do trapézio $[OBCD]$ e a área do triângulo $[OAB]$.

$C(-2,4)$

$$f(0) = 4-\frac{4}{0+2} = 4-\frac{4}{2} = 4-2 = 2 \quad\Rightarrow\quad A(0,2)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4-\frac{4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow 4 = \frac{4}{x+2} \Leftrightarrow \frac{4(x+2)}{4} = 1 \wedge x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 1 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = -1 \quad\Rightarrow\quad B(-1,0)$$

Assim temos que a área do quadrilátero $[ABCD]$ é:

$$A_{[\text{ABCD}]} = A_{[\text{OBCD}]} - A_{[\text{OAB}]} = \frac{\overline{CD}+\overline{OB}}{2} \times \overline{OD} - \frac{\overline{OB}\times\overline{OA}}{2}$$

$$= \frac{2+1}{2} \times 4 - \frac{1\times 2}{2} = 5$$

Nome: ______________________________ Nº: ______ Turma: ______________

1. Considera a função f definida em $\mathbb{R}$ por:

$$\begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x^3-2x^2} \text{ se } x>2 \\ x^2-2x+k \text{ se } x\leqslant 2 \end{cases}$$

1.1 Determina o valor de k de forma que f seja uma função contínua em $x=2$.

1.2 Calcula $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

2. Sejam g e h duas funções de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

- a reta de equação $y=2x-3$ é uma assíntota ao gráfico de g;
- a função h é definida por $h(x)=\dfrac{[g(x)]^2}{x}-2g(x)$.

Mostre que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal.

3. Um corpo foi lançado verticalmente de baixo para cima. A altura h, em metros, atingida pelo corpo t segundos após o lançamento, é dada por:

$$h(t)=-4,9t^2+196t+40$$

3.1 Determina, em Km/h, a velocidade do corpo no instante em que foi lançado.

3.2 Qual é a altura máxima atingida pelo projétil?

Apresenta o resultado em metros.

3.3 Quanto tempo esteve o corpo no ar?

Apesenta o resultado em segundos arredondado às décimas.

3.4 Justifica que houve um instante em que a velocidade do corpo foi igual à velocidade média dos primeiros 20 segundos.

4. De todos os retângulos com 80 cm de perímetro, determina as dimensões do que tem área máxima.

1.1 $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x^2} = \dfrac{3}{4}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} x^2-2x+k = 4-4+k = k$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow k = \dfrac{3}{4}$

1.2 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{((1+h)^2-2(1+h)+\frac{3}{4})-(1-2+\frac{3}{4})}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1+2h+h^2-2-2h+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h = 0$

2. Seja reta de equação $y=2x-3$ é uma assíntota ao gráfico de g em $+\infty$, então

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 2$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x)-2x) = -3$

Portanto,

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{(g(x))^2}{x} - 2g(x)\right]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(g(x))^2-2xg(x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)(g(x)-2x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} \times \lim\limits_{x\to+\infty} (g(x)-2x)$

$= 2\times(-3) = -6$

Logo, $y=-6$ é uma assíntota horizontal.

3.1 $h'(x) = -9,8t+196$

$h(0) = 196 \text{ m/s} = 0,196 \text{ km/s} = 705,6 \text{ km/h}$

3.2 $h'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -9,8t+196=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=\dfrac{196}{9,8} \quad \Leftrightarrow \quad t=20$

Por observação da função $y=-4,9t^2+196t+40$ verifica-se que em $t=20$ a função atinge um máximo.

Logo, a altura máxima atingida pelo projétil ocorre aos $t=20\,\text{seg}$.

3.3 $h(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4,9t^2 + 196t + 40 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \approx -0,2 \quad \vee \quad t \approx 40,2$

Logo, o projétil esteve no ar durante $40,2\,\text{seg}$.

3.4 $\text{t.m.v}_{[0,20]} = \dfrac{h(20) - h(0)}{20} = \dfrac{2000 - 40}{20} = \dfrac{1960}{20} = 98$

$h(t) = 98 \quad \Leftrightarrow \quad -9,8t + 196 = 98 \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{-98}{-9,8} \quad \Leftrightarrow \quad t = 10$

Logo, existe um instante em que a velocidade do corpo foi igual à velocidade média dos primeiros 20 segundos. Esse instante foi em $t = 10$.

4. $\text{Perímetro} = 80 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2y = 80 \quad \Leftrightarrow \quad y = 40 - x$

Seja $A(x)$ a expressão que representa a área dos retângulos.

$A(x) = x \times y = x \times (40 - x) = 40x - x^2$

$A'(x) = 40 - 2x$

$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 40 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 20$

Como $x > 0$ e $40 - x > 0$ então $0 < x < 40$.

x	0		20		40
A'			0		
A'		↗	Máx.	↘	

$x = 20 \Rightarrow y = 40 - 20 = 20$

O retângulo de área máxima é o quadrado cujo lado mede $20\,\text{cm}$.

Anexo B

Provas de Avalição

B.1 Questões aula

B.1.1 9º ano

Nome: ________________________ Nº: ______ Turma: __________ Duração: 30 min.

Classificação:________ Professor: ____________ Encarregado de Educação: ______________

Justifica convenientemente todas as tuas respostas

Questões	1	2	3	4	5	Total
Cotações	8	7	3	8	4	30

1. Justifica que:

Se $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}$ e $a < b$ então $-\dfrac{1}{a} - c < -\dfrac{1}{b} - c$

2. Determina o valor aproximado por excesso de $\sqrt{7}$ com um erro inferior a $\dfrac{1}{3}$.

3. Representa, sob a forma de intervalo de números reais, os seguintes conjuntos:

3.1 $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant \dfrac{5}{3}\right\}$ ______________________________

3.2 $B = \{x \in \mathbb{R} : x > -12\}$ ______________________________

3.3 $C = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leqslant 2\}$ ______________________________

4. Considera os intervalos de números reais: $A = [-\pi, 6]$ e $B = [-4, 4[$

Representa, sob a forma de intervalo, os conjuntos: $A \cap B$ e $A \cup B$.

5. Considera o conjunto $B = \left[-\sqrt{3}, 2\right[$.

Quantos elementos tem o conjunto $B \cap \mathbb{Z}$? Indica-os.

Escola Secundária Emídio Navarro

Questão-aula 1 – Matemática - 9ºAno

Ano letivo 2017/18

Resolução

1. $a < b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ pela passagem ao inverso (3)

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{a} < -\dfrac{1}{b}$ pela monotonia parcial da monotonia (3)

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{a} + c < -\dfrac{1}{b} + c$ pela monotonia da adição (2)

2. Tem-se $x = 7$ e $n = 3$. (1)

Assim $x \times n^2 = 7 \times 3^2 = 63$. (1)

Sabe-se que $49 < 63 < 64 \Leftrightarrow 7^2 < 63 < 8^2$. (2)

Logo

$7^2 < 7 \times 3^2 < 8^2$ (1)

$\Leftrightarrow \dfrac{7^2}{3^2} < 7 < \dfrac{8^2}{3^2}$ (1)

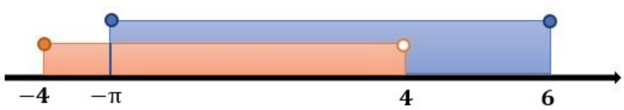
$\Leftrightarrow \dfrac{7}{3} < \sqrt{7} < \dfrac{8}{3}$ (1)

3.1 $A = \left]-\infty, \dfrac{5}{3}\right]$ (1)

3.2 $B =]-12, +\infty[$ (1)

3.3 $C =]-1, 2]$ (1)

4.



$A \cap B = [-\pi, 4[$ (4)

$A \cup B = [-4, 6]$ (4)

5. $B \cup \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1\}$ (4)

Nota: As cotações de cada passo encontram-se à direita destes.

Escola Secundária Emídio Navarro

Questão-aula 2 – Matemática - 9ºAno

Ano letivo 2017/18

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Nome: ________________________________ **Nº:** ______ **Turma:** ____________ **Duração: 40 min.**

Classificação:__________ **Professor:** ______________ **Encarregado de Educação:** __________________

Justifica convenientemente todas as tuas respostas

Questões	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.1	2.2.1	2.2.2	2.2.3	Total
Cotações	0,5	4,5	1	1	3	0,5	2,5	3,5	3,5	20

1. Vinte e quatro amigos do Ezequias enviaram, numa semana, o seguinte número de SMS.

48	89	99	98	88	55	84	55
87	35	54	76	77	59	86	48
98	54	49	65	66	88	86	67

1.1 Qual a amplitude dos dados?

____

1.2 Constrói uma tabela de frequências absolutas e relativas, usando sete classes de amplitude 10.

1.3 Qual é a percentagem de amigos que enviou menos de 50 SMS? Apresenta o resultado arredondado às unidades.

____

1.4 Quantos amigos enviaram pelo menos 65 SMS?

____

1.5 Elabora o histograma que represente os dados.

2. Considera uma caixa com 8 esferas indistinguíveis ao tato, numeradas de 6 a 13.

Considera a experiência aleatória que consiste em retirar uma esfera, ao acaso, e registar o seu número.

2.1 Indica o espaço amostral desta experiência.

____

2.2 Considera os acontecimentos:

- A: “ A bola extraída tem um número superior ou igual a 8.”
- B: “ A bola extraída tem um número primo.”
- C: “ A bola extraída tem um número que é múltiplo de 4.”
- D: “ A bola extraída tem um número que é um múltiplo de 12.”
- E: “ A bola extraída tem um número composto.”

2.2.1 Representa os conjuntos A, B, C, D e E e classifica os respetivos acontecimentos.

____

____

____

____

____

2.2.2 Representa os conjuntos:

2.2.2.1 $\overline{A}$ ________________________________

2.2.2.2 $C \cap D$ ________________________________

2.2.2.3 $A \cup E$ ________________________________

2.2.3 Indica, justificando, dois acontecimentos que sejam, entre si:

2.2.3.1 incompatíveis mas não complementares.

____

2.2.3.2 complementares.

____

2.2.3.3 compatíveis.

____

Escola Secundária Emídio Navarro

Questão-aula 2 – Matemática - 9ºAno

Ano letivo 2017/18 **Resolução**

1.1 A amplitude é $99 - 35 = 64$. (0,5)

1.2

Classes	$[30,40[$	$[40,50[$	$[50,60[$	$[60,70[$	$[70,80[$	$[80,90[$	$[90,100[$	Total	(1,5)
Frequência Absoluta	1	3	5	3	2	7	3	24	(1,5)
Frequência Relativa	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{8}$	1	(1,5)

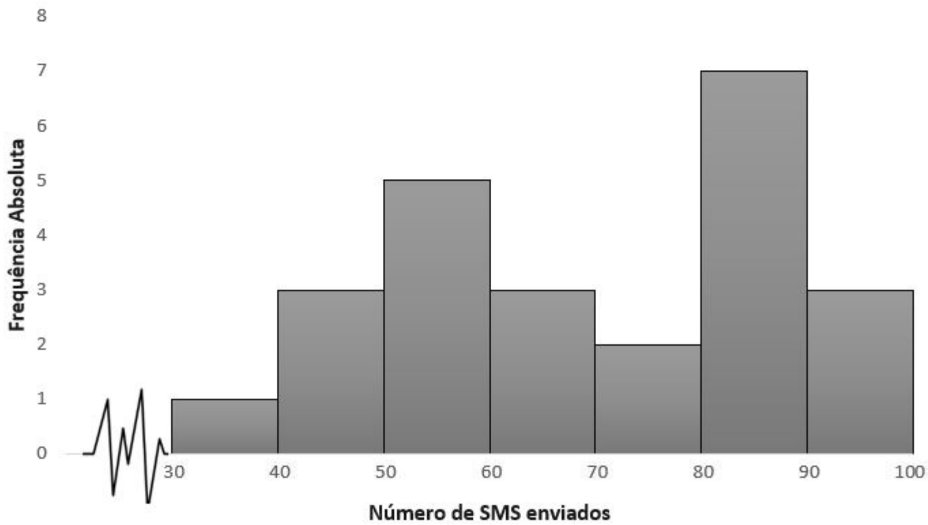
1.3 $\frac{4}{24} \times 100 = 17\%$

A percentagem de amigos que enviou menos de 50 SMS é 17% . (1)

1.4 15 amigos enviaram pelo menos 65 SMS. (1)

1.5 (1,5)

(1,5)



2.1 $\Omega = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ (0.5)

2.2.1 $A = \{8, 9, 10, 11, 12, 13\} \Longrightarrow$ Acontecimento Composto (0.5)

$B = \{7, 11, 13\} \Longrightarrow$ Acontecimento Composto (0.5)

$C = \{8, 12\} \Longrightarrow$ Acontecimento Composto (0.5)

$$D = \{12\} \Longrightarrow \text{Acontecimento Elementar} \qquad (0.5)$$

$$E = \{6, 8, 9, 10, 12\} \Longrightarrow \text{Acontecimento Composto} \qquad (0.5)$$

2.2.2.1 $\overline{A} = \{6, 7\}$ (1.5)

2.2.2.2 $C \cap D = \{12\}$ (1)

2.2.2.3 $A \cup E = \{6, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ (1)

2.2.3.1 B e D, porque $B \cap D = \varnothing$ e $B \cup D = \{7, 11, 12, 13\} \neq \Omega$. (1.5)

2.2.3.2 B e E, porque $B \cup E = \Omega$. (1)

2.2.3.3 C e D, porque $C \cap D = \{12\} \neq \varnothing$. (1)

Nota: As cotações de cada passo encontram-se à direita destes.

Escola Secundária Emídio Navarro

Questão-aula 3 – Matemática - 9ºAno

Ano letivo 2017/18

Nome: ______________________ **Nº:** ______ **Turma:** ____________ **Duração: 30 min.**

Classificação:__________ **Professor:** ______________ **Encarregado de Educação:** __________________

Justifica convenientemente todas as tuas respostas

Questões	1	2	3	Total
Cotações	10	10	5	25

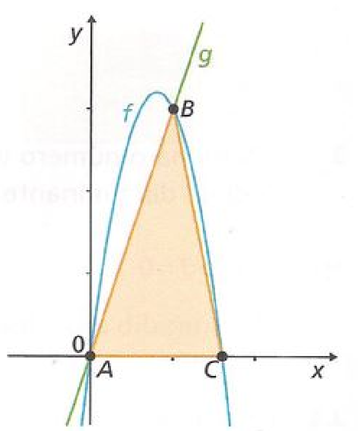
1. Resolve a equação seguinte e apresenta o conjunto solução.

$$(2x-1)^2 = 2 - x$$

2. No referencial da figura encontram-se representadas graficamente as funções definidas por $f(x) = -x^2 + 8x$ e $g(x) = 3x$.

Sabe-se que o ponto A é a origem do referencial, o ponto C pertence ao eixo Ox e o ponto B pertence ao gráfico de ambas as funções.

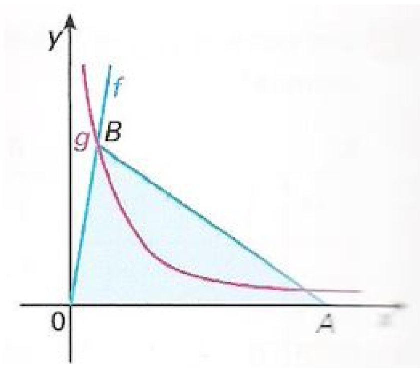
Determina a área do triângulo a sombreado.



3. No referencial cartesiano da figura ao lado estão representadas partes dos gráficos de duas funções f e g e o triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- o ponto O é a origem do referencial;
- a função f é definida por $f(x) = 8x$;
- a função g é uma função de proporcionalidade inversa de constante 2;
- o ponto A pertence ao eixo das abcissas;
- o ponto B pertence ao gráfico de f e de g.



Indica, justificando, em qual das opções seguintes estão as coordenadas de um ponto que não pertence ao gráfico de g?

(A) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (B) $(1, 2)$ (C) $(2, 1)$ (D) $(4, 2)$

1. $(2x-1)^2 = 2-x$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 - 2 + x = 0$ (3)

$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3 + \sqrt{9+16}}{2 \times 4}$ (2)

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm 5}{8}$ (1)

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\dfrac{1}{4}$ (2)

C.S.$= \left\{-\dfrac{1}{4}, 1\right\}$ (1)

2. base (3)

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x\,(-x+8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$

altura (3)

$g(x) = f(x) \Leftrightarrow 3x = -x^2 + 8x \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x\,(x-5) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$

$g(5) = 15$ (2)

$\text{Área} = \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \dfrac{8 \times 15}{2} = 60$ (2)

3. $g(x) = \dfrac{2}{x}$

Considere a alínea (A).

$\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Considere a alínea (B).

$\dfrac{2}{1} = 2$

Considere a alínea (C).

$\dfrac{2}{2} = 1$

Considere a alínea (D).

$\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \neq 2$

Logo, a opção que contém um ponto que não pertence ao gráfico é a (D). (5)

Nota: As cotações de cada passo encontram-se à direita destes.

Escola Secundária Emídio Navarro

Questão-aula 4 – Matemática - 9ºAno

Ano letivo 2017/18

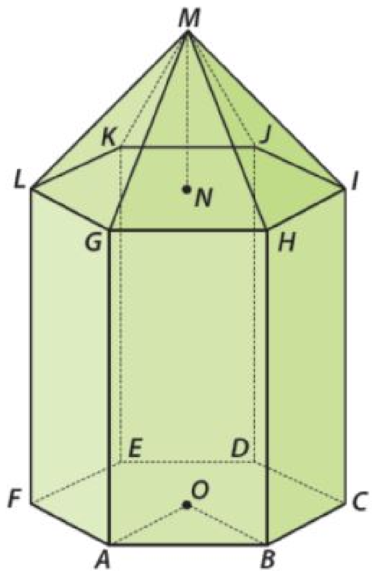
Nome: ________________________ **Nº:** ______ **Turma:** __________ **Duração:** 30 min.

Classificação: __________ **Professor:** ______________ **Encarregado de Educação:** ________________

Justifica convenientemente todas as tuas respostas

Questões	1.1	1.2	Total
Cotações	10	15	25

1. Na figura está representado um sólido composto por um prisma hexagonal regular e uma pirâmide cuja base coincide com a base superior do prisma.



Sabe-se que:

- O ponto O é o centro da circunferência circunscrita à base $[ABCDEF]$ do prisma;
- $[NM]$ é a altura da pirâmide $[GHIJKLM]$;
- $\overline{AB} = \overline{GH} = \overline{NM} = 6$ cm;
- $\overline{CI} = 12$ cm.

Nota: a figura não está desenhada à escala.

1.1 Identifica, usando letras da figura:

1.1.1 uma reta não complanar com a reta AB;

1.1.2 um plano paralelo ao plano BCI;

1.1.3 uma reta paralela ao plano HIC;

1.1.4 dois planos concorrentes não perpendiculares;

1.1.5 uma reta perpendicular a um plano.

1.2 Justifica as seguintes afirmações:

1.2.1 A reta NJ é paralela ao plano BCD;

1.2.2 Os planos AFL e DJI são paralelos;

1.2.3 A reta LF é perpendicular ao plano KJI.

1.1.1 Por exemplo, LK. (2)

1.1.2 LKE. (2)

1.1.3 Por exemplo, LK. (2)

1.1.4 Por exemplo, MHI e MLG. (2)

1.1.5 Por exemplo, HB e ABC. (2)

1.2.1 Como se pode verificar, NJ é paralela a OD que pertence BCD.

Logo, NJ é paralela ao plano BCD. (3)

1.2.2 Estes planos são paralelos dado que são lados opostos num prisma hexagonal regular. (3)

Ou

AF é paralela a CD.

Elas estão contidas nos planos AFL e DJI.

Logo, os planos AFL e DJI são paralelos. (3)

1.2.3 Dado que LF é uma aresta de um prisma hexagonal regular e KJI é uma base deste, LF é perpendicular a KJI. (3)

Ou

LF é perpendicular a duas retas concorrentes, LG e LK, do plano, KJI.

Logo, LF é perpendicular a KJI. (3)

Nota: As cotações de cada passo encontram-se à direita destes.

Escola Secundária Emídio Navarro

Questão-aula 5 – Matemática - 9ºAno

Ano letivo 2017/18

Nome: ________________________ **Nº:** ______ **Turma:** ____________ **Duração: 30 min.**

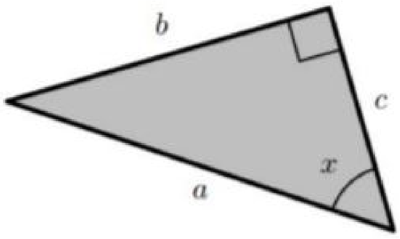
Classificação:__________ **Professor:** ______________ **Encarregado de Educação:** ________________

Justifica convenientemente todas as tuas respostas

Questões	1	2.1	2.2	3.1	3.2	Total
Cotações	3	4	3	4	6	20

1. Na figura ao lado, está representado um triângulo retangulo em que:

- a, b e c são as medidas de comprimento dos seus lados, em centímetros;
- x é a medida da amplitude de um dos seus ângulos agudos, em graus.



Indica a opção correta das quatro igualdades apresentadas a seguir.

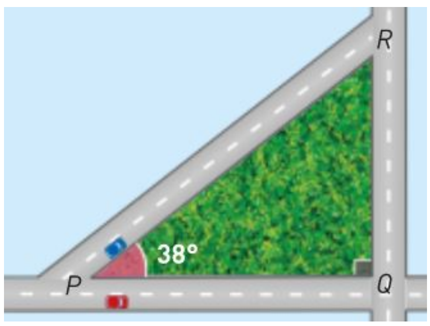
(A) $\sin x = \frac{b}{a}$ (B) $\sin x = \frac{a}{b}$ (C) $\sin x = \frac{b}{c}$ (D) $\sin x = \frac{c}{a}$

2. Sabendo que α é um ângulo agudo e que $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, determina:

2.1. $\sin\alpha$ **2.2.** $\tan\alpha$

3. Na figura está representado um terreno com a forma de um triângulo retângulo, delimitado por três ruas. De acordo com o esquema, o automóvel azul desloca-se de P para R percorrendo $2,4$ km.

Sabe-se que $Q\hat{P}R = 38°$.



3.1 Indica a distância percorrida pelo carro vermelho de P a Q. Apresenta o resultado em metros, arredondado às unidades.

3.2 Estima o valor, em quilómetros quadrados, da área do terreno. Apresenta o resultado arredondado às décimas.

1. Sabe-se que

$$\sin x = \frac{\text{medida do cateto oposto a } x}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Logo, por observação da figura, verifica-se que a opção correta é a alínea (A). (3)

2.a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \sin^2\alpha + \frac{1}{16} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \sin^2\alpha = \frac{15}{16} \qquad (1)(1)$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{15}{16}} \quad\vee\quad \sin\alpha = -\sqrt{\frac{15}{16}} \qquad (1)$$

Como o ângulo é agudo então $\sin\alpha > 0$.

Logo,

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \qquad (1)$$

2.b) $$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{15} \qquad (2)(1)$$

3.1 $$\cos 38^\circ = \frac{\overline{PQ}}{2,4} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \overline{PQ} = 2,4 \times \cos 38^\circ \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \overline{PQ} \approx 1,8912 \text{ km} = 1891 \text{ m} \qquad (1)$$

3.2 $$\sin 38^\circ = \frac{\overline{QR}}{2,4} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \overline{QR} = 2,4 \times \sin 38^\circ \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \overline{QR} \approx 1,4776 \text{ km} \qquad (1)$$

$$\text{Área} = \frac{\overline{PQ} \times \overline{QR}}{2} = \frac{1,8912 \times 1,4776}{2} \approx 1,4 \text{ km}^2 \qquad (1)(1)(1)$$

Escola Secundária Emídio Navarro

Questão-aula 6 – Matemática - 9ºAno

Ano letivo 2017/18

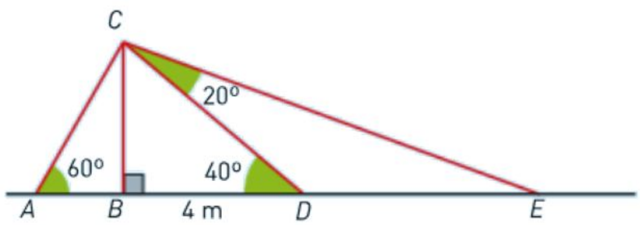
Nome: ________________________________ **Nº:** ______ **Turma:** ____________ **Duração: 30 min.**

Classificação:__________ **Professor:** ______________ **Encarregado de Educação:** __________________

Justifica convenientemente todas as tuas respostas

Questões	1.1	1.2	1.3	1.4	2	Total
Cotações	6	5	5	9	5	30

1. O esquema abaixo representa parte da grua da figura.



Sabe-se que $\overline{BD} = 4$ m.

1.1 Justifica que o triângulo $[CDE]$ é isósceles.

1.2 Apresenta, em metros, o valor de $\overline{BC}$, arredondado às décimas.

1.3 Determina, em metros, $\overline{AB}$. Apresenta o resultado arredondado às unidades.

1.4 Para reparar um problema na grua, é necessário ligar os pontos D e E através de um cabo de aço. Para o efeito, existe um cabo com 5 m de comprimento. Verifica se esse cabo tem comprimento suficiente para ligar os pontos D e E.

2. Qual é a opção que apresenta uma afirmação verdadeira?

(A) $\sin 30° = \cos 30°$

(B) $\sin^2 30° + \cos^2 60° = 1$

(C) $\sin^2 30° + \sin^2 60° = 1$

(D) $(\sin 5°)^2 = \sin 25°$

1.1 $C\hat{D}E = 180° - 40° = 140°$ (2)

$C\hat{E}D = 180° - 140° - 20° = 20°$ (2)

Como o triângulo $[CDE]$ tem dois ângulos com a mesma amplitude, CED e DCE, e consequentemente os lados $[CD]$ e $[DE]$ são iguais, este é isósceles. (2)

1.2 $\tan 40° = \dfrac{\overline{BC}}{4}$ (2)

$\Leftrightarrow \overline{BC} = 4 \times \tan 40°$ (1)

$\Leftrightarrow \overline{BC} \approx 3,4 \text{ m}$ (2)

1.3 $\tan 60° = \dfrac{3,4}{\overline{AB}}$ (2)

$\Leftrightarrow \overline{AB} = \dfrac{3,4}{\tan 60°}$ (1)

$\Leftrightarrow \overline{AB} \approx 2 \text{ m}$ (2)

1.4 $\tan 20° = \dfrac{3,4}{\overline{BE}}$ (2)

$\Leftrightarrow \overline{BE} = \dfrac{3,4}{\tan 20°}$ (2)

$\Leftrightarrow \overline{BE} \approx 9,34 \text{ m}$ (2)

$\overline{DE} = \overline{BE} - \overline{BD} = 9,34 - 4 = 5,34 > 5$ (2)

Logo, o cabo não tem comprimento suficiente. (1)

2. Pela Fórmula Fundamental da Trigonometria tem-se:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Pela relação entre ângulos complementares tem-se:

$\cos x = \sin(90 - x)$

Logo, a opção correta é a alínea (C). (5)

Escola Secundária Emídio Navarro

Questão-aula 7 – Matemática - 9ºAno

Ano letivo 2017/18

Nome: ______________________ **Nº:** ______ **Turma:** ______________ **Duração: 30 min.**

Classificação:__________ **Professor:** ________________ **Encarregado de Educação:** ____________________

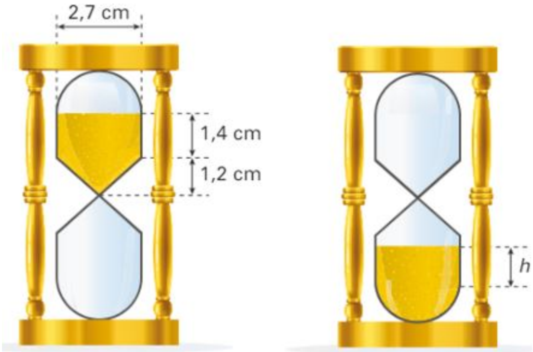
Justifica convenientemente todas as tuas respostas

Questões	1.1	1.2	2	3	Total
Cotações	4	6	7	3	20

1. Na figura ao lado está representada uma ampulheta formada por duas partes simétricas.

Cada parte é formada por uma semiesfera, um cilindro e um cone.

Como se pode verificar na imagem da esquerda, a areia ocupa o cilindro e o cone.



1.1 Determina o volume da areia.

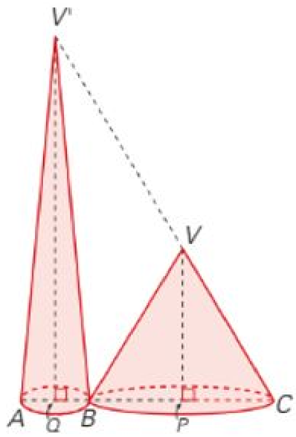
1.2 Depois da areia cair, como é visível na figura da direita, esta ocupa a semiesfera e parte do cilindro. Calcula a altura, h, em cm, da areia dentro do cilindro.

2. A figura ao lado representa dois cones retos com bases tangentes e pertencentes ao mesmo plano.

Sabe-se que:

- O vértice V' pertence a CV;
- $\overline{VP} = 5$ cm
- $\overline{PC} = 3$ cm
- $\overline{V'Q} = 12$ cm

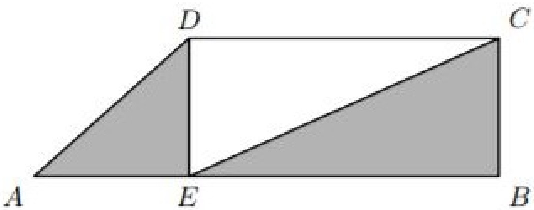
Determina o volume de cada um dos cones.



3. Na figura seguinte, está representado o trapézio rectângulo $[ABCD]$. O ponto E pertence ao lado $[AB]$.

Sabe-se que:

- $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AB}$;
- $\overline{EB} = \overline{DC}$;
- a área do trapézio $[ABCD]$ é 20 cm^2.



Qual é a área da região representada a sombreado?

(A) 10 cm^2 (B) 12 cm^2 (C) 14 cm^2 (D) 16 cm^2

Nota: Quando for necessário realizar arredondamentos usa uma casa decimal para resultados finais e pelo menos três em cálculos auxiliares.

1.1 $V_{\text{Cilindro}} = \pi \times \left(\frac{2,7}{2}\right)^2 \times 1,4 \approx 8,016 \text{ cm}^3$ (1,5)

$V_{\text{Cone}} = \frac{\pi \times \left(\frac{2,7}{2}\right)^2 \times 1,2}{3} \approx 2,290 \text{ cm}^3$ (1,5)

$V_{\text{Areia}} = V_{\text{Cilindro}} + V_{\text{Cone}} = 8,016 + 2,290 = 10,306 \approx 10,3 \text{ cm}^3$ (1)

1.2 $V_{\text{Semiesfera}} = \frac{\frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{2,7}{2}\right)^3}{2} \approx 5,153 \text{ cm}^3$ (2)

$V_{\text{Cilindro}} = \pi \times \left(\frac{2,7}{2}\right)^2 \times h \approx 5,726\,h \text{ cm}^3$ (1)

$V_{\text{Areia}} = V_{\text{Semiesfera}} + V_{\text{Cilindro}} \Leftrightarrow 10,3 = 5,153 + 5,726\,h \Leftrightarrow 5,726\,h = 5,147 \Leftrightarrow$
$h \approx 0,899 \approx 0,9 \text{ cm}$ (3)

2. $V_{\text{Direita}} = \frac{3^2 \times \pi \times 5}{3} \approx 47,123 \approx 47,1 \text{ cm}^3$ (2)

$\frac{\overline{V'Q}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{VP}}{\overline{PC}} \Leftrightarrow \frac{12}{\overline{QC}} = \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow \overline{QC} = \frac{3 \times 12}{5} = 7,2 \text{ cm}$ (2)

$\overline{QB} = 7,2 - 2 \times 3 = 1,2 \text{ cm}$ (1)

$V_{\text{Esquerda}} = \frac{1,2^2 \times \pi \times 12}{3} \approx 18,096 \approx 18,1 \text{ cm}^3$ (2)

3. Seja $\overline{ED} = \overline{BC} = h$, $\overline{AE} = x$ e $\overline{EB} = \overline{DC} = 2x$.

$V_{\text{Trapézio}} = V_{[\text{AED}]} + V_{[\text{EDC}]} + V_{[\text{ECB}]}$

$\Leftrightarrow 20 = \frac{x \times h}{2} + \frac{2x \times h}{2} + \frac{2x \times h}{2}$

$\Leftrightarrow 20 = \frac{x \times h}{2} + x \times h + x \times h$

$\Leftrightarrow 20 = \frac{5}{2}\,x\,h$

$\Leftrightarrow x\,h = \frac{20 \times 2}{5}$

$\Leftrightarrow x\,h = 8 \text{ cm}^2$

$V_{\text{Sombreado}} = V_{\text{Trapézio}} - V_{[\text{EDC}]} = 20 - 8 = 12 \text{ cm}^2$

Logo, a alternativa correta é a (B). (3)

Escola Secundária Emídio Navarro

Questão-aula 8 – Matemática - 9ºAno

Ano letivo 2017/18

Nome: ______________________ **Nº:** ______ **Turma:** ____________ **Duração: 30 min.**

Classificação:__________ **Professor:** ______________ **Encarregado de Educação:** ________________

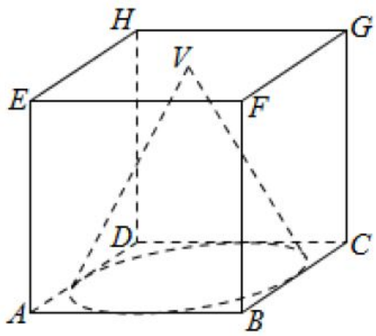
Justifica convenientemente todas as tuas respostas

Nota: Quando for necessário realizar arredondamentos usa uma casa decimal para resultados finais e pelo menos três em cálculos auxiliares.

Questões	1.1	1.2	2	3	Total
Cotações	7	6	7	10	30

1. Na figura ao lado, estão representados um cubo $[ABCDEFGH]$ e um cone no seu interior.

Sabe-se que:



• o vértice do cone, V, é o centro da face $[EFGH]$ do cubo;

• a base do cone é tangente aos lados da face $[ABCD]$ do cubo;

• a aresta do cubo mede 6 cm.

1.1 Determina o valor exato do volume do cubo não ocupado pelo cone.

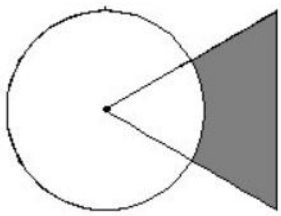
1.2 Determina a área da superfície lateral do cone.

Apresenta o resultado em cm^2, arredondado às décimas.

2. De um determinado cilindro, sabe-se que o raio da base mede 7 m e que a sua superfície lateral tem $133\,\pi$ m^2 de área.

Determina o valor exato da altura do cilindro.

3. Uma circunferência intercepta um triângulo equilátero nos pontos médios de dois de seus lados, conforme mostra a figura, sendo que um dos vértices do triângulo é o centro da circunferência.



Se o lado do triângulo mede 6 cm, qual o valor da área da região sombreada?

1.1 $V_{\text{Cubo}} = 6^3 = 216\,\text{cm}^3$ (2)

$V_{\text{Cone}} = \dfrac{\pi \times 3^2 \times 6}{3} = 56,549\,\text{cm}^3$ (2)

$V_{\text{Não Ocupado}} = V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Cone}}$

$= 216 - 56,549 = 159,549 \approx 159,5\,\text{cm}^3$ (3)

1.2 Seja g a medida da geratriz do cone.

$g^2 = 3^2 + 6^2 \Leftrightarrow g^2 = 9 + 36 \Leftrightarrow g^2 = 45 \ \wedge \ g > 0 \Leftrightarrow g = \sqrt{45} \Leftrightarrow g \approx 6,708\,\text{cm}$ (2)

Área latreal do cone$= \pi \times 3 \times 6,708 \approx 63,2\,\text{cm}^2$ (4)

2. Perímetro $_{\text{Base}} = 2 \times \pi \times 7 = 14\pi\,\text{cm}^2$ (2)

Área $_{\text{Sup. Lateral}} = P_{\text{Base}} \times h$ (2)

$\Leftrightarrow \ 133\pi = 14\pi \times h$ (1)

$\Leftrightarrow \ h = \dfrac{133\pi}{14\pi}$ (1)

$\Leftrightarrow \ h = \dfrac{133}{14}$

$\Leftrightarrow \ h = 9,5\,\text{cm}$ (1)

3. Como o triângulo é equilátero o ângulo ao centro tem $60°$ de amplitude. (2)

Como a circunferência intercepta um triângulo equilátero nos pontos médios de dois de seus lados, o raio desta mede 3 cm. (2)

Seja h a altura do triângulo.

$6^2 = h^2 + 3^2 \Leftrightarrow h^2 = 36 - 9 \Leftrightarrow h^2 = 27 \ \wedge \ h > 0 \Leftrightarrow h = \sqrt{27} \approx 5,196\,\text{cm}$ (2)

Área$=$ Área $_{\text{Triângulo}}$ $-$ Área $_{\text{Setor Circular}}$ (1)

$= \dfrac{3\sqrt{3} \times 6}{2} - \dfrac{\pi \times 3^3 \times 60}{360}$ (1)

$= 9\sqrt{3} - \dfrac{9\pi}{6} \approx 10,9\,\text{cm}^2$ (1)(1)

B.1.2 11º ano

Escola Secundária Emídio Navarro

Ano Letivo 2017/2018

1ª Questão-aula de Matemática A – 11º Ano

Nome: ______________________ Nº: ______ Turma: _______

Classificação: ___________ O Professor: ________________ O Encarregado de Educação: _________________

Questão	1	2	3.1	3.2	3.3	Total
Cotação	10	10	5	5	10	40

1. Para obter a distância entre dois pontos A e B, um observador no ponto O fez as seguintes medições:

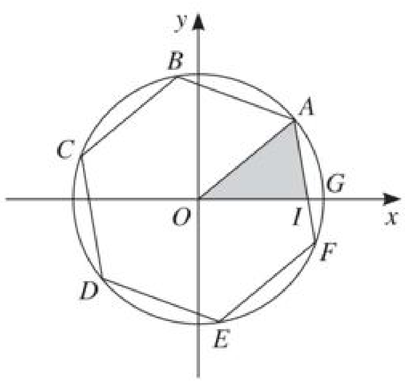
- $\overline{OA} = 70\,m$
- $\overline{OB} = 82\,m$
- $A\widehat{O}B = 71°$

Qual é, em metros, arredondada às unidades, a distância do ponto A ao ponto B?

2. Sabendo que α é um **ângulo obtuso** e que $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, determina o valor exato de:

$$\sin(\pi - \alpha) \times 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

3. No referencial xOy da figura, estão representados uma circunferência trigonométrica circunscrita a um hexágono regular $[ABCDEF]$ e o triângulo $[AOI]$ a sombreado.



Sabe-se que:

- G é ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox;
- I é ponto de interseção de $[AF]$ com o semieixo positivo Ox;
- a amplitude do ângulo $G\widehat{O}A$ é de 40°.

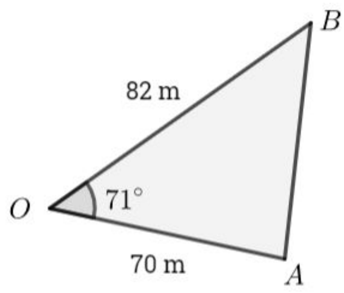
3.1 Indica o valor de $\tan(G\widehat{O}D)$.

3.2 Indica as coordenadas do ponto B.

3.3 Determina a área do triângulo $[AOI]$.

Nota: Apresenta todos os resultados, na forma de dízima, arredondados às centésimas.

1. A figura alusiva à questão é:



(5)

Aplicando a *Lei dos Cossenos* tem-se

$\overline{AB}^2 = 70^2 + 82^2 - 2 \times 70 \times 82 \times \cos 71°$ (3)

$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 \approx 7886,477587$ (1)

como $\overline{AB} > 0$

$\Leftrightarrow \overline{AB} \approx 89$ (1)

2. • $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ (2)

• $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \dfrac{5}{9} = 1$

$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \dfrac{4}{9}$ (2)

$\Leftrightarrow \sin \alpha = \pm\dfrac{2}{3} \quad \wedge \quad 90° < x < 180°$ (1)

$\Rightarrow \sin \alpha = \dfrac{2}{3}$ (1)

• $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ (2)

• $\sin(\pi - \alpha) \times 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{2}{3} \times 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)$ (1)

$= -\dfrac{2}{3}$ (1)

3.1 $\widehat{\mathrm{AB}} = \dfrac{360°}{6} = 60°$ (1)

$G\hat{O}D = -(120° + 20°) = -140°$ (3)

$\tan(G\hat{O}D) = \tan(-140°) \approx 0,84$ (1)

3.2 $G\hat{O}B = 40° + 60° = 100°$ (2)

$B(\cos 100°, \sin 100°)$ (2)

$B(-0,17; 0,98)$ (1)

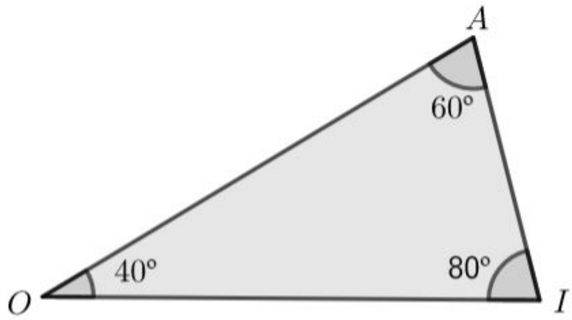
3.3 Seja P o pé da perpendicular ao eixo OX que passa por A.

$\overline{AP} = \sin(G\hat{O}A)$ (1)

$= \sin 40° = 0,64279$ (1)

$G\hat{A}O = \dfrac{\widehat{\mathrm{FD}}}{2} = 60°$ (1)

$A\hat{I}O = 180° - 60° - 40° = 80°$ (1)



(1)

Pela *Lei dos Senos* tem-se

$\dfrac{\sin 80°}{1} = \dfrac{\sin 60°}{\overline{OI}}$ (2)

$\overline{OI} = \dfrac{\sin 60°}{\sin 80°}$ (1)

$\overline{OI} \approx 0,87939$ (1)

$A_{[AOI]} = \dfrac{\overline{OI} \times \overline{AP}}{2} \approx 0,28$ u.a. (1)

Nota: As cotações de cada passo encontram-se à direita destes.

Escola Secundária Emídio Navarro

Ano Letivo 2017/2018

2ª Questão-aula de Matemática A – 11º Ano

Nome: ______________________________ Nº: ______ Turma: _______

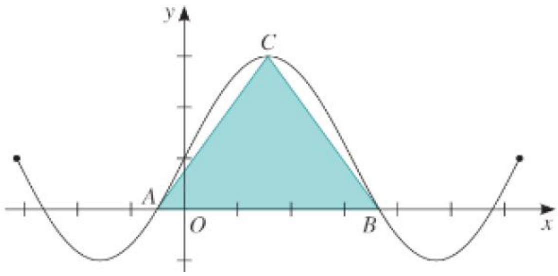
Classificação: ___________ O Professor: _______________ O Encarregado de Educação: _________________

Questões	1	2.1	2.2	2.3	3	4	Total
Cotações	15	3	2	10	15	15	60

1. Na figura ao lado encontra-se representada parte do gráfico da função f, definida por,

$f(x) = 1 + 2\sin x$

e o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que os pontos A, B e C pertencem ao gráfico de f , de domínio $[-\pi, 2\pi]$.

- Os pontos A e B são pontos de interseção consecutivos do gráfico de f com o eixo Ox;
- A abcissa de A é negativa a abcissa de B é positiva;
- A ordenada de C é máximo da função.

Utilizando apenas processos analíticos, determina o valor exato da área do triângulo $[ABC]$.

2. Seja f uma função tal que: $f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{6}\right)$.

2.1 Mostra que o período positivo mínimo da função é 6.

2.2 Determina o domínio da função.

2.3 Sabendo que os pontos $A(1, a)$ e $B(b, a)$, pertencem ao gráfico da função f, determina as coordenadas de A e B.

3. Sabendo que $\cos\theta = -\frac{1}{4} \wedge \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ determina o valor exato da seguinte expressão:

$$\sin(\pi + \theta) + \cos(-\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

4. Resolve, em $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, a equação seguinte: $2\sin^2 x = 1 - \cos x$.

1. base $= \overline{AB}$

$1 + 2\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{1}{2} \ \wedge \ x \in [-\pi, 2\pi]$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} \ \vee \ x = \dfrac{7\pi}{6}$

$\Rightarrow b = \dfrac{7\pi}{6} - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{4\pi}{3}$ (6)

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

$-2 \leqslant 2\sin x \leqslant 2$

$-1 \leqslant 1 + 2\sin x \leqslant 3$

$\Rightarrow a = 3$ (5)

$\text{Área}_{\text{ triângulo}} = \dfrac{b \times a}{2} = \dfrac{\frac{4\pi}{3} \times 3}{2} = 2\pi$ (2)(1)

2.1 $f(x+P) = f(x)$

$f(x+6) = \tan\left(\dfrac{\pi\,(x+6)}{6}\right)$ (1)

$= \tan\left(\dfrac{\pi x + 6\pi}{6}\right)$ (0,5)

$= \tan\left(\dfrac{\pi x}{6} + \pi\right)$ (0,5)

$= \tan\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)$ (1)

$= f(x)$

2.2 $Df = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{\pi x}{6} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ (1)

$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3 + 6k, k \in \mathbb{Z}\}$ (1)

2.3 $f(1) = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (2)

$\Rightarrow A\left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (1)

$f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (2)

$\Leftrightarrow \tan\left(\dfrac{\pi x}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (1)

$\Leftrightarrow \tan\left(\dfrac{\pi x}{6}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ (1)

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi x}{6} = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (1)

$$x = 1 + 6k, k \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$
$$\Rightarrow B\left(1 + 6k, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), k \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$

3. $\sin(\pi + \theta) + \cos(-\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$= -\sin\theta + \cos\theta + \cos\theta$ (2)(2)(2)

$= -\sin\theta + 2\cos\theta$

$= -\frac{\sqrt{15}}{4} + 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)$ (1)(1)(1)

$= -\frac{\sqrt{15} + 2}{4}$

C. A.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Leftrightarrow \sin^2\theta + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1$ (2)

$\Leftrightarrow \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$

$\Leftrightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{\frac{15}{16}} \ \wedge \ \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ (2)

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$ (2)

4. $2\sin^2 x = 1 - \cos x$

$\Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 1 + \cos x = 0$ (3)

$\Leftrightarrow -2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-4}$ (2)

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-1 \pm 3}{-4}$ (1)

$\Leftrightarrow \cos x = 1 \ \vee \ \cos x = -\frac{1}{2}$ (1)

$\Leftrightarrow \cos x = \cos 0 \ \vee \ \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ (2)

$\Leftrightarrow x = 0 + 2k\pi \ \vee \ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (2)

$\Leftrightarrow x = 2k\pi \ \vee \ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (2)

Sabe-se que $x \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$

Se $k = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$

Se $k = 1$, $x = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \ \wedge \ x = 2\pi$

C.S.$= \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$ (3)

Nota: As cotações de cada passo encontram-se à direita destes.

Escola Secundária Emídio Navarro

Ano Letivo 2017/2018

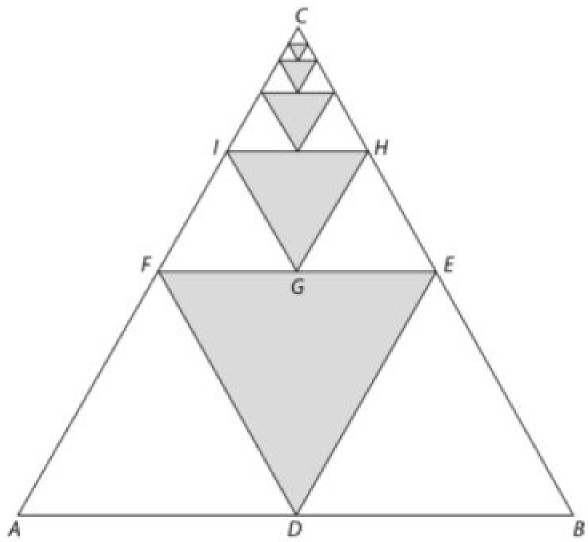
3ª Questão-aula de Matemática A – 11º Ano

Nome: ______________________ Nº: ______ Turma: _______

Classificação: ___________ O Professor: ________________ O Encarregado de Educação: _________________

Questões	1.1	1.2	1.3	Total
Cotações	15	15	20	50

1. Na figura está representado um triângulo equilátero $[ABC]$ cuja área é 6 m^2. Unindo os pontos médios dos seus lados, obtiveram-se os triângulos equiláteros $[DEF]$ e $[EFC]$, sombreando-se o triângulo $[DEF]$. Novamente, unindo os pontos médios dos lados do triângulo $[EFC]$, obtiveram-se os triângulos $[GHI]$ e $[HIC]$, sombreando-se o triângulo $[GHI]$ e assim sucessivamente.



Seja (a_n) a sucessão das áreas dos triângulos sucessivamente sombreados.

1.1 Define (a_n) por recorrência.

1.2 Mostra que a sucessão (a_n) é uma progressão geométrica e escreve o seu termo geral.

1.3 Prova, pelo método de indução matemática, que a soma dos n primeiros termos desta progressão é dada por $S_n = 2(1 - 4^{-n})$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.1 $a_1 = 6 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} & (7) \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n & (8) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

1.2 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{1}{4}a_n}{a_n} = \dfrac{1}{4} \longrightarrow$ constante.

Logo, (a_n) é uma progressão geométrica. (5)

$a_n = \dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ é o termo geral de (a_n). (10)

1.3 Seja $P(n) : S_n = 2\left(1 - 4^{-n}\right)$.

$P(1) : S_1 = 2\left(1 - 4^{-1}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = 2\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = 2 \times \dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira. (5)

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $S(n)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $S_n = 2\left(1 - 4^{-n}\right)$

Tese: $S_{n+1} = 2\left(1 - 4^{-(n+1)}\right)$ (5)

Demonstração: $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ (2)

$= 2\left(1 - 4^{-n}\right) + \dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ (2)

$= 2 - 2 \times 4^{-n} + \dfrac{3}{2} \times 4^{-n}$ (1)

$= 2 - \dfrac{1}{2} \times 4^{-n}$ (1)

$= 2\left(1 - \dfrac{1}{4} \times 4^{-n}\right)$ (1)

$= 2\left(1 - 4^{-1} \times 4^{-n}\right)$ (1)

$= 2\left(1 - 4^{-n-1}\right)$ (1)

$= 2\left(1 - 4^{-(n+1)}\right)$ (1)

Vimos que se $S(n)$ é uma proposição verdadeira, então $S(n+1)$ também é uma proposição verdadeira, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Fica assim provado, usando o método de indução matemática, que

$S_n = 2(1 - 4^{-n}), \forall n \in \mathbb{N}$.

Escola Secundária Emídio Navarro

Ano Letivo 2017/2018

4ª Questão-aula de Matemática A – 11º Ano

Nome: ______________________________ **Nº:** ______ **Turma:** _______

Classificação: ___________ **O Professor:** ________________ **O Encarregado de Educação:** _________________

Questões	1.1	1.2	1.3	1.4	Total
Cotações	10	15	15	10	50

1. Calcula o limite das sucessões cujo termo geral se indica, identificando as indeterminações encontradas.

1.1 $u_n = \dfrac{6n^3 + 2n^2 - 4}{-3n^3 + 1}$

1.2 $v_n = \dfrac{5^n + 3^{n+1}}{\pi^{n+2}}$

1.3 $w_n = \sqrt{4n+3} - 2\sqrt{n}$

1.4 $t_n = \dfrac{n^2 + \cos n}{3n^2 + \sin n}$

1.1 $\lim u_n = \lim \dfrac{6n^3+2n^2-4}{-3n^3+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ (1)

$= \lim \dfrac{6n^3}{-3n^3}$ (5)

$= \lim \dfrac{6}{-3}$ (3)

$= -2$ (1)

1.2 $\lim v_n = \lim \dfrac{5^n + 3^{n+1}}{\pi^{n+2}} = \dfrac{\infty}{\infty}$ (2)

$= \lim \left(\dfrac{5^n}{\pi^{n+2}} + \dfrac{3^{n+1}}{\pi^{n+2}}\right)$ (2)

$= \dfrac{1}{\pi^2} \times \lim \dfrac{5^n}{\pi^n} + \dfrac{1}{\pi} \times \lim \dfrac{3^{n+1}}{\pi^{n+1}}$ (2)

$= \dfrac{1}{\pi^2} \times \lim \left(\dfrac{5}{\pi}\right)^n + \dfrac{1}{\pi} \times \lim \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{n+1}$ (6)

Como $\dfrac{5}{\pi} > 1$ e $0 < \dfrac{3}{\pi} < 1$ tem-se (4)

$= \dfrac{\infty}{\pi^2} + \dfrac{0}{\pi}$ (2)

$= \infty + 0$ (1)

$= \infty$ (1)

1.3 $\lim w_n = \lim \sqrt{4n+3} - 2\sqrt{n} = \infty - \infty$ (2)

$= \lim \dfrac{(\sqrt{4n+3} - 2\sqrt{n})(\sqrt{4n+3} + 2\sqrt{n})}{\sqrt{4n+3} + 2\sqrt{n}}$ (6)

$= \lim \dfrac{4n+3-4n}{\sqrt{4n+3} + 2\sqrt{n}}$ (6)

$= \lim \dfrac{3}{\sqrt{4n+3} + 2\sqrt{n}}$ (2)

$= 0$ (4)

1.4 $\lim t_n = \dfrac{n^2 + \cos n}{3n^2 + \sin n} = \dfrac{\infty}{\infty}$ (1)

Como $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$ e $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$ (4)

$= \lim \dfrac{n^2}{3n^2}$ (4)

$= \dfrac{1}{3}$ (1)

Nota: As cotações de cada passo encontram-se à direita destes.

B.2 Testes

B.2.1 9º ano

Escola Secundária de Emídio Navarro

1º Teste de Matemática - 9ºAno – Versão 1

Nome: ______________________________ **Nº:** ______ **Turma:** _______

Classificação: __________ **O Professor:** _______________ **O Encarregado de Educação:** _______________

Questão	1	2	3	4	5	6.1	6.2	7.1	7.2	7.3	8	9	10	11	12	Total
Cotação	4	8	8	8	4	8	4	6	5	5	6	10	6	8	10	100

1. Considera que x é um número real de tal modo que $-2 < x < 4$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $-4 < -2x + 4 < 8$

(B) $-2 < -2x + 4 < 16$

(C) $-16 < -2x + 4 < 2$

(D) $-8 < -2x + 4 < 4$

2. Sabendo que $-2 < -1$, justifica que $\frac{1}{2} - 5 < -4$, aplicando as propriedades da relação de ordem em $\mathbb{R}$.

3. Sabendo que $2,1$ e $3,4$ são, respetivamente, aproximações dos números reais x e y com erro inferior a $\frac{1}{10}$, qual o erro máximo que se comete quando se escreve $x \times y = 7,15$?

4. Na tabela seguinte estão representados os cubos dos dez primeiros números naturais.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Utiliza a tabela para aproximar $\sqrt[3]{0,6}$ às décimas, por excesso.

5. Qual das inequações seguintes é equivalente à inequação $-\frac{3x}{2} > -6$?

(A) $x > -4$

(B) $x > 4$

(C) $x < 4$

(D) $x < -4$

6. Considera a inequação seguinte.

$$-2(x-1) < 3 - \frac{1-x}{3}$$

6.1 Resolve-a e apresenta o conjunto-solução na forma de intervalo de números reais.

6.2 Qual é o maior número inteiro que não é solução da inequação?

7. Considera os conjuntos $A =]-\infty, 2]$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 - 2x < 3\}$.

7.1 Apresenta o conjunto B na forma de intervalo de números reais.

7.2 Determina, na forma de intervalo, $A \cup B$ e $A \cap B$.

7.3 Indica um número irracional que pertença ao conjunto $A \cap B$.

8. Considera o conjunto $A =]3,14; +\infty[\cap [0, \pi]$.

Escreve o conjunto A na forma de um intervalo de números reais.

9. Determina o conjunto solução da seguinte condição:

$$2x - 3 \geqslant 1 \quad \wedge \quad 2 - \frac{1-x}{3} > x$$

10. Considera o conjunto $A =]-n, n[\cap \mathbb{N}$, em que n é um número inteiro positivo.

Sabendo que o conjunto A é constituído por treze elementos, qual é o valor de n?

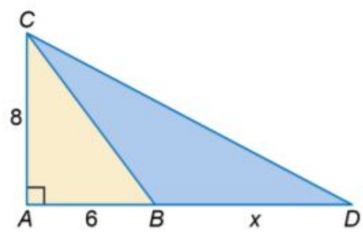
Justifica.

11. A soma do dobro de um número com 3 é maior do que 12.

Qual o menor número inteiro que é solução deste problema?

12. Um jardineiro vai criar um jardim cuja área terá de ser superior a 60m^2.

Na figura seguinte está representado o esquema do jardim.



Sabe-se que:

- O ponto B pertence ao lado $[AD]$ do triângulo $[ADC]$;
- $\overline{AB} = 6\text{m}$ e $\overline{AC} = 8\text{m}$;
- $B\hat{A}C = 90°$.

Determina o menor valor inteiro que x pode tomar de modo que a área do triângulo $[ADC]$ seja superior a 60m^2.

Resolução

1. $-2 < x < 4$

$\Leftrightarrow 4 > -2x > -8$

$\Leftrightarrow -8 < -2x < 4$

$\Leftrightarrow -4 < -2x + 4 < 8$

Logo, a alínea correta é a (A) . (4)

2. $-2 < -1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} > -1$ pela *Passagem ao inverso* (3)

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < 1$ pela *Monotonia Parcial da Multiplicação* (2)

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} - 5 < 1 - 5$ pela *Monotonia da Adição* (3)

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} - 5 < -4$

3. $2,1 - 0,1 < x < 2,1 + 0,1$ (1)

$\Leftrightarrow 2 < x < 2,2$ (1)

$3,4 - 0,1 < y < 3,4 + 0,1$ (1)

$\Leftrightarrow 3,3 < y < 3,5$ (1)

$2 \times 3,3 < x \times y < 2,2 \times 3,5 \quad \Leftrightarrow \quad 6,6 < x \times y < 7,7$ (1)

erro por defeito= $|7,15 - 6,6| = 0,55$ (1)

erro por excesso= $|7,15 - 7,7| = 0,55$ (1)

Logo o erro máximo é $0,55$. (1)

4. Tem-se

$x = 0,6$ (1)

$n = 10$ (1)

Então

$x \times n^3 = 0,6 \times 10^3 = 600$ (1)

$512 < 600 < 729 \Leftrightarrow 8^3 < 0.6 \times 10^3 < 9^3$ (2)

$\Leftrightarrow \left(\frac{8}{10}\right)^3 < 0,6 < \left(\frac{8}{10}\right)^3$ (1)

$\Leftrightarrow \frac{8}{10} < \sqrt[3]{0,6} < \frac{9}{10}$ (1)

Logo a aproximação de $\sqrt[3]{0,6}$ às décimas, por excesso é $\frac{9}{10}$. (1)

5. $-\dfrac{3x}{2} > -6$

$\Leftrightarrow -\dfrac{3x}{2} > -\dfrac{12}{2}$

$\Leftrightarrow -3x > -12$

$\Leftrightarrow 3x < 12$

$\Leftrightarrow x < 4$

Logo, a alínea correta é a (C) . (4)

6.1 $-2(x-1) < 3 - \dfrac{1-x}{3}$

$\Leftrightarrow -2x + 2 < 3 - \dfrac{1-x}{3}$ (1)(1)

$\Leftrightarrow -6x + 6 < 9 - 1 + x$ (1)(1)

$\Leftrightarrow -6x - x < 9 - 1 - 6$

$\Leftrightarrow -7x < 2$ (1)

$\Leftrightarrow x > -\dfrac{2}{7}$ (2)

Conjunto Solução $= \left]-\dfrac{2}{7}, +\infty\right[$ (1)

6.2 O maior número inteiro que não é solução da inequação é o -1. (4)

7.1 $1 - 2x < 3$

$\Leftrightarrow -2x < 2$ (2)

$\Leftrightarrow x > -\dfrac{2}{2}$

$\Leftrightarrow x > -1$ (2)

Logo $B =]-1, +\infty[$ (2)

7.2 $A \cup B =]-\infty, 2] \cup]-1, +\infty[$

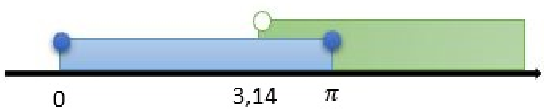
$=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ (3)

$A \cap B =]-\infty, 2] \cap]-1, +\infty[$

$=]-1, 2]$ (2)

7.3 $\sqrt{2}$, por exemplo . (5)

8. $A =]3,14; \pi]$ (3)



(3)

9. $2x - 3 \geqslant 1 \quad \wedge \quad 2 - \dfrac{1-x}{3} > x$

$\Leftrightarrow \; 2x \geqslant 4 \quad \wedge \quad 6 - 1 + x > 3x$ (1)(2)

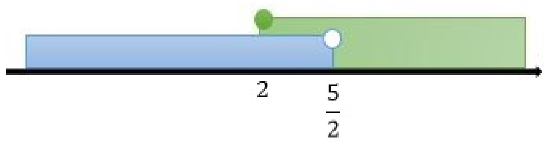
$\Leftrightarrow \; x \geqslant \dfrac{4}{2} \quad \wedge \quad x - 3x > -6 + 1$

$\Leftrightarrow \; x \geqslant 2 \quad \wedge \quad -2x > -5$ (1)(1)

$\Leftrightarrow \; x \geqslant 2 \quad \wedge \quad x < \dfrac{-5}{-2}$

$\Leftrightarrow \; x \geqslant 2 \quad \wedge \quad x < \dfrac{5}{2}$ (2)

Conjunto-Solução: $\left[2, \dfrac{5}{2}\right[$ (2)



(1)

10. $A = \{1, 2, 3, ..., n-1\}$

Se A tem onze elementos então $n - 1 = 11$. (3)

Logo $n = 12$ (3)

11. $2x + 3 > 12$ (3)

$\Leftrightarrow \; 2x > 12 - 3$

$\Leftrightarrow \; 2x > 9$ (1)

$\Leftrightarrow \; x > \dfrac{9}{2}$ (2)

Logo o menor inteiro que é solução é o 5. (2)

12. $A_{\text{ triângulo}} = \dfrac{8 \times (6 + x)}{2}$ (3)

$= \dfrac{48 + 8x}{2}$

$= 24 + 4x$

Se a área do triângulo $[ADC]$ é superior a 60 m^2 então

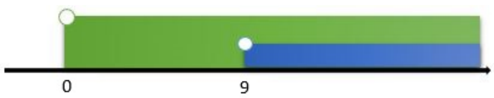
$A_{\text{ triângulo}} > 60 \quad \wedge \quad x > 0$

$\Leftrightarrow 4x > 60 - 24 \quad \wedge \quad x > 0$ (3)(1)

$\Leftrightarrow 4x > 36 \quad \wedge \quad x > 0$

$\Leftrightarrow x > 9 \quad \wedge \quad x > 0$ (1)

$\Leftrightarrow x > 9$



Logo o menor valor inteiro que x pode tomar é 10. (2)

Nota: As cotações de cada passo encontram-se à direita destes

Escola Secundária de Emídio Navarro

1º Teste de Matemática - 9ºAno – Versão 2

Nome: ______________________________ **Nº:** ______ **Turma:** _______

Classificação: ___________ **O Professor:** ________________ **O Encarregado de Educação:** _________________

Questão	1	2	3	4	5	6.1	6.2	7.1	7.2	7.3	8	9	10	11	12	Total
Cotação	4	8	8	8	4	8	4	6	5	5	6	10	6	8	10	100

1. Considera que x é um número real de tal modo que $-2 < x < 4$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $-2 < -2x + 4 < 16$ (B) $-4 < -2x + 4 < 8$

(C) $-8 < -2x + 4 < 4$ (D) $-16 < -2x + 4 < 2$

2. Sabendo que $-3 < -1$, justifica que $\frac{1}{3} - 5 < -4$, aplicando as propriedades da relação de ordem em $\mathbb{R}$.

3. Sabendo que $2,2$ e $3,3$ são, respetivamente, aproximações dos números reais x e y com erro inferior a $\frac{1}{10}$, qual o erro máximo que se comete quando se escreve $x \times y = 7,27$?

4. Na tabela seguinte estão representados os cubos dos dez primeiros números naturais.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Utiliza a tabela para aproximar $\sqrt[3]{0,4}$ às décimas, por excesso.

5. Qual das inequações seguintes é equivalente à inequação $-\frac{3x}{2} > -6$?

(A) $x < -4$ (B) $x < 4$ (C) $x > 4$ (D)$x > -4$

6. Considera a inequação seguinte.

$$-2(x-1) < 3 - \frac{1-x}{3}$$

6.1 Resolve-a e apresenta o conjunto-solução na forma de intervalo de números reais.

6.2 Qual é o maior número inteiro que não é solução da inequação?

7. Considera os conjuntos $A =]-\infty, 2]$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 - 2x < 3\}$.

7.1 Apresenta o conjunto B na forma de intervalo de números reais.

7.2 Determina, na forma de intervalo, $A \cup B$ e $A \cap B$.

7.3 Indica um número irracional que pertença ao conjunto $A \cap B$.

8. Considera o conjunto $A =]3,14; +\infty[\cap [0, \pi]$.

Escreve o conjunto A na forma de um intervalo de números reais.

9. Determina o conjunto solução da seguinte condição:

$$2x - 3 \geqslant 1 \quad \wedge \quad 2 - \frac{1-x}{3} > x$$

10. Considera o conjunto $A =]-n, n[\cap \mathbb{N}$, em que n é um número inteiro positivo.

Sabendo que o conjunto A é constituído por treze elementos, qual é o valor de n?

Justifica.

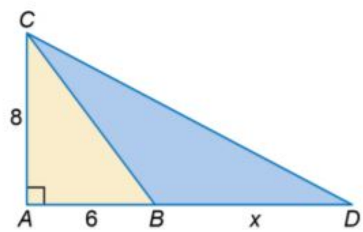
11. A soma do dobro de um número com 2 é maior do que 10.

Qual o menor número inteiro que é solução deste problema?

12. Um jardineiro vai criar um jardim cuja área terá de ser superior a 60m^2.

Na figura seguinte está representado o esquema do jardim.

Sabe-se que:



- O ponto B pertence ao lado $[AD]$ do triângulo $[ADC]$;
- $\overline{AB} = 6\text{m}$ e $\overline{AC} = 8\text{m}$;
- $B\hat{A}C = 90°$.

Determina o menor valor inteiro que x pode tomar de modo que a área do triângulo $[ADC]$ seja superior a 60m^2.

Escola Secundária de Emídio Navarro

1º Teste de Matemática - 9ºAno – Versão 2

Resolução

1. $\quad -2 < x < 4$

$\Leftrightarrow 4 > -2x > -8$

$\Leftrightarrow -8 < -2x < 4$

$\Leftrightarrow -4 < -2x + 4 < 8$

Logo, a alínea correta é a (B) . (4)

2. $-3 < -1 \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{1}{3} > -1$ pela *Passagem ao inverso* (3)

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{3} < 1$ pela *Monotonia Parcial da Multiplicação* (2)

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{3} - 5 < 1 - 5$ pela *Monotonia da Adição* (3)

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{3} - 5 < -4$

3. $\quad 2,2 - 0,1 < x < 2,2 + 0,1$ (1)

$\Leftrightarrow 2,1 < x < 2,3$ (1)

$3,3 - 0,1 < y < 3,3 + 0,1$ (1)

$\Leftrightarrow 3,2 < y < 3,4$ (1)

$2,1 \times 3,2 < x \times y < 2,3 \times 3,4 \quad \Leftrightarrow \quad 6,72 < x \times y < 7,82$ (1)

erro por defeito$= |7,27 - 6,72| = 0,55$ (1)

erro por excesso$= |7,27 - 7,82| = 0,55$ (1)

Logo o erro máximo é $0,55$. (1)

4. Tem-se:

$x = 0,4$ (1)

$n = 10$ (1)

Então

$x \times n^3 = 0,4 \times 10^3 = 400$ (1)

$343 < 400 < 512 \Leftrightarrow 7^3 < 0,4 \times 10^3 < 8^3$ (2)

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{7}{10}\right)^3 < 0,4 < \left(\dfrac{8}{10}\right)^3$ (1)

$\Leftrightarrow \dfrac{7}{10} < \sqrt[3]{0,4} < \dfrac{8}{10}$ (1)

Logo a aproximação de $\sqrt[3]{0,4}$ às décimas, por defeito é $\dfrac{7}{10}$. (1)

5. $-\dfrac{3x}{2} > -6$

$\Leftrightarrow -\dfrac{3x}{2} > -\dfrac{12}{2}$

$\Leftrightarrow -3x > -12$

$\Leftrightarrow 3x < 12$

$\Leftrightarrow x < 4$

Logo, a alínea correta é a (B) . (4)

6.1 $-2(x-1) < 3 - \dfrac{1-x}{3}$

$\Leftrightarrow -2x + 2 < 3 - \dfrac{1-x}{3}$ (1)(1)

$\Leftrightarrow -6x + 6 < 9 - 1 + x$ (1)(1)

$\Leftrightarrow -6x - x < 9 - 1 - 6$

$\Leftrightarrow -7x < 2$ (1)

$\Leftrightarrow x > -\dfrac{2}{7}$ (2)

Conjunto Solução $= \left]-\dfrac{2}{7}, +\infty\right[$ (1)

6.2 O maior número inteiro que não é solução da inequação é o -1. (4)

7.1 $1 - 2x < 3$

$\Leftrightarrow -2x < 2$ (2)

$\Leftrightarrow x > -\dfrac{2}{2}$

$\Leftrightarrow x > -1$ (2)

Logo $B =]-1, +\infty[$ (2)

7.2 $A \cup B =]-\infty, 2] \cup]-1, +\infty[$

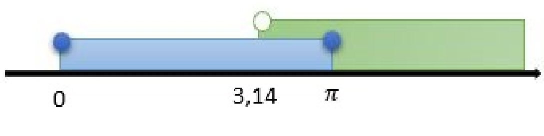
$=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ (3)

$A \cap B =]-\infty, 2] \cap]-1, +\infty[$

$=]-1, 2]$ (2)

7.3 $\sqrt{2}$, por exemplo . (5)

8. $A =]3,14; \pi]$ (3)



(3)

9. $\quad 2x-3\geqslant 1 \quad\wedge\quad 2-\dfrac{1-x}{3}>x$

$\Leftrightarrow\ 2x\geqslant 4 \quad\wedge\quad 6-1+x>3x$ (1)(2)

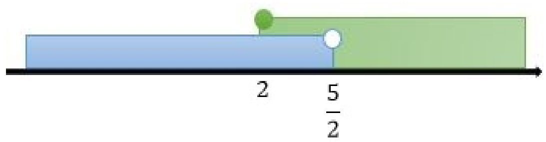
$\Leftrightarrow\ x\geqslant \dfrac{4}{2} \quad\wedge\quad x-3x>-6+1$

$\Leftrightarrow\ x\geqslant 2 \quad\wedge\quad -2x>-5$ (1)(1)

$\Leftrightarrow\ x\geqslant 2 \quad\wedge\quad x<\dfrac{-5}{-2}$

$\Leftrightarrow\ x\geqslant 2 \quad\wedge\quad x<\dfrac{5}{2}$ (2)

Conjunto-Solução: $\left[2,\dfrac{5}{2}\right[$ (2)



(1)

10. $A=\{1,2,3,...,n-1\}$

Se A tem treze elementos então $n-1=13$. (3)

Logo $n=14$ (3)

11. $\quad 2x+2>10$ (3)

$\Leftrightarrow\ 2x>10-2$

$\Leftrightarrow\ 2x>8$ (1)

$\Leftrightarrow\ x>\dfrac{8}{2}$

$\Leftrightarrow\ x>4$ (2)

Logo o menor inteiro que é solução é o 5. (3)

12. $\quad A_{\text{ triângulo}}=\dfrac{8\times(6+x)}{2}$ (3)

$=\dfrac{48+8x}{2}$

$=24+4x$

Se a área do triângulo $[ADC]$ é superior a 60 m^2 então

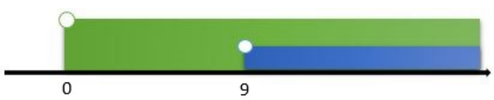
$A_{\text{ triângulo}}>60 \quad\wedge\quad x>0$

$\Leftrightarrow 4x>60-24 \quad\wedge\quad x>0$ (3)(1)

$\Leftrightarrow 4x>36 \quad\wedge\quad x>0$

$\Leftrightarrow x>9 \quad\wedge\quad x>0$ (1)

$\Leftrightarrow x>9$



Logo o menor valor inteiro que x pode tomar é 10. (2)

Nota: As cotações de cada passo encontram-se à direita destes.

Escola Secundária de Emídio Navarro

2º Teste de Matemática - 9ºAno – Versão 1

Nome: ________________________________ **Nº:** ______ **Turma:** _______

Classificação: ___________ **O Professor:** _______________ **O Encarregado de Educação:** ________________

Questões	1	2	3	4.1	4.2	5	6	7	8	9.1	9.2	9.3	10.1	10.2
Cotações	5	3	3	6	6	8	5	6	5	3	5	5	5	6
Questões	11.1	11.2	12.1	12.2	13	Total								
Cotações	6	6	6	6	5	100								

1. Dados dois números reais a e b, sabe-se que $a < b$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira? Justifica.

(A) $\frac{b}{2} > \frac{a}{2}$ (B) $a - 2 > b - 2$ (C) $-3a < -3b$ (D) $a + b > 2b$

2. Qual dos seguintes números é uma aproximação de $\sqrt[3]{14}$, com erro inferior a 0,1?

(A) $2,2$ (B) $2,3$ (C) $2,5$ (D) $2,6$

3. Qual dos conjuntos seguintes é igual ao conjunto $\left]-1, \frac{9}{4}\right] \cap \left[\sqrt{5}, 3\right[$?

(A) $\left[\sqrt{5}, 3\right[$ (B) $\left]-1, \frac{9}{4}\right]$ (C) $\left[\sqrt{5}, \frac{9}{4}\right]$ (D) $]-1, 3[$

4. Considera os seguintes intervalos: $A =]-\infty, 5[$, $B = [-3, +\infty[$ e $C = [-3, 5]$.

Indica, justificando:

4.1 O maior número inteiro que pertence a $A \cap B$.

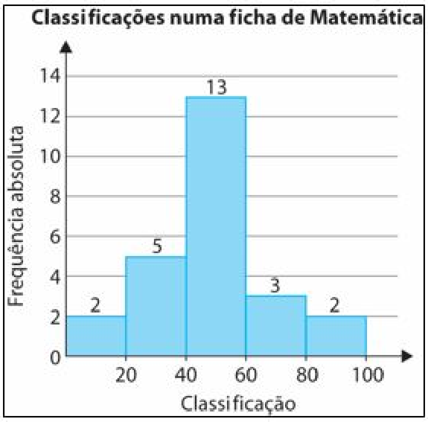
4.2 O menor número inteiro que não pertence a $A \cup C$.

5. Resolve a inequação seguinte.

$$3(x-1) > \frac{x+5}{2}$$

Apresenta o conjunto solução na forma de intervalo de números reais.

6. No histograma da figura estão representadas as classificações obtidas por todos os alunos da turma do Tobias.



Qual é a percentagem de alunos com classificação não inferior a 40?

7. Um grupo de amigos é constituído por rapazes e raparigas.

Neste grupo há seis rapazes. Sabe-se que, escolhendo ao acaso um dos amigos, a probabilidade de este ser rapariga é $\frac{2}{5}$.

Quantas raparigas existem neste grupo de amigos?

8. De dois acontecimentos A e B, associados a um mesmo espaço amostral, sabe-se que:

- são disjuntos;
- $P(B) = 0,3$;
- $P(A \cup B) = 0,7$.

Qual a probabilidade de se realizar o acontecimento A? Justifica.

9. O Zacarias foi jantar ao restaurante *Correquelogojantas*.

Nesse dia, o restaurante tinha na ementa duas variedades de sopa, dois pratos de peixe, três pratos de carne e duas sobremesas, tal como indicado ao lado.

Sopas
Caldo verde
Canja de galinha
Pratos de peixe
Pescada cozida
Bacalhau à Gomes Sá
Pratos de carne
Frango grelhado
Vitela assada
Entrecosto grelhado
Sobremesas
Doce da casa
Fruta da época

O Zacarias escolheu uma sopa, um prato de peixe, um prato de carne e uma sobre mesa.

9.1 De quantas maneiras diferentes o Zacarias pode ter realizado o seu pedido?

9.2 Qual é a probabilidade de o Zacarias ter feito um pedido que inclua o prato de vitela?

9.3 Qual é a probabilidade de o Zacarias ter feito um pedido que não tenha o prato de pescada?

10. A avó do Josué colocou num cesto 6 maçãs, 10 laranjas e 4 peras.

10.1 Tirando, ao acaso, um fruto do cesto, determina qual a probabilidade de não ser uma pera. Apresenta o resultado na forma de uma fração irredutível.

10.2 Retiraram-se sucessivamente dois frutos do cesto, sem repor o primeiro. Indica a probabilidade de sair uma laranja na segunda extração, sabendo que na primeira extração saiu uma pera. Apresenta o resultado na forma de uma fração irredutível.

11. Num saco foram colocados 4 cartões numerados de 3 a 6.

Considera a experiência aleatória que consiste em retirar dois cartões, um após o outro, sem reposição, e registar os respetivos números.

11.1 Determina a probabilidade de ocorrerem dois números consecutivos, por ordem crescente.

11.2 Determina a probabilidade de a soma dos números dos cartões retirados ser um número par.

12. Num grupo de 70 estudantes:

- 42 têm olhos castanhos;
- 34 usam óculos;
- 23 têm olhos castanhos e usam óculos.

12.1 Representa a situação descrita por um diagrama de Venn.

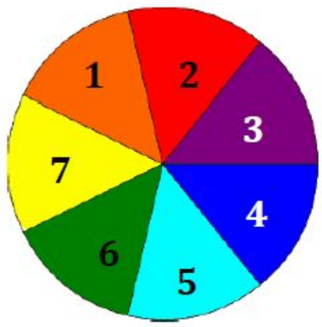
12.2 Determina a probabilidade de ao escolher um estudante ao acaso este:

12.2.1 usar óculos e não ter os olhos castanhos.

12.2.2 não usar óculos nem ter os olhos castanhos.

13. Considera a roleta da figura ao lado.

Admitindo que os sete setores têm igual probabilidade de sair, quantas vezes se espera que saia o setor 3 em 1400 jogadas?



Escola Secundária de Emídio Navarro

2º Teste de Matemática - 9ºAno – Versão 2

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Nome: ______________________________ **Nº:** ______ **Turma:** _______

Classificação: ___________ **O Professor:** _______________ **O Encarregado de Educação:** _________________

Questões	1	2	3	4.1	4.2	5	6	7	8	9.1	9.2	9.3	10.1	10.2
Cotações	5	3	3	6	6	8	5	6	5	3	5	5	5	6
Questões	11.1	11.2	12.1	12.2	13	Total								
Cotações	6	6	6	6	5	100								

1. Dados dois números reais a e b, sabe-se que $a < b$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira? Justifica.

(A) $-3a < -3b$ (B) $a + b > 2b$ (C) $\frac{b}{2} > \frac{a}{2}$ (D) $a - 2 > b - 2$

2. Qual dos seguintes números é uma aproximação de $\sqrt[3]{14}$, com erro inferior a 0,1?

(A) $2,6$ (B) $2,5$ (C) $2,3$ (D) $2,2$

3. Qual dos conjuntos seguintes é igual ao conjunto $\left]-1, \frac{9}{4}\right] \cap \left[\sqrt{5}, 3\right[$?

(A) $]-1, 3[$ (B) $\left[\sqrt{5}, \frac{9}{4}\right]$ (C) $\left]-1, \frac{9}{4}\right]$ (D) $\left[\sqrt{5}, 3\right[$

4. Considera os seguintes intervalos: $A =]-\infty, 5[$, $B = [-3, +\infty[$ e $C = [-3, 5]$.

Indica, justificando:

4.1 O maior número inteiro que pertence a $A \cap B$.

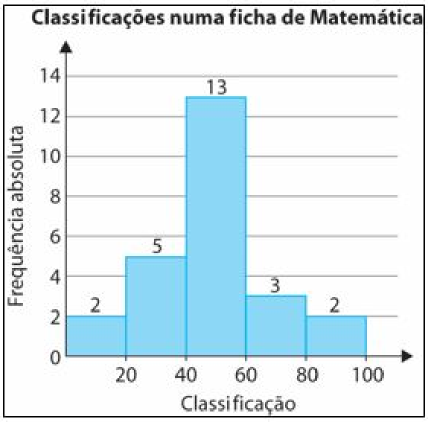
4.2 O menor número inteiro que não pertence a $A \cup C$.

5. Resolve a inequação seguinte.

$$3(x-1) > \frac{x+5}{2}$$

Apresenta o conjunto solução na forma de intervalo de números reais.

6. No histograma da figura estão representadas as classificações obtidas por todos os alunos da turma do Tobias.



Qual é a percentagem de alunos com classificação não inferior a 40?

7. Um grupo de amigos é constituído por rapazes e raparigas.

Neste grupo há seis rapazes. Sabe-se que, escolhendo ao acaso um dos amigos, a probabilidade de este ser rapariga é $\frac{2}{5}$.

Quantas raparigas existem neste grupo de amigos?

8. De dois acontecimentos A e B, associados a um mesmo espaço amostral, sabe-se que:

- são disjuntos;
- $P(B) = 0,3$;
- $P(A \cup B) = 0,7$.

Qual a probabilidade de se realizar o acontecimento A? Justifica.

9. O Zacarias foi jantar ao restaurante *Correquelogojantas*.

Nesse dia, o restaurante tinha na ementa duas variedades de sopa, dois pratos de peixe, três pratos de carne e duas sobremesas, tal como indicado ao lado.

Sopas
Caldo verde
Canja de galinha
Pratos de peixe
Pescada cozida
Bacalhau à Gomes Sá
Pratos de carne
Frango grelhado
Vitela assada
Entrecosto grelhado
Sobremesas
Doce da casa
Fruta da época

O Zacarias escolheu uma sopa, um prato de peixe, um prato de carne e uma sobre mesa.

9.1 De quantas maneiras diferentes o Zacarias pode ter realizado o seu pedido?

9.2 Qual é a probabilidade de o Zacarias ter feito um pedido que inclua o prato de vitela?

9.3 Qual é a probabilidade de o Zacarias ter feito um pedido que não tenha o prato de pescada?

10. A avó do Josué colocou num cesto 6 maçãs, 10 laranjas e 4 peras.

10.1 Tirando, ao acaso, um fruto do cesto, determina qual a probabilidade de não ser uma pera. Apresenta o resultado na forma de uma fração irredutível.

10.2 Retiraram-se sucessivamente dois frutos do cesto, sem repor o primeiro. Indica a probabilidade de sair uma laranja na segunda extração, sabendo que na primeira extração saiu uma pera. Apresenta o resultado na forma de uma fração irredutível.

11. Num saco foram colocados 4 cartões numerados de 3 a 6.

Considera a experiência aleatória que consiste em retirar dois cartões, um após o outro, sem reposição, e registar os respetivos números.

11.1 Determina a probabilidade de ocorrerem dois números consecutivos, por ordem crescente.

11.2 Determina a probabilidade de a soma dos números dos cartões retirados ser um número par.

12. Num grupo de 70 estudantes:

- 42 têm olhos castanhos;
- 34 usam óculos;
- 23 têm olhos castanhos e usam óculos.

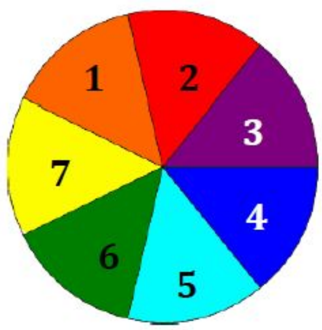
12.1 Representa a situação descrita por um diagrama de Venn.

12.2 Determina a probabilidade de ao escolher um estudante ao acaso este:

12.2.1 usar óculos e não ter os olhos castanhos.

12.2.2 não usar óculos nem ter os olhos castanhos.

13. Considera a roleta da figura ao lado.



Admitindo que os sete setores têm igual probabilidade de sair, quantas vezes se espera que saia o setor 3 em 1400 jogadas?

Escola Secundária de Emídio Navarro

2º Teste de Matemática - 9ºAno

Resolução

Questões	1	2	3
Versão 1	A	C	C
Versão 2	C	B	B

4.1 Sabe-se que $A \cap B = [-3, 5[$ (3)

Logo, o maior número inteiro que pertence a $A \cap B$ é o 4. (3)

4.2 Sabe-se que $A \cup C =]-\infty, 5]$ (3)

Logo, o menor número inteiro que não pertence a $A \cup C$ é o 6. (3)

5. $3(x-1) > \frac{x+5}{2}$

$\Leftrightarrow 3x - 3 > \frac{x+5}{2}$ (1)

$\Leftrightarrow 6 - 6x > x + 5$ (1)

$\Leftrightarrow -7x > -1$ (1)

$\Leftrightarrow x < \frac{1}{7}$ (3)

C.S.$= \left]-\infty, \frac{1}{7}\right[$ (2)

6. $\frac{18}{25} \times 100 = 72\%$ (2)(2)(1)

7. $\frac{3}{5}$ — 6 (3)

$\frac{2}{5}$ — x

$\Leftrightarrow x = \frac{6 \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = 4$ (2)

Logo, existem 4 raparigas no grupo. (1)

8. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, pois A e B são disjuntos. (2)

Assim, $0,7 = P(A) + 0,3 \Leftrightarrow P(A) = 0,4$ (2)(1)

9.1 $2 \times 2 \times 3 \times 2 = 24$ maneiras diferentes de realizar o seu pedido. (3)

9.2 $\frac{1}{3}$ dos pedidos têm vitela. (5)

9.3 $\frac{1}{2}$ dos pedidos têm pescada. (5)

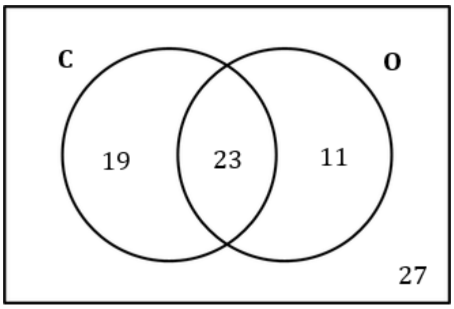
10.1 $\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ (4)(1)

10.2 $\frac{10}{19}$ (6)

11.1 $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ (5)(1)

11.2 $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (5)(1)

12.1 (1)(2)(1)
(2)



12.2.1 $\frac{11}{70}$ (3)

12.2.1 $\frac{27}{70}$ (3)

13. $\frac{1}{7} \times 1400 = 200$ vezes. (4)(1)

Nota: As cotações de cada passo encontram-se à direita destes.

Escola Secundária Emídio Navarro

3º Teste de avaliação de Matemática

9º Ano - 2017 / 2018

Caderno 1:

(É permitido o uso de calculadora.)

O teste é constituído por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2).

Utiliza apenas caneta ou esferográfica, de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.

Para cada resposta, identifica o item.

Apresenta as tuas respostas de forma legível.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

O teste inclui um formulário.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Formulário

Números

Valor aproximado de π (pi): $3,14159$

Geometria

Áreas

Losango: $\dfrac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Superfície esférica: $4\pi r^2$, sendo r o raio da esfera

Áreas

Prisma e cilindro: Área da base $\times$ Altura

Pirâmide e cone: $\dfrac{\text{Área da base} \times \text{Altura}}{3}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$, sendo r o raio da esfera

Trigonometria

Fórmula fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Relação da tangente com o seno e o cosseno: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

1. O diagrama de caule-e-folhas seguinte representa um conjunto de dados.

2	3	5	
3	1	2	2
4	4	5	
5	6		

Nas afirmações seguintes, $\overline{x}$ representa a média e $\tilde{x}$ representa a mediana deste conjunto de dados.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\overline{x} = 36$ e $\tilde{x} = 40$ (B) $\overline{x} = 36$ e $\tilde{x} = 32$

(C) $\overline{x} = 52$ e $\tilde{x} = 32$ (D) $\overline{x} = 52$ e $\tilde{x} = 40$

2. O Manuel fez análises ao sangue. Os resultados revelaram que tinha $4,7$ milhões de glóbulos brancos por mililitro (ml) de sangue.

Escreve, em notação científica, o número de glóbulos brancos que existiam em $1,5$ litros de sangue do Manuel, quando fez as análises.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

3. Na figura 1, estão representadas duas semirretas, $\dot{O}C$ e $\dot{O}D$, e duas retas paralelas, r e s.

Sabe-se que:

- a reta r interseta as semirretas $\dot{O}C$ e $\dot{O}D$ nos pontos A e B, respetivamente;
- a reta s intersecta as semirretas $\dot{O}C$ e $\dot{O}D$ nos pontos C e D, respetivamente;
- o ponto A pertence ao segmento de reta $[OC]$;
- $\overline{OA} = 9,8\,\text{cm}$, $\overline{AB} = 5,6\,\text{cm}$ e $\overline{CD} = 8,4\,\text{cm}$.

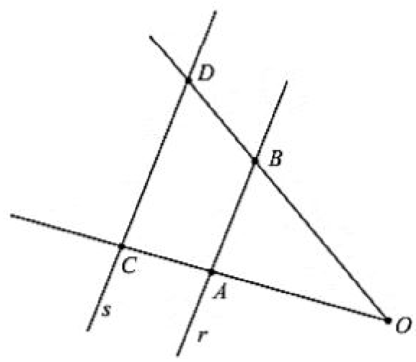


Figura 1

A figura não está desenhada à escala.

Determina $\overline{AC}$.

Apresenta o resultado em centímetros. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

4. Na figura 2, está representado um retângulo $[ABCD]$. Os vértices A e D são pontos da reta real.

Sabe-se que:

- O ponto E é um ponto da reta real;
- $\overline{AB} = 2$;
- $\overline{BC} = 4$;
- $\overline{AE} = \overline{AC}$;
- Ao ponto A corresponde o número $7 - \sqrt{20}$.

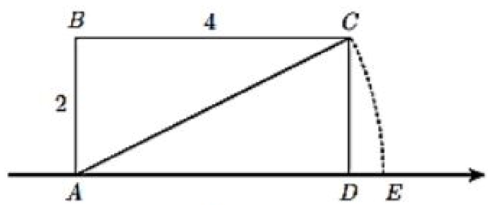


Figura 2

Determina a abcissa do ponto E.

5. A figura 3 é uma fotografia de um moinho de vento de tipo mediterrânico, grupo ao qual pertence a maioria dos moinhos de vento portugueses.

Na figura 4 está representado um esquema das velas de um moinho de vento.

Figura 3

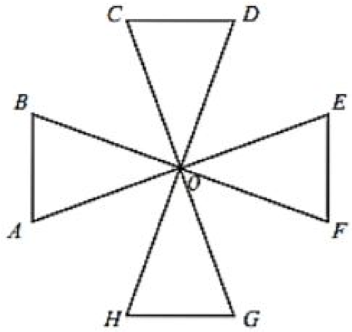


Figura 4

Sabe-se que:

- Os triângulos $[ABO]$, $[CDO]$ e $[GHO]$ são geometricamente iguais;
- $\overline{EF} = 5\,\text{m}$;
- $\overline{OE} = \overline{OF} = 7\,\text{m}$.

O esquema não está desenhado à escala.

5.1 Determina a área do triângulo $[EFO]$.

Apresenta o resultado em m^2, arredondado às unidades.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo duas casas decimais.

5.2 Admite que os segmentos de reta $[DH]$ e $[BF]$ são perpendiculares e se intersetam no ponto O.

Qual é o transformado do ponto H por meio da rotação de centro no ponto O e amplitude $90°$?

(A) O ponto A (B) O ponto B (C) O ponto C (D) O ponto D

6. Para cada número natural n maior do que 1, seja $A = [1, \sqrt{n}[$ um intervalo de números reais.

Qual é o menor valor de n para o qual o intervalo A tem, exatamente, trinta e dois números naturais.

FIM (Caderno 1)

Item							
Cotações (em pontos)							
1	**2**	**3**	**4**	**5.1**	**5.2**	**6**	**Total**
4	6	7	6	8	4	5	40

Caderno 2:

(Não é permitido o uso de calculadora.)

7. Na figura 5, estão representados os três primeiros termos de uma sequência de figuras constituídas por círculos geometricamente iguais. Cada termo da sequência, com exceção do primeiro, tem mais três círculos do que o termo anterior.

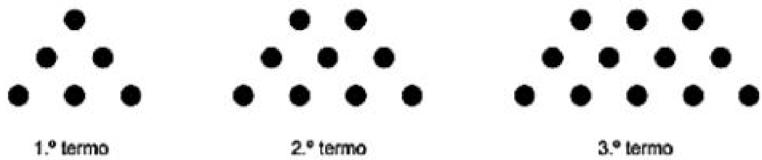


Figura 5

Quantos círculos tem o 100° termo da sequência?

Mostra como chegaste à tua resposta.

8. Considera o conjunto $P = [-3, \sqrt{2}] \cap [-\sqrt{2}, +\infty[$

Qual dos conjuntos seguintes é igual a P?

(A) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (B) $[-3, +\infty[$ (C) $[-3, \sqrt{2}]$ (D) $[-\sqrt{2}, +\infty[$

9. Resolve a inequação seguinte.

$$1 + \frac{x+1}{2} \geqslant \frac{1}{3}(1 - 2x)$$

Apresenta o conjunto solução na forma de intervalo de números reais.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

10. Resolve a equação seguinte.

$$(x+3)^2 - 3 = 2x^2 + x$$

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

11. Seja b um número real.

Determina os valores de b para os quais a equação $x^2 + bx + 9 = 0$ tem apenas uma solução.

Apresenta os cálculos que efetuares.

12. Na figura 6, está representado um quadrado constituído por nove quadrados iguais.

Nesse quadrado, podem considerar-se três filas horizontais e três filas verticais.

1	2	1
3	1	5
1	7	1

Figura 6

Escolhe-se, ao acaso, uma fila (horizontal ou vertical) e multiplicam-se os três números dessa fila.

Qual é a probabilidade de o produto obtido ser um número primo?

Mostra como chegaste à tua resposta.

Apresenta o resultado na forma de fração.

13. No referencial cartesiano da figura 7 estão representadas graficamente as funções f e g.

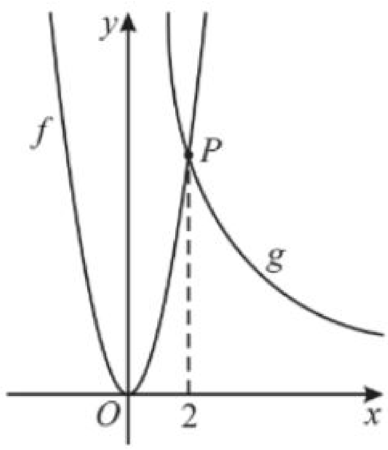


Figura 7

Sabe-se que:

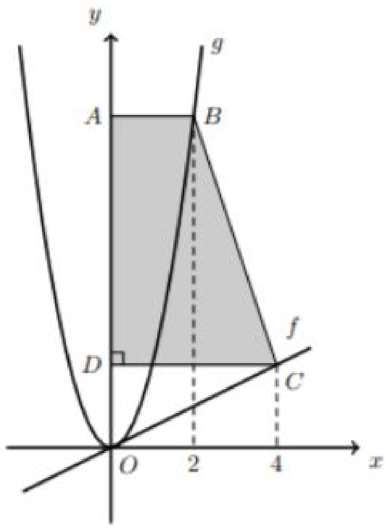
- A função f é definida por $f(x) = 2x^2$;
- A função g é uma função de proporcionalidade inversa;
- Os gráficos das funções f e g intersetam-se no ponto P, que tem abcissa 2.

Determina uma expressão algébrica que defina a função g.

Mostra como chegaste à tua resposta.

14. Na figura ao lado, estão representadas, num referencial cartesiano de origem O, partes dos gráficos de duas funções, f e g, bem como o trapézio $[ABCD]$.

Sabe-se que:



- Os pontos A e D pertencem ao eixo das ordenadas;
- A função f é definida por $f(x) = \frac{1}{2}x$;
- A função g é definida por $g(x) = 2x^2$;
- O ponto B pertence ao gráfico da função g e tem abcissa 2;
- O ponto C pertence ao gráfico da função f e tem abcissa 4.

14.1 Determina a medida da área do trapézio $[ABCD]$.

Mostra como chegaste à tua resposta.

14.2 Qual das expressões seguintes define a função cujo gráfico é simétrico do gráfico da função g relativamente ao eixo das abcissas?

(A) $\frac{1}{2}x^2$ (B) $-\frac{1}{2}x^2$ (C) $2x^2$ (D) $-2x^2$

FIM (Caderno 2)

Item									
Cotações (em pontos)									
7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14.1**	**14.2**	**Total**
8	4	9	9	4	7	6	9	4	60

Caderno 1

1. $\overline{x} = \dfrac{23+25+31+32+32+44+45+56}{8} = 36$

$\underline{23}\ \underline{25}\ \underline{31}\ 32\ 32\ \underline{44}\ \underline{45}\ \underline{56} \quad \Longrightarrow \tilde{x} = \dfrac{32+32}{2} = 32$

Logo, (B) é a alínea correta. (4)

2. Sabe-se que $1,5L = 1,5 \times 10^3\ mL$. (1)

Então

$4,7 \times 10^6 \quad - \quad 1\ mL$

$x \quad - \quad 1,5 \times 10^3\ mL$ (3)

$\Leftrightarrow x = 7,05 \times 10^9$ (2)

3. Pelo Teorema de Tales (ou semelhança de triângulos) tem-se (2)

$\dfrac{9,8}{5,6} = \dfrac{\overline{OC}}{8,4}$ (3)

$\Leftrightarrow \overline{OC} = 14,7$

$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$ (1)

$= 14,7 - 9,8 = 4,9$ cm (1)

4. $\overline{AC}^2 = 2^2 + 4^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{AC}^2 = 20 \quad \wedge \quad \overline{AC} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{AC} = \sqrt{20}$ (3)

$E = A + \overline{AE} = A + \overline{AC} = 7 - \sqrt{20} + \sqrt{20} = 7$ (3)

5.1 $\overline{OF}^2 = h^2 + \overline{FO'}^2 \Leftrightarrow 7^2 = h^2 + (2,5)^2 \Leftrightarrow 49 = h^2 + 6,25 \Leftrightarrow h^2 = 42,75 \ \wedge \ h > 0$

$\Leftrightarrow \ h = 6,54$ (5)

Logo, área$= \dfrac{6,54 \times 5}{2} \approx 16$ (2)(1)

5.2 Pela observação da figura verifica-se que alínea correta é a (D). (4)

6. Se $\sqrt{n} = 32$ e consequentemente $n = 32^2 = 1024$ o intervalo não terá 32 elementos.

Logo, o menor natural pretendido é $32^2 + 1 = 1025$. (5)

(Se o aluno apresentar um natural entre $32^2 = 1024$ e $33^2 = 1089$ atribui-se 3 pontos)

Caderno 2

7. $u_n = 3n + 3$ (5)

$u_{100} = 3 \times 100 + 3 = 303$ (3)

8.

Logo, a alínea correta é a (A). (4)

9. $1 + \dfrac{x+1}{2} \geqslant \dfrac{1}{3}(1-2x)$

$\Leftrightarrow 1 + \dfrac{x+1}{2} \geqslant \dfrac{1-2x}{3}$ (1)

$\Leftrightarrow 6 + 3x + 3 \geqslant 2 - 4x$ (2)

$\Leftrightarrow 9 + 3x \geqslant 2 - 4x$ (1)

$\Leftrightarrow 4x + 3x2 - 9$ (1)

$\Leftrightarrow 7x \geqslant -7$ (1)

$\Leftrightarrow x \geqslant -1$ (2)

(5)

10. $(x+3)^2 - 3 = 2x^2 + x$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - 3 = 2x^2 + x$ (3)

$\Leftrightarrow -x^2 + 5x + 6 = 0$ (2)

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times (-1) \times 6}}{2 \times (-1)}$ (2)

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{49}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm 7}{-2}$ (1)

$\Leftrightarrow x = 6 \vee x = -1$ (1)

11. Para a equação ter apenas uma solução o binómio descriminante ter que ser nulo.

Assim,

$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow b^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 36 \Leftrightarrow b = -6 \vee b = 6$ (2)

Logo, os valores de b pretendidos são -6 e 6. (1)(1)

12. Casos Possíveis: $\{2, 3, 5, 7, 14, 15\}$ (2)

Casos Favoráveis: $\{2, 3, 5, 7\}$ (3)

Logo, a probabilidade de o produto obtido ser um número primo é $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. (2)

13. Como g é uma função de proporcionalidade inversa então $g(x) = \frac{k}{x}$, sendo k a constante de proporcionalidade inversa. (2)

Sabe-se que $P(2, f(2)) = P(2, 8)$ e que este ponto pertence a g. (2)

Assim, $k = 2 \times 8 = 16$. (1)

Logo, $g(x) = \frac{16}{x}$. (1)

14.1 Sabe-se que

$B(2, g(2)) = B(2, 8)$ (2)

$A(0, 8)$ (1)

$C(4, f(4)) = C(4, 2)$ (2)

$D(0, 2)$ (1)

Base maior $= 4$

Base menor $= 2$

Altura $= 8 - 2 = 6$ (2)

Logo, Área $= \frac{4+2}{2} \times 6 = \frac{36}{2} = 18$ (1)

14.2 Dado que $g(x) = 2x^2$ a expressão que define o simétrico do gráfico desta função relativamente ao eixo das abcissas é $-2x^2$.

Logo, a alínea correta é a (D). (4)

Nota: As cotações de cada passo encontram-se à direita destes.

Escola Secundária Emídio Navarro

4 º Teste de avaliação de Matemática

9º Ano - 2017 / 2018

Caderno 1:

(É permitido o uso de calculadora.)

O teste é constituído por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2).

Utiliza apenas caneta ou esferográfica, de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.

Para cada resposta, identifica o item.

Apresenta as tuas respostas de forma legível.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

O teste inclui um formulário.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Formulário

Números

Valor aproximado de π (pi): $3,14159$

Geometria

Áreas

Losango: $\dfrac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Superfície esférica: $4\pi r^2$, sendo r o raio da esfera

Áreas

Prisma e cilindro: Área da base $\times$ Altura

Pirâmide e cone: $\dfrac{\text{Área da base} \times \text{Altura}}{3}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$, sendo r o raio da esfera

Trigonometria

Fórmula fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Relação da tangente com o seno e o cosseno: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

1. O triângulo $[ABC]$ da Figura 1 está inscrito numa circunferência, de centro O, e esta circunferência está inscrita num quadrado.

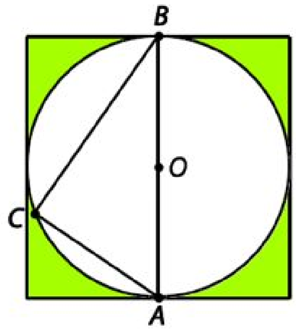


Figura 1

Sabe-se que:

- A, B e C são pontos da circunferência;
- $\overline{AC} = 6$ cm e $\overline{CB} = 8$ cm.

Qual é a área, em centímetros quadrados, da parte sombreada da figura?

Utiliza $3,14159$ para valor aproximado de π.

Apresenta o resultado arredondado às décimas.

Mostra como chegaste à tua resposta.

2. Qual das expressões seguintes é uma expressão fatorizada de $(x-1)^2 - 16$?

(A) $x^2 - 2x - 15$ (B) $x^2 - 2x - 17$

(C) $(x-3)(x+5)$ (D) $(x+3)(x-5)$

3. Considera os intervalos de números reais A e B definidos por:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 > 2x - 5\} \quad \text{e} \quad B =]-\pi, \pi]$$

Qual dos conjuntos seguintes é igual ao conjunto $A \cap B$?

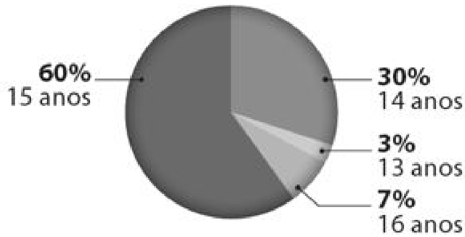
(A) $]-\infty, 3[$ (B) $]-\pi, \pi[$ (C) $]-\pi, 3[$ (D) $]3, \pi]$

4. Determina a soma das soluções da seguinte equação:

$$(x-3)^2 - \frac{2x}{3}(5+x) = 0$$

5. Durante as férias da Páscoa, alguns alunos do 9° ano de uma escola visitaram Paris.

O Rui perguntou a idade a todos os alunos que foram a esta visita e elaborou o gráfico circular ao lado.



Idade dos alunos

Determina:

5.1 a média das idades, arredondada às unidades, dos alunos que foram a esta visita a Paris.

5.2 o número total de alunos da escola que visitaram Paris, sabendo que 60 desses alunos têm 14 anos.

5.3 a probabilidade de escolhido um aluno ao acaso, ele ter, no máximo, 14 anos. Apresenta o resultado na forma de percentagem.

FIM (Caderno 1)

Item							
Cotações (em pontos)							
1	**2**	**3**	**4**	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**Total**
7	4	4	8	5	6	6	40

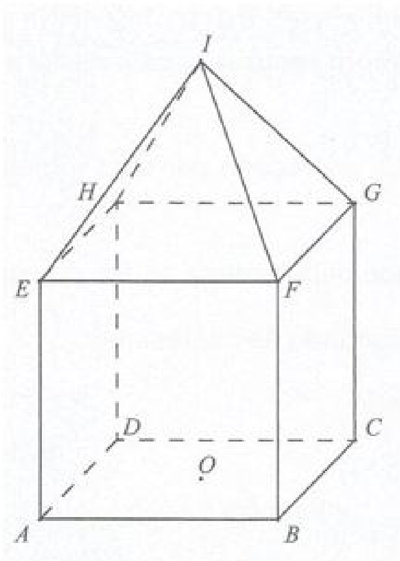
Caderno 2:

(Não é permitido o uso de calculadora.)

6. Na figura está representado um sólido, formado por um cubo e uma pirâmide quadrangular regular, cuja base coincide com a face superior do cubo.

Sabe-se que:

- O é o centro da base inferior do cubo;
- $\overline{IO} = 2\,\overline{FB}$



6.1 Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) As retas AB e CD são concorrentes.

(B) As retas AB e HG são complanares.

(C) As retas AI e CD são concorrentes.

(D) As retas AO e CD são não complanares.

6.2 Indica, justificando, a posição relativa da reta IO e o plano EFG.

7. Considera as seguintes expressões:

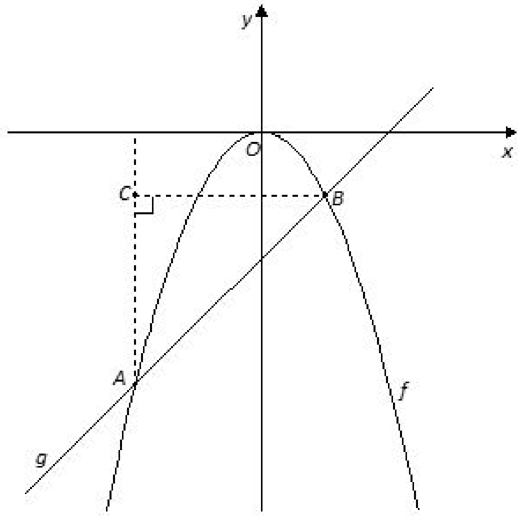
(A) "$\dfrac{2^5 \times 2^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}} + 4$ é múltiplo de 2"

(B) "$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4}$"

(C) "$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2} \div \left(\dfrac{1}{3}\right)^{4}$ pode ser escrita como uma potência de base 3"

Relativamente a cada uma das expressões dadas, identifica as proposições e indica o seu valor lógico, justificando, sempre que possível, com as propriedades das operações com potências.

8. Na figura estão representados, num referencial cartesiano, parte do gráfico de uma função quadrática f, do gráfico de uma função afim g e o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto O é a origem do referencial;
- os pontos A e B pertencem aos gráficos de f e de g;
- o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C;
- o gráfico de f foi obtido pela reflexão de eixo Ox do gráfico da função definida por

  $h(x) = x^2$

  $g(x) = x - 1$

8.1 Resolve a equação $f(x) = g(x)$ e mostra que as coordenadas dos pontos A e B são dadas por:

$$A(-1, -2) \quad \text{e} \quad B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

8.2 Determina a amplitude do ângulo CBA.

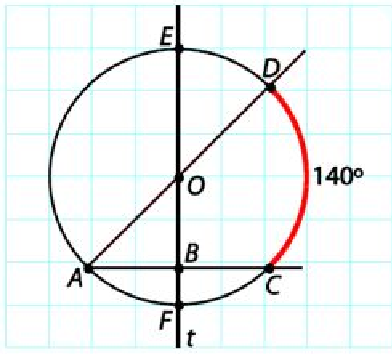
8.3 Escreve a equação da reta que passa na origem e é paralela à reta AB.

9. Resolve a inequação seguinte:

$$\frac{3(x-1)}{5} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{x-1}{10}$$

Apresenta o conjunto solução na forma de intervalo de números reais.

10. Na figura estão representadas uma circunferência de centro em O e raio 5 cm, duas semirretas $\dot{A}C$ e $\dot{A}D$ e uma reta t, mediatriz de $[AC]$.



Sabe-se que:

- o ponto O pertence à semirreta $\dot{A}D$;
- a reta t interseta a circunferência nos pontos E e F e a corda $[AC]$ no ponto B;
- a amplitude do arco CD é 140°.

Nota: a figura não está desenhada à escala.

10.1 Calcula a amplitude, em graus:

10.1.1 do ângulo CAD;

10.1.2 do arco AF.

10.2 Classifica o triângulo $[ABO]$ quanto aos lados e quanto aos ângulos.

FIM (Caderno 2)

Item										
Cotações (em pontos)										
6.1	**6.2**	**7**	**8.1**	**8.2**	**8.3**	**9**	**10.1.1**	**10.1.2**	**10.2**	**Total**
4	6	6	8	6	6	7	5	6	6	60

Caderno 1

1. $\overline{BA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$

$\Leftrightarrow \overline{BA}^2 = 6^2 + 8^2$

$\Leftrightarrow \overline{BA}^2 = 36 + 64$

$\Leftrightarrow \overline{BA}^2 = 100 \quad \wedge \quad \overline{BA} > 0$

$\Leftrightarrow \overline{BA} = 10$ (2)

$\text{Área}_{\text{ Quadrado}} = \overline{BA}^2 = 100 \text{ cm}^2$ (1)

$\text{Área}_{\text{ Círculo}} = \pi \times \left(\dfrac{\overline{BA}}{2}\right)^2 \approx 3,14159 \times 5^2 = 78,53975 \text{ cm}^2$ (1)

$\text{Área}_{\text{ Sombreada}} = \text{Área}_{\text{ Quadrado}} - \text{Área}_{\text{ Círculo}}$ (2)

$= 100 - 78,53975 \approx 21,5 \text{ cm}^2$ (1)

2. $(x-1)^2 - 16 = (x-1)^2 - 4^2 = (x-1+4)(x-1-4) = (x+3)(x-5)$

Logo, a opção correta é a alínea (D).

3. $A = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 > 2x - 5\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : -x > -3\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$

$=]-\infty, 3[$

$A \cap B =]-\infty, 3[\cap]-\pi, \pi] =]-\pi, 3[$

Logo, a opção correta é a alínea (C).

4. $(x-3)^2 - \dfrac{2x}{3}(5+x) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - \dfrac{10x}{3} - \dfrac{2x^2}{3} = 0$ (1)

$\Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 27 - 10x - 2x^2 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow x^2 - 28x + 27 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow x = \dfrac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \times 1 \times 27}}{2}$ (2)

$\Leftrightarrow x = \dfrac{28 \pm 26}{2}$

$\Leftrightarrow x = 27 \quad \vee \quad x = 1$ (1)(1)

Logo, a soma das soluções da equação é

$27 + 1 = 28$ (1)

5.1 $15 \times 0,6 + 14 \times 0,3 + 13 \times 0,03 + 16 \times 0,07 = 14,71 \approx 15$ (1)(1)(1)(1)(1)

5.2 60 - 30%

x - 100% (4)

$$\Leftrightarrow x = \frac{60 \times 100}{30} = 200 \text{ alunos}$$ (2)

5.3 $30 + 3 = 33\%$ (2)(2)(2)

Caderno 2

6.1 A opção correta é a alínea (B).

6.2 Reta perpendicular, dado que IT é perperdicular a duas retas concorrentes, HF e EG, e contidas no plano EFG.

7. (A) "$\dfrac{2^5 \times 2^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}} + 4$ é múltiplo de 2" é uma proposição.

$$\frac{2^5 \times 2^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}} + 4 = \frac{2^8}{2^7} + 4 = 2 + 4 = 6$$

Logo, a proposição é verdadeira.

(B) Não é uma proposição.

(C) "$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \div \left(\dfrac{1}{3}\right)^4$ pode ser escrita como uma potência de base 3" é uma proposição.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \div \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2$$

Logo, a proposição é verdadeira.

8.1 $f(x) = -2x^2$ (2)

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -2x^2 = x - 1 \Leftrightarrow -2x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}$$ (4)

$$f(-1) = -2 \quad \Rightarrow \quad A(-1,-2) \qquad (1)$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \qquad (1)$$

8.2 $C\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

$$\overline{CB} = \frac{3}{2} \qquad (1)$$
$$\overline{CA} = \frac{3}{2} \qquad (1)$$

Como, num triângulo, a lados iguais correspondem ângulos iguais tem-se (2)

$$C\hat{B}A = B\hat{A}C = \frac{180-90}{2} = 45^\circ \qquad (2)$$

8.3 Como a reta pretendida é paralela à reta AB tem-se que estas têm o mesmo declive.

Assim, $y = x + b$ (2)

Como passa na origem tem-se que $b = 0$.

Logo, $y = x$. (4)

9. $\frac{3(x-1)}{5} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{x-1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x-3}{5} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{x-1}{10}$ (2)

$\Leftrightarrow \quad 6x - 6 \leqslant 5 - x + 1$ (2)

$\Leftrightarrow \quad 7x \leqslant 12$ (1)

$\Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{12}{7}$ (1)

Logo, $x \in \left]-\infty, \frac{12}{7}\right]$ (1)

10.1.1 $\frac{140}{2} = 70^\circ$ (5)

10.1.2 6.0pt24.88pt$\widehat{\mathrm{AFC}} = 180 - 140 = 40^\circ$ (3)

6.0pt$\widehat{\mathrm{AF}} = \frac{40}{2} = 20^\circ$ (3)

10.2 $O\hat{B}A = 90^\circ$ pois t é mediatriz $[AC]$ (1)

$O\hat{B}A = C\hat{A}D = 70^\circ$ (1)

$B\hat{O}A = 180 - 90 - 70 = 20^\circ$ (1)

Logo, o triângulo é retângulo e escaleno. (1)(2)

Nota: As cotações de cada passo encontram-se à direita destes.

Escola Secundária Emídio Navarro

5 º Teste de avaliação de Matemática

9º Ano - 2017 / 2018

Caderno 1:

(É permitido o uso de calculadora.)

O teste é constituído por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2).

Utiliza apenas caneta ou esferográfica, de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.

Para cada resposta, identifica o item.

Apresenta as tuas respostas de forma legível.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

O teste inclui um formulário.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Formulário

Números

Valor aproximado de π (pi): $3,14159$

Geometria

Áreas

Losango: $\dfrac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Superfície esférica: $4\pi r^2$, sendo r o raio da esfera

Áreas

Prisma e cilindro: Área da base $\times$ Altura

Pirâmide e cone: $\dfrac{\text{Área da base} \times \text{Altura}}{3}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$, sendo r o raio da esfera

Trigonometria

Fórmula fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

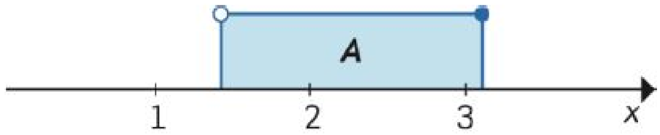
Relação da tangente com o seno e o cosseno: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Ângulo (º)	sen	cos	tg
1	0,017	1,000	0,017
2	0,035	0,999	0,035
3	0,052	0,999	0,052
4	0,070	0,998	0,070
5	0,087	0,996	0,087
6	0,105	0,995	0,105
7	0,122	0,993	0,123
8	0,139	0,990	0,141
9	0,156	0,988	0,158
10	0,174	0,985	0,176
11	0,191	0,982	0,194
12	0,208	0,978	0,213
13	0,225	0,974	0,231
14	0,242	0,970	0,249
15	0,259	0,966	0,268
16	0,276	0,961	0,287
17	0,292	0,956	0,306
18	0,309	0,951	0,325
19	0,326	0,946	0,344
20	0,342	0,940	0,364
21	0,358	0,934	0,384
22	0,375	0,927	0,404
23	0,391	0,921	0,424
24	0,407	0,914	0,445
25	0,423	0,906	0,466
26	0,438	0,899	0,488
27	0,454	0,891	0,510
28	0,469	0,883	0,532
29	0,485	0,875	0,554
30	0,500	0,866	0,577
31	0,515	0,857	0,601
32	0,530	0,848	0,625
33	0,545	0,839	0,649
34	0,559	0,829	0,675
35	0,574	0,819	0,700
36	0,588	0,809	0,727
37	0,602	0,799	0,754
38	0,616	0,788	0,781
39	0,629	0,777	0,810
40	0,643	0,766	0,839
41	0,656	0,755	0,869
42	0,669	0,743	0,900
43	0,682	0,731	0,933
44	0,695	0,719	0,966
45	0,707	0,707	1,000

Ângulo (º)	sen	cos	tg
46	0,719	0,695	1,036
47	0,731	0,682	1,072
48	0,743	0,669	1,111
49	0,755	0,656	1,150
50	0,766	0,643	1,192
51	0,777	0,629	1,235
52	0,788	0,616	1,280
53	0,799	0,602	1,327
54	0,809	0,588	1,376
55	0,819	0,574	1,428
56	0,829	0,559	1,483
57	0,839	0,545	1,540
58	0,848	0,530	1,600
59	0,857	0,515	1,664
60	0,866	0,500	1,732
61	0,875	0,485	1,804
62	0,883	0,469	1,881
63	0,891	0,454	1,963
64	0,899	0,438	2,050
65	0,906	0,423	2,145
66	0,914	0,407	2,246
67	0,921	0,391	2,356
68	0,927	0,375	2,475
69	0,934	0,358	2,605
70	0,940	0,342	2,747
71	0,946	0,326	2,904
72	0,951	0,309	3,078
73	0,956	0,292	3,271
74	0,961	0,276	3,487
75	0,966	0,259	3,732
76	0,970	0,242	4,011
77	0,974	0,225	4,331
78	0,978	0,208	4,705
79	0,982	0,191	5,145
80	0,985	0,174	5,671
81	0,988	0,156	6,314
82	0,990	0,139	7,115
83	0,993	0,122	8,144
84	0,995	0,105	9,514
85	0,996	0,087	11,430
86	0,998	0,070	14,301
87	0,999	0,052	19,081
88	0,999	0,035	28,636
89	1,000	0,017	57,290
90	1,000	0,000	-

1. Considera a representação na reta real do conjunto A.



Qual dos seguintes conjuntos pode corresponder a A?

(A) $]-\infty, \sqrt{2}[\cup [\pi, +\infty[$ (B) $]-\infty, \sqrt{2}[\cap [\pi, +\infty[$

(C) $]-\infty, \pi] \cup]\sqrt{2}, +\infty[$ (D) $]-\infty, \pi] \cap]\sqrt{2}, +\infty[$

2. O João tem uma loja de doces onde vende pacotes de gomas grandes e pequenos.

Sabe-se que:

- todos os pacotes pequenos têm o mesmo peso;
- todos os pacotes grandes têm o mesmo peso;
- 3 pacotes grandes e 2 pacotes pequenos pesam 700 gramas;
- 2 pacotes grandes e 1 pacote pequeno pesam 450 gramas.

Seja x o peso, em gramas, de cada um dos pacotes grandes e seja y o peso, em gramas, de cada pacote pequeno.

2.1 O sistema de equações seguinte permite determinar o peso de cada um dos pacotes.

Completa-o.

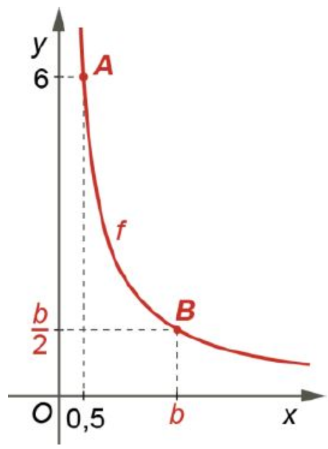
$$\begin{cases} 3x + \underline{\hspace{2em}} = 700 \\ \underline{\hspace{2em}} + y = 450 \end{cases}$$

2.2 O Carlos comprou três pacotes grandes e seis pacotes pequenos.

Sabendo que o preço das gomas é 15 €/kg, determina quanto pagou o Carlos.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

3. Na figura, em referencial cartesiano xOy, está representada uma função f de proporcionalidade inversa.



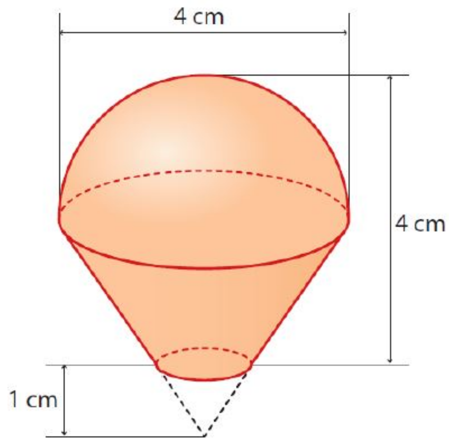
Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico de f;
- as coordenadas do ponto A são $\left(\frac{1}{2}, 6\right)$
- a ordenada de B é metade da abcissa, sendo a abcissa representada por b, com $b > 0$.

O valor de b é:

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 3 (D) $\sqrt{6}$

4. Na figura, podes observar um modelo geométrico de uma escultura constituída por um tronco de cone e uma semiesfera.



Sabe-se que:

- o tronco de cone foi obtido retirando ao cone inicial um cone com 1 cm de altura;
- a semiesfera tem 4 cm de diâmetro;
- a base do cone inicial é igual ao círculo da semiesfera;
- a altura a escultura é 4 cm.

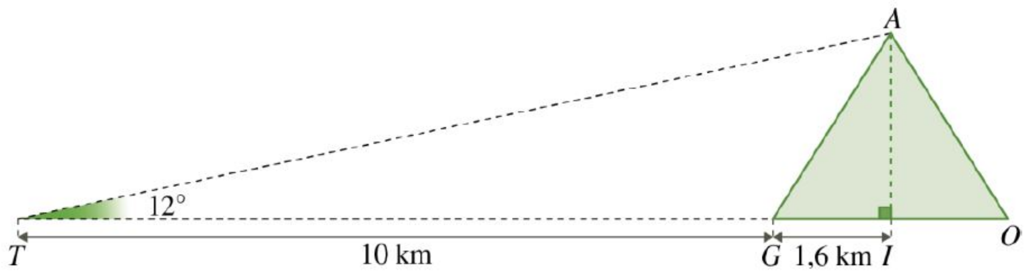
4.1 Determina a área lateral do cone inicial.

Apresenta o resultado, em cm^2, arredondado às unidades.

4.2 Calcula o volume da escultura. Apresenta o resultado, em cm^3, arredondado às unidades.

5. A figura seguinte foi desenhada pelo Tiago para determinar a altura aproximada de uma montanha.

O Tiago encontrava-se no ponto T, a cerca de 10 km da base de uma montanha.



Com os dados da figura determina, em metros, a altura da montanha.

Apresenta o resultado arredondado às unidades.

FIM (Caderno 1)

Item							
Cotações (em pontos)							
1	**2.1**	**2.2**	**3**	**4.1**	**4.2**	**5**	**Total**
4	4	5	4	6	6	6	35

Caderno 2:

(Não é permitido o uso de calculadora.)

6. A seguir estão representadas as quatro primeiras figuras de uma sequência.

Admite que a lei de formação sugerida se mantém para as restantes figuras.

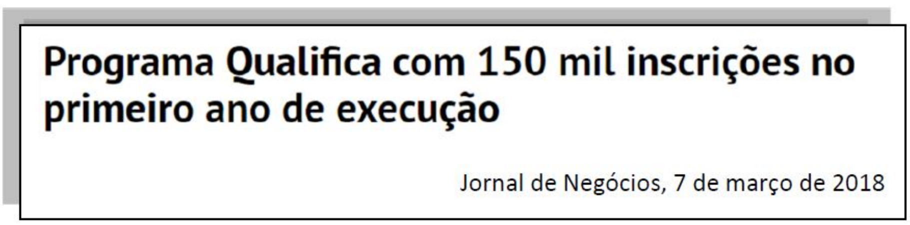
Cada figura da sequência é constituída por quadrados geometricamente iguais, sendo uns cinzentos e outros brancos.

Sabe-se que que o número total de quadrados para formar as n primeiras figuras é dado pela expressão $n^2 + 3n$.

6.1 Determina o número total de quadrados que há nas 10 primeiras figuras da sequência.

6.2 A Rita continuou a acrescentar figuras à sequência. Na última figura utilizou 20 quadrados cinzentos. Determina o número total de quadrados que a Rita utilizou.
Explica como obtiveste a tua resposta.

7. A seguir apresenta-se um recorte de jornal.



Programa Qualifica com 150 mil inscrições no primeiro ano de execução

Jornal de Negócios, 7 de março de 2018

Admite que o número de inscrições, por ano, se mantém.

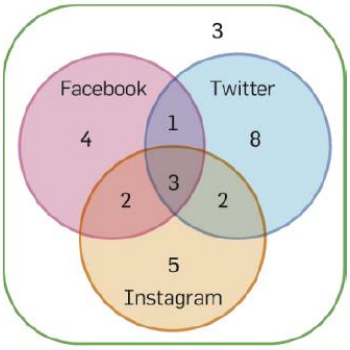
O número total de inscrições até 2020 (em quatro anos) é:

(A) $1,5 \times 10^6$ (B) 6×10^5 (C) $4,5 \times 10^5$ (D) 6×10^6

8. Sejam p e q números naturais tais que $p^q = 64$.

Escreve o valor de metade de p^{-q} na forma de potência de base 2.

9. O diagrama da figura seguinte traduz os resultados de um inquérito aos 28 alunos de uma turma de 9° ano sobre a utilização das redes sociais.



Considera que se escolhe, ao acaso, um aluno dessa turma.

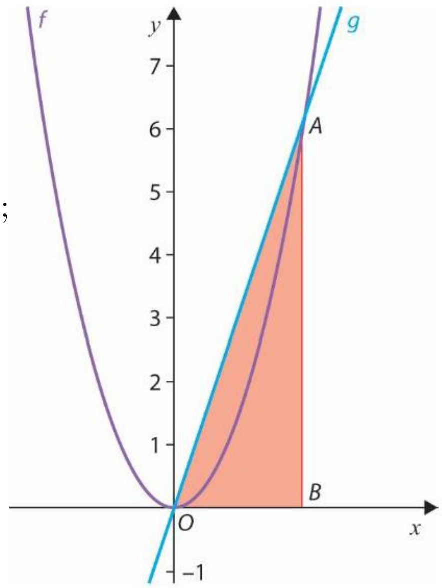
Qual é a probabilidade de esse aluno usar o Facebook, mas não usar o Instagram?

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

10. No referencial cartesiano da figura estão representados os gráficos das funções f e g.

Sabe-se que:

- a função f é definida por $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2$;
- a função g é uma função do tipo $g(x) = ax$;
- o ponto A pertence aos gráficos das duas funções;
- a ordenada do ponto A é 6.
- os pontos A e B têm a mesma abcissa.



10.1 Determina a área do triângulo $[ABO]$.

10.2 Indica uma equação da reta r, que passa no ponto de coordenadas $(0, 7)$ e é paralela à reta que representa graficamente a função g.

11. Resolve a seguinte equação.

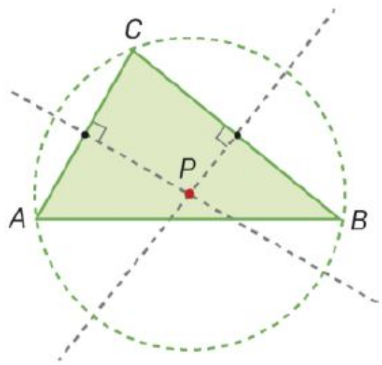
$$\frac{(x-2)^2}{6}+3=\frac{2x+5}{3}$$

12. Resolve a seguinte inequação e indica o conjunto-solução na forma de intervalo de números reais.

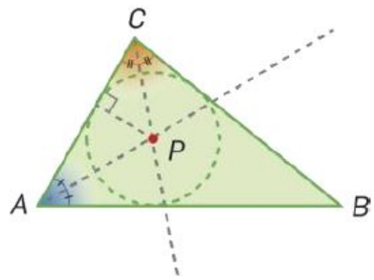
$$2-\frac{3-x}{4}\leqslant 5(1-2x)$$

13. Em qual das seguintes figuras o ponto P é o incentro do triângulo $[ABC]$?

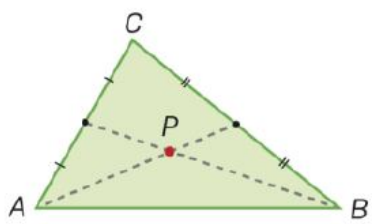
(A)



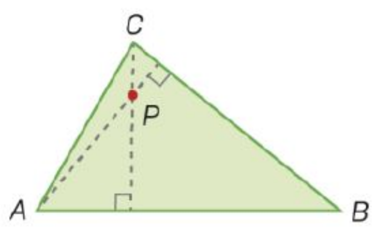
(B)



(C)



(D)



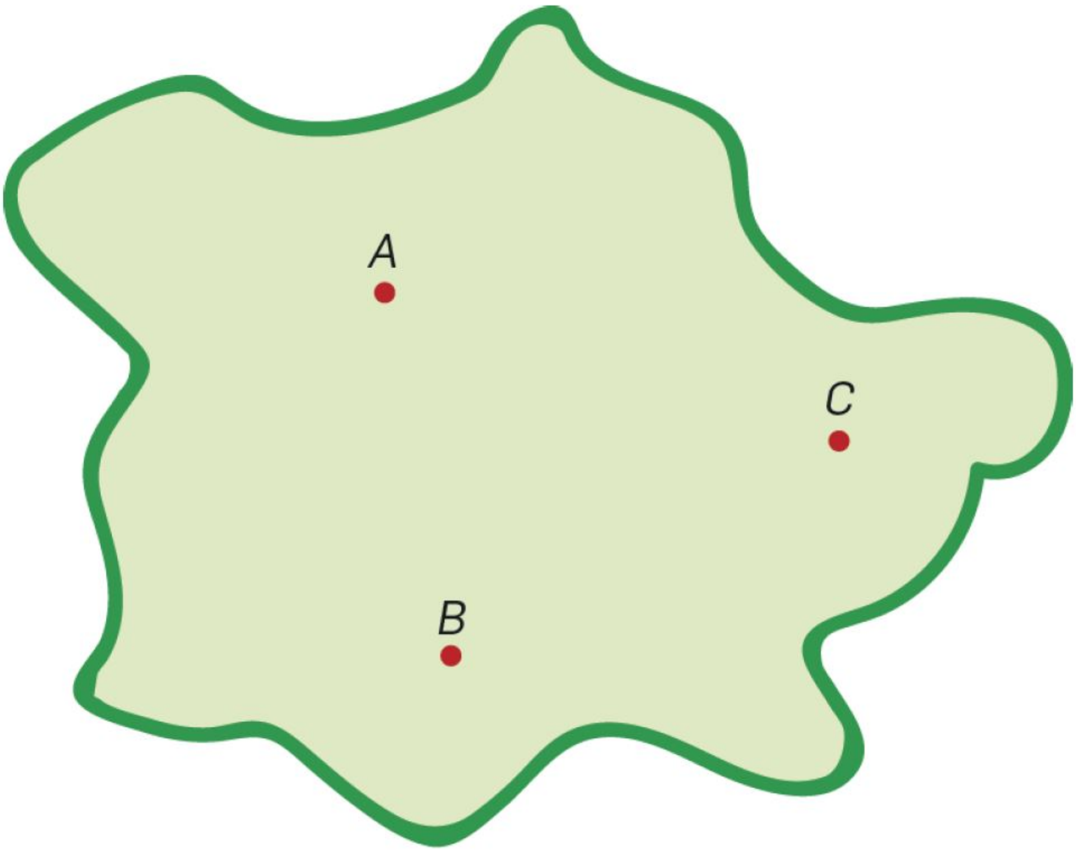
14. Na figura ao lado está representada uma floresta. Os pontos A, B e C representam três torres de observação para prevenção de incêndios.

Pretende-se construir um posto de controlo que seja equidistante das três torres de observação.

Desenha a lápis, na figura, uma construção geométrica rigorosa que te permita assinalar o ponto onde deve ser construído o posto de controlo.

Assinala esse ponto com a letra P.

Nota: Não apagues as linhas auxiliares.



FIM (Caderno 2)

Item											
Cotações (em pontos)											
6.1	**6.2**	**7**	**8**	**9**	**10.1**	**10.2**	**11**	**12**	**13**	**14**	**Total**
5	7	4	6	6	6	6	7	7	4	7	65

Caderno 1

1. $]-\infty,\sqrt{2}[\cup[\pi,+\infty[=\mathbb{R}\setminus[\sqrt{2},\pi[$

$]-\infty,\sqrt{2}[\cap[\pi,+\infty[=\{\}$

$]-\infty,\pi]\cup]\sqrt{2},+\infty[=\mathbb{R}$

$]-\infty,\pi]\cap]\sqrt{2},+\infty[=]\sqrt{2},\pi]$

Logo, a opção correta é a alínea (D). (4)

2.1 $\begin{cases} 3x+2y=700 & (2) \\ 2x+y=450 & (2) \end{cases}$

2.2 $\begin{cases} 3x+2y=700 \\ 2x+y=450 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+900-4x=700 \\ y=450-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=200 \\ y=50 \end{cases}$ (2)

$3x+6y=3\times 200+6\times 50=600+300=900\,\text{g}$ (1)

$15\,€ \;-\; 1\,\text{kg} \qquad x=\dfrac{0,9\times 15}{1}=13,5\,€$ (2)

$x \;-\; 0,9\,\text{kg}$

Logo, o Carlos pagou $13,5\,€$.

3. Seja k a constante de proporcionalidade.

$k=\dfrac{1}{2}\times 6=3$

$B\left(b,\dfrac{b}{2}\right)$

$k=b\times\dfrac{b}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 3=\dfrac{b^2}{2} \quad\Leftrightarrow\quad b^2=6 \quad\wedge\quad b>0 \quad\Leftrightarrow\quad b=\sqrt{6}$

Logo, a opção correta é a alínea (D). (4)

4.1 $g^2=3^2+2^2 \quad\Leftrightarrow\quad g^2=13 \quad\wedge\quad g>0 \quad\Leftrightarrow\quad g=\sqrt{13} \quad\Leftrightarrow\quad g=3,606$ (3)

$\text{Área}_{\text{ lateral}}=\pi r g=3,14159\times 2\times 3,606\approx 23\,\text{cm}^2$ (1)(1)(1)

4.2 $V_{\text{ esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3,14159 \times 2^3 \approx 33,510\,\text{cm}^3$ (1)

$V_{\text{ semiesfera}} = \frac{V_{\text{ esfera}}}{2} \approx 16,775\,\text{cm}^3$ (1)

$V_{\text{ cone inicial}} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \times 2^2 \times 3}{3} \approx 12,566\,\text{cm}^3$ (1)

Pelo Teorema de Tales, $\frac{3}{1} = \frac{2}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}$ (1)

$V_{\text{ cone pequeno}} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 1}{3} \approx 0,465\,\text{cm}^3$ (1)

$V_{\text{ Total}} = V_{\text{semiesfera}} + V_{\text{cone inicial}} - V_{\text{cone pequeno}} \approx 29\,\text{cm}^3$ (1)

5. $\tan 12° = \frac{\overline{AI}}{\overline{TI}} \Leftrightarrow \tan 12° = \frac{\overline{AI}}{11,6} \Leftrightarrow \overline{AI} = 2,46616\,\text{km} \approx 2466\,\text{m}$ (3)(2)(1)

Caderno 2

6.1 $10^2 + 3 \times 10 = 100 + 30 = 130$ (5)

6.2 Se a última figura utilizou 20 quadrados cinzentos então é a figura número 20. (2)

$20^2 + 3 \times 20 = 400 + 60 = 460$ (5)

7. $4 \times 150 \times 10^3 = 600 \times 10^3 = 6 \times 10^5$

Logo, a opção correta é a alínea (B). (4)

8. $p^q = 64 \quad \Leftrightarrow \quad p^{-q} = \frac{1}{64} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p^{-q}}{2} = \frac{1}{128}$ (2)(2)

$\frac{1}{128} = (128)^{-1} = (2^7)^{-1} = 2^{-7}$ (2)

9. $\frac{5}{28}$ (3)

(3)

10.1 $f(x) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}x^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \wedge \quad x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$ (4)

$\text{Área} = \frac{a \times b}{2} = \frac{6 \times 2}{2} = 6$ (2)

10.2 $6 = a \times 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3$ (2)

$g(x) = 3x$

$r : y = 3x + b$ (2)

Como r passa no ponto $(0,7)$ então $r : y = 3x + 7$. (2)

11. $\dfrac{(x-2)^2}{6}+3=\dfrac{2x+5}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2-4x+4}{6}+3=\dfrac{2x+5}{3}$ (2)

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x+4}{6}+\dfrac{18}{6}=\dfrac{4x+10}{6} \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4x+4+18=4x+10$ (1)

$\Leftrightarrow x^2-8x+12=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{8\pm\sqrt{8^2-4\times 1\times 12}}{2}$ (1)(1)

$\Leftrightarrow x=\dfrac{8\pm 4}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=2 \quad \vee \quad x=6$ (1)(1)

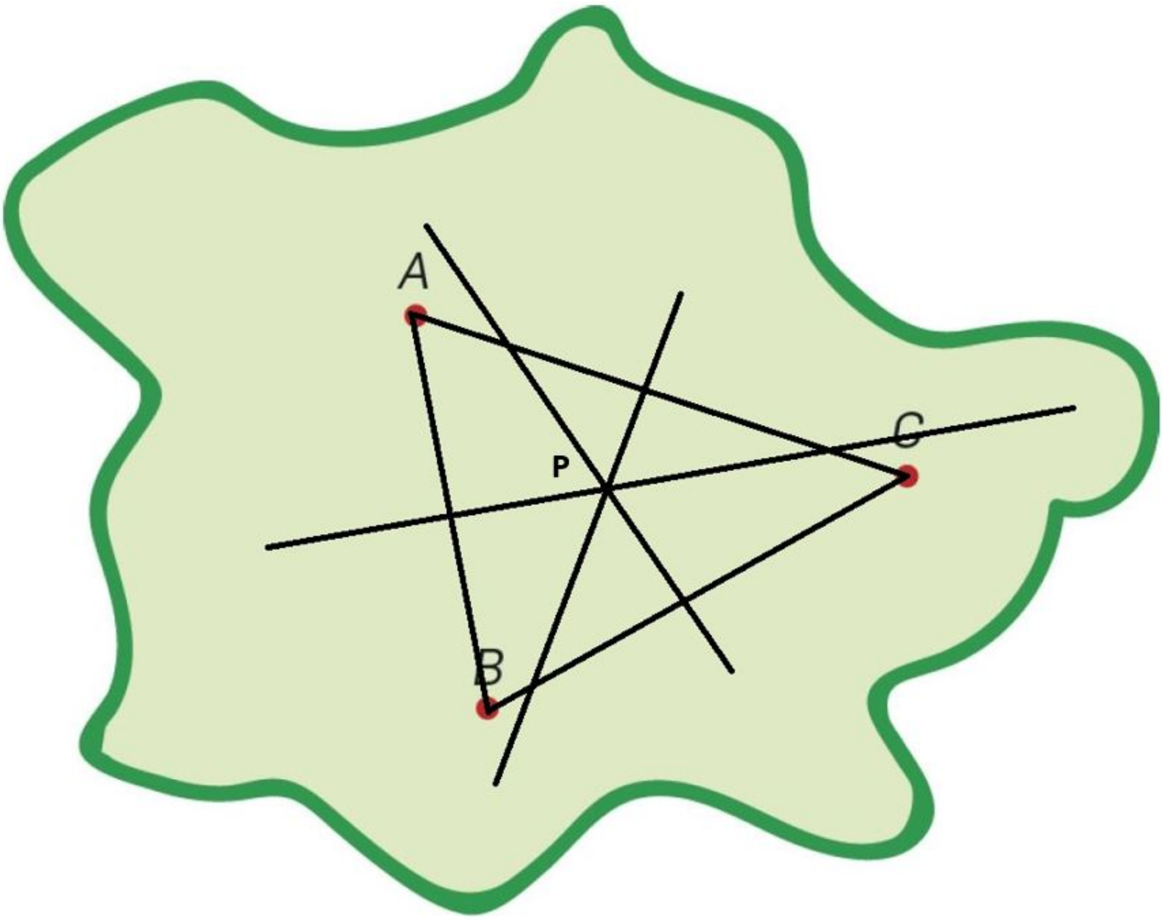
12. $2-\dfrac{3-x}{4}\leqslant 5(1-2x) \quad \Leftrightarrow \quad 2-\dfrac{3-x}{4}\leqslant 5-10x$ (2)

$\Leftrightarrow 8-3+x\leqslant 20-40x \quad \Leftrightarrow \quad 41x\leqslant 15 \quad \Leftrightarrow \quad x\leqslant\dfrac{15}{41}$ (2)(1)

$\left]-\infty,\dfrac{15}{41}\right]$ (2)

13. Por observação das figuras verifica-se que a opção correta é a alínea (B). (4)

14.



(2 pontos por cada mediatriz)

(1 ponto por indicar o ponto P)

(-2 pontos por falta de rigor)

B.2.2 11º ano

Escola Secundária Emídio Navarro

Ano Letivo 2017/2018

1º Teste de avaliação de Matemática A – 11º Ano **Versão 1**

Nome: ____________________ **Nº:** ______ **Turma:** _______

Classificação: __________ **O Professor:** ______________ **O Encarregado de Educação:** ________________

Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve na tua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionares para responderes a esse item.

1. Dois lados de um terreno triangular medem, respetivamente, 120 e 180 metros e o ângulo formado pelos dois lados é 47°.

O perímetro do terreno triangular, arredondado às unidades de metro, é:

(A) 431 (B) 432 (C) 433 (D) 434

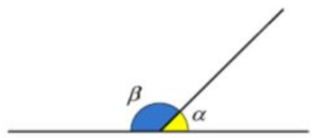
2. Na figura estão representados dois ângulos com o mesmo vértice, α e β.

A soma das amplitudes destes dois ângulos é um ângulo raso.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\sin\beta = -\sin\alpha$ (B) $\cos\beta = -\cos\alpha$

(C) $\sin\beta = -\cos\alpha$ (D) $\tan\beta = \tan\alpha$



3. Qual das expressões seguintes designa um número real positivo, para qualquer x pertencente ao intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$?

(A) $\sin x + \cos x$ (B) $\cos x \tan x$ (C) $\tan x - \sin x$ (D) $\sin x \tan x$

4. Sabe-se que num determinado quadrante $\sin\alpha \times \cos\alpha < 0$ e que, nesse quadrante, o seno é crescente.

Qual das afirmações é verdadeira?

(A) O cosseno é decrescente (B) O cosseno é crescente

(C) O seno é positivo (D) O cosseno é negativo

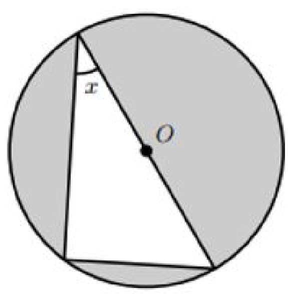
5. Na figura ao lado está representado um triângulo inscrito numa circunferência de centro O e raio igual a 1.

Um dos lados do triângulo é um diâmetro da circunferência.

Qual das expressões seguintes representa, em função de x, a área da parte sombreada.

(A) $\pi - 2\sin x\cos x$ (B) $\frac{\pi}{2} - 2\sin x\cos x$

(C) $\pi - \sin x\cos x$ (D) $\pi - \frac{\sin x\cos x}{2}$



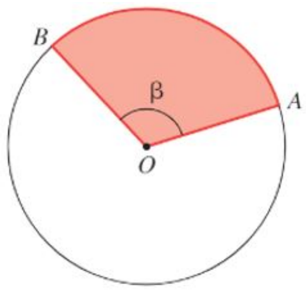
6. Na figura está representada uma circunferência de centro O e raio 3 cm.

Sabe-se que $\beta = A\hat{O}B = 2$ rad .

O perímetro do setor circular AOB é:

(A) 3 cm (B) 6 cm

(C) 9 cm (D) 12 cm



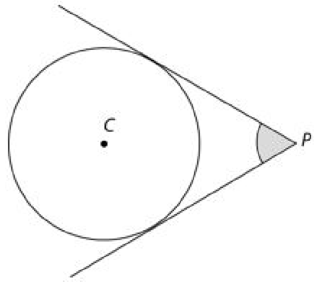
Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

1. Considera uma circunferência de centro C com 3 cm de raio. Um ponto P encontra-se a 6 cm do centro da circunferência.

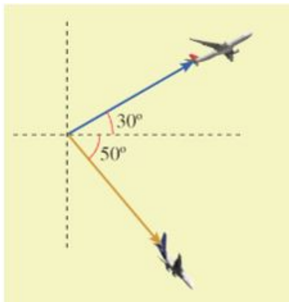
Determina a amplitude, em graus, do ângulo formado pelas retas tangentes à circunferência que passam no ponto P.

Justifica convenientemente a tua resposta.



2. Dois aviões descolam de um aeroporto ao mesmo tempo. Ambos voam à velocidade de 450 Km/h, um na direção 30° nordeste, e o outro na direção 50° sudeste, conforme a figura.

Qual será a distância, arredondada ao Km, entre os aviões após 4 horas de viagem?

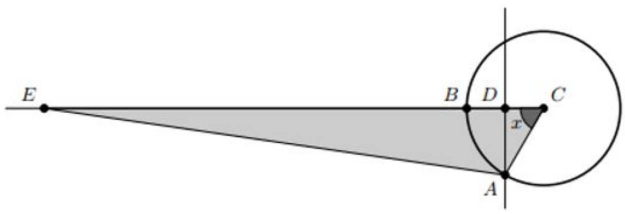


3. Sabendo que $x \in]0, \pi[$ e que $\cos(x - \pi) = \dfrac{2}{3}$, determina o valor exato de:

$$\sin(\pi + x) - \cos(-x) + \tan(x + 3\pi)$$

4. Na figura ao lado estão representados a circunferência de centro no ponto C e de raio 1, a semirreta $\dot{C}B$, a reta AD e o triângulo $[ACE]$.

Sabe-se que:



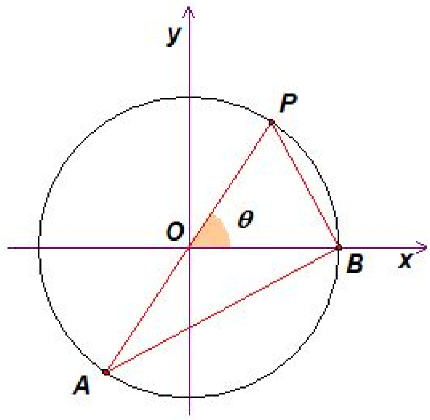
- A e B pertencem à circunferência;
- D e E pertencem à semirreta $\dot{C}B$;
- A reta AD é perpendicular à semirreta $\dot{C}B$;
- O ponto A desloca-se sobre a circunferência e os pontos D e E acompanham esse movimento de modo que $\overline{DE} = 6$;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo ACB;
- $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

4.1 Mostra que a área do triângulo $[ACE]$ é dada, em função de x, por $\dfrac{\sin x(6+\cos x)}{2}$.

4.2 Para uma certa posição do ponto A, tem-se que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\dfrac{2}{5}$.

Determina, para essa posição A, a área do triângulo $[ACE]$.

5. Na figura, em referencial ortonormado Oxy, está representada a circunferência trigonométrica e um triângulo $[ABP]$.



Sabe-se que:

- $[AP]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto B tem coordenadas $(1,0)$;
- $B\hat{O}P=\theta$ e $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

Sabendo que $B\hat{A}P=\dfrac{\pi}{6}$**:**

5.1 Justifica que $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

5.2 Indica as coordenadas dos pontos A e P.

5.3 Indica a área do triângulo $[BAP]$.

5.4 Se se aplicar uma rotação de centro O de ângulo generalizado $(-60°,2)$ ao triângulo $[BAP]$, quais passarão a ser as coordenadas dos seus vértices.

FIM

Cotações:

Grupo I: 54 pontos (9 pontos cada questão)

Grupo II: 146 pontos

Questão	**1**	**2**	**3**	**4.1**	**4.2**	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**5.4**
Cotação	16	20	18	20	20	8	12	20	12

Escola Secundária Emídio Navarro

Ano Letivo 2017/2018

1º Teste de avaliação de Matemática A – 11º Ano Versão 2

Nome: ______________________________ Nº: ______ Turma: _______

Classificação: __________ O Professor: ______________ O Encarregado de Educação: ________________

Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve na tua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionares para responderes a esse item.

1. Dois lados de um terreno triangular medem, respetivamente, 120 e 180 metros e o ângulo formado pelos dois lados é 47°.

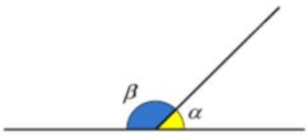
O perímetro do terreno triangular, arredondado às unidades de metro, é:

(A) 434 (B) 433 (C) 432 (D) 431

2. Na figura estão representados dois ângulos com o mesmo vértice, α e β.

A soma das amplitudes destes dois ângulos é um ângulo raso.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?



(A) $\tan\beta = \tan\alpha$ (B) $\sin\beta = -\cos\alpha$

(C) $\cos\beta = -\cos\alpha$ (D) $\sin\beta = -\sin\alpha$

3. Qual das expressões seguintes designa um número real positivo, para qualquer x pertencente ao intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$?

(A) $\tan x - \sin x$ (B) $\sin x \tan x$ (C) $\sin x + \cos x$ (D) $\cos x \tan x$

4. Sabe-se que num determinado quadrante $\sin\alpha \times \cos\alpha < 0$ e que, nesse quadrante, o seno é crescente.

Qual das afirmações é verdadeira?

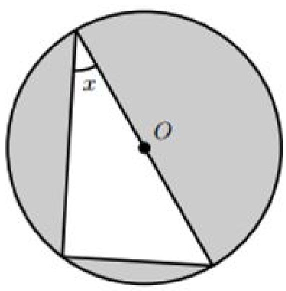
(A) O seno é positivo (B) O cosseno é negativo

(C) O cosseno é decrescente (D) O cosseno é crescente

5. Na figura ao lado está representado um triângulo inscrito numa circunferência de centro O e raio igual a 1.

Um dos lados do triângulo é um diâmetro da circunferência.

Qual das expressões seguintes representa, em função de x, a área da parte sombreada.



(A) $\pi - \sin x \cos x$ (B) $\pi - \frac{\sin x \cos x}{2}$

(C) $\pi - 2\sin x \cos x$ (D) $\frac{\pi}{2} - 2\sin x \cos x$

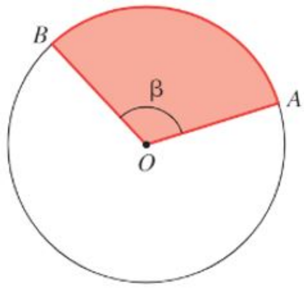
6. Na figura está representada uma circunferência de centro O e raio 3 cm.

Sabe-se que $\beta = A\hat{O}B = 2$ rad .

O perímetro do setor circular AOB é:

(A) 12 cm (B) 9 cm

(C) 6 cm (D) 3 cm



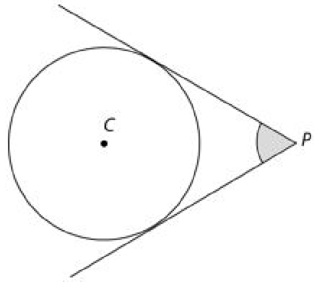
Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

1. Considera uma circunferência de centro C com 3 cm de raio. Um ponto P encontra-se a 6 cm do centro da circunferência.

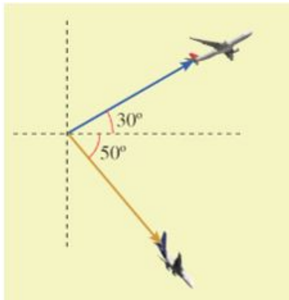
Determina a amplitude, em graus, do ângulo formado pelas retas tangentes à circunferência que passam no ponto P.

Justifica convenientemente a tua resposta.



2. Dois aviões descolam de um aeroporto ao mesmo tempo. Ambos voam à velocidade de 450 Km/h, um na direção 30° nordeste, e o outro na direção 50° sudeste, conforme a figura.

Qual será a distância, arredondada ao Km, entre os aviões após 4 horas de viagem?

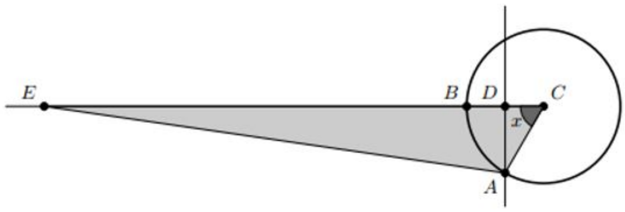


3. Sabendo que $x \in \left]0, \pi\right[$ e que $\cos(x - \pi) = \dfrac{2}{3}$, determina o valor exato de:

$$\sin(\pi + x) - \cos(-x) + \tan(x + 3\pi)$$

4. Na figura ao lado estão representados a circunferência de centro no ponto C e de raio 1, a semirreta $\dot{C}B$, a reta AD e o triângulo $[ACE]$.

Sabe-se que:



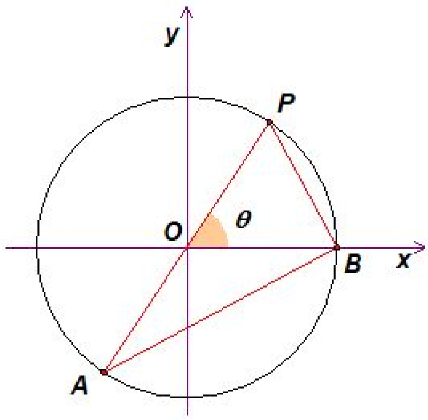
- A e B pertencem à circunferência;
- D e E pertencem à semirreta $\dot{C}B$;
- A reta AD é perpendicular à semirreta $\dot{C}B$;
- O ponto A desloca-se sobre a circunferência e os pontos D e E acompanham esse movimento de modo que $\overline{DE} = 6$;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo ACB;
- $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

4.1 Mostra que a área do triângulo $[ACE]$ é dada, em função de x, por $\dfrac{\sin x(6+\cos x)}{2}$.

4.2 Para uma certa posição do ponto A, tem-se que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\dfrac{2}{5}$.

Determina, para essa posição A, a área do triângulo $[ACE]$.

5. Na figura, em referencial ortonormado Oxy, está representada a circunferência trigonométrica e um triângulo $[ABP]$.



Sabe-se que:

- $[AP]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto B tem coordenadas $(1,0)$;
- $B\hat{O}P=\theta$ e $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

Sabendo que $B\hat{A}P=\dfrac{\pi}{6}$**:**

5.1 Justifica que $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

5.2 Indica as coordenadas dos pontos A e P.

5.3 Indica a área do triângulo $[BAP]$.

5.4 Se se aplicar uma rotação de centro O de ângulo generalizado $(-60°,2)$ ao triângulo $[BAP]$, quais passarão a ser as coordenadas dos seus vértices.

FIM

Cotações:

Grupo I: 54 pontos (9 pontos cada questão)

Grupo II: 146 pontos

Questão	**1**	**2**	**3**	**4.1**	**4.2**	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**5.4**
Cotação	16	20	18	20	20	8	12	20	12

Grupo I

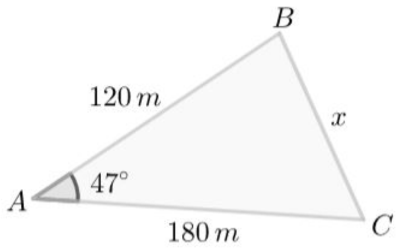
	1	2	3	4	5	6
Versão 1	B	B	C	B	A	D
Versão 2	C	C	A	D	C	A

1. Pela *Lei dos Cossenos* tem-se

$$x^2 = 120^2 + 180^2 - 2 \times 120 \times 180 \times \cos 47°$$
$$\Leftrightarrow x^2 \approx 17337.67$$

como $x > 0$

$$\Rightarrow x \approx 132 \text{ m}$$



Logo, o perímetro do terreno é

$$P = 120 + 180 + 132 = 432$$

2. Se a soma das amplitudes dos dois ângulos é um ângulo raso então verifica-se que

$$\alpha = 180° - \beta$$

Logo,

$$\cos\beta = \cos(180° - \alpha) \Leftrightarrow \cos\beta = -\cos\alpha$$

3. No 3° Quadrante tem-se:

$* \sin\alpha < 0$

$* \cos\alpha < 0$

$* \tan\alpha > 0$

Logo $\tan x - \sin x > 0$.

4. Se $\sin\alpha \times \cos\alpha < 0$ então $\alpha \in 2°$ Quadrante ou $\alpha \in 4°$ Quadrante.

Se $\sin\alpha$ é crescente então $\alpha \in 1°$ Quadrante $\alpha \in 4°$ Quadrante.

Logo $\alpha \in 4°$ Quadrante.

No 4° Quadrante o cosseno crescente.

5. $A_{\text{sombreada}} = A_{\text{círculo}} - A_{\text{triângulo}} = \pi - \dfrac{2 \times \sin x \times 2\cos x}{2} = \pi - 2\sin x \cos x$

6. 2π rad ______ $2\pi \times 3$ cm

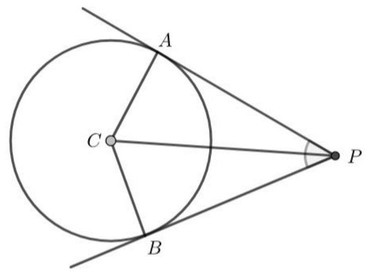
2 rad ______ x cm

$\Leftrightarrow x = \dfrac{6\pi \times 2}{2\pi} \Leftrightarrow x = 6$

Perímetro $= 6 + 3 + 3 = 12$

Grupo II

1. Os triângulos $[APC]$ e $[BCP]$ são geometricamente iguais pois $\overline{AC} = \overline{BC} = 3$ e $\overline{CP} = 6$ é comum aos dois triângulos.

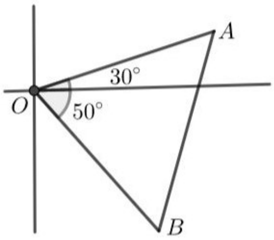


Assim, $\overline{AP} = \overline{BP}$.

Deste modo, $A\hat{P}C = C\hat{P}B$. (5)

$\sin(A\hat{P}C) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A\hat{P}C = 30°$ (6)

$A\hat{P}B = 2 \times A\hat{P}C = 2 \times 30° = 60°$ (5)



2. $\overline{OA} = \overline{OB} = 4 \times 450 = 1800$ Km (5)

$\overline{AB}^2 = 1800^2 + 1800^2 - 2 \times 1800 \times 1800 \times \cos 80°$ (10)

como $\overline{AB} > 0$

$\overline{AB} \approx 2314$ km (5)

3. $\cos(x - \pi) = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow -\cos x = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{2}{3}$ (3)

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \wedge x \in 2°$ Quadrante $\Leftrightarrow \sin x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (4)

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (2)

$\sin(x + \pi) - \cos(-x) + \tan(x + 3\pi) = -\sin x - \cos x + \tan x$ (2)(2)(2)

$= -\dfrac{\sqrt{5}}{3} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (2)

$= \dfrac{4 - 5\sqrt{5}}{6}$ (1)

4.1 $\overline{DC} = \cos x$ (2)

base $= \overline{EC} = \overline{DE} + \overline{DC} = 6 + \cos x$ (5)

altura $= \overline{DA} = \sin x$ (3)

$A(x) = \dfrac{\text{altura} \times \text{base}}{2} = \dfrac{\sin x\,(6 + \cos x)}{2}$ (10)

4.2 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\dfrac{2}{5} \Leftrightarrow -\sin x = -\dfrac{2}{5}$ (5)

$\Leftrightarrow \sin x = \dfrac{2}{5}$ (1)

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \wedge x$ é agudo

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{25} + \cos^2 x = 1 \wedge x$ é agudo (3)(2)

$\Leftrightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$ (3)

$\text{Área}(x) = \dfrac{\frac{2}{5} \times \left(6 + \frac{\sqrt{21}}{5}\right)}{2} = \dfrac{6}{5} + \dfrac{\sqrt{21}}{25} = \dfrac{30 + \sqrt{21}}{25}$ (1)(1)(2)(2)

5.1 $B\hat{A}P = \frac{\widehat{\text{BP}}}{2} \Leftrightarrow \widehat{\text{BP}} = \frac{\pi}{3}$ (2)(2)

como θ é um ângulo ao centro

$\theta = \widehat{\text{BP}} = \frac{\pi}{3}$ (2)(2)

5.2 $P\left(\cos\theta, \sin\theta\right)$ (1)(1)

$= P\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (1)(1)

$= P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (1)(1)

$A\left(-\cos\theta, -\sin\theta\right)$ (2)(2)

$= A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (1)(1)

5.3 $\overline{AB} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$ (6)

$\overline{BP} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$ (6)

$A_{[BAP]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BP}}{2}$ (5)

$= \frac{\sqrt{3} \times 1}{2}$ (2)

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$ u.a. (1)

5.4

$A'(-1, 0)$ (2)

$P'(1, 0)$ (2)

$B'\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (3)(3)

$= B'\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (1)(1)

Nota: As cotações de cada passo encontram-se à direita destes.

Escola Secundária Emídio Navarro

Ano Letivo 2017/2018

2º Teste de avaliação de Matemática A – 11º Ano **Versão 1**

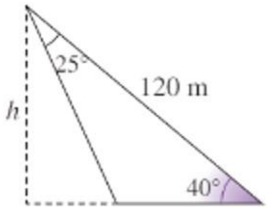
Nome: ______________________ **Nº:** ______ **Turma:** _______

Classificação: ___________ **O Professor:** _______________ **O Encarregado de Educação:** _________________

Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve na tua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionares para responderes a esse item.

1. Considera um terreno com a forma descrita na figura ao lado.



Sabendo que o proprietário pretende vender o terreno a 400 euros por metro quadrado, qual deverá ser a quantia, em milhares de euros, aproximada às unidades, a pedir pela sua venda?

(A) 851 (B) 858 (C) 863 (D) 870

2. Seja $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Qual das expressões seguintes designa um número negativo?

(A) $\cos(\pi - x)$ (B) $\sin(\pi - x)$ (C) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ (D) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

3. O período positivo mínimo da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$$

é : (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) 12 (C) 6 (D) 2π

4. Seja f a função, de domínio D e contradomínio $[1, +\infty[$, definida por $g(x) = 1 - \tan x$.

Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto D?

(A) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ (B) $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ (C) $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ (D) $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

5. O valor exato da expressão $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ é:

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $-\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{3\pi}{2}$

6. De dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ sabe-se que $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 2$ e $\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v} = -2$.

Então, $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \,.\, (3\overrightarrow{u})$ é igual a:

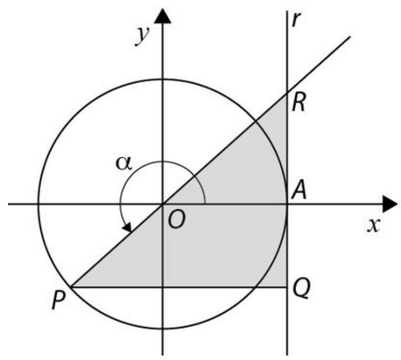
(A) -12 (B) 0 (C) 6 (D) 8

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

7. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica e a reta r.

Sabe-se:



- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto P está no terceiro quadrante e pertence à circunferência;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto A;
- o ponto Q pertence à reta r e é tal que o segmento de reta $[PQ]$ é paralelo ao eixo Ox;
- o ponto R é o ponto de interseção da reta r com a semirreta $\dot{P}O$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo $A\hat{O}P$, com $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

7.1 Mostra que a área do triângulo $[PQR]$ é dada, em função de α, por

$$A(\alpha) = \frac{\tan\alpha}{2} \times (\cos\alpha - 1)^2$$

7.2 Determina o valor exato da área do triângulo para $\alpha = \frac{7\pi}{6}$.

7.3 Sabendo que $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\frac{3}{5} \ \wedge \ \theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, calcula o valor exato de $A(\theta)$.

8. Determina, recorrendo a intervalos de números reais, os valores de k para os quais se tem:

$$cosx = 1 - k^2 \quad \wedge \quad x \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right[$$

9. Sejam f e g as funções definidas no intervalo $[-\pi, 2\pi]$ por:

$$f(x) = -1 + \sin x$$
$$g(x) = 2\sin^2 x - 1$$

Determina:

9.1 os zeros da função g.

9.2 o contradomínio da função g.

9.3 Determina as coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g.

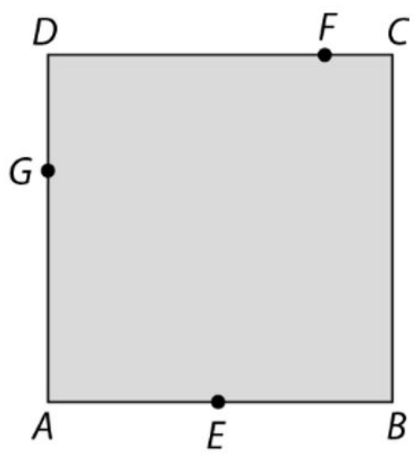
10. Mostra que é verdadeira a seguinte proposição:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \sin x \cos x \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right) = 1$$

11. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$ de lado igual a 6.

Admite que:

- o ponto E é o ponto médio do segmento $[AB]$;
- o ponto F pertence ao segmento $[CD]$;
- o ponto G pertence ao segmento $[DA]$;
- o trapézio $[EBCF]$ tem área igual a 12;
- $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{GD}$.



Determina o valor exato de $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{EF}$.

FIM

Cotações:

Grupo I: 48 pontos (8 pontos cada questão)

Grupo II: 152 pontos

Questão	**7.1**	**7.2**	**7.3**	**8**	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**10**	**11**
Cotação	20	12	18	18	17	12	20	15	20

Escola Secundária Emídio Navarro

Ano Letivo 2017/2018

2º Teste de avaliação de Matemática A – 11º Ano **Versão 2**

Nome: ______________________________ **Nº:** ______ **Turma:** _______

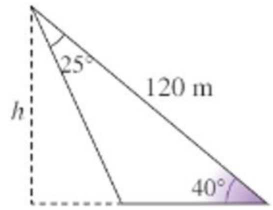
Classificação: ___________ **O Professor:** _______________ **O Encarregado de Educação:** _________________

Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve na tua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionares para responderes a esse item.

1. Considera um terreno com a forma descrita na figura ao lado.

Sabendo que o proprietário pretende vender o terreno a 400 euros por metro quadrado, qual deverá ser a quantia, em milhares de euros, aproximada às unidades, a pedir pela sua venda?



(A) 870 (B) 863 (C) 858 (D) 851

2. Seja $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Qual das expressões seguintes designa um número negativo?

(A) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ (B) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ (C) $\cos(\pi - x)$ (D) $\sin(\pi - x)$

3. O período positivo mínimo da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$$

é : (A) 2π (B) 6 (C) 12 (D) $\frac{\pi}{6}$

4. Seja f a função, de domínio D e contradomínio $[1, +\infty[$, definida por $g(x) = 1 - \tan x$.

Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto D?

(A) $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ (B) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ (C) $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ (D) $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$

5. O valor exato da expressão $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ é:

(A) $\frac{3\pi}{2}$ (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{5\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

6. De dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ sabe-se que $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 2$ e $\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v} = -2$.

Então, $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \,.\, (3\overrightarrow{u})$ é igual a:

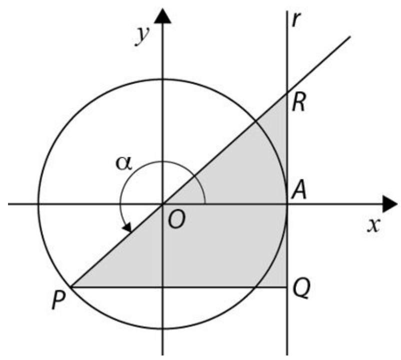
(A) 8 (B) 6 (C) 0 (D) -12

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

7. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica e a reta r.

Sabe-se:



- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto P está no terceiro quadrante e pertence à circunferência;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto A;
- o ponto Q pertence à reta r e é tal que o segmento de reta $[PQ]$ é paralelo ao eixo Ox;
- o ponto R é o ponto de interseção da reta r com a semirreta $\dot{P}O$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo $A\hat{O}P$, com $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

7.1 Mostra que a área do triângulo $[PQR]$ é dada, em função de α, por

$$A(\alpha) = \frac{\tan\alpha}{2} \times (\cos\alpha - 1)^2$$

7.2 Determina o valor exato da área do triângulo para $\alpha = \frac{7\pi}{6}$.

7.3 Sabendo que $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\frac{3}{5} \ \wedge\ \theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, calcula o valor exato de $A(\theta)$.

8. Determina, recorrendo a intervalos de números reais, os valores de k para os quais se tem:

$$cosx = 1 - k^2 \quad \wedge \quad x \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right[$$

9. Sejam f e g as funções definidas no intervalo $[-\pi, 2\pi]$ por:

$$f(x) = -1 + \sin x$$
$$g(x) = 2\sin^2 x - 1$$

Determina:

9.1 os zeros da função g.

9.2 o contradomínio da função g.

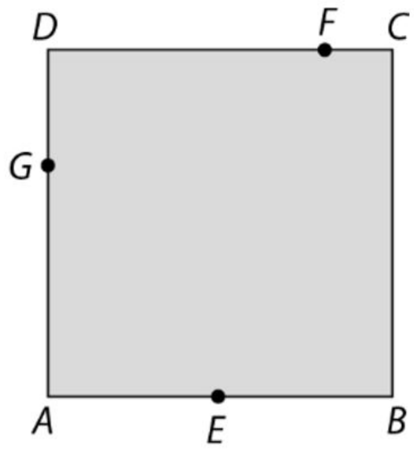
9.3 Determina as coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g.

10. Mostra que é verdadeira a seguinte proposição:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \sin x \cos x \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right) = 1$$

11. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$ de lado igual a 6.
Admite que:

- o ponto E é o ponto médio do segmento $[AB]$;
- o ponto F pertence ao segmento $[CD]$;
- o ponto G pertence ao segmento $[DA]$;
- o trapézio $[EBCF]$ tem área igual a 12;
- $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{GD}$.



Determina o valor exato de $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{EF}$.

FIM

Cotações:
Grupo I: 48 pontos (8 pontos cada questão)
Grupo II: 152 pontos

Questão	**7.1**	**7.2**	**7.3**	**8**	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**10**	**11**
Cotação	20	12	18	18	17	12	20	15	20

Grupo I

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Versão 1	C	C	C	D	C	C
Versão 2	B	A	B	C	B	B

1. $\dfrac{\sin 90°}{120} = \dfrac{\sin 40°}{h} \Leftrightarrow h \approx 77,14$

$\dfrac{\sin 115°}{120} = \dfrac{\sin 25°}{b} \Leftrightarrow b \approx 55,96$

$A_{\text{triângulo}} = \dfrac{b \times a}{2} \approx 2158$

$\text{Preço} = 400 \times 2158 \approx 863000$

2. $\cos(\pi - x) = -\cos x > 0$

$\sin(\pi - x) = \sin x > 0$

$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x < 0$

$\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x > 0$

3. $g(x+k) = 1 - 2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}(x+k) - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x - \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}k\right)$

$\dfrac{\pi}{3}k = 2\pi \Leftrightarrow k = 6$

4. Utilizando a calculadora verifica-se $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$

5. $\arccos\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right) - \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{5\pi}{6}$

$= \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{5\pi}{6}$

$= -\dfrac{\pi}{2}$

6. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \,.\, (3\overrightarrow{u})$

$= 3 \times \overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{u} + 3 \times \overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v}$

$= 3\,\|\overrightarrow{u}\|^2 + 3 \times (-2)$

$= 3 \times 4 - 6$

$= 6$

Grupo II

7.1 base $= \overline{PQ} = 1 - \cos\alpha$ (5)

altura $= \overline{QR} = \tan\alpha - \sin\alpha$ (5)

$$\text{Área} = \frac{b \times a}{2} = \frac{(1-\cos\alpha)\times(\tan\alpha - \sin\alpha)}{2} \quad (1)$$

$$= \frac{\tan\alpha - \ \sin\alpha - \cos\alpha\tan\alpha + \cos\alpha\sin\alpha}{2} \quad (1)$$

$$= \frac{\tan\alpha - \sin\alpha - \sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha}{2} \quad (1)$$

$$= \frac{\tan\alpha - 2\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha}{2} \quad (1)$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 2\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha}{2} \quad (1)$$

$$= \frac{\sin\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha\sin\alpha}{2\cos\alpha} \quad (1)$$

$$= \frac{\sin\alpha\,(1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha)}{2\cos\alpha} \quad (2)$$

$$= \frac{\tan\alpha}{2}\times(1-\cos\alpha)^2 = \frac{\tan\alpha}{2}\times(\cos\alpha - 1)^2 \quad (2)$$

7.2 Pretende-se calcular $A\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ (2)

$$= \frac{\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{2}\times\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 1\right)^2 \quad (2)$$

$$= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}\times\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1\right)^2 \quad (2)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 \quad (2)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\times\left(\frac{3}{4} + 2\sqrt{3} + 1\right) \quad (2)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{24} + \frac{2\times 3}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (2)$$

$$= \frac{7\sqrt{3}}{24} + 1 \quad (2)$$

7.3 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta = -\frac{3}{5}$ (3)

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad (2)$$

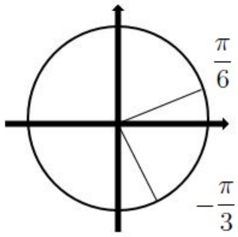
$$\Leftrightarrow \tan^2\theta = \frac{25}{9} - 1 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\theta = \frac{16}{9} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \tan\theta = \pm\frac{4}{3} \ \wedge\ \theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\quad (3)$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{4}{3} \quad (2)$$

$$A(\theta) = \frac{\tan\theta}{2} \times (\cos\theta - 1)^2 \quad (1)$$
$$= \frac{4}{6} \times \left(-\frac{3}{5} - 1\right)^2 \quad (2)$$
$$= \frac{4}{6} \times \left(-\frac{8}{5}\right)^2 \quad (1)$$
$$= \frac{128}{75} \quad (1)$$

8. 

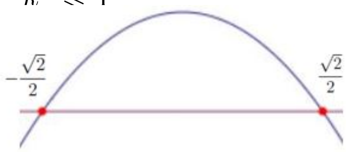
(3)

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (menor valor) (3)

$\cos 0 = 1$ (maior valor) (1)

$\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant 1 - k^2 \leqslant 1$ (3)

(3)



$1 - k^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\vee\; k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (3)

Logo $k \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (2)

9.1 $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 1 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$ (1)

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\vee\; \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2)

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \;\vee\; \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (2)

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \;\vee\; x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \;\vee\; x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \;\vee\; x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z}$ (4)

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \;\vee\; x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \;\vee\; x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \;\vee\; x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z}$ (2)

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\; k \in \mathbb{Z}$ (2)

Como $x \in [-\pi, 2\pi]$ tem-se

C.S. $= \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ (3)

9.2 $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ (3)

$\Leftrightarrow 0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$ (5)

$\Leftrightarrow 0 \leqslant 2\sin^2 x \leqslant 2$ (1)

$\Leftrightarrow -1 \leqslant 2\sin^2 -1 \leqslant 1$ (1)

Logo, $D'g = [-1, 1]$ (2)

9.3 $f(x) = g(x)$ (2)

$\Leftrightarrow -1 + \sin x = 2\sin^2 x - 1$ (1)

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \ \vee \ 2\sin x - 1 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \ \vee \ \sin x = \dfrac{1}{2}$ (1)

$\Leftrightarrow \sin x = \sin(0) \ \vee \ \sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ (1)

$\Leftrightarrow x = k\pi \ \vee \ x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ (2)

Como $x \in [-\pi, 2\pi]$ tem-se

C.S. $= \left\{-\pi, 0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \pi, 2\pi\right\}$ (4)

Logo, as coordenadas dos pontos são:

$$(-\pi, -1),\ (0, -1),\ \left(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right),\ (\pi, -1),\ (2\pi, -1) \quad (6)$$

10. $\sin x \cos x \left(\tan x + \dfrac{1}{\tan x}\right)$

$= \sin x \cos x \left(\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}\right)$ (5)

$= \sin^2 x + \cos^2 x$ (5)

$= 1$ (5)

11. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG}$ (3)

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}$ (4)

$\overrightarrow{EG} \,.\, \overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG}) \,.\, (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF})$ (2)

$= \overrightarrow{EA} \,.\, \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA} \,.\, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EA} \,.\, \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AG} \,.\, \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AG} \,.\, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AG} \,.\, \overrightarrow{CF}$ (2)

$= -9 + 0 + 3 + 0 + 24 + 0$ (3)

$= 18$ (1)

<u>Cálculos Auxiliares:</u>

Base menor $= \overline{FC}$

Base maior $= \overline{EB} = 3$

Altura $= \overline{CB} = 6$

Área $_{\text{trapézio}} = \dfrac{\overline{FC} + \overline{EB}}{2} \times \overline{CB}$

$\Leftrightarrow 12 = \dfrac{\overline{FC} + 3}{2} \times 6$

$\Leftrightarrow \overline{FC} = 1$

Nota: As cotações de cada passo encontram-se à direita destes.

Escola Secundária Emídio Navarro

Ano Letivo 2017/2018

3 º Teste de avaliação de Matemática A – 11º Ano **Versão 1**

Nome: ____ **Nº:** ______ **Turma:** _______

Classificação: ___________ **O Professor:** ________________ **O Encarregado de Educação:** _________________

Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve na tua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionares para responderes a esse item.

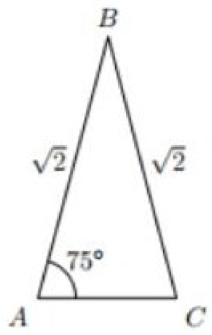
1. Considera, num referencial o.n. xOy, as retas r e s definidas, respetivamente, por

$$r : (x, y) = (1, 2) + k(0, 2),\ k \in \mathbb{R}$$
$$s : y = \frac{4}{3}x + 1$$

Qual a amplitude, em graus, do ângulo destas duas retas (valor arredondado às unidades)?

(A) $47°$ (B) $49°$ (C) $51°$ (D) $53°$

2. Na figura ao lado está representado um triângulo isósceles $[ABC]$.



Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2}$
- $B\hat{A}C = 75°$

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{BC}$?

(A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{3}$

3. Seja a um número real.

Considera a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -3\,u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual é o terceiro termo desta sucessão?

(A) $6a + 4$ (B) $9a - 4$ (C) $6a - 4$ (D) $9a + 4$

4. Seja α o plano de equação $\sqrt{2}x - mz = 0$ e t a reta de equação:

$$\begin{cases} x = 4 + k \\ y = 2, \qquad k \in \mathbb{R} \\ z = -2 - 3k \end{cases}$$

O valor de m para o qual o plano α é paralelo à reta t é:

(A) -3 (B) 3 (C) $\sqrt{2}$ (D) $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano γ de equação $x + 2y + 2z - 1 = 0$ e a reta r de equação: $(x, y, z) = (1, -1, -1) + k\,(-2, 1, 1),\ k \in \mathbb{R}$

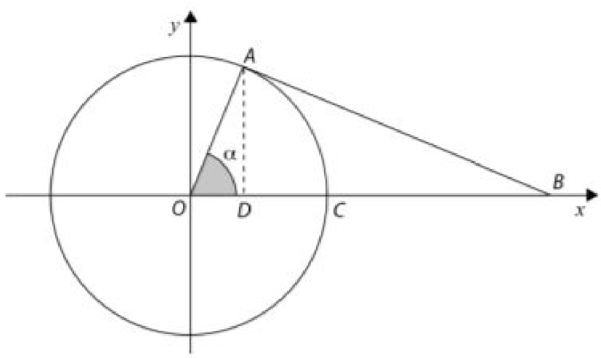
Qual das equações é uma equação cartesiana de um plano perpendicular a γ e que contém a reta r?

(A) $-2x + y + z = 0$ (B) $x - y - z = 0$ (C) $2x - z = 0$ (D) $-y + z = 0$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

1. Na figura encontra-se representada a circunferência trigonométrica e um triângulo $[ABO]$.



O ponto A pertence à circunferência e o ponto C é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox.

A reta AB é tangente à circunferência no ponto A.

Seja α a amplitude do ângulo COA $\left(\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$.

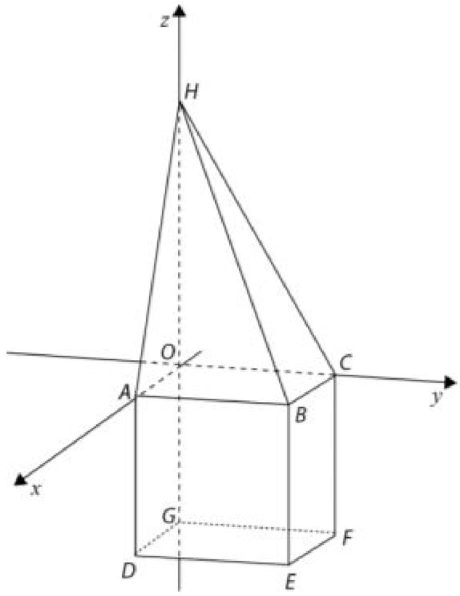
1.1 Mostra que a área do triângulo $[ABO]$ é dada, em função de α, por $A(\alpha) = \dfrac{1}{2}\tan\alpha$.

1.2 Considera o ponto A que se obtém para $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tal que $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$. Determina uma equação reduzida da reta AC.

2. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[HABCODEFG]$, que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy;
- o ponto H pertence ao eixo Oz;
- o ponto C pertence ao eixo Oy;
- o ponto E tem coordenadas $(3, 3, -3)$;
- o plano BCH é definido pela equação $5y + 3z - 15 = 0$.



2.1 Escreve uma equação vetorial que defina a reta que passa no ponto E e é perpendicular ao plano BCH.

2.2 Determina uma equação cartesiana do plano ABH.

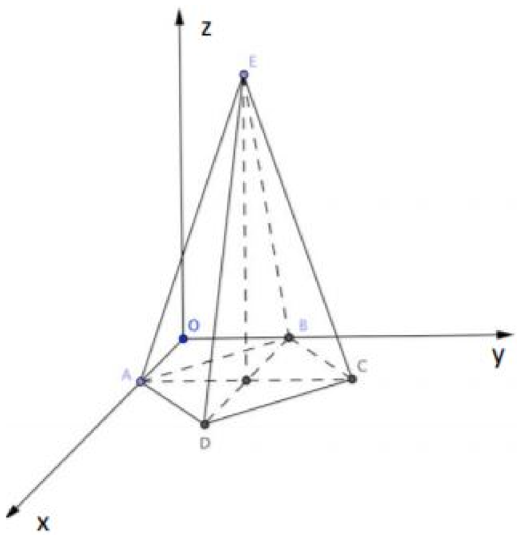
2.3 Utilizando a definição de produto escalar, escreve uma condição que defina a superfície esférica de diâmetro $[CD]$.

3. Considera um referencial o.n. $Oxyz$, e nele uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$ cuja base $[ABCD]$ está contida no plano xOy.

Sabe-se que:

- o vértice A tem coordenadas $(1, 0, 0)$;
- o vértice B tem coordenadas $(0, 1, 0)$;
- o plano DCE é perpendicular à reta definida pela condição

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + k\,(3, 3, 1),\ k \in \mathbb{R}.$$



Determina o volume da pirâmide.

4. Considera a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \frac{1-2n}{2n+3}$$

4.1 Averigua se $-\frac{2}{3}$ é um termo da sucessão (u_n).

4.2 Estuda a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

4.3 Mostra que a sucessão (u_n) é uma sucessão limitada.

FIM

Cotações:

Grupo I: 50 pontos (10 pontos cada questão)

Grupo II: 150 pontos

Questão	**1.1**	**1.2**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**3**	**4.1**	**4.2**	**4.3**
Cotação	18	18	16	18	16	20	12	16	16

Escola Secundária Emídio Navarro

Ano Letivo 2017/2018

3 º Teste de avaliação de Matemática A – 11º Ano **Versão 2**

Nome: ______________________________ **Nº:** ______ **Turma:** _______

Classificação: ___________ **O Professor:** _______________ **O Encarregado de Educação:** _________________

Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve na tua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionares para responderes a esse item.

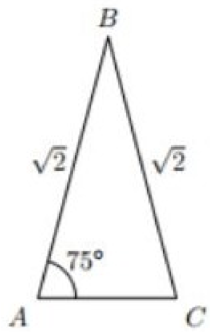
1. Considera, num referencial o.n. xOy, as retas r e s definidas, respetivamente, por

$$r : (x, y) = (1, 2) + k(0, 2),\ k \in \mathbb{R}$$
$$s : y = \frac{4}{3}x + 1$$

Qual a amplitude, em graus, do ângulo destas duas retas (valor arredondado às unidades)?

(A) $53°$ (B) $51°$ (C) $49°$ (D) $47°$

2. Na figura ao lado está representado um triângulo isósceles $[ABC]$.



Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2}$
- $B\hat{A}C = 75°$

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{BC}$?

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}$

3. Seja a um número real.

Considera a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -3\,u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual é o terceiro termo desta sucessão?

(A) $9a + 4$ (B) $6a - 4$ (C) $9a - 4$ (D) $6a + 4$

4. Seja α o plano de equação $\sqrt{2}x - mz = 0$ e t a reta de equação:

$$\begin{cases} x = 4 + k \\ y = 2, \qquad k \in \mathbb{R} \\ z = -2 - 3k \end{cases}$$

O valor de m para o qual o plano α é paralelo à reta t é:

(A) 3 (B) -3 (C) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\sqrt{2}$

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano γ de equação $x + 2y + 2z - 1 = 0$ e a reta r de equação: $(x, y, z) = (1, -1, -1) + k\,(-2, 1, 1),\ k \in \mathbb{R}$

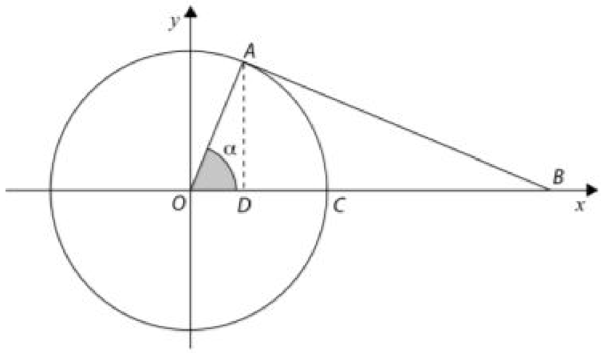
Qual das equações é uma equação cartesiana de um plano perpendicular a γ e que contém a reta r?

(A) $-y + z = 0$ (B) $2x - z = 0$ (C) $x - y - z = 0$ (D) $-2x + y + z = 0$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

1. Na figura encontra-se representada a circunferência trigonométrica e um triângulo $[ABO]$.



O ponto A pertence à circunferência e o ponto C é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox.

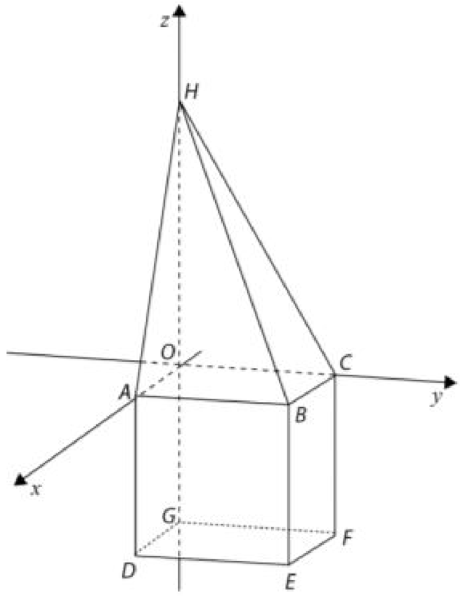
A reta AB é tangente à circunferência no ponto A.

Seja α a amplitude do ângulo COA $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

1.1 Mostra que a área do triângulo $[ABO]$ é dada, em função de α, por $A(\alpha) = \frac{1}{2}\tan\alpha$.

1.2 Considera o ponto A que se obtém para $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $\cos\alpha = \frac{3}{4}$. Determina uma equação reduzida da reta AC.

2. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[HABCODEFG]$, que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular.



Sabe-se que:

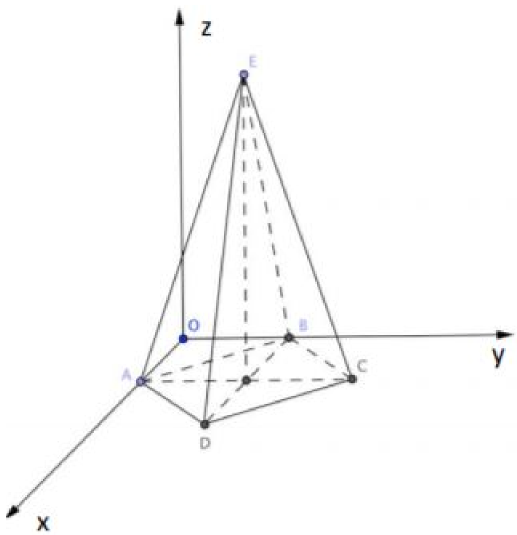
- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy;
- o ponto H pertence ao eixo Oz;
- o ponto C pertence ao eixo Oy;
- o ponto E tem coordenadas $(3, 3, -3)$;
- o plano BCH é definido pela equação $5y + 3z - 15 = 0$.

2.1 Escreve uma equação vetorial que defina a reta que passa no ponto E e é perpendicular ao plano BCH.

2.2 Determina uma equação cartesiana do plano ABH.

2.3 Utilizando a definição de produto escalar, escreve uma condição que defina a superfície esférica de diâmetro $[CD]$.

3. Considera um referencial o.n. $Oxyz$, e nele uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$ cuja base $[ABCD]$ está contida no plano xOy.



Sabe-se que:

- o vértice A tem coordenadas $(1, 0, 0)$;
- o vértice B tem coordenadas $(0, 1, 0)$;
- o plano DCE é perpendicular à reta definida pela condição

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + k\,(3, 3, 1),\ k \in \mathbb{R}.$$

Determina o volume da pirâmide.

4. Considera a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \frac{1-2n}{2n+3}$$

4.1 Averigua se $-\dfrac{2}{3}$ é um termo da sucessão (u_n).

4.2 Estuda a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

4.3 Mostra que a sucessão (u_n) é uma sucessão limitada.

FIM

Cotações:

Grupo I: 50 pontos (10 pontos cada questão)

Grupo II: 150 pontos

Questão	**1.1**	**1.2**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**3**	**4.1**	**4.2**	**4.3**
Cotação	18	18	16	18	16	20	12	16	16

Grupo I

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Versão 1	D	C	B	D	D
Versão 2	A	B	C	C	A

1. Verifica-se que r é uma reta horizontal.

Assim, o ângulo entre r e s é dado por $\arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53°$.

2. Como $\overline{AB} = \overline{BC}$ tem-se que $A\hat{C}B = 75°$.

O ângulo formado entre $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ é igual é $180° - 2 \times 75° = 30°$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{BC} &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos 30° \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}&u_1 = a \\ &u_2 = -3a + 2 \\ &u_3 = -3\,(-3a + 2) + 2 = 9a - 6 + 2 = 9a - 4\end{aligned}$$

4. Considere $\overrightarrow{u}$ o vetor normal do plano α tal que $\overrightarrow{u}(\sqrt{2}, 0, -m)$.

Seja $\overrightarrow{v}$ o vetor diretor da reta t tal que $\overrightarrow{v}(1, 0, -3)$.

$$(\sqrt{2}, 0, -m) \,.\, (1, 0, -3) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} + 0 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

5. Considere a equação $-2x + y + z = 0$.

$$(-2, 1, 1) \,.\, (1, 2, 2) = 2 \neq 0$$

Assim, esta equação não se adequa.

Considere a equação $x - y - z = 0$.

$$(1, -1, -1) \,.\, (1, 2, 2) = -3 \neq 0$$

Assim, esta equação não se adequa.

Considere a equação $2x - z = 0$.

$$(2, 0, -1) \,.\, (1, 2, 2) = 0$$

Substituindo o ponto $(1, -1, -1)$ na equação do plano $2 + 1 = 3 \neq 0$.

Assim, esta não é a equação correta.

Considere a equação $-y + z = 0$.

$$(0, -1, 1) \,.\, (1, 2, 2) = 0$$

Substituindo o ponto $(1, -1, -1)$ na equação do plano $1 - 1 = 0$.

Logo $-y + z = 0$ é o plano perpendicular a λ e que contém a reta r.

Grupo II

1.1 altura $= \overline{AD} = \sin\alpha$ (5)

base $= \overline{OB}$

Cálculo Auxiliar

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\overline{OB}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OB} = \frac{1}{\cos\alpha} \quad (4)$$

$$\text{Área} = \frac{h \times b}{2} = \frac{\sin\alpha \times \frac{1}{\cos\alpha}}{2} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2}\tan\alpha \quad (3)$$

1.2 $A(\cos\alpha, \sin\alpha) = A\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ (1)(4)

Cálculo Auxiliar

Pela Fórmula Fundamental da Trigonometria,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 = 1 - \frac{9}{16} \wedge \alpha \in \left]a, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Sabe-se que $C(1,0)$ (1)

O declive da equação reduzida da reta AC é dada por

$$m = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4} - 1} = -\sqrt{7} \quad (5)$$

Assim, tem-se

$y = -\sqrt{7}x + b$

Substituindo no ponto C,

$$0 = -\sqrt{7} + b \Leftrightarrow b = \sqrt{7} \quad (5)$$

Logo, a equação reduzida da reta AC é $y = -\sqrt{7}x + \sqrt{7}$. (2)

2.1 Dado que a reta em questão é perpendicular ao plano BCH verifica-se que o vetor normal $\overrightarrow{u}(0,5,3)$ é vetor diretor dessa reta.

Assim, a equação vetorial da reta é

$(x,y,z)=(3,3,-3)+k(0,5,3),\ k\in\mathbb{R}$ (8)(8)

2.2 Tem-se que $H(0,0,z)$.

Substituindo na equação do plano BCH. (1)

$5\times 0+3z-15=0 \Leftrightarrow z=5$ (3)

Assim, $H(0,0,5)$. (2)

Tem-se também que

$A(3,0,0)$ (0,5)

$B(3,3,0)$. (0,5)

Verifica-se que

$\overrightarrow{AB}(0,3,0)$ (1)

$\overrightarrow{AH}(-3,0,5)$ (1)

$$\begin{cases}\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AH}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a,b,c)\,.\,(0,3,0)=0\\ (a,b,c)\,.\,(-3,0,5)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3b=0 & (1)\\ -3a+5c=0 & (1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}b=0\\ a=\frac{5}{3}c\end{cases}$$

Considere $c=3$.

Assim, $\overrightarrow{n}(5,0,3)$. (3)

Tem-se então

$5x+3z+d=0$ (1)

Substituindo as coordenadas do ponto $A(3,0,0)$ na equação anterior, (2)

$5\times 3+0+d=0 \Leftrightarrow d=-15$

Logo, a equação cartesiana do plano ABH é $5x+3z-15=0$. (1)

2.3 Considere o ponto $P(x,y,z)$ da superfície esférica.

Verifica-se que

$\overrightarrow{CP}(x,y-3,z)$ (2)

$\overrightarrow{PD}(x-3,y,z+3)$ (2)

Utilizando a definição de produto escalar, a superfície esférica de diâmetro $[CD]$ é dada por

$$\overrightarrow{CP}\,.\,\overrightarrow{PD} = 0 \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow (x, y-3, z)\,.\,(x-3, y, z+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + y^2 - 3y + z^2 + 3z = 0 \qquad (6)$$

3. A equação cartesiana de DCE é dada por $3x + 3y + z + d = 0$. (5)

Substituindo as coordenadas do ponto $D(2,1,0)$ na equação anterior,

$$6 + 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -9 \qquad (3)$$

Assim, $3x + 3y + z - 9 = 0$ (2)

Tem-se $E(1,1,z)$.

$$3 + 3 + z - 9 = 0 \Leftrightarrow z = 3 \qquad (4)$$

altura $= 3$ (1)

Pelo Teorema de Pitágoras, lado $= \sqrt{2}$ (3)

Logo,

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \times (\sqrt{2})^2 \times 3 = 2 \qquad (2)$$

4.1 $$-\frac{2}{3} = \frac{1-2n}{2n+3} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow 3 - 6n = -4n - 6 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow -2n = -9 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{9}{2} \notin \mathbb{N} \qquad (2)$$

Logo $-\frac{2}{3}$ não é termo de sucessão. (1)

4.2 $$u_{n+1} - u_n = \frac{1-2(n+1)}{2(n+1)+3} - \frac{1-2n}{2n+3} = -\frac{8}{(2n+3)(2n+5)} < 0 \qquad (6)(4)(4)$$

Logo, a sucessão é decrescente. (2)

4.3 (u_n) decrescente (2)

$$u_1 = -\frac{1}{5} \qquad (2)$$

$$\frac{1-2n}{2n+3} = -1 + \frac{4}{2n+3} \qquad (5)$$

u_n tende para -1 (3)

Logo, $-1 < u_n \leqslant -\frac{1}{5}$. (4)

Nota: As cotações de cada passo encontram-se à direita destes.

Escola Secundária Emídio Navarro

Ano Letivo 2017/2018

4º Teste de avaliação de Matemática A – 11º Ano **Versão 1**

Nome: ______________________________ **Nº:** ______ **Turma:** _______

Classificação: ___________ **O Professor:** ________________ **O Encarregado de Educação:** _________________

Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve na tua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionares para responderes a esse item.

1. Seja θ um número real. Sabe-se que θ é uma solução da equação $\sin x = -\frac{1}{3}$.

Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\sin x = \frac{1}{3}$?

(A) $\pi + \theta$ (B) $\pi - \theta$ (C) $\frac{\pi}{2} - \theta$ (D) $\frac{\pi}{2} + \theta$

2. Os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12.

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$?

(A) -3 (B) -2 (C) 2 (D) 3

3. Seja a um número real.

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta s e o plano β definidos, respetivamente, por $(x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(1, 1, -1), k \in \mathbb{N}$ e $3x + 3y + az = 1$.

Sabe-se que a reta s é paralela ao plano β.

Qual é o valor de a?

(A) -3 (B) 1 (C) 3 (D) 6

4. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

(B) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

(C) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$.

(D) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2.

5. Em certo tipo de telhados, as telhas dispõem-se de modo que cada fila tenha 2 telhas a mais do que a anterior.

Quantas telhas são precisas para uma face do telhado que leva 38 telhas na última carreira de baixo e 4 na primeira de cima?

(A) 304 (B) 340 (C) 378 (D) 418

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

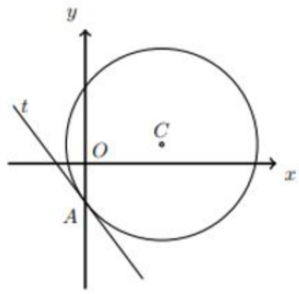
1. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica E, de equação

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$$

Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, o ponto $P(\tan\alpha, \sin\alpha, 2+\cos\alpha)$ pertence à superfície esférica E.

Determina os valores numéricos das coordenadas do ponto P.

2. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. equação $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$.



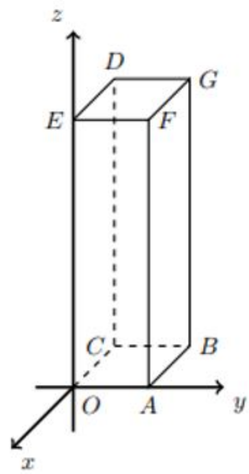
O ponto C é o centro da circunferência.

O ponto $A(0,-2)$ pertence à circunferência.

A reta t é tangente à circunferência no ponto A.

Determina a equação reduzida da reta t.

3. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$ o prisma quadrangular regular $[OABCDEFG]$.



Sabe-se que:

- os pontos C, A e E pertencem aos eixos coordenados Ox, Oy e Oz, respetivamente;
- o ponto A tem coordenadas $(0, 2, 0)$;
- o plano OFB é definido pela equação $3x + 3y - z = 0$.

3.1 Determina uma equação do plano paralelo ao plano OFB que passa no ponto D.

3.2 Determina os valores de k tais que o vetor $(k^2-1, k, 1-k)$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$.

3.3 Mostra que os pontos A, B e D definem um plano e escreve uma equação vetorial desse plano.

3.4 Utilizando a definição de produto escalar, escreve uma condição que defina o plano mediador de $[CF]$.

4. Considera as sucessões (u_n), (v_n) e (w_n) definidas, respetivamente, por:

$$u_n = \frac{3n+1}{n+1} \qquad \begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = v_n + 3 \end{cases} \forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = 5^{2+v_n}$$

4.1 Mostra, recorrendo à definição de limite, que $\lim u_n = 3$.

4.2 Prova que (u_n) é uma progressão aritmética de razão 3 e determina o seu termo geral.

4.3 Calcula $v_{15} + v_{16} + ... + v_{30}$.

4.4 Mostra que (w_n) é uma progressão geométrica crescente.

FIM

Cotações:

Grupo I: 50 pontos (10 pontos cada questão)

Grupo II: 150 pontos

Questão	**1**	**2**	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**4.4**
Cotação	15	15	15	12	15	15	18	12	13	20

Escola Secundária Emídio Navarro

Ano Letivo 2017/2018

4º Teste de avaliação de Matemática A – 11º Ano

Versão 2

Nome: ______________________________ Nº: ______ Turma: _______

Classificação: ___________ O Professor: _______________ O Encarregado de Educação: _________________

Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve na tua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionares para responderes a esse item.

1. Seja θ um número real. Sabe-se que θ é uma solução da equação $\sin x = -\frac{1}{3}$.

Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\sin x = \frac{1}{3}$?

(A) $\frac{\pi}{2} + \theta$ (B) $\frac{\pi}{2} - \theta$ (C) $\pi - \theta$ (D) $\pi + \theta$

2. Os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12.

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{BC}$?

(A) 3 (B) 2 (C) -2 (D) -3

3. Seja a um número real.

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta s e o plano β definidos, respetivamente, por $(x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(1, 1, -1), k \in \mathbb{N}$ e $3x + 3y + az = 1$.

Sabe-se que a reta s é paralela ao plano β.

Qual é o valor de a?

(A) 6 (B) 3 (C) 1 (D) -3

4. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

(B) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$.

(C) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

(D) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2.

5. Em certo tipo de telhados, as telhas dispõem-se de modo que cada fila tenha 2 telhas a mais do que a anterior.

Quantas telhas são precisas para uma face do telhado que leva 38 telhas na última carreira de baixo e 4 na primeira de cima?

(A) 418 (B) 378 (C) 340 (D) 304

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

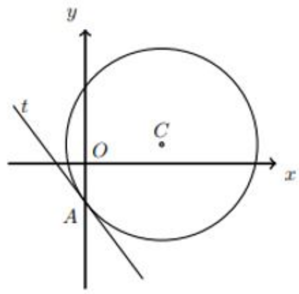
1. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica E, de equação

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$$

Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, o ponto $P(\tan\alpha, \sin\alpha, 2+\cos\alpha)$ pertence à superfície esférica E.

Determina os valores numéricos das coordenadas do ponto P.

2. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. equação $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$.



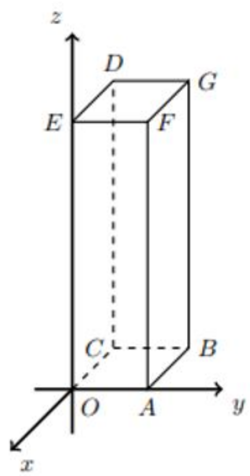
O ponto C é o centro da circunferência.

O ponto $A(0, -2)$ pertence à circunferência.

A reta t é tangente à circunferência no ponto A.

Determina a equação reduzida da reta t.

3. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$ o prisma quadrangular regular $[OABCDEFG]$.



Sabe-se que:

- os pontos C, A e E pertencem aos eixos coordenados Ox, Oy e Oz, respetivamente;
- o ponto A tem coordenadas $(0, 2, 0)$;
- o plano OFB é definido pela equação $3x + 3y - z = 0$.

3.1 Determina uma equação do plano paralelo ao plano OFB que passa no ponto D.

3.2 Determina os valores de k tais que o vetor $(k^2-1, k, 1-k)$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$.

3.3 Mostra que os pontos A, B e D definem um plano e escreve uma equação vetorial desse plano.

3.4 Utilizando a definição de produto escalar, escreve uma condição que defina o plano mediador de $[CF]$.

4. Considera as sucessões (u_n), (v_n) e (w_n) definidas, respetivamente, por:

$$u_n = \frac{3n+1}{n+1} \qquad \begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = v_n + 3 \end{cases} \forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = 5^{2+v_n}$$

4.1 Mostra, recorrendo à definição de limite, que $\lim u_n = 3$.

4.2 Prova que (u_n) é uma progressão aritmética de razão 3 e determina o seu termo geral.

4.3 Calcula $v_{15} + v_{16} + ... + v_{30}$.

4.4 Mostra que (w_n) é uma progressão geométrica crescente.

FIM

Cotações:

Grupo I: 50 pontos (10 pontos cada questão)

Grupo II: 150 pontos

Questão	**1**	**2**	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**4.4**
Cotação	15	15	15	12	15	15	18	12	13	20

Grupo I

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Versão 1	A	B	D	B	C
Versão 2	D	C	A	C	B

1. Se $\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$ então

- $\sin(\pi+\theta) = \dfrac{1}{3}$.
- $\sin(\pi-\theta) = -\dfrac{1}{3}$.
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$.
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$.

Logo, a opção correta é $\pi+\theta$.

2. $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} = 2\times 2\times\cos(120^\circ) = -2$

3. $(1,1,-1)\,.\,(3,3,a) = 0$

$\Leftrightarrow 3+3+-a = 0$

$\Leftrightarrow a = 6$

4. Como $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-n} = 2^{n-1}$ verifica-se que (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

5. Sabe-se que $u_1 = 4$ e a razão $= 2$.

Então $u_n = 4+(n-1)\times 2 = 2n+2$

$38 = 2n+2 \Leftrightarrow n = 18$

Assim pretende-se a soma dos primeiros 18 termos.

$$S = \frac{4+38}{2}\times 18 = 378$$

Grupo II

1. $\tan^2\alpha + \sin^2\alpha + (2+\cos^2\alpha - 2)^2 = 4$ (4)

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2 = 4$ (1)

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha + 1 = 4$ (1)

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha = 3 \quad \wedge \quad \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (2)

$\Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt{3} \quad \wedge \quad \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (2)

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ (2)

$P\left(\sqrt{3}, \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 2+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = P\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (1)(1)(1)

2. Verifica-se que $C(4,1)$. (2)

$\overrightarrow{AC} = C - A$ (1)

$= (4,1) - (0,-2)$

$= (4,3)$ (2)

$m_{AC} = \frac{3}{4}$ (2)

$m_t = -\frac{4}{3}$ (3)

Logo, $t : y = -\frac{4}{3} - 2$ (5)

3.1 $\alpha : 3x + 3y - z + d = 0$ (2)

Tem-se que $D(-2,0,z)$ e $F(0,2,z)$. (2)(2)

Substituindo F na equação de OFB

$3\times 0 + 3\times 2 - z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 6$ (2)

Assim, $D(-2,0,6)$ e $F(0,2,6)$. (2)

Substituindo o ponto D na equação de α

$3\times(-2) + 3\times 0 - 6 + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = 12$ (3)

Logo, $\alpha : 3x + 3y - z + 12 = 0$ (2)

3.2 $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,2,0) - (0,2,0) = (-2,0,0)$ (2)(1)

$(k^2-1, k, 1-k) \,.\, (-2,0,0) = 0$ (5)

$\Leftrightarrow -2k^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$ (2)(1)(1)

3.3 A, B e C são três pontos não colineares. Logo definem um plano. (2)

Sabe-se que $A(0,2,0)$, $B(-2,2,0)$ e $C(-2,0,6)$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,0,0)$ (1)

$\overrightarrow{AD} = D - A = (-2,-2,6)$ (1)

Logo,

$ABD : (x,y,z) = (0,2,0) + a(-2,0,0) + b(-2,-2,6),\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$ (3)(3)(3)(1)(1)

3.4 $C(-2,0,0)$ (1)

$F(0,2,6)$ (2)

$M\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = M(-1,1,3)$ (3)

$\overrightarrow{CF}(2,2,6)$ (1)

$\overrightarrow{CF} \, . \, \overrightarrow{MP} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2,2,6) \, . \, (x+1, y-1, z-3) = 0$ (3)(1)

$\Leftrightarrow \quad 2x + 2 + 2y - 2 + 6z - 18 = 0$ (3)

$\Leftrightarrow \quad x + y + 3z - 9 = 0$ (1)

4.1 $\forall \delta > 0 \ \ \exists p \in \mathbb{N} : n \geqslant p \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$ (3)

$\left|\frac{3n+1}{n+1} - 3\right| < \delta$ (2)

$\Leftrightarrow \left|\frac{3n+1-3n-3}{n+1}\right| < \delta$ (2)

$\Leftrightarrow \left|-\frac{2}{n+1}\right| < \delta$ (1)

$\Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \delta$ (2)

$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2} > \frac{1}{\delta}$ (2)

$\Leftrightarrow n + 1 > \frac{2}{\delta}$ (1)

$\Leftrightarrow n > \frac{2}{\delta} - 1$ (1)

$\Leftrightarrow n > \frac{2-\delta}{\delta}$ (1)

Considera-se $p > \frac{2-\delta}{\delta} \wedge p \in \mathbb{N}$. (3)

4.2 $v_{n+1} = v_n + 3 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = 3 = \text{razão}$ (5)

$v_1 = 2$

$v_n = 2 + (n-1) \times 3$ (5)

$= 2 + 3n - 3$

Logo, $v_n = 3n - 1$ (2)

4.3 $v_{15} = 3 \times 15 - 1 = 44$ (2)

$v_{30} = 3 \times 30 - 1 = 89$ (2)

$S = \dfrac{v_{15} + v_{130}}{2} \times (30 - 15 + 1)$ (6)

$= \dfrac{44 + 89}{2} \times 16$ (2)

$= 1064$ (1)

4.4 $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{5^{2+v_{n+1}}}{5^{2+v_n}}$ (2)

$= \dfrac{5^{2+3(n+1)-1}}{5^{2+3n-1}}$ (2)

$= \dfrac{5^{2+3n+3-1}}{5^{3n+1}}$ (1)

$= \dfrac{5^{3n+4}}{5^{3n+1}}$ (1)

$= 5^3 \in \mathbb{R}$ (2)

Assim, a sucessão (w_n) é uma progressão geométrica de razão 5^3. (2)

$w_{n+1} - w_n = 5^{3n+4} - 5^{3n+1}$ (2)

$= 5^{3n}\left(5^4 - 5\right)$ (4)

$= 5^{3n} \times 620 > 0$ (2)

Logo, (w_n) é monótona crescente. (2)

Nota: As cotações de cada passo encontram-se à direita destes.

Escola Secundária Emídio Navarro

Ano Letivo 2017/2018

5º Teste de avaliação de Matemática A – 11º Ano- Turma B

Versão 1

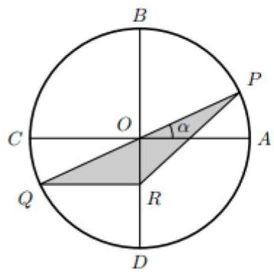
Nome: ______________________________ **Nº:** ______ **Turma:** _______

Classificação: ___________ **O Professor:** ________________ **O Encarregado de Educação:** _________________

Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve na tua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionares para responderes a esse item.

1. Na figura ao lado, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1.



Sabe-se que:

- Os diâmetros $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares;
- O ponto P pertence ao arco AB;
- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferância;
- O ponto R pertence a $[OD]$ e é tal que $[QR]$ é paralelo a $[AC]$.

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

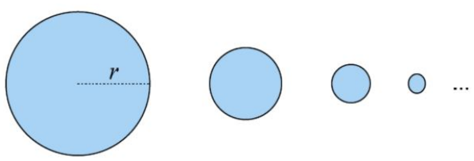
Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo $[PQR]$, representado a sombreado, em função de α?

(A) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{4}$ (B) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}$ (C) $2\sin\alpha\cos\alpha$ (D) $\sin\alpha\cos\alpha$

2. Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão monótona e limitada?

(A) $(-1)^n$ (B) $(-1)^n.n$ (C) $-\dfrac{1}{n}$ (D) $1+n^2$

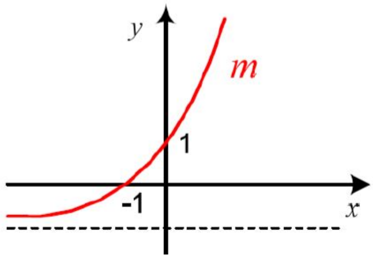
3. Considera a seguinte sequência de círculos cujos raios medem metade do comprimento do raio do círculo anterior.



O termo geral da sucessão das áreas dos círculos, em função do raio r, é:

(A) $\pi \times r^2 \times 2^{-2n+2}$ (B) $\pi \times r^2 \times 4^{n-1}$ (C) $\pi \times \left(\dfrac{r}{2}\right)^{n-1}$ (D) $\pi \times \left(\dfrac{r}{4}\right)^{n-1}$

4. Considera a função m representada parcialmente na figura e a função j definida por $j(x) = \sqrt{x+1}$.

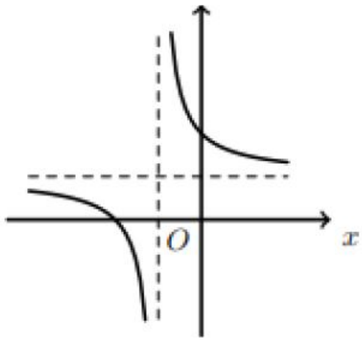


O domínio da função $\frac{j}{m}$ é dado por:

(A) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (B) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

(C) $\mathbb{R} \setminus [-1, +\infty[$ (D) $]-1, +\infty[$

5. Para um certo valor de a e para um certo valor de b, a expressão $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$, define a função cujo gráfico está parcialmente representado na figura ao lado.



Qual das afirmações é verdadeira?

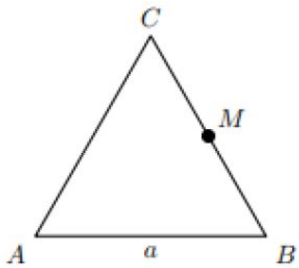
(A) $a > 0$ e $b > 0$ (B) $a > 0$ e $b < 0$

(C) $a < 0$ e $b > 0$ (D) $a > 0$ e $b < 0$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

1. Na figura ao lado está representado um triângulo equilátero $[ABC]$.



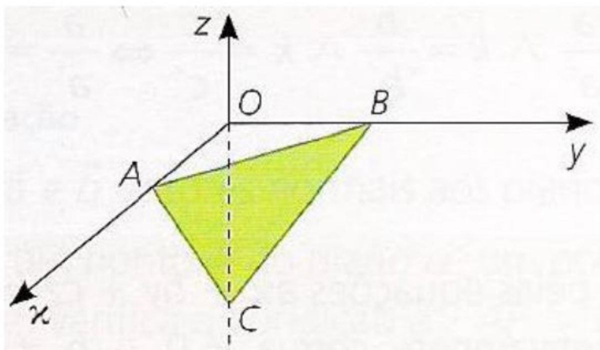
Seja a o comprimento de cada um dos lados do triângulo.

Seja M o ponto médio do lado $[BC]$.

Mostra que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \frac{3a^2}{4}$

2. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um triângulo $[ABC]$.

Relativamente ao triângulo $[ABC]$ sa



• O triângulo $[ABC]$ está contido no plano de equação $20x + 15y - 12z = 60$;

• O ponto A pertence ao eixo Ox;

• O ponto B pertence ao eixo Oy;

• O ponto C pertence ao eixo Oz.

2.1 Determina o perímetro do triângulo $[ABC]$.

2.2 Determina a equação cartesiana de um plano α paralelo a ABC e que contém o ponto $P(0, 3, -2)$.

2.3 Define por uma equação vetorial a reta que passa no ponto A e é perpendicular ao plano ABC.

3. Considera as sucessões (u_n) e (v_n) definidas, respetivamente, por $u_n = \dfrac{1}{3n+2}$ e $v_n = n^2 + 2n$.

3.1 Mostra, recorrendo à definição de limite, que $\lim u_n = 0$.

3.2 Determina:

3.2.1 $\lim\left((u_n)^2 \times v_n\right)$

3.2.2 $\lim\left(\sqrt{u_n} - n\right)$

4. Considera a função real de variável real f definida por $f(x) = \sqrt{3x+1} - 2$.

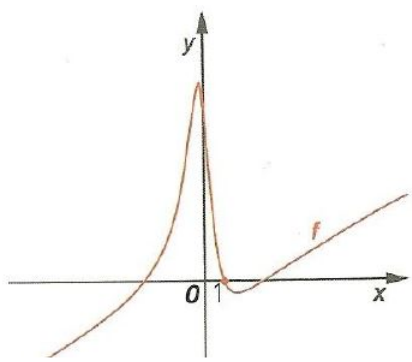
Determina o conjunto-solução da equação $f(x) = 1 - x$.

5. Na figura, em referencial ortogonal Oxy, está representada a função f de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{2x^2 + 1}$$

Um dos pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox tem abcissa 1.

Determina os zeros de f.



6. Considera a função f, real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{1+4x^2}}{2x^2} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Determina o valor de k de modo que a função f seja contínua em $x = 0$.

FIM

Cotações:

Grupo I: 50 pontos (10 pontos cada questão)

Grupo II: 150 pontos

Questão	**1**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**3.1**	**3.2.1**	**3.2.2**	**4**	**5**	**6**
Cotação	17	15	12	15	12	14	14	17	17	17

Escola Secundária Emídio Navarro

Ano Letivo 2017/2018

5º Teste de avaliação de Matemática A – 11º Ano- Turma B

Versão 2

Nome: ____ Nº: ______ Turma: _______

Classificação: ___________ O Professor: ________________ O Encarregado de Educação: _________________

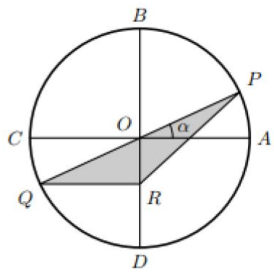
Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.

- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.

- Escreve na tua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionares para responderes a esse item.

1. Na figura ao lado, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1.



Sabe-se que:

- Os diâmetros $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares;
- O ponto P pertence ao arco AB;
- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferância;
- O ponto R pertence a $[OD]$ e é tal que $[QR]$ é paralelo a $[AC]$.

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

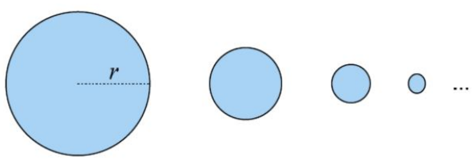
Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo $[PQR]$, representado a sombreado, em função de α?

(A) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{4}$ (B) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}$ (C) $2\sin\alpha\cos\alpha$ (D) $\sin\alpha\cos\alpha$

2. Qual das expressões seguintes é termo geral de uma sucessão monótona e limitada?

(A) $(-1)^n$ (B) $(-1)^n.n$ (C) $-\frac{1}{n}$ (D) $1+n^2$

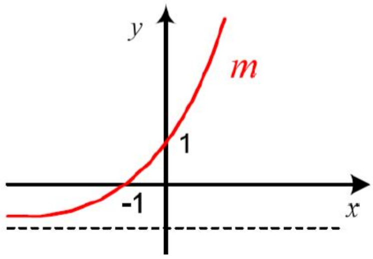
3. Considera a seguinte sequência de círculos cujos raios medem metade do comprimento do raio do círculo anterior.



O termo geral da sucessão das áreas dos círculos, em função do raio r, é:

(A) $\pi \times r^2 \times 4^{n-1}$ (B) $\pi \times r^2 \times 2^{-2n+2}$ (C) $\pi \times \left(\frac{r}{4}\right)^{n-1}$ (D) $\pi \times \left(\frac{r}{2}\right)^{n-1}$

4. Considera a função m representada parcialmente na figura e a função j definida por $j(x) = \sqrt{x+1}$.

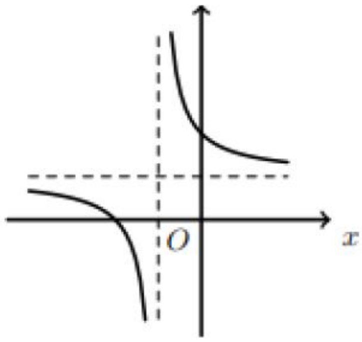


O domínio da função $\frac{j}{m}$ é dado por:

(A) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (B) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(C) $]-1, +\infty[$ (D) $\mathbb{R} \setminus [-1, +\infty[$

5. Para um certo valor de a e para um certo valor de b, a expressão $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$, define a função cujo gráfico está parcialmente representado na figura ao lado.



Qual das afirmações é verdadeira?

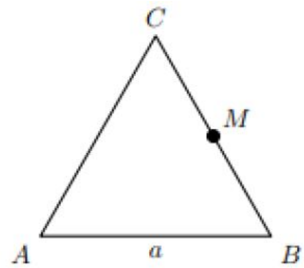
(A) $a < 0$ e $b < 0$ (B) $a < 0$ e $b > 0$

(C) $a > 0$ e $b < 0$ (D) $a > 0$ e $b > 0$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

1. Na figura ao lado está representado um triângulo equilátero $[ABC]$.



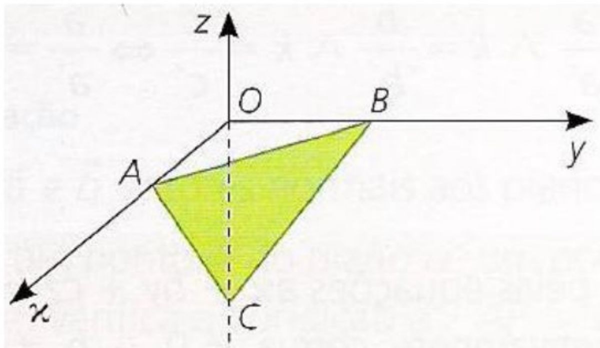
Seja a o comprimento de cada um dos lados do triângulo.

Seja M o ponto médio do lado $[BC]$.

Mostra que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \frac{3a^2}{4}$

2. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um triângulo $[ABC]$.

Relativamente ao triângulo $[ABC]$ sa



• O triângulo $[ABC]$ está contido no plano de equação $20x + 15y - 12z = 60$;

• O ponto A pertence ao eixo Ox;

• O ponto B pertence ao eixo Oy;

• O ponto C pertence ao eixo Oz.

2.1 Determina o perímetro do triângulo $[ABC]$.

2.2 Determina a equação cartesiana de um plano α paralelo a ABC e que contém o ponto $P(0, 3, -2)$.

2.3 Define por uma equação vetorial a reta que passa no ponto A e é perpendicular ao plano ABC.

3. Considera as sucessões (u_n) e (v_n) definidas, respetivamente, por $u_n = \dfrac{1}{3n+2}$ e $v_n = n^2 + 2n$.

3.1 Mostra, recorrendo à definição de limite, que $\lim u_n = 0$.

3.2 Determina:

3.2.1 $\lim \left((u_n)^2 \times v_n\right)$

3.2.2 $\lim \left(\sqrt{u_n} - n\right)$

4. Considera a função real de variável real f definida por $f(x) = \sqrt{3x+1} - 2$.

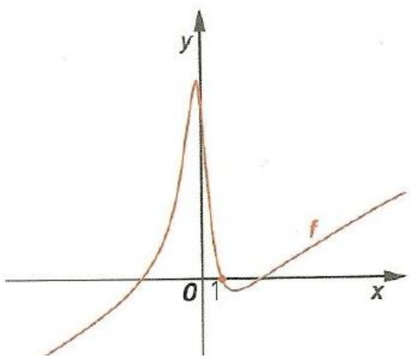
Determina o conjunto-solução da equação $f(x) = 1 - x$.

5. Na figura, em referencial ortogonal Oxy, está representada a função f de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{2x^2 + 1}$$

Um dos pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox tem abcissa 1.

Determina os zeros de f.



6. Considera a função f, real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4x^2}}{2x^2} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Determina o valor de k de modo que a função f seja contínua em $x = 0$.

FIM

Cotações:

Grupo I: 50 pontos (10 pontos cada questão)

Grupo II: 150 pontos

Questão	**1**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**3.1**	**3.2.1**	**3.2.2**	**4**	**5**	**6**
Cotação	17	15	12	15	12	14	14	17	17	17

Grupo I

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Versão 1	D	C	A	D	B
Versão 2	D	C	B	C	C

1. $\text{Área} = \dfrac{\cos\alpha \times 2\sin\alpha}{2} = \sin\alpha\cos\alpha$

2. A sucessão $u_n = (-1)^n$ é limitada mas não é monótona.

A sucessão $u_n = (-1)^n.n$ não é limitada nem monótona.

A sucessão $u_n = 1 + n^2$ é monótona mas não é limitada.

A sucessão $u_n = -\dfrac{1}{n}$ é monótona crescente e é limitada entre $[-1, 0[$.

3. Seja q a razão da progressão.

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} = \pi \times r^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \pi \times r^2 \times 4^{-n+1} = \pi \times r^2 \times 2^{-2n+2}$$

4. $D_j = [-1, +\infty[$

$m(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Logo, $D_{\frac{j}{m}} =]-1, +\infty[$

5. Por observação da figura, verifica-se que $a > 0$ e $b < 0$.

Grupo II

1.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \overline{AM}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{AM}^2 = \frac{3a^2}{4} \wedge \overline{AM} > 0 \Leftrightarrow \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2} \qquad (5)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = a \times \frac{\sqrt{3}\,a}{2} \times \cos 30° \qquad (5)$$

$$= a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2}{4} \qquad (3)(2)$$

2.1 $A(x, 0, 0)$

Substituindo na equação

$$20x + 0 - 0 = 60 \Leftrightarrow x = 3$$

$$A(3, 0, 0) \qquad (1)$$

$$B(0, y, 0)$$

Substituindo na equação

$$0 + 15y - 0 = 60 \Leftrightarrow y = 4$$

$$B(0, 4, 0) \qquad (1)$$

$$C(0, 0, z)$$

Substituindo na equação

$$0 + 0 - 12z = 60 \Leftrightarrow z = -5$$

$$C(0, 0, -5) \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (0, 4, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 4, 0) \qquad (1)$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} = 5 \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, 0, -5) - (3, 0, 0) = (-3, 0, -5) \qquad (1)$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{34} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{CB} = (0, 4, 0) - (0, 0, -5) = (0, 4, 5) \qquad (1)$$

$$\left\|\overrightarrow{CB}\right\| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \qquad (2)$$

Perímetro $= \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{CB} = 5 + \sqrt{34} + \sqrt{41}$ (3)

2.2 A equação cartesiana de um plano α paralelo a ABC tem a equação

$$20x + 15y - 12z + b = 0 \qquad (5)$$

Substituindo no ponto $P(0, 3, -2)$

$$20 \times 0 + 15 \times 3 - 12 \times (-2) + b = 0 \Leftrightarrow b = -69 \qquad (5)$$

Logo, a equação cartesiana de um plano α é $20x + 15y - 12z - 69 = 0$. (2)

2.3 O vetor diretor da reta que passa no ponto A e é perpendicular ao plano ABC é

$$\overrightarrow{n}(20, 15, -12) \qquad (10)$$

Logo, a equação vetorial da reta que passa em A e é perpendicular ao plano ABC é

$$(x, y, z) = (3, 0, 0) + k(20, 15, -12), k \in \mathbb{R} \qquad (5)$$

3.1 Para $\delta > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant p : |u_n - a| < \delta$ (2)

$$\left|\frac{1}{3n+2} - 0\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{1}{3n+2}\right| < \delta \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3n+2} < \delta \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 3n + 2 > \frac{1}{\delta} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{3\delta} - \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1-2\delta}{3\delta} \quad (2)$$

Basta considerar $p > \dfrac{1-2\delta}{3\delta}$ (2)

3.2.1

$$\lim\left((u_n)^2 \times v_n\right) = \lim \frac{n^2+2n}{(3n+2)^2} \quad (4)$$

$$= \lim \frac{n^2+2n}{9n^2+12n+4} = \frac{\infty}{\infty} \quad (3)$$

$$= \lim \frac{n^2}{9n^2} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{9} \quad (2)$$

3.2.2

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right) = \infty - \infty$$

$$= \lim \frac{(\sqrt{n^2+2n} - n)(\sqrt{n^2+2n} + n)}{\sqrt{n^2+2n} + n} \quad (4)$$

$$= \lim \frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n} + n} \quad (2)$$

$$= \lim \frac{2n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)} + n} \quad (2)$$

$$= \lim \frac{2n}{n\sqrt{\left(1+\frac{2}{n}\right)} + n} \quad (2)$$

$$= \lim \frac{2}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{n}\right)} + 1} \quad (2)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1}+1} = 1 \quad (2)$$

4.

$$f(x) = 1 - x \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - 2 = 1 - x \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 3 - x \quad (2)$$

$$\Rightarrow 3x + 1 = (3-x)^2 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 3x + 1 = 9 - 6x + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 1 \times 8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x = 8 \vee x = 1 \qquad (3)$$

Para $x = 8$: $\sqrt{3 \times 8 - 1} = 3 - 8 \Leftrightarrow \sqrt{24 - 1} = -5 \Leftrightarrow 5 = -5$ Prop. Falsa (3)

Para $x = 1$: $\sqrt{3 \times 1 - 1} = 3 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{3 - 1} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$ Prop. Verdadeira (3)

Logo, C.S.$= \{1\}$ (1)

5. $$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{2x^2 + 1} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0 \wedge 2x^2 + 1 \neq 0 \qquad (5)$$

Como $2x^2 + 1 \neq 0$ é uma condição universal tem-se

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0 \qquad (1)$$

	1	-1	-9	9
1		1	0	-9
	1	0	-9	$\boxed{0}$

(4)

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 9) = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3)(x + 3) = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3 \vee x = -3 \qquad (3)$$

Logo, os zeros de f são $\{-3, 1, 3\}$. (1)

6. $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 + 4x^2}}{2x^2} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \sqrt{1 + 4x^2})(1 + \sqrt{1 + 4x^2})}{2x^2(1 + \sqrt{1 + 4x^2})} \qquad (5)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - 1 - 4x^2}{2x^2(1 + \sqrt{1 + 4x^2})} \qquad (5)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-4x^2}{2x^2(1 + \sqrt{1 + 4x^2})} \qquad (2)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2}{1 + \sqrt{1 + 4x^2}} \qquad (1)$$

$$= \frac{-2}{1 + \sqrt{1}} \qquad (1)$$

$$= -1$$

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow k = -1$$

Assim, $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = -1$

Logo, f é contínua para $x = 0$ quando $k = -1$ (2)

Escola Secundária Emídio Navarro

Ano Letivo 2017/2018

6 º Teste de avaliação de Matemática A – 11º Ano- Turma B

Versão 1

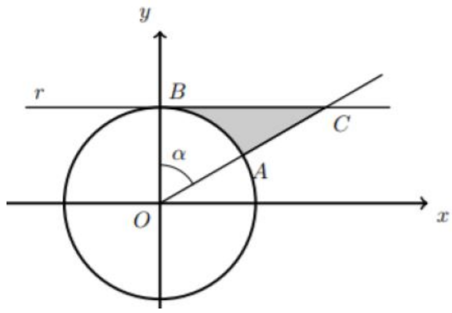
Nome: ____ **Nº:** ______ **Turma:** _______

Classificação: __________ **O Professor:** _______________ **O Encarregado de Educação:** _______________

Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve na tua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionares para responderes a esse item.

1. Na figura ao lado estão representadas, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro O e a reta r.



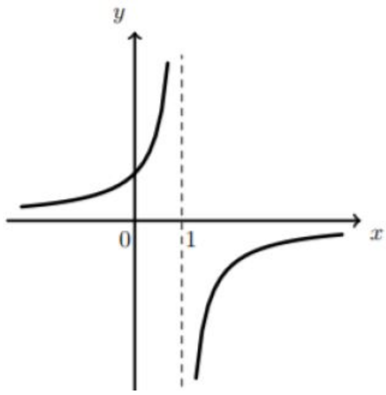
Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto B tem coordenadas $(1,0)$;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto B;
- o ponto C é o ponto de interseção da reta r com a semirreta $\dot{O}A$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área da região a sombreado?

(A) $\frac{\sin\alpha - \alpha}{2}$ (B) $\frac{\tan\alpha - \alpha}{2}$ (C) $\frac{\tan\alpha}{2}$ (D) $\frac{\alpha}{2}$

2. Na figura ao lado está desenhada parte da representação gráfica de uma função f, cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.



A reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical do gráfico de f.

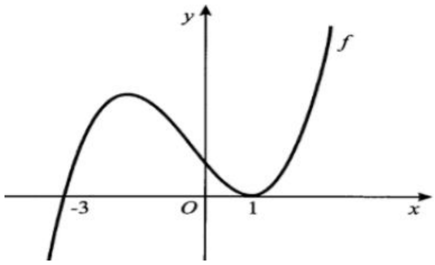
Considera a sucessão de termo geral $x_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Seja $u_n = f(x_n)$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim u_n = -\infty$ (B) $\lim u_n = +\infty$ (C) $\lim u_n = 1$ (D) Não existe $\lim u_n$

3. Na figura está representado parte do gráfico de uma função f, contínua em $\mathbb{R}$.



A função f tem apenas dois zeros: -3 e 1.

Seja g a função definida por $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

Qual dos seguintes conjuntos pode ser o domínio da função g?

(A) $]-\infty, 1]$ (B) $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$ (C) $]-\infty, -3[$ (D) $[-3, +\infty[$

4. Sejam f e g duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- $f(1) = f'(1) = 1$
- $g(x) = (2x-1) \times f(x)$, para todo o valor real de x

Qual é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa 1?

(A) $y = 3x - 2$ (B) $y = 3x + 4$ (C) $y = 2x - 1$ (D) $y = -3x + 2$

5. A soma de todos os números naturais ímpares de 3 algarismos é:

(A) 220 000 (B) 247 500 (C) 450 000 (D) 495 000

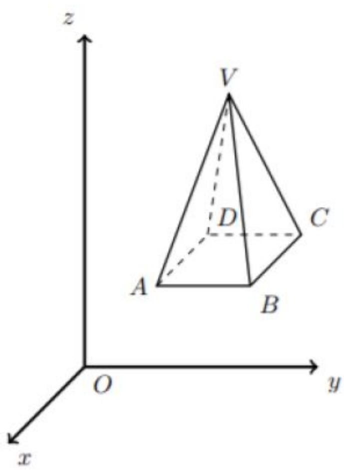
Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

6. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $ABCDV$.

Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ da pirâmide é paralela ao plano xOy;
- o ponto A tem coordenadas $(-1, 1, 1)$;
- o ponto C tem coordenadas $(-3, 3, 1)$;
- o plano BCV é definido pela equação $3y + z - 10 = 0$.



Determina as coordenadas do ponto V.

7. Estuda, quanto à monotonia, a sucessão u_n de termo geral $u_n = \dfrac{1-2n}{n+3}$.

8. Sejam f e g funções reais de variável real tais que:

- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$
- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 3$

Seja h a função definida por $h(x) = \left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$.

Mostra que a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de h.

9. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1} \text{ se } x > 1 \\ 2 \text{ se } x = 1 \\ \frac{x^2}{x-1} \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

Resolve os itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, sem utilizar a calculadora.

9.1 Resolve, para valores de x inferiores a 1, a condição $g(x) \leqslant 4$.

Apresenta a tua resposta usando a notação de intervalos de números reais.

9.2 Estuda a função g quanto à continuidade no ponto de abcissa $x = 1$.

9.3 O gráfico de g admite três assíntotas que se intersetam nos pontos A, B e C.

Determina as coordenadas desses pontos.

10. Considera:

- a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = 3 + \dfrac{6}{x}$;
- a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 3$.

Resolve os itens seguintes recorrendo exclusivamente a métodos analíticos.

10.1 Calcula, pela definição, a derivada da função g no ponto de abcissa 0.

10.2 Carateriza f', função derivada de f.

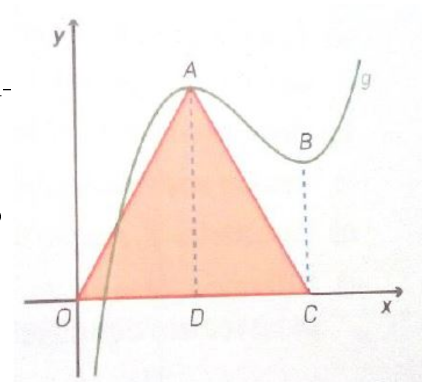
10.3 Seja P o ponto do gráfico da função f que tem abcissa igual a 2.

Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto P.

Determina a equação reduzida da reta r.

10.4 Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g.

Os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g, sendo as suas ordenadas, respetivamente, o máximo relativo e o mínimo relativo desta função.



Os pontos C e D pertencem ao eixo Ox. A abcissa do ponto C é igual à do ponto B e a abcissa do ponto D é igual à do ponto A.

Determina a área do triângulo $[OAC]$.

FIM

Cotações:

Grupo I: 50 pontos (10 pontos cada questão)

Grupo II: 150 pontos

Questão	**6**	**7**	**8**	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**10.1**	**10.2**	**10.3**	**10.4**
Cotação	15	10	15	13	18	20	14	12	15	18

Escola Secundária Emídio Navarro

Ano Letivo 2017/2018

6 º Teste de avaliação de Matemática A – 11º Ano- Turma B

Versão 2

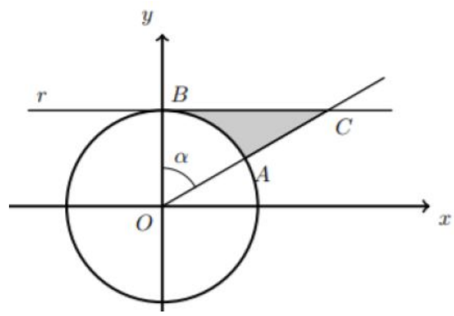
Nome: ______________________________ **Nº:** ______ **Turma:** _______

Classificação: __________ **O Professor:** ______________ **O Encarregado de Educação:** ______________

Grupo I

- Os seis itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve na tua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionares para responderes a esse item.

1. Na figura ao lado estão representadas, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro O e a reta r.



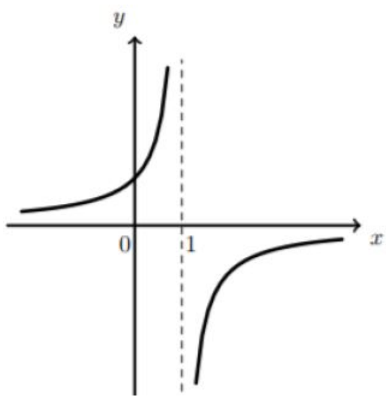
Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto B tem coordenadas $(1,0)$;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto B;
- o ponto C é o ponto de interseção da reta r com a semirreta $\dot{O}A$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área da região a sombreado?

(A) $\frac{\tan\alpha - \alpha}{2}$ (B) $\frac{\sin\alpha - \alpha}{2}$ (C) $\frac{\alpha}{2}$ (D) $\frac{\tan\alpha}{2}$

2. Na figura ao lado está desenhada parte da representação gráfica de uma função f, cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.



A reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical do gráfico de f.

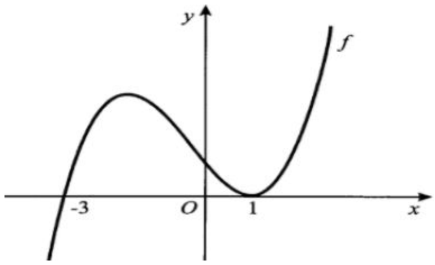
Considera a sucessão de termo geral $x_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Seja $u_n = f(x_n)$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim u_n = +\infty$ (B) $\lim u_n = -\infty$ (C) Não existe $\lim u_n$ (D) $\lim u_n = 1$

3. Na figura está representado parte do gráfico de uma função f, contínua em $\mathbb{R}$.



A função f tem apenas dois zeros: -3 e 1.

Seja g a função definida por $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

Qual dos seguintes conjuntos pode ser o domínio da função g?

(A) $]-\infty, -3[$ (B) $[-3, +\infty[$ (C) $]-\infty, 1]$ (D) $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$

4. Sejam f e g duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- $f(1) = f'(1) = 1$
- $g(x) = (2x - 1) \times f(x)$, para todo o valor real de x

Qual é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa 1?

(A) $y = 2x - 1$ (B) $y = 3x - 2$ (C) $y = -3x + 2$ (D) $y = 3x + 4$

5. A soma de todos os números naturais ímpares de 3 algarismos é:

(A) 495 000 (B) 450 000 (C) 247 500 (D) 220 000

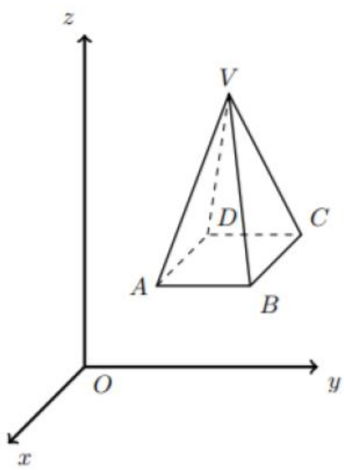
Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiveres de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

6. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $ABCDV$.

Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ da pirâmide é paralela ao plano xOy;
- o ponto A tem coordenadas $(-1, 1, 1)$;
- o ponto C tem coordenadas $(-3, 3, 1)$;
- o plano BCV é definido pela equação $3y + z - 10 = 0$.



Determina as coordenadas do ponto V.

7. Estuda, quanto à monotonia, a sucessão u_n de termo geral $u_n = \dfrac{1-2n}{n+3}$.

8. Sejam f e g funções reais de variável real tais que:

- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$
- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 3$

Seja h a função definida por $h(x) = \left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$.

Mostra que a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de h.

9. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1} \text{ se } x > 1 \\ 2 \text{ se } x = 1 \\ \frac{x^2}{x-1} \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

Resolve os itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, sem utilizar a calculadora.

9.1 Resolve, para valores de x inferiores a 1, a condição $g(x) \leqslant 4$.

Apresenta a tua resposta usando a notação de intervalos de números reais.

9.2 Estuda a função g quanto à continuidade no ponto de abcissa $x = 1$.

9.3 O gráfico de g admite três assíntotas que se intersetam nos pontos A, B e C.

Determina as coordenadas desses pontos.

10. Considera:

- a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = 3 + \dfrac{6}{x}$;
- a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 3$.

Resolve os itens seguintes recorrendo exclusivamente a métodos analíticos.

10.1 Calcula, pela definição, a derivada da função g no ponto de abcissa 0.

10.2 Carateriza f', função derivada de f.

10.3 Seja P o ponto do gráfico da função f que tem abcissa igual a 2.

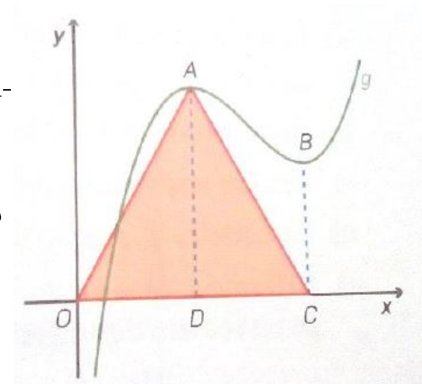
Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto P.

Determina a equação reduzida da reta r.

10.4 Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g.

Os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g, sendo as suas ordenadas, respetivamente, o máximo relativo e o mínimo relativo desta função.

Os pontos C e D pertencem ao eixo Ox. A abcissa do ponto C é igual à do ponto B e a abcissa do ponto D é igual à do ponto A.



Determina a área do triângulo $[OAC]$.

FIM

Cotações:

Grupo I: 50 pontos (10 pontos cada questão)

Grupo II: 150 pontos

Questão	**6**	**7**	**8**	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**10.1**	**10.2**	**10.3**	**10.4**
Cotação	15	10	15	13	18	20	14	12	15	18

Grupo I

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Versão 1	B	A	D	A	B
Versão 2	A	B	B	B	C

1. $A_{\text{ sombreada}} = A_{\text{ triângulo}} + A_{\text{ setor circular}}$

$$= \frac{1 \times \tan\alpha}{2} - \frac{\alpha \times 1^2}{2}$$

$$= \frac{\tan\alpha - \alpha}{2}$$

2. $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0^+$

Logo, por observação do gráfico, verifica-se que $\lim u_n = \lim f(x_n) = -\infty$.

3. $D_g = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geqslant 0\}$

$= [-3, +\infty[$

4. $g'(x) = (2x-1)' \times f(x) + f'(x) \times (2x-1)$

$= 2f(x) + f'(x)(2x-1)$

$g'(1) = 2f(1) + f'(1)(2 \times 1 - 1) = 2 + 1 = 3$

Assim, a equação reduzida da reta tangente é $y = 3x + b$.

Substituindo no ponto $(1,1)$

$1 = 3 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -2$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa 1 é $y = 3x-2$.

5. Soma $= \frac{101 + 999}{2} \times 450$

$= 247\,500$

Grupo II

6. $M_{[AC]} = \left(\frac{-1-3}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (-2, 2, 1)$ (3)

Assim, $V(-2, 2, z)$. (4)

Substituindo em BCV tem-se:

$3 \times 2 + z - 10 = 0 \Leftrightarrow z = 4$ (6)

Logo, $V(-2, 2, 4)$. (2)

7.
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1-2(n+1)}{n+1+3} - \frac{1-2n}{n+3} \quad (2)$$
$$= \frac{-n-2n^2-3-6n-n+2n^2-4+8n}{(n+3)(n+4)} \quad (3)$$
$$= \frac{-7}{(n+3)(n+4)} < 0 \quad (2)$$

Logo, (u_n) é monótona decrescente. (3)

8.
$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to 1} g(x)}{\lim_{x \to 1} f(x)},\ f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (4)(3)(2)$$
$$= \frac{3}{0^+} = +\infty \quad (3)(1)$$

Logo, $x = 1$ é assíntta vertical ao gráfico de h. (2)

9.1
$$\frac{x^2}{x-1} \leqslant 4 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x-1} \leqslant 0 \quad (1)(2)(2)$$

	$-\infty$	1
$(x-2)^2$	$+$	
$x-1$	$-$	
$Q(x)$	$-$	

(5)

Logo, C.S. $=]-\infty, 1[$ (3)

9.2
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1} = -\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(x+1)} = -\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}$$
$$= -\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+1)} = -\frac{1}{4} \quad (8)$$
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad (4)$$

$f(x) = 2$

Logo, g não é continua em $x = 1$. (6)

9.3 Dada a alínea anterior, $x = 1$ é uma assíntota vertical unilateral porque

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -\infty$. (3)

Para $x \to +\infty$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \sqrt{x}}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{x(x^2 - 1)(1 + \sqrt{x})}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x}{x(x-1)(x+1)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-(x-1)}{x(x-1)(x+1)(1 + \sqrt{x})}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x(x+1)(1 + \sqrt{x})} = 0 \qquad (4)$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{(\sqrt{x} + 1)(x + 1)} = 0 \qquad (2)$$

Assim, $y = 0$ é assíntota horizontal. (1)

Para $x \to -\infty$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \qquad (2)$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{x - 1} - x \right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x - 1} = 1 \qquad (2)$$

Assim, $y = x + 1$ é assíntota oblíqua. (1)

Seja A a interseção das assíntotas $x = 1$ e $y = 0$. Então $A(1, 0)$. (1)

Seja B a interseção das assíntotas $x = 1$ e $y = x + 1$. Então $B(1, 2)$. (2)

Seja C a interseção das assíntotas $y = x + 1$ e $y = 0$. Então $C(-1, 0)$. (2)

10.1
$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \qquad (2)$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 3 + 3}{x} \qquad (3)$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(\frac{1}{3}x^2 - 3x + 8\right)}{x} \qquad (2)$$
$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3}x^2 - 3x + 8 \right) \qquad (4)$$
$$= 8 \qquad (3)$$

10.2 $f'(x) = \left(3 + \frac{6}{x}\right)' = -\frac{6}{x^2}$ (5)

$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (5)

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow -\frac{6}{x^2} \end{aligned}$$ (2)

10.3 $r : y = mx + b$

$m = f'(2) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$ (3)(2)

Assim, a equação da reta é $y = -\frac{3}{2}x + b$

Substituindo pelo ponto $(2, f(2)) = (2, 6)$ (3)

$6 = -\frac{3}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 9$ (2)(2)

Logo, $r : y = -\frac{3}{2}x + 9$ (3)

10.4 $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 3\right)' = 0$ (5)

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = 4$ (2)

$b = 4$ (2)

$a = g(2)$ (3)

$= \frac{1}{3} \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 8 \times 2 - 3 = \frac{11}{3}$ (1)

$\mathrm{A} = \frac{4 \times \frac{11}{3}}{2} = \frac{22}{3}$ (5)

Anexo C

Planificações de Aulas

Escola Secundária de Emídio Navarro

Planificação de Aula

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	1º Período
Disciplina	Matemática A	**Turma**	11ºB
Data	24/10/2017	**Aulas Nº**	35 e 36

Sumário

Fórmula Fundamental da Trigonometria.
Relações entre senos e cossenos de alguns ângulos.
Resolução de exercícios.

Domínio

TRI 11 - Trigonometria e funções trigonométricas

Subdomínio

Orientação de ângulos num plano e rotações

Objetivos Gerais

Definir funções trigonométricas e deduzir propriedades

Metas

TRI 11-7.7

Provar que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, reconhecendo que esta igualdade generaliza a fórmula fundamental da Trigonometria, e referi-la igualmente por essa designação.

TRI 11-7.8

Justificar que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(x \pm \pi) = -\cos x$, $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$, $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x$ e $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x$.

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.
Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.
Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.
Utilização de materiais e recursos tecnológicos como a calculadora gráfica.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Apresentação PowerPoint
- Quadro e canetas
- Projetor
- Calculadora Gráfica

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Escola Secundária de Emídio Navarro

Planificação de Aula

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	1º Período
Disciplina	Matemática	**Turma**	9ºA
Data	31/10/2017	**Aulas Nº**	30

Sumário

Organização e tratamento de dados: revisão.
Dados agrupados em classes.
Resolução de exercícios.

Domínio

OTD 9 - Organização e Tratamento de Dados

Subdomínio

Histogramas

Objetivos Gerais

Organizar e representar dados em histogramas

Metas

OTD 9-1.1

Estender a noção de variável estatística quantitativa ao caso em que cada classe fica determinada por um intervalo de números, fechado à esquerda e aberto à direita, sendo esses intervalos disjuntos dois a dois e de união igual a um intervalo (e estender também ao caso em que se interseta cada um desses intervalos com um conjunto finito pré-determinado de números), designando também cada intervalo por «classe».

OTD 9-1.2

Identificar uma variável estatística quantitativa como «discreta» quando cada classe fica determinada por um número ou um conjunto finito de números e como «contínua» quando se associa a cada classe um intervalo.

OTD 9-1.3

Reagrupar as unidades de uma população em classes com base num conjunto de dados numéricos de modo que as classes tenham uma mesma amplitude pré-fixada e designar este processo por «agrupar os dados em classes da mesma amplitude».

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.

Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.

Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Apresentação PowerPoint
- Quadro e canetas
- Projetor

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Escola Secundária de Emídio Navarro

Planificação de Aula

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Professor Cooperante	Valter Roque
Professor Estagiário	Carla Simões

Ano letivo	2017/2018	**Período**	1º Período
Disciplina	Matemática	**Turma**	9ºB
Data	31/10/2017	**Aulas Nº**	29

Sumário

Organização e tratamento de dados: revisão.
Dados agrupados em classes.
Resolução de exercícios.

Domínio

OTD 9 - Organização e Tratamento de Dados

Subdomínio

Histogramas

Objetivos Gerais

Organizar e representar dados em histogramas

Metas

OTD 9-1.1

Estender a noção de variável estatística quantitativa ao caso em que cada classe fica determinada por um intervalo de números, fechado à esquerda e aberto à direita, sendo esses intervalos disjuntos dois a dois e de união igual a um intervalo (e estender também ao caso em que se interseta cada um desses intervalos com um conjunto finito pré-determinado de números), designando também cada intervalo por «classe».

OTD 9-1.2

Identificar uma variável estatística quantitativa como «discreta» quando cada classe fica determinada por um número ou um conjunto finito de números e como «contínua» quando se associa a cada classe um intervalo.

OTD 9-1.3

Reagrupar as unidades de uma população em classes com base num conjunto de dados numéricos de modo que as classes tenham uma mesma amplitude pré-fixada e designar este processo por «agrupar os dados em classes da mesma amplitude».

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.

Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.

Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Apresentação PowerPoint
- Quadro e canetas
- Projetor

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Escola Secundária de Emídio Navarro

Planificação de Aula

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	1º Período
Disciplina	Matemática	**Turma**	9ºB
Data	28/11/2017	**Aula Nº**	45

Sumário

Revisões dos conceitos:
- Proporcionalidade Direta;
- Funções algébricas;
- Equações do 2.º grau.

Resolução de exercícios.

Domínio

ALG 9 – Álgebra
FSS 9 – Funções, Sequências e Sucessões

Subdomínio

Proporcionalidade Direta
Funções algébricas
Equações do 2.º grau

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.

Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.

Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Apresentação PowerPoint
- Quadro e canetas
- Projetor

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Escola Secundária de Emídio Navarro

Planificação de Aula

REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	1º Período
Disciplina	Matemática	**Turma**	9ºA
Data	28/11/2017	**Aulas Nº**	48

Sumário

Problemas envolvendo grandezas inversamente ou diretamente proporcionais.
Resolução de exercícios.

Domínio

ALG 9 - Álgebra

Subdomínio

Proporcionalidade Inversa

Objetivos Gerais

Resolver problemas

Metas

ALG 9 - 6.1
Resolver problemas envolvendo grandezas inversamente e diretamente proporcionais em contextos variados.

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.
Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.
Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Quadro e canetas
- Projetor
- Aplicações Geogebra

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Escola Secundária de Emídio Navarro

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Planificação de Aula

Professor Cooperante	Valter Roque
Professor Estagiário	Carla Simões

Ano letivo	2017/2018	**Período**	2º Período
Disciplina	Matemática A	**Turma**	11ºB
Data	05/01/2018	**Aulas Nº**	78 e 79

Sumário

Lugares geométricos no plano.
Lugares geométricos no espaço.
Resolução de exercícios.

Domínio

GA 11 - Geometria Analítica

Subdomínio

Produto escalar

Objetivos Gerais

Resolver problemas

Metas

GA 11 - 4.2
Resolver problemas relativos à determinação de equações de retas do plano em situações diversas envolvendo a noção de perpendicularidade.
GA 11 - 4.3
Resolver problemas relativos à determinação de equações de planos em situações diversas envolvendo a noção de perpendicularidade e de paralelismo.
GA 11 - 4.4
Resolver problemas envolvendo equações de planos e de retas no espaço.

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.
Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.
Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.
Utilização de materiais e recursos tecnológicos como a calculadora gráfica.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Apresentação PowerPoint
- Quadro e canetas
- Projetor
- Calculadora Gráfica

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	2º Período
Disciplina	Matemática A	**Turma**	11º B
Data	23/01/2018	**Aulas Nº**	94 e 95

Sumário

Sucessão definida por recorrência:
  A sucessão de Fibonacci.
Progressão Aritmética:
  Termo geral da progressão aritmética.
  Termo geral em função da razão e de um termo de ordem p.
  Soma de um número finito de termos de uma progressão aritmética.
Resolução de exercícios.

Domínio

SUC11 - Sucessões

Subdomínio

Princípio de Indução matemática
Progressões aritméticas e geométricas

Objetivos Gerais

Utilizar o princípio de indução matemática
Calcular o termo geral de progressões aritméticas e geométricas
Calcular a soma de um número finito de termos de progressões aritméticas e geométricas

Metas

SUC11 - 3.2

Saber, dada uma função $f : A \longrightarrow A$ e $a \in A$, que existe uma única sucessão (u_n) de elementos de A tal que $u_1 = a$ e $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, referir que estas condições definem a sucessão (u_n) «por recorrência» e saber que estes resultados podem estender-se, *mutatis mutandis*, à definição de funções de $\mathbb{N}_p$ em A, onde $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant p\}$, também designadas por «sucessões (indiciadas em $\mathbb{N}_p$)».

SUC11 - 4.1

Designar, dados $a, r \in \mathbb{R}$, por «progressão aritmética de primeiro termo a e razão r» a sucessão definida por recorrência por $u_1 = a$ e, para todo o $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.

SUC11 - 4.2

Justificar que o termo geral da progressão aritmética de primeiro termo $a \in \mathbb{R}$ e de razão $r \in \mathbb{R}$ é dado por $u_n = a + (n-1)r$.

SUC11 - 5.1

Designar, dado $N \in \mathbb{N}$, por «progressão aritmética (finita) de comprimento N» (respetivamente «progressão geométrica (finita) de comprimento N»), a sequência $(u_1, u_2, ..., u_N)$ «dos N primeiros termos» de uma progressão aritmética (respetivamente geométrica) (u_n).

SUC11 - 5.2

Reconhecer, dado $N \in \mathbb{N}$, que a soma dos termos de uma progressão aritmética de comprimento N, $(u_1, u_2, ..., u_N)$, é dada por $S = \sum_{i=1}^{N} u_i = \frac{u_1 + u_N}{2} \times N$.

Metodologia

Exposição de uma apresentação em PowerPoint.

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.

Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.

Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Apresentação PowerPoint
- Quadro e canetas
- Projetor
- Calculadora

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Escola Secundária de Emídio Navarro

Planificação de Aula

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	2º Período
Disciplina	Matemática	**Turma**	9ºA
Data	21/02/2018	**Aulas Nº**	94 e 95

Sumário

Ângulos na circunferência (continuação).
Resolução de exercícios.

Domínio

GM9 - Geometria e Medida

Subdomínio

Circunferência

Objetivos Gerais

Conhecer propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência

Metas

GM9 - 15.12

Designar por «segmento de círculo» a região do círculo compreendida entre uma corda e um arco por ela subtenso, dito «maior» quando o arco for maior e «menor» quando o arco for menor.

GM9 - 15.13

Provar que um ângulo de vértice num dos extremos de uma corda, um dos lados contendo a corda e o outro tangente à circunferência («ângulo do segmento»), tem amplitude igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

GM9 - 15.14

Designar por ângulo «ex-inscrito num arco de circunferência» um ângulo adjacente a um ângulo inscrito e a ele suplementar, e provar que a amplitude de um ângulo ex-inscrito é igual à semissoma das amplitudes dos arcos correspondentes às cordas que as retas suporte dos lados contêm.

Metodologia

Exposição de uma apresentação em PowerPoint.

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.

Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.

Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Apresentação PowerPoint
- Quadro e canetas
- Projetor
- Régua e compasso

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	2º Período
Disciplina	Matemática	**Turma**	9ºA
Data	12/03/2018	**Aulas Nº**	105 e 106

Sumário

Entrega e correção do 4º teste de avaliação.
Soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo.
Soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo.
Lugares Geométricos:
Mediatriz de um segmento de reta.

Domínio

GM 9 - Geometria e Medida

Subdomínio

Circunferência

Objetivos Gerais

Conhecer propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência

Metas

GM 9 - 15.17
Provar que a soma das medidas das amplitudes, em graus, dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é igual a $(n-2)180$ e deduzir que a soma de n ângulos externos com vértices distintos é igual a um ângulo giro.

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.
Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.
Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Apresentação PowerPoint
- Quadro e canetas
- Projetor
- Régua e compasso

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Planificação de Aula

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	2º Período
Disciplina	Matemática	**Turma**	9ºB
Data	14/03/2018	**Aulas Nº**	105 e 106

Sumário

Entrega e correção do 4º teste de avaliação (conclusão).
Lugares Geométricos:
Mediatriz de um segmento de reta;
Circunferência circunscrita.
Bissetriz de um ângulo.

Domínio

GM 9 - Geometria e Medida

Subdomínio

Lugares Geométricos envolvendo pontos notáveis de triângulos

Objetivos Gerais

Identificar lugares geométricos

Metas

GM9 - 13.1
Provar que as mediatrizes dos lados de um triângulo se intersetam num ponto, designá-lo por «circuncentro do triângulo» e provar que o circuncentro é o centro da única circunferência circunscrita ao triângulo.
GM9 - 13.2
Provar que a bissetriz de um ângulo convexo é o lugar geométrico dos pontos do ângulo que são equidistantes das retas suportes dos lados do ângulo.

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.
Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.
Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Apresentação PowerPoint
- Quadro e canetas
- Projetor
- Régua e compasso

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	2º Período
Disciplina	Matemática A	**Turma**	11ºB
Data	14/03/2018	**Aulas Nº**	130 e 131

Sumário

Funções racionais.

Simplificação de expressões do tipo $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, sendo P e Q polinómios.

Zeros de funções racionais.

Domínio

FRVR 11 - Funções Reais de Variável Real

Subdomínio

Limites segundo Heine de funções reais de variável real

Objetivos Gerais

Definir a noção de continuidade e as respetivas propriedades fundamentais
Resolver problemas

Metas

FRVR 11 - 2.6

Designar por «função racional» uma função real de variável real dada por uma expressão da forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios.

FRVR 11 - 4.1

Resolver problemas envolvendo o estudo de funções racionais.

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.
Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.
Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Quadro e canetas
- Projetor
- Calculadora Gráfica

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Escola Secundária de Emídio Navarro

Planificação de Aula

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	2º Período
Disciplina	Matemática	**Turma**	9ºA
Data	15/03/2018	**Aulas Nº**	108 e 109

Sumário

Incentro e circunferência inscrita de um triângulo.
Ortocentro de um triângulo.
Medianas e baricentro de um triângulo.

Domínio

GM 9 - Geometria e Medida

Subdomínio

Lugares Geométricos envolvendo pontos notáveis de triângulos

Objetivos Gerais

Identificar lugares geométricos

Metas

GM 9 - 13.3

Provar que as bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo se intersetam num ponto, designá-lo por «incentro do triângulo» e provar que o incentro é o centro da circunferência inscrita ao triângulo.

GM 9 - 13.4

Saber que as retas suporte das três alturas de um triângulo são concorrentes e designar o ponto de interseção por «ortocentro» do triângulo.

GM 9 - 13.5

Justificar que a reta que bisseta dois dos lados de um triângulo é paralela ao terceiro e utilizar semelhança de triângulos para mostrar que duas medianas se intersetam num ponto que dista do vértice 2/3 do comprimento da respetiva mediana e concluir que as três medianas de um triângulo são concorrentes, designando-se o ponto de interseção por «baricentro», «centro de massa» ou «centroide» do triângulo.

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.

Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.

Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Apresentação PowerPoint
- Quadro e canetas
- Projetor
- Régua e compasso

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Planificação de Aula

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	2º Período
Disciplina	Matemática	**Turma**	9ºB
Data	15/03/2018	**Aulas Nº**	107 e 108

Sumário

Incentro e circunferência inscrita de um triângulo.
Ortocentro de um triângulo.
Medianas e baricentro de um triângulo.

Domínio

GM 9 - Geometria e Medida

Subdomínio

Lugares Geométricos envolvendo pontos notáveis de triângulos

Objetivos Gerais

Identificar lugares geométricos

Metas

GM 9 - 13.3

Provar que as bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo se intersetam num ponto, designá-lo por «incentro do triângulo» e provar que o incentro é o centro da circunferência inscrita ao triângulo.

GM 9 - 13.4

Saber que as retas suporte das três alturas de um triângulo são concorrentes e designar o ponto de interseção por «ortocentro» do triângulo.

GM 9 - 13.5

Justificar que a reta que bisseta dois dos lados de um triângulo é paralela ao terceiro e utilizar semelhança de triângulos para mostrar que duas medianas se intersetam num ponto que dista do vértice 2/3 do comprimento da respetiva mediana e concluir que as três medianas de um triângulo são concorrentes, designando-se o ponto de interseção por «baricentro», «centro de massa» ou «centroide» do triângulo.

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.

Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.

Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Apresentação PowerPoint
- Quadro e canetas
- Projetor
- Régua e compasso

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Escola Secundária de Emídio Navarro

Planificação de Aula

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	2º Período
Disciplina	Matemática A	**Turma**	11ºB
Data	16/03/2018	**Aulas Nº**	132 e 133

Sumário

Sinal da função racional.
Resolução de exercícios.

Domínio

FRVR 11 - Funções Reais de Variável Real

Subdomínio

Limites segundo Heine de funções reais de variável real

Objetivos Gerais

Definir a noção de continuidade e as respetivas propriedades fundamentais
Resolver problemas

Metas

FRVR 11 - 2.6

Designar por «função racional» uma função real de variável real dada por uma expressão da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios.

FRVR 11 - 4.1

Resolver problemas envolvendo o estudo de funções racionais.

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.
Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.
Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Quadro e canetas
- Projetor
- Calculadora Gráfica

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Escola Secundária de Emídio Navarro

Planificação de Aula

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	2º Período
Disciplina	Matemática	**Turma**	9ºA
Data	19/03/2018	**Aulas Nº**	110 e 111

Sumário

Resolução de exercícios.

Domínio

GM 9 - Geometria e Medida

Subdomínio

Lugares Geométricos envolvendo pontos notáveis de triângulos

Objetivos Gerais

Resolver problemas

Metas

GM 9 - 14.1
Resolver problemas envolvendo lugares geométricos no plano.

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.
Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.
Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Apresentação PowerPoint
- Quadro e canetas
- Projetor
- Régua e compasso

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Escola Secundária de Emídio Navarro

Planificação de Aula

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	2º Período
Disciplina	Matemática A	**Turma**	11ºB
Data	20/03/2018	**Aulas Nº**	134 e 135

Sumário

Resolução de exercícios.

Domínio

FRVR 11 - Funções Reais de Variável Real

Subdomínio

Limites segundo Heine de funções reais de variável real

Objetivos Gerais

Resolver problemas

Metas

FRVR 11 - 4.1

Resolver problemas envolvendo o estudo de funções racionais.

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.

Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.

Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Quadro e canetas
- Projetor
- Calculadora Gráfica

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Escola Secundária de Emídio Navarro

Planificação de Aula

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	2º Período
Disciplina	Matemática	**Turma**	9ºB
Data	20/03/2018	**Aulas Nº**	109

Sumário

Resolução de exercícios.

Domínio

GM 9 - Geometria e Medida

Subdomínio

Lugares Geométricos envolvendo pontos notáveis de triângulos

Objetivos Gerais

Resolver problemas

Metas

GM 9 - 14.1
Resolver problemas envolvendo lugares geométricos no plano.

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.
Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.
Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Apresentação PowerPoint
- Quadro e canetas
- Projetor
- Régua e compasso

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Escola Secundária de Emídio Navarro

Planificação de Aula

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	3º Período
Disciplina	Matemática	**Turma**	9ºB
Data	11/04/2018	**Aulas Nº**	115 e 116

Sumário

Trigonometria:
- Contexto histórico.
- Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.
- Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares.

Resolução de exercícios.

Domínio

GM 9 - Geometria e Medida

Subdomínio

Trigonometria

Objetivos Gerais

Definir e utilizar razões trigonométricas de ângulos agudos

Metas

GM 9 - 11.1

Construir, dado um ângulo agudo θ, triângulos retângulos dos quais θ é um dos ângulos internos, traçando perpendiculares de um ponto qualquer, distinto do vértice, de um dos lados de θ para o outro lado, provar que todos os triângulos que assim se podem construir são semelhantes e também semelhantes a qualquer triângulo retângulo que tenha um ângulo interno igual a θ.

GM 9 - 11.2

Designar, dado um ângulo agudo θ interno a um triângulo retângulo e uma unidade de comprimento, por «seno de θ» o quociente entre as medidas do comprimento do cateto oposto a θ e da hipotenusa e representá-lo por $\sin(\theta)$, $\sin\theta$, $\mathrm{sen}(\theta)$ ou $\mathrm{sen}\ \theta$.

GM 9 - 11.3

Designar, dado um ângulo agudo θ interno a um triângulo retângulo e uma unidade de comprimento, por «cosseno de θ» o quociente entre as medidas do comprimento do cateto adjacente a θ e da hipotenusa e representá-lo por $\cos(\theta)$ ou $\cos\theta$.

GM 9 - 11.4

Designar, dado um ângulo agudo θ interno a um triângulo retângulo e uma unidade de comprimento, por «tangente de θ» o quociente entre as medidas do comprimento do cateto oposto a θ e do cateto adjacente a θ e representá-lo por $\tan(\theta)$, $\tan\theta$, $\mathrm{tg}(\theta)$ ou $\mathrm{tg}\ \theta$.

GM 9 - 11.5

Designar seno de θ, cosseno de θ e tangente de θ por «razões trigonométricas» de θ.

GM 9 - 11.6

Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento e dados dois ângulos θ e θ' com a mesma amplitude $\hat{\theta} = \hat{\theta}'$, que o seno, cosseno e tangente de θ são respetivamente iguais ao seno, cosseno e tangente de θ' e designá-los também respetivamente por seno, cosseno e tangente de $\hat{\theta}$.

GM 9 - 11.7

Justificar que o valor de cada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo θ (e da respetiva amplitude) é independente da unidade de comprimento fixada.

GM 9 - 11.10

Provar que a tangente de um ângulo agudo é igual à razão entre os respetivos seno e cosseno.

GM 9 - 11.11

Provar que seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de um ângulo complementar.

Metodologia

Contextualização histórica.

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.

Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.

Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Apresentação PowerPoint
- Quadro e canetas
- Projetor

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Contextualização Histórica

Pouco se sabe sobre a origem exata da trigonometria, sendo esta alvo de estudo por várias civilizações ao longo dos tempos.

Os egípcios foram dos primeiros a apresentar desenvolvimentos nesta área, por exemplo, na construção de pirâmides, sendo isto visível no Papiro de Rhind.

Em simultâneo, os babilónios avançaram neste estudo devido ao seu fascínio pela astronomia. Uma prova deste facto é a tábula Plimpton 322.

Posteriormente, os chineses fizeram grandes avanços na trigonometria na medição de diversas distâncias.

Outros exemplos de povos a influenciar esta área foram os hindus e os árabes com a aplicação deste estudo, por exemplo, nos relógios de sol.

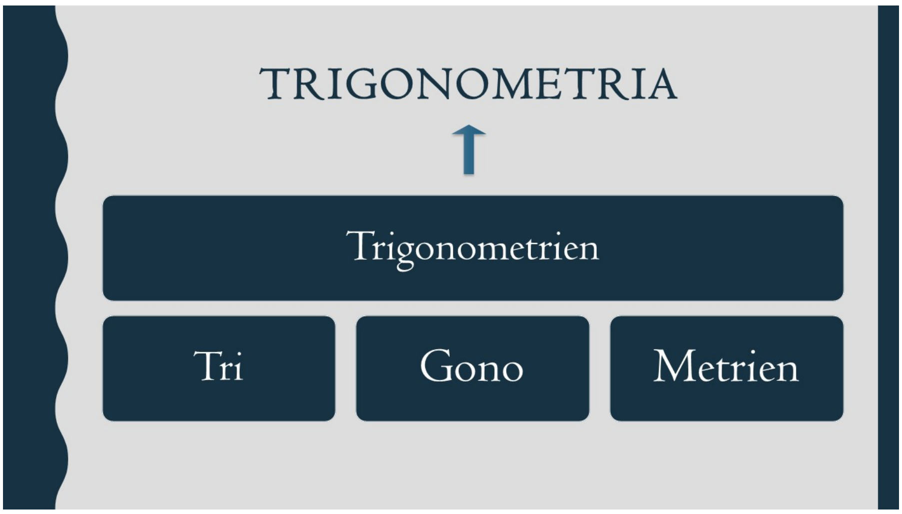
Na Grécia, também o astrónomo Hiparco de Nicéia fez grandes desenvolvimentos sendo considerado o "pai da Trigonometria".

Apesar deste estudo ser realizado desde os tempos mais remotos, apenas no início do século XVII é que a palavra Trigonometria, do grego *trigonometrien*, ou seja, medida dos três ângulos, apareceu, sendo Bartholomeo Pitiscus o responsável por este termo na sua obra *Trigonometria: sive de splutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus.*

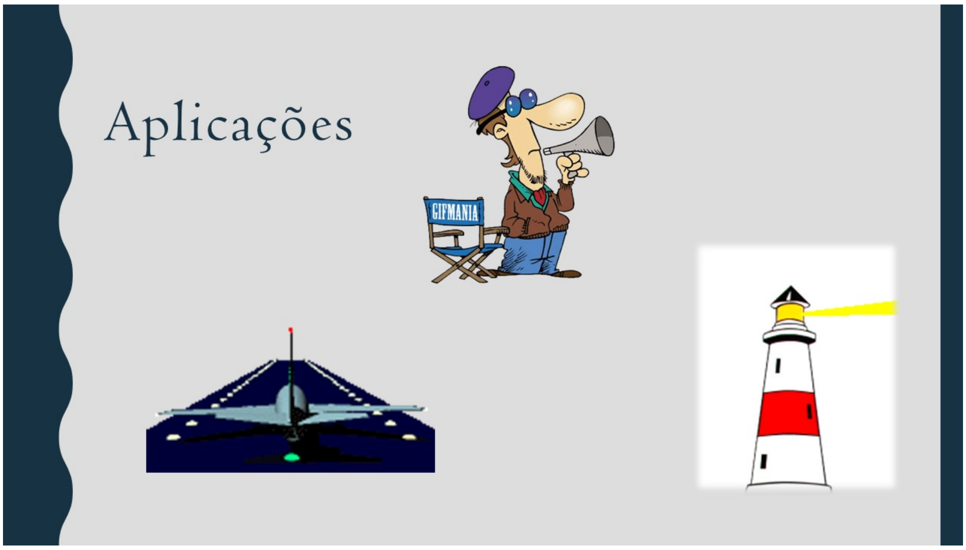
Posteriormente, no século XVIII, as designações *seno*, *cosseno* e *tangente* foram introduzidas por matemáticos ingleses.

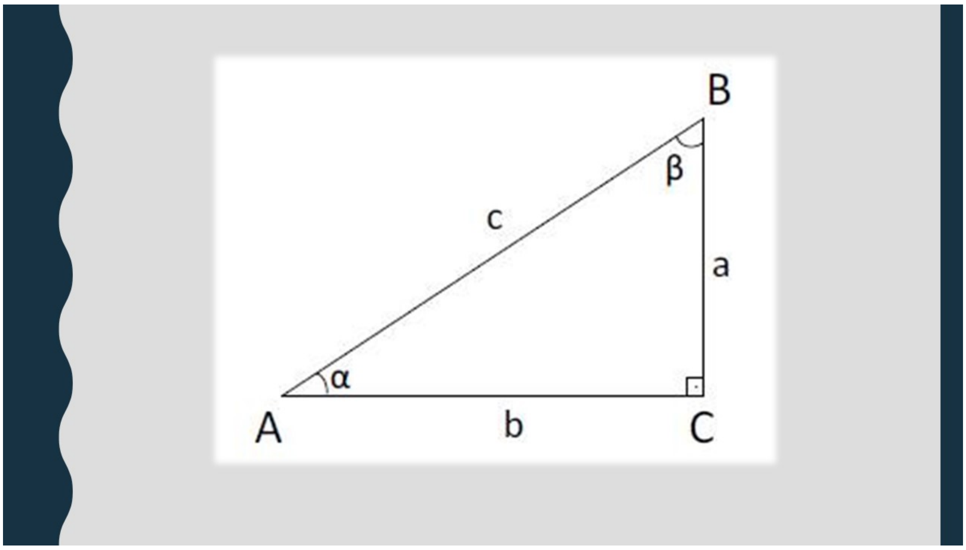
Atualmente, existem vários exemplos da aplicação desta área no quotidiano, como por exemplo, no levantar e aterrar de aviões, na navegação e na construção de estruturas como uma sala de cinema.

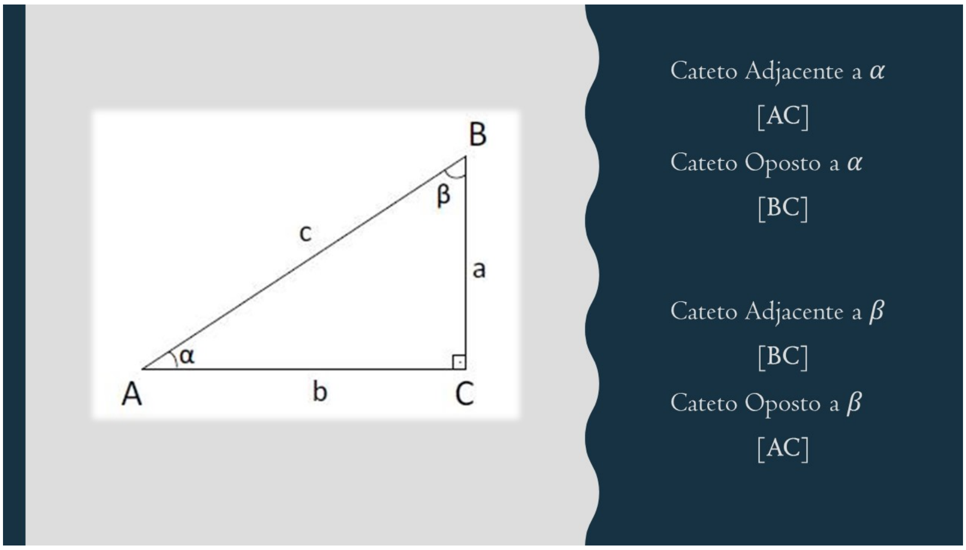
Apresentação PowerPoint

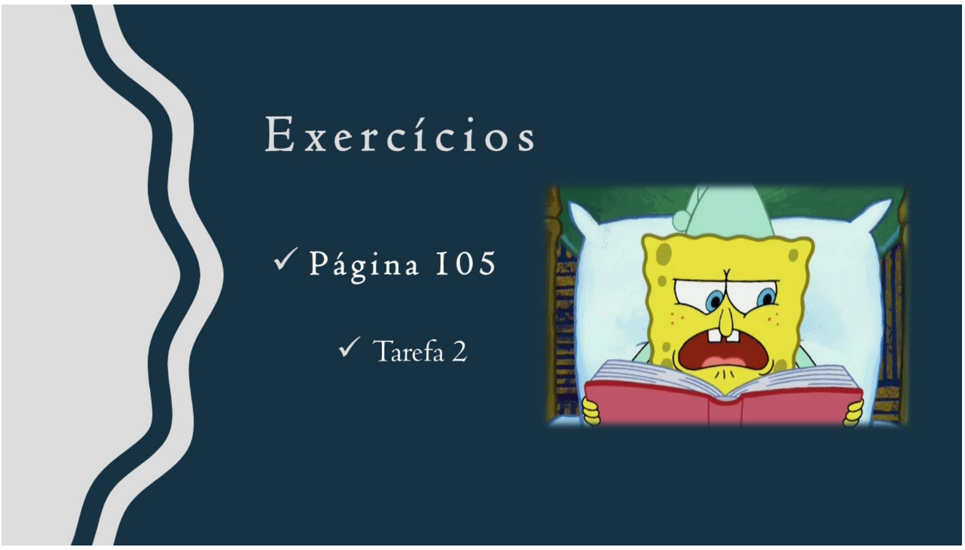


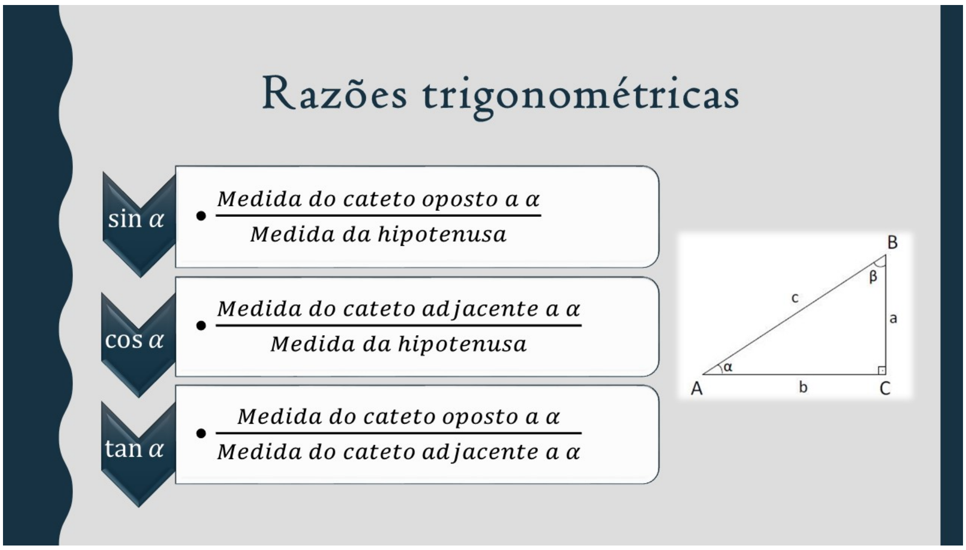

Contexto Histórico
• Origem incerta
• Astronomia e Geografia
• Papiro de Rhind
• Hiparco de Nicéia
• Bartholomeo Pitiscus
• Século XVIII
Hiparco de Nicéia
Bartholomeo Pitiscus

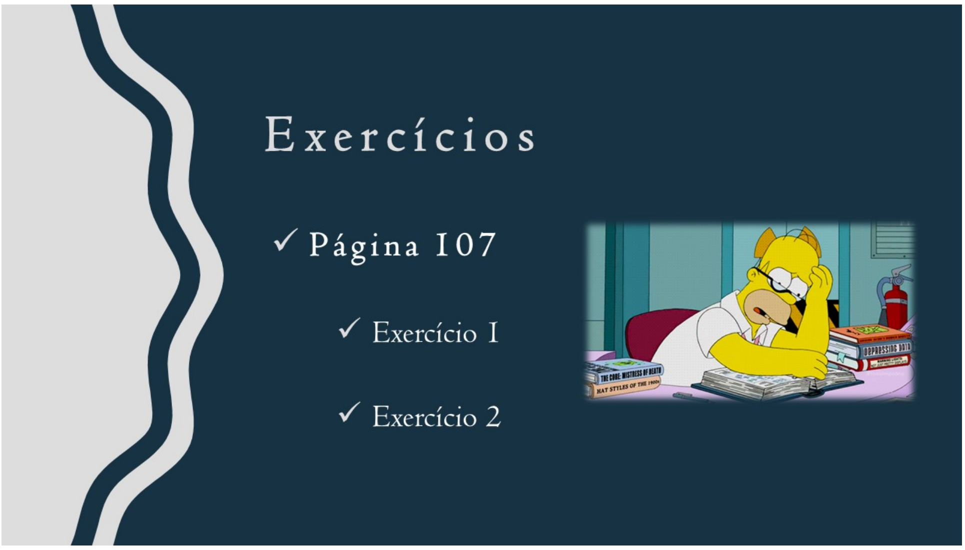

Aplicações
GIFMANIA

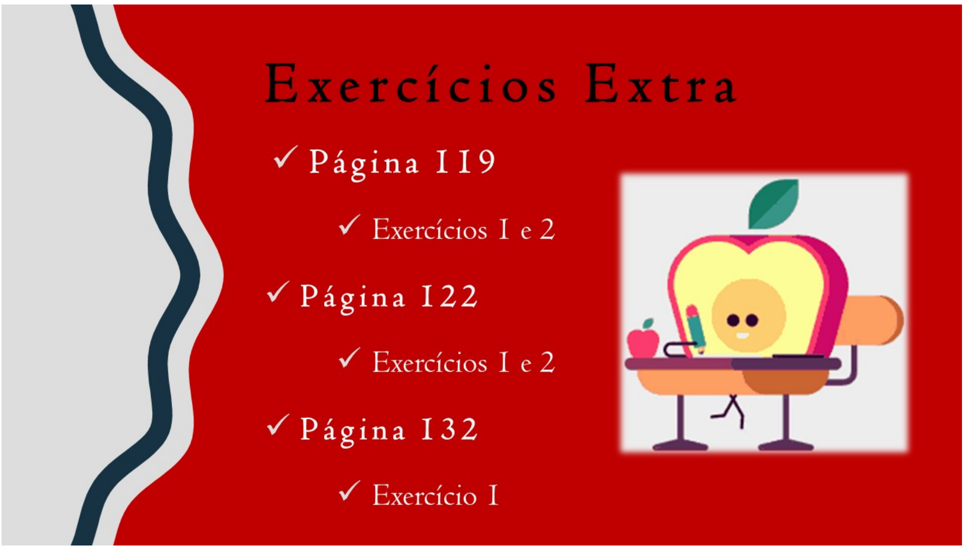

B
β
c
a
α
A
b
C


B
β
c
a
α
A
b
C
Cateto Adjacente a α
[AC]
Cateto Oposto a α
[BC]
Cateto Adjacente a β
[BC]
Cateto Oposto a β
[AC]


Exercícios
✓ Página 105
✓ Tarefa 2


Razões trigonométricas
$\sin\alpha$
$\frac{\text{Medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{Medida da hipotenusa}}$
$\cos\alpha$
$\frac{\text{Medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{Medida da hipotenusa}}$
$\tan\alpha$
$\frac{\text{Medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{Medida do cateto adjacente a } \alpha}$
B
β
c
a
α
A
b
C


Exercícios
✓ Página 107
✓ Exercício 1
✓ Exercício 2

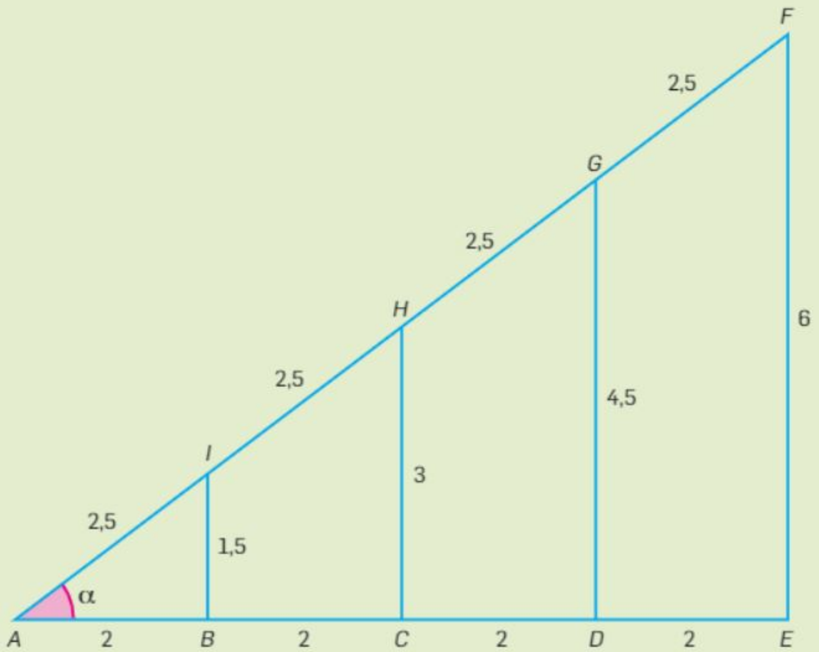

Exercícios Extra
✓ Página 119
✓ Exercícios 1 e 2
✓ Página 122
✓ Exercícios 1 e 2
✓ Página 132
✓ Exercício 1

Exercícios

Página 105

Tarefa 2: Razões trigonométricas

Na figura seguinte, os segmentos de reta $[BI]$, $[CH]$, $[DG]$ e $[EF]$ são perpendiculares a $[AE]$. Estão também registadas as medidas de alguns dos segmentos de reta. α é a amplitude do ângulo FAE.



a. Indica todos os triângulos que observas na figura e classifica-os quanto aos ângulos.

b. Os triângulos são semelhantes? Justifica a tua resposta.

c. Considerando o triângulo $[ABI]$, indica o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de amplitude α.

d. Para cada um dos quatro triângulos, determina as seguintes razões, relativamente ao ângulo comum de amplitude α.

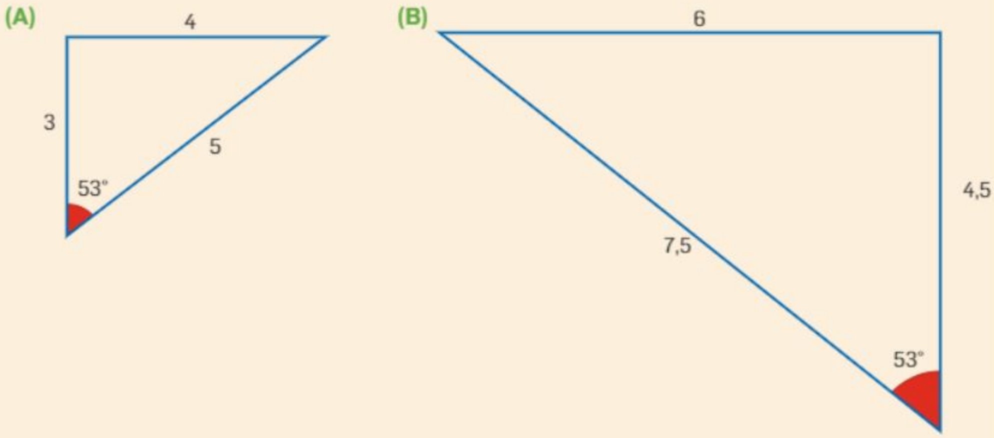
$$\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} \; ; \; \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} \; ; \; \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

Apresenta todas as razões na forma de fração irredutível.

e. Com base nos resultados obtidos na alínea anterior, que conclusões podes tirar? Como justificas que as razões calculadas não variem?

Página 107

1. Os triângulos a seguir representados são retângulos e têm um ângulo agudo com, aproximadamente, 53º de amplitude.



Atendendo aos dados da figura, completa a tabela seguinte.

Razão entre os comprimentos dos lados	(A)	(B)
$\frac{\text{Comprimento do cateto oposto ao ângulo de } 53^{\circ}}{\text{Comprimento da hipotenusa}}$		
$\frac{\text{Comprimento do cateto adjacente ao ângulo de } 53^{\circ}}{\text{Comprimento da hipotenusa}}$		
$\frac{\text{Comprimento do cateto oposto ao ângulo de } 53^{\circ}}{\text{Comprimento do cateto adjacente ao ângulo de } 53^{\circ}}$		

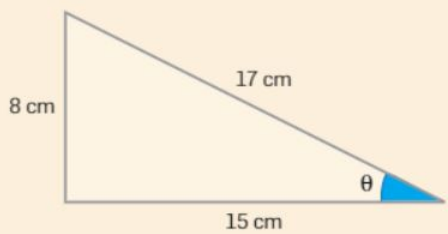
2. O triângulo representado é retângulo e tem um ângulo agudo θ. As medidas do lados do triângulo são 8 cm, 15 cm e 17 cm.

2.1 Determina:

a. sen θ

b. cos θ

c. tan θ



2.2 No caso de a unidade de comprimento ser o milímetro, as medidas dos lados dos triângulos seriam de 80 mm, 150 mm e 170 mm. Para esta situação, determina os valores de sen θ, cos θ e tan θ.

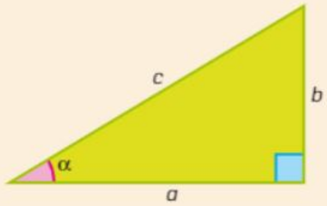
2.3 Justifica a seguinte afirmação:

«O valor de cada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo θ é independente da unidade de comprimento fixada.»

Página 119

Nos itens que se seguem, só uma das alíneas corresponde à resposta correta. Assinala-a.

1. Observa o triângulo retângulo representado na figura ao lado, em que α é a amplitude de um ângulo agudo. Relativamente ao ângulo de amplitude α, qual das seguintes afirmações é verdadeira?



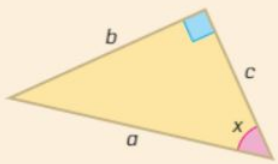
(A) a é o cateto adjacente, b é o cateto oposto e c é a hipotenusa.

(B) a é o cateto oposto, b é o cateto adjacente e c é a hipotenusa.

(C) a é a hipotenusa, b é o cateto adjacente e c é o cateto oposto.

(D) a é o cateto adjacente, b é a hipotenusa e c é o cateto oposto.

2. Na figura está representado um triângulo retângulo, onde a, b e c são as medidas dos comprimentos dos lados e x a amplitude de um dos seus ângulos agudos.
Qual das seguintes relações está correta?



(A) $\text{sen } x = \frac{b}{a}$ (C) $\text{sen } x = \frac{a}{b}$

(B) $\text{sen } x = \frac{b}{c}$ (D) $\text{sen } x = \frac{c}{a}$

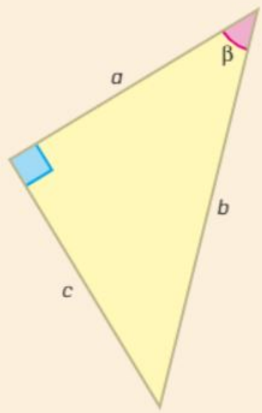
Página 122

1. Considera o triângulo retângulo de lados a, b e c. Relativamente ao ângulo de amplitude β, qual dos lados representa:

a. o cateto oposto?

b. o cateto adjacente?

c. a hipotenusa?

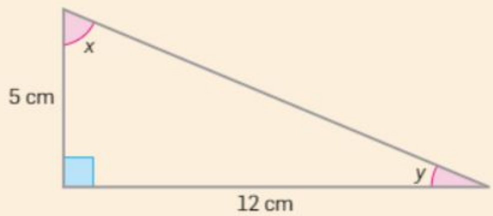


2. De acordo com o triângulo da figura, determina as seguintes razões trigonométricas, apresentando cada razão na forma de fração irredutível.

a. sen x **d.** sen y

b. cos x **e.** cos y

c. tg x **f.** tg y

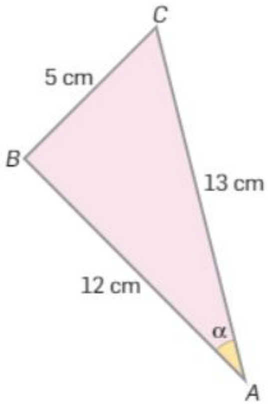


Página 132

1. Considera o triângulo $[ABC]$ da figura. α é a amplitude do ângulo BAC.

a. Mostra que o triângulo é retângulo em B.

b. Determina $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$.



Resolução dos exercícios

Página 105

a) Os triângulos observados são $[ABI]$, $[ACH]$, $[ADG]$ e $[AEF]$.

Se aplicarmos o recíproco do Teorema de Pitágoras verifica-se:

$2,5^2 = 2^2 + 1,5^2 \Leftrightarrow 6,25 = 6,25$

$5^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow 25 = 25$

$7,5^2 = 6^2 + 4,5^2 \Leftrightarrow 56,25 = 56,25$

$10^2 = 8^2 + 6^2 \Leftrightarrow 100 = 100$

Logo, os triângulos indicados, quanto aos ângulos, são retângulos.

b) Sim, os quatro triângulos são semelhantes pelo critério AA dado que são triângulos retângulos e têm um ângulo de amplitude α em comum.

c) Cateto oposto: $[BI]$

Cateto adjacente: $[AB]$

d) Nos quatro triângulos tem-se:

$$\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{4}{5}$$

e) Verifica-se que as razões são iguais para os quatro triângulos. As razões não variam porque os triângulos são semelhantes (critério AA) e, portanto, os comprimentos dos lados são proporcionais.

Página 107

1.

(A)	(B)
$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{7{,}5}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{4{,}5}{7{,}5}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{4{,}5}$

2.1.a $\frac{8}{17}$

2.1.b $\frac{15}{17}$

2.1.c $\frac{8}{15}$

2.2 $\sin\theta = \frac{80}{170} = \frac{8}{17}$ $\cos\theta = \frac{150}{170} = \frac{15}{17}$ $\tan\theta = \frac{80}{170} = \frac{8}{15}$

2.3 O valor de cada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo θ é independente da unidade de comprimento fixada porque o quociente entre as medidas mantém-se, mesmo alterada a unidade de medida, pois são proporcionais.

Página 119

1. A
2. A

Página 122

1.a c **1.b** a **1.c** b

2. Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se

$$h^2 = 5^2 + 12^2 \Leftrightarrow h^2 = 25 + 144 \Leftrightarrow h^2 = 169 \Leftrightarrow h = -13 \vee h = 13$$

Como o valor da hipotenusa é o comprimento de um lado este é uma medida positiva.

Logo, $h = 13$

2.a $\frac{12}{13}$

2.b $\frac{5}{13}$

2.c $\frac{12}{13}$

2.d $\frac{5}{13}$

2.e $\frac{12}{13}$

2.f $\frac{5}{12}$

Página 132

1.a Recorrendo ao recíproco do Teorema de Pitágoras tem-se:

$$13^2 = 5^2 + 12^2 \Leftrightarrow 169 = 25 + 144 \Leftrightarrow 169 = 169$$

Logo, o triângulo é retângulo em B.

1.b $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ $\tan\alpha = \frac{5}{12}$

Escola Secundária de Emídio Navarro

Planificação de Aula

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	3º Período
Disciplina	Matemática A	**Turma**	11ºB
Data	18/05/2018	**Aulas Nº**	170 e 171

Sumário

Taxa de variação instantânea e respetiva interpretação geométrica.
Função derivada:
Definição.
Monotonia e sinal da função derivada.

Domínio

FRVR 11 - Funções Reais de Variável Real

Subdomínio

Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

Objetivos Gerais

Definir a noção de derivada
Operar com derivadas

Metas

FRVR 11 - 5.3

Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto x_0 do respetivo domínio, a «taxa instantânea de variação de no ponto x_0» como o limite $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, quando este existe e é finito, designá-lo por «derivada de f no ponto x_0», representá-lo por «$f'(x_0)$» e, nesse caso, identificar a função f como «diferenciável em x_0» ou «derivável em x_0».

FRVR 11 - 5.4

Justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto x_0 do respetivo domínio, que o limite $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe se e somente se o limite $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existir e que, nesse caso, ambos os limites são iguais.

FRVR 11 - 5.5

Identificar, dada uma função real de variável real f diferenciável em $x_0 \in D_f$ e um referencial ortonormado, a «reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_o, f(x_0))$» como a reta de declive $f'(x_0)$ que passa por P_0 e justificar, representando por $M(x)$, $x \in Df$, o declive da reta secante ao gráfico de f que passa pelo ponto P_0 e pelo ponto $P(x, f(x))$, que $\lim\limits_{x\to x_0} M(x) = f'(x_0)$.

FRVR 11 - 7.1

Designar, dada uma função real de variável real f, a «função derivada de f» como a função de domínio $D_{f'} = \{x \in D_f : f$ é diferenciável em $x\}$ que a cada $x \in D_{f'}$ faz corresponder $f'(x)$.

FRVR 11 - 7.2

Identificar uma função real de variável real como «diferenciável num conjunto A» quando é diferenciável em todos os pontos de A.

FRVR 11 - 7.3

Justificar que se uma função real de variável real f é diferenciável num conjunto A e é crescente (respetivamente decrescente), no sentido lato, nesse conjunto, então para todo o $x \in A$, $f'(x) \geqslant 0$ (respetivamente $f'(x) \leqslant 0$).

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.

Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.

Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Quadro e canetas
- Projetor
- Calculadora

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Escola Secundária de Emídio Navarro

Planificação de Aula

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Professor Cooperante	Valter Roque		
Professor Estagiário	Carla Simões		
Ano letivo	2017/2018	**Período**	3º Período
Disciplina	Matemática A	**Turma**	11ºB
Data	25/05/2018	**Aulas Nº**	176 e 177

Sumário

Derivada do quociente de funções diferenciáveis.
Derivada da função composta.
Derivada das funções f definidas por $f(x) = x^n$ e $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Domínio

FRVR 11 - Funções Reais de Variável Real

Subdomínio

Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

Objetivos Gerais

Operar com derivadas

Metas

FRVR 11 - 7.7

Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D, com $g(a) \neq 0$, que a função $\dfrac{f}{g}$ é diferenciável em a e que $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

FRVR 11 - 7.8

Provar, dada uma função $f : D_f \to \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $a \in D_f$ e uma função real de variável real $g : D_g \to \mathbb{R}$ tal que $D'_f \subset D_g$, diferenciável em $f(a)$, que a função composta $g \circ f$ é diferenciável em a e que $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

FRVR 11 - 7.9

Calcular, utilizando a definição, uma expressão analítica para os valores das funções derivadas das «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» definidas por x, x^2, x^3, $\dfrac{1}{x}$ e $\sqrt{x}$, ou constantes, e saber de memória estes resultados.

FRVR 11 - 7.10

Provar, dado um número natural n (respetivamente dado um número inteiro n negativo), que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}$ (respetivamente de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) definida por $f(x) = x^n$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = nx^{n-1}$, considerando também estas funções como «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» e saber de memória este resultado.

FRVR 11 - 7.11

Provar, dado um número natural par n (respetivamente dado um número natural ímpar $n > 1$), que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}^+$ (respetivamente de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

FRVR 11 - 7.12

Provar, para todo o número racional α, que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^\alpha$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, considerando também estas funções como «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» e saber de memória este resultado.

FRVR 11 - 7.13

Determinar, utilizando as regras de derivação e as derivadas das funções de referência, uma expressão analítica para as derivadas de funções obtidas por aplicação sucessiva de operações de adição algébrica, multiplicação, divisão e composição a funções de referência.

Metodologia

Resolução de exercícios em grupos de 2 alunos.

Apoio ao aluno na descoberta das diversas formas de resolver os exercícios propostos.

Correção das atividades desenvolvidas acompanhada de discussão e análise das respostas dos alunos.

Recursos

- Manual adotado / e-Manual
- Quadro e canetas
- Projetor
- Calculadora

Avaliação

Observação da autonomia e correção matemática na resolução de exercícios propostos do manual adotado.

Anexo D

Problemas do Mês

Problema de Novembro

BIBLIOTECA ESCOLAR ESEN

Os filhos do emir

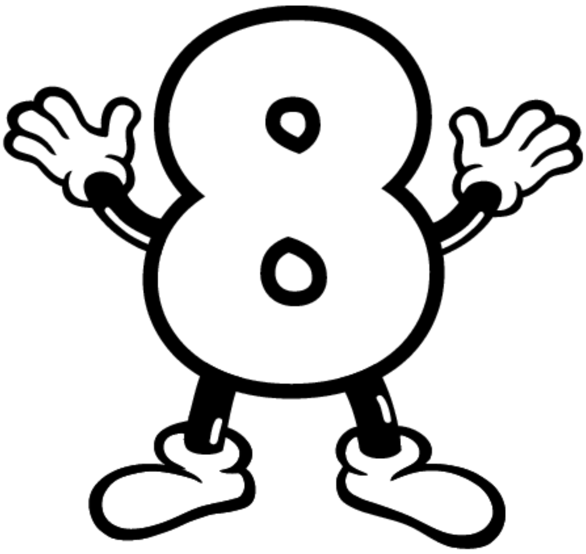
O emir Abdel Azir ficou famoso por vários motivos. Um deles foi o grande número de filhos gémeos que teve. O historiador Ahmed Aab afirma num dos seus escritos que todos os filhos do emir eram gémeos duplos exceto 39, todos eram gémeos triplos exceto 39 e todos eram gémeos quádruplos exceto 39.

Quantos filhos teve o emir?

Dinamizadora: Carla Simões
Trabalho Colaborativo com a Biblioteca Escolar

Oito oitos

Usando apenas o algarismo 8 por oito vezes e todas as operações que quiseres, obter o resultado 1000.



De quantas maneiras diferentes o consegues fazer?

Dinamizadora: Carla Simões
Trabalho Colaborativo com a Biblioteca Escolar

Problema de Janeiro

BIBLIOTECA ESCOLAR ESEN

A herança do velho senhor

Um velho homem, prestes a morrer, mandou chamar os filhos para se despedir deles e distribuir o dinheiro que guardava num cofre. No entanto, o homem estava tão mal que já não se lembrava do valor da sua fortuna nem sequer de quantos filhos tinha.

Apesar disso pediu ao filho mais velho para tirar 5000 euros mais a sétima parte do que sobrasse. Depois disse ao segundo filho para tirar 10000 euros mais a sétima parte do que ainda houvesse. A seguir o terceiro filho recebeu 15000 euros mais a sétima parte do restante. E assim sucessivamente. Quando os filhos compararam o que tinham recebido, verificaram que todos tinham recebido exatamente o mesmo.

Quantos filhos tinha o homem e quanto recebeu cada um?

Dinamizadora: Carla Simões

Trabalho Colaborativo com a Biblioteca Escolar

Problema de Fevereiro

A idade da professora (Adaptado)

Um aluno perguntou à professora quantos anos tinha. Ela, em vez de responder diretamente, propôs-lhes um pequeno problema.
Escreveu dois números **(com 4 algarismos cada um)** no quadro e disse-lhes:
- Somem estes dois números e depois tirem a raiz quadrada que já ficam a saber quantos anos tenho.
O Luís é um aluno muito aplicado mas muito distraído. Pegou na calculadora e escreveu os dois números um a seguir ao outro, sem ter carregado na tecla de somar. Por exemplo, se os números fossem 5347 e 1329, em vez de 5347 + 1329 ele teria escrito 53471329.
Depois, cometeu um segundo erro: carregou duas vezes na tecla da raiz quadrada em vez de carregar uma só vez. Ficou muito contente quando obteve um número inteiro e foi a correr mostrar à professora:
- Já sei quantos anos tem!
- Deves ter-te enganado. Mas olha, por acaso essa é a idade do meu marido, que é mais velho do que eu.
Quantos anos tem a professora?

Dinamizadora: Carla Simões
Trabalho Colaborativo com a Biblioteca Escolar

Problema de Março

Quem chegou primeiro?

Alberto e Isaac resolveram tirar férias. Antes da viagem, discutiam qual seria a forma mais rápida de chegar ao hotel. Isaac disse: “Nós devemos ir de comboio”. Porém, O Alberto retrucou: “Não! O comboio só vai até a metade do caminho até o hotel. Nós teríamos que fazer o resto do percurso a pé! Em vez de ir de comboio, devemos ir até ao hotel de bicicleta!”. O Isaac discordou e os dois decidiram fazer o percurso à sua maneira: O Alberto percorreu de bicicleta todo o caminho até o hotel. O Isaac fez a primeira parte do caminho de comboio e percorreu a segunda parte a pé.

A velocidade do comboio é 4 vezes maior que a velocidade da bicicleta, e a velocidade da bicicleta é 2 vezes maior que a velocidade da caminhada. Quem chegou ao hotel primeiro?

Dinamizadora: Carla Simões

Trabalho Colaborativo com a Biblioteca Escolar

Problema de Abril

BIBLIOTECA ESCOLAR ESEN

Puzzle matemático

Utilizando apenas números inteiros, resolve o puzzle matemático.

	/		+		/		4
+		+		-		-	
	/		-		+		9
-		X		/		+	
	-		/		+		20
+		+		-		X	
	-		X		-		-73
14		61		-3		116	

Dinamizadora: Carla Simões

Trabalho Colaborativo com a Biblioteca Escolar

Qual é o número?

Determina o menor número natural que dividido por:

- 2 tem resto 1;
- 3 tem resto 2;
- 4 tem resto 3;
- 5 tem resto 4;
- 6 tem resto 5;
- 7 tem resto 0.

Dinamizadora: Carla Simões
Trabalho Colaborativo com a Biblioteca Escolar