



UNIVERSIDADE DE  
COIMBRA



Sara Maria dos Santos Alves

OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS  
PORTICADAS DE BETÃO: MINIMIZAÇÃO  
DO CUSTO AMBIENTAL

Dissertação no âmbito do Mestrado Integrado em Engenharia Civil na área de Especialização em Estruturas, orientada pelo Professor Doutor Alberto Miguel Bizarro Martins e pelo Professor Doutor Luís Miguel da Cruz Simões e apresentada ao Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Fevereiro 2019



**FCTUC DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Sara Maria dos Santos Alves

# **Optimização de estruturas porticadas de betão: minimização do custo ambiental**

Dissertação de Mestrado Integrado em Engenharia Civil na área de Especialização em Estruturas,  
Orientada pelo Professor Doutor Alberto Miguel Bizarro Martins e pelo Professor Doutor Luís Miguel da Cruz  
Simões

Esta Dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor.  
O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer  
responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões  
que possam surgir

Coimbra, 7 de Fevereiro de 2019

## **AGRADECIMENTOS**

Na realização da presente dissertação, contei com o apoio de várias pessoas às quais estou profundamente grata.

Em primeiro lugar quero agradecer aos meus orientadores Professor Luís da Cruz Simões e ao Professor Alberto Martins por terem aceite serem meus orientadores. Queria deixar um agradecimento especial ao Professor Alberto Martins pela sua orientação, incentivo, disponibilidade e apoio que sempre demonstrou. Aqui deixo a minha gratidão.

A todos os meus amigos e colegas que me acompanharam ao longo desta fase do meu percurso académico.

A toda a minha família, em especial aos meus pais, pela educação, amor, carinho e compreensão. Por sempre terem acreditado em mim e por serem os meus grandes pilares, apoiando-me em todos os momentos.

Ao Pedro por todo o amor, amizade, compreensão e por estar sempre ao meu lado ao longo desta caminhada.

## RESUMO

Actualmente as consequências ambientais do aquecimento global são fonte de grande preocupação. Globalmente têm vindo a ser adoptadas medidas no sentido de diminuir as emissões de CO<sub>2</sub> (dióxido de carbono) de modo a reduzir o efeito de estufa. A temática da sustentabilidade da construção tem ganho importância crescente nos últimos anos para fazer face ao elevado impacto ambiental da indústria da construção. Assim, no projecto de estruturas deve procurar obter-se soluções económicas, estruturalmente eficientes e “amigas do ambiente”.

Neste trabalho desenvolveu-se um modelo numérico de análise e optimização tendo em vista a obtenção do projecto óptimo e sustentável de estruturas porticadas de betão armado. O modelo de análise estrutural tridimensional inclui todas as acções e efeitos relevantes, nomeadamente, acções estáticas, a acção dinâmica dos sismos, os efeitos diferidos do betão e os efeitos geometricamente não-lineares. O método analítico discreto directo é utilizado para a análise de sensibilidades. O dimensionamento de estruturas porticadas de betão armado é formulado como um problema de optimização *multi-objectivo* com objectivos de custo de construção e emissões de CO<sub>2</sub> mínimos, deslocamentos e tensões, obtendo-se soluções de Pareto. Uma abordagem baseada em entropia é utilizada para obter a solução *minimax* através da minimização de uma função escalar convexa. Os objectivos de projecto são estabelecidos de acordo com as recomendações da NP EN 1992-1-1. As variáveis de decisão consideradas são as dimensões das secções transversais das vigas e pilares, assim como, as respectivas áreas de armadura longitudinal e de esforço transversal e a classe do betão.

As características e capacidades do modelo numérico desenvolvido são ilustradas através da resolução de um exemplo de aplicação relativo à optimização de uma estrutura porticada de betão armado de dimensões reais.

**Palavras-chave:** Optimização; betão armado; edifícios; emissões de CO<sub>2</sub>; projecto sustentável.

## **ABSTRACT**

Nowadays, the environmental consequences of global warming are of major concern. Worldwide, measures are being adopted to reduce the CO<sub>2</sub> (carbon dioxide) emissions in order to mitigate the greenhouse effect. Construction sustainability is gaining increasing relevance in the last years to cope with the large environmental impact of construction industry. Considering this the structural design should aim to obtain economical, structurally efficient and “environmentally-friendly” solutions.

In this work a numerical analysis-and-optimization model for the sustainable optimum design of reinforced concrete framed structures was developed. The structural analysis model includes all the actions and relevant effects, namely, static loads, seismic action, the time-dependent effects of concrete and the geometrical nonlinearities. The analytical discrete direct method is used for sensitivity analysis. The design of reinforced concrete framed structures is formulated as a multi-objective optimization problem with objectives of minimum construction cost, minimum CO<sub>2</sub> emissions, deflections and stresses and a Pareto solution is sought. An entropy-based approach is used to find the minimax solution by the minimization of a convex scalar function. The design goals are established according to the NP EN1992-1-1 recommendations. The design variables considered are the beams and columns cross-sectional dimensions, the longitudinal reinforcement area, the shear reinforcement area and the concrete grade.

The features and applicability of the developed numerical model are illustrated by a numerical example concerning the optimization of a real sized reinforced concrete framed structure.

**Keywords:** Optimization; reinforced concrete; buildings; CO<sub>2</sub> emissions; sustainable design.

---

## ÍNDICE

Agradecimentos .....	i
Resumo .....	ii
Abstract.....	iii
Índice .....	iv
1 Introdução.....	1
1.1 Enquadramento do tema .....	1
1.2 Objectivos do trabalho .....	2
1.3 Organização do trabalho .....	2
2 Revisão bibliográfica.....	4
2.1 Introdução .....	4
2.2 Sustentabilidade na construção .....	5
2.3 Optimização de estruturas de betão .....	6
2.3.1 Métodos de pesquisa directa.....	6
2.3.2 Métodos heurísticos .....	8
2.4 Optimização de estruturas com minimização do custo ambiental .....	10
3 Análise e optimização estrutural .....	14
3.1 Introdução .....	14
3.2 Análise estrutural .....	14
3.2.1 Considerações gerais .....	14
3.2.2 Imperfeições geométricas .....	16
3.2.3 Efeitos geometricamente não-lineares.....	17
3.2.4 Efeitos diferidos do betão .....	19
3.2.5 Análise dinâmica considerando a acção sísmica .....	22
3.3 Optimização estrutural .....	24
3.3.1 Considerações gerais .....	24
3.3.2 Variáveis de decisão .....	25
3.3.3 Objectivos de projecto .....	27

---

3.3.4	Função objectivo .....	31
3.3.5	Análise de sensibilidades .....	33
4	Exemplos de aplicação .....	36
4.1	Introdução .....	36
4.2	Exemplos de verificação .....	36
4.2.1	Optimização de viga simplesmente apoiada.....	36
4.2.2	Optimização de viga continua .....	40
4.2.3	Optimização de pilar sujeito a flexão desviada .....	43
4.3	Optimização da estrutura porticada de um edifício .....	46
4.3.1	Dados gerais do exemplo numérico .....	46
4.3.2	Objectivos de projecto e variáveis de decisão .....	47
4.3.3	Resultados da optimização .....	49
5	Conclusões e Trabalhos Futuros .....	57
5.1	Conclusões .....	57
5.2	Recomendações para trabalhos futuros.....	57
	Referências Bibliográficas.....	59

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Enquadramento do tema

Nos dias de hoje, as consequências ambientais do aquecimento global são fonte de grande preocupação. Neste sentido, em todo o mundo estão a ser levados a cabo esforços no sentido de diminuir as emissões de CO<sub>2</sub> (dióxido de carbono) com o objectivo de reduzir o efeito de estufa.

Tendo em conta o elevado impacto ambiental da indústria da construção civil, a temática da sustentabilidade da construção tem ganho importância crescente nos últimos anos. Actualmente, no projecto de estruturas devem incluir-se critérios relacionados com a sustentabilidade da construção. Assim, assume especial relevância a consideração, para além dos custos de construção, também dos custos ambientais. Estes custos estão relacionados com as emissões de CO<sub>2</sub> aquando da produção dos materiais de construção, transporte, manutenção e demolição da estrutura.

O projecto de estruturas é um processo iterativo em que o projectista procura, através da alteração de determinados parâmetros do sistema estrutural, uma solução que satisfaça um conjunto de critérios relacionados com a segurança, utilização e economia. Apesar dos grandes recursos e da variedade de ferramentas computacionais disponíveis nos dias de hoje, o projecto de estruturas de Engenharia Civil continua a ser feito através de um processo de tentativa-erro. No caso dos edifícios em betão armado este processo reveste-se de alguma complexidade, envolvendo trefas como a definição do sistema estrutural, a determinação das dimensões das secções transversais dos elementos, a determinação das quantidades de armadura longitudinal e transversal, a consideração dos efeitos diferidos do betão e dos efeitos geometricamente não-lineares e para além das acções estáticas a consideração também da acção dinâmica dos sismos.

A optimização estrutural pode ser interpretada como um processo de dimensionamento automatizado que permite obter valores óptimos de variáveis de decisão que satisfazem um determinado conjunto de critérios e condicionantes do projecto (Simões, 2008). A resolução dos problemas de optimização pode ser feita através de métodos de pesquisa directa ou métodos heurísticos. Os algoritmos de optimização procedem a uma alteração das variáveis de decisão do problema de modo a minimizar uma função objectivo definida a partir de determinados critérios. A obtenção da solução óptima é condicionada pela verificação de um conjunto de restrições de projecto.

Apesar da optimização estrutural não ser usualmente utilizada na prática da Engenharia Civil, o uso de ferramentas de optimização surge naturalmente como uma forma de obter o projecto de estruturas considerando, não só a redução de custos dos materiais, mas também a redução

dos custos ambientais, tendo em vista a obtenção de soluções económicas, estruturalmente eficientes e “amigos do ambiente”.

O presente trabalho enquadra-se no âmbito do projecto de estruturas de edifícios tendo em conta critérios de sustentabilidade. Deste modo, pretende-se utilizar a optimização estrutural de modo a obter o projecto óptimo de estruturas porticadas de betão armado com minimização do custo de construção e do custo ambiental.

## **1.2 Objectivos do trabalho**

O objectivo principal da presente dissertação é o desenvolvimento de um modelo numérico de análise e optimização tendo em vista o projecto óptimo e sustentável de estruturas porticadas de betão armado. Deste modo, partindo de uma ferramenta computacional existente, desenvolvida em ambiente *MATLAB*, procedeu-se à sua adaptação para a resolução de problemas de optimização de estruturas porticadas de betão armado.

As características e funcionalidades do modelo numérico desenvolvido são ilustradas através da resolução de um exemplo de aplicação relativos à optimização de uma estrutura porticada de betão armado de dimensões reais.

## **1.3 Organização do trabalho**

A presente dissertação é constituída por cinco capítulos, apresentando-se seguidamente uma descrição sumária do conteúdo dos mesmos.

No primeiro capítulo faz-se a introdução do trabalho desenvolvido, apresenta-se o enquadramento do tema, indicam-se os objectivos do trabalho e a sua organização.

No Capítulo 2 apresenta-se o estado da arte relativamente à optimização de estruturas porticadas de betão armado. Começa-se por abordar a temática da sustentabilidade na construção, salientando-se a sua importância crescente nos últimos anos. Em seguida, apresenta-se a revisão bibliográfica dos trabalhos de optimização de estruturas de betão armado, separados em duas secções consoante o tipo de algoritmo de optimização utilizado, nomeadamente os métodos de pesquisa directa e os métodos heurísticos. Ainda neste capítulo faz-se um resumo dos principais trabalhos de optimização de estruturas de betão armado com minimização do custo ambiental.

No Capítulo 3 descreve-se detalhadamente o modelo numérico desenvolvido tendo em vista a análise e optimização de estruturas porticadas de betão armado. Este modelo, computacional, é constituído por dois módulos, o módulo de análise estrutural e o módulo de análise de sensibilidades e optimização, respectivamente. Começa-se por apresentar o módulo de análise que é baseado no Método dos Elementos Finitos e possibilita a modelação de estruturas

---

reticuladas tridimensionais. Este módulo permite contabilizar todas as acções e efeitos relevantes, nomeadamente, acções estáticas (cargas permanentes e sobrecargas), a acção sísmica, os efeitos diferidos do betão e os efeitos geometricamente não-lineares. Posteriormente, apresenta-se o módulo destinado à análise de sensibilidades e optimização, prestando-se especial atenção à definição da função objectivo, das variáveis de decisão e dos objectivos de projecto.

No Capítulo 4 são apresentados os exemplos de aplicação do modelo numérico desenvolvido no âmbito da presente dissertação. Deste modo, começa-se por apresentar um conjunto de exemplos de verificação referentes à optimização de elementos de betão armado (viga simplesmente apoiada, viga contínua e pilar em flexão desviada). Posteriormente apresenta-se um exemplo de optimização de uma estrutura porticada de betão armado com minimização do custo económico e do custo ambiental.

No Capítulo 5 indicam-se as principais conclusões obtidas com a realização deste trabalho e apresentam-se algumas ideias para eventuais trabalhos futuros.

Apresenta-se também a listagem das referências bibliográficas que foram utilizadas para a realização desta dissertação.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Introdução

No presente capítulo apresenta-se uma revisão bibliográfica acerca da temática em estudo nesta dissertação, ou seja, a optimização de estruturas de betão e a minimização dos custos ambientais. Começa-se por referir alguns conceitos gerais no que respeita à optimização de estruturas e aos métodos utilizados para a resolução deste tipo de problemas. Posteriormente, apresenta-se uma revisão de trabalhos anteriores relativamente à optimização de estruturas de betão, prestando-se especial atenção aos trabalhos em que se considerou a minimização do custo ambiental.

A optimização estrutural é um processo iterativo que, através de programação matemática, pretende melhorar o projecto inicial. A melhoria é obtida através da alteração dos valores das variáveis de decisão que caracterizam o comportamento estrutural, de modo a minimizar uma função objectivo definida com base em critérios estruturais ou económicos. A obtenção da solução óptima é condicionada pela verificação de um conjunto de restrições de projecto.

A resolução dos problemas de optimização pode ser feita utilizando dois tipos de algoritmos: métodos de pesquisa directa ou os métodos heurísticos. Os métodos de pesquisa directa são baseados em gradientes, produzem bons resultados quando as funções são contínuas, convexas e uni modais. Como utilizam informações dos gradientes da função objectivo e dos objectivos de projecto, são algoritmos eficientes mesmo para problemas com elevado número de variáveis de decisão e de objectivos de projecto. No entanto, são ineficientes quando aplicados a problemas que apresentam não diferenciabilidade ou descontinuidades. Os métodos heurísticos podem reduzir algumas destas dificuldades apresentadas anteriormente, justificando o facto de que cada vez estão mais desenvolvidas as pesquisas com estes métodos, visando comparar os seus resultados com os métodos clássicos na solução de problemas de optimização. Estes caracterizam-se pela pesquisa da solução óptima utilizando regras de probabilidade, trabalhando de maneira “aleatória orientada”. Tais métodos utilizam apenas as informações da função de optimização, não requerendo informações sobre suas derivadas ou possíveis descontinuidades. Estas técnicas requerem um número elevado de avaliações do problema. Isto é necessário para que se dê oportunidade ao método de explorar devidamente toda a região do espaço em que está contida a solução óptima, resultando em um grande número de avaliações da função necessários para encontrar a solução (Saramago e Steffen, 2008).

Devido ao elevado custo computacional requerido por estes métodos só mais recentemente é que a sua aplicação tem vindo a crescer em virtude do desenvolvimento dos computadores.

---

## 2.2 Sustentabilidade na construção

O sector da construção civil é responsável por grande consumo de materiais, de água e de energia, gerando um impacto negativo sobre o meio ambiente. De acordo com dados do Worldwatch Institute (Worldwatch, 2018), a construção de edifícios consome 40% de pedras e areia utilizados no mundo por ano, além de ser responsável por 25% da extracção de madeira anualmente. É natural que a sustentabilidade assuma, gradualmente, uma posição de maior importância, pois com o avançar dos tempos existe uma preocupação com o meio ambiente e como se pode reduzir os impactos sobre ele. Devido a este facto criou-se o conceito de construção sustentável que se baseia no desenvolvimento de modelos que permitam à construção civil enfrentar e propor soluções aos principais problemas ambientais da nossa época, sem renunciar à moderna tecnologia e à criação de edificações que atendam as necessidades dos seus utilizadores. (TETO, 2018).

Chou e Yeh (2015) desenvolveram um sistema de avaliação de emissões de dióxido de carbono e um método de cálculo de custos. Foram considerados os consumos dos combustíveis fósseis, da electricidade e da água. Além desta avaliação propuseram um sistema para otimizar as emissões e o custo ambiental durante a construção e o ciclo de vida da estrutura. Desenvolveram uma forma simplificada para converter as emissões de dióxido de carbono em custos ambientais, onde se pode avaliar o risco ambiental da construção de um edifício e durante a sua vida, admitindo uma durabilidade de 50 anos. Concluíram que o transporte é a principal causa das emissões de dióxido de carbono. Devido a este facto uma estrutura pré-fabricada só fica mais económica se a distância de transporte não for quatro vezes superior à do betão pronto. Além disso, para a área de 37.411,72 m<sup>2</sup> analisada no caso de estudo, o custo ambiental do ciclo de vida da construção no local foi inferior ao da construção totalmente pré-fabricada, assumindo uma vida útil de 50 anos. Portanto, o método de construção no local é mais benéfico a nível ambiental do que o método totalmente pré-fabricado com base nas distâncias de transporte do estudo.

Syngros *et al.* (2017) estudaram o impacto ambiental em termos de emissões de CO<sub>2</sub> de materiais usados na construção de quatro habitações típicas da Grécia. Também estudaram a relação que existe entre a massa de material utilizado e as respectivas emissões de CO<sub>2</sub>. Estas habitações estão situadas em Atenas e os seus anos de construção são de 2000 a 2010. Foram analisadas em quatro casos. Os casos A e B são habitações multifamiliares de 2008 e 2010, respectivamente. Os casos C e D são de habitações unifamiliares de 2010 e 2009, respectivamente. O método de análise foi dividido em três fases para cada caso. A primeira fase foi a de análise do material, onde foram analisados quais os materiais existentes (betão, tijolos, gesso aço, cal, telhas, cerâmicas, madeiras, alumínio, etc.). A segunda fase consistiu na análise da massa, onde para cada material registrado foi anotada a sua massa em kg. Na terceira fase

---

foi feita uma análise das emissões de CO<sub>2</sub>, onde os valores de massa foram convertidos em kgCO<sub>2</sub>. Destas três fases foi concluído que o betão é o material dominante em termos de massa (60%) enquanto o aço é em termos de emissões de CO<sub>2</sub> (30%). Outra conclusão importante retida deste trabalho é que as habitações multifamiliares têm um maior impacto em termos de emissões de CO<sub>2</sub>, devido à sua massa ser mais elevada, mas por outro lado os seus valores a níveis de intensidade por unidade de área são menores, devido à sua área por piso ser maior.

Como se pode concluir do trabalho desenvolvido por Syngros *et al.* (2017) o betão é um dos materiais que mais emissões de CO<sub>2</sub> gera. Este facto justifica a preocupação crescente do sector da construção civil com as questões ambientais. Devido a esta preocupação Zhang e Wang (2016) apresentaram um trabalho com o objectivo de propor um método para estimar as emissões de CO<sub>2</sub> no sector da construção da China entre os anos 2005 a 2012. Neste trabalho o objectivo era o de estabelecer formulas para calcular as emissões de CO<sub>2</sub> em vários momentos do ciclo de vida da estrutura. Os resultados indicam que as emissões de CO<sub>2</sub> aumentaram desde 2005. Esta subida foi moderada de 2005 a 2010 e começou a crescer rapidamente a partir de 2010. As emissões de CO<sub>2</sub> são geradas na fase de fabricação dos materiais de construção, na fase de construção e na fase de eliminação de resíduos. A análise detalhada de cada fase mostra que a emissão é dominante na fase de fabricação dos materiais de construção. Com base nos resultados da análise de sensibilidades verificou-se que o aço e o cimento são os factores que mais influenciam as emissões de CO<sub>2</sub>. Desta forma, é necessário que no futuro haja uma preocupação em diminuir o consumo de aço e cimento e desenvolver técnicas eficientes em termos de energia e amigas do ambiente. Além disso, também pode ser muito útil mudar a estrutura de consumo de energia para fontes mais limpas e energias renováveis.

Wang *et al.* (2017) apresentaram uma avaliação integrada da sustentabilidade do ciclo de vida de uma estrutura de betão. Nesta avaliação mostraram que a substituição de cimento normal por cimento com cinzas volantes resulta na diminuição das emissões de CO<sub>2</sub>. Deste modo, esta substituição faz com que o impacto social, ambiental e económico seja reduzido. Os autores concluíram que a substituição do cimento Portland por cimento com cinzas volantes reduz tanto a energia de produção como os gases com efeito de estufa libertados. Um dos valores que apresentado é que esta substituição pode reduzir em 560 milhões as toneladas de CO<sub>2</sub> libertado.

## **2.3 Optimização de estruturas de betão**

### **2.3.1 Métodos de pesquisa directa**

Os métodos de pesquisa directa constituem os métodos clássicos de optimização, pelo que, os primeiros trabalhos de investigação acerca da optimização de estruturas de betão foram levados a cabo com a aplicação destes algoritmos.

---

Kanagasundaram e Karihaloo (1990) desenvolveram um modelo numérico de optimização com o objectivo de minimizar o custo de elementos de betão armado sujeitos a restrições de projecto estabelecidas de acordo com a norma australiana AS3600 de 1988. No custo total foram considerados os custos do betão, do aço das armaduras e da cofragem. O problema de optimização foi formulado como um problema de programação não linear cuja solução é obtida através de duas técnicas que são a programação linear sequencial (*sequential linear programming* – SLP) e a programação convexa sequencial (*sequential convex programming* – SCP), obtendo-se resultados semelhantes. Os autores apresentaram exemplos de aplicação referentes ao dimensionamento de elementos simples de betão armado, nomeadamente, vigas simplesmente apoiadas, vigas contínuas e pilares.

Al-Gahtani *et al.* (1993) desenvolveram um software experimental que tinha em conta a optimização dos custos, mas também a análise estrutural. Foi utilizado um modelo de viga onde o objectivo era a redução dos custos, do peso e do volume. Foram utilizadas as restrições do código ACI (American Concrete Institute), diferentes secções de vigas e vários perfis de tensionamento do aço pré-esforçado. Concluíram que este modelo era útil para análise ou projecto de sistemas estruturais, que este poderia ser utilizado para gerar um estudo paramétrico para se obter relações óptimas e variáveis de projecto. Este modelo é eficaz para se utilizar a nível académico porque permite visualizar e compreender o comportamento de vigas com diversos carregamentos e diferentes geometrias.

Kirsch (1997) apresentou um trabalho de optimização em dois níveis para o dimensionamento de elementos de betão pré-esforçado. No primeiro nível procede-se à optimização da força de pré-esforço e das coordenadas do traçado do cabo, sendo este problema resolvido por programação linear. Para a determinação das dimensões mínimas de betão procedeu à resolução de um problema não linear simples de programação. A principal vantagem do processo em resolução é que a solução de cada um dos problemas simplificados apresentados envolve apenas uma única análise estrutural. Além disso, cada um dos problemas pode ser prontamente resolvido por programas de computador disponíveis. Em segundo lugar, os resultados obtidos são úteis para vários projectos óptimos e são viáveis. Por fim concluiu que a solução dos problemas simplificados é mais eficiente.

Sarma e Adeli (1998) apresentaram um trabalho de revisão bibliográfica acerca da optimização de custos em estruturas de betão. Para o desenvolvimento deste trabalho os autores consideraram importante o estudo de três tipos de custos diferentes a ter em conta na optimização de estruturas de betão armado. Estes são os custos do betão, do aço e da cofragem. Com este estudo concluíram que ainda havia uma grande necessidade de executar um longo estudo sobre os custos estruturais, pois a maioria dos artigos publicados até então falava sobre a minimização do peso da estrutura.

---

Outro facto constatado pelos autores é o de que a maioria dos artigos de optimização não tinha em conta os custos da cofragem, apenas se referiam ao custo dos materiais, embora se saiba que o custo das cofragens é muito significativo, principalmente em países industrializados. Os autores também consideraram que era importante ser tido em conta neste tipo de trabalhos outros tipos de custos como o de mão-de-obra, de colocação e transporte. Com este trabalho os autores quiseram mostrar que se deveria fazer uma optimização do ciclo de vida da estrutura e não apenas uma minimização do custo dos materiais.

### **2.3.2 Métodos heurísticos**

Os métodos heurísticos caracterizam-se pela busca da melhor solução através de regras de probabilidade, trabalhando de maneira “aleatória orientada”. Estes métodos utilizam informações da função objectivo, não necessitando de informações sobre as suas derivadas ou possíveis descontinuidades. Esta técnica requer um número elevado de avaliações da função objectivo que define o problema método explore devidamente toda a região do espaço em que está contida a solução óptima. Devido ao elevado custo computacional requerido por estes métodos só mais recentemente é que a sua aplicação tem vindo a crescer, em virtude do desenvolvimento dos computadores.

Lee e Geem (2004), estudaram uma abordagem de optimização heurística para problemas de variáveis contínuas com um algoritmo harmónico aplicado a problemas de estruturas de betão armado. Deste estudo foi concluído que este algoritmo é uma ferramenta poderosa e que pode ser facilmente aplicado a vários problemas de optimização estrutural, pois este consegue chegar a soluções melhores do que as obtidas pelos algoritmos usados até então.

Govindaraj e Ramasamy (2007) aplicaram um algoritmo genético à optimização de estruturas de betão armado e chegaram à conclusão que com um bom computador estes métodos permitiam chegar a bons resultados de optimização e relativamente rápido, o que não era conseguido através dos métodos de pesquisa directa. E também que os seus resultados eram bem aplicados na realidade, ou seja, estes métodos fornecem melhores soluções e conseguem obter essas soluções rapidamente.

Martí e González-Vidosa (2010) utilizaram os métodos heurísticos a pontes pedestres pré-fabricadas de betão, pois neste tipo de estruturas é muito importante a diminuição do peso do material, devido à sua elevação, transporte e custos de fabrico. Para mostrar a eficiência destes métodos desenvolveram dois algoritmos um SA (simulated annealing) e outro TA (threshold accept-ing), onde concluíram que o SA apresentava resultados com custos mais baixos. Com este estudo mostraram que os algoritmos heurísticos são uma ferramenta importante para futuramente estudar este tipo de estruturas.

---

Martí *et al.* (2013) desenvolveram um trabalho sobre pontes pré-fabricadas de betão, com corte transversal em forma de duplo U. O algoritmo foi aplicado para estudar o custo económico de estruturas em diferentes fases de fabrico, transporte e construção. Com este trabalho concluíram que numa análise de custos que um aumento máximo de 20% na quantidade de aço leva a um aumento de 11,82% no custo, no entanto um aumento de 20% no betão aumenta o custo até 4,20%, ou seja, 2,8 vezes menos. A análise desenvolvida indicou que as características de custo optimizadas são um pouco influenciadas por diferentes cenários económicos para o aço e para o betão.

Mergos (2016) desenvolveu uma optimização duma estrutura em betão armado que englobando a acção sísmica. Esta tinha o objectivo de estudar as vantagens e desvantagens das duas normas de projecto sísmico, que neste caso são o Eurocódigo 8 e o Model Code 2010. Ao nível do custo de construção concluiu que para as duas metodologias este aumenta com o nível de aceleração no solo. Posteriormente em 2018 o mesmo autor propôs uma nova metodologia de calculo para o projecto sísmico de estruturas em betão armado utilizando os procedimentos da análise não linear. A particularidade desta abordagem é a simplicidade, pois apenas as dimensões das secções transversais dos varões de aço são definidas como variáveis de projecto independentes. Isto reduz muito o espaço de pesquisa, permitindo que os algoritmos de optimização gerem soluções reais, económicas e robustas. Neste estudo são analisadas várias estruturas de betão armado e comparadas com uma solução padrão. Concluiu que quando se faz a análise de uma estrutura mais simples o resultado óptimo gerado é igual à solução padrão, mas com a vantagem que o tempo de cálculo é muito mais rápido. Nos casos em que as estruturas são mais complexas e com o mesmo tempo de cálculo computacional, este algoritmo gera respostas mais económicas e mais robustas que a solução padrão.

Kaveh e Behnam (2013) apresentaram um trabalho com estruturas tridimensionais com vários andares, onde foram utilizados algoritmos meta-heurísticos, o Charged System Search (CSS) e uma versão melhorada deste. As normas utilizadas foram a ACI 3018-05 e a ASCE7-05 e a análise foi realizada através do método da rigidez padrão. A função objectivo é o peso da estrutura. As restrições utilizadas neste trabalho foram o deslocamento máximo, a esbelteza e a frequência natural da estrutura. Com este trabalho e na comparação dos dois algoritmos o que neste caso chega à solução óptima num menor número de iterações, ou seja, mais rapidamente é o CSS. Com este trabalho os autores mostraram que estes algoritmos são ferramentas que simplificam e facilitam a optimização de grandes estruturas.

Esfandiari *et al.* (2018) apresentaram um algoritmo que consistiu em combinar a tomada de decisão multicritério (DM) e a optimização através do enxame de partículas (PSO), onde resultou DMPSO. Este auxilia a obtenção de resultados da solução optima de estruturas tridimensionais em betão armado. Este algoritmo foi utilizado para investigar a resposta de

---

estruturas de betão armado em 2D e 3D submetidas a cargas dinâmicas (2D) e estáticas (3D). Este algoritmo foi primeiramente aplicado a cargas estáticas em estruturas tridimensionais, com o objectivo de minimizar os custos e o peso da estrutura. Com este estudo concluíram que o algoritmo tinha uma resposta eficiente, pois apresentou resultados que podem ser utilizados directamente na prática sem necessidade de qualquer modificação ou processo adicional.

Com o mesmo algoritmo, DMPSO, aplicado a estruturas sujeitas a cargas dinâmicas, com o objectivo de reduzir o custo económico e o peso da estrutura. Concluíram que este acelera e simplifica o processo da procura da solução óptima e que fornece soluções realistas de dimensões de secções transversais e reforços de aço que podem ser directamente utilizados em casos reais sem necessitar de nenhuma alteração.

## **2.4 Optimização de estruturas com minimização do custo ambiental**

Mais recentemente e tendo em conta as crescentes preocupações ambientais foram desenvolvidos alguns trabalhos de investigação tendo em vista a minimização, não apenas dos custos dos materiais, mas também dos custos ambientais.

Paya-Zaforteza *et al.* (2009) descreveram um método para estruturas de betão armado com base nas emissões de CO<sub>2</sub>. Para este método foi desenvolvido um algoritmo, foram aplicadas duas funções objectivo, as emissões de dióxido de carbono e o custo económico de estruturas. As variáveis em estudo foram as dimensões, os materiais e o aço. Este método envolveu uma parte de verificação estrutural com cargas verticais e horizontais, incluindo a verificação do código espanhol. Concluíram que as duas funções objectivo são altamente relacionáveis, pois as melhores soluções a nível de emissões de dióxido de carbono são no máximo 2,77% mais caras do que as melhores soluções a nível de custo económico. Pelo contrário as melhores soluções a nível de custo pioram as emissões de dióxido de carbono em 3,8%.

Henriques (2011) no seu projecto de dissertação de mestrado desenvolveu um modelo onde o seu objectivo era determinar o custo de dióxido de carbono por m<sup>2</sup> de construção. Neste trabalho foram tidas em conta as fases de ciclo do betão até à fase de colocação em obra. Concluiu que a principal fonte de emissões de dióxido de carbono é a produção de cimento. Este estudo também permitiu chegar à conclusão de valores, como por exemplo são emitidos cerca de 50 kg de CO<sub>2</sub>/m<sup>2</sup> de piso para o betão com uso de cimentos CEM I, e 19,5 kg de CO<sub>2</sub>/m<sup>2</sup> para o betão com uso de cimentos CEM III (referindo-se apenas ao caso em estudo). Outra conclusão que se pode retirar é que as emissões de dióxido de carbono até à colocação do betão em obra não são muito significativas quando comparadas com o consumo de energia ao longo dos 50 anos de vida útil de um edifício.

---

Pires (2013) desenvolveu uma dissertação sobre impactes ambientais que são produzidos na indústria da construção. Neste trabalho teve atenção a dois parâmetros que foram a energia incorporada nos materiais de construção e as emissões de dióxido de carbono. O objectivo consistiu em determinar as necessidades energéticas e emissões de dióxido de carbono num projecto de construção com manutenção de fachadas de um edifício pombalino. Tentou traduzir os consumos energéticos em custos ambientais e envolver esta parcela nos custos de construção. O autor concluiu que se deve optar pela demolição com restauração de fachadas em vez da demolição integral pois esta consome mais materiais, logo mais energia, assim emite uma maior quantidade de CO<sub>2</sub>. Utilizar materiais com grande capacidade de serem reaproveitados o que permite economizar consumos na sua transformação e produção. Este tipo de decisões vai diminuir as emissões de CO<sub>2</sub>, o que se irá reflectir em diminuição da poluição atmosférica.

Park *et al.* (2013) desenvolveram um método para minimizar os custos das emissões de dióxido de carbono e o custo de total de projecto de um edifício alto. A quantidade total de emissões de dióxido de carbono é convertida em custos. O método de projecto óptimo proposto emprega um algoritmo genético como uma ferramenta de optimização e tem em consideração os preços unitários e as emissões de dióxido de carbono para as várias resistências de betão e do aço. Para reduzir o tempo de computação e melhorar a capacidade de pesquisa de soluções óptimas, a restrição das condições de construtibilidade são consideradas como condições de restrição lateral. O método de optimização proposto pode ser aplicado ao projecto de pilares integrados numa estrutura de um edifício. Nesta optimização é feita a suposição de que as forças internas nos pilares são constantes, isto para simplificar o processo de optimização. Este é aplicado a um projecto com 35 andares e são investigados em termos de viabilidade económica e ambiental. Concluíram que a estrutura ideal reduz o custo das emissões de dióxido de carbono, o peso do aço e do betão utilizados em 31,51%, 30,30% e 7,79%, respectivamente. Concluíram que reduzir a quantidade de aço mas aumentar a quantidade de betão, pode ser uma maneira eficaz de reduzir os custos estruturais e as emissões de dióxido de carbono dos pilares. Mostraram que o uso do betão e do aço de alta resistência reduz as emissões de dióxido de carbono.

Park *et al.* (2014) voltaram a estudar os pilares com objectivo de reduzir as emissões de CO<sub>2</sub> e os custos associados. Em primeiro lugar identificaram de onde surgiam as emissões de dióxido de carbono, depois criaram uma função objectivo para minimizar os custos e as emissões de CO<sub>2</sub>. O custo foi calculado com base nos pesos por unidade de volume da taxa de armadura no betão (este depende do país onde o estudo está a ser realizado), as emissões de dióxido de carbono foram calculadas com base no peso de dióxido de carbono por unidade de peso de betão e de armadura. Com este estudo concluíram que a redução da taxa de armadura é uma forma eficiente para a redução de custos e também para a redução de emissões de dióxido de carbono. Outra conclusão importante é que o aumento das forças nos materiais estruturais era

---

melhor para a redução do custo e das emissões de dióxido de carbono do que o aumento das quantidades de materiais estruturais utilizados.

Medeiros e Kripka (2014), estudaram os custos monetários e ambientais associados a pilares rectangulares submetidos à flexão e compressão. Para o desenvolvimento do algoritmo foram tidos em conta algumas variáveis como o tamanho da secção de betão e a resistência do betão, com objectivo de fazer uma optimização dos custos ambientais a partir da análise do ciclo de vida. A norma utilizada foi a ABNT NBR 6118/07 que é uma norma brasileira. Chegaram à conclusão que a optimização dos custos monetários está relacionada com a redução dos custos ambientais e que para melhorar se tinha de aumentar a resistência dos materiais estruturais e a quantidade de betão utilizada.

Yeo e Potra (2014) desenvolveram um trabalho de optimização de uma estrutura, onde o objectivo era minimizar o custo tendo em conta as emissões de CO<sub>2</sub>. Neste trabalho utilizaram um algoritmo de pesquisa directa. A análise estrutural foi bastante simples e não foi tido em conta a ação sísmica e as não-linearidades geométricas. Concluíram que para se diminuir as emissões de CO<sub>2</sub>, em edifícios altos com grandes forças de compressão, tem de se aumentar a quantidade de aço e a ductilidade teria de ser assegurada através das respectivas restrições no processo de optimização. Esta optimização significa uma redução de 5% a 15% das emissões de CO<sub>2</sub>.

Yepes *et al.* (2015) desenvolveram um trabalho com o algoritmo de optimização do enxame de pirilampos (SAGSO) com o objectivo de minimizar as emissões de CO<sub>2</sub> e o custo, em pontes pré-fabricadas de betão armado com uma secção transversal em U. Neste estudo foi utilizado este tipo de secção transversal devido à sua elevada resistência. São consideradas duas funções objectivo que são as emissões de CO<sub>2</sub> e os custos na produção de materiais, transporte e construção. Desta análise os autores concluíram que as emissões de CO<sub>2</sub> estão relacionadas com os custos, pois se houver uma redução do custo em apenas 1€ pode significar numa redução de 1,75kg de emissões de CO<sub>2</sub>. Com este algoritmo os autores mostraram que é possível obter uma solução que seja óptima que minimize os custos e as emissões sem comprometer a fiabilidade da estrutura.

García *et al.* (2016) analisaram a eficiência estrutural de pontes rodoviárias em betão armado pré-esforçado através de uma optimização multi-objectivo. A optimização foi formulada com base no custo económico, ambiental, na durabilidade da estrutura (início da corrosão) e nos critérios de segurança. Com este estudo concluíram que a minimização do custo e das emissões de dióxido de carbono favorece a eficiência estrutural e minora a quantidade de materiais. No fim da análise os autores comparam os resultados da optimização com os padrões, a optimização conseguiu chegar a mais económicos e com emissões de CO<sub>2</sub> mais baixas, para

isso o reforço de aço tem de ser reduzido, a quantidade de betão e de aço pré-esforçado tem de ser aumentada.

Mergos (2017), investigou a minimização das emissões de CO<sub>2</sub> quando ocorre a acção sísmica em elementos de betão armado, vigas e pilares. Para a realização deste trabalho a norma utilizada foi o Eurocódigo 8. Concluiu que os principais elementos que contribuem para as emissões de CO<sub>2</sub> são os de betão armado e que o seu impacto pode ser reduzido através da optimização estrutural de maneira a maximizar a eficiência do material e a minimizar as emissões de CO<sub>2</sub> incorporadas. Estas conclusões são válidas apenas para elementos de betão armado isolados como as vigas e os pilares. Com este trabalho o autor mostrou que quando se projecta estruturas que tenham em conta a acção do sismo, mas que tenham alta ductilidade, as emissões de CO<sub>2</sub> vão ser mais reduzidas.

Nesta dissertação optou-se pela utilização de um método de pesquisa directa. Esta opção justifica-se pela inexistência de trabalhos recentes na temática abordada no presente trabalho em que se utilizem este tipo de algoritmos, tal como se pode verificar na revisão bibliográfica efectuada. Para além disso, nos trabalhos anteriores em que se recorreu a estes algoritmos não se consideraram os efeitos diferidos do betão, os efeitos geometricamente não-lineares e a acção dinâmica dos sismos. A escolha de um algoritmo de pesquisa directa justifica-se também pela sua eficiência computacional para resolução de um problema com alguma complexidade e dimensão como o abordado no presente trabalho.

## 3 ANÁLISE E OPTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

### 3.1 Introdução

No presente capítulo descreve-se o modelo numérico de análise e optimização desenvolvido e aplicado no âmbito da presente dissertação. Este modelo é constituído por dois módulos: um dedicado à análise estrutural e outro dedicado à análise de sensibilidades e optimização. Deste modo, começa-se por descrever os aspectos relacionados com o módulo de análise estrutural, apresentando-se a organização do programa de computador e os elementos finitos utilizados. Faz-se referência à modelação das imperfeições geométricas, dos efeitos geometricamente não-lineares, dos efeitos diferidos do betão e à consideração da acção dinâmica dos sismos. Posteriormente, descreve-se o módulo de análise de sensibilidades e optimização, apresentando-se os conceitos gerais e os diversos aspectos envolvidos na definição do problema de optimização estrutural para o caso específico do projecto de estruturas porticadas betão.

### 3.2 Análise estrutural

#### 3.2.1 Considerações gerais

Neste trabalho utilizou-se como base um programa de computador desenvolvido por Martins (2015) na sua Tese de Doutoramento tendo em vista a análise e optimização de pontes atirantadas de betão. Este programa baseia-se no Método dos Elementos Finitos e foi desenvolvido em ambiente *MATLAB*.

De referir que, no contexto do desenvolvimento do presente trabalho se apresentou um artigo no encontro científico internacional *EngOpt 2018* (Martins *et al.*, 2019). Nesse trabalho procedeu-se à optimização de uma estrutura porticada de betão armado tendo em vista a minimização do custo de construção e do custo ambiental (expresso em termos de emissões de CO<sub>2</sub>). Considerou-se uma modelação 3D, com a estrutura sujeita às cargas permanentes, às sobrecargas de utilização, à acção do vento e à acção do sismo modelada simplificada com forças laterais. No exemplo de aplicação apresentado mostrou-se que é possível obter uma solução de custo mínimo em termos económicos e ambientais, reduzindo as emissões de CO<sub>2</sub>.

Como já foi referido, em relação ao programa de computador utilizado pode dizer-se que este é constituído por um módulo de análise estrutural e um outro módulo destinado à análise de sensibilidades e optimização, como se ilustra a Figura 3.1.

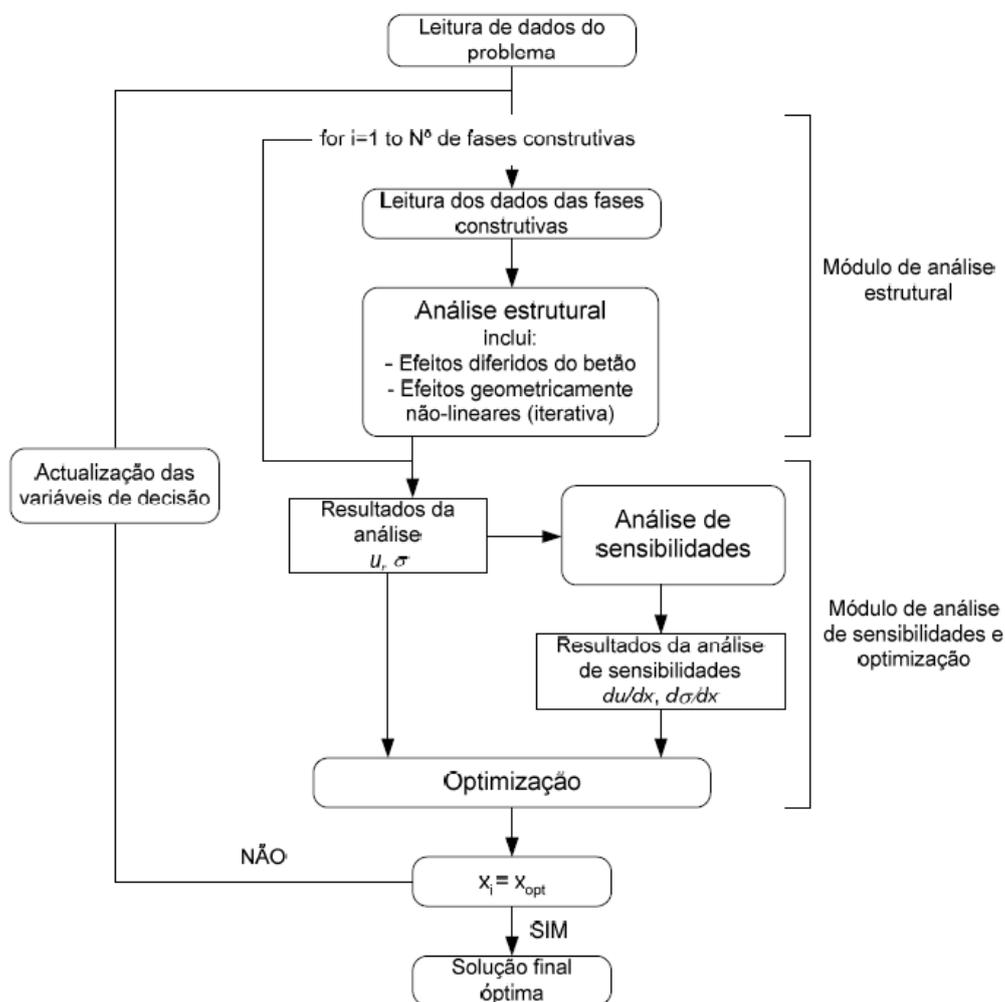


Figura 3.1 – Diagrama de blocos do programa de computador desenvolvido (Martins, 2015)

O programa utilizado dispõe de vários tipos de elementos finitos que possibilitam a modelação e análise de estruturas reticuladas tridimensionais. Neste trabalho, para a modelação de estruturas porticadas de betão armado, utilizou-se o elemento finito de Euler-Bernoulli com 2 nós e 12 graus de liberdade. Os graus de liberdade em cada nó são as translações segundo cada eixo e as rotações em torno de cada eixo como se representa na Figura 3.2.

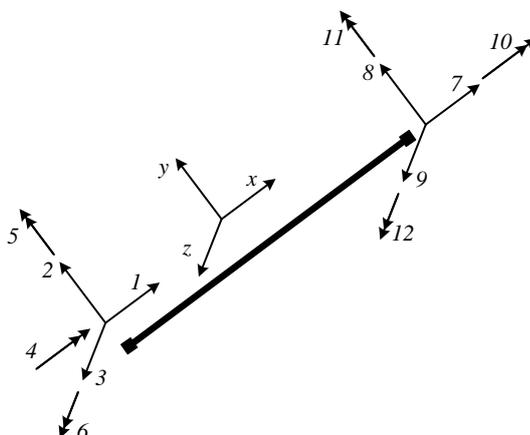


Figura 3.2 – Graus de liberdade do elemento viga em coordenadas locais

A matriz de rigidez elástica do elemento viga considerado a respeito dos graus de liberdade locais representados na Figura 3.2 é dada pela seguinte expressão

$$\underline{K}_E = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Onde  $E$  representa o módulo de elasticidade,  $G$  o módulo de distorção,  $A$  a área da secção transversal,  $L$  o comprimento do elemento e  $I_z$ ,  $I_y$  e  $I_t$  representam, respectivamente, o momento de inércia em torno do eixo  $z$ , o momento de inércia em torno do eixo  $y$  e o momento de inércia à torção.

### 3.2.2 Imperfeições geométricas

No modelo desenvolvido foi implementada a consideração das imperfeições geométricas, devido ao facto de numa estrutura estas existirem sempre, quer devido a defeitos de construção

em relação à verticalidade dos pilares, quer em relação à posição das cargas. Estas são consideradas tendo em conta uma inclinação,  $\theta_i$ . Segundo o Eurocódigo 2 (NP EN1992-1-1, 2010) esta inclinação,  $\theta_i$ , pode ser calculada através de:

$$\theta_i = \theta_0 \alpha_h \alpha_m \quad (3.2)$$

Em que:

$\theta_0 = \frac{1}{200}$ , valor básico;

$\alpha_h$  - coeficiente de redução relativo ao comprimento ou à altura:  $\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{l}}$ ;  $\frac{2}{3} \leq \alpha_h \leq 1$ , onde  $l$  é o comprimento ou altura (m);

$\alpha_m$  – coeficiente de redução relativo ao numero de elementos dado por:

$$\alpha_m = \sqrt{0,5(1 + \frac{1}{m})} \quad (3.3)$$

onde  $m$  é o número de elementos verticais que contribuem para o efeito total.

A partir do valor da inclinação,  $\theta_i$ , as imperfeições geométricas dos pilares foram modeladas como um conjunto de forças horizontais aplicadas ao nível dos vários pisos e dadas por:

$$H_i = \theta_i \cdot N \quad (3.4)$$

em que  $N$  representa o valor do esforço axial no pilar.

A dependência destas forças do valor do esforço axial nos pilares requer que seja realizada uma análise iterativa, algo que também é feito no programa utilizado para ter em conta os efeitos geometricamente não-lineares como se descreve na secção seguinte.

### 3.2.3 Efeitos geometricamente não-lineares

Uma análise geometricamente não-linear é efectuada quando não se pode estabelecer uma relação directa entre acções e deslocamentos, consequência da influência da configuração deformada da estrutura. Os efeitos geometricamente não-lineares podem ser mais ou menos significativos consoante a flexibilidade da estrutura e traduzem-se em maiores deslocamentos e maiores esforços internos que os obtidos com uma análise linear da estrutura. Segundo o Eurocódigo 2 (NP EN 1992-1-1, 2010) os efeitos de segunda ordem devem ser considerados se representarem mais de 10% dos efeitos de primeira ordem. Dada a relevância da consideração destes efeitos na análise de estruturas porticadas os mesmos foram tidos em conta no modelo numérico utilizado.

Os efeitos geometricamente não-lineares foram tidos em conta através da modelação dos pilares como elementos de viga de Euler-Bernoulli com os graus de liberdade apresentados na Figura 3.2 e com matriz de rigidez dada pelas parcelas elástica ( $\underline{K}_E$ ) e geométrica ( $\underline{K}_G$ ). A expressão para a matriz de rigidez elástica já foi apresentada na Equação 3.1 e a expressão para a matriz de rigidez geométrica apresenta-se na Equação 3.5.

$$\underline{K}_G = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} \\ & & \frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2L^2}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & \frac{L^2}{30} & 0 \\ & & & & & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{30} \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{10} \\ & & & & & & & & \frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{2L^2}{15} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Em que,  $P$ , representa o esforço axial e em que se consideraram os sinais habituais, positivo para tracção e negativo para compressão.

Deste modo, os efeitos de segunda ordem foram contabilizados recorrendo a uma análise de segunda ordem aproximada, sendo modelados através de uma perda de rigidez dos pilares. Para tal, recorre-se a um processo iterativo em que se utilizam sucessivas análises lineares da estrutura. Este processo inicia-se com a análise linear da estrutura sujeita ao conjunto de acções externas. Do equilíbrio global da estrutura obtêm-se os deslocamentos nodais e os esforços internos nos elementos. A matriz de rigidez elementar de cada pilar é actualizada de acordo com o valor do esforço axial respectivo. Deste modo, a estrutura é analisada novamente e são obtidos novos valores para os deslocamentos nodais e para os esforços internos. O processo é repetido até os resultados de duas iterações consecutivas não apresentarem variação significativa.

### 3.2.4 Efeitos diferidos do betão

A fluência e a retracção constituem os efeitos diferidos do betão que se devem ao comportamento a longo prazo deste material. A fluência é definida como o aumento gradual da deformação ao longo do tempo, sob uma tensão constante. A fluência é um fenómeno de grande complexidade e ainda não totalmente conhecido. Pode referir-se que esta resulta de alterações na estrutura interna do betão provocadas por fenómenos físicos e químicos que ocorrem em virtude da tensão aplicada (Martins, 2015). A retracção pode ser definida como a diminuição do volume de uma peça de betão armado não carregada e a temperatura constante causada principalmente pela saída de água durante o endurecimento. Este processo ocorre desde o final da compactação até se atingir o estado de equilíbrio com o ambiente.

Segundo o Eurocódigo 2 (NP EN 1992-1-1, 2010) *"a fluência e a retracção do betão dependem da humidade ambiente, das dimensões do elemento e da composição do betão. A fluência também depende da idade do betão no primeiro carregamento assim como da duração e da intensidade da carga"*.

Para o cálculo das extensões de fluência e de retracção utilizaram-se os modelos propostos no Eurocódigo 2 (EN 1992-1-1, 2010). Assim, o coeficiente de fluência,  $\varphi(t, t_0)$ , pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) \quad (3.6)$$

onde  $\varphi_0$  é o coeficiente de fluência nominal que é calculado a partir de:

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad (3.7)$$

$\varphi_{RH}$  representa o factor que tem em conta a influência da humidade relativa e pode ser obtida através das seguintes expressões:

$$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1-RH/100}{0.1 \sqrt[3]{h_0}} \quad \text{para } f_{cm} \leq 35MPa \quad (3.8)$$

$$\varphi_{RH} = [1 + \frac{1-RH/100}{0.1 \sqrt[3]{h_0}} \times \alpha_1] \alpha_2 \quad \text{para } f_{cm} > 35MPa \quad (3.9)$$

onde  $RH$  é a humidade relativa do meio ambiente, em %.

$\beta(f_{cm})$  tem em conta a influência da resistência do betão no coeficiente de fluência convencional, é dado por:

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16.8}{\sqrt{f_{cm}}} \quad (3.10)$$

$f_{cm}$  é o valor médio da tensão de rotura do betão à compressão, em MPa, aos 28 dias de idade;  $\beta(t_0)$  é o factor que tem em conta a influência da idade do betão à data do carregamento no coeficiente de fluência dado pela seguinte expressão:

$$\beta(t_0) = \frac{1}{(0.1 + t_0^{0.20})} \quad (3.11)$$

$h_0$  é a espessura equivalente do elemento, em mm, dada por:

$$h_0 = \frac{2A_c}{u} \quad (3.12)$$

onde  $A_c$  representa a área da secção transversal e  $u$  a parte do perímetro do elemento em contacto com o ambiente.

O coeficiente que traduz a evolução da fluência no tempo,  $\beta_c(t, t_0)$ , após o carregamento poderá ser estimado por:

$$\beta_c(t, t_0) = \left[ \frac{(t - t_0)}{(\beta_H + t - t_0)} \right]^{0.3} \quad (3.13)$$

Onde:

$t$  idade do betão, em dias, na data considerada;

$t_0$  idade do betão, em dias, à data do carregamento;

$t - t_0$  duração não corrigida do carregamento, em dias;

$\beta_H$  coeficiente que depende da humidade relativa (RH em %) e da espessura equivalente do elemento ( $h_0$  em mm), pode ser obtido através:

$$\beta_H = 1.5[1 + (0.012RH)^{18}]h_0 + 250 \leq 1500 \text{ para } f_{cm} \leq 35MPa \quad (3.14)$$

$$\beta_H = 1.5[1 + (0.012RH)^{18}]h_0 + 250\alpha_3 \leq 1500\alpha_3 \text{ para } f_{cm} \geq 35MPa \quad (3.15)$$

$\alpha_{1/2/3}$  coeficientes que têm em conta a influência da resistência do betão:

$$\alpha_1 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0.7} \quad \alpha_2 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0.2} \quad \alpha_3 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0.5} \quad (3.16)$$

A extensão total de retracção pode ser calculada através da expressão:

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca} \quad (3.17)$$

onde:

$\varepsilon_{cs}$  extensão total de retracção;

$\varepsilon_{cd}$  extensão de retracção por secagem;

$\varepsilon_{ca}$  extensão de retracção autogénea.

A evolução com o tempo da extensão de retracção por secagem é dada por:

$$\varepsilon_{cd}(t) = \beta_{ds}(t, t_s) \cdot k_h \cdot \varepsilon_{cd,0} \quad (3.18)$$

onde:

$k_h$  coeficiente que depende da espessura equivalente,  $h_0$ ;

$$\beta_{ds}(t, t_s) = \frac{(t - t_s)}{(t - t_s) + 0.04\sqrt{h_0^3}} \quad (3.19)$$

$t$  idade do betão na data considerada, em dias;

$t_s$  idade do betão, em dias, no início da retracção por secagem; normalmente corresponde ao fim da cura;

$h_0$  espessura equivalente, em mm, da secção transversal, equação (3.12);

A extensão de retracção por secagem de referência é calculada por:

$$\varepsilon_{cd,0} = 0.85 \left[ (220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot \exp\left(-\alpha_{ds2} \cdot \frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right) \right] \cdot 10^{-6} \cdot \beta_{RH} \quad (3.20)$$

$$\beta_{RH} = 1,55 \left[ 1 - \left( \frac{RH}{RH_0} \right)^3 \right] \quad (3.21)$$

onde:

$f_{cm}$  valor médio da tensão de rotura do betão à compressão (MPa);

$f_{cm0}$  10 MPa

$\alpha_{ds1}$  coeficiente que depende do tipo de cimento:

=3 para cimento da Classe S;

=4 para cimento da Classe N;

=6 para cimento da Classe R;

$\alpha_{ds2}$  coeficiente que depende do tipo de cimento:

=0,13 para cimento da Classe S;

=0,12 para cimento da Classe N;

=0,11 para cimento da Classe R;

RH humidade relativa ambiente (%)

$RH_0$  =100%

A extensão de retracção autógena é obtida por:

$$\varepsilon_{ca}(t) = \beta_{as}(t) \varepsilon_{ca}(\infty) \quad (3.22)$$

$$\varepsilon_{ca}(\infty) = 2,5(f_{ck} - 10)10^{-6} \quad (3.23)$$

$$\beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0,2t^{0,5}) \quad (3.24)$$

em que  $t$  é expresso em dias.

A consideração dos efeitos diferidos já se encontrava implementada no programa de computador utilizado. Deste modo, conhecendo os valores das deformações produzidas pelos efeitos diferidos, estes foram simulados, na análise da estrutura pelo Método dos Elementos Finitos, utilizando forças nodais equivalentes. Estas forças impõem à estrutura um campo de deslocamentos a partir do qual é calculado o estado de deformação real da estrutura. Assim, o respectivo estado de tensão é determinado com base apenas na relação constitutiva elástica entre tensões e deformações de origem mecânica (Martins, 2015).

### 3.2.5 Análise dinâmica considerando a acção sísmica

A acção sísmica induz na estrutura esforços internos importantes que constituem, muitas vezes, a situação condicionante para o dimensionamento de elementos estruturais como é o caso dos pilares. Deste modo, tendo em conta a relevância da acção dinâmica dos sismos no âmbito do projecto de estruturas, a mesma foi considerada no módulo de análise do programa de computador utilizado na presente dissertação.

A análise dinâmica de estruturas envolve a resolução da equação de equilíbrio dinâmico, expressa na equação (3.25), onde  $\ddot{\underline{u}}(t)$  representa a aceleração,  $\dot{\underline{u}}(t)$  a velocidade e  $\underline{u}(t)$  o deslocamento da estrutura. Já as variáveis  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  e  $\underline{K}$  representam, respectivamente, as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez da estrutura.

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{C} \cdot \dot{\underline{u}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{u}(t) = \underline{M} \cdot \underline{r} \cdot \ddot{\underline{u}}_g(t) \quad (3.25)$$

A variável  $\underline{r}$  é uma matriz que relaciona os graus de liberdade da estrutura e as componentes de aceleração do solo dada por:

$$\ddot{\underline{u}}_g^T(t) = \{\ddot{u}_g^X, \ddot{u}_g^Y, \ddot{u}_g^Z\} \quad (3.26)$$

A determinação directa da resposta estrutural devido à acção sísmica é efectuada através da integração passo-a-passo da equação de equilíbrio dinâmico. No entanto, pode também ser obtida aplicando outras metodologias. De acordo com o Eurocódigo 8 (NP EN1998-1-1, 2010), em função das características estruturais do edifício, poderão utilizar-se análises lineares e não-lineares. No âmbito da análise linear poderão utilizar-se:

- a) o “método de análise por forças laterais” para os edifícios que satisfaçam determinadas condições;
- b) a “análise modal por espectro de resposta”, aplicável a todos os tipos de edifícios.

Como alternativa a um método linear poderão utilizar-se também métodos não-lineares, tais como:

- c) análise estática não linear (*pushover*);
- d) análise (dinâmica) temporal não-linear (*time-history*).

Neste trabalho a resposta da estrutura face à acção dinâmica dos sismos foi obtida recorrendo ao método da sobreposição modal em combinação com espectros de resposta. Esta metodologia já se encontrava implementada no programa de computador utilizado, pode ser aplicada a todos os tipos de edifícios e é particularmente adequada para um processo integrado de análise e optimização.

Para a análise modal adoptou-se uma formulação de massa concentrada para os elementos viga utilizado na modelação da estrutura. Como foi referido anteriormente, a matriz de rigidez da estrutura foi calculada tendo em conta os efeitos geometricamente não-lineares, ou seja, incluindo as parcelas elástica e geométrica dadas pelas Equações (3.1) e (3.5). O problema de valores e vectores próprios para obtenção das frequências próprias e dos modos de vibração pode ser expresso através de:

$$[\underline{K} - \lambda \cdot \underline{M}] \cdot \underline{\phi} = \underline{0} \quad (3.27)$$

onde  $\lambda = \omega^2$  são os valores próprios ou valores característicos representando o quadrado das frequência de vibração livre da estrutura ( $\omega$ ) e  $\underline{\phi}$  representam os vectores próprios ou modos de vibração do sistema estrutural (Clough e Penzien, 2003). Este problema foi resolvido utilizando a função *eigs* do MATLAB que permite obter a solução deste problema apenas para um determinado conjunto de valores e vectores próprios.

A acção sísmica foi quantificada recorrendo aos espectros de resposta elástica indicados no Eurocódigo 8 (NP EN 1998-1-1, 2010). A partir destes são obtidos os valores máximos da aceleração espectral,  $S_{ai}(\xi_i, T_i)$ , tendo em conta o coeficiente de amortecimento,  $\xi_i$ , e o período de vibração,  $T_i$ , de cada modo. Considerou-se um valor constante para o coeficiente de amortecimento,  $\xi = 5\%$ .

O vector de força modais máxima para cada um dos modos de vibração considerados é dado por

$$\underline{f}_{i,\max} = \underline{M} \cdot \underline{\phi}_i \frac{\Gamma_i}{M_i} S_{ai}(\xi, T_i) \quad (3.28)$$

onde  $\underline{\phi}_i$  representa o  $i$ -ésimo modo de vibração,  $\Gamma_i = (\underline{\phi}_i^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{r}) / (\underline{\phi}_i^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\phi}_i)$  é o factor de participação modal e  $M_i = \underline{\phi}_i^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\phi}_i$  é a massa generalizada do correspondente modo.

A combinação quadrática completa (CQC) (Wilson *et al.*, 1981) foi utilizada para a combinação das contribuições máximas de cada modo, dado que já se encontrava implementada no programa de computador utilizado. Esta apresenta a vantagem, relativamente à regra da raiz quadrada da soma dos quadrados (RQSQ), de contabilizar adequadamente as diversas contribuições modais mesmo quando se têm situações de acoplamento modal. Segundo o Eurocódigo 8 (NP EN 1998-1-1, 2010) essas situações ocorrem quando os correspondentes valores dos períodos de vibração de dois modos consecutivos diferem menos de 10%. Usando a regra da CQC, as forças segundo cada  $k$  grau de liberdade são obtidas aplicando a expressão

$$f_k = \sqrt{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p f_{ki} \cdot \rho_{ij} \cdot f_{kj}} \quad (3.29)$$

Assumindo um coeficiente de amortecimento constant para todos os modos, os coeficientes,  $\rho_{ij}$ , são dados por

$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2(1+r) \cdot r^{3/2}}{(1+r^2)^2 + 4\xi^2 r \cdot (1+r)^2} \quad (3.30)$$

onde  $r = \min(\omega_i, \omega_j) / \max(\omega_i, \omega_j)$ .

De acordo com o Eurocódigo 8 (NP EN 1998-1-1, 2010), na análise por sobreposição modal considerou-se um número mínimo  $k$  de modos que satisfaz as duas condições:

$$k \geq 3\sqrt{n} \quad (3.31)$$

$$T_k \leq 0,20s \quad (3.32)$$

em que:  $k$  número de modos considerados;  $n$  número de pisos acima da fundação ou do nível superior de uma cave rígida;  $T_k$  período de vibração do modo  $k$ .

### 3.3 Optimização estrutural

#### 3.3.1 Considerações gerais

A optimização estrutural é um processo iterativo que, através de programação matemática pretende melhorar o projecto inicial. A melhoria é obtida através da alteração dos valores das variáveis de decisão, de modo a minimizar uma função objectivo definida com critérios estruturais ou económicos. A obtenção da solução é condicionada pela verificação de um

conjunto de restrições. A formulação geral de um problema de optimização pode ser expressa através de:

$$\min F(\underline{x}) \quad (3.33)$$

$$s. a. g_j(\underline{x}) \geq 0 \quad \text{com } j = 1; \dots; N_G \quad (3.34)$$

$$s. a. h_k(\underline{x}) = 0 \quad \text{com } k = 1; \dots; N_E \quad (3.35)$$

onde:

$F(x)$  representa a função objectivo a minimizar;

$\underline{x}$  representa o vector das variáveis de decisão;

$g_j(\underline{x})$  representa as restrições de desigualdade;

$h_k(\underline{x})$  representa as restrições de igualdade.

Como já foi referido, a resolução dos problemas de optimização pode ser feita utilizando dois tipos de algoritmos: métodos de pesquisa directa ou métodos heurísticos. Neste trabalho utilizou-se um algoritmo de pesquisa directa.

A formulação de um problema de optimização envolve a definição das variáveis de decisão, dos objectivos de projecto e da função objectivo a minimizar. Para além disso, a utilização de um algoritmo de pesquisa directa implica o conhecimento dos gradientes da função objectivo e dos objectivos de projecto a respeito diversas das variáveis de decisão consideradas. Esta informação é obtida através de um processo designado por análise de sensibilidades. Nas secções seguintes são abordados em detalhe estes diversos aspectos fundamentais para a resolução de um problema de optimização.

### 3.3.2 Variáveis de decisão

As variáveis de decisão são os parâmetros caracterizadores do sistema estrutural cujos valores podem variar no decorrer do processo de optimização, ou seja, são as incógnitas do problema de optimização. Estas podem ser de natureza discreta ou contínua. As variáveis de natureza discreta podem apenas assumir valores fixos, dentro de uma banda de valores possíveis. As variáveis contínuas podem assumir qualquer valor dentro de um intervalo estipulado. Na resolução da maioria dos problemas de optimização é usual não considerar a natureza discreta das variáveis de decisão. Esta decisão justifica-se pelo facto de a resolução de um problema de optimização com variáveis de decisão discretas ser habitualmente bastante mais difícil que a resolução do mesmo problema com variáveis contínuas. Esta dificuldade advém da natureza combinatoria do problema com variáveis discretas, tendo-se um problema de dimensão considerável mesmo para uma estrutura simples.

Neste trabalho, tendo em conta que se recorre a um algoritmo de pesquisa directa para resolução do problema de optimização, consideraram-se apenas variáveis de decisão de natureza contínua. Apesar de se reconhecer que, do ponto de vista da prática da engenharia, a solução para o dimensionamento de uma estrutura porticada de betão armado apresenta valores discretos para as variáveis de decisão optou-se por resolver o problema com um algoritmo de pesquisa directa devido à eficiência do mesmo tendo em conta a dimensão do problema a resolver. No Capítulo 4 a questão da obtenção de uma solução discreta para o problema em análise neste trabalho é abordada novamente.

O vector das  $N$  variáveis de decisão  $\underline{x}$  é usualmente representado por:

$$\underline{x} = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_N\}^T \quad (3.36)$$

Como já foi referido, consideraram-se como variáveis de decisão as dimensões ( $h$  – altura e  $b$  – largura) das secções transversais rectangulares cheias das vigas e dos pilares. Consideraram-se também como variáveis de decisão a área de armadura longitudinal e a área de armadura de esforço transverso desses elementos estruturais, assim como a classe resistente do betão. Na Figura 3.3 representam-se os tipos de variáveis de decisão consideradas.

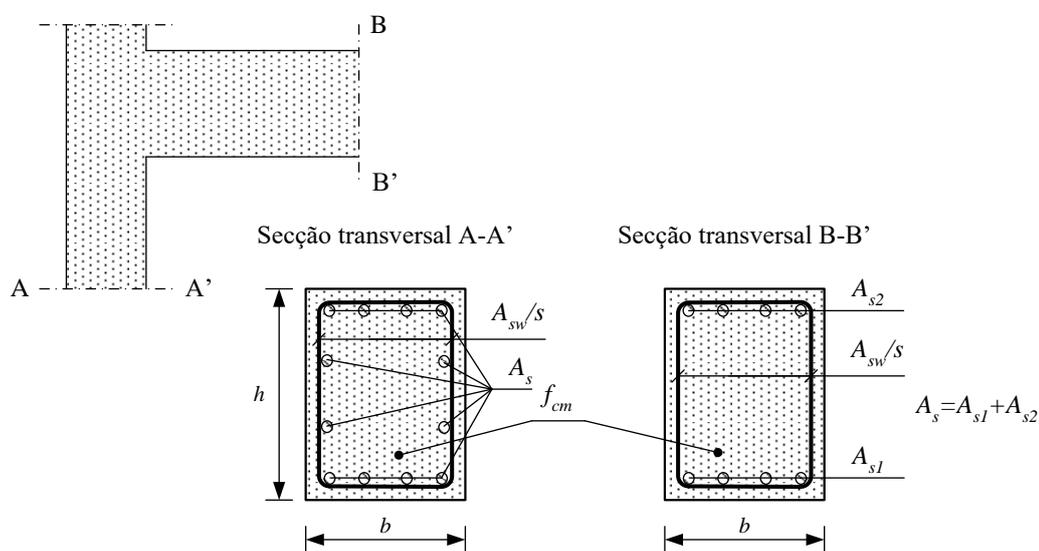


Figura 3.3 – Tipos de variáveis de decisão consideradas

Considera-se que as variáveis de decisão consideradas são as mais relevantes no contexto do dimensionamento deste tipo de estruturas e que mais influenciam os custos das mesmas. Não se consideraram variáveis de natureza geométrica ou topológica pois as mesmas em estruturas de edifícios estão, muitas vezes, condicionadas por aspectos arquitectónicos.

As variáveis de decisão referentes à altura e à largura da secção transversal já eram consideradas no modelo desenvolvido anteriormente por Martins (2015). No presente trabalho

implementaram-se as restantes variáveis de decisão. No Quadro 3.1 indicam-se os limites superiores e inferiores considerados para cada uma das variáveis de decisão.

Quadro 3.1 – Valores máximos e mínimos das variáveis de decisão

Tipo de variável de decisão	Valor mínimo	Valor máximo
Altura da secção, $h$	0,25 m	0,60 m
Largura da secção, $b$	0,25 m	0,60 m
Armadura longitudinal, $A_s$	0,0013 $A_c$	0,04 $A_c$
Armadura de esforço transversal, $A_{sw/s}$	$\left( (0,08\sqrt{f_{ck}}) / f_{yk} \right) \cdot b_w$	Est 2R $\phi 20//10$
Classe do betão, $f_{cm}$	28 MPa	58 MPa

No Quadro 3.1,  $A_c$  representa a área da secção transversal do elemento,  $b_w$  a largura da alma do elemento,  $f_{ck}$  e  $f_{yk}$  representam, respectivamente, o valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias de idade e o valor característico da tensão de cedência à tracção do aço das armaduras.

Todas as variáveis consideradas têm impacto directo no custo da estrutura. Assim, modificações nas variáveis seccionais vão traduzir-se em alteração do volume de materiais utilizados e consequentemente nos custos de construção. O betão a utilizar apresenta valores dos custos económicos e das emissões de CO<sub>2</sub> diferentes consoante a correspondente classe resistente.

### 3.3.3 Objectivos de projecto

Os objectivos de projecto são as condições a serem atingidas no fim do problema de optimização, de modo a garantir a obtenção de uma solução económica, segura, estruturalmente eficiente e sustentável. No âmbito desta dissertação considerou-se o seguinte conjunto de objectivos na formulação do problema de optimização:

- Custo de construção e custo ambiental da estrutura;
- Deslocamentos dos pontos da estrutura;
- Tensões nos elementos em serviço;
- Verificação da resistência à flexão;
- Verificação da resistência ao esforço transversal.

#### *Custo de construção e custo ambiental da estrutura*

O custo da estrutura é um dos objectivos do problema *multi-objectivo*. Neste trabalho, e tendo em conta que se pretende obter o projecto óptimo e sustentável consideraram-se o custo de construção e o custo ambiental (expresso em termos de emissões de CO<sub>2</sub>). Estes custos

dependem de várias parcelas como o custo dos materiais, custos de transporte, custos de execução (mão-de-obra, equipamentos, cofragens, operações de betonagem, etc.). As diversas parcelas podem ser definidas como percentagens do custo dos materiais e, por simplicidade, pode definir-se o custo da estrutura em função dos custos dos materiais. Assim sendo, o custo de uma estrutura porticada de betão armado pode ser definido do seguinte modo:

$$C = \sum_{i=1}^{NELEM} C_c \cdot A_{ci} \cdot L_i + C_s \cdot A_{si} \cdot L_i + C_s \cdot A_{swi} \cdot L_i + C_f \cdot P_{fi} \cdot L_i \quad (3.37)$$

onde:

$C$  custo total (de construção ou ambiental) da estrutura;

$NELEM$  número de elementos finitos;

$C_c$  custo unitário (de construção ou ambiental) do betão;

$C_s$  custo unitário (de construção ou ambiental) do aço das armaduras;

$C_f$  custo unitário (de construção ou ambiental) da cofragem;

$A_{ci}$  área da secção transversal de betão do elemento  $i$ ;

$A_{si}$  área de armadura longitudinal no elemento  $i$ ;

$A_{swi}$  área de armadura de esforço transversal no elemento  $i$ ;

$P_{fi}$  perímetro da secção transversal do elemento  $i$ ;

$L_i$  comprimento do elemento  $i$ .

À semelhança do que foi feito em trabalhos anteriores de outros autores (Paya-Zaforteza *et al.*, 2009; Yepes *et al.*, 2012; Yepes *et al.*, 2015) os valores dos custos associados ao betão, às armaduras e à cofragem foram obtidos a partir da consulta da base de dados do Instituto de Tecnologia da Construção da Catalunha (ITeC, 2018). Apresenta-se no Quadro 3.2 os valores considerados para os diferentes custos.

Quadro 3.2 – Custos dos materiais

<b>Betão</b>	
<b>Custo de construção</b>	$15,3879 \left(\frac{f_{cm}}{28}\right)^2 - 26,7061 \left(\frac{f_{cm}}{28}\right) + 106,3745 \text{ €/m}^3$
<b>Custo ambiental</b>	$66,0128 \left(\frac{f_{cm}}{28}\right)^2 - 133,0616 \left(\frac{f_{cm}}{28}\right) + 313,3888 \text{ kg CO}_2/\text{m}^3$
<b>Aço das armaduras</b>	
<b>Custo de construção</b>	$7222 \text{ €/m}^3$
<b>Custo ambiental</b>	$24099,5 \text{ kg CO}_2/\text{m}^3$
<b>Cofragem</b>	
<b>Custo de construção</b>	$32,96 \text{ €/m}^2$
<b>Custo ambiental</b>	$5,78 \text{ kg CO}_2/\text{m}^3$

Na formulação do problema de optimização os objectivos devem ser escritos de forma normalizada. Deste modo, os objectivos referentes aos custos podem ser expressos como:

$$g_1(\underline{x}) = \frac{C}{C_0} - 1 \leq 0 \quad (3.38)$$

onde  $C$  representa o custo da estrutura e  $C_0$  representa um custo de referência. Este custo de referência corresponde ao custo da estrutura no início de cada ciclo de análise e optimização. Este facto garante que o objectivo do custo é sempre um dos objectivos prioritários que o algoritmo de optimização vai procurar minimizar.

### ***Deslocamentos dos pontos da estrutura***

Outro dos objectivos considerados foi a limitação dos valores dos deslocamentos dos pontos da estrutura. Este aspecto assume especial importância para se evitarem deformações excessivas em condições de carga permanente em serviço. Os objectivos de deslocamentos podem ser expressos através de

$$g_2(\underline{x}) = \frac{|\delta|}{\delta_0} - 1 \leq 0 \quad (3.39)$$

Em que  $\delta$  representa o valor do deslocamento e  $\delta_0$  representa o valor admissível para o deslocamento a controlar. De acordo com o Eurocódigo 2 (NP EN 1992-1-1, 2010) considerou-se um valor admissível igual ao vão/500.

### ***Tensões nos elementos em serviço***

A limitação das tensões nos diversos elementos em condições de serviço está relacionada com a durabilidade da estrutura. Na definição destes objectivos seguiram-se as recomendações do Eurocódigo 2 (EN 1992-1-1, 2010). No que respeita às tensões de compressão limitaram-se a 45% do valor característico da tensão de rotura à compressão do betão ( $f_{ck}$ ), sendo este objectivo dado pela expressão

$$g_3(\underline{x}) = \frac{\sigma_c}{0.45f_{ck}} - 1 \leq 0 \quad (3.40)$$

onde  $\sigma_c$  representa o valor máximo da tensão de compressão actuante no elemento de betão. A adopção deste limite permite evitar a formação de fendas longitudinais, a micro-fendilhação e níveis de fluência elevados, podendo a análise ser efectuada em regime de fluência linear.

Para controlo da fendilhação devido à tracção do betão adoptou-se um limite inferior para a área de armadura longitudinal, indicado no Quadro 3.1, seguindo as recomendações do Eurocódigo 2 (EN 1992-1-1, 2010).

### Verificação da resistência à flexão

Para o tipo de estruturas analisadas neste trabalho consideraram-se as situações de flexão simples para as vigas e de flexão desviada para os pilares. O objectivo referente à verificação da resistência à flexão simples pode ser expresso através da seguinte equação:

$$g_4(\underline{x}) = \frac{w_{req}}{w_{exist}} - 1 \leq 0 \quad (3.41)$$

Em que  $w_{req}$  representa a percentagem mecânica de armadura requerida tendo em conta o momento flector actuante e  $w_{exist}$  representa a percentagem mecânica de armadura existente dada por

$$w_{exist} = \frac{A_s}{A_c} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \quad (3.42)$$

onde  $A_s$  e  $A_c$  representam as áreas de armadura longitudinal e da secção transversal de betão, respectivamente;  $f_{yd}$  e  $f_{cd}$  representam os valores de cálculo da tensão de cedência do aço das armaduras e da tensão de rotura do betão à compressão, respectivamente. O valor requerido da percentagem mecânica de armadura é dependente das dimensões da secção transversal, da classe do betão e do momento flector actuante. Este valor é calculado de acordo com as fórmulas simplificadas indicadas em Arga e Lima *et al.* (1999). Na utilização destas fórmulas foi tida em conta a correcção referente ao valor da resistência à compressão do betão sendo  $f_{cd}$  no Eurocódigo 2 (EN 1992-1-1, 2010) em vez de  $0,85f_{cd}$  utilizado no REBAP.

No caso dos pilares, que se encontram sujeitos a flexão desviada o correspondente objectivo de verificação da resistência pode ser expresso por

$$g_5(\underline{x}) = \left( \frac{\mu_{Edz}}{\mu_{Rdz}} \right)^a + \left( \frac{\mu_{Edy}}{\mu_{Rdy}} \right)^a - 1 \leq 0 \quad (3.43)$$

onde  $\mu_{Ed}$  and  $\mu_{Rd}$  representam os valores reduzidos dos momentos flectores actuante e resistente, respectivamente. O parâmetro  $a$  depende da geometria da secção transversal e da razão entre o esforço axial actuante ( $N_{Ed}$ ) e o esforço axial resistente ( $N_{Rd}$ ) em compressão pura. Este parâmetro varia entre 1,0 e 2,0 de acordo com o indicado no Eurocódigo 2 (EN 1992-1-1, 2010). Os valores reduzidos dos momentos flectores actuantes são dados por:

$$\mu_{Edz} = \frac{M_{Edz}}{A_c \cdot h_z \cdot f_{cd}}, \quad \mu_{Edy} = \frac{M_{Edy}}{A_c \cdot h_y \cdot f_{cd}} \quad (3.44)$$

onde  $M_{Edz}$  e  $M_{Edy}$  representam os valores dos momentos flectores actuantes;  $h_z$  e  $h_y$  representam a altura da secção transversal nas direcções consideradas. Os valores reduzidos dos momentos flectores resistentes são calculados com as fórmulas simplificadas que traduzem os diagramas

de interacção esforço axial-momento flector e que também se encontram indicadas em Arga e Lima *et al.* (1999). Os momentos flectores resistentes dependem do esforço axial actuante, das dimensões da secção transversal, da área de armadura e da classe do betão.

### ***Verificação da resistência ao esforço transversal***

O objectivo de verificação da resistência ao esforço transversal pode ser expresso através de

$$g_6(\underline{x}) = \frac{V_{Ed}}{V_{Rd}} - 1 \leq 0 \quad (3.45)$$

onde  $V_{Ed}$  e  $V_{Rd}$  representam o valor actuante e o valor resistente do esforço transversal. O valor resistente depende da área de armadura de esforço transversal, da altura útil da secção transversal e da tensão de cedência do aço das armaduras.

A parte mais difícil da consideração dos objectivos de projecto dados pelas Equações (3.41), (3.43) e (3.45) reside no facto de os valores resistentes dependerem das variáveis de decisão o que constitui um esforço adicional no cálculo das sensibilidades para o algoritmo de optimização.

### **3.3.4 Função objectivo**

A função objectivo é usualmente formulada segundo critérios de eficiência estrutural ou economia, de modo a minimizar o custo total da estrutura, a energia de deformação elástica ou os esforços de flexão. Na minimização, independentemente da função objectivo escolhida deve ter-se em atenção a necessidade de satisfazer limites de deslocamentos e tensões. Uma das possibilidades para a resolução do problema consiste em atribuir o papel de função objectivo a um dos objectivos de projecto a que se reconhece uma importância relevante, impondo-se limites aos restantes e tratando-os como constrangimentos a satisfazer pela solução optimizada (Martins, 2015).

Ao contrário dos problemas de optimização com um único objectivo, a optimização *multi-objectivo* pode conduzir a mais do que uma solução óptima a respeito de todos os objectivos. Deste modo, dentro do domínio de soluções admissíveis existe um conjunto de soluções superiores às restantes, contudo, não existe nenhuma solução neste conjunto que seja absolutamente superior às restantes desse conjunto. As soluções desse conjunto designam-se por *soluções óptimas de Pareto* (Haftka e Gürdal, 1992; Templeman, 1993; Arora, 2004). Como é referido em (Martins, 2015), para a obtenção de soluções óptimas de Pareto de um problema *multi-objectivo* têm sido propostas várias abordagens. De um modo geral, estas baseiam-se na transformação do problema de optimização *multi-objectivo* num problema com um único objectivo. Isto é feito combinando os diversos objectivos numa única função, atribuindo pesos

aos objectivos individuais ou definindo um ou vários deles como a função objectivo a minimizar, transformando os restantes em restrições. Assim, resulta num problema de um único objectivo que é resolvido utilizando um dos métodos de optimização habituais para problemas desse tipo.

Neste trabalho o dimensionamento sustentável de estruturas porticadas de betão é formulado como um problema de optimização *multi-objectivo*. Neste tipo de problemas pretende-se minimizar o conjunto de todos os objectivos através da alteração dos valores das variáveis de decisão constituindo, deste modo, um problema *minimax* que pode ser traduzido pela expressão seguinte

$$\min_{\underline{x}} \max_{j=1, \dots, M} g_j(\underline{x}) \quad (3.46)$$

Este problema é descontínuo e não diferenciável o que dificulta a sua resolução numérica. No entanto, como referido em (Martins, 2015) utilizando o *Princípio da Máxima Entropia* é possível mostrar (Simões e Templeman, 1989; Simões, 1991; Templeman, 1993; Negrão, 1996) que a resolução do problema *minimax* é equivalente à minimização sem restrições de uma função escalar convexa Equação (3.47), constituindo a solução um mínimo particular de Pareto do problema *multi-objectivo*

$$\min F(x) = \min \frac{1}{\rho} \ln \left[ \sum_{j=1}^M e^{\rho(g_j(\underline{x}))} \right] \quad (3.47)$$

onde  $\rho$  representa um parâmetro real que pode tomar qualquer valor dentro do intervalo  $1 \leq \rho \leq \infty$  e que não deve decrescer durante o processo de optimização.

Para a resolução numérica do problema e dado que os objectivos de projecto  $g_j(\underline{x})$  não apresentam forma algébrica explícita, a Equação (3.47) é substituída pela seguinte aproximação explícita utilizando a expansão em série de Taylor de todos os objectivos de projecto truncados após o termo linear

$$\min F(x) = \min \frac{1}{\rho} \ln \left[ \sum_{j=1}^M e^{\rho(g_j(\underline{x}_0) + \sum_{i=1}^N \frac{dg_j(\underline{x}_0)}{dx_i} \Delta x_i)} \right] \quad (3.48)$$

onde  $N$  representa o número de variáveis de decisão e  $M$  o número de objectivos de projecto.  $g_j(\underline{x}_0)$  e  $dg_j(\underline{x}_0)/dx_i$  representam, respectivamente, os objectivos e as respectivas sensibilidades determinados para o vector actual das variáveis de decisão ( $\underline{x}_0$ ). Para controlar os erros introduzidos pelas aproximações adoptadas definiram-se restrições de fronteira constituindo limites móveis para as variações admissíveis das variáveis de decisão. Neste

---

trabalho, para minimização da função objectivo utilizou-se a função *fmincon* do programa *MATLAB* que permite a minimização de funções escalares de várias variáveis sujeitas a restrições utilizando uma sequência de programas quadráticos.

### 3.3.5 Análise de sensibilidades

A análise de sensibilidades desempenha um papel fundamental na resolução de problemas de optimização com algoritmos de pesquisa directa e dela depende a eficiência do algoritmo e a precisão dos resultados obtidos. Esta fornece a informação que permite determinar a direcção, no espaço de projecto, segundo a qual se deve processar a evolução da estrutura, por forma a melhorar o seu desempenho em simultâneo com a pretendida redução de custos. Permite ainda manter a solução dentro dos limites impostos pelas condições de segurança e serviço (Martins, 2015).

A análise de sensibilidades pode ser levada a cabo através de métodos variacionais ou métodos discretos. Os métodos variacionais são mais adequados para a resolução de problemas em que o domínio e as equações de estado podem ser descritos de forma contínua, pois estes começam pela diferenciação das equações contínuas que descrevem o fenómeno em estudo, procedendo-se posteriormente à discretização do sistema estrutural. As vantagens apontadas a estes métodos são a de favorecerem uma estrutura modular de programas de optimização e a de dispensarem o acesso ao código fonte do programa de análise pelo Método dos Elementos Finitos.

Os métodos discretos integram-se facilmente com a metodologia de análise estrutural através do Método dos Elementos Finitos, sendo especialmente adequados quando a estrutura é discreta por natureza. Isto porque nestes métodos procede-se primeiro à discretização do sistema estrutural e posteriormente efectua-se a diferenciação das equações que traduzem o fenómeno em estudo. Os métodos discretos incluem o método das diferenças finitas, o método semi-analítico e o método analítico (directo ou adjunto).

O método das diferenças finitas constitui a técnica mais simples para o cálculo de gradientes dos objectivos, baseando-se na introdução de perturbações nos valores das variáveis de decisão. Apesar de exigente a nível de custo computacional é fácil de implementar e bastante popular (Martins, 2015). Os métodos analíticos são utilizados quando se tem acesso ao código fonte do programa de análise. Estes requerem a programação explícita das derivadas das diversas quantidades elementares e são métodos computacionalmente mais eficientes e fornecem resultados mais precisos. No entanto, exigem um esforço inicial de programação das derivadas de todas as quantidades relevantes a respeito das diversas variáveis de decisão. Estes métodos podem dividir-se em método directo e método adjunto.

Neste trabalho adoptou-se o método analítico discreto directo já previamente implementado no programa de computador utilizado. Este método caracteriza-se pela precisão e por ser eficiente

mesmo em problemas com um elevado número de variáveis de decisão. Uma vez que o problema de optimização a resolver envolve um número de objectivos muito superior ao número de variáveis de decisão é preferível utilizar o método directo em vez do método adjunto.

Nos métodos analíticos as expressões das sensibilidades são obtidas a partir da diferenciação do sistema de equações de equilíbrio da estrutura dado pela expressão:

$$\underline{K} \cdot \underline{u} = \underline{F} \quad (3.49)$$

onde  $\underline{K}$  e  $\underline{F}$  representam, respectivamente, a matriz de rigidez e o vector de forças nodais equivalentes, sendo funções explícitas do vector das  $N$  variáveis de decisão e  $\underline{u}$  representa o vector de deslocamentos nodais que é função implícita das mesmas por não apresentar forma algébrica conhecida. Diferenciando a Equação (3.49) a respeito da variável de decisão  $x_i$ , obtém-se:

$$\frac{d\underline{K}}{dx_i} \underline{u} + \underline{K} \frac{d\underline{u}}{dx_i} = \frac{d\underline{F}}{dx_i} \quad (3.50)$$

que pode ser reescrita na forma

$$\underline{K} \frac{d\underline{u}}{dx_i} = \frac{d\underline{F}}{dx_i} - \frac{d\underline{K}}{dx_i} \underline{u} = \underline{Q}_{vi} \quad (3.51)$$

assim, as sensibilidades dos deslocamentos podem ser expressas através de:

$$\frac{d\underline{u}}{dx_i} = \underline{K}^{-1} \cdot \underline{Q}_{vi} \quad (3.52)$$

onde  $\underline{Q}_{vi}$  representa o vector das pseudo-cargas virtuais a respeito da variável de decisão  $x_i$  e que envolve o cálculo das derivadas da matriz de rigidez e do vector de forças nodais equivalentes a respeito de cada um dos tipos de variáveis de decisão. Para tal, é necessário programar as derivadas das matrizes de rigidez e dos vectores de forças elementares a respeito dos diversos tipos de variáveis de decisão. Após o cálculo das diversas contribuições elementares, efectua-se o seu agrupamento do mesmo modo que se procede para a matriz de rigidez e para o vector de forças nodais equivalentes aquando da análise estrutural. Deste modo, o cálculo das sensibilidades dos deslocamentos processa-se com apenas uma inversão da matriz de rigidez da estrutura e a resolução do sistema para  $N$  segundos membros correspondentes aos *vectores das pseudo-cargas virtuais* relativos a cada uma das variáveis de decisão consideradas (Martins, 2015).

O cálculo das tensões é efectuado a nível elementar a partir dos valores dos deslocamentos, obtidos através da resolução do sistema de equações de equilíbrio, aplicando a relação entre tensões e deslocamentos, dada por

$$\underline{\sigma}^e = \underline{D} \cdot \underline{B}^e \cdot \underline{u}^e \quad (3.53)$$

Deste modo, as sensibilidades das tensões são determinadas através da diferenciação desta expressão, obtendo-se

$$\frac{d\underline{\sigma}^e}{dx_i} = \frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_i} \cdot \underline{u}^e + \underline{D} \cdot \underline{B}^e \cdot \frac{d\underline{u}^e}{dx_i} \quad (3.54)$$

O cálculo destas sensibilidades envolve duas parcelas, uma explícita e outra implícita. A primeira é calculada a nível elementar requerendo a programação, para cada tipo de elemento finito, da matriz  $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$  e da respectiva derivada a respeito dos diversos tipos de variáveis de decisão. A parte implícita requer os valores dos deslocamentos nodais e das respectivas sensibilidades, pelo que só pode ser determinada após a análise estrutural e o cálculo das sensibilidades dos deslocamentos (Martins, 2015).

Um aspecto relevante do desenvolvimento do presente trabalho diz respeito à determinação das sensibilidades dos objectivos relativos à verificação da resistência dos elementos de betão armado, na medida em que o valor admissível da resistência depende das variáveis de decisão, sofrendo, deste modo, alterações no decorrer do processo de análise e optimização. Deste modo, as sensibilidades dos objectivos definidos pelas Equações 3.41, 3.43 e 3.45 são calculadas através das expressões

$$\frac{dg_4(\underline{x})}{dx_i} = \frac{d}{dx_i} \left( \frac{\omega_{req}}{\omega_{exist}} \right) = \frac{1}{\omega_{exist}^2} \left( \frac{d\omega_{req}}{dx_i} \cdot \omega_{exist} - \omega_{req} \cdot \frac{d\omega_{exist}}{dx_i} \right) \quad (3.55)$$

$$\frac{dg_5(\underline{x})}{dx_i} = \frac{d}{dx_i} \left( \frac{\mu_{Ed}}{\mu_{Rd}} \right)^a = \frac{1}{\mu_{Rd}^{2a}} \left( \frac{d\mu_{Ed}^a}{dx_i} \cdot \mu_{Rd} - \mu_{Ed} \cdot \frac{d\mu_{Rd}^a}{dx_i} \right) \quad (3.56)$$

$$\frac{dg_6(\underline{x})}{dx_i} = \frac{d}{dx_i} \left( \frac{V_{Ed}}{V_{Rd}} \right) = \frac{1}{V_{Rd}^2} \left( \frac{dV_{Ed}}{dx_i} \cdot V_{Rd} - V_{Ed} \cdot \frac{dV_{Rd}}{dx_i} \right) \quad (3.57)$$

De referir ainda que, modo a garantir a precisão de uma análise de sensibilidades linear no âmbito de uma análise não-linear impuseram-se limites móveis entre 1,5% e 2,5% nas variações admissíveis das variáveis de decisão.

## 4 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

### 4.1 Introdução

No presente capítulo apresentam-se exemplos de aplicação do modelo numérico desenvolvido para a análise e optimização de estruturas porticadas de betão armado tendo em vista a minimização do custo económico e do custo ambiental.

Assim, começa-se por apresentar um conjunto de exemplos de verificação referentes a elementos simples de betão armado. Assim, apresentam-se exemplos de optimização de uma viga simplesmente apoiada, de uma viga continua e de um pilar isolado sujeito a flexão desviada. Posteriormente, apresenta-se um exemplo de aplicação referente à optimização da estrutura de um edifício de betão armado de dimensões reais.

### 4.2 Exemplos de verificação

#### 4.2.1 Optimização de viga simplesmente apoiada

##### *Exemplo 1*

Neste exemplo considerou-se uma viga simplesmente apoiada de betão armado, com 6 metros de vão e uma secção transversal de 0,50×0,30m. Considerou-se a viga sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 25 kN/m representando a restante carga permanente (pois o peso próprio é contabilizado automaticamente pelo programa) e a sobrecarga de utilização. Os materiais considerados foram um betão da classe C25/30 e um aço A500NR, assumindo-se um recobrimento de 35 mm. Considerou-se uma discretização em 6 elementos finitos de viga, com 1 metro de comprimento cada, estes elementos foram divididos em duas zonas. Na Figura 4.1 apresentam-se os dados deste exemplo.

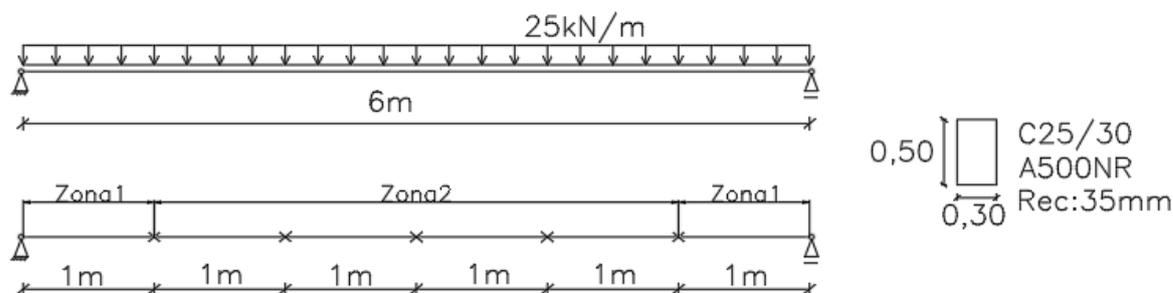


Figura 4.1 – Dados do Exemplo 1 referente a uma viga simplesmente apoiada

Na resolução deste exemplo foram tidas em conta 4 variáveis de decisão que correspondem à área de armadura longitudinal e a área de armadura de esforço transverso nas zonas 1 e 2. No

Quadro 4.1 apresentam-se os valores iniciais e os valores finais obtidos após a optimização para este exemplo.

Quadro 4.1 – Valores iniciais e finais das variáveis de decisão (viga simplesmente apoiada – Exemplo 1)

Variável de decisão		Valor inicial	Valor final
Número	Descrição	(cm <sup>2</sup> )	(cm <sup>2</sup> )
1	Armadura longitudinal – zona 1	15,00	3,96
2	Armadura longitudinal – zona 2	15,00	7,45
3	Armadura de esforço transversal – zona 1	3,00	4,97
4	Armadura de esforço transversal – zona 2	3,00	3,31

Os objectivos de projecto considerados foram o custo, a verificação da resistência à flexão simples e a verificação da resistência ao esforço transversal. Na Figura 4.2 apresenta-se a evolução do custo com o número de iterações.

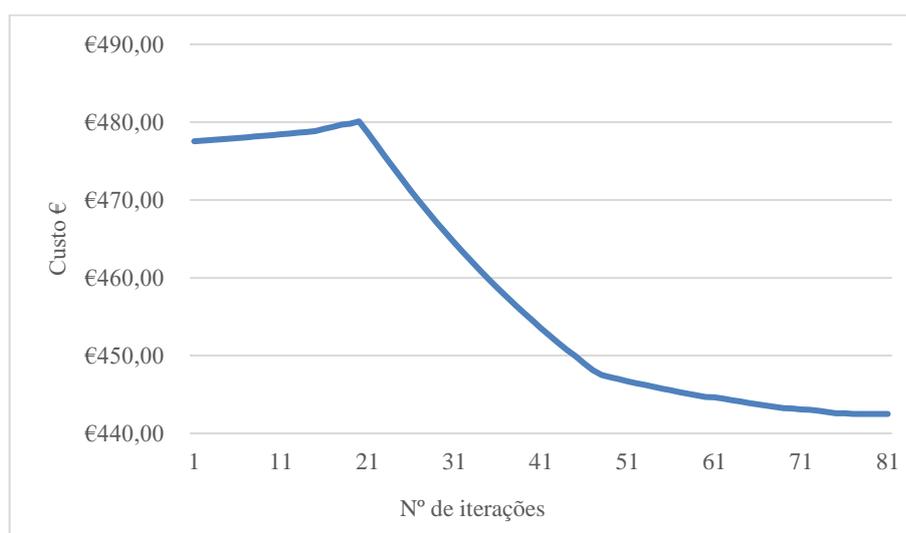


Figura 4.2 – Custo de construção vs. número de iterações (viga simplesmente apoiada – Exemplo 1)

Os resultados apresentados mostram uma minimização do custo, de 477,55 € para 442,50 €, devido à redução das áreas de armadura longitudinal e de esforço transversal. O custo inicialmente aumenta e depois reduz progressivamente estabilizando em torno do valor mínimo. No que respeita aos objectivos de projecto referentes à verificação da resistência apresentam-se no Quadro 4.2 os resultados obtidos. Como facilmente se pode observar, o algoritmo fornece valores das variáveis de decisão que correspondem a uma solução segura em termos de dimensionamento.

Quadro 4.2 – Valores finais dos esforços actuantes e resistentes (viga simplesmente apoiada – Exemplo 1)

	$M_{Ed}$ (kNm)	$M_{Rd}$ (kNm)	$V_{Ed}$ (kN)	$V_{Rd}$ (kN)
<b>Zona 1</b>	71,88	75,75	57,50	83,15
<b>Zona 2</b>	125,78	135,6	47,13	55,42

### Exemplo 2

Neste exemplo consideraram-se os mesmos dados gerais do exemplo anterior. No entanto, agora consideram-se dois casos de carga, um para verificações relacionadas com condições de serviço (análise a longo prazo considerando os efeitos diferidos) e outro para verificações de resistência. Em ambos se considerou a viga sujeita ao peso próprio e a uma carga uniformemente distribuída de 14 kN/m no primeiro caso e de 25 kN/m no segundo caso. Na Figura 4.3 apresentam-se os dados deste exemplo.

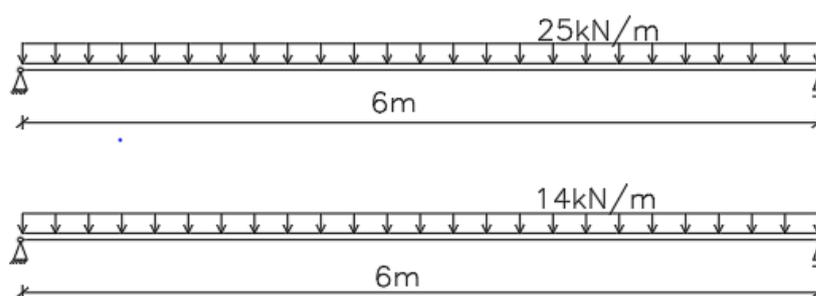


Figura 4.3 – Dados do Exemplo 2 referente a uma viga simplesmente apoiada

Neste exemplo foram consideradas 7 variáveis de decisão. No Quadro 4.3 apresenta-se a descrição das variáveis de decisão e os respectivos valores iniciais e finais obtidos após a optimização para este exemplo.

Quadro 4.3 – Valores iniciais e finais das variáveis de decisão (viga simplesmente apoiada – Exemplo 2)

Número	Variável de decisão	Valor inicial	Valor final
	Descrição		
1	Altura da secção transversal da viga (m)	0,500	0,509
2	Largura da secção transversal da viga (m)	0,300	0,200
3	Armadura longitudinal – zona 1 (cm <sup>2</sup> )	15,00	5,48
4	Armadura longitudinal – zona 2 (cm <sup>2</sup> )	15,00	10,33
5	Armadura de esforço transversal – zona 1 (cm <sup>2</sup> )	3,00	6,99
6	Armadura de esforço transversal – zona 2 (cm <sup>2</sup> )	3,00	4,66
7	Valor médio da resistência à compressão do betão (MPa)	33,00	39,61

Tal como no exemplo anterior, os objectivos de projecto considerados foram o custo, a verificação da resistência à flexão simples e verificação da resistência ao esforço transversal. Para além disso consideraram-se ainda objectivos relacionados com as condições de serviço (limitação de tensões e do deslocamento máximo a meio-vão da viga). Na Figura 4.4 apresenta-se a evolução do custo com o número de iterações.

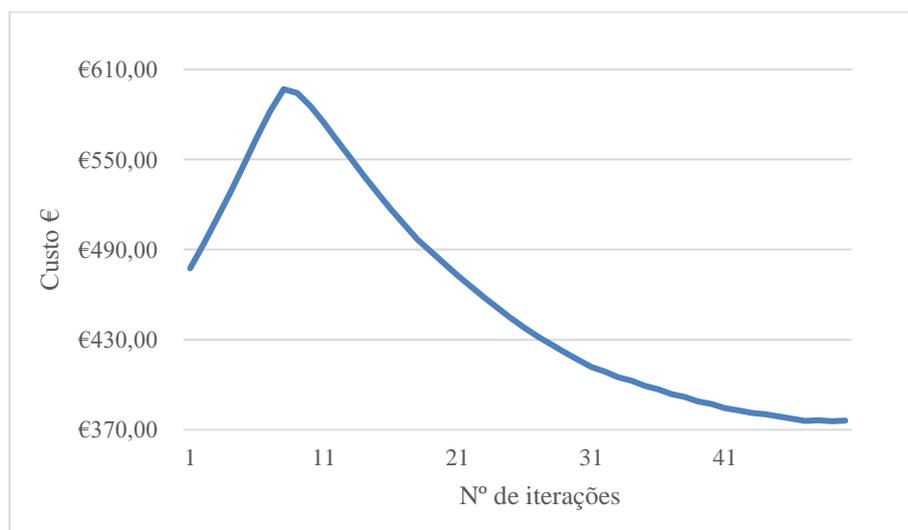


Figura 4.4 – Custo de construção vs. número de iterações (viga simplesmente apoiada – Exemplo 1)

Analisando os resultados verifica-se uma redução de custo de 477,50 € para 376,27 € devido à redução das dimensões da secção transversal e das áreas de armadura. O deslocamento a meio-vão foi de 0,12 m, sendo igual ao limite imposto (vão/500). Relativamente aos objectivos de projecto de verificação da resistência apresentam-se no Quadro 4.4 os resultados obtidos. Como se pode observar, o algoritmo fornece uma solução de custo mínimo simultaneamente com a verificação de todos os objectivos de projecto.

Quadro 4.4 – Valores finais dos esforços actuantes e resistentes (viga simplesmente apoiada – Exemplo 2)

	$M_{Ed}$ (kNm)	$M_{Rd}$ (kNm)	$V_{Ed}$ (kN)	$V_{Rd}$ (kN)
<b>Zona 1</b>	71,88	102,72	82,62	127,17
<b>Zona 2</b>	125,78	180,17	55,08	84,77

## 4.2.2 Optimização de viga contínua

### Exemplo 1

Este exemplo trata-se de uma viga contínua de betão armado, com 16 metros de vão com 3 tramos, dois de 6 m e um de 4m, como se pode ver na Figura 4.5. Considerou-se uma secção de 0,50 m × 0,30 m, um betão C25/30, um aço A500NR e um recobrimento de 35 mm. Analisaram-se dois casos de carga uniformemente distribuída de modo a obter os esforços internos máximos para o dimensionamento. Considerou-se uma discretização em 16 elementos finitos de viga, com 1 metro de comprimento cada. Tal como nos exemplos anteriores consideraram-se duas zonas para a definição das variáveis de decisão. Na Figura 4.5 apresentam-se os dados deste exemplo.

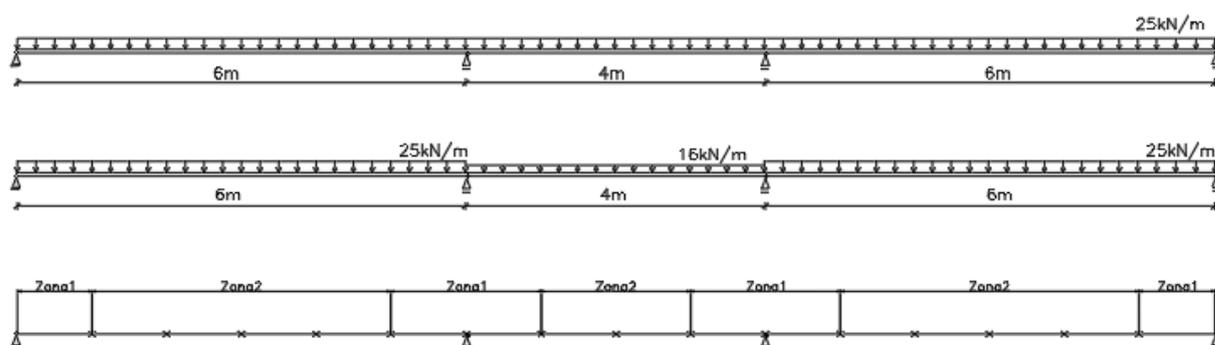


Figura 4.5 – Dados do Exemplo 1 referente a uma viga contínua

Foram tidas em conta 4 variáveis de decisão que correspondem à área de armadura longitudinal e a área de armadura de esforço transverso nas zonas 1 e 2. No Quadro 4.5 apresentam-se os valores iniciais e os valores finais obtidos após a optimização para este exemplo.

Quadro 4.5 – Valores iniciais e finais das variáveis de decisão (viga contínua – Exemplo 1)

Número	Variável de decisão	Valor inicial (cm <sup>2</sup> )	Valor final (cm <sup>2</sup> )
	Descrição		
1	Armadura longitudinal – zona 1	15,00	4,66
2	Armadura longitudinal – zona 2	15,00	5,22
3	Armadura de esforço transverso – zona 1	3,00	5,77
4	Armadura de esforço transverso – zona 2	3,00	4,11

Os objectivos de projecto considerados foram o custo, a verificação da resistência à flexão simples e a verificação da resistência ao esforço transverso. Na Figura 4.6 apresenta-se a evolução do custo com o número de iterações.

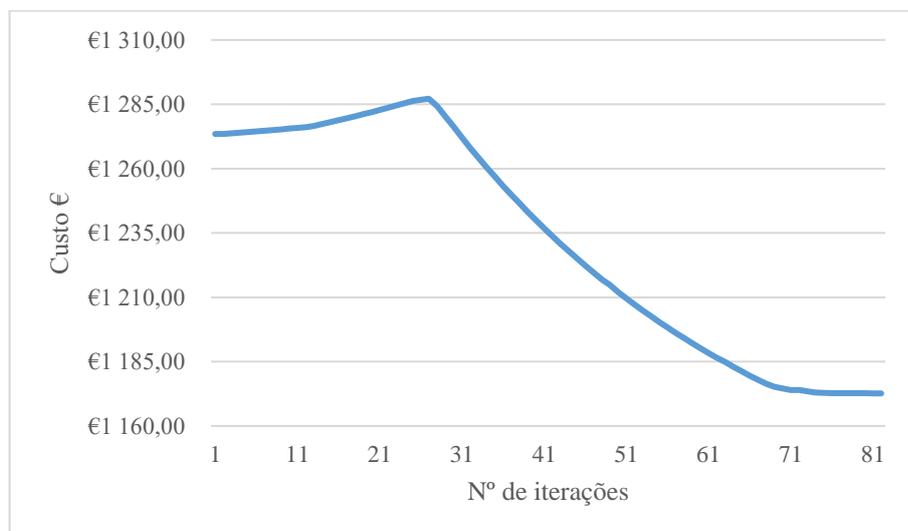


Figura 4.6 – Custo de construção vs. número de iterações (viga contínua – Exemplo 1)

A Figura 4.6 mostra a redução do custo ao longo do processo de optimização, passando de 1273.47€ para 1172.65€. No Quadro 4.6 resumem-se os valores dos esforços actuantes e resistentes obtidos para a solução final, observando-se que se encontra verificada a segurança.

Quadro 4.6 – Valores finais dos esforços actuantes e resistentes (viga contínua – Exemplo 1)

	$M_{Ed}$ (kNm)	$M_{Rd}$ (kNm)	$V_{Ed}$ (kN)	$V_{Rd}$ (kN)
<b>Zona 1</b>	57,90	88,32	99,23	104,97
<b>Zona 2</b>	90,84	98,21	70,48	74,85

### Exemplo 2

Tal como no exemplo da viga simplesmente apoiada, também neste caso se considerou um segundo exemplo com todos os tipos de variáveis de decisão. Para além dos dois casos de carga considerados no exemplo anterior, considerou-se um caso adicional para o estado limite de utilização, onde se faz uma análise a longo prazo e com efeitos diferidos, considerando uma carga uniformemente distribuída de 14 kN/m.

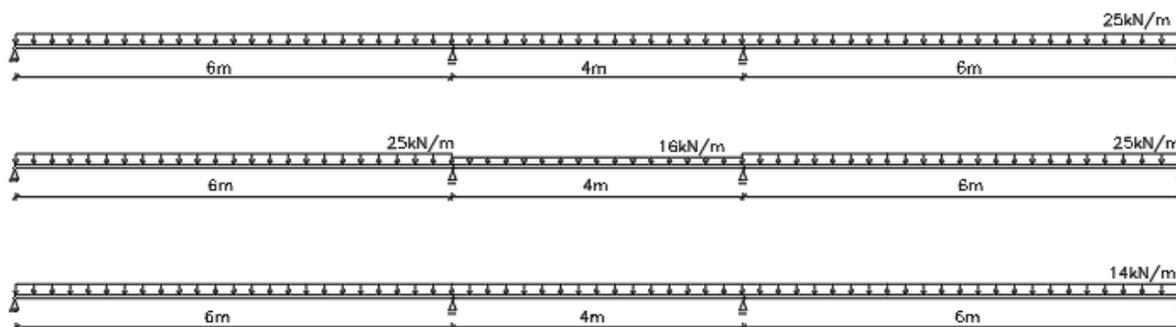


Figura 4.7 – Dados do Exemplo 2 referente a uma viga contínua.

Foram agora consideradas 7 variáveis de decisão. No Quadro 4.7 apresenta-se a descrição das variáveis de decisão e os respectivos valores iniciais e finais obtidos após a optimização para este exemplo.

Quadro 4.7 – Valores iniciais e finais das variáveis de decisão (viga contínua – Exemplo 2)

Variável de decisão		Valor inicial	Valor final
Número	Descrição		
1	Altura da secção transversal da viga (m)	0,500	0,425
2	Largura da secção transversal da viga (m)	0,300	0,200
3	Armadura longitudinal – zona 1 (cm <sup>2</sup> )	15,00	9,74
4	Armadura longitudinal – zona 2 (cm <sup>2</sup> )	15,00	11,00
5	Armadura de esforço transversal – zona 1 (cm <sup>2</sup> )	3,00	9,84
6	Armadura de esforço transversal – zona 2 (cm <sup>2</sup> )	3,00	7,02
7	Valor médio da resistência à compressão do betão (MPa)	33,00	39,02

Os objectivos de projecto considerados foram o custo, a limitação de tensões e do deslocamento máximo a meio-vão da viga para condições de serviço, a verificação da resistência à flexão simples e a verificação da resistência ao esforço transversal. No Quadro 4.8 indicam-se os valores dos esforços actuantes e resistentes obtidos para a solução final e na Figura 4.8 apresenta-se a evolução do custo com o número de iterações.

Pela análise dos resultados obtidos verifica-se que os objectivos de projecto foram cumpridos e que houve uma redução de custo de 1273,47 € para 1172,65 €. A secção da viga passou de uma secção de 0,50 m × 0,30 m para uma secção de 0,45 m × 0,20 m. A área de armadura longitudinal diminuiu e a área de armadura de esforço transversal aumentou, verificando-se a segurança em relação à flexão e ao esforço transversal. mas fazendo a verificação da segurança estas verificam como se pode ver no Quadro 4.8. Relativamente ao deslocamento vertical a meio-vão dos tramos de 6 m foi de 0,012 m, sendo igual ao valor admissível para este objectivo.

Quadro 4.8 – Valores finais dos esforços actuantes e resistentes (viga contínua – Exemplo 2)

	<b>M<sub>Ed</sub> (kNm)</b>	<b>M<sub>Rd</sub> (kNm)</b>	<b>V<sub>Ed</sub> (kN)</b>	<b>V<sub>Rd</sub> (kN)</b>
<b>Zona 1</b>	55,58	114,17	93,64	164,71
<b>Zona 2</b>	85,35	126,57	66,51	117,48

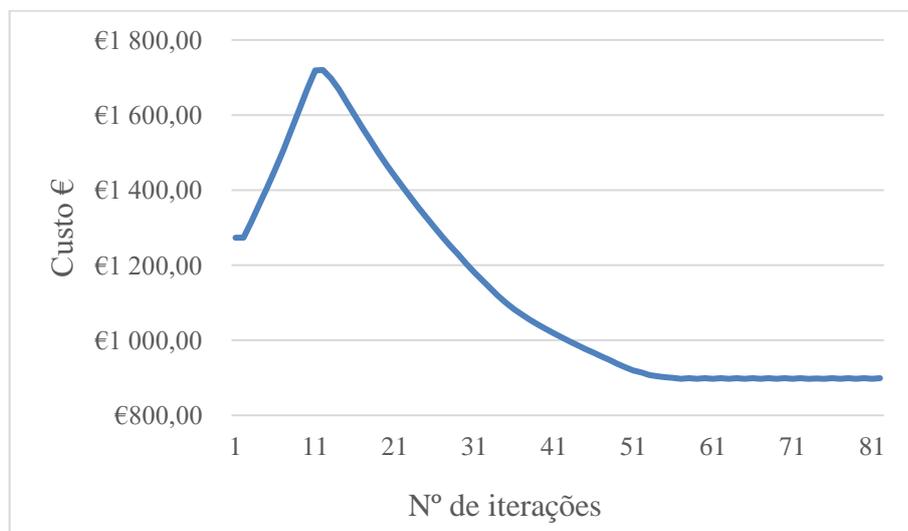


Figura 4.8 – Custo de construção vs. número de iterações (viga contínua – Exemplo 2)

### 4.2.3 Optimização de pilar sujeito a flexão desviada

#### Exemplo 1

Considera-se agora, neste exemplo, um pilar de betão armado com 3 m de altura, encastrado na base e livre no topo sujeito a  $F_x = 60 \text{ kN}$ ,  $F_y = 40 \text{ kN}$  e  $F_z = -800 \text{ kN}$ . Considerou-se uma secção transversal quadrada de 0,50 m de lado, o betão utilizado foi um C25/30, o aço um A500NR e admitiu-se um recobrimento de 35 mm. O pilar foi discretizado em 6 elementos finitos de viga com matriz de rigidez elástica e geométrica para a consideração dos efeitos de 2ª ordem. Os dados deste exemplo ilustram-se na Figura 4.9.

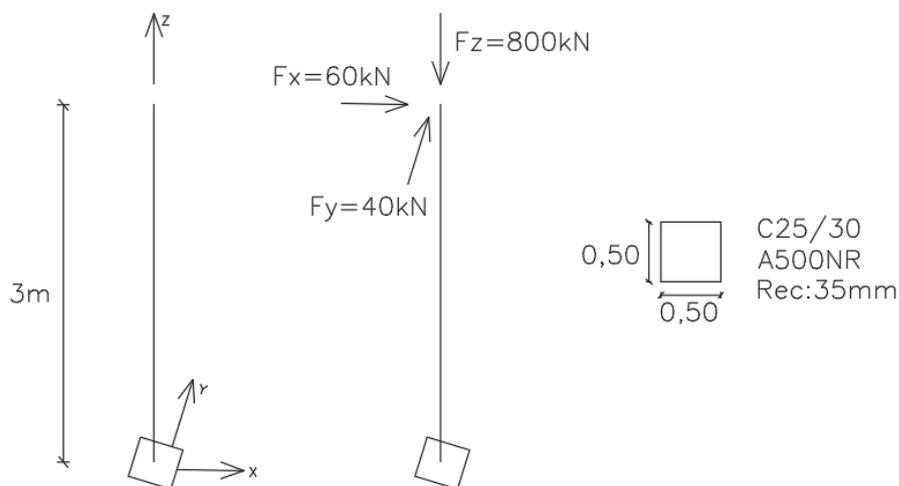


Figura 4.9 – Dados do exemplo referente ao pilar sujeito a flexão desviada

As variáveis de decisão consideradas foram a área de armadura longitudinal e a área de armadura de esforço transverso. Consideraram-se objectivos de custo e de verificação da resistência à flexão desviada e ao esforço transverso. No Quadro 4.9 apresenta-se a descrição das variáveis de decisão e os respectivos valores iniciais e finais obtidos após a optimização para este exemplo. Na Figura 4.10 apresenta-se a evolução do custo em função do número de iterações, verificando-se uma redução de custo de 428,67 € para 320,86 €. Esta redução de custo deve-se à redução das áreas de armadura longitudinal e de esforço transverso. No que respeita à verificação da resistência têm-se esforços actuantes de:  $N_{Ed} = 812,90$  kN;  $V_{Ed} = 60$  kN;  $M_{Ed,y} = 124,26$  kNm  $M_{Ed,z} = 184,94$  kNm. Tendo em conta os valores obtidos para as áreas de armadura têm-se os seguintes esforços resistentes:  $VRd = 106,41$  kN;  $M_{Rd,y} = 243,87$  kNm  $M_{Rd,z} = 243,87$  kNm. Aplicando a fórmula de interacção para flexão desviada indicada no Eurocódigo 2 (NP EN1992-1-1, 2010), tem-se

$$\left(\frac{M_{Ed,y}}{M_{Rd,y}}\right)^\alpha + \left(\frac{M_{Ed,z}}{M_{Rd,z}}\right)^\alpha \leq 1,0 \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{124,26}{286,92}\right)^{1,2} + \left(\frac{184,94}{286,92}\right)^{1,2} \leq 1,0 \quad (4.2)$$

pelo que se encontra verificada a segurança à flexão desviada. Como o esforço transverso resistente é superior ao actuante também se encontra verificado o objectivo de projecto respectivo.

Quadro 4.9 – Valores iniciais e finais das variáveis de decisão (pilar sujeito a flexão desviada – Exemplo 1)

Variável de decisão		Valor inicial	Valor final
Número	Descrição		
1	Armadura longitudinal (cm <sup>2</sup> )	50,00	16,34
2	Armadura de esforço transverso (cm <sup>2</sup> )	25,00	2,54

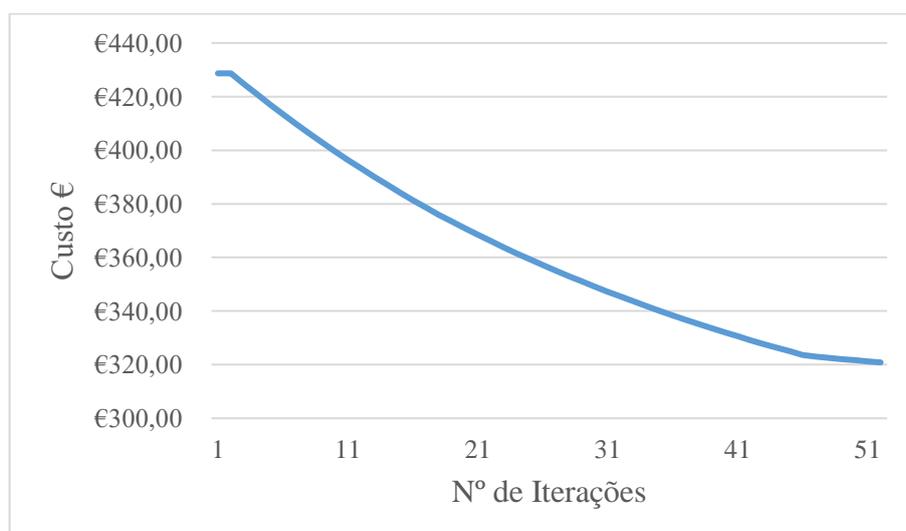


Figura 4.10 – Custo de construção vs. número de iterações (pilar em flexão desviada – Exemplo 1)

### Exemplo 2

Neste segundo exemplo consideram-se os mesmos dados gerais que no caso anterior, mas têm-se agora 5 variáveis de decisão. No Quadro 4.10 apresenta-se a descrição das variáveis de decisão e os respectivos valores iniciais e finais obtidos após a otimização para este exemplo. Na Figura 4.11 apresenta-se a evolução do custo em função do número de iterações, verificando-se uma redução de custo de 334,20 € para 227,27 €. A redução de custo deve-se à redução das dimensões da secção transversal e à redução da área de armadura de esforço transverso. A área de armadura longitudinal e a classe do betão sofreram um aumento relativamente aos valores iniciais.

Quadro 4.10 – Valores iniciais e finais das variáveis de decisão (pilar sujeito a flexão desviada – Exemplo 2)

Variável de decisão		Valor inicial	Valor final
Número	Descrição		
1	Altura da secção transversal do pilar (m)	0,500	0,452
2	Largura da secção transversal do pilar (m)	0,500	0,380
3	Armadura longitudinal (cm <sup>2</sup> )	25,00	38,75
4	Armadura de esforço transverso (cm <sup>2</sup> )	5,00	3,58
5	Valor médio da resistência à compressão do betão (MPa)	33,00	36,13

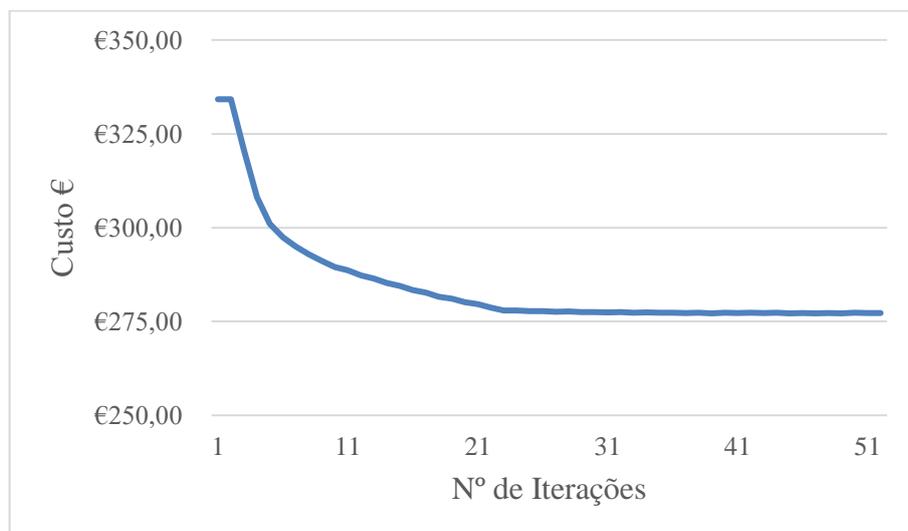


Figura 4.11 – Custo de construção vs. número de iterações (pilar em flexão desviada – Exemplo 2)

### 4.3 Optimização da estrutura porticada de um edifício

#### 4.3.1 Dados gerais do exemplo numérico

Este exemplo diz respeito a uma estrutura porticada de um edifício em betão armado de três pisos e dois tramos em cada direcção horizontal, como se pode ver na Figura 4.12.

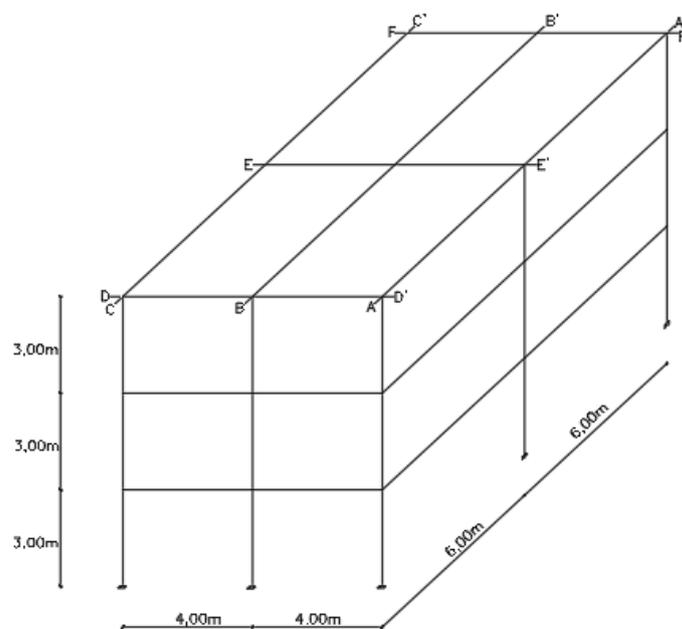


Figura 4.12 – Dimensões gerais da estrutura porticada de um edifício

---

O modelo de elementos finitos do pórtico tridimensional contém 144 nós e 171 elementos. As vigas foram modeladas com elementos de viga e os pilares com elementos de viga considerando os efeitos geometricamente não-lineares. A repartição de carga das lajes para as vigas foi feita com base nas áreas de influência.

Os casos de carga estudados neste exemplo fôramos seguintes:

- 1) Estado limite de utilização – combinação quase-permanente com análise a longo prazo (20 anos);
- 2) Estado limite último – combinação fundamental com a acção do vento (vigas carregadas para obter os momentos máximos negativos);
- 3) Estado limite último – combinação fundamental com a acção do vento (vigas carregadas para obter os momentos positivos);
- 4) Estado limite último – combinação sísmica com acção sísmica tipo 1;
- 5) Estado limite último – combinação sísmica com acção sísmica tipo 2.

As cargas consideradas no cálculo foram o peso próprio das vigas e pilares (contabilizado automaticamente), as cargas permanentes nas lajes com uma espessura de 0,20 m e na cobertura com uma espessura de 0,15 m e o peso próprio do revestimento com uma espessura de 0,05 m. As sobrecargas consideradas foram obtidas através da norma EN1991-1-1. Considerou-se um edifício de categoria C com uma sobrecarga de utilização de 4 kN/m<sup>2</sup>. Para a cobertura considerou-se uma sobrecarga de 0,4 kN/m<sup>2</sup>.

Relativamente a acção sísmica considerou-se um edifício de classe de importância II a ser implantado em Coimbra (zona sísmica 6 para a acção do tipo 1 e zona sísmica 4 para a acção do tipo 2). Considerou-se um de amortecimento de 5%. Na avaliação da resposta estrutura face à acção sísmica consideraram-se as 12 primeiras frequências e os correspondentes modos de vibração.

Para este mesmo exemplo ainda foram considerados três casos de análise no que respeita aos objectivos de projecto relacionados com os custos:

- Caso A: apenas custo de construção;
- Caso B: apenas custo ambiental;
- Caso C: custo de construção e custo ambiental considerados em simultâneo.

#### **4.3.2 Objectivos de projecto e variáveis de decisão**

Neste exemplo de aplicação considerou-se um total de 81 variáveis de decisão correspondentes às dimensões das secções transversais de vigas e pilares, às áreas de armadura longitudinal e de esforço transverso e à classe do betão.

Relativamente à definição das variáveis de decisão pode referir-se que um maior número de variáveis de decisão confere um maior número de graus de liberdade ao algoritmo para chegar a uma solução de menor custo. No entanto, deve ter-se em conta a realidade prática da construção, pelo que, a existência de alguma uniformização é normal e benéfica do ponto de vista de facilidade de execução.

Para o estabelecimento das variáveis de decisão definiram-se diferentes tipos de vigas e pilares, assim como várias zonas nas vigas. Nas vigas a zona 1 corresponde à zona de momento flector negativo e esforço transversal máximo e a zona 2 corresponde à zona de momento flector positivo e esforço transversal mínimo. Nas Figuras 4.13 e 4.14 apresenta-se a identificação dos diferentes tipos de vigas e pilares utilizados para a definição das variáveis de decisão do problema de optimização.

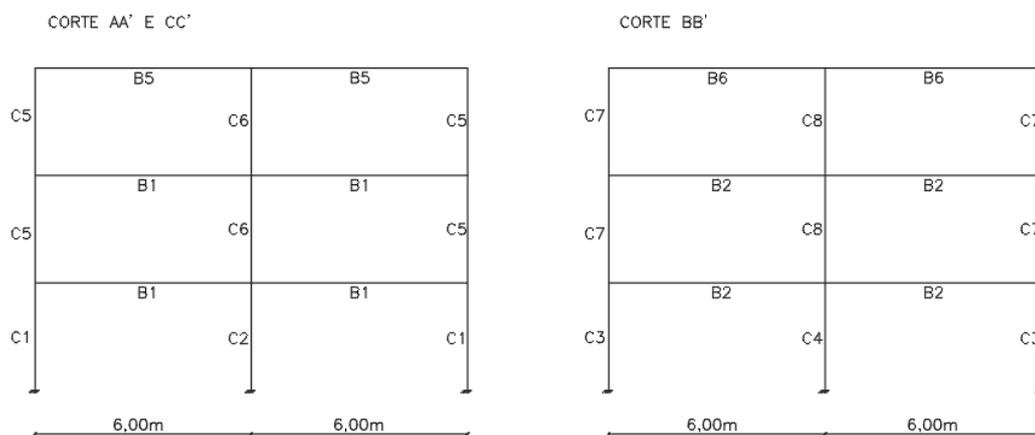


Figura 4.13 – Identificação das vigas e dos pilares nos cortes AA', BB' e CC'.

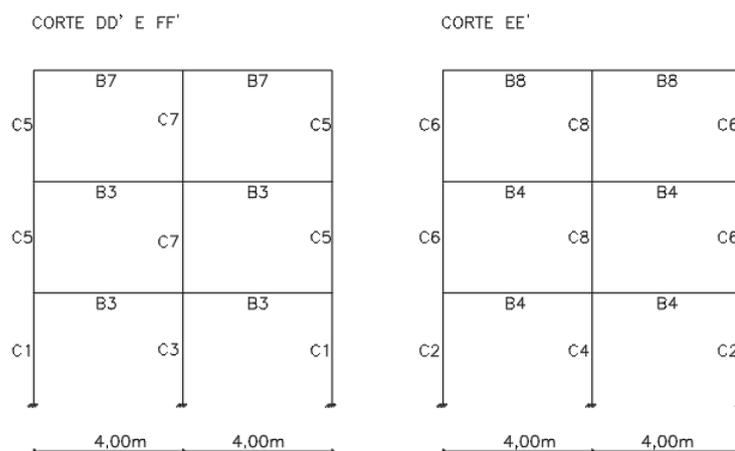


Figura 4.14 – Identificação das vigas e dos pilares nos cortes DD', EE' e FF'.

Relativamente aos objectivos de projecto consideraram-se o custo de construção, o custo ambiental e objectivos relacionados com o comportamento em serviço (limitação de deslocamentos e de tensões) e em estado limite último (verificação da resistência à flexão e ao esforço transversal). Assim, tendo em conta os cinco casos de carga anteriormente referidos consideraram-se mais de 1600 objectivos de projecto.

### 4.3.3 Resultados da optimização

No que respeita aos resultados da optimização apresentam-se nas Figuras 4.15 e 4.16 a evolução do custo de construção e do custo ambiental da estrutura em função do número de iterações de análise e optimização.

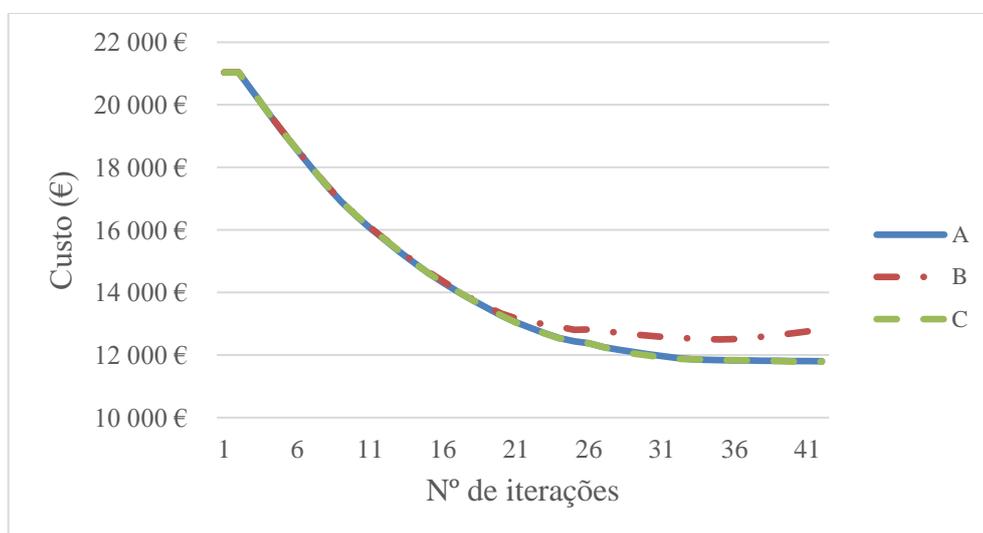


Figura 4.15 – Custo de construção vs. número de iterações

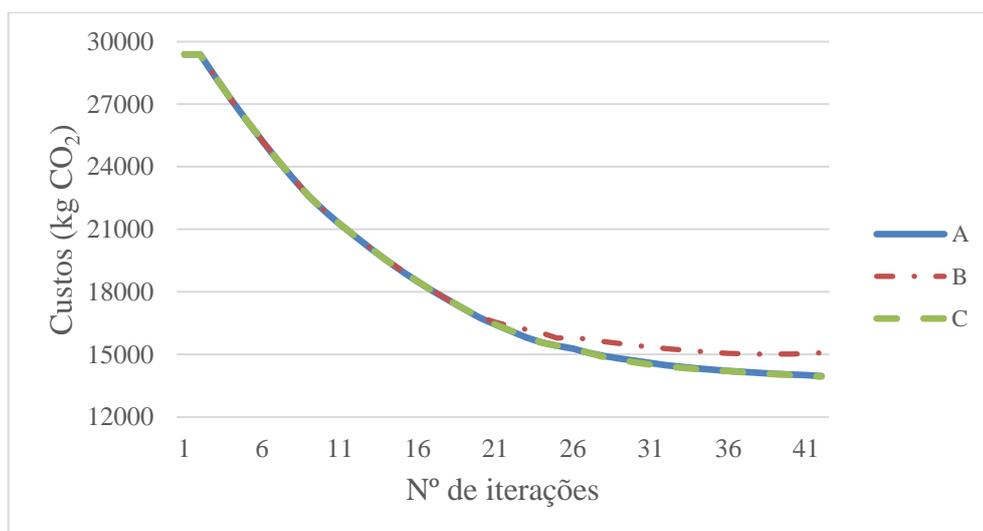


Figura 4.16 – Custo ambiental vs. número de iterações

Como se pode verificar a partir dos resultados da Figuras 4.14 e 4.15 observa-se uma redução de custos ao longo das iterações em todos os casos. Nos Quadros 4.11 e 4.12 apresentam-se os custos totais e a distribuição de custos por parcela (betão, armaduras e cofragem) para a solução inicial e a solução óptima em cada um dos casos analisados.

Quadro 4.11 – Custos de construção totais e por parcela

	<b>Total</b>	<b>Betão</b>	<b>Armadura longitudinal</b>	<b>Armadura transversal</b>	<b>Cofragem</b>
<b>Solução inicial</b>	21036 €	3847 €	3822 €	1383 €	11984 €
<b>Solução óptima (Caso A)</b>	11802 €	1759 €	2005 €	420 €	7618 €
<b>Solução óptima (Caso B)</b>	12825 €	2061 €	2025 €	468 €	8217 €
<b>Solução óptima (Caso C)</b>	11788 €	1760 €	2001 €	417 €	7610 €

Quadro 4.12 – Custos ambientais (em kg CO<sub>2</sub>) totais e por parcela

	<b>Total</b>	<b>Betão</b>	<b>Armadura longitudinal</b>	<b>Armadura transversal</b>	<b>Cofragem</b>
<b>Solução inicial</b>	29390	9920	12753	4615	2102
<b>Solução óptima (Caso A)</b>	13964	4536	6691	1401	1336
<b>Solução óptima (Caso B)</b>	15084	5316	6757	1560	1450
<b>Solução óptima (Caso C)</b>	13940	4538	6677	1390	1335

Dos resultados anteriores pode verificar-se que relativamente à solução inicial se obtiveram reduções do custo de construção de 43,9%, 39,0% e 44,0%, respectivamente, para os casos A, B e C. Relativamente aos custos ambientais observaram-se reduções de 52,5%, 48,7% e 52,6%, respectivamente, para os casos A, B e C. Estes valores representam reduções significativas que se devem à adopção de uma solução inicial sobredimensionada. Deste modo, verifica-se que a consideração simultânea dos custos de construção e dos custos ambientais como objectivos de projecto no problema de optimização é a que conduz a resultados de custo mínimo tanto a nível económico como ambiental. De referir ainda que, em termos de custos de construção, nas soluções óptimas o betão representa, aproximadamente, 15,0% do custo total, a armadura longitudinal 17,0%, a armadura transversal 3,6% e a cofragem 64,0%. Já no que respeita aos custos ambientais, o betão representa, aproximadamente, 34,0% do custo total, a armadura longitudinal 47,0%, a armadura transversal 10,0% e a cofragem 10,0%. No Quadro 4.13 apresentam-se os resultados obtidos para as variáveis de decisão consideradas.

Quadro 4.13 – Valores iniciais e valores óptimos das variáveis de decisão

Variável de decisão		Valor inicial	Valor óptimo		
Número	Descrição		Caso A	Caso B	Caso C
1	<i>h</i> da viga B1 (m)	0,500	0,250	0,290	0,250
2	<i>b</i> da viga B1 (m)	0,300	0,250	0,250	0,250
3	<i>h</i> da viga B2 (m)	0,500	0,331	0,372	0,329
4	<i>b</i> da viga B2 (m)	0,300	0,250	0,250	0,250
5	<i>h</i> da viga B3 (m)	0,500	0,250	0,250	0,250
6	<i>b</i> da viga B3 (m)	0,300	0,250	0,250	0,250
7	<i>h</i> da viga B4 (m)	0,500	0,250	0,277	0,250
8	<i>b</i> da viga B4 (m)	0,300	0,250	0,250	0,250
9	<i>h</i> da viga B5 (m)	0,500	0,250	0,250	0,250
10	<i>b</i> da viga B5 (m)	0,300	0,250	0,250	0,250
11	<i>h</i> da viga B6 (m)	0,500	0,337	0,330	0,335
12	<i>b</i> da viga B6 (m)	0,300	0,250	0,250	0,250
13	<i>h</i> da viga B7 (m)	0,500	0,250	0,250	0,250
14	<i>b</i> da viga B7 (m)	0,300	0,250	0,250	0,250
15	<i>h</i> da viga B8 (m)	0,500	0,250	0,250	0,250
16	<i>b</i> da viga B8 (m)	0,300	0,250	0,250	0,250
17	<i>h</i> do pilar C1 (m)	0,400	0,250	0,252	0,321
18	<i>b</i> do pilar C1 (m)	0,400	0,250	0,250	0,250
19	<i>h</i> do pilar C2 (m)	0,400	0,250	0,251	0,250
20	<i>b</i> do pilar C2 (m)	0,400	0,250	0,250	0,250
21	<i>h</i> do pilar C3 (m)	0,400	0,250	0,391	0,400
22	<i>b</i> do pilar C3 (m)	0,400	0,250	0,327	0,250
23	<i>h</i> do pilar C4 (m)	0,400	0,322	0,251	0,320
24	<i>b</i> do pilar C4 (m)	0,400	0,271	0,250	0,271
25	<i>h</i> do pilar C5 (m)	0,400	0,320	0,485	0,313
26	<i>b</i> do pilar C5 (m)	0,400	0,252	0,328	0,254
27	<i>h</i> do pilar C6 (m)	0,400	0,250	0,265	0,250
28	<i>b</i> do pilar C6 (m)	0,400	0,250	0,274	0,250
29	<i>h</i> do pilar C7 (m)	0,400	0,406	0,406	0,408

30	<i>b</i> do pilar C7 (m)	0,400	0,250	0,311	0,250
31	<i>h</i> do pilar C8 (m)	0,400	0,250	0,262	0,250
32	<i>b</i> do pilar C8 (m)	0,400	0,250	0,250	0,250
33	<i>A<sub>s</sub></i> de B1 z1 (cm <sup>2</sup> )	15,004	10,765	8,977	10,768
34	<i>A<sub>s</sub></i> de B1 z2 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,385	6,753	6,320
35	<i>A<sub>s</sub></i> de B2 z1 (cm <sup>2</sup> )	15,004	15,625	13,552	15,682
36	<i>A<sub>s</sub></i> de B2 z2 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,908	6,753	6,931
37	<i>A<sub>s</sub></i> de B3 z1 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,385	6,753	6,320
38	<i>A<sub>s</sub></i> de B3 z2 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,385	6,753	6,320
39	<i>A<sub>s</sub></i> de B4 z1 (cm <sup>2</sup> )	15,004	7,470	7,420	7,434
40	<i>A<sub>s</sub></i> de B4 z2 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,385	6,753	6,320
41	<i>A<sub>s</sub></i> de B5 z1 (cm <sup>2</sup> )	15,004	7,511	7,096	7,487
42	<i>A<sub>s</sub></i> de B5 z2 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,385	6,753	6,320
43	<i>A<sub>s</sub></i> de B6 z1 (cm <sup>2</sup> )	15,004	10,410	9,869	10,417
44	<i>A<sub>s</sub></i> de B6 z2 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,385	6,753	6,320
45	<i>A<sub>s</sub></i> de B7 z1 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,385	6,753	6,320
46	<i>A<sub>s</sub></i> de B7 z2 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,385	6,753	6,320
47	<i>A<sub>s</sub></i> de B8 z1 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,385	6,753	6,320
48	<i>A<sub>s</sub></i> de B8 z2 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,385	6,753	6,320
49	<i>A<sub>s</sub></i> de C1 (cm <sup>2</sup> )	32,009	18,689	14,405	18,719
50	<i>A<sub>s</sub></i> de C2 (cm <sup>2</sup> )	32,009	13,622	14,405	13,483
51	<i>A<sub>s</sub></i> de C3 (cm <sup>2</sup> )	32,009	13,622	21,864	13,483
52	<i>A<sub>s</sub></i> de C4 (cm <sup>2</sup> )	32,009	13,622	14,465	13,483
53	<i>A<sub>s</sub></i> de C5 (cm <sup>2</sup> )	32,009	19,752	20,999	19,800
54	<i>A<sub>s</sub></i> de C6 (cm <sup>2</sup> )	32,009	14,605	14,649	14,659
55	<i>A<sub>s</sub></i> de C7 (cm <sup>2</sup> )	32,009	15,507	17,490	15,564
56	<i>A<sub>s</sub></i> de C8 (cm <sup>2</sup> )	32,009	13,622	14,405	13,483
57	<i>A<sub>sw</sub></i> de B1 z1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	6,089	5,336	6,087
58	<i>A<sub>sw</sub></i> de B1 z2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234
59	<i>A<sub>sw</sub></i> de B2 z1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	9,160	7,768	9,208
60	<i>A<sub>sw</sub></i> de B2 z2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234
61	<i>A<sub>sw</sub></i> de B3 z1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234

62	$A_{sw}$ de B3 z2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234
63	$A_{sw}$ de B4 z1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	6,756	6,301	6,760
64	$A_{sw}$ de B4 z2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234
65	$A_{sw}$ de B5 z1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234
66	$A_{sw}$ de B5 z2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234
67	$A_{sw}$ de B6 z1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	5,015	5,003	5,056
68	$A_{sw}$ de B6 z2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234
69	$A_{sw}$ de B7 z1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234
70	$A_{sw}$ de B7 z2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234
71	$A_{sw}$ de B8 z1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234
72	$A_{sw}$ de B8 z2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234
73	$A_{sw}$ de C1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234
74	$A_{sw}$ de C2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234
75	$A_{sw}$ de C3 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,364	7,560	4,343
76	$A_{sw}$ de C4 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,537	4,234
77	$A_{sw}$ de C5 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234
78	$A_{sw}$ de C6 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234
79	$A_{sw}$ de C7 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,711	4,969	4,706
80	$A_{sw}$ de C8 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,277	4,523	4,234
81	$f_{cm}$	33,000	33,817	34,890	34,480

Como se pode observar no Quadro 4.13, verifica-se que a maioria das secções das vigas é diminuída, o mesmo acontece com as secções dos pilares. Relativamente à área de armadura tanto a de flexão como a de esforço transversal diminuem. No que respeita à classe do betão, em todos os casos houve um aumento do valor de  $f_{cm}$ , sendo mais significativo nos casos B e C.

Tendo em vista a obtenção de uma solução discreta procedeu-se, para o Caso C, a uma optimização em duas fases. Na primeira foram obtidos os resultados apresentados anteriormente. Na segunda fase procedeu-se ao arredondamento das dimensões das secções transversais das vigas e pilares para valores discretos de 5 em 5 cm. Os resultados deste processo apresentam-se no Quadro 4.14. Procedeu-se também ao arredondamento do valor de 26,48 MPa obtido para  $f_{ck}$  para o valor correspondente à classe C30/37. Posteriormente, na segunda fase realizou-se nova optimização considerando apenas as variáveis de decisão associadas às áreas

de armadura. Os resultados obtidos foram depois arredondados para soluções de aplicação prática, apresentando-se no Quadro 4.15 os resultados obtidos.

Quadro 4.14 – Valores iniciais e valores óptimos contínuos e valores óptimos discretos das variáveis de decisão correspondentes às dimensões das secções das vigas e pilares.

Variável de decisão		Valor inicial	Valor óptimo	
Número	Descrição		Contínuo	Discreto
1	$h$ da viga B1 (m)	0,500	0,250	0,250
2	$b$ da viga B1 (m)	0,300	0,250	0,250
3	$h$ da viga B2 (m)	0,500	0,329	0,350
4	$b$ da viga B2 (m)	0,300	0,250	0,250
5	$h$ da viga B3 (m)	0,500	0,250	0,250
6	$b$ da viga B3 (m)	0,300	0,250	0,250
7	$h$ da viga B4 (m)	0,500	0,250	0,250
8	$b$ da viga B4 (m)	0,300	0,250	0,250
9	$h$ da viga B5 (m)	0,500	0,250	0,250
10	$b$ da viga B5 (m)	0,300	0,250	0,250
11	$h$ da viga B6 (m)	0,500	0,350	0,350
12	$b$ da viga B6 (m)	0,300	0,250	0,250
13	$h$ da viga B7 (m)	0,500	0,250	0,250
14	$b$ da viga B7 (m)	0,300	0,250	0,250
15	$h$ da viga B8 (m)	0,500	0,250	0,250
16	$b$ da viga B8 (m)	0,300	0,250	0,250
17	$h$ do pilar C1 (m)	0,400	0,350	0,350
18	$b$ do pilar C1 (m)	0,400	0,250	0,250
19	$h$ do pilar C2 (m)	0,400	0,250	0,250
20	$b$ do pilar C2 (m)	0,400	0,250	0,250
21	$h$ do pilar C3 (m)	0,400	0,400	0,400
22	$b$ do pilar C3 (m)	0,400	0,250	0,250
23	$h$ do pilar C4 (m)	0,400	0,320	0,350
24	$b$ do pilar C4 (m)	0,400	0,271	0,300
25	$h$ do pilar C5 (m)	0,400	0,313	0,300
26	$b$ do pilar C5 (m)	0,400	0,254	0,250

27	<i>h</i> do pilar C6 (m)	0,400	0,250	0,250
28	<i>b</i> do pilar C6 (m)	0,400	0,250	0,250
29	<i>h</i> do pilar C7 (m)	0,400	0,408	0,400
30	<i>b</i> do pilar C7 (m)	0,400	0,250	0,250
31	<i>h</i> do pilar C8 (m)	0,400	0,250	0,250
32	<i>b</i> do pilar C8 (m)	0,400	0,250	0,250

Quadro 4.15 – Valores iniciais e valores óptimos contínuos e valores óptimos discretos das variáveis de decisão correspondentes às áreas de armadura

Variável de decisão		Valor inicial	Valor óptimo		Valor óptimo discreto
Número	Descrição		Fase 1	Fase 2	
33	<i>As</i> de B1 z1 (cm <sup>2</sup> )	15,004	10,768	10,052	5Φ16
34	<i>As</i> de B1 z2 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,320	4,356	4Φ12
35	<i>As</i> de B2 z1 (cm <sup>2</sup> )	15,004	15,682	14,067	5Φ20
36	<i>As</i> de B2 z2 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,931	6,066	4Φ16
37	<i>As</i> de B3 z1 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,320	4,173	4Φ16
38	<i>As</i> de B3 z2 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,320	2,579	3Φ12
39	<i>As</i> de B4 z1 (cm <sup>2</sup> )	15,004	7,434	7,414	4Φ16
40	<i>As</i> de B4 z2 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,320	2,875	3Φ12
41	<i>As</i> de B5 z1 (cm <sup>2</sup> )	15,004	7,487	7,228	4Φ16
42	<i>As</i> de B5 z2 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,320	2,579	3Φ12
43	<i>As</i> de B6 z1 (cm <sup>2</sup> )	15,004	10,417	9,586	5Φ16
44	<i>As</i> de B6 z2 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,320	2,579	3Φ12
45	<i>As</i> de B7 z1 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,320	3,654	4Φ12
46	<i>As</i> de B7 z2 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,320	2,579	3Φ12
47	<i>As</i> de B8 z1 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,320	4,580	5Φ12
48	<i>As</i> de B8 z2 (cm <sup>2</sup> )	15,004	6,320	2,579	3Φ12
49	<i>As</i> de C1 (cm <sup>2</sup> )	32,009	18,719	17,595	10Φ16
50	<i>As</i> de C2 (cm <sup>2</sup> )	32,009	13,483	6,244	6Φ12
51	<i>As</i> de C3 (cm <sup>2</sup> )	32,009	13,483	15,378	8Φ16
52	<i>As</i> de C4 (cm <sup>2</sup> )	32,009	13,483	8,039	4Φ16
53	<i>As</i> de C5 (cm <sup>2</sup> )	32,009	19,800	20,899	8Φ20
54	<i>As</i> de C6 (cm <sup>2</sup> )	32,009	14,659	14,516	8Φ16
55	<i>As</i> de C7 (cm <sup>2</sup> )	32,009	15,564	17,129	10Φ16
56	<i>As</i> de C8 (cm <sup>2</sup> )	32,009	13,483	9,196	6Φ16
57	<i>Asw</i> de B1 z1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	6,087	6,018	E2R Φ8//0,10

58	<i>A<sub>sw</sub></i> de B1 z2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	1,789	E2R Φ6//0,10
59	<i>A<sub>sw</sub></i> de B2 z1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	9,208	8,427	E2R Φ10//0,10
60	<i>A<sub>sw</sub></i> de B2 z2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	3,790	E2R Φ8//0,10
61	<i>A<sub>sw</sub></i> de B3 z1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	3,681	E2R Φ8//0,10
62	<i>A<sub>sw</sub></i> de B3 z2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	1,789	E2R Φ6//0,10
63	<i>A<sub>sw</sub></i> de B4 z1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	6,760	6,812	E2R Φ6//0,05
64	<i>A<sub>sw</sub></i> de B4 z2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	1,789	E2R Φ6//0,10
65	<i>A<sub>sw</sub></i> de B5 z1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	1,789	E2R Φ6//0,10
66	<i>A<sub>sw</sub></i> de B5 z2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	1,789	E2R Φ6//0,10
67	<i>A<sub>sw</sub></i> de B6 z1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	5,056	4,744	E2R Φ8//0,10
68	<i>A<sub>sw</sub></i> de B6 z2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	1,789	E2R Φ6//0,10
69	<i>A<sub>sw</sub></i> de B7 z1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	1,789	E2R Φ6//0,10
70	<i>A<sub>sw</sub></i> de B7 z2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	1,789	E2R Φ6//0,10
71	<i>A<sub>sw</sub></i> de B8 z1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	3,949	E2R Φ8//0,10
72	<i>A<sub>sw</sub></i> de B8 z2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	1,789	E2R Φ6//0,10
73	<i>A<sub>sw</sub></i> de C1 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	1,789	E2R Φ6//0,10
74	<i>A<sub>sw</sub></i> de C2 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	1,789	E2R Φ6//0,10
75	<i>A<sub>sw</sub></i> de C3 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,343	1,789	E2R Φ6//0,10
76	<i>A<sub>sw</sub></i> de C4 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	2,147	E2R Φ6//0,10
77	<i>A<sub>sw</sub></i> de C5 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	1,789	E2R Φ6//0,10
78	<i>A<sub>sw</sub></i> de C6 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	1,789	E2R Φ6//0,10
79	<i>A<sub>sw</sub></i> de C7 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,706	5,005	E2R Φ8//0,10
80	<i>A<sub>sw</sub></i> de C8 (cm <sup>2</sup> )	10,051	4,234	1,789	E2R Φ6//0,10

Com a segunda fase de optimização consegue-se uma redução adicional de custo de construção de 3,75% e de custo ambiental de 10,58%. Posteriormente, o arredondamento para a solução final discreta conduz a um aumento de custos de construção de 14,41% e de custo ambiental de 27,85%. De referir ainda que do ponto de vista de aplicação prática seria útil proceder a uma uniformização das armaduras longitudinais nas vigas recorrendo por exemplo a uma redistribuição de esforços. Este aspecto poderá ser abordado em trabalhos futuros.

## 5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

### 5.1 Conclusões

Na presente dissertação desenvolveu-se e aplicou-se um modelo numérico de análise e optimização para a obtenção do projecto óptimo e sustentável de estruturas porticadas de betão armado. Tendo em conta o trabalho desenvolvido e os resultados obtidos podem referir-se as seguintes conclusões:

- O problema de dimensionamento de uma estrutura porticada de betão armado pode ser formulado e resolvido como um problema de optimização *multi-objectivo*. O algoritmo de optimização fornece soluções económicas e sustentáveis através da minimização do custo de construção e do custo ambiental expresso em termos de emissões de CO<sub>2</sub>. Estas soluções verificam o conjunto de objectivos de projecto relacionados com verificações de segurança aos estados limites últimos e de utilização.
- O algoritmo de optimização pode considerar-se robusto pois tem em conta todas as acções e efeitos relevantes, assim como os objectivos de projecto fundamentais para este tipo de problemas. O algoritmo mostrou-se também eficiente pois, apesar do problema apresentar alguma complexidade, as soluções óptimas são obtidas após um reduzido número de iterações. A complexidade do problema deve-se à sua dimensão, em termos de número de variáveis de decisão e de objectivos de projecto e por envolver diversos casos de carga com análise estática, análise dinâmica e a consideração de efeitos geometricamente não-lineares.
- A metodologia desenvolvida e implementada para calcular as sensibilidades dos objectivos relacionados com a verificação a resistência dos elementos de betão armado mostrou-se eficiente e adequada para prever adequadamente a resposta da estrutura face a variações nas variáveis de decisão.
- A consideração simultânea dos custos de construção e dos custos ambientais como objectivos de projecto permite obter soluções de custo mínimo a respeito destes dois critérios, quando comparada com a consideração dos mesmos de forma isolada.

### 5.2 Recomendações para trabalhos futuros

Como nota final após a realização do presente trabalho, indicam-se algumas sugestões para estudos futuros tendo em vista complementar o trabalho desenvolvido:

- Estender o estudo efectuado a estruturas porticadas de maiores dimensões.
- Implementar uma estratégia que contemple a redistribuição de esforços internos de modo a uniformizar as soluções para as áreas de armadura longitudinal das vigas.
- Aplicar novamente o modelo numérico desenvolvido utilizando valores actualizados dos custos unitários dos materiais e referentes ao mercado português.
- Com base nesses valores actualizados realizar uma análise de sensibilidades dos custos unitários dos diferentes materiais.
- Incluir o custo ambiental, expresso em termos de custo das emissões de CO<sub>2</sub> (em €/kg CO<sub>2</sub>), no processo de optimização.
- Realizar uma análise de ciclo de vida deste tipo de estruturas, procurando minimizar o custo total da mesma, considerando os custos económicos sociais e ambientais. Isto deverá ser efectuado considerando não apenas a fase de construção, mas toda a vida útil da estrutura incluindo manutenções e reparações.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Al-Gahtani, A. S.; Al-Saadoun, S. S.; Abul-Feilat, E. A. (1993) “Design optimization of continuous partially prestressed concrete beams.” *Computers and Structures*, v. 55, n. 2, p. 365–370.

Arga e Lima, J. D.; Monteiro, V.; Mun, M. (2004). “Esforços normais e de flexão” Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

Arora, Jasbir S. (2004). “Introduction to optimum design”. 2ª edição, Waltham, MA, EUA: Elsevier Academic Press.

Chou, J.; Yeh, K. (2015) “Life cycle carbon dioxide emissions simulation and environmental cost analysis for building construction.” *Journal of Cleaner Production*, v. 101, p. 137–147.

Clough, R.W. and Penzien, J. (2003). “Dynamics of Structures”, Third edition, Computers and Structures, Inc., USA.

NP EN 1992-1-1 (2010). “NP EN 1992-1-1 Eurocódigo 2 – Projecto de estruturas de betão, Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios”. IPQ – Instituto Português da Qualidade.

NP EN 1998-1 (2010) “Eurocódigo 8 – Projeto de Estruturas para Resistência aos Sismos – Parte 1: Regras gerais, ações sísmicas, e regras para edifícios.” IPQ - Instituto Português da Qualidade.

Esfandiari, M. J., Urgessa, G. S., Sheikholarenfin, S., Manshadi, S. H. D. (2018) “Optimization of reinforced concrete frames subjected to historical time-history loadings using DMPSO algorithm.” *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 58, n. 5, p. 2119–2134.

Esfandiari, M. J., Urgessa, G. S., Sheikholarenfin, S., Manshadi, S. H. D. (2018) “Optimum design of 3D reinforced concrete frames using DMPSO algorithm.” *Advances in Engineering Software*, v. 115, p. 149–160.

García-Segura, T.; Yepes, V. (2016) “Multiobjective optimization of post-tensioned concrete box-girder road bridges considering cost, CO<sub>2</sub> emissions, and safety.” *Engineering Structures*, v. 125, p. 325–336.

García-Segura, T. et al. (2015) “Hybrid harmony search for sustainable design of post-tensioned concrete box-girder pedestrian bridges.” *Engineering Structures*, v. 92, p. 112–122.

Govindaraj, V. and Ramasamy, J. V. (2007) “Optimum detailed design of reinforced concrete frames using genetic algorithms.” *Engineering Optimization*, v. 39, n. 4, p. 471–494.

Haftka, R. T., Gürdal, Z. (1992). “Elements of structural optimization”, 3ª edição. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

---

Henriques, V. A. M. (2011) “Impacte ambiental de estruturas de edificios – a produção de CO<sub>2</sub>.” Dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico de Lisboa.

ITeC Database: Institute of Construction Technology of Catalonia, Barcelona, <https://en.itec.cat/database/>. Acedido a 21 maio 2018.

Kanagasundaram, S. and Karihaloo, B. L. (1990) “Optimum design of frames under multiple loads” v. 36, n. 3, p. 443-489.

Kaveh, A.; Behnam, A. F. (2013) “Design optimization of reinforced concrete 3D structures considering frequency constraints via a charged system search.” *Scientia Iranica*, v. 20, n. 3, p. 387–396.

Kirsch, U. (1997) “Two-level optimization of prestressed structures.” *Engineering Structures*, v. 19, n. 4, p. 309–317.

Lee, K. S. and Geem, Z. W. (2004) “A new meta-heuristic algorithm for continuous engineering optimization: Harmony search theory and practice.” *Computer methods applied mech engineering*, v. 194, n. 36–38, p. 3902–3933.

Martí, J. V.; González-Vidosa, F. (2010) “Design of prestressed concrete precast pedestrian bridges by heuristic optimization.” *Advances in Engineering Software*, v. 41, n. 7–8, p. 916–922.

Martí, J. V., Gonzalez-Vidosa, F., Yepes, V., Alcalá, J. (2013) “Design of prestressed concrete precast road bridges with hybrid simulated annealing.” *Engineering Structures*, v. 48, p. 342–352.

Martins A.M.B., Simões L.M.C., Negrão J.H.J.O. (2019) Sustainable Design Optimization of Reinforced Concrete Frames Considering CO<sub>2</sub> Emission Minimization. EngOpt 2018 Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Optimization.

Martins, A. M. B.; Simões, L. M. C.; Negrão, J. H. J. O. (2018) “Sustainable Design Optimization of Reinforced Concrete Frames Considering CO<sub>2</sub> Emission Minimization.” EngOpt 2018 Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Optimization, p. 632–643.

Medeiros, G. F.; Kripka, M. (2014) “Optimization of reinforced concrete columns according to different environmental impact assessment parameters.” *Engineering Structures*, v. 59, p. 185–194.

Mergos, P. E. (2016) “Optimum Design of Reinforced Concret Frames According to EC8 and MC2010 With Genetic Algorithms.” ECCOMAS Congress 2016 v. 8, p. 5–10.

Mergos, P. E. (2017) “Optimum seismic design of reinforced concrete frames according to Eurocode 8 and fib Model Code 2010.” *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* n. 46, p. 1181–1201.

- 
- Martins, A. M. B. (2015) “Análise e optimização de pontes atirantadas de betão.” Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra.
- Negrão, João H. J. O. (1996). “Análise de sensibilidades e optimização de pontes atirantadas metálicas”. Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.
- Park, H. S., Kwon, B, Shin, Y, Kim, Y, Hong, T., Choi, S. W. (2013) “Cost and CO<sub>2</sub> emission optimization of steel reinforced concrete columns in high-rise buildings.” *Energy and buildings*, v. 6, n. 11, p. 5609–5624.
- Park, H. S., Kwon, B, Shin, Y, Kim, Y, Hong, T., Choi, S. W. (2014) “Evaluation of the influence of design factors on the CO<sub>2</sub> emissions and costs of reinforced concrete columns” *Energy and Buildings*, v. 82, p. 378–384.
- Paya-Zaforteza, I., Yepes, V, Hospitaler, A., Gonzalez-Vidosa, F. (2009) “CO<sub>2</sub> - optimization of reinforced concrete frames by simulated annealing.” *Engineering Structures*, v. 31, n. 7, p. 1501–1508.
- Pires, A. M. S. F. (2013) “Quantificação do valor ambiental em edifícios. Estudo de um caso prático.” Dissertação de mestrado, Instituto Superior de Engenharia de Lisboa.
- REBAP (1983) Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado. Porto Editora, Porto.
- Saramago, P. S.; Steffen J. R., V. (2008) “Introdução às Técnicas de Otimização em Engenharia”. *Horizonte Científico*, v. 2, n. 2, p. 1689–1699.
- Sarma, K. C. and Adeli, H. (1998) “Cost optimization of concrete structures” *Journal of structural engineering*, v. 124, p. 570-578.
- Simões, Luís M. C. (2008). “Optimização de estruturas”. 1ª edição, Coimbra: ST–Artes Gráficas, Lda.
- Simões, L. M. C., Templeman, A. B. (1989). “Entropy-based synthesis of pretensioned cable net structures”. *Engineering Optimization*, v. 15, p. 121-140.
- Simões, L. M. C. (1991). “Information entropy applications in structural optimization”. In *Proceedings of OPTI 91 – Optimization of Structural Systems and Industrial Applications*, editado por S. Hernandez e C.A. Brebbia, p. 15-26. Cambridge, MA, EUA: Elsevier Applied Sciences.
- Syngros, G.; Balaras, C. A.; Koubogiannis, D. G. (2017) “Embodied CO<sub>2</sub> Emissions in Building Construction Materials of Hellenic Dwellings” *Procedia Environmental Sciences*, v. 38, p. 500–508.
-

Templeman, A. B. (1993). “Entropy-based optimization methods for engineering design”. In *Advanced techniques in the optimum design of structures*, editado por S. Hernandez, 109-139 Southampton, UK: Computational Mechanics.

TETO (2018). “TETO – Arquitetura Sustentável e Paisagismo”. <http://teto2r.com/>. Acedido a 22 de outubro 2018.

Wang, J.; Wang, Y.; Sun, Y.; Tingley, D.; Zhang, Y. (2017) “Life cycle sustainability assessment of fly ash concrete structures.” *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, v. 80, p. 1162–1174.

Wilson, E. L., Der Kiureghian, A., & Bayo, E. P. (1981) “A replacement for the srss method in seismic analysis.” *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 9, n. 2, 187–192.

Worldwatch (2018). Worldwatch Institute, Washington, <http://www.worldwatch.org/>. Acedido a 22 de outubro 2018

Yeo, D.; Potra, F. A. (2014) “Sustainable Design of Reinforced Concrete Structures through CO<sub>2</sub> Emission Optimization” *Journal Structural Engineering*, v. 141, n. 3, p. B4014002.

Yepes, V. et al. (2012) “Bs and MSc in Civil Engineering MSc in Concrete Engineering” *Journal of Computing in Civil Engineering*, v. 26, n. 3, p. 378–386.

Yepes, V.; Martí, J. V.; García-Segura, T. (2015) “Automation in Construction Cost and CO<sub>2</sub> emission optimization of precast – prestressed concrete U-beam road bridges by a hybrid glowworm swarm algorithm”. *Automation in Construction*, v. 49, p. 123–134.

Zhang, Z.; Wang, B. (2016) “Research on the life-cycle CO<sub>2</sub> emission of China’s construction sector.” *Energy and Buildings*, v. 112, n. 92, p. 244–255.