Vanda Catarina Tavares de Oliveira Campos

Estágio, ∑ de aprendizagens

Relatório de Estágio do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, orientado pelo Professor Doutor Jaime Maria Monteiro de Carvalho e Silva e Doutora Ana Paula Costa Mouro, apresentado ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

julho 2018

· U C ·

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Estágio, $\sum$ de aprendizagens

Vanda Catarina Tavares de Oliveira Campos

· U C ·

Universidade de Coimbra

Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Master in Mathematics Teaching in the 3rd Cycle of Basic and Secondary Education

Relatório de Estágio | Report of Stage

julho 2018

Agradecimentos

A concretização deste relatório de estágio contou com importantes apoios e incentivos, sem os quais não se teria tornado uma realidade e aos quais estarei eternamente grata.

Começo por agradecer à Professora Doutora Helena Maria Mamede Albuquerque por me ter dado certezas, quando eu apenas tinha dúvidas.

À Escola Secundária Jaime Cortesão, em particular à Doutora Maria da Conceição Campaniço Ferreira Malhó Lorga Gomes, Diretora desta instituição, por me ter dado a oportunidade de contactar com a realidade educativa.

Ao Professor Doutor Jaime Maria Monteiro de Carvalho e Silva, meu orientador, pela competência científica, acompanhamento, disponibilidade e generosidade reveladas ao longo deste ano de trabalho, assim como pelas críticas, correções e sugestões relevantes, feitas durante a orientação.

À minha orientadora, Dr.ª Ana Paula Costa Mouro, que sempre acreditou em mim, agradeço a orientação exemplar e pautada por um elevado e rigoroso nível cientifico, uma visão crítica e oportuna, um empenho inexcedível e saudavelmente exigente, mas sobretudo, por me ter dado o privilégio de conhecer um modelo exímio de ser humano e de excelência na profissão.

À Professora Doutora Maria Celeste de Almeida Gouveia e ao Professor Doutor António Manuel Freitas Gomes Cunha Salgueiro, pela disponibilidade e dedicação em fazer parte deste percurso.

Aos "meus" meninos e meninas da turma 10º1, por todo o carinho, respeito, solidariedade e amizade demonstrados durante o ano letivo.

Ao meu pai, que faleceu quando eu tinha apenas 6 anos, dedico este meu trabalho. Sei que, neste momento, estaria muito feliz e orgulhoso da sua "Nini".

À minha mãe e ao meu irmão, a quem devo grande parte das minhas conquistas, todo o apoio que me deram neste meu percurso.

À minha amiga "Tita", pelo carinho, motivação e apoio incondicional e, pelos mesmos motivos, aos seus pais, que eu, desde sempre, e muito carinhosamente, tratei por "Mia" e "outro pai", mas que também já não se encontram entre nós.

Resumo

O relatório de estágio aqui apresentado foi elaborado no âmbito da disciplina Estágio e Relatório, integrado no plano de estudos do Mestrado em Ensino de Matemática, no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário.
O estágio decorreu ao longo do ano letivo 2017/2018, na Escola Secundária Jaime Cortesão, em Coimbra, sob a orientação da Dra. Ana Paula Costa Mouro. O núcleo de estágio integrou duas estagiárias, Daniela Silva e Vanda Campos e a orientadora cooperante, Dra. Ana Paula Mouro. O professor responsável pelo acompanhamento e supervisão foi o Professor Doutor Jaime Maria Monteiro de Carvalho e Silva.
A turma de estágio (turma principal) foi a turma de 10º ano, do curso de Ciências e Tecnologias.

Este relatório tem como objetivo refletir e avaliar todas as vivências que decorreram durante este ano letivo.
A estrutura deste relatório respeitará a seguinte ordem: Capítulo 1 – Antes do começo – expõem-se os medos e receios sentidos antes de iniciar esta última fase do percurso académico.
Capítulo 2 – Uma Escola com história – aborda-se um pouco da história e como esta se tornou, com o passar dos anos, a escola que nós conhecemos. Ainda neste capítulo faz-se uma breve descrição do Agrupamento de Escolas de Coimbra Centro.
Capítulo 3 – Componente não letiva – faz-se referência às reuniões de Departamento bem como às reuniões de Conselho de Turma e descrevem-se os trabalhos desenvolvidos, de modo muito sucinto, no Tempo Cooperativo.
Capítulo 4 – Componente letiva – divide-se em três subcapítulos: Aulas, Apoio e Reconhecimento, Validação e Certificação de Competências (RVCC). No primeiro subcapítulo faz-se uma alusão à avaliação, descreve-se a turma, faz-se referência a uma aluna com Necessidades Educativas Especiais e à primeira aula lecionada, entre outros. No segundo subcapítulo descreve-se o apoio pedagógico lecionado por mim e, por último, as aprendizagens realizadas no âmbito da frequência das formações promovidas pela orientadora cooperante no RVCC.
Capítulo 5 – Atividades – descrevem-se as atividades realizadas pelos alunos ao longo deste ano letivo, fora da sala de aula.
Capítulo 6 – Os últimos dias de estágio – explica-se a última semana enquanto professora da turma do 10º ano.
Capítulo 7 – Exames- descreve-se um dia de exames na escola.

Palavra chave: Estágio, Matemática, Aulas, Jaime Cortesão, Secundário

Abstract

The internship report here presented was elaborated within the Internship and Report subject, integrated on the curriculum of the Master's degree in Mathematics teaching, at third cycle of basic education and secondary education. The internship occurred during the school year of 2017/2018, at Escola Secundária Jaime Cortesão, Coimbra, under the guidance of Dra. Ana Paula Costa Mouro. The internship center integrated two trainees, Daniela Silva and Vanda Campos and the cooperative advisor, Dra Ana Paula Mouro. The teacher in charge for monitoring and supervision was Prof. Dr. Jaime Maria Monteiro de Carvalho e Silva. The internship class (main class) was the 10th grade class, from the Scienc and Technology course .

This report has one goal, to reflect and evaluate all the experiences which occurred during this school year.
The structure of this report shall comply with the following order:
Chapter 1 – Before the beginning – all fears and frights felt before starting this final stage of the academic course are exposed here.
Chapter 2 – A School with history – I talk a little bit about the history and how the school has become, after the years, the school we know. In this chapter a brief description of the Agrupamento de Escolas Coimbra Centro is still made.
Chapter 3 - Non-teaching component- the Department meetings and the class council meetings are presented here as well as the works done, succintly, in Cooperative Time.
Chapter 4 – teaching component – It's divided by three subchapters: Classes, Support and Recognition, Validation and Certification of Competencies (RVCC). In the first subchapter, an allusion is made to evaluation, the class is described, some references to a student with special educational needs are made as well as to my first lesson, among others. In the second subchapter I describe the pedagogical support taught by me and, lastly, the learning made while attending the instruction of the cooperating counselor in the RVCC is exposed.
Chapter 5 – Activities – the activities made by the students during this school year, outside the classroom, are described.
Chapter 6 – Last days of internship –The last week as the 10th grade class teacher is explained.
Chapter 7 – Exams a day of school exams is presented.

Keywords: Internship, Mathematics, Class, Jaime Cortesão, Highschool

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Abreviaturas

EFA	Educação e Formação de Adultos
AECC	Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
SPO	Serviços de Orientação Profissional
NEE	Necessidades Educativas Especiais
PAAA	Plano Anual de Atividades do Agrupamento
PEI	Plano Educativo Individual
PIT	Plano Individual de Transição
PLMN	Português Língua Não Materna
RVCC	Reconhecimento, Validação e Certificação de Competências
TORCV	Técnico de Orientação, Reconhecimento e Validação de Competências
OPM	Olimpíadas Portuguesas de Matemática
SPM	Sociedade Portuguesa de Matemática
ASEDA	Associação de Educação Académica
JNE	Júri Nacional de Exames

Capítulo 1

Antes do começo

Desde sempre quis ser professora de Matemática, mas, quando o momento chega, começam as dúvidas e os medos. Dá-se, então, início a uma luta constante entre a razão e o coração, surgem as infindáveis dúvidas na nossa mente e, ao mesmo tempo, uma vontade enorme de seguir um sonho, nunca sabendo se será este o caminho certo.

É uma luta constante que vive diariamente dentro de nós. Depois chega-se a um ponto em que começamos a duvidar de nós mesmos, sim, já não precisamos que os outros duvidem de nós, pois nós mesmos começamos a fazer isso.
Todos os dias pensava no tipo de professora que seria e se realmente iria conseguir seguir este caminho, por mais árduo que fosse. É quando está tudo para acontecer que as dúvidas começam e nos interrogamos se estamos no mestrado correto. É impossível não pensar no futuro e impensável não ficar nervoso com o que se pensa.
Era um medo misturado com a vontade de fazer um bom trabalho em sala de aula, não deixar a imagem de que não fui suficientemente capaz de, pelo menos, ensinar algo a uma turma.

Ao longo do meu percurso escolar tive professores que me marcaram pela positiva. Foram professores que saíram daquela postura rígida à qual estávamos habituados, para se tornarem em professores humanos. Quero com isto dizer que foram professores atentos, carinhosos com os seus alunos e sabiam tirar proveito das aulas de diferentes formas, tornando as aulas muito mais interessantes.
Sempre os levei e sempre os levarei como referência, enquanto me permitirem ser professora.

Capítulo 2

Uma Escola com história

2.1 Breve história do edifício

Fig. 2.1 Edíficio da Escola Secundária de Jaime Cortesão

A Escola Secundária de Jaime Cortesão, assim designada no ano letivo 1977/1978, encontra-se instalada num imóvel cuja fundação remonta à primeira metade do século XVII.
Ao longo dos 370 anos de existência, este edifício pertenceu a diferentes instituições e desempenhou vários papéis, podendo considerar -se quatro fases distintas:

- 1.ª fase (1633-1834)
  Durante esta fase, o imóvel integrou-se no complexo do Mosteiro de Santa Cruz, uma instituição de monges fundada na primeira metade do século XII que, deu um valioso contributo para o prestígio intelectual de Coimbra muito antes de a Universidade ter vindo instalar-se definitivamente.
  O seu primeiro destino foi servir de Enfermaria dos Frades, e, possivelmente, a todas as pessoas que a ela recorressem.
  Ainda no tempo do clero, novas funções se atribuíram a este edifício que foi, também, Biblioteca, Residência do Abade, Hospedaria e Dormitório do Mosteiro, designação pelo qual era conhecido em 1834, ano em que terminou a guerra civil que consagrou a vitória definitiva das forças liberais em Portugal.

- 2.ª fase (1834-1923)
  Foi em 1834 que se iniciou o segundo período da história do imóvel. Nesta data o Ministro liberal Joaquim António de Aguiar, também conhecido pela popular alcunha de "O Mata-Frades", decretou a extinção das ordens religiosas em Portugal e a nacionalização dos respetivos bens. Isto significou que o clero deixaria de existir e que os seus bens passariam para o Estado, no qual se incluía a casa onde, atualmente, funciona a Escola Secundária de Jaime Cortesão.
  Em 1848, a Câmara Municipal de Coimbra, a nova proprietária, deliberou utilizar o antigo Dormitório do Mosteiro de Santa Cruz para instalar crianças abandonadas, ficando aqui instalada a Roda dos Expostos.
  Em 1872, a Roda dos Expostos foi rebatizada surgindo no mesmo local o Hospício dos Abandonados.
  Em fevereiro de 1911, já depois da implantação da República, foi extinto o Hospício e criou-se, por Decreto Governamental, uma Maternidade que teria como obrigação acolher as crianças de tenra idade, proporcionando-lhes, gratuitamente, leite e medicamentos. Transferindo-se a sua tutela para a Faculdade de Medicina da Universidade de Coimbra.

- 3.ª fase (1923-1958)
  Em 1923 deixou de ser uma Maternidade, onde se cuidava do bem-estar dos seus pequenos utentes, para se transformar numa Escola onde se proporcionava formação intelectual e pessoal aos alunos que a frequentavam – Escola Industrial de Avelar Brotero.

- 4.ª fase (1968/69 aos nossos dias)
  A transferência da Avelar Brotero para o Calhabé não implicou o total abandono da sua antiga sede: no ano letivo 1968/1969, a Escola Industrial e Comercial Brotero volta às velhas instalações, nelas instalando uma secção que ministrava apenas o Curso Comercial, a chamada Secção da Baixa.
  A 1 de janeiro de 1972, o edifício passou a ser ocupado por uma nova Escola, entretanto criada, a Escola Técnica de Sidónio Pais.
  Já depois do 25 de abril de 1974, a Escola Técnica de Sidónio Pais sofre uma alteração na sua designação e passa a ser designada por Escola Técnica de Jaime Cortesão.
  Com o decreto-lei nº 80/78, de 27/04, as designações de todos os estabelecimentos do ensino secundário, passam a ter a designação genérica de "Escolas Secundárias". Logo a Escola Técnica de Jaime Cortesão passa a ser designada por Escola Secundária de Jaime Cortesão.

2.2 Jaime Cortesão na atualidade

A Escola está instalada num imóvel cuja fundação remonta à primeira metade do século XVII. Como é obvio, são grandes os inconvenientes daqui resultantes para a vida escolar, os principais dos quais se traduzem na escassez e inadequação de alguns espaços que tiveram de ser adaptados a novas funções. No entanto, deve ser valorizado o interesse histórico e patrimonial de uma construção de muitos e longos anos, com caraterísticas especificas que contribuem para a identidade desta escola.
Vamos então à descoberta de vestígios do passado que às vezes estão escondidos pelo presente:

- A sala 1 e a Arrecadação (em frente da Secretaria) foram Refeitório e Cozinha do Mosteiro. Podendo ainda ver a enorme chaminé espreitando na arrecadação e saindo para o jardim encostado à sala 1. Neste jardim ainda se pode observar o exterior das bonitas Cúpulas dos Torreões do Corredor;

- A zona da Biblioteca e Mediateca "escodem" a antiga Enfermaria;

- A sala 7 funcionou como capela da enfermaria;

- Ao percorrer o espaço Corredor observa-se uma sucessão de Abóbodas, Arcos e Cúpulas de Torreões cuja harmonia e luminosidade no dão uma impressão de beleza e simplicidade;

- A associação dos Estudantes funciona num dos torreões existentes na cerca do Mosteiro;

- A fonte e o tanque, situados junto ao campo de jogos, já existiam no século XVII;

- A capela, existente à entrada do sótão, foi capela mortuária e a área circundante foi cemitério.

Fig. 2.2 Sala 7 e a Capela, respetivamente

A partir da década de 1990, verificaram-se grandes melhoramentos na Escola com a reestruturação dos Laboratórios de Biologia, Geologia, Física e Química, a criação das salas do Escritório Comercial e de Informática, o apetrechamento da Mediateca, a construção de novos pavilhões com salas de aulas modernas e adaptadas aos objetivos pedagógicos.

A herança histórica cultural e humanística de Jaime Cortesão e deste edifício com longos anos de vida e o desafio constante de recriar, inventar e adaptar este espaço a um ensino-aprendizagem virado para as necessidades e os interesses dos alunos, contribuíram e moldaram a identidade da nossa Escola.
O facto de se tratar de uma instituição pequena, que sempre se viu obrigada a "inventar" espaços, transformou, na opinião da Direção, "a Jaime Cortesão" na "escola da cidade onde se verifica a maior proximidade entre alunos, professores e funcionários". Circulam todos pelo mesmo corredor, convivem no único bar existente e os funcionários depressa conhecem todos os estudantes.

2.3 Breve caraterização do Agrupamento

Esta unidade organizacional foi constituída no ano letivo 2012/2013 e resultou da associação dos antigos Agrupamentos de Escolas de São Silvestre e de Silva Gaio e, ainda, da Escola Secundária de Jaime Cortesão. Atualmente é composto por dez unidades com Ensino Pré-Escolar, quinze unidades com Ensino do 1.º ciclo do Ensino Básico, duas escolas dos 2.º e 3.º ciclos do Ensino Básico e uma escola do Ensino Secundário, a escola sede.

O Agrupamento constitui-se ainda como unidade de referência para a Educação Bilingue de Alunos Surdos, Portadores de Cegueira e de Baixa Visão, com Perturbações do Espetro do Autismo e com Multideficiência e Surdo-Cegueira Congénita.
Na escola sede são lecionados dois Cursos Científico-Humanísticos (Ciências e Tecnologias e Línguas e Humanidades), três Cursos Profissionais (Técnico de Apoio à Infância, Técnico de Apoio Psicossocial e Desporto). Esta escola também oferece cursos EFA de nível básico e de nível secundário, em horário pós-laboral. Ali funciona ainda o Centro Qualifica, único numa escola pública do Baixo Mondego.

A variedade da localização dos Jardins-de-Infância e das escolas do Agrupamento e a dispersão geográfica permitem percecionar a heterogeneidade da população escolar. Os estabelecimentos de ensino mais afastados servem uma população escolar maioritariamente rural, enquanto aqueles mais próximos da cidade, ou mesmo da cidade de Coimbra, direcionam-se para alunos provenientes de meio urbano ou da periferia.
O AECC caracteriza-se também pela diversidade cultural e étnica dos seus alunos, nos vários ciclos de ensino, o que remete para uma especial atenção com as questões da interculturalidade e da inclusão de todos os discentes. Os SPO, uma mais-valia para o AECC, prestam apoio psicopedagógico e vocacional bem como se dedicam ao acompanhamento de alunos NEE.

Capítulo 3

Componente não letiva

3.1 Reuniões do Departamento de Matemática e Informática

As reuniões de Departamento realizavam-se na escola sede, na sala 6, com os docentes dos grupos 500 (Matemática), 550 (Informática) e 230 (Matemática e Ciências da Natureza).
A Ordem de Trabalhos destas reuniões é variável, mas inclui sempre, o ponto "Informações". Estas são transmitidas pela coordenadora e emanadas das reuniões do Conselho Pedagógico.

No geral, estas reuniões serviam para os docentes falarem das respetivas turmas e das taxas de sucesso, bem como problemas relacionados com o horário de lecionação de apoio. Também nestas reuniões eram discutidas questões tais como taxas de sucesso, balanço sobre os resultados obtidos, estratégias para otimizar o desempenho dos alunos, entre outros.
Estas reuniões costumam seguir uma ordem de trabalhos. Por exemplo, no dia 8 de novembro, primeira reunião a que assisti, realizou-se uma reunião com as seguintes Ordem de Trabalhos:

- Ponto prévio – Propostas de alteração ao Regulamento dos Cursos Profissionais e ao Regulamento Interno do Agrupamento;
- Ponto um – Informações;
- Ponto dois – Levantamento das necessidades de salas de estudo ou outros apoios;
- Ponto três – Análise dos resultados de Matemática nas Provas de Aferição;
- Ponto quatro – Elaboração da tabela de metas de sucesso por disciplina/ano de escolaridade/turma;
- Ponto cinco – Outros assuntos

3.2 Conselhos de Turma 10ºano

Ao longo deste ano letivo decorreram três tipos de reuniões de Conselho de Turma, sendo estas convocadas pela Diretora de Turma:

1. Reuniões Intercalares
2. Reuniões de final de período
3. Reunião extraordinário de Conselho de Turma.

As reuniões intercalares têm como principais objetivos dar informações sobre os elementos que integram a turma, analisar o comportamento e assiduidade, casos problema que já tenham sido detetados, estratégias comuns de atuação entre outros.
No caso desta turma, houve apenas uma reunião intercalar no primeiro período. Nesta, a diretora de turma informou que havia uma aluna com dislexia grave. Estas reuniões seguem uma Ordem de Trabalhos, que pode ser modificada consoante o tipo ou propósito da reunião, por exemplo:

- Ponto Um – Aprovação do Regimento do Conselho de Turma;
- Ponto Dois – Informações;
- Ponto Três - Análise global da turma (caracterização, levantamento de casos problema e definição de estratégias);
- Ponto Quatro – Análise da avaliação diagnóstica;
- Ponto Cinco – Operacionalização das competências transversais;
- Ponto Seis - Definição de Estratégias Globais de atuação;
- Ponto Sete – Articulação de Programas;
- Ponto Oito – Atualização do Plano Turma (caracterização da turma, objetivos, metas, atividades,...);
- Ponto Nove - Elaboração do anexo ao PEI e/ou elaboração do PIT.

As reuniões de final de período têm como principal objetivo ratificar as classificações propostas por cada docente. Sendo possível serem alteradas se assim o Conselho de Turma achar pertinente.
No final do primeiro período, realizou-se uma reunião com a seguinte Ordem de Trabalhos:

- Ponto Um: Informações;
- Ponto Dois: Avaliação sumativa interna;
- Ponto Três: Análise global da turma (aproveitamento, comportamento, assiduidade). Identificação de casos problema;
- Ponto Quatro: Atividades de recuperação e desenvolvimento;
- Ponto Cinco: Elaboração de novos PEI para alunos que tenham vindo de novo para o Agrupamento; Avaliação e/ou Adendas aos já existentes;
- Ponto Seis: Balanço das atividades desenvolvidas e a desenvolver na turma.

A reunião Extraordinária de Conselho de Turma decorreu como consequência de um pedido de esclarecimento solicitado por um Encarregado de Educação a respeito de uma classificação da respetiva educanda.

3.3 Trabalho Cooperativo

O Trabalho Cooperativo decorria na Sala de Expressões; esta estava equipada com um armário que, entre outros materiais, continha manuais do 10.º e 11.º ano, disponibilizados pela professora cooperante.

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
8h30min - 9h20min		10.º1	11.º1 (início às 9h)		11.º1
9h20min – 10h15min		10.º1 / Orientação Estágio *	11.º1		11.º1
10h30min – 11h20min		11.º1	11.º1		10.º1
11h25min – 12h15min		Orientação Estágio	10.º1		10.º1
12h20min – 13h10min		Orientação Estágio	10.º1		
13h20min - 14h10min					
14h15min – 15h05min		Orientação Estágio	Orientação Estágio		
15h15min – 16h05min		Orientação Estágio	Apoio		
16h10min - 17h			Orientação Estágio		
17h05min – 17h55min			Orientação Estágio		

* A aula é lecionada, quinzenalmente, na turma 10.º1, alternando com a Orientação de Estágio.

Fig. 3.1 Horário

Durante este tempo eram inúmeros os trabalhos que realizávamos, desde as planificações das aulas (Anexo B) até à resolução dos testes. Mais especificamente, foi na sala de expressões que falávamos das aulas e da melhor maneira de lecionar um determinado tema, onde se preparava as estratégias para o apoio. É importante salientar que a planificação de uma aula não se resume a uma mera transmissão de conhecimentos, mas é preciso averiguar quais as melhores estratégias para motivar os alunos para a aprendizagem. Em paralelo, era feita uma consulta sistemática ao Programa e Metas Curriculares no Ensino Secundário, não só para ver quais os desempenhos esperados por parte dos alunos, mas também sugestões de exercícios a resolver (Caderno de Apoio).

Neste tempo também foram elaboradas as sínteses (Anexo C), matrizes (Anexo E) e as fichas de trabalho e respetiva resolução (Anexo D). Reformulei, com frequência, as fichas de trabalho, tendo-me apercebido que o grau de dificuldade dos exercícios deve ser variável. Surge um dilema, dar exercícios fáceis não é o melhor modo de preparar os alunos para os testes e muito menos para o exame, mas ao dar exercícios demasiadamente exigentes corremos o risco de que fiquem desmotivados. Resumindo, temos de ter em atenção a capacidade intelectual dos alunos e, posteriormente, o que queremos que eles saibam/percebam.

Fig. 3.2 Sala de Expressões

Procedeu-se também à elaboração de testes (Anexo G), minitestes (Anexo F) e das respetivas resoluções. Aqui ainda tínhamos uma preocupação acrescida: quer as fichas de avaliação sumativa, quer os minitestes deveriam conter exercícios acessíveis a todo tipo de aluno, não podendo nem ser muito fáceis nem muito difíceis, mas sempre com o objetivo de os levar a pensar. O mecanismo era quase sempre o mesmo: fazer uma recolha de exercícios de diferentes manuais. Levanta-se a questão quais os exercícios a selecionar? Ouvir a opinião da professora cooperante era sempre uma mais valia. Sendo que muitas foram as vezes que o método utilizado era resolver os exercícios propostos para o teste e ver se este ficava fácil ou difícil.

Durante algumas terças e quartas este "trabalho cooperativo" foi dedicado à dinamização de atividades: Olimpíadas da Matemática, elaboração de materiais para a exposição "Matemática no Feminino", preparação de textos para as curtas-metragens sobre José Anastácio da Cunha, bem como a montagem da exposição subordinada ao tema "Pi e Outros Irracionais". Contudo, falarei de cada uma destas atividades no decorrer do relatório.

Capítulo 4

Componente Letiva

4.1 Aulas

4.1.1 Avaliação

A avaliação incide sobre as aprendizagens desenvolvidas pelos alunos, tendo por referência os documentos curriculares em vigor e compreende as modalidades de avaliação diagnóstica, de avaliação formativa e de avaliação sumativa.
A avaliação diagnóstica tem como objetivo a recolha de informações acerca dos conhecimentos, competências e atitudes do público-alvo para ajudar à planificação e determinar o perfil de partida para melhor orientar e acompanhar o público-alvo. A avaliação formativa permite ajustar/adequar o trabalho desenvolvido e tomar decisões com vista a melhorar as estratégias utilizadas e controlar os resultados obtidos. Por último, a avaliação sumativa tem como função recolher informação para fazer um juízo globalizante sobre o desempenho do público-alvo com base nos objetivos de aprendizagem, bem como de fazer um balanço depois de um ciclo formativo, quantificar e certificar. Sendo, a diversidade e instrumentos de avaliação aferidos nas áreas disciplinares. Foi definida, em Departamento, que ficaria ao critério de cada professor o tipo de avaliação diagnóstica a aplicar em cada turma.

Os critérios específicos e gerais de avaliação são propostos pelos departamentos curriculares e aprovados em Conselho Pedagógico. Estes critérios, mais tarde, são comunicados aos alunos. No caso da disciplina de Matemática A os critérios específicos da disciplina são o que se encontram no anexo A.
Às competências transversais atribuiu-se um peso de 10% que é comum a todo o ensino secundário regular.
A avaliação disgnóstica na turma de 10.º ano foi realizada nas primeiras aulas através de questões colocadas aos alunos sobre conteúdos programáticos anteriormente lecionados. A avaliação sumativa consistiu na realização de cinco testes, dois minitestes e a realização de um projeto. As fichas de avaliação sumativa tinham uma ponderação de 80%, os minitestes de 10% (a avaliação do projeto foi aqui incluída) e as competências transversais outros 10%. No primeiro período realizaram-se dois testes e um miniteste, no segundo dois testes e um trabalho e no terceiro período houve um miniteste e um teste.

4.1.2 Descrição da turma

A turma é constituída por dezoito alunos, sendo que só doze desses alunos frequentam a disciplina de Matemática A. Isto porque, os restantes cinco alunos estão referenciados como sendo alunos NEE's, ou eventualmente, frequentam outras disciplinas que não a Matemática. A turma foi modificando ao longo no ano letivo, e no final era composta por nove raparigas e três rapazes, fazendo um total de doze alunos.
A maioria dos alunos vive com as respetivas famílias que são, na generalidade, nucleares, existindo alguns casos em que vivem com os avós, com a mãe ou com a irmã.
Pelo que pude observar, os alunos desta turma são bastantes astutos e perspicazes, demonstrando interesse nas atividades propostas. Ainda assim, é natural que existam alunos menos participativos e um pouco tímidos.

Fig. 4.1 Turma 10.º 1

Dos doze alunos que frequentam a disciplina, uma aluna tem necessidades educativas especiais, no domínio Mental de Linguagem, portadora de Dislexia Grave, e uma outra tem nacionalidade chinesa. Esta última, não sabendo português e muito pouco inglês, encontrava-se na sala de aula a fazer exercícios de PLNM, propostos pela professora desta disciplina. Isto ficou aprovado em Conselho de Turma, com o objetivo de manter a aluna ocupada e adaptar-se à nossa língua.

Na generalidade, a turma é bastante participativa, empenhada e afetuosa, o que, entre outros fatores, contribuiu, em grande medida, para uma boa experiência no decorrer deste estágio.

4.1.3 Aluna com NEE

Foi proposto, que a aluna com NEE, acima referida, usufruísse de medidas educativas especiais, a saber:
Apoio pedagógico personalizado (reforço das estratégias utilizadas no grupo ou turma aos níveis da organização, do espaço e das atividades; apoio prestado pelos docentes do conselho de turma, com estímulo e reforço das competências e aptidões envolvidas na aprendizagem e ainda reforço e desenvolvimento de competências específicas adequações curriculares Individuais e no processo de avaliação. A aluna usufrui ainda de apoio para reeducação da dislexia prestado pelo docente de

Educação Especial.

Inicialmente, todas as semanas prestava apoio a um aluno que tivesse dificuldades, enquanto a professora cooperante lecionava. Com aprovação do PEI em Conselho Pedagógico, passei a acompanhar a aluna dentro da sala de aula, que se mostrou sempre atenta à resolução dos exercícios, colocando questões para esclarecimento das suas dúvidas.

Apesar da aluna ter direito ao apoio individualizado fora da sala de aula, este não se concretizou por falta de recursos do departamento. No entanto, a aluna foi proposta para frequentar o Apoio juntamente com os outros alunos da turma, mas só compareceu três vezes durante o segundo período. Trabalhar com uma aluna disléxica foi um grande desafio para mim, visto que não há nenhuma "receita" para trabalhar com este tipo de alunos e, obviamente, que senti algumas dificuldades, nomeadamente, compreender se as dificuldades que a aluna apresentava era apenas consequência da dislexia. Como seria eu, "caloira" no ensino, capaz de perceber onde começa a dislexia e onde começam as dificuldades na matéria?
Com o passar do tempo e com alguma pesquisa na internet, percebi que teria de ter alguns cuidados na convivência com a aluna, como por exemplo:

- Tratá-la com naturalidade;
- Usar uma linguagem direta, clara e objetiva;
- Falar olhando diretamente para ela;
- Estar atenta para ver se ela fez as anotações corretas no caderno;
- Explicar o que é pedido em cada exercício;
- Dar-lhe incentivo e felicitá-la nos seus sucessos.

Acompanhar uma aluna disléxica foi uma mais valia para mim. Primeiro, porque foi uma maneira de perceber o que o futuro me poderá reservar nesta profissão, segundo, porque tive a oportunidade de, durante o estágio, perceber a realidade deste tipo de perturbação de aprendizagem específica e ir pesquisando e aprofundando os meus conhecimentos sobre esta matéria, terceiro, porque o relacionamento com a aluna durante as aulas, gerou uma maior proximidade entre nós e, no terceiro período, esta aluna encontrava-se motivada a resolver os exercícios e a responder a tudo o que lhe era perguntado.

4.1.4 Primeira aula lecionada

A minha primeira aula foi lecionada no dia 10 de outubro de 2017 e lembro-me como se fosse hoje.! Eu e a Dr.ª Ana Paula tínhamos combinado que, neste dia, iria dar a aula, visto que era só um tempo letivo e nada melhor para o primeiro contacto com a turma do que fazer uma aula de exercícios. Eram os exercícios 84, 86.1 e 89 da página 51 e 52 do manual adotado, respetivamente. Estes eram sobre lógica, mais precisamente sobre os valores lógicos das proposições, disjunção exclusiva e conjuntos definidos por extensão.

No dia anterior, lembro-me de estar em casa a resolver os exercícios e a ponderar todas as questões que os alunos pudessem colocar e tentar arranjar maneira de explicar de forma simples, clara e objetiva.

Quando tocou para a entrada, às 8h30, fiquei ainda mais nervosa do que já estava. Entrei na sala e uma aluna perguntou-me "É a professora que vai dar aula?" Respondi que sim, ela retribuiu com um sorriso e disse "Que fixe". Nesse momento senti-me um bocadinho mais calma e comecei por ditar o sumário e indicar os exercícios que iríamos resolver naquela aula.
Comecei a resolver o exercício 84 no quadro e só colocava a resposta, tais eram os meus nervos. Olhei para a Dr.ª Ana Paula e vejo -a a fazer-me sinal para ter calma. Consegui controlar-me, ganhei confiança e, a partir desse momento, resolvi o exercício e todos os restantes, tranquilamente, decorrendo a aula de forma normal.
Quando a campainha tocou, às 9h20, a sensação que tive foi de alívio e ao mesmo tempo de "estar pronta para outra". Dada por terminada a aula, a professora cooperante considerou que a lecionação da mesma decorreu bem, tendo chamado atenção para, de futuro, apresentar uma melhor organização na escrita no quadro e circular mais dentro da sala de aula.

4.1.5 20 de outubro de 2017

Foi pedido aos alunos para trazerem os telemóveis para a aula do dia 20 de outubro (como se eles nunca andassem com o telemóvel), o que gerou alguma surpresa por parte deles.
O primeiro tempo da aula foi lecionado pela orientadora cooperante e o segundo tempo por mim. Neste segundo tempo dei-lhes a conhecer o *Kahoot!*.

O *Kahoot!* é uma plataforma gratuita, que permite construir e aplicar questionários e colocar questões para iniciar um debate. Dependendo do objetivo e de se querer ou não incluir alguma competição, podem contruir-se dois tipos de questionário: o *Quiz*, mais utilizado como ferramenta de avaliação e que gera um ranking de alunos, de acordo com a rapidez e o número de respostas corretas às questões colocadas; o *Survey* que permite responder ao mesmo conjunto de questões, sem incluir rankings e não pressupondo a existência de respostas corretas.

Fig. 4.2 Atividade com o *Kahoot!*

Expliquei-lhes como entrar no “jogo” e como este funciona e que iriam ter que fazer cálculos no papel ou na calculadora. O questionário que utilizei foi o *Quiz* pois uma pequena competição é sempre saudável e é uma maneira de os motivar. Este questionário continha perguntas relacionadas com a matéria que tinha sido lecionada (Anexo K).

Quando terminado, mostrei os resultados que a própria plataforma fornece e reparei que o feedback foi bastante positivo por parte dos alunos chegando mesmo a pedirem para repetir esta experiência.

4.1.6 Realidade mais "pequena"

No dia 9 de maio de 2018, eu e a minha colega de estágio fomos assistir a uma aula do 7º ano, na Escola Básica nº2 de São Silvestre.

À chegada, fomos muito bem-recebidas por todos os professores que nela lecionam, que logo nos convidaram para entrarmos na sala de professores. Esperamos pela professora Margarida Fonseca e, quando deu o toque de entrada, dirigimo-nos à sala.
A entrada dos alunos foi feita de forma ordenada e simpática, uma aluna cumprimentou-nos logo com um “bom dia” e um aluno ofereceu-nos o lugar dele para nos sentarmos. Entre o sentar e não sentar, os alunos demoraram um bocadinho a acalmar.

A turma era constituída por doze alunos, sendo sete do sexo feminino e cinco do sexo masculino. Dentro da sala de aula, para além da professora de Matemática, estava uma professora de Educação Especial. A sala tinha um quadro interativo e um quadro de giz estando, este último, na parede oposta à do quadro interativo.
Antes da aula começar, os alunos leram o que tinham escrito na aula anterior e, de seguida, a professora mostrou o sumário para copiarem:

> **Lições n.º 117 e 118**
>
> **Sumário:** Conclusão da resolução de uma ficha de trabalho sobre polígonos semelhantes. Homotetia de centro em O e razão r.

Depois do sumário escrito, concluíram a resolução da ficha dada na aula anterior, mais precisamente os exercícios 4, 5 e 6. A professora optou por mostrar o enunciado no quadro interativo e os próprios alunos, pelo menos aqueles que se ofereciam, iam ao quadro resolver. Enquanto decorria a resolução, a professora, de forma simpática, deu-nos a liberdade de, se assim o entendêssemos, ir junto dos alunos tirar dúvidas. No final a professora disse que o exercício 7 ficaria para trabalho de casa.
De seguida, passou-se ao tema “Homotetias”. Os alunos foram buscar réguas e compassos, enquanto a professora mostrava exemplos de Homotetias no site Google. Com a imagem encontrada no Google, passou para o quadro interativo ao mesmo tempo que perguntava o número de vértices e o número de lados. Por fim, chamou atenção para o ponto O, dizendo que as semirretas que passam nos vértices partem todas neste ponto, sendo chamado de centro.

Posteriormente foi lançado um desafio aos alunos que consistia em desenharem um quadrilátero no caderno e ampliar para o dobro. Neste momento, olhei em redor e, como vi que alguns alunos estavam com dificuldades, levantei-me e fui ajudá-los até ao toque de saída.
A aula terminou com um exercício extra: "Desenhar um quadrilátero à vossa escolha e ampliar para o triplo".

Na minha opinião, não notei grande diferença entre esta turma e a turma do 10º ano, visto que o número de alunos era igual e a Dra. Margarida conseguia "chegar" a todos eles. Claro que há sempre diferenças pois os alunos, com o passar dos anos, vão atingindo uma certa maturidade. A turma em si era um bocadinho irrequieta, mas a minha turma principal também o era, de vez em quando. Não pude deixar de reparar que os alunos, como todos os outros, gostam de conversas paralelas, mas que, ao mesmo tempo, tentam resolver os exercícios. Na oportunidade que tive de interagir com eles, ajudando-os na resolução de um exercício, reparei que uma aluna me fazia lembrar os tempos em que andava no 7ºano, isto porque, ao fazer o exercício, em vez de o apagar, rasgava a folha e voltava a fazer.
Foi muito bom ter este contacto com uma "população" mais jovem, pois consegui ter a perspetiva de dois "Mundos" diferentes.

4.1.7 Uma aula dinâmica

Raízes quadradas e cúbicas foi o tema principal da aula que decorreu no dia 18 de maio de 2018 na sala Laboratório de Física. E teve como sumário: Domínio e representação gráfica das funções definidas analiticamente por $f(x) = a\sqrt{x-b}+c$ e $g(x) = a\sqrt[3]{x-b}+c$, $a \neq 0$.

Este tema enquadra-se no domínio Funções Reais de Variável Real e no subdomínio Generalidades acerca de funções, segundo o Programa e Metas Curriculares para o Ensino Secundário – Matemática A.
A aula foi dividida em dois momentos: o primeiro de carater expositivo e prático e o segundo de carater "divertido". Depois de os alunos escreveram o sumário, procedi à entrega de uma ficha de trabalho (ficha nº9) e com ela desenvolvi a minha aula. Para tal, recorri à calculadora gráfica e ao

Fig. 4.3 Aula com recurso ao *Geogebra*

programa de geometria dinâmica *Geogebra*, para visualizar os gráficos das funções com radicais

quadráticos apresentadas no exercício 1 e tirando conclusões à cerca do domínio, contradomínio e a que transformações geométricas se procedeu para obter o gráfico das diferentes funções a partir do gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$;
Seguidamente, visualizaram os gráficos das funções com radicais cúbicos, apresentadas no exercício 2 da ficha nº9 e responderam às questões que lhe foram pedidas.
Para terminar o primeiro momento da aula, os alunos resolveram os exercícios 172, 173 e 174 da página 135 do manual.

O segundo e último momento foi a realização de um *Kahoot!* que envolvia perguntas da matéria lecionada, mas também da matéria que já tinham dado, pois iriam ter teste e era forma de os fazer recordar alguns conceitos.

As aulas de Matemática dinâmicas são sempre as mais interessantes, tanto para eles (alunos) como para nós (professores), ao contrário das aulas monótonas em que o professor fala e/ou escreve no quadro e os alunos se limitam a passar.

4.2 Apoio

O Apoio começou no dia 15 de novembro de 2017 e terminou no dia 23 de maio de 2018.

Após a realização do primeiro teste, foram propostos para o apoio aqueles que obtiveram classificação negativa. Foi enviado um documento aos respetivos Encarregados de Educação para darem, ou não, autorização para a frequência do mesmo (Anexo H).

O Apoio decorreu na sala "Laboratório de Geologia", todas as quartas-feiras, das 15h15 às 16h05. Durante este tempo e por várias semanas, eu transferia as dúvidas dos alunos para o Apoio, resolvendo exercícios do manual ou fazendo fichas (Anexo I). Mas aconteceu que, algumas vezes o apoio foi organizado pelos alunos, quero com isto dizer que, foram muitas as vezes em que deixei de lado a minha planificação, para o Apoio e seguir o ritmo dos alunos dando-lhes oportunidade de esclarecer as respetivas dúvidas, tanto para o teste e como para as fichas. Esta prática letiva foi uma mais valia para a otimização do desempenho dos alunos nas fichas de avaliação sumativa. No final de cada período, foi preenchida uma tabela que continha os nomes dos alunos, o número de tempos a que assistiram ao Apoio, a descrição do desempenho do aluno, juntamente com respetiva classificação final, a indicação se houve alguma evolução e observações/sugestões, como se pode obervar no anexo J, no que diz respeito ao 2.º período.

Ter a oportunidade de dar "asas à minha imaginação" enquanto lecionava os Apoios, sem qualquer tipo de assistência dentro da sala de aula, foi uma mais valia para mim. Cresci enquanto pessoa e enquanto profissional. Foi com o Apoio que muitos dos meus medos foram desaparecendo e foi com ele que me fui relacionando melhor com os alunos que o frequentavam. Muitas perguntas, para além da matéria, eram feitas entre elas: "Como era a professora no 10ºano?" ou "Como é estar na Universidade?".

Fig. 4.4 Sala de aula onde decorria o apoio

Não querendo definir uma data, pois também não seria capaz de o fazer, foi quando eu comecei a falar do meu percurso escolar e dando os meus conselhos como aluna que fui e sou, e como professora. Eles começaram a perceber que, por baixo da "capa" de professora, está uma pessoa que também passou pelas mesmas fases que eles, acabando por se tornar uma relação muito mais que pedagógica.

4.3 RVCC

A Escola Secundária de Jaime Cortesão dispõe de um Centro Qualifica. Os Centros Qualifica destinam-se a todos(as) os(as) que procuram uma qualificação e/ou adquirir ou reforçar os seus conhecimentos e reconhecer as suas competências. É um programa vocacionado para a qualificação de adultos que tem por objetivo melhorar os níveis de educação e formação dos adultos, contribuindo para a melhoria dos níveis de qualificação da população e a melhoria da empregabilidade dos indivíduos. Os Centros Qualifica são centros especializados em qualificação de adultos, vocacionados para a

Fig. 4.5 Centro Qualifica

informação, o aconselhamento e o encaminhamento para ofertas de educação e formação profissional de adultos com idade igual ou superior a 18 anos que procuram uma qualificação. Tem um conjunto de técnicas que fazem um diagnóstico de todos aqueles que se dirigem ao Centro e, posteriormente, é feito o encaminhamento para o percurso mais adequado ao perfil do candidato, por exemplo, para um processo de RVCC, de nível Básico ao Secundário, ou um percurso mais escolarizado, como um curso EFA.

O processo de RVCC resume-se à identificação das competências que o indivíduo adquiriu durante a vida e em diferentes contextos, através de atividades assentes em metodologias de Abordagem (Auto) Biográfica, Portefólio e Balanço de Competências orientadas segundo um Referencial de Competências-Chave.
Posteriormente, há uma sessão de validação onde estão presentes os formadores das diferentes áreas, a respetiva TORCV e muitas vezes a coordenadora do centro. Os formadores das diferentes áreas de Competências-Chave validam o portfólio.
Para finalizar o processo existe uma Sessão de Certificação, em que o candidato faz uma apresentação sobre um tema ligado ao portfólio que é assistida por um júri externo.
O objetivo final é certificar o candidato.

Sendo a professora cooperante, Dr.ª Ana Paula Mouro, uma formadora neste processo na área de Competências-Chave de Matemática para a Vida, tive a oportunidade de ver mais de perto esta realidade. Em alguns momentos, durante o ano letivo, assisti a sessões de formação individuais e tive a oportunidade de desenvolver duas atividades em dois grupos de formandos diferentes.

Nos dias 23 de novembro de 2017 e 25 de janeiro de 2018, realizei uma atividade em grupo envolvendo a plataforma *Kahoot!*, fazendo um *Quiz* relacionado com os competências que adquiriram durante este processo de formação (Anexo L). As perguntas que foram colocadas foram da autoria da professora cooperante.

Ao longo de um ano em que fui mantendo contacto, direta ou indiretamente, com o desenrolar deste processo, percebi que a "minha" realidade não era a realidade de todos. Nem todos tivemos o privilégio de estudar no ensino superior e conseguir bons empregos. Há pessoas que lutam diariamente para conseguir subir na carreira ou até mesmo ter habilitações para conseguir arranjar emprego, pessoas essas que trazem consigo muito do que foi a sua vida outrora, uns com histórias mais complicadas, outros menos complicadas.

Como dizia Camões *"Mudam-se os tempos, mudam-se as vontades"*. Num tempo em que ter emprego fixo é muito difícil, as pessoas esforçam-se por o manter ou então para o arranjar e o Centro Qualifica possibilita isso.

Capítulo 5

Atividades

5.1 Olimpíadas da Matemática

As OPM, são organizadas pela SPM e trata-se de um concurso de problemas de Matemática, dirigido aos estudantes dos 1.º, 2.º, e 3.º ciclos do ensino básico e também aos que frequentam o ensino secundário. Tem como objetivo incentivar e desenvolver o gosto pela Matemática. As OPM decorrem em três fases:

- uma primeira eliminatória, que se realiza em todas as escolas que manifestem a intenção de participar, sendo a participação aberta a todos os alunos;
- uma segunda eliminatória, que funciona como uma final regional, que decorre em algumas escolas do país e para a qual são selecionados alguns alunos, de acordo com o regulamento das OPM;
- uma Final Nacional, que decorre numa escola convidada para organizar esta etapa das Olimpíadas; participam 30 alunos de cada uma das categorias, selecionados de acordo com o regulamento das OPM.

Foi no dia 8 de novembro de 2017 que decorreu a primeira eliminatória. Este concurso foi realizado na sala 7 às 15h00, contando com uma aluna do 11º ano.
Os elementos do departamento de Matemática e eu e a minha colega de estágio, fomos responsáveis por toda a logística envolvente, designadamente a coordenação, vigilância e correção das provas.

5.2 Matemática no Feminino

Durante séculos, o mundo foi "dominado" pelo sexo oposto – pelo menos, até há pouco tempo- a participação da mulher foi restringida a ponto de lhe ser proibido o acesso ao universo intelectual, principalmente no campo cientifico.

Por exemplo, na Matemática, a maioria das histórias é sobre matemáticos. Todos os teoremas que conhecemos têm nomes masculinos.
Perante estes factos, é natural que todos nós e mesmo os estudantes, perguntem se só os homens é

que se dedicaram à Matemática, levando a crer que o pensamento matemático, com a sua abstração e lógica, seja apenas compatível com o raciocínio masculino.

Posto isto, decidiu-se fazer a exposição “Matemática no Feminino”, com o objetivo de mostrar que o sexo feminino também teve grandes contribuições nesta que é uma ciência exata.

A exposição teve início no dia 13 de dezembro de 2017 e prolongou-se até ao dia 2 de março de 2018, tendo sido organizada pelo Núcleo de Estágio.

Fig. 5.1 Exposição *Matemática no feminino*

5.3 José Anastácio da Cunha

Num pequeno resumo, José Anastácio da Cunha foi um Matemático e poeta. Nasceu em Lisboa a 11 de maio de 1744 e faleceu a 1 de janeiro de 1787.
Foi educado em Lisboa, no Convento da Nossa Senhora das Necessidades, que pertencia à Congregação do Oratório. Os Oratorianos ensinaram-lhe Gramática, Retórica e Lógica até aos 19 anos. No que diz respeito à Física e à Matemática foi um autodidata.
Em 1764, foi nomeado Tenente do Regimento de Artilharia do Porto e colocado na praça de Valença do Minho. Este Regimento era constituído por uma maioria de oficiais estrangeiros, muito deles protestantes, que o influenciaram. Terá, então, aderido a ideias como a tolerância, o deísmo e o racionalismo, que vieram a integrar a sua produção cientifica e poética.

Em outubro de 2017, foi lançado, pelo Departamento de Matemática e Aplicações da Universidade do Minho, no âmbito do Encontro “3M+1”, o concurso nacional de criação de curtas-metragens denominado “Jovens Iluminados”, destinado a alunos do Ensino Secundário. Este inédito e muito participado evento nasceu sob o tema "José Anastácio da Cunha - o Tempo, as Ideias, a Obra...”, e visava homenagear o ilustre matemático. O principal objetivo do concurso foi o de instruir os jovens para uma “leitura” - informada e crítica - do mundo que nos rodeia.

Este concurso foi dinamizado pela minha colega de estágio, Daniela Silva, e posto em prática na sua turma principal, de 11º ano. Para preparar os alunos e os motivar para este tipo de trabalho, a minha colega organizou uma palestra, na qual eu participei, com o Professor Doutor Jaime Maria Monteiro de Carvalho e Silva. Esta palestra constituiu numa simples entrevista ao “suposto” José Anastácio da Cunha, tendo como entrevistadores eu e a minha colega Daniela.

Depois desta palestra que tanto motivou os alunos e lhes deu curiosidade para saber mais, foi tempo de pôr mãos à obra e de trabalhar sobre este tão prestigiado matemático. Foi necessária muita pesquisa na internet e em alguns livros requisitados, para ter a perceção da vida e obra deste Matemático.

Fig. 5.2 Cartazes das curtas-metragens

5.4 Ten4Twelve

O tempo sem telemóveis, sem ipods, sem computadores, sem videojogos, já passou. Já foi tempo em que o trabalho era feito, as pessoas voltavam para casa, viam televisão, iam ler ou até mesmo conversar. Vivemos numa época em que estar fora da tecnologia é estar fora do mundo. A tecnologia deixou de ser um simples diferencial no trabalho e transformou-se quase em obrigatoriedade.
Sem ter conhecimento da tecnologia básica de um computador e internet, ter emprego é quase impossível. Hoje em dia, todas as pessoas, ou quase todas, têm um telemóvel com acesso à internet e cada vez mais utilizam as redes sociais. São poucos os adolescentes que não ligam às redes sociais e/ou se recusam a estar sempre “online”. Posto isto, e porque um professor deve acompanhar a evolução do

Fig. 5.3 Página do grupo no facebook

tempo, decidi criar um grupo no Facebook para a minha turma principal.
Foi no dia 20 de outubro de 2017 que criei o grupo intitulado de “ten4twelve”, o que significa 10º ano para 12 alunos.

Com a criação deste grupo pretendi aproximar-me mais dos alunos, mas o seu objetivo principal foi torná-lo numa plataforma de partilha de recursos educativos para a disciplina de Matemática. No grupo foram colocadas fichas de trabalho, vídeos relacionados com a matéria ou relacionados com a Matemática, informações sobre testes (Anexo E), entre outros.

5.5 Dia do π

No início do ano letivo, foi dito aos alunos do 10º ano que uma parte da avaliação consistia na elaboração de um trabalho escrito ou comestível sobre o número irracional π. Este trabalho, em termos de avaliação, contava como um miniteste e teria o peso de 10% na avaliação. Os trabalhos comestíveis, neste caso bolos, eram cortados em fatias, cada fatia tinha um valor simbólico de 0,50 cêntimos e o dinheiro apurado revertia para uma instituição de solidariedade social. Os trabalhos

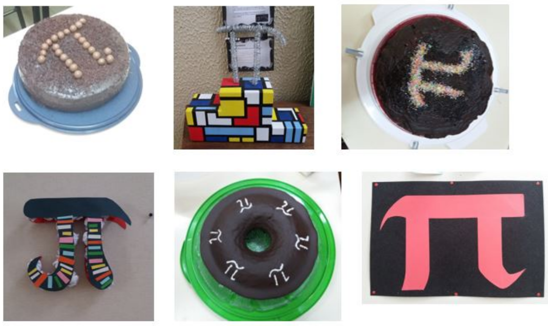


Fig. 5.4 Trabalhos feitos pelos alunos

poderiam ser em grupo ou individuais, sendo que só uma aluna fez o trabalho individualmente. Três grupos optaram por algo comestível e dois grupos por trabalhos manuais.
Dois dos bolos foram “servidos” nas aulas assistidas pelo Professor Doutor Jaime Silva e o outro foi para a turma em que cada aluno pagou 0,50 cêntimos. Os trabalhos manuais foram expostos no

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Escola Secundária de Jaime Cortesão
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Trabalhos π 10º.

(2017/2018)

Elementos do grupo	Tipologia do trabalho	Data de entrega	Assinatura dos elementos	Assinatura da professora
Daniela Antunes Sara Ramos				
Diogo Serém João Pimenta				
Carina Martins Rita Lopes				
Maria Reis Mariana Sousa				
Mariana Pocinho				
Gabriel Roque Cláudia Monteiro				

Fig. 5.5 Tabela de descrição dos trabalhos

corredor central, no dia 2 de março de 2018, dia em que se montou a exposição subordinada ao tema "Pi e outros irracionais".
Sempre que um grupo entregava o seu trabalho, os respetivos elementos assinavam uma tabela que continha a tipologia do trabalho, a data de entrega e a assinatura da professora, como se pode verificar na figura 5.5

5.6 Canguru Matemático sem Fronteiras

O concurso "Canguru Matemático" tem como objetivos incentivar o estudo e o gosto pela Matemática, atrair os alunos que têm receio desta disciplina, para que tenham uma conquista pessoal, quando percebem que conseguiram resolver um determinado problema.

Este concurso consiste numa única prova e existem oito categorias de acordo com as idades dos alunos: Mini-Escolar nível I (2.º ano de escolaridade), Mini-Escolar nível II (3.º ano de escolaridade), Mini-Escolar nível III (4.º ano de escolaridade), Escolar (5.º e 6.º anos de escolaridade), Benjamim (7.º e 8.º anos de escolaridade), Cadete (9.º ano de escolaridade), Júnior (10.º e 11.º anos de escolaridade) e Estudante (12.º ano de escolaridade).

O concurso decorreu no dia 23 de março de 2018 e foi destinado aos alunos do secundário que, como acima referido, participaram nas categorias Júnior e Estudante. Na escola, participaram sete alunos do 10ºano, dois alunos do 11ºano e três alunos do 12ºano.
Esta prova consiste num questionário de escolhas múltiplas de vários graus de dificuldade. A pontuação máxima é de 150 pontos sendo que os alunos começam com uma pontuação de 30 pontos. Por cada resposta errada os alunos são penalizados em ¼ de uma questão correta. Esta categoria abrange 10 questões de 3 pontos, 10 questões de quatro pontos e 10 questões de 5 pontos.
Para este concurso se realizar na "nossa" Escola, tivemos, em primeiro lugar, de tratar da parte logística:

- Pedir autorização ao Conselho Executivo para a realização da prova, visto que as fotocópias das provas, a correção das provas e toda a logística envolvida é da total responsabilidade da Escola.

- Colocar online (num endereço que foi indicado pela Comissão): o número de participantes até ao dia 13 de abril, os nomes dos alunos com as respetivas pontuações iguais ou acima do valor de corte (neste caso 50 pontos), até ao dia 11 de maio.
  Tratando-se de uma escola do agrupamento só se pagou uma inscrição no valor de 25 euros, independentemente do número de escolas que participavam.

- A Comissão deste concurso disponibilizou as provas e a chave das respostas 5 a 3 dias antes e o acesso às chaves de correção e respetivas tabelas de pontuação.
  No dia anterior ao concurso foi preciso imprimir as provas, as folhas de resposta, carimbar as folhas de rascunho e arranjar dois envelopes. Um deles continha a categoria Júnior e o outro a categoria Estudante.

Fig. 5.6 Certificado de Colaboração

Depois de terminar o tempo para a realização desta prova, foram recolhidos os enunciados, a respetiva folha de respostas e as folhas de rascunho.
A Comissão do Canguru disponibilizou, em formato digital, um certificado de presença que foi impresso e entregue aos respetivos alunos, um certificado para os professores responsáveis pela realização do concurso e um certificado para a professora que colaborou com os professores responsáveis.

5.7 Pangea

O concurso de Matemática Pangea é organizado pela ASEDA, uma associação sem fins lucrativos e com sede em Lisboa, Portugal.

De 2013 a 2016, o concurso foi completamente gratuito. A partir de 2016, não só com o intuito de o tornar sustentável, mas também para evitar custos de inscrições de alunos que depois não se apresentavam para fazer a prova, a inscrição de cada aluno passou a ter o valor simbólico de 1€.
A Associação é financiada pelos patrocínios, doações e quotas dos associados. Com os patrocínios é possível suportar os custos de impressão das provas e do material de escritório do concurso (certificados, folhetos, cartazes, etc.).
Os alunos participaram com caráter voluntário, não há qualquer tipo de seleção. A primeira eliminatória é realizada online e consiste numa prova com 20 questões e cada ano de escolaridade tem o seu próprio enunciado.

Com vista a adquirirem o gosto e interesse pela Matemática, perguntou-se na turma do 10ºano quem queria participar, avisando desde o início que não era obrigatório e que não haveria qualquer influência na nota final do período. Posto isto, quatro alunos mostraram-se interessados em participar.

No dia 22 de março de 2018, à tarde, decorreu na sala Mediateca o concurso Pangea, no qual eu e a minha colega de estágio fomos vigilantes. Os alunos sentaram-se em frente ao computador e

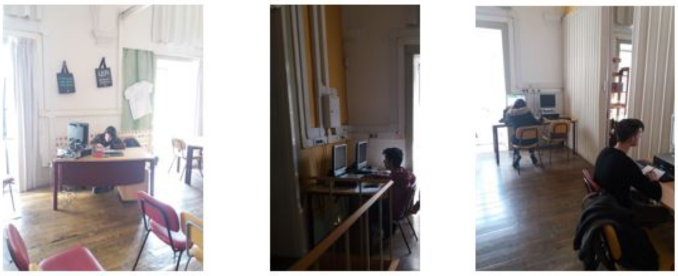


Fig. 5.7 Os alunos que participaram no concurso *Pangea*

à medida que se encontravam prontos eu ia fornecendo o username e o código, juntamente com as folhas de rascunho, para poderem começar.

No final da prova, obtinham o resultado final e eu registava-os num papel. Os quatros alunos participantes tiveram 9, 26, 16 e 7 pontos, à medida que cada aluno terminava a prova, a pontuação era automática e iam sendo anotados os resultados.
O aluno que obteve a classificação de 26 pontos foi apurado para a final que se realizou no Instituto Superior de Engenharia, no Porto, a 28 de abril de 2018.

5.8 Circo Matemático

No decorrer dos tempos, vários elementos deste projeto dedicaram-se a projetos universitários, a atividades de divulgação matemática e à promoção da Matemática Recreativa em vários contextos. O feedback positivo entre professores, pais e alunos fez com que este projeto se tornasse nacional.

O seu principal objetivo é atrair a curiosidade geral para a matemática. Todas as atividades nele incluídas têm cariz matemático e muitas são associadas a problemas matemáticos que estão relacionados com áreas bastante relevantes e complexas. A compilação dos trabalhos é diversificada, permitindo, assim, que as exibições alcancem um vasto público, por forma a captar o interesse desde crianças a adultos.

Fig. 5.8 Alunos num número do *Circo Matemático*

Foi com o intuito de maravilhar, divertir e atrair os nossos alunos para a matemática que, no dia 23 de março de 2018, se realizou, no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, uma sessão com o Circo Matemático.
Esta atividade era dirigida a todos os núcleos de estágio a funcionar no presente ano letivo: o núcleo de estágio da Lousã, o núcleo de estágio de Viseu e o núcleo de estágio de Leiria, sendo que só este último é que compareceu com uma turma de 9º ano.
Quanto ao nosso núcleo de estágio, compareceu a turma de 10º e alguns alunos do 11º ano.

A sessão incluiu cerca de uma dúzia de números, a maioria dos quais são truques de magia com Matemática. Uns truques envolveram cartas, outros cordas e outros dados.
Todo o espetáculo gerou entusiasmo entre os alunos e os professores. Obviamente que as "palhaçadas" fizeram rir, mas foram os truques que prenderam a atenção dos alunos, talvez pelo suspense e pela "magia". No final do espetáculo o grupo disponibilizou-se para explicar as magias aos interessados.
Todos os alunos estiveram bastante atentos, bem-dispostos e participativos durante as sessões. Todos alunos tiveram vontade de participar. Parecia mesmo um circo real!

5.9 Dia do Agrupamento

A Escola Secundária de Jaime Cortesão, sede do Agrupamento de Escolas de Coimbra Centro, foi palco do Dia do Agrupamento, no dia 20 de abril de 2018. A iniciativa, que se realiza já algum tempo, envolveu alunos, docentes e a comunidade escolar num dia de festa.

O dia do Agrupamento tem como objetivo principal dar a conhecer a oferta educativa da escola a alunos do 9.º ano do Agrupamento ou provenientes de escolas fora do Agrupamento. Foram inúmeras as atividades propostas, desde pintura de quadros, jogos matemáticos, exposições, danças, rapel, entre outras atividades. Os laboratórios permaneceram abertos com experiências divertidas. O

Fig. 5.9 Disposição da sala 6 com os jogos matemáticos

Departamento de Matemática e Informática criou na sala 6 uma sala de jogos matemáticos.
O Avanço, o Hex e o Produto foram os jogos expostos. Sendo que o primeiro foi o mais jogado pelos alunos. Continha também o famoso jogo da Torre de Hanói e quebra-cabeças também muito requisitados pelos alunos.

5.10 Prémio Pedro Matos

No dia 31 de maio de 2018, dois alunos do 11º ano concorreram ao concurso "Prémio Pedro Matos".

O Prémio Pedro Matos é uma homenagem ao Professor Doutor Pedro Manuel Amado Roque de Matos, excelente profissional e investigador de mérito da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria.

Fig. 5.10 Cartaz da aluna para o concurso

Trata-se de um concurso nacional de matemática, destinado a estudantes do 3.º ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário, nas categorias Prémio Pedro Matos Júnior 2018 e Prémio Pedro Matos 2018, respetivamente, com o objetivo de estimular a criatividade e o interesse pela matemática e suas aplicações, bem como despertar novos jovens talentos.

Os alunos podem candidatar-se individualmente ou em grupo (com o máximo de 3 estudantes). Do grupo ainda faz parte um professor, ao qual cabe o papel de orientador.

Nesta 10.ª edição, o tema foi "Matemática e a Biologia", tendo, uma das alunas que participou e que eu orientei, escolhido o tema "Multicelularidade". A candidatura desta aluna a este concurso incluiu o Boletim de Candidatura, três exemplares do texto com um máximo de 10 páginas, um poster em formato A2 resumindo os principais aspetos do trabalho, material interativo e a declaração do estabelecimento de ensino secundário certificando as condições de admissão ao Prémio Pedro Matos.

A entrega dos prémios tem data prevista para o dia 12 de julho de 2018.

Capítulo 6

Os últimos dia de estágio

As aulas do 10º ano terminaram no dia 15 de junho, mas as despedidas começaram bem antes, com a vinda à Escola do Professor Doutor Jaime Silva, a fim de avaliar o meu Projeto Educacional II.
Eu sabia que o estágio iria acabar e o provérbio, "tudo o que é bom, acaba depressa" nunca teve tanto sentido, para mim.
Se me pedissem para resumir o meu estágio numa palavra não iria ser capaz de o fazer, pois foi constituído por diversos momentos de muitos sorrisos, algumas repreensões e diversas atividades.

Nunca pensei que despedir-me de uma turma me custasse tanto. Afinal, eles foram o centro de todo o meu estágio, pois foi para eles que dei as aulas, que fiz as fichas, os testes e que trabalhava todos os dias, quer em casa quer na escola. Eles viram-me crescer enquanto professora e eu vi-os crescer enquanto alunos. Foi por eles que, tantas vezes, esgotei as minhas energias. Não tive a perceção da

Fig. 6.1 A turma do 10.º 1 com a professora estagiária Vanda Campos

relação que construí com a turma até chegar o dia 13 de junho. Foi nesta quarta-feira, entre sorrisos e fatias de bolo, que as despedidas começaram, e levaram-me às lágrimas quando se pronunciaram sobre o meu trabalho e o que representei para eles enquanto professora.
Foi também com as lágrimas deles que percebi que o meu trabalho não tinha sido em vão, que tudo o

que tinha feito, tinha valido a pena e que as dúvidas que tinha enquanto ser ou não uma boa profissional foram esclarecidas e completamente esquecidas.

Apesar de serem “meus” alunos foram também meus amigos, ao ponto de tentarem que eu “descomprimisse” quando os nervos eram tão visíveis. Respeitaram-me sempre enquanto professora e pessoa e, escusado será dizer, que irei sentir saudades daquelas” pestinhas”.

A uma aluna que me pediu para nunca os esquecer, eu simplesmente lhe disse:

“A primeira turma é como o amor, nunca se esquece".

Capítulo 7

Exames

Na semana de 18 a 27 de junho, decorreu a primeira fase dos exames nacionais do 3º ciclo e ensino secundário. No dia 27 de junho dirigi-me à escola com o objetivo de observar o modo, como decorre um dia de exames numa escola, visto que a orientadora cooperante é coordenadora do secretariado de exames.

O secretariado de exames foi instalado na sala 6, situada no corredor principal da Escola, que foi devidamente transformada para a “ocasião”. Nesta sala, os professores convocados para o serviço de exames assinavam uma folha de presenças, e os professores suplentes, esperavam na sala de professores e, caso fosse necessário, seriam chamados.
No quadro estava escrito o nome e código das provas bem como os registos dos toques para os vários momentos da prova. Num conjunto de mesas no centro da sala encontrava-se a folha de presenças e material de escrita. As mesas laterais continham uma caixa com cronómetros (no caso de as provas serem orais) e diferentes tamanhos de envelopes. Num armário, havia dossiês com legislação referente a exames e onde era arquivado todo o material referente aos mesmo, inclusive enunciados das provas, após a sua realização e respetivos critérios de classificação.

Os professores vigilantes dirigiram-se, muito antes do toque, para as respetivas salas com o propósito de as preparar. Escreviam no quadro as seguintes informações: nome do exame, o código, o início e o fim do exame, o tempo de tolerância e o final do período de tolerância. A coordenadora do secretariado de exames informou que nas salas onde decorriam os exames, estava uma caixa com pautas de chamadas, papel de rascunho, modelo 5 do JNE (declaração assinada pelos alunos em como não possuem telemóveis, nem qualquer outro material não autorizado) e material de escrita. Referiu, ainda, que nas mesas dos alunos era colocada uma etiqueta (versão 1 ou versão 2), caso houvesse exames com versões.

Capítulo 8

Conclusão

O título deste relatório é Estágio, $\sum$ de aprendizagens e isso foi o que se verificou ao longo deste ano. Foram muitas as aprendizagens, quer a nível teórico quer a nível prático. As aprendizagens teóricas foram fundamentais para a minha formação enquanto futura professora, pois adquiri conhecimentos/saberes bem como uma grande variedade de estratégias que guardo para aplicar, um dia, com os meus alunos.

As aprendizagens práticas foram, sem sombra de dúvidas, as que realizei com mais intensidade. Toda a prática pedagógica envolvida, fez com que crescesse a nível profissional, pois foi possível assistir às aulas da orientadora cooperante e lecionar algumas delas, bem como contactar com a "tarefa" de planificar e de avaliar o desempenho dos alunos. Estas duas práticas são essenciais para o professor ter uma perceção de como os alunos estão no seu nível de aprendizagem. Ao longo deste tempo, percebi que nem sempre é fácil planificar uma aula pois é preciso ter em conta a turma que se tem à frente, para que as estratégias sejam as mais adequadas.

Durante o estágio, foi-me possível avaliar os alunos com quem trabalhei, sendo um dos momentos mais importantes para mim, pois avaliar é mais complicado do que imaginava e fazer uma avaliação correta e consistente é ainda mais difícil. Ao mesmo tempo que fazia uma introspeção sobre os conhecimentos dos alunos em relação a uma aula lecionada por mim, avaliava-me a mim mesma, pois se os alunos não tinham conseguido atingir um determinado objetivo, seria também porque eu não tinha explicado da melhor maneira.

O estágio deu-me algumas certezas: a convicção do tipo de professora que quero ser, que é possível ter uma boa relação com os alunos e, mesmo assim, manter a ordem dentro de uma sala e que há vários aspetos/atitudes a ter em conta para que os alunos venham animados para a aula. Ganhei a confiança de não ter medo de errar e muito menos de admitir que nem sempre consigo encontrar, no primeiro minuto, a resolução para um problema, e a firmeza que este é o caminho que quero seguir, por mais obstáculos ou por mais que o trabalho seja árduo.
Neste meu percurso, cheguei à conclusão que o trabalho de um professor nunca acaba. Não é uma profissão como as outras que saindo do trabalho só se pensa em trabalhar no dia seguinte.

O professor, para além de trabalhar na escola também trabalha em casa, preparando aulas, testes, fichas, etc. É uma profissão que começa no dia 1 de setembro e só termina no dia 31 de julho, quando possível.
Aprendi, inclusive, a lidar com situações inesperadas, a trabalhar sob pressão, já que o ritmo de trabalho era intenso e as decisões tinham de ser tomadas rapidamente, e consequentemente, a lidar com o stress no trabalho.

Comecei este relatório por descrever um pouco a minha ansiedade enquanto futura profissional e termino-o a dizer que a ansiedade muito dificilmente vai passar, mas que sigo esta carreira com muito mais convicção. Como disse, em tempo, Barack Obama:

"Yes, (we)I can!"

Bibliografia

- ANDRADE, Carlos; PEREIRA, Paula Pinto; PIMENTA, Pedro. Novo Ípsilon 10. Lisboa: Raiz Editora, 2015. 3 v.
- NEVES, Maria Augusta F.; GUERREIRO, Luís; SILVA, António Pinto. Máximo 10. Lisboa: Porto Editora, 2015. 2 v.
- COSTA, Belmiro; RODRIGUES, Ermelinda. Novo Espaço 10. Lisboa: Porto Editora, 2015. 2 v.
- ESCOLA VIRTUAL. Escola virtual . Disponível em: < https://portal.escolavirtual.pt/dashboardteacher >.
- MENTES BRILHANTES. Matemática . Disponível em: < https://elhosbrilhantespt.weebly.com/ >.
- MATEMÁTICA NO MOCHO. Recursos 10.º ano . Disponível em: < http://www.matematicanomocho.com/ >.

Anexo A

Critérios de Avaliação

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes
3000-303 COIMBRA

CURSO CIENTÍFICO – HUMANÍSTICO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA A

10.º/ 11.º e 12.º ANOS

2017 - 2018

A. COMPETÊNCIAS TRANSVERSAIS A CONSIDERAR NA AVALIAÇÃO SUMATIVA (**Ponderação** = **10%**)

COMPETÊNCIAS TRANSVERSAIS			ESCALA 0 A 20 VALORES
	PARÂMETROS	**INDICADORES**	
SABER SER/ESTAR (CIDADANIA)	**Assiduidade e Pontualidade**	• É sempre assíduo e pontual. • É assíduo e pontual a 50% do número de faltas injustificadas permitido por lei. • Falta e/ou não é pontual, frequentemente e sem justificação, atingindo ou ultrapassando o número de faltas injustificadas permitido por lei.	4 Valores 2 Valores 0 Valores
	Responsabilidade e empenhamento	• Cumpre sempre as regras estabelecidas no âmbito de cada disciplina, no Regulamento Interno e no Código de Conduta (Ex: traz o material necessário, cumpre os prazos estabelecidos, respeita o professor e os colegas…) • Conhece as regras estabelecidas no âmbito de cada disciplina, no Regulamento Interno e no Código de Conduta, mas nem sempre as cumpre tendo falhado no seu cumprimento em 50% das aulas dadas. • Não cumpre as regras estabelecidas no âmbito de cada disciplina, no Regulamento Interno e no Código de Conduta.	4 Valores 2 Valores 0 Valores
	Capacidade de Intervenção	• Participa sempre com correção e de forma oportuna, voluntariamente e/ou quando solicitado. • Participa quase sempre com correção e de forma oportuna, voluntariamente e/ou quando solicitado (em pelo menos 50% das aulas dadas). • Não participa ou participa de forma não oportuna.	4 Valores 2 Valores 0 Valores
	Respeito por si e pelos outros	• Cumpre as normas sociais e o código de conduta da escola relacionando-se com cortesia e educação. • Cumpre quase sempre as normas sociais e/ou o código de conduta da escola (em pelo menos 50% das aulas dadas). • Não cumpre nem as normas sociais nem o código de conduta da escola, não sendo nem cortês nem educado.	4 Valores 2 Valores 0 Valores
	Ajuda e cooperação	• Assume total responsabilidade pelo seu trabalho, ajudando os colegas e contribuindo para o bom ambiente. • Acompanha o trabalho, mas nem sempre apresenta uma atitude de entreajuda com os colegas. • Não é cooperante no trabalho.	4 Valores 2 Valores 0 Valores

B. COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE AVALIAÇÃO COM INCIDÊNCIA DIRETA NA AVALIAÇÃO SUMATIVA (Ponderação = 90%)

PARÂMETROS	COMPETÊNCIAS/ OBJETIVOS	Ponderação na Avaliação Sumativa
Conhecimentos, factos, conceitos e procedimentos **Raciocínio matemático** **Resolução de problemas em diversos contextos** **Comunicação matemática** **História da Matemática**	▪ Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção na vida real. ▪ Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas e de comunicar. ▪ Analisar situações da vida real, identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução. ▪ Selecionar estratégias de resolução de problemas. ▪ Formular hipóteses e prever resultados. ▪ Interpretar e criticar resultados no contexto do problema. ▪ Resolver problemas no domínio de várias ciências. ▪ Formular generalizações a partir de experiências. ▪ Interpretar textos de Matemática. ▪ Usar corretamente o vocabulário específico da Matemática. ▪ Apresentar textos de forma clara e organizada.	**Testes escritos 80%** **Trabalho(s) a realizar no âmbito da disciplina 10%**

Anexo B

Planificações

Aulas n.º 22	**Turma:** 10.º 1	**Data** 10/10/2017

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS
Domínio: Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC10) **Subdomínio:** Introdução à Lógica bivalente e à Teoria dos conjuntos **Objetivo Geral:** 3. Resolver problemas

DESCRITORES (Desempenhos esperados)
1. Resolver problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições. 2. Resolver problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.

SUMÁRIO
Resolução de exercícios.
METODOLOGIA
• Resolução do exercício 86.1 com o objetivo de fornecer uma breve explicação do conceito de disjunção exclusiva e construção da respetiva tabela de verdade. • Resolução dos exercícios 84 e 89.

RECURSOS DIDÁTICOS
• Manual

AVALIAÇÃO
• Observação direta focalizada no comportamento, interesse, participação, capacidade de intervenção e argumentação, autonomia e empenho nas atividades propostas. • Aplicação correta dos conhecimentos adquiridos na resolução dos exercícios propostos.

OBSERVAÇÕES
Aula lecionada pela estagiária Vanda Campos.

Aulas n.º 84,85	**Turma:** 10.º 1	**Data** 19/01/2018

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS
Domínio: Geometria Analítica **Subdomínio:** Cálculo vetorial no plano **Objetivo Geral:** **4**. Operar com coordenadas de vetores **6**. Resolver problemas

DESCRITORES (Desempenhos esperados)

4.1 + Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e um vetor $\vec{v}$ do plano que, sendo $X(1,0)$, $Y(0,1)$, $\vec{e_1} = \overrightarrow{OX}$ e $\vec{e_2} = \overrightarrow{OY}$, existe um e somente um par ordenado (v_1, v_2) de números reais tais que $\vec{v} = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2}$, por esse motivo designar o par ordenado $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ por uma "base do espaço vetorial dos vetores do plano", (v_1, v_2) por "coordenadas do vetor $\vec{v}$ (na base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$)" e representar por "$\vec{v}(v_1, v_2)$" o vetor de $\vec{v}$ de coordenadas (v_1, v_2).

4.2 Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dado um ponto A, o "vetor-posição do ponto A" como o vetor $\overrightarrow{OA}$ e justificar que as coordenadas do vetor posição de um dado ponto coincidem com as coordenadas do ponto.

6.1 Resolver problemas envolvendo a determinação das coordenadas de vetores do plano.

SUMÁRIO

Coordenadas de um vetor num referencial ortonormado.
Operações com vetores conhecidas as respetivas coordenadas.

METODOLOGIA

- Apresentar um exemplo de um vetor $\vec{v}$ num referencial ortonormado para introduzir o conceito de coordenadas de um vetor no plano.
- Verificar que as coordenadas do vetor-posição de um ponto coincidem com as coordenadas desse ponto.

- Visualização geométrica da adição de dois vetores concretos, conhecidas as respetivas coordenadas e, através dela, concluir as coordenadas do vetor soma.
- Confirmação, por via analítica, do resultado obtido no ponto anterior.
- Obtenção, por via analítica das coordenadas do vetor soma de dois vetores quaisquer, conhecidas as respetivas coordenadas.
- Multiplicação de um número real, λ, por um vetor $\vec{v}$ através de um exemplo e visualização geométrica.
- Caso particular da multiplicação do escalar $\lambda = -1$ por um vetor $\vec{v}$, obtendo-se o simétrico de $\vec{v}$, designado por -$\vec{v}$.
- Visualização geométrica da diferença de dois vetores concretos, conhecidas as respetivas coordenadas e, através dela, concluir as coordenadas do vetor diferença.
- Resolução do exercício 76 da página 49 para consolidação da matéria lecionada.

RECURSOS DIDÁTICOS
• PowerPoint • Manual

AVALIAÇÃO
• Observação direta focalizada no comportamento, interesse, participação, capacidade de intervenção e argumentação, autonomia e empenho nas atividades propostas. • Aplicação correta dos conhecimentos adquiridos na resolução dos exercícios propostos.

TRABALHO DE REFORÇO INDIVIDUAL
Resolução dos exercícios 73 e 74 da página 47 e o exercício 75 da página 49.

OBSERVAÇÕES
Aula lecionada pela estagiária Vanda Campos.

Aulas n.º 116,117	**Turma:** 10.º 1	**Data** 7/03/2018

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS
Domínio: Funções, Sequências e Sucessões. **Subdomínio:** Funções. **Objetivo Geral: 1.** Definir funções.

DESCRITORES *(Desempenhos esperados)

1.1 Saber, dados conjuntos *A* e *B*, que fica definida uma "função *f* (ou aplicação) de *A* em *B*" quando a cada elemento *x* de *A* se associa um elemento único de *B* representado por $f(x)$ e utilizar corretamente os termos "objeto", "domínio", "conjunto de chegada" e "variável".

1.2 Designar uma função *f* de *A* em *B* por "$f: A \longrightarrow B$" ou por "*f*" quando esta notação simplificada não for ambígua.

1.3 Saber que duas funções *f* e *g* são iguais (*f* = *g*) quando (e apenas quando) têm o mesmo domínio e o mesmo conjunto de chegada e cada elemento do domínio tem a mesma imagem por *f* e *g*.

1.4 Designar, dada uma função $f: A \longrightarrow B$, por "contradomínio de *f*" o conjunto das imagens por *f* dos elementos de *A* e representá-lo por CD_f, D'_f ou $f(A)$.

1.5 Representar por "(a, b)" o "par ordenado" de "primeiro elemento" *a* e "segundo elemento" *b*.

1.6 Saber que pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais quando (e apenas quando) $a = c$ e $b = d$.

1.7 Identificar o gráfico de uma função $f: A \longrightarrow B$ como o conjunto dos pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y = f(x)$ e designar neste contexto *x* por "variável independente" e *y* por "variável dependente".

SUMÁRIO
Generalidades sobre funções: domínio, contradomínio e gráfico.

METODOLOGIA
• Através de exemplos e recorrendo a diagramas, recordar as noções de função, domínio, conjunto de chegada, contradomínio, objeto e imagem. • Definição de gráfico de uma função. • Apresentação de duas funções dadas pelos respetivos gráficos e pedir aos alunos para indicarem os respetivos domínios e contradomínios. • Recordar, recorrendo ao programa de Geometria dinâmica *Geogebra*, o gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ em função dos parâmetros a e b. • Determinar a expressão analítica de uma função afim conhecidas as coordenadas de dois pontos do respetivo gráfico. • Recordar, recorrendo ao programa de Geometria dinâmica *Geogebra*, o gráfico de funções quadráticas do tipo $f(x) = ax^2, a \neq 0$, e usar aquela ferramenta para analisar a variação do gráfico em função do parâmetro a. • Recordar, recorrendo ao programa de Geometria dinâmica *Geogebra*, o gráfico de funções de proporcionalidade inversa $f(x) = \frac{a}{x},\ a > 0, x > 0$, e usar aquela ferramenta para analisar a variação do gráfico em função do parâmetro a. • Sugerir aos alunos a resolução de um exercício envolvendo uma função de proporcionalidade. • Resolução dos exercícios 11 e 12 da página 15.

RECURSOS DIDÁTICOS
• Manual • *Geogebra* • PowerPoint

AVALIAÇÃO
• Observação direta focalizada no comportamento, interesse, participação, capacidade de intervenção e argumentação, autonomia e empenho nas atividades propostas. • Aplicação correta dos conhecimentos adquiridos na resolução dos exercícios propostos.

OBSERVAÇÕES
• Aula lecionada pela estagiária Vanda Campos. • *Esta planificação contém os descritores **FSS7 1.1 a 1.7** das metas do 3º ciclo do Ensino Básico. • Aula assistida pelo orientador científico, Professor Doutor Jaime Silva.

Aulas n.º 138,139	**Turma:** 10.º 1	**Data** 18/04/2018

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS
Domínio: Funções Reais de Variável Real. **Subdomínio:** Generalidades acerca de funções reais de variável real. **Objetivo Geral: 3.** Identificar intervalos de monotonia de funções reais de variável real.

DESCRITORES (Desempenhos esperados)

3.1 Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como "(estritamente) crescente em A" (ou simplesmente "(estritamente) crescente" se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.

3.2 Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como "(estritamente) decrescente em A" (ou simplesmente "(estritamente) decrescente" se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$.

3.3 Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como "crescente, em sentido lato, em A" (ou simplesmente "crescente, em sentido lato" se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$.

3.4 Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como "decrescente, em sentido lato, em A" (ou simplesmente "decrescente, em sentido lato" se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \geq f(x_2)$.

3.5 Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como "(estritamente) monótona em A" (ou simplesmente "(estritamente) monótona" se $A = D_f$) se for (estritamente) crescente ou (estritamente) decrescente em A e f como "monótona", em sentido lato, em A" (ou simplesmente "monótona, em sentido lato" se $A = D_f$) se for crescente ou decrescente, em sentido lato, em A.

3.6 Identificar, dada uma função real de variável real f, um "intervalo de (estrita) monotonia de f" como um intervalo $I \subset D_f$ tal que $f_{|_I}$ é (estritamente) monótona.

3.7 Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como "constante em A" se para quaisquer elementos x_1 e x_2 de A, $f(x_1) = f(x_2)$.

3.8 Demonstrar que uma função afim definida por $f(x) = ax + b$ é estritamente crescente (respetivamente decrescente) em $\mathbb{R}$ se e somente se $a > 0$ (respetivamente $a < 0$).

3.9	Demonstrar que, dada uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2$, se $a > 0$ então f é decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$ e que, se $a < 0$, então f é crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.

SUMÁRIO

Monotonia de uma função real de variável real: funções afins e funções quadráticas.

METODOLOGIA

- Visualização do gráfico de uma função para o estudo da respetiva monotonia.
- Definição de função estritamente crescente e de função crescente em sentido lato.
- Definição de função estritamente decrescente e de função decrescente em sentido lato;
- Definição de função constante.
- Resolução dos exercícios 110, 113 e 114 da página 89.
- Exemplo de duas funções afins para relacionar o declive com a monotonia.
- Monotonia da função afim (caso geral) e respetiva demonstração.
- Exemplo de duas funções quadráticas para o estudo intuitivo da monotonia.
- Monotonia da função quadrática (no caso geral) e respetiva demonstração.
- Resolução do exercício 118.1 da página 93.

RECURSOS DIDÁTICOS

- Manual
- *Geogebra*

AVALIAÇÃO

- Observação direta focalizada no comportamento, interesse, participação, capacidade de intervenção e argumentação, autonomia e empenho nas atividades propostas.
- Aplicação correta dos conhecimentos adquiridos na resolução dos exercícios propostos.

OBSERVAÇÕES

- Aula lecionada pela estagiária Vanda Campos.

Aulas n.º 159,160	**Turma:** 10.º 1	**Data** 18/05/2018

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS
Domínio: Funções Reais de Variável Real. **Subdomínio:** Generalidades acerca de funções reais de variável real. **Objetivo Geral: 5.** Estudar funções elementares e operações algébricas sobre funções.

DESCRITORES (Desempenhos esperados)
5.6 Determinar o domínio e esboçar o gráfico de funções definidas analiticamente por $f(x) = a\sqrt[n]{x-b} + c \ (a, b, c \in \mathbb{R}, n \in \{2,3\}, a \neq 0)$.

SUMÁRIO
As funções raiz quadrada e raiz cúbica enquanto funções inversas: domínios e representações gráficas.

METODOLOGIA

- Resolução do exercício 1 da ficha de trabalho nº9 com o objetivo introduzir os seguintes conceitos:
  - ✓ Função definida por $f(x) = \sqrt{x}$;
  - ✓ Domínio e representação gráfica das funções definidas por $f(x) = a\sqrt{x-b} + c, a \neq 0$.
- Resolução do exercício 2 com a finalidade de introduzir os seguintes conceitos:
  - ✓ Função definida por $g(x) = \sqrt[3]{x}$;
  - ✓ Domínio e representação gráfica das funções definidas por $g(x) = a\sqrt[3]{x-b} + c, a \neq 0$.
- Transformações geométricas para o caso geral;
- Resolução dos exercícios 172, 173 e 174 da página 135 do manual;
- Resolução dos exercícios 6 e 7 da ficha de trabalho nº9.

RECURSOS DIDÁTICOS
• Manual • Geogebra • Calculadora gráfica

AVALIAÇÃO
• Observação direta focalizada no comportamento, interesse, participação, capacidade de intervenção e argumentação, autonomia e empenho nas atividades propostas. • Aplicação correta dos conhecimentos adquiridos na resolução dos exercícios propostos

OBSERVAÇÕES
Aula lecionada pela estagiária Vanda Campos.

Anexo C

Sínteses

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Escola Secundária de Jaime Cortesão
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

Síntese de Lógica e Teoria de Conjuntos

Proposições

- Uma **proposição** é toda a expressão *p* suscetível de ser verdadeira ou falsa.
- Uma proposição **verdadeira** tem o valor lógico de V.
- Uma proposição **falsa** tem o valor lógico de F.

Operações com proposições

Negação

p	$\sim p$
V	F
F	V

Conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicação

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Equivalência

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Disjunção exclusiva

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Propriedades das operações lógicas

Principio da não contradição

$p \wedge \sim p \Leftrightarrow f$

Princípio do terceiro excluído

$p \vee \sim p \Leftrightarrow v$

Comutatividade

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $\quad$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

Associatividade

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Elemento neutro

$p \wedge v \Leftrightarrow p$ $\quad$ $p \vee f \Leftrightarrow p$

Elemento absorvente

$p \wedge f \Leftrightarrow f$ $\quad$ $p \vee v \Leftrightarrow v$

Distributividade

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Leis de De Morgan

$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Implicação e disjunção $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$	**Negação da implicação** $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$
Implicação contrarrecíproca $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$	**Transitividade da implicação** $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$
Dupla Implicação $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$	**Dupla negação** $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$

Operações lógicas e expressões

Operação	Expressão
Negação (~)	Não Não é verdade que…
Conjunção ($\wedge$)	… e …
Disjunção ($\vee$)	… ou …

Operação	Expressão
Implicação ($\Rightarrow$)	se … então
Equivalência ($\Leftrightarrow$)	… se e somente se … … se e só se …

Expressão proposicional ou condição

Uma **expressão proposicional** ou **condição** é uma expressão *p(x)* envolvendo a variável *x*, tal que, substituindo a variável por um objeto *a*, obtém-se uma proposição *p(a)*.

Quantificadores

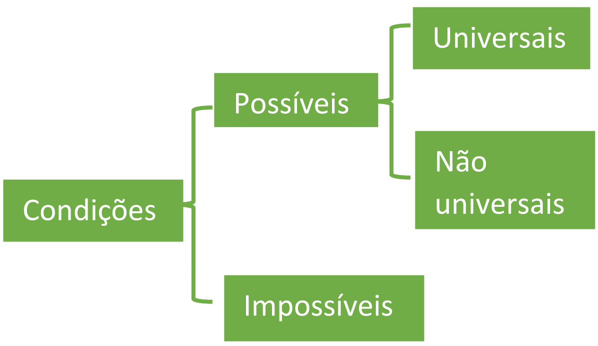
Quantificador universal: $\forall$

Se $p(x)$ é uma condição universal em U, a expressão $\forall x \in U, p(x)$ é uma proposição verdadeira.

Quantificador existencial: $\exists$

Se $p(x)$ é uma condição possível em U, a expressão $\exists x \in U: p(x)$ é uma proposição verdadeira.

Condições



Representação

$\forall x \in U, p(x) \Leftrightarrow \forall x, (x \in U \Rightarrow p(x))$

$\exists x \in U: p(x) \Leftrightarrow \exists x: x \in U \wedge p(x)$

Propriedades

<table>
<tr><td>Se $p(x)$ é uma condição qualquer, $u(x)$ uma condição universal e $i(x)$ é uma condição impossível, verifica-se:

$p(x) \vee u(x) \Leftrightarrow u(x)$ $\quad p(x) \wedge u(x) \Leftrightarrow p(x)$
$p(x) \vee i(x) \Leftrightarrow p(x)$ $\quad p(x) \wedge i(x) \Leftrightarrow i(x)$</td><td>• A negação de uma condição impossível é uma condição universal.
• A negação de uma condição universal é uma condição impossível.
• $\sim [\forall x \in U, p(x)] \Leftrightarrow \exists x \in U: \sim p(x)$
• $\sim [\exists x \in U: p(x)] \Leftrightarrow \forall x \in U, \sim p(x)$</td></tr>
<tr><td>Segundas leis de De Morgan
$\sim [\forall x, p(x)] \Leftrightarrow \exists x: \sim p(x)$
$\sim [\exists x: p(x)] \Leftrightarrow \forall x, \sim p(x)$</td><td>Negação de uma implicação
$\sim (\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)) \Leftrightarrow \exists x: p(x) \wedge \sim q(x)$</td></tr>
<tr><td>Dupla implicação
$\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \Rightarrow p(x)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x, (p(x) \Leftrightarrow q(x))$</td><td>Contrarrecíproco
$\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x)) \Leftrightarrow \forall x, (\sim q(x) \Rightarrow \sim p(x))$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contraexemplo
Para provar que $\forall x \in U$, $p(x)$ é uma proposição falsa, basta apresentar um contraexemplo, isto é, $a \in U$, tal que $p(a)$ é falsa.</td></tr>
</table>

Conjuntos e Condições

Condições definidas em U		Conjuntos-solução em U	
$a(x)$		A	
$b(x)$		B	
$\sim a(x)$	negação	$\bar{A}$	complementar
$a(x) \wedge b(x)$	conjunção	$A \cap B$	interseção
$a(x) \vee b(x)$	disjunção	$A \cup B$	união (ou reunião)
$a(x) \Rightarrow b(x)$	implica	$A \subset B$	inclusão
$a(x) \Leftrightarrow b(x)$	equivalência	$A = B$	igualdade

- $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \backslash B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$
- $A \subset B \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$
- $A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$
- Se $B \subset A$, então $A \backslash B = \bar{B}$ é o complementar de B em A

Síntese de Álgebra *(Polinómios)*

- Um **polinómio de grau n** ($n \in \mathbb{N}_0$) **na variável x, na forma reduzida e ordenada**, é uma expressão da forma

  $$\boldsymbol{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}, \qquad \text{com} \quad a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$$

  em que $\boldsymbol{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0}$ são os **coeficientes do polinómio**.

- Dados polinómios não nulos $A(x)$ e $B(x)$, o **grau do polinómio $A(x) \times B(x)$** é igual à **soma dos graus** de $\boldsymbol{A(x)}$ e de $\boldsymbol{B(x)}$.

Divisão Euclidiana ou divisão inteira

Dados dois polinómios $A(x)$ e $B(x)$, com $B(x) \neq 0$, existem **dois polinómios únicos** $Q(x)$ e $R(x)$ tais que $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$ e $R(x)$ ou é o polinómio nulo ou tem grau inferior ao grau de $B(x)$.

$A(x)$: polinómio dividendo

$B(x)$: polinómio divisor

$Q(x)$: polinómio quociente

$R(x)$: polinómio resto

Diz-se que **$A(x)$ é divisível por $B(x)$** se e só se o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é zero.

- Se $A(x)$ tem grau m e $B(x)$ tem grau n, com $m \geq n$, então o **grau do polinómio quociente** da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$ é **m - n**.

Teorema do Resto

Dado um polinómio $P(x)$ e um número $a \in \mathbb{R}$, o **resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$**.

- Um número real a diz-se **raiz ou zero** de um polinómio $P(x)$ se $P(a) = 0$.

- $P(x)$ é divisível por um polinómio $Q(x)$, não nulo, se o resto da divisão euclidiana de $P(x)$ por $Q(x)$ é zero.

- Dados um número real a e um polinómio $P(x)$ de grau $n \in \mathbb{N}$, a **é uma raiz de $P(x)$ se, e somente se, $P(x)$ for divisível por $x - a$** e, nesse caso, existe um polinómio $Q(x)$ de grau $n - 1$ tal que

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

- A **multiplicidade de uma raiz a** é o maior número natural n para o qual se tem

$$P(x) = (x - a)^n Q(x)$$

Teorema Fundamental da Álgebra

Dado um polinómio $P(x)$ de grau $n \in \mathbb{N}$ cujas raízes reais (distintas) $x_1, x_2, \dots, x_k$ têm respetivamente multiplicidade $n_1, n_2, \dots, n_k$, existe um polinómio $Q(x)$ sem raízes reais tal que

$$P(x) = (x - x_1)^{n_1} \times (x - x_2)^{n_2} \times \dots \times (x - x_k)^{n_k}\, Q(x).$$

- Dado um polinómio $P(x)$ de segundo grau, com a como coeficiente do termo de grau 2:
  - se $P(x)$ tem duas raízes distintas x_1 e x_2, então $P(x) = a(x - x_1) \times (x - x_2)$;
  - se $P(x)$ tem uma raiz x_1 com multiplicidade 2, então $P(x) = (x - x_1)^2$.

Para decompor um polinómio $P(x)$ de 3.º grau em fatores, basta:

- conhecer uma raiz a do polinómio;
- efetuar a divisão inteira do polinómio por $x - a$;
- decompor o polinómio em $P(x) = (x - a)Q(x)$, sendo $Q(x)$ um polinómio de grau 2;
- se possível, determinar as raízes de $Q(x)$ e decompô-lo.

- Pode **decompor-se um polinómio $P(x)$ de grau superior ao terceiro em fatores**, se:
  - conhecermos um número suficiente de raízes do polinómio que permita sucessivamente decompor o polinómio em fatores de grau 1 e de grau 2;
  - determinarmos as soluções, caso existam, do(s) polinómio(s) de grau 2 e correspondente factorização.

Na resolução de uma **equação de grau superior a dois**, devem seguir-se os seguintes passos:

1.º passo: escrever a equação na forma $P(x) = 0$.

2.º passo: decompor $P(x)$ em fatores de grau 1 e/ou grau 2.

3.º passo: aplicar a lei do anulamento do produto.

4.º passo: resolver as equações de grau 1 e/ou grau 2 obtidas.

5.º passo: apresentar o conjunto-solução.

Na resolução de uma **inequação polinomial de grau superior ao segundo**, devem seguir-se os seguintes passos:

1.º passo: transformar a equação numa do tipo $P(x) < 0$, $P(x) > 0$, $P(x) \leq 0$ ou $P(x) \geq 0$.

2.º passo: decompor $P(x)$ em fatores de 1.º grau e/ou 2.º grau.

3.º passo: estudar num quadro o sinal de cada fator.

4.º passo: de acordo com o estudo feito no passo anterior, apresentar a condição que corresponde aos valores de x que são solução da inequação.

5.º passo: apresentar o conjunto-solução.

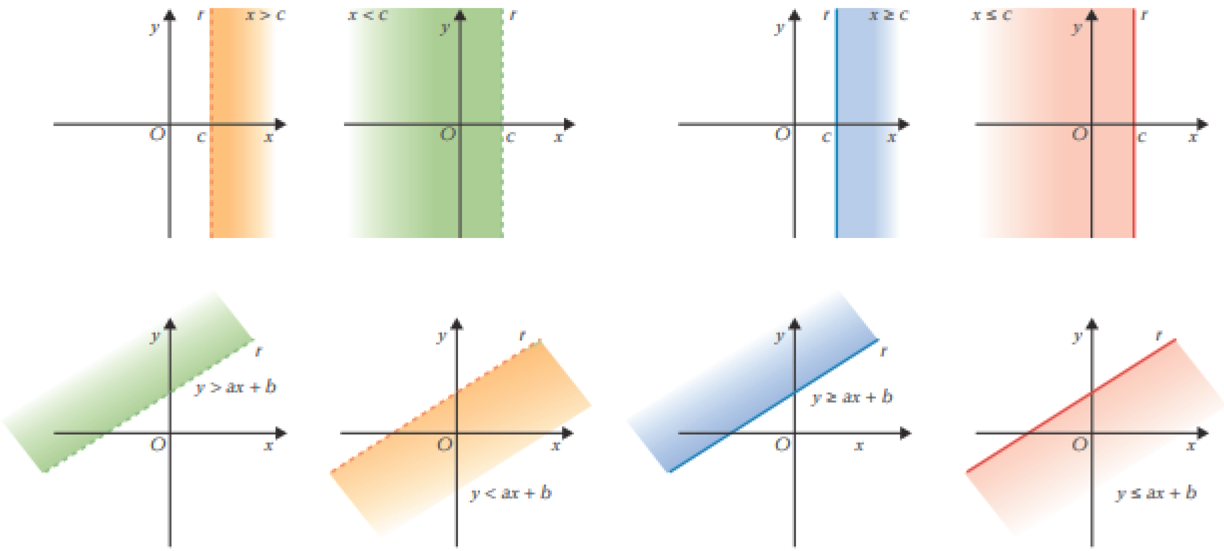
Geometria analítica no plano

Sejam $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ dois pontos no plano

Distância entre A e B	$d(A,B) = \overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$
Ponto médio do segmento de reta $[AB]$	$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$
Mediatriz do segmento de reta $[AB]$	$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2$
Circunferência de centro A e raio r	$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2$
Círculo de centro A e raio r	$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leq r^2$

Equação reduzida da elipse	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ É a **equação reduzida da elipse de semieixo maior *a*, em *Ox*, semieixo menor *b*, em *Oy***, e com focos $A(-c, 0)$ e $B(c, 0)$, com $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ É a **equação reduzida da elipse de semieixo maior *a*, em *Oy*, semieixo menor *b*, em *Ox***, e com focos $A(0, -c)$ e $B(0, c)$, com $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Semiplanos



Cálculo vetorial no plano

Um **vetor** fica definido por

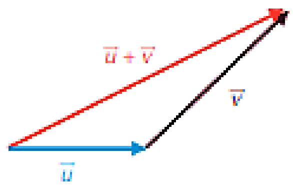
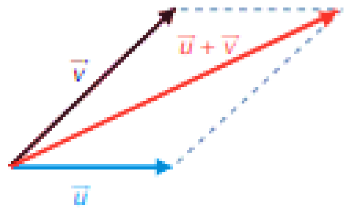
- Um comprimento
- Uma direção
- Um sentido

Segmentos orientados equipolentes

Dois segmentos orientados dizem-se equipolentes quando têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.
Em particular, são equipolentes todos os segmentos nulos.

- ✓ **Vetores colineares** são vetores que têm a mesma direção
- ✓ **Vetores simétricos** são vetores que têm a mesma direção, o mesmo comprimento e sentidos opostos.
- ✓ **O ponto Q é a soma do ponto P com o vetor $\vec{u}$**, e escreve-se Q = P + $\vec{u}$, quando dado um ponto P e um vetor $\vec{u}$, existe um único ponto Q tal que $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$.
- ✓ A **norma de um vetor $\vec{v}$** é a medida do comprimento de um segmento orientado representante de $\vec{v}$ e representa-se por $\|\vec{v}\|$.

Adição de vetores

Regra do triângulo	Regra do paralelogramo
	

Propriedades

Propriedade comutativa	$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$
Propriedade associativa	$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$, para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$
Existência de elemento neutro	$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$
Existência de elemento simétrico para cada vetor	$\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$, Para qualquer vetor $\vec{u}$

Multiplicação de um vetor por um escalar

Dado um vetor $\vec{u}$ e um número real (também designado por escalar) λ, fixada uma mesma unidade de comprimento para o cálculo das normas, o produto de λ por $\vec{u}$, que se representa por $\lambda\vec{u}$, é o vetor definido pelas propriedades seguintes:

- A norma de $\lambda\vec{u}$ é dada por $|\lambda| \times \|\vec{u}\|$.
- A direção de $\lambda\vec{u}$ é a direção de $\vec{u}$, se $\vec{u} \neq \vec{0}$.
- O sentido de $\lambda\vec{u}$ é o mesmo de $\vec{u}$ se $\lambda > 0$ e é o contrário ao de $\vec{u}$ se $\lambda < 0$; se $\vec{u} \neq \vec{0}$

✓ Dado um vetor $\vec{v}$, não nulo, um vetor $\boldsymbol{\vec{u}}$ **é colinear a** $\boldsymbol{\vec{v}}$ se e somente se existir um número real λ tal que $\vec{u}=\lambda\vec{v}$ e, nesse caso, λ é único.

✓ Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores e λ e μ números reais:

Distributividade em relação à adição de números reais	$(\lambda+\mu)\vec{v}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{v}$
Distributividade em relação à adição de vetores	$\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$
Associatividade mista	$\lambda(\mu\vec{v})=(\lambda\mu)\vec{v}$

- ✓ Fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem *O* e dado um ponto *A*, chama-se **vetor posição do ponto *A*** ao vetor $\overrightarrow{OA}$.

- ✓ Sejam $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ dois vetores do plano λ um número real:
  - $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2$
  - $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
  - $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$
  - $\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2)$
  - $-\vec{u} = (-u_1, -u_2)$

- ✓ Sejam $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ dois vetores do plano, não nulos. $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e somente se $u_1, u_2, v_1, v_2 \neq 0$ e $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$ ou as primeiras coordenadas de ambos forem nulas ou as segundas coordenadas de ambas forem nulas.

- ✓ Dados os pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ e um vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$, tem-se:
  - $\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$
  - $A + \vec{v} = (a_1 + v_1, a_2 + v_2)$
  - $\|\vec{v}\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$

- ✓ Um vetor $\vec{v}$, não nulo, **tem a direção da reta r** se as retas suporte dos representantes de $\vec{v}$ têm a direção de r.

- ✓ Designa-se por **vetor diretor** de uma dada reta r qualquer vetor não nulo com a mesma direção de r.

- ✓ Considere uma reta que passa pelo ponto $A(a_1, a_2)$ e tem direção do vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$. Então:

  Equação vetorial da reta

  $(x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(v_1, v_2), \lambda \in \mathbb{R}$

  Sistema de equações paramétricas da reta

  $$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

  Equações cartesianas

  $\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$ se $v_1, v_2 \neq 0$

  $y - a_2 = \frac{v_2}{v_1}(x - a_1)$ se $v_1 \neq 0$

  $y = mx + b \longrightarrow$ Equação reduzida da reta, onde $m = \frac{v_2}{v_1}$, se $v_1 \neq 0$, e b é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo *Oy*.

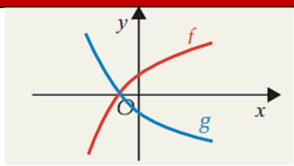
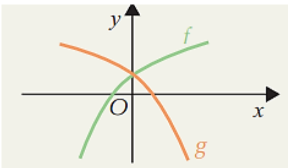
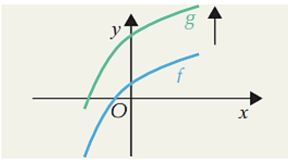
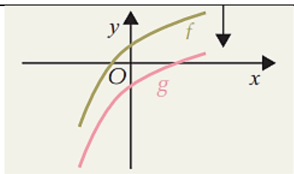
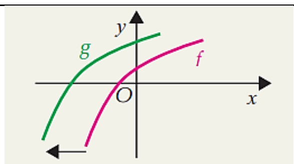
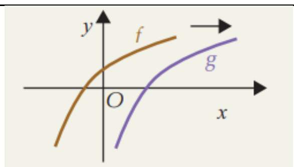
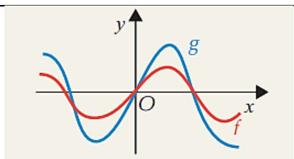
Funções reais de variável real: Generalidades

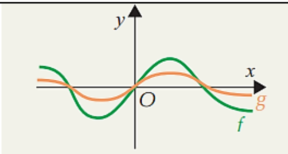
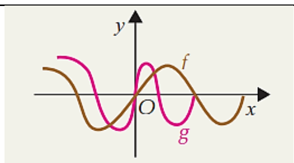
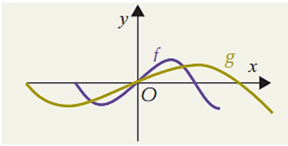
- Uma **função real de variável real** é uma função cujo domínio e o conjunto de chegada estão contidos em $\mathbb{R}$.
- Na **determinação de domínios** de funções reais de variável real definidas pela respetiva expressão analítica, deve ter-se em atenção as seguintes situações:
  - ✓ Se a variável independente x se encontrar no denominador, é preciso garantir que o denominador seja diferente de zero;
  - ✓ Se a variável independente x se encontrar no radicando de um radical com índice par, é preciso garantir que o radicando seja maior ou igual a zero;
  - ✓ No caso de ter as duas situações em simultâneo, terá de se considerar a conjunção das duas condições.
- Uma função real de variável real f diz-se:
  - ✓ **Par** se todo o $x \in D_f$ se tem $-x \in D_f$ e $f(-x) = f(x)$;
  - ✓ **Ímpar** se todo o $x \in D_f$ se tem $-x \in D_f$ e $f(-x) = -f(x)$;
- Dado um plano munido de um referencial cartesiano e dada uma função f:
  - ✓ f é **par** se e somente se o eixo das ordenadas for eixo de simetria do respetivo gráfico;
  - ✓ f é **ímpar** se e somente se o respetivo gráfico for simétrico relativamente à origem O do referencial.
  - ✓ f é **ímpar** se $0 \in D_f$, então $f(0) = 0$

Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $af(x)$, $f(bx)$, $f(x+c)$, $f(x)+d$, $-f(x)$ e $f(-x)$.

Na tabela seguinte encontra-se um resumo dos efeitos que determinadas transformações têm na representação gráfica de uma dada função f.

Seja $k \in \mathbb{R}^+$.

	Gráficos	Descrição do efeito sobre o gráfico de f
$g(x) = -f(x)$		Reflexão em relação ao eixo Ox
$g(x) = f(-x)$		Reflexão em relação ao eixo Oy
$g(x) = f(x) + k$		Translação associada ao vetor $(0, k)$. O gráfico desloca-se k unidades para cima.
$g(x) = f(x) - k$		Translação associada ao vetor $(0, -k)$. O gráfico desloca-se k unidades para baixo.
$g(x) = f(x + k)$		Translação associada ao vetor $(-k, 0)$. O gráfico desloca-se k unidades para a esquerda.
$g(x) = f(x - k)$		Translação associada ao vetor $(k, 0)$. O gráfico desloca-se k unidades para a direita.
$g(x) = k \times f(x)$ $k > 1$		Dilatação vertical de coeficiente k.

$g(x) = k \times f(x)$ $0 < k < 1$		Contração vertical de coeficiente k.
$g(x) = f(kx)$ $k > 1$		Contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{k}$.
$g(x) = f(kx)$ $0 < k < 1$		Dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{k}$.

Anexo D

Fichas de trabalho

Ficha de trabalho nº1 Ano Letivo 2017/2018

Grupo I

Este grupo é constituído por questões de escolha múltipla. Para cada uma dessas questões escolha a opção correta e apresente todos os cálculos que efetuar.

1. Sabe-se que a proposição "O professor é exigente ou rigoroso."é verdadeira. Indica, justificando, qual das proposições seguintes é necessariamente falsa.
   (A) O professor é rigoroso e exigente.
   (B) O professor não é exigente ou não é rigoroso.
   (C) O professor não é exigente e não é rigoroso.
   (D) Se o professor é exigente então é rigoroso.

2. Seja p:"O Afonso é vegetariano."e q:"O Afonso come sushi."
   A proposição "O Afonso não é vegetariano e como sushi."é equivalente a:
   (A) $\sim p \Rightarrow q$ (B) $\sim p \vee q$ (C) $p \wedge \sim q$ (D) $\sim (p \vee \sim q)$

3. Sabendo que a proposição $p \Rightarrow \sim q$ é falsa, quais das seguintes proposições é verdadeira?
   (A) $\sim p \wedge q$ (B) $q \Rightarrow \sim p$ (C) $p \Rightarrow (q \vee \sim p)$ (D) $p \Leftrightarrow \sim q$

4. Sabendo que a proposição abaixo é falsa, quais são os valores lógicos de p, q e r, respetivamente?
$$(\sim r \wedge \sim q) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge \sim q)$$
   (A) V, F, F (B) F, V, F (C) F, F, F (D) V, F, V

5. Das seguintes proposições, apenas uma delas é **falsa**. Identifique-a.
   (A) Se a Lua não é um satélite da Terra, então a Terra não é um planeta.
   (B) O número π é um número racional se e somente se -2 é um número natural.
   (C) O cubo não é um poliedro regular ou os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.
   (D) O quadrado de qualquer número real é um número positivo e a *A Portuguesa* é o hino de Portugal.

6. A seguir apresentam-se quatro equivalências e apenas uma delas é **falsa**. Identifique-a.
   (A) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ (B) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$
   (C) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$ (D) $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$

7. Considere a proposição seguinte:

Se amanhã estiver sol então vou à praia.

A negação da proposição dada é:

(A) Se amanhã não estiver sol, então não vou à praia.
(B) Amanhã não vai estar sol ou vou à praia.
(C) Amanhã vai estar sol e não vou à praia.
(D) Se amanhã estiver sol, então não vou à praia.

8. Considere as proposições p e q. Quando se afirma que $p \Rightarrow q$, é verdade que:

(A) q é condição suficiente para p.
(B) p é condição necessária para q.
(C) q não é condição necessária para p.
(D) p é condição suficiente para q.

9. Das quatro proposições seguintes, apenas uma **não** é equivalente à proposição a

(A) $(a \wedge \sim b) \vee (a \wedge b)$
(B) $(b \Rightarrow a) \vee b$
(C) $(a \vee b) \wedge (a \vee \sim b)$
(D) $(\sim a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Considere as proposições p:"O João gosta de futebol"e q:"O João gosta de basquetebol".
Traduza para linguagem corrente as seguintes proposições:

(a) $\sim p$ (b) $p \wedge q$ (c) $p \Rightarrow q$ (d) $q \Rightarrow \sim p$

2. Demonstre, através de uma tabela de verdade que a equivalência $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ é uma tautologia.

3. Sabendo que $p \wedge q$ é uma proposição falsa, simplifica a expressão $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$ e indique o seu valor lógico.

4. Construa a tabela de verdade da proposição:

$$[p \Rightarrow (\sim q \vee r)] \wedge [q \vee (p \Leftrightarrow \sim r)]$$

5. Considere as proposições p, q, r e t tais que p e q são verdadeiras e r e t são falsas.
Determine o valor lógico de cada uma das proposições.

5.1 $(p \wedge \sim q) \vee r$
5.2 $p \Rightarrow \sim (r \wedge t)$
5.3 $\sim ((r \Rightarrow p) \vee (t \Rightarrow q))$
5.4 $(q \Rightarrow t) \Rightarrow (r \vee p)$

6. Considere as proposições t e s:

$$t : 0.3^2 = 0.9 \qquad s : \pi < 3.14$$

Determine o valor lógico de cada uma das proposições.

6.1 $(\sim t \wedge s) \vee (t \wedge \sim s)$

6.2 $(t \Rightarrow s) \wedge \sim t \Rightarrow \sim s$

7. Considere a proposição $[a \wedge (\sim a \vee b)] \Rightarrow a$.
Prove, sem recorrer a tabelas de verdade, que a proposição é verdadeira.

8. Considere as proposições b, p e s:
b: O Sport Lisboa e Benfica ganha a 1ª Liga.
p: O Futebol Clube do Porto ganha a 1ª Liga.
s: O Sporting Clube de Portugal ganha a 1ª Liga.
Admitindo que $\sim (\sim b \vee (\sim p \Rightarrow s))$ é uma proposição verdadeira, determine, justificando, qual das equipas ganha a primeira liga.

Soluções

Grupo I
1. C **2.** D **3.** C **4.** A **5.** D **6.** C **7.** C **8.** D **9.** B

Grupo II
3 Verdadeira **5.1** Falsa **5.2** Verdadeira **5.3** Falsa **5.4** Verdadeira **6.1** Falsa
6.2 Verdadeira **8** Sport Lisboa e Benfica

Proposta de resolução da ficha de trabalho nº1

Grupo I

1. Consideremos as seguintes proposições:

p : O professor é exigente $\qquad q$: O professor é rigoroso

Então, pelas Leis de De Morgan $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$.

Opção correta: (C)

2. $\sim (p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim\sim q \Leftrightarrow \sim p \wedge q$

Opção correta: (D)

3. Sabe-se que a proposição $p \Rightarrow \sim q$ é falsa

Opção correta: (C)

4. Se a proposição $(\sim r \wedge \sim q) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge \sim q)$ é falsa então as proposição $(\sim r \wedge \sim q)$ e $((p \Rightarrow r) \wedge \sim q)$ têm o valor lógico verdadeiro e falso, respetivamente.

Se a proposição $(\sim r \wedge \sim q)$ é verdadeira significa que $\sim r$ e $\sim q$ são ambas verdadeiras. Concluí-se portanto que r e q são proposições falsas.
Sendo a proposição $((p \Rightarrow r) \wedge \sim q)$ falsa e sabendo que $\sim q$ é verdadeira, concluí-se que a proposição $(p \Rightarrow r)$ é falsa e, consequentemente, p é uma proposição verdadeira.

Logo p é uma proposição verdadeira e q e r são proposições falsas.

Opção correta: (A)

5. (A) A proposição *"A Lua não é um satélite da Terra"* e a proposição *"A Terra não é um planeta"* são ambas falsas. Uma equivalência entre duas proposições falsas dá uma proposição verdadeira.

(B) Ambas as proposições *"O número π é um número racional"* e *-2 é um número natural"* são falsas, logo de entre as duas resulta uma proposição verdadeira.

(C) A proposição *"O cubo não é um poliedro regular"* é falsa e a proposição *"Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares"* é verdadeira, portanto a disjunção entre estas duas proposição dá uma proposição verdadeira.

(D) Sendo a proposição *"O quadrado de qualquer número real é um número positivo"* falsa e a proposição *"A A Portuguesa é o hino de Portugal"* verdadeira então a conjunção resulta numa proposição falsa.

Opção correta: (D)

6. (A) Verdadeira

(B) $\sim (p \wedge \sim p) \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ Verdadeira

(C) Falsa

(D) $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow \sim q \vee p \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$ Verdadeira

Opção correta: (C)

7. Opção correta: (C)

8. Opção correta (D)

9. (A) $(a \wedge \sim b) \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a \wedge (\sim b \vee b) \Leftrightarrow a \wedge v \Leftrightarrow a$

(B) $(b \Rightarrow a) \vee b \Leftrightarrow (\sim b \vee a) \vee b \Leftrightarrow \sim b \vee b \vee a \Leftrightarrow v \vee a \Leftrightarrow v$

(C) $(a \vee b) \wedge (a \vee \sim b) \Leftrightarrow a \vee (b \wedge \sim b) \Leftrightarrow a \vee f \Leftrightarrow a$

(D) $(\sim a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (\sim b \vee a) \Leftrightarrow a \vee (b \wedge \sim b) \Leftrightarrow a \vee f \Leftrightarrow a$

Opção correta: (B)

Grupo II

1. (a) O João não gosta de futebol.

(b) O João gosta de futebol e basquetebol.

(c) Se o João gosta de futebol então gosta de basquetebol.

(d) Se o João gosta de basquetebol então não gosta de futebol.

2.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

3. $\sim p \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow v \vee (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow v$
É verdadeira.

4.

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$\sim q \vee r$	$p \Leftrightarrow \sim r$	$p \Rightarrow (\sim q \vee r)$	$q \vee (p \Leftrightarrow \sim r)$	$(p \Rightarrow (\sim q \vee r)) \wedge (q \vee (p \Leftrightarrow \sim r))$
V	V	V	F	F	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V	F	V	F
V	F	V	V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	V	F	V

5.1 Sendo q uma proposição verdaddeira então $\sim q$ é falsa. A proposição $(p \wedge \sim q)$ é falsa, pois trata-se de uma conjunção. Sendo r uma proposição falsa, então tem-se que a proposição $(p \wedge \sim q) \vee r$ é falsa.

5.2 A proposição $(r \wedge t)$ é falsa visto que é a conjunção de duas proposições falsas, sendo a sua negação verdadeira. Como p é uma proposição verdadeira e esta implica uma outra verdadeira, concluí-se que $(p \Rightarrow \sim (r \wedge t))$ é uma proposição verdadeira.

5.3 As proposições $(r \Rightarrow p)$ e $(t \Rightarrow q)$ são proposições verdadeiras, logo os antecedentes são falsos e os consequentes são verdadeiros.
Da disjunção de duas proposições verdadeiras resulta uma proposição verdadeira, sendo a sua negação falsa. Portanto $\sim ((r \Rightarrow p) \vee (t \Rightarrow q))$ é uma proposição falsa.

5.4 A proposição $(q \Rightarrow t)$ é falsa, visto que se trata de uma implicação em que o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso. Sabe-se que a proposição $(r \vee p)$ é verdadeira. Da implicação destas duas proposição resulta uma proposição verdadeira. Logo $(q \Rightarrow t) \Rightarrow (r \vee p)$ é uma proposição verdadeira.

6.1 Sabe-se que as proposições t e s são falsas e consequentemente as respetivas negações são verdadeiras. Portanto, as proposições $(\sim t \wedge s)$ e $(t \wedge \sim s)$ são ambas falsas (a conjunção só é verdadeira caso as duas proposições sejam verdadeiras).
Concluí-se que a proposição $(\sim t \wedge s) \vee (t \wedge \sim s)$ é falsa.

6.2 A proposição $(t \Rightarrow s)$ é uma proposição verdadeira, pois trata-se de uma implicação entre duas proposições falsas. A conjunção desta proposição com $\sim t$ resulta numa proposição verdadeira. Sendo $\sim s$ uma proposição verdadeira então obtém-se que a proposição $(t \Rightarrow s) \wedge \sim t \Rightarrow \sim s$ é verdadeira.

7.

$$\begin{aligned}
a \wedge (\sim a \vee b) \Rightarrow a \quad &\Leftrightarrow \quad (a \wedge \sim a) \vee (a \wedge b) \Rightarrow a \Leftrightarrow f \vee (a \wedge b) \Rightarrow a \\
&\Leftrightarrow \quad (a \wedge b) \Rightarrow a \Leftrightarrow \sim (a \wedge b) \vee a \Leftrightarrow \sim a \vee \sim b \vee a \\
&\Leftrightarrow \quad (\sim a \vee a) \vee \sim b \Leftrightarrow v \vee \sim b \\
&\Leftrightarrow \quad v
\end{aligned}$$

8. Sendo a proposição $\sim (\sim b \vee (\sim p \Rightarrow s))$ verdadeira, então $(\sim b \vee (\sim p \Rightarrow s))$ é uma proposição falsa. Como se trata de uma proposição falsa que resulta de uma disjunção, chega-se à conclusão que $\sim b$ e $(\sim p \Rightarrow s)$ são ambas proposições falsas.

Se $\sim b$ é uma proposição falsa, então b é uma proposição verdadeira. Como $(\sim p \Rightarrow s)$ é uma proposição falsa, as proposição $\sim p$ e s são, respetivamente, verdadeira e falsa. Logo conclui-se que a proposiçao p tem valor lógico falso.

Posto isto, a proposição b é verdadeira e as proposições p e s são falsas. Logo, a equipa que ganha a 1ª liga é o Sport Lisboa e Benfica.

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Escola Secundária de Jaime Cortesão
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

Ficha de trabalho nº2 Ano Letivo 2017/2018

Grupo I

Este grupo é constituído por questões de escolha múltipla. Para cada uma dessas questões escolha a opção correta e apresente todos os cálculos que efetuar.

1. Considere, em $\mathbb{R}$, as condições $p(x)$ e $q(x)$ definidas, respetivamente, por

$$p(x) = \frac{x^2-1}{2} \leq x\left(\frac{x}{2}+1\right) \qquad \text{e} \qquad q(x) = 6(x-2) < 3x+3$$

Quais são os valores reais de x que transformam a condição $p(x) \wedge q(x)$ numa proposição verdadeira?

(A) $\left[\frac{1}{2}, 3\right[$ (B) $\left[-\frac{1}{2}, 5\right[$ (C) $\left[\frac{1}{2}, 5\right[$ (D) $\left[-\frac{1}{2}, 3\right[$

2. Considere a seguinte proposição:

p : Não existem números reais cujo cubo seja -1

Qual das seguintes expressões traduz em linguagem natural a proposição p?

(A) $\exists x \in \mathbb{R} : x^3 \neq -1$ (B) $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 = -1$

(C) $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \neq -1$ (D) $\exists x \in \mathbb{R} : x^3 = -1$

3. Considere a proposição $p : \forall x \in \mathbb{R}, x < -2 \Rightarrow x^2 + x < 2$.
Qual é a expressão que representa a proposição $\sim p$?

(A) $\exists x \in \mathbb{R} : x < -2 \wedge x^2 + x \geq 2$ (B) $\exists x \in \mathbb{R} : x < -2 \vee x^2 + x \geq 2$

(C) $\exists x \in \mathbb{R} : x \geq -2 \wedge x^2 + x \geq 2$ (D) $\forall x \in \mathbb{R}, x < -2 \wedge x^2 + x \geq 2$

4. Qual das seguintes condições é universal no conjunto dos números naturais?

(A) $\sim$(n é par) $\Rightarrow \sim$(n é ímpar) (B) n é múltiplo de 6 $\Rightarrow$ n é múltiplo de 12

(C) n é par $\Rightarrow$ $2n+1$ é par (D) n é múltiplo de 6 $\Rightarrow$ n é múltiplo de 3

5. Em $\mathbb{R}$, $x+1 < x$ é uma condição

(A) possível e universal (B) impossível

(C) possível mas não universal (D) universal

6. Considere as seguintes proposições a e b.

$$a : \exists x \in \mathbb{Z} : 3x + 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad b : \exists x \in \mathbb{N} : 2x > x$$

Relativamente ao valor lógico das proposições a e b, podemos afirmar que:

(A) a é verdadeira e b é falsa

(B) a é falsa e b é verdadeira

(C) são ambas verdadeiras

(D) são ambas falsas

7. Considere o conjunto $A = \{-1, 0, 1\}$.
Apenas uma das proposições seguintes é **falsa**. Identifique-a.

(A) $\exists x \in A : (-1)^{x+1} = 1$

(B) $\forall x \in A, \sim (x^2 \leq 0)$

(C) $\forall x \in A, |x| \leq 1$

(D) $\exists x \in A : \sqrt[3]{x} = -1$

8. Considere o conjunto $M = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x - 2 \leq 3\}$.
Em qual das opções seguintes está representado o conjunto $\overline{M}$?

(A) $]1, 5]$

(B) $]-\infty, 1] \cup]5, +\infty[$

(C) $[1, 5[$

(D) $]-\infty, 1[\cup [5, +\infty[$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Escreva, em linguagem simbólica, usando quantificadores, as seguintes condições.

1.1 Há pelo menos um número natural par que é primo.

1.2 Todos os quadrados de números reais são maiores do que -2.

1.3 Há pelo menos um número inteiro entre -1 e 1.

1.4 Existe pelo menos um número real no intervalo $[1, 3[$ igual ou superior a 3.

1.5 Todo o número natural é real.

1.6 Existe pelo menos um número natural maior do que 1 e menor do que 3.

2. Aplique as segundas leis de De Morgan para negar as proposições.

2.1 $\exists x \in \mathbb{N} : x \geq 0$

2.2 $\exists x \in \mathbb{Q} : |x| < 0$

2.3 $\forall x \in \mathbb{Z}, x \in [-3, 3[$

3. Indique o valor lógico das negações das proposições do exercício anterior.

4. Considere o conjuntos

$$A = \{1, 2, 5, 7\}, \quad B \cup A = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\} \quad \text{e} \quad A \cap B = \{2, 5\}$$

Escreva em extensão os seguintes conjuntos

4.1 B

4.2 $A \setminus B$

4.3 $B \setminus A$

5. Considere, em $\mathbb{R}$, as condições

$$a(x): x^2 - 1 = 0 \qquad b(x): x - 1 > 0 \qquad c(x): x - 1 < 0$$

Indique se, em $\mathbb{R}$, é universal, possível não universal ou impossível cada uma das condições.

5.1 $a(x) \wedge b(x)$

5.2 $a(x) \wedge c(x)$

5.3 $a(x) \vee b(x) \vee c(x)$

5.4 $b(x) \vee c(x)$

6. Indique o valor lógico de cada uma das seguintes expressões.

6.1 $A = B$ se e somente se $A \subset B$.

6.2 Se $\exists x : x \in A \Rightarrow x \in B$, então $A \subset B$

6.3 Se $A \subset B$, então $\exists x : x \in B \Rightarrow x \in A$

6.4 Se $\forall x, x \in A \Rightarrow x \notin B$, então $A \setminus B = B$

7. Para cada uma das expressões falsas na questão anterior, apresente um contraexemplo.

Soluções

Grupo I

1. B **2.** C **3.** A **4.** D **5.** B **6.** B **7.** B **8.** B

Grupo II

1.1 $\exists x \in \mathbb{N} : x$ é primo $\wedge$ x é par **1.2** $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > -2$ **1.3** $\exists x \in \mathbb{Z} : -1 < x < 1$
1.4 $\exists x \in \mathbb{R} : x \in [1, 3[\wedge x = 3$ **1.5**$\forall \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ **1.6** $\exists x \in \mathbb{N} : 1 < x < 3$ **3.1** Falsa
3.2 Verdadeira **3.3** verdadeira **5.1** Impossível **5.2** Universal **5.3** Possível não universal
5.4 Possível não universal **6.1** Falsa **6.2** Falsa **6.3** Verdadeira **6.4** Falsa

Proposta de resolução da ficha de trabalho nº2

Grupo I

1. $\frac{x^2-1}{2} \leq x\left(\frac{x}{2}+1\right) \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{2} \leq \frac{x^2}{2}+x \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}-x \leq 0 \Leftrightarrow -x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

$6(x-2) < 3x+3 \Leftrightarrow 6x-12 < 3x+3 \Leftrightarrow 6x-3x < 3+12 \Leftrightarrow 3x < 15 \Leftrightarrow x < \frac{15}{3} \Leftrightarrow x < 5$

$p(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \wedge x < 5 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 5\right[$

Opção correta: (B)

2. Opção correta: (C)

3. Tendo em conta $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$ tem-se:

$$\begin{aligned} \sim\left(\forall x \in \mathbb{R},\ x < -2 \Rightarrow x^2+x < 2\right) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \sim\left(x < -2 \Leftrightarrow x^2+x < 2\right) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} :\ x < -2 \ \wedge\ x^2+x \geq 2 \end{aligned}$$

Opção correta: (A)

4. (A)

$$\begin{aligned} \sim (n \text{ é par}) \Rightarrow \sim (n \text{ é ímpar}) &\Leftrightarrow n \text{ é ímpar} \Rightarrow n \text{ é par} \Leftrightarrow n \text{ não é ímpar} \vee n \text{ é par} \\ &\Leftrightarrow n \text{ é par} \vee n \text{ é par} \Leftrightarrow n \text{ é par} \end{aligned}$$

Por exemplo, $n = 3 \in \mathbb{N}$ e não é par. Logo, a condição dada é possível, mas não universal em $\mathbb{N}$.

(B) n é múltiplo de $6 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} :\ n = 6k$.
Se, por exemplo, considerar $n = 12$, tem-se que 12 é múltiplo de 6 e é múltiplo de 12. Ao considerar $n = 18$, tem-se que 18 é múltiplo de 6 mas não é múltiplo de 12. Logo, a primeira verifica e a segunda não. Portanto, a condição não é universal em $\mathbb{N}$.

(C) n é par $\Rightarrow 2n+1$ é par.
Não é universal, porque qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $2n+1$ é sempre um número ímpar.

(D) Se n é múltiplo de 6 então pode escrever-se na forma $n = 6k$, para algum $k \in \mathbb{N}$.
$n = 6k = 3(2k) = 3k' \Rightarrow n$ é múltiplo de 3. Logo, a condição é universal.

Opção correta: (D)

5. $x+1 < x \Leftrightarrow x-x+1 < 0 \Leftrightarrow 1 < 0$. Trata-se de uma condição impossível.

Opção correta: (B)

6. Opção correta: (B)

7. Opção correta: (B)

8. $M = \{x \in \mathbb{R}: \; -1 < x - 2 \leq 3\} =]1,5]$
Cálculos auxiliares:
$-1 < x-2 \leq 3 \; \Leftrightarrow \; -1+2 < x \leq 3+2 \; \Leftrightarrow \; 1 < x \leq 5$

Portanto $\overline{M} =]-\infty, 1] \cup]5, +\infty[$

Opção correta: (B)

Grupo II

1. 1.1 $\exists n \in \mathbb{N}: \; n$ é par $\wedge \, n$ é primo.

1.2 $\forall x \in \mathbb{R}, \; x^2 > -2.$

1.3 $\exists x \in \mathbb{Z}: \; -1 < x < 1.$

1.4 $\exists x \in \mathbb{R}: \; x \in [1,3[\, \wedge \, x \geq 3.$

1.5 $\forall n \in \mathbb{N}, \; n \in \mathbb{R}.$

1.6 $\exists n \in \mathbb{N}: n > 1 \; \wedge \; n < 3.$

2. 2.1 $\sim (\exists x \in \mathbb{N}: \; x \geq 0) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}, \; x < 0$

2.2 $\sim (\exists x \in \mathbb{Q}: \; |x| < 0) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Q}, \; |x| \geq 0$

2.3 $\sim (\forall x \in \mathbb{Z}, \; x \in [-3,3[) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z}, \; x \notin]-3,3]$

3. 3.1 Falsa

3.2 Verdadeira

3.3 Verdadeira

4. 4.1 $B = \{0,2,3,5\}$

4.2 $A \setminus B = \{1,7\}$

4.3 $B \setminus A = \{0,3\}$

5. 5.1 $x^2 - 1 = 0 \; \wedge \; x - 1 > 0 \; \Leftrightarrow \; (x = -1 \; \vee \; x = 1) \; \wedge \; x > 1$
Condição Impossível.

5.2 $x^2 - 1 = 0 \; \wedge \; x - 1 < 0 \; \Leftrightarrow \; (x = -1 \; \vee \; x = 1) \; \wedge \; x < 1$
Condição Possível não Universal.

5.3 $x^2 - 1 = 0 \; \vee \; x - 1 > 0 \; \vee \; x - 1 < 0 \; \Leftrightarrow \; (x = -1 \; \vee \; x = 1) \; \vee \; x > 1 \; \vee \; x < 1$
Condição Universal.

5.4 $x - 1 > 0 \; \vee \; x - 1 < 0 \; \Leftrightarrow \; x > 1 \; \vee \; x < 1$
Condição Possível não Universal.

6. 6.1 Falsa

6.2 Falsa

6.3 Verdadeira

6.4 Falsa

7. 7.1 $A = B \; \Leftrightarrow \; A \subset B$
Se $A = B \; \Rightarrow \; A \subset B$ é verdadeira
Se $A \subset B \; \Rightarrow \; A = B$ é falsa
Por exemplo, $A = \{0,1\}$ e $B = \{0,1,2\}$

7.2 Por exemplo, $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,4,6\}$

7.4 $A \setminus B = A$
Por exemplo $A = \{$números pares$\}$ e $B = \{$números ímpares$\}$

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro

Escola Secundária de Jaime Cortesão

Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

Ficha de trabalho nº3 Ano Letivo 2017/2018

Grupo I

Este grupo é constituído por questões de escolha múltipla. Para cada uma dessas questões escolha a opção correta e apresente todos os cálculos que efetuar.

1. Considere a condição $a(x) : \sqrt{10-x} = \sqrt{10} - \sqrt{x}$
   Qual das seguintes proposições é falsa?

   (A) $a(0) \Leftrightarrow a(10)$ (B) $a(5) \Rightarrow a(0)$ (C) $a(5) \wedge a(10)$ (D) $a(5) \vee a(0)$

2. Considere as seguintes proposições:

$$p : \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \sqrt{10} \qquad q : \sqrt[3]{6} \times \sqrt{3} = \sqrt[4]{4 \times 3^5} \qquad r : \frac{\sqrt[6]{\sqrt{\frac{1}{8}}}}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{8}$$

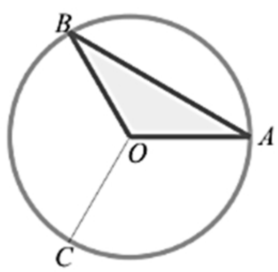
   Qual das seguintes proposições é verdadeira

   (A) $r \Rightarrow p \wedge q$ (B) $p \wedge r \Leftrightarrow q$ (C) $p \vee \sim r \Leftrightarrow q$ (D) $p \vee \sim q \Rightarrow \sim r$

3. Sejam $A = \sqrt[9]{\frac{1}{8}} - 8$, $B = \sqrt[3]{4}$ e $C = 4^{\frac{1}{6}}$. Então $\frac{A}{B} - C$ é igual a:

   (A) $\frac{1}{2} - 5\sqrt[3]{2}$ (B) $\frac{1}{2} - 3\sqrt[3]{2}$ (C) $2 - 5\sqrt[3]{2}$ (D) $2 - 3\sqrt[3]{2}$

4. Na figura está representada a circunferência centrada em O, de perímetro 2m, dividida em três arcos de igual amplitude. Na mesma figura, a sombreado, está representado o triângulo $[OAB]$.
   Qual é, em m^2, o valor da área do triângulo $[OAB]$?



   (A) $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{4\pi^2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2\pi^2}$

5. Sendo a, b e c números naturais, $\frac{1}{a\sqrt{b}+a\sqrt{c}}$ é igual a:

(A) $\frac{1}{a\sqrt{b}-a\sqrt{c}}$ (B) $\frac{1}{a^2(b-c)}$ (C) $\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{a(b-c)}$ (D) $\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{a^2(b-c)}$

6. O valor de $\sqrt{8} \times \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{6}\right)$ é:

(A) $-6\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{6} - 8\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{6} - 4\sqrt{3}$

7. Sejam a e b números reais, tais que $a < b$. Se $c > 0$, qual das seguintes expressões é necessariamente verdadeira?

(A) $a + c > b + c$ (B) $a \times c < b \times c$ (C) $a + c = b + c$ (D) $a \times c > b \times c$

8. Considere um hexágono regular com $\sqrt{5}$ unidades de lado. A medida da área do hexágono é, em unidades quadradas:

(A) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ (B) $15\sqrt{3}$ (C) $\frac{3\sqrt{20}}{2}$ (D) $6\sqrt{5}$

9. Considere as seguintes igualdades, onde a é um número real positivo.

$$I. \frac{a^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{10}}} \qquad \text{e} \qquad II. \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{8}{3}}$$

Quais são os valores lógicos destas proposições?

(A) $I.$ é falsa e $II.$ é verdadeira. (B) $I.$ e $II.$ são ambas falsas.

(C) $I.$ e $II.$ são ambas verdadeiras. (D) $I.$ é verdadeira e $II.$ é falsa.

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Classifique as seguintes afirmações em verdadeira (V) ou falsas (F). Justifique a sua resposta no caso de serem falsas.
   Considere $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então:
   a) Se $a < b$, então $a^n < b^n$;
   b) a equação $b^n = a$ tem uma solução apenas quando n é ímpar;
   c) a equação $b^n = a$ tem, no máximo, duas soluções.

2. Verifique que $3 + \sqrt{2}$ e $3 - \sqrt{2}$ são soluções da equação $x^2 - 6x + 7 = 0$.

3. Racionalize os denominadores das frações seguintes:

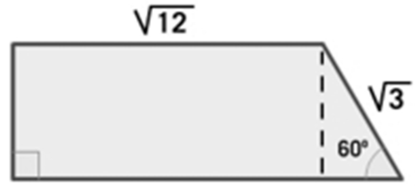
(a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{2}{5\sqrt[6]{5}}$ (c) $\frac{4}{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}}$

4. Resolva a equação $\sqrt{3}x + 5 = 2x$.

5. Observe o trapézio retângulo representado na figura.
   Determina o valor exato e simplificado:

   5.1 do perímetro do trapézio;

   5.2 da área do trapézio.



6. Mostre que se verifica a igualdade $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$.

7. Considere um triângulo equilátero de lado a. Prove que a área desse triângulo é igual a $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Soluções

Grupo I

1. C **2.** D **3.** A **4.** B **5.** B **6.** A **7.** B **8.** A **9.** D

Grupo II

1.a) F **1.b)** F **1.c)** V **3.a)** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **3.b)** $\frac{2\sqrt[6]{81}}{15}$ **3.c)** $\frac{4\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{5}$ **4.** $x = 5\sqrt{3}+10$

5.1 $\frac{11\sqrt{3}+3}{2}$ unidades de comprimento **5.2** $\frac{15\sqrt{3}}{8}$ unidades de área

Proposta de resolução da ficha de trabalho nº3

Grupo I

1. (A) $a(0): \sqrt{10} = \sqrt{10}$ Proposição verdadeira
$a(10): 0 = 0$ Proposição verdadeira

Proposição verdadeira.

(B) $a(5): \sqrt{5} \neq \sqrt{10} - \sqrt{5}$ Proposição falsa.
$a(0): \sqrt{10} = \sqrt{10}$ Proposição verdadeira

Proposição verdadeira.

(C) $a(5): \sqrt{5} \neq \sqrt{10} - \sqrt{5}$ Proposição falsa.
$a(10): 0 = 0$ Proposição verdadeira

Proposição falsa.

(D) $a(5): \sqrt{5} \neq \sqrt{10} - \sqrt{5}$ Proposição falsa.
$a(0): \sqrt{10} = \sqrt{10}$ Proposição verdadeira

Proposição verdadeira.

Opção correta: (C)

2.

$$\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)} = \frac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{4} = \sqrt{7}+\sqrt{3}$$

p é uma proposição falsa.

$$\sqrt[3]{6} \times \sqrt{3} = \sqrt[6]{6^2} \times \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{6^2 \times 3^3} = \sqrt[6]{(3 \times 2)^2 \times 3^3} = \sqrt[6]{2^2 \times 3^2 \times 3^3} = \sqrt[6]{4 \times 3^5}$$

q é uma proposição verdadeira.

$$\frac{\sqrt[6]{\sqrt{\frac{1}{8}}}}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt[12]{\frac{1}{2^3}}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[12]{\frac{1}{2^3}}}{4\sqrt[12]{2^{30}}} = \frac{1}{4}\sqrt[12]{\frac{\frac{1}{2^3}}{2^{30}}} = \frac{1}{4}\sqrt[12]{2^{27}} = \frac{1}{4}\sqrt[4]{2^9} = \frac{1}{4} \times 4\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2}$$

r é uma proposição falsa.

Opção correta: (C)

3.

$$
\begin{aligned}
\frac{A}{B} - C &= \frac{\sqrt[9]{\frac{1}{8}} - 8}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[6]{4} = \frac{\sqrt[9]{\frac{1}{8}}}{\sqrt[3]{4}} - \frac{8}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[6]{4} = \sqrt[9]{\frac{\frac{1}{8}}{4^3}} - \frac{8\sqrt[3]{4^2}}{4} - \sqrt[6]{4} = \sqrt[9]{\frac{1}{8\times 4^3}} - \frac{8\sqrt[3]{4^2}}{4} - \sqrt[6]{4} \\
&= \frac{1}{2} - 2\sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3\times 2]{2^2} = \frac{1}{2} - 2\sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3]{2} = \frac{1}{2} - 2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2} = \frac{1}{2} - 2\sqrt[3]{2^3\times 2} - \sqrt[3]{2} \\
&= \frac{1}{2} - 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = \frac{1}{2} - 5\sqrt[3]{2}
\end{aligned}
$$

Opção correta: (A)

4. Sejam A_c a área da circunferência, A_t a área do triângulo e P_c o perímetro da circunferência.

$P_c = 2\pi r \Leftrightarrow 2 = 2\pi r \Leftrightarrow \pi r = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{\pi}$

Para determinar a altura do triângulo recorremos ao Teorema de Pitágoras

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\pi^2} = h^2 + \frac{1}{4\pi^2} \Leftrightarrow h^2 = -\frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \Leftrightarrow h^2 = \frac{-1+4}{4\pi^2} \\
&\Leftrightarrow \quad h^2 = \frac{3}{4\pi^2} \underbrace{\Leftrightarrow}_{h>0} h = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}
\end{aligned}
$$

Portanto a área do triângulo será:

$$
A_t = \frac{b\times h}{2} = \frac{\frac{1}{\pi}\times\frac{\sqrt{3}}{2\pi}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2\pi^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi^2}
$$

Opção correta: (B)

5.

$$
\frac{1}{a\sqrt{b}+a\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{b}-a\sqrt{c}}{\left(a\sqrt{b}+a\sqrt{c}\right)\left(a\sqrt{b}-a\sqrt{c}\right)} = \frac{a\sqrt{b}-a\sqrt{c}}{a^b - a^2c} = \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{a^2\left(b-c\right)} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{a(b-c)}
$$

Opção correta: (B)

6.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{8}\times\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{6}\right) &= \sqrt{\frac{8\times 3}{2}} - 2\sqrt{6\times 8} = \sqrt{12} - 2\sqrt{48} = \sqrt{2^2\times 3} - 2\sqrt{2^2\times 2^2\times 3} \\
&= 2\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = -6\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Opção correta: (A)

7. Opção correta: (B)

8. $l = \sqrt{5}$ unidades
A área de um hexágono é dada pela fórmula $A = \frac{P\times a_p}{2}$ em que a_p representa a apótema.

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras determina-se a_p:

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = a_p^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 5 = a_p^2 + \frac{5}{4} \Leftrightarrow a_p^2 = -\frac{5}{4} + 5 \Leftrightarrow a_p^2 = \frac{-5+20}{4} \Leftrightarrow a_p^2 = \frac{15}{4}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{a_p>0} \quad a_p = \sqrt{\frac{15}{4}} \Leftrightarrow a_p = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Portanto a área do triângulo é:

$$A = \frac{6\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{3\sqrt{5^3 \times 3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

Opção correta: (A)

9. A proposição $I.$ é verdadeira e a proposição $II.$ é falsa.

Cálculos auxiliares:

$$\frac{a^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[5]{a} \times \sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \frac{\sqrt[5]{a} \times \sqrt{a}}{a} = \frac{a^{\frac{1}{5}} \times a^{\frac{1}{2}}}{a} = \frac{a^{\frac{7}{10}}}{a} = a^{\frac{7}{10}} \times \frac{1}{a} = a^{\frac{7}{10}} \times a^{-1} = a^{\frac{7-10}{10}} = a^{-\frac{3}{10}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{10}}}$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{8}}$$

Opção correta: (D)

Grupo II

1. a) Falsa. Ao considerar $a = -3$, $b = -2$ e $n = 2$, tem-se
$-3 < -2 \Rightarrow (-3)^2 < (-2)^2 \Leftrightarrow -3 < -2 \Rightarrow 9 < 4$
sendo esta uma proposição falsa. Portanto a (a) é falsa.

b) Verdadeira

c) Verdadeira

2. $\left(3+\sqrt{2}\right)^2 - 6\left(3+\sqrt{2}\right) + 7 = 9 + 2 + 6\sqrt{2} - 18 - 6\sqrt{2} + 7 = 0$
$\left(3-\sqrt{2}\right)^2 - 6\left(3-\sqrt{2}\right) + 7 = 9 + 2 - 6\sqrt{2} - 18 + 6\sqrt{2} + 7 = 0$ c.q.v.

3. a) $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

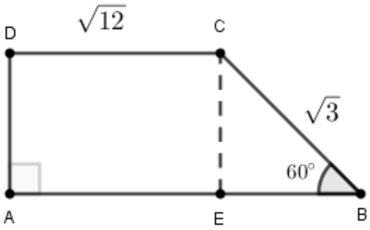
b) $\frac{2}{5\sqrt[6]{9}} = \frac{2}{5\sqrt[6]{3^2}} = \frac{2\sqrt{3^4}}{5\times 3} = \frac{2\sqrt[6]{81}}{15}$

c) $\frac{4}{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}} = \frac{4\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{7}-3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{2}\right)} = \frac{4\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{2}\right)}{28-18} = \frac{4\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{2}\right)}{10} = \frac{2\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{2}\right)}{5} = \frac{4\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{5}$

4.

$$\sqrt{3}x + 5 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}x - 2x = 5 \Leftrightarrow x\left(\sqrt{3}-2\right) = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{\sqrt{3}-2} \Leftrightarrow x = \frac{5\left(-\sqrt{3}-2\right)}{3-4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5\left(-\sqrt{3}-2\right)}{-1} \Leftrightarrow x = -5\left(-\sqrt{3}-2\right) \Leftrightarrow x = 5\sqrt{3} + 10$$

5. a) 

- Determinar o lado $\overline{EB}$:

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{EB}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{EB} = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{EB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Determinar o lado $\overline{EC}$:

$$\sin 60^\circ = \frac{\overline{EC}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{EC} = \sqrt{3} \times \sin 60^\circ \Leftrightarrow \overline{EC} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{EC} = \frac{3}{2}$$

Portanto o perímetro será:

$$\begin{aligned} P &= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \overline{AE} + \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} \\ &= \sqrt{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + \sqrt{12} + \frac{3}{2} = 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \frac{3}{2} \\ &= 5\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{11\sqrt{3} + 3}{2} \end{aligned}$$

b) A área do trapézio é dada pela fórmula $A = \frac{B+b}{2} \times h$. Efetuando os cálculos obtém-se

$$\begin{aligned} A &= \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \times \overline{CE} = \frac{\left(\sqrt{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{12}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{4\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{2}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

6. $\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 4\sqrt{3} = 4 + 3 - 4\sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}$

$\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 7 - 4\sqrt{3} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ c.q.m.

7. A área de um triângulo é dada pela fórmula $A = \frac{b \times h}{2}$. Usando o Teorema de Pitágoras determina-se a sua altura.

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \underbrace{\Leftrightarrow}_{h>0} h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Logo a área é:

$$A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a \times a}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \qquad c.q.m$$

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Escola Secundária de Jaime Cortesão
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

Ficha de trabalho nº4 Ano Letivo 2017/2018

1. Escreva na forma de um único radical

   1.1 $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{2}$

   1.2 $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3}$

   1.3 $\sqrt[5]{10} : \sqrt[5]{2}$

   1.4 $\frac{\sqrt[3]{5} : \sqrt[6]{2}}{\sqrt[4]{64}}$

   1.5 $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$

   1.6 $\sqrt[5]{\sqrt{5}}$

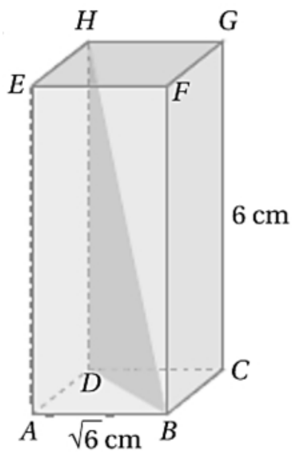
   1.7 $\sqrt[6]{2\sqrt{3}}$

   1.8 $10^{\frac{1}{2}}$

   1.9 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

   1.10 $\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{5}}$

2. Na figura está representado o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$ e sabe-se que $\overline{AB} = \sqrt{6}$ cm e $\overline{GC} = 6$ cm. Determine o perímetro do triângulo $[HDB]$.



3. Mostre que a seguinte proposição é falsa

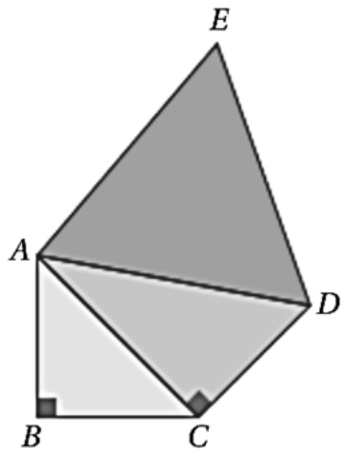
$$\left(\sqrt{3} : \sqrt[3]{6}\right) \times \sqrt{3} = \sqrt{3} : \left(\sqrt[3]{6} \times \sqrt{3}\right)$$

4. Verifique que

   4.1 $\sqrt{6-4\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}$

   4.2 $\sqrt{28+6\sqrt{3}} = 1+3\sqrt{3}$

5. Na figura está representado o pentágono $[ABCDE]$ decomposto em três triângulos: os triângulos retângulos $[ABC]$ e $[ACD]$ e o triângulo equilátero $[ADE]$.
   Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1$ cm.



   Determine a área do triângulo $[ADE]$ na forma ab^q, sendo a, b e q números racionais.

6. Escreve na forma $a+b\sqrt{c}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ e $c \in \mathbb{N}$.

   6.1 $\sqrt{17+6\sqrt{8}}$

   6.2 $\sqrt{30-10\sqrt{5}}$

7. Mostre que $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}} = 6$

8. Simplifique cada uma das expressões

   8.1 $5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{2}}$

   8.2 $10^{\frac{3}{5}} : 10^{-\frac{1}{2}}$

   8.3 $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{5}{6}} : 2^{\frac{5}{6}}}$

   8.4 $\frac{\sqrt{a^3} : \sqrt[3]{a^2}}{a^{\frac{2}{3}} : \sqrt{a}}$, $a > 0$

8.5 $\frac{23\times3^{\frac{1}{4}}+2\times3^{\frac{1}{4}}}{5\sqrt{3}}$

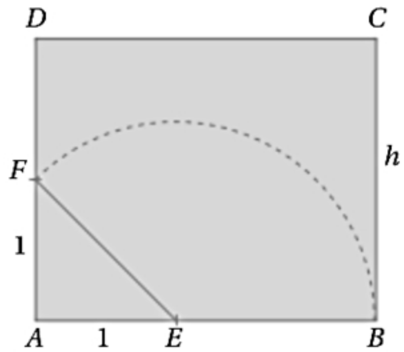
8.6 $\frac{16^{-\frac{3}{4}}\times8^{\frac{5}{3}}}{2^{-\frac{1}{2}}}:\sqrt[3]{2}$

8.7 $\frac{\sqrt{18}-\sqrt{50}+\sqrt{12}-\sqrt{75}}{2^{\frac{3}{2}}+3^{\frac{3}{2}}}$

8.8 $\frac{\left(3\sqrt{2}-2\right)^2}{\left(2-\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)}$

8.9 $\frac{\sqrt[3]{5\sqrt{5}}\times\left(\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{125-2\sqrt{45}}}$

9. Tendo em conta a figura, sabe-se que:



- $[ABCD]$ é um retângulo de base $[AB]$ e altura h;
- $\overline{AE}=\overline{AF}=1$cm;
- E e F são pontos de $[AB]$ e $[AD]$, respetivamente;
- $\overline{EB}=\overline{EF}$;
- a área do retângulo é 4 cm^2.

Determine o valor de h.

Soluções

1.1 $\sqrt[4]{10}$ **1.2** $\sqrt[6]{72}$ **1.3** $\sqrt[5]{5}$ **1.4** $\sqrt[3]{\frac{5}{16}}$ **1.5** $\sqrt[12]{3}$ **1.6** $\sqrt[10]{5}$ **1.7** $\sqrt[12]{12}$ **1.8** $\sqrt{10}$
1.9 $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ **1.10** $\sqrt[5]{\frac{1}{10}}$ **2** $(6+6\sqrt{3})cm$ **5** $\left(\frac{3}{4}\times3^{\frac{1}{2}}\right)cm^2$ **6.1** $3+2\sqrt{2}$ **6.2** $5-\sqrt{5}$
8.1 $5^{\frac{7}{6}}$ **8.2** $10^{\frac{11}{10}}$ **8.3** $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{6}}$ **8.4** $\sqrt[3]{a^2}, a>0$ **8.5** $\frac{5}{3}\sqrt[4]{27}$ **8.6** $4\sqrt[6]{2}$ **8.7** -1 **8.8** $12\sqrt{2}-22$
8.9 $-2\sqrt{2}$ **9** $(4\sqrt{2}-4)cm$

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Escola Secundária de Jaime Cortesão
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

Ficha de trabalho nº 5 Ano Letivo 2017/2018

Grupo I

Este grupo é constituído por questões de escolha múltipla. Para cada uma dessas questões escolha a opção correta e apresente todos os cálculos que efetuar.

1. Considere os polinómios $A(x) = 2x^2 - 4x - 1$, $Q(x) = x - 3$ e $R(x) = x + 2$.
   O polinómio $B(x)$ é tal que se verifica $A(x) = Q(x) \times B(x) + R(x)$. Qual dos seguintes polinómios é $B(x)$?

   (A) $2x^2 - 3x + 2$
   (B) $2x^2 + 3x - 3$
   (C) $2x - 1$
   (D) $2x + 1$

2. O polinómio $2x^3 + 7x^2 - 5x + k$, com $k \in \mathbb{Z}$, é divisível por $x - 1$. Qual é o valor de k?

   (A) -4
   (B) 2
   (C) 1
   (D) -2

3. Sejam $A(x) = 2x^3 - x$ e $B(x) = x + 1$ dois polinómios. O resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é:

   (A) 1
   (B) -3
   (C) -1
   (D) 3

4. Considere o polinómio $P(x) = ax^2 - 2a^2x$, com $a \in \mathbb{R}$. O polinómio $P(x)$ é divisível por $x - 1$, se:

   (A) $a = 0 \vee a = 1$
   (B) $a = 0 \vee a = -\frac{1}{2}$
   (C) $a = -2 \vee a = 0$
   (D) $a = 0 \vee a = \frac{1}{2}$

5. Seja $P(x) = x^{n+1} - x^{n+2} - 2$, com $n \in \mathbb{N}$. O resto da divisão do polinómio $P(x)$ por $x + 1$ é:

   (A) 1 se n é ímpar.
   (B) 0 se n é par.
   (C) -4 se n é par.
   (D) -4 se n é ímpar.

6. Seja $P(x) = x^3 - a^3$, com $a \in \mathbb{R}$. O quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão de $P(x)$ por $x - a$ são, respetivamente:

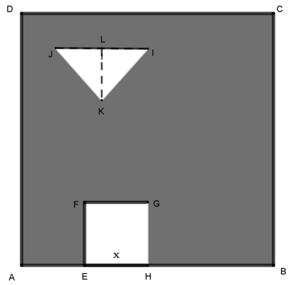
(A) $Q(x) = x^2 + ax + a^2$ e $R(x) = -2a^3$

(B) $Q(x) = x^2 + ax + a^2$ e $R(x) = 0$

(C) $Q(x) = x^2 + a + a^2$ e $R(x) = 2a^3$

(D) $Q(x) = x^2 + ax + a^2$ e $R(x) = 2a^3$

7. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$ e, no seu interior, um outro quadrado $[EFGH]$ e um triângulo $[IJK]$. Sabe-se que:
   - $[LK] \perp [IJ]$
   - $\overline{EF} = x$
   - $\overline{BC} = 5x + 1$
   - $\overline{LK} = 2x$
   - $\overline{IJ} = 4x$



A área colorida de verde é dada pela expressão:

(A) $22x^2 + 10x + 1$

(B) $20x^2 + 10x + 1$

(C) $24x^2 + 6x + 1$

(D) $30x^2 + 10x + 1$

8. Sabendo que o polinómio $P(x) = x^4 + x^2 - 2$ é divisivel por $x - 1$ e por $x + 1$, então, $P(x)$ pode escrever-se na forma:

(A) $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$

(B) $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 2)$

(C) $P(x) = (x^2 - 1)(x + 2)$

(D) $P(x) = (x - 1)^2(x^2 + 2)$

9. Sabendo que o polinómio $P(x) = -2x^4 - 11x^3 - 18x^2 - 4x + 8$ admite -2 como raiz tripla, então, $P(x)$ pode escrever-se na forma:

(A) $P(x) = (x^3 - 2)(-2x + 1)$

(B) $P(x) = (x - 2)^3(-2x + 1)$

(C) $P(x) = (x + 2)^3(-2x + 1)$

(D) $P(x) = (x + 2)^3(2x - 1)$

10. Sendo $A(x) = (x-1)^3$ e $B(x) = x^2 - x$, então o conjunto-solução da inequação $A(x) \times B(x) \leq 0$ é:

(A) $]-\infty; 0[\cup \{1\}$

(B) $]-\infty; 1]$

(C) $]-\infty; 0] \cup \{1\}$

(D) $]-\infty; 0]$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Determine as soluções da equação $2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$.

2. Utilizando a regra de Ruffini, determine o quociente e o resto da divisão de $P(x) = x^4 - x^3 + x - 1$ por cada um dos seguintes polinómios:

   2.1 $A(x) = x + 2$

   2.2 $A(x) = x - 1$

   2.3 $A(x) = 2x - 2$

   2.4 $A(x) = 3x + 6$

3. Considere o polinómio $A(x) = -x^3 + 4k^2x^2 + x + k$, com $k \in \mathbb{R}$.

   3.1 Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que o polinómio $A(x)$ seja divisível por $x - 1$.

   3.2 Considere $k = 0$ e determine as raízes de $A(x)$.

4. Determine o polinómio $P(x)$ do terceiro grau que admite os zeros simples -2, 2 e 3 e que dividindo pelo binómio $x - 1$ tem resto 2.

5. Considere os polinómios $A(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$, $B(x) = 2x + 2$ e $C(x) = 2\lambda^2x^4 - \lambda x^3 + x^2 - 1$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

   5.1 Determine o quociente e o resto da divisão do polinómio $A(x)$ pelo binómio $B(x)$.

   5.2 Determine o valor de λ de modo que o polinómio $C(x)$ seja divisível pelo binómio $B(x)$.

   5.3 Sabendo que o polinómio $A(x)$ é divisível por $x + 1$ e que admite 1 como raiz, resolva a inequação $A(x) \times (x + 1) \leq A(1)$.

6. Considere o polinómio $A(x) = x^4 - 3x^2 + 2$.

   6.1 Sabendo que o polinómio $A(x)$ é divisível por $x - 1$ e por $x + 1$, escreva $A(x)$ na forma $A(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

   6.2 Resolva a inequação $A(x) \times (-x)^3 \geq 0$

7. Considere os seguintes polinómios:

$$P(x) = 3x - \frac{1}{2}, \quad Q(x) = x^2 + 3x - 2 \quad \text{e} \quad R(x) = -3x^2 - \frac{3}{5}$$

   Efetue as seguintes operações com os polinómios dados e apresente o resultado na forma reduzida e ordenada:

   7.1 $P(x) + Q(x)$

   7.2 $P(x) - Q(x)$

   7.3 $P(x) - Q(x) - R(x)$

   7.4 $P(x) \times Q(x)$

   7.5 $Q(x) \times R(x) - P(x)$

   7.6 $Q(x) \times [R(x) - P(x)]$

8. Considere o polinómio $A(x) = 2x^4 + 9x^3 + 11x^2 - 4$.

    8.1 Verifique que -2 é uma raiz de $A(x)$ e determine a sua multiplicidade.

    8.2 Determine as outras raízes de $A(x)$ e fatorize este polinómio.

    8.3 Resolva a inequação $A(x) > 0$.

9. Resolva as seguintes inequações e apresente o resultado na forma de intervalo ou reunião de intervalos.

    9.1 $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 < 0$

    9.2 $3x^3 - 6x^2 - 15x \geq -18$

    9.3 $-x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 6 > 0$

    9.4 $x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4 \leq 0$

Soluções

Grupo I

1. D **2.** A **3.** C **4.** D **5.** C **6.** B **7.** B **8.** B **9.** C **10.** C

Grupo II

1. C.S=$\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ **2.1** $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 11$ e $R(x) = 21$

2.2 $Q(x) = x^3 + 1$ e $R(x) = 0$ **2.3** $Q(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}$ e $R(x) = 0$

2.4 $Q(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - \frac{11}{3}$ e $R(x) = 21$ **3.1** $k = 0 \vee k = -\frac{1}{4}$ **3.2** $-1; 0$ e 1

4. $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{4}{3}x + 4$ **5.1** $Q(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ e $R(x) = 0$ **5.2** $\lambda = 0 \vee \lambda = -\frac{1}{2}$

5.3 C.S=$\{-1\} \cup \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ **6.1** $A(x) = (x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

6.2 C.S=$\left]-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup [-1; 0] \cup \left[1; \sqrt{2}\right]$ **7.1** $x^2 + 6x - \frac{5}{2}$ **7.2** $-x^2 + \frac{3}{2}$ **7.3** $2x^2 + \frac{21}{10}$

7.4 $3x^3 + \frac{17}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + 1$ **7.5** $-3x^4 - 9x^3 + \frac{27}{5}x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{17}{10}$ **7.6** $-3x^4 - 12x^3 - \frac{31}{10}x^2 + \frac{57}{10}x + \frac{1}{5}$

8.1 A multiplicidade da raiz -2 de $A(x)$ é dois. **8.2** $A(x) = (x+2)^2(x+1)(x-\frac{1}{2})$

8.3 C.S=$]-\infty; -2[\cup]-2; -1[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ **9.1** $]-\infty, 1[\cup]1, 2[$ **9.2** $[-2, 1] \cup [3, +\infty[$ **9.3** $]-2, 3[$

9.4 $\left[-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right]$

Ficha de trabalho nº6 Ano Letivo 2017/2018

Grupo I

Este grupo é constituído por questões de escolha múltipla. Para cada uma dessas questões escolha a opção correta e apresente todos os cálculos que efetuar.

1. Considere as condições, em $\mathbb{R}$:

$$x^2 + 1 > 0 \qquad \text{e} \qquad |x| + 1 = 0$$

Pode-se afirmar que:

(A) A primeira condição é universal e a segunda condição é impossível.
(B) A primeira condição é não universal e a segunda condição é impossível.
(C) A primeira condição é impossível e a segunda condição é impossível.
(D) A primeira condição é impossível e a segunda condição é universal.

2. Considere a condição

$$x > 2 \quad \wedge \quad \sim (1 \leq x < 4)$$

Pode-se afirmar que a condição é equivalente a

(A) $x > 4$ (B) $x \geq 4$ (C) $2 < x < 4$ (D) $2 < x \leq 4$

3. Considere os pontos $A(-3, 5)$ e $B(1, -2)$.

a) Uma equação vetorial da reta AB é:

(A) $(x, y) = (2, 3) + k(4, -7), k \in \mathbb{R}$
(B) $(x, y) = (-3, 5) + k(-4, -7), k \in \mathbb{R}$
(C) $(x, y) = (-3, 5) + k(4, -7), k \in \mathbb{R}$
(D) $(x, y) = (2, 3) + k(7, -4), k \in \mathbb{R}$

b) Um vetor diretor da reta AB é:

(A) $(-4, 7)$ (B) $(4, -7)$ (C) $(7, -4)$ (D) $(-7, 4)$

4. Considere o conjunto $U = [3, +\infty[$ e as condições p, q e r em U.

$$p(x) : x^2 > 9; \qquad q(x) : \frac{2x-1}{2} \geq 2; \qquad r(x) : |x| < 3$$

Identifique a opção correta:

(A) A condição $p(x)$ é universal e a condição $r(x)$ é impossível.
(B) A condição $p(x)$ é possível e a condição $q(x)$ é universal.
(C) A condição $q(x) \wedge r(x)$ é possível.
(D) A condição $p(x) \vee q(x)$ é possível mas não universal.

5. O valor numérico da seguinte expressão é:

$$\frac{\left(\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{\sqrt{9}}\right)^4}{\sqrt[3]{3}}$$

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) 3 (D) $\sqrt{3}$

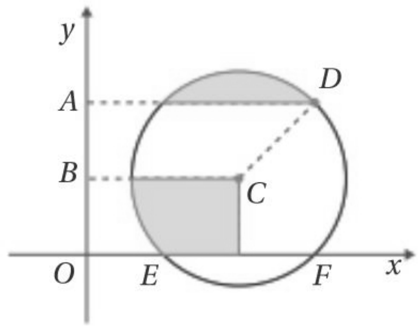
6. De um polinómio $P(x)$ sabe-se que:

$$P(a-1)=a^3-3a+5, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Qual é o valor de $P(1)$?

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7

7. Na figura está representada, num referencial ortonormado xOy, a circunferência de centro $C(2,1)$ e que contém o ponto $D(3,2)$.



- A e B são pontos de eixo Oy;
- $[ABCD]$ é um trapézio retângulo.

7.1 Atendendo à unidade do referencial, a área do trapézio $[ABCD]$ é:

(A) $\frac{2+\sqrt{10}}{2}$ (B) $1+\sqrt{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) 3

7.2 A condição que define a parte colorida da figura é:

(A) $x^2+y^2-4x-2y+3 \leq 0 \quad \wedge \quad (0 \leq y \leq 1 \vee y \geq 2)$

(B) $(x-2)^2+(y-1)^2 \leq 2 \quad \wedge \quad (0 \leq y \leq 1 \wedge y \leq 2)$

(C) $(x-2)^2+(y-1)^2 \leq \sqrt{2} \quad \vee \quad [(0 \leq y \leq 1 \wedge x \leq 2) \vee y \geq 2]$

(D) $(x-2)^2+(y-1)^2 \leq 2 \quad \wedge \quad y \geq 0 \quad \wedge \quad [(x \leq 2 \wedge y \leq 1) \vee y \geq 2]$

8. Considere uma elipse definida pela equação $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$. As coordenadas dos focos F_1 e F_2 são, respetivamente:

(A) $F_1(0,4)$ e $F_2(0,-4)$ (B) $F_1(3,0)$ e $F_2(-3,0)$

(C) $F_1(0,-9)$ e $F_2(0,9)$ (D) $F_1(0,-3)$ e $F_2(0,3)$

9. Num plano munido de um referencial ortonormado $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, considere os pontos $A(7,2)$, $B(2,-3)$, $C(-5,2)$ e $D(5,y)$. Qual é o número real y sabendo que as retas AB e CD são paralelas?

(A) 10 (B) -8 (C) 12 (D) 2

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Considere um plano munido de um referencial ortonormado e os vetores $\overrightarrow{e_1}(1,0)$ e $\overrightarrow{e_2}(0,1)$. Sejam $\overrightarrow{u}(-3,4)$ e $\overrightarrow{v} = 12\overrightarrow{e_1}$ dois vetores desse plano.

   1.1 Indique as coordenadas:

   (a) do ponto B, sabendo que $\overrightarrow{u}$ é o vetor posição de B.

   (b) do ponto C, sendo $C = A + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ com $A(-7,-3)$.

   1.2 Determine:

   (a) $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|$

   (b) as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{w}$, colinear com $\overrightarrow{u}$ e de norma 5.

2. Fixada uma unidade de comprimento num plano munido de um referencial ortonormado de origem $O(0,0)$, considere os pontos $A(2,-3)$, $B(-1,1)$ e $C(4,0)$ desse plano.

   (a) Determine $\left\|-4\overrightarrow{AB}\right\|$. Justifique a sua resposta.

   (b) Escreva uma equação vetorial da reta que contém o ponto B e tem a direção da reta AC. Justifique a sua resposta.

   (c) Verifique, justificando, se os vetores $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{u}(2\sqrt{3}, -4\sqrt{27})$ são colineares.

3. Considere os conjuntos:

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} : \frac{7}{5} \geq 1 - \frac{x+3}{5} > -2\right\} \qquad B = \left\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 16\right\} \qquad C = \{x \in \mathbb{Z} : a < x \leq b\}$$

   3.1 Defina em extensão o conjunto $A \setminus B$.

   3.2 Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das proposições

   (a) $\exists x \in A : \frac{1}{x} \geq 1$ (b) $\forall x \in B, |x| = \sqrt{x^2}$

   3.3 Admita que a e b são números inteiros. Determine os valores de a e b de modo que obedeçam às seguintes condições:

   - o número de elementos do conjunto $A \cap C$ seja 11;
   - o número de elementos do conjunto $A \cup C$ seja 21.

4. Num plano munido de um referencial ortonormado considere as equações das elipses seguintes e, para cada uma, determine as coordenadas dos vértices e a distância focal.

   4.1 $x^2 + 4y^2 = 4$ 4.2 $4x^2 + 16y^2 = 64$ 4.3 $16x^2 + y^2 = 144$

5. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $2x^4 - \sqrt{5}x^2 - 5 = 0$.

6. Mostre que $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ é um número natural.

7. Considere as funções polinomiais f e g, definidas, respetivamente, por $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ e $g(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$.

   7.1 Utilizando o algoritmo da divisão inteira de polinómios, determine o quociente e o resto da divisão de $f(x)$ por $x^2 + 2$.

   7.2 Sabendo que -1 e 1 são raízes da função f, decomponha $f(x)$ num produto de fatores do primeiro grau.

   7.3 Resolva, em $\mathbb{R}$, a condição $f(x) \leq 0$.

   7.4 Mostre que 2 é raiz da função g e determine a sua multiplicidade. Determine o maior valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(x) = (x-2)^n \times Q(x)$.

8. Considere, num referencial ortonormado xOy, os pontos $A(2, -4)$, $B(10, 0)$ e $C(3, 4)$.

   8.1 Determine a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

   8.2 Determine as coordenadas do ponto M, ponto médio de $[AB]$.

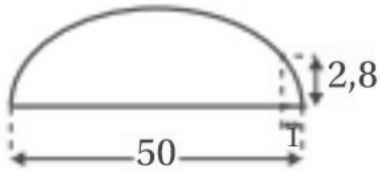
   8.3 Verifique que o ponto C pertence à mediatriz de $[AB]$.

   8.4 Justifique que o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

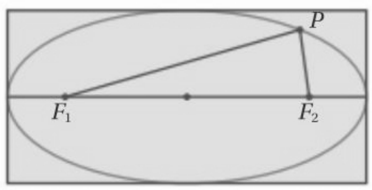
   8.5 Determine a área do triângulo $[ABC]$.

9. A secção transversal da cobertura de um pavilhão tem a forma de uma semielipse como se mostra no esquema.

   O pavilhão tem 50 m de largura e a 1 m de uma das extremidades verificou-se que a altura era de 2,8 m.
   Determine a altura máxima do pavilhão.



10. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, um retângulo com 72 cm^2 de área. No retângulo está inscrita uma elipse, como se pode observar na figura.



   Sendo P um ponto da elipse e F_1 e F_2 os focos, tem-se que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 12$ cm. Determine o perímetro do retângulo.

11. Num plano munido de um referencial ortonormado $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, considere as retas:

   $r: 3x - y = 1$ $\quad$ $h: (x, y) = (1, 1) + k(1, -1), k \in \mathbb{R}$ $\quad$ $t: \dfrac{-x-1}{2} = \dfrac{y+5}{2}$ $\quad$ $s: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 - 9\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

   e os pontos $A(0, 2)$, $B(-1, -4)$ e $C(1, 2)$.

   11.1 Verifique se alguma das proposições seguintes é verdadeira.

   a) $A \in h$ $\quad$ b) $A \in r$ $\quad$ c) $B \in s$ $\quad$ d) $C \in t$

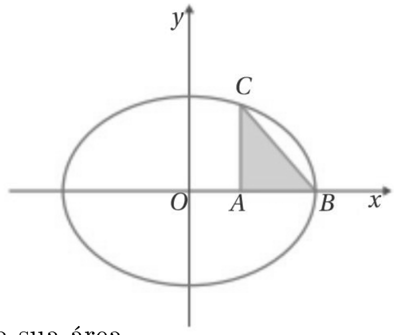
   11.2 Determine as coordenadas dos pontos de interseção da reta s com os eixos coordenados.

   11.3 Determine a abcissa do ponto da reta t que tem ordenada igual a $\frac{1}{2}$.

   11.4 Indique, caso existam, pares de retas paralelas de entre r, s, t e h.

   11.5 Escreva uma equação que represente a família de retas paralelas à reta s.

12. Na figura está representada, num referencial ortonormado Oxy, a elipse definida pela equação $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{72} = 1$.



- Os pontos A e B, do semieixo positivo Ox, são um foco e um vértice da elipse, respetivamente.
- O ponto C pertence à elipse.

Sabendo que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em A, determine a sua área.

13. Num plano munido de um referencial ortonormado, considere as retas:

$$r : \begin{cases} x - 5k = 13 \\ y - 7 = 12k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad s : 5x + 12y + 20 = 0$$

13.1 Mostre que as duas retas são concorrentes no ponto $(8, -5)$.

13.2 Escreva uma equação vetorial da reta t que passa pelo ponto $(8, -5)$ e é paralela à reta definida pela equação

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{-y+3}{2}$$

Soluções

Grupo I

1. A **2.** B **3.** C **4.** B **5.** C **6.** D **7.1** C **7.2** D **8.** D **9.** C

Grupo II

1.1 a) $B(-3, 4)$ **1.1 b)** $C(2, 1)$ **1.2 a)** $\sqrt{97}$ **1.2 b)** $\overrightarrow{w}(-3, 4)$ ou $\overrightarrow{w}(3, -4)$ **2. a)** 20

2. c) Os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ não são colineares. **3.1** $\{-5, -4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

3.2 a) Verdadeira **3.2 b)** Verdadeira **3.3** $a = 0$ e $b = 15$ **4.1** $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 1)$,

$D(0, -1)$ e distância focal$=2\sqrt{3}$ **4.2** $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 2)$, $D(0, -2)$ e distância focal$=4\sqrt{3}$

4.3 $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 12)$, $D(0, -12)$ e distância focal$=6\sqrt{15}$ **5.** $S = \left\{-\sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{5}\right\}$

6. 4 **7.1** $Q(x) = x^2 - 5$ e $R(x) = 12$ **7.2** $f(x) = (x+1)(x-1)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$

7.3 $C.S = \left[-\sqrt{2}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right]$ **7.4** O maior valor de n será 2. **8.1** $y = -2x + 10$

8.2 $M(6, -2)$ **8.5** 30 **9.** 10 m **10.** 36 cm **11.2** $(0, 5)$ e $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ **11.3** $x = -\frac{13}{2}$

11.4 r é paralela com s e h é paralela com t. **12.** 24 unidades quadradas

13.1 $t : (x, y) = (8, -5) + \lambda(3, 2), \lambda \in \mathbb{R}$

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Escola Secundária de Jaime Cortesão
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Ficha de trabalho nº7 Ano Letivo 2017/2018

1. Considere a função polinomial f, definida por $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$.

   1.1 Mostre que -1 é um zero duplo da função f.

   1.2 Resolva a condição $f(x) \geq 0$.

   1.3 Considere a função polinomial g, definida por $g(x) = f(x) + 1 + 2x + x^2 - 2k^2x^3$, com $k \in \mathbb{R}$. Determine k de modo que o polinómio que representa a função g seja divisível por $x - 1$.

2. Considere o polinómio $A(x) = k^2x^3 - kx^2 + x - 1$, com $k \in \mathbb{R}$.

   2.1 Determine o valor de k de modo que o resto da divisão de $A(x)$ pelo binómio $x - 1$ seja igual a 2.

   2.2 Considere $k = 1$.

   2.2.1 Sabendo que o polinómio $A(x)$ é divisível por $x - 1$, escreva $A(x)$ na forma de um produto de fatores.

   2.2.2 Resolva a inequação $[A(x)]^2 \times A(-2) < 0$.

3. Considere, num referencial ortonormado do plano, a reta r definida pelas seguintes equações:

$$r : \begin{cases} x = -2k \\ y = 3 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

   3.1 Indique as coordenadas de um ponto e de um vetor diretor da reta r.

   3.2 Determine, analiticamente, as coordenadas dos pontos de interseção da reta r com os eixos coordenados.

   3.3 Apresente a equação reduzida da reta r.

4. A equação $(x, y, z) = (1, 3, 2) + k(0, -1, 1)$, $k \in \mathbb{R}$, define a reta s, relativamente a um referencial ortonormado no espaço.

   4.1 Verifique se o ponto $A(1, -2, 7)$ pertence à reta s.

   4.2 É possível indicar um vetor diretor da reta s sem nenhuma das coordenadas nulas? Justifique a resposta.

5. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, a circunferência γ, de diâmetro $[RS]$, com $R\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e $S\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ e a elipse ψ, centrada na origem, sendo um dos focos $F_1\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$ e o eixo maior igual a 8.

   5.1 Determine a equação reduzida da circunferência γ.

   5.2 Escreva a inequação reduzida do círculo que tem como fronteira a circunferência γ.

   5.3 Obtenha a equação reduzida da elipse ψ.

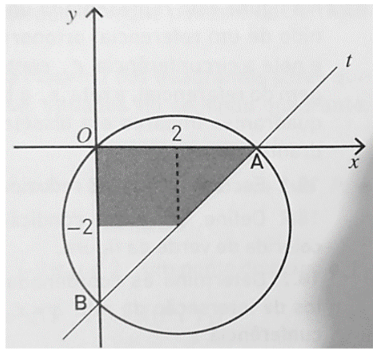
   5.4 Relativamente à elipse ψ, indicque a medida da distância focal.

5.5 Sendo $A(0, 2)$ e $B(0, -2)$ dois pontos da elipse e F_1 e F_2, os focos, mostre que $\overrightarrow{AF_1} + \overrightarrow{AF_2} = \overrightarrow{AB}$.

5.6 Considere a família de pontos definida por $P_a\left(a, \frac{\sqrt{16-a^2}}{2}\right)$ com $-2 \leq a \leq 2$. Mostre que P_a pertence à elipse ψ.

5.7 Sendo F_1 e F_2 os focos da elipse ψ, indique qual é o valor de $d(P, F_1) + d(P, F_2)$.

6. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, a circunferência definida por $\phi : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = r^2$ que contém a origem do referencial e a reta t, tal como se apresenta na figura.



6.1 Determine o raio (r) da circunferência ϕ.

6.2 Determine as coordenadas dos pontos de interseção da circunferência ϕ com os eixos coordenados.

6.3 Determine a área da região colorida.

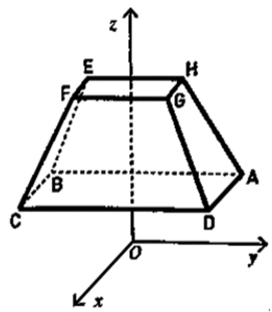
6.4 Escreva uma equação vetorial e a equação reduzida da reta t.

6.5 Defina, por uma condição, a região colorida.

6.6 Escreva a equação da reta paralela ao eixo das ordenadas e que passa no ponto $(\sqrt{3}, 1)$.

6.7 Determine as coordenadas de um vetor colinear com o vetor $\overrightarrow{AB}$ e que tenha norma 4.

7. No referencial o.n. $Oxyz$ da figura, está representado um tronco de uma pirâmide $[ABCDGHEF]$, quadrangular regular.
Sabe-se que:



- O eixo Oz interseta as bases do sólido no respetivo centro.
- A, B, C, D pertencem ao plano de equação $z = 2$;
- E, F, G, H pertencem ao plano de equação $z = 4$;
- A tem de coordenadas $(-3, 3, 2)$ e E tem de coordenadas $(-2, -2, 4)$.

7.1 Indique as coordenadas dos restantes vértices do sólido representado.

7.2 Determine $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$.

7.3 Determine $E + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD}$.

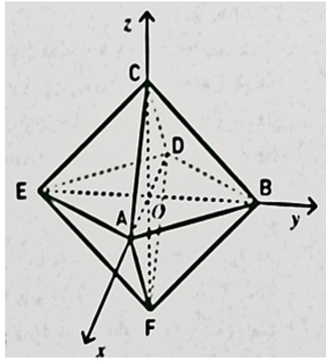
7.4 Escreva a equação do plano paralelo ao plano xOy e que contém o ponto médio da aresta $[CF]$.

7.5 Obtenha uma equação vetorial da reta BF.

7.6 Determine a inequação reduzida da esfera de diâmetro $[EG]$.

7.7 Escreva a equação reduzida do plano mediador do segmento de reta $[DG]$.

8. Na figura está representado um octaedro, num plano munido de um referencial ortonormado $Oxyz$. Sabe-se que:



- os vértices A, B e C pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos das abcissas, das ordenadas e das cotas;
- os vértices D, E e F pertencem, respetivamente, aos semieixos negativos das abcissas, das ordenadas e das cotas;
- o centro do octaedro é a origem do referencial;
- o vértice A tem de coordenadas $(a, 0, 0)$. com $a > 0$.

8.1 Determine, em função de a, a área do quadrado $[ABDE]$.

8.2 Mostre que a área da superfície do octaedro é igual a $4\sqrt{3}a^2$.

8.3 Determine $C + \overrightarrow{DF}$.

8.4 Determine $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$.

8.5 Escreva uma equação vetorial da reta AB.

8.6 Escreva a inequação reduzida da esfera de diâmetro $[BE]$.

Soluções

1.2 $C.S = \{-1\} \cup [1, +\infty[$ **1.3** $k = -\sqrt{2} \vee k = \sqrt{2}$ **2.1** $k = -1 \vee k = 2$
2.2.1 $A(x) = (x-1)(x^2+1)$ **2.2.2** $C.S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **3.1** $P(0,3)$ e $\overrightarrow{v}(-2,1)$
3.2 $(0,3)$ e $(6,0)$ **3.3** $y = -\frac{1}{2}x + 3$ **4.2** Não. Os vetores diretores de s têm coordenadas da forma $(0, -k, k)$, $k \neq 0$ **5.3** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ **5.6** 8 **6.1** $r = 2\sqrt{2}$
6.2 $(0,0)$, $(0,-4)$ e $(4,0)$ **6.3** 6 unidades quadradas **6.4** $y = x - 4$
6.5 $x \geq 0 \wedge y \leq 0 \wedge y \geq -2 \wedge y \geq x - 4$ **6.6** $x = \sqrt{3}$ **6.7** $\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ e $\left(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$
7.1 $A(-3,3,2)$, $B(-3,-3,2)$, $C(3,-3,2)$, $D(3,3,2)$, $E(-2,-2,4)$, $F(2,-2,4)$, $G(2,2,4)$ e $H(-2,2,4)$
7.2 $\overrightarrow{DB}$ **7.3** D **7.4** $z = 3$ **7.5** $(x,y,z) = (2,-2,4) + k(5,1,2)$, $k \in \mathbb{R}$
7.6 $x^2 + y^2 + (z-4)^2 \leq 8$ **7.7** $x + y - 2z + 1 = 0$ **8.1** $2a^2$ unidades quadradas **8.3** A
8.4 $\overrightarrow{AC}$ **8.5** $(x,y,z) = (a,0,0) + k(-a,a,0)$, $k \in \mathbb{R}$ **8.6** $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$

Proposta de resolução da ficha de trabalho nº7

1.1 Sabe-se que as raízes de um polinómio podem ser todas distintas ou não. O número de vezes que uma mesma raiz aparece indica a multiplicidade. Para tal, aplica-se a Regra de Ruffini enquanto o resto do polinómio for zero.

	1	2	1	-1	-2	-1
-1		-1	-1	0	1	1
	1	1	0	-1	-1	0 = resto
-1		-1	0	0	1	
	1	0	0	-1	0 = resto	
-1		-1	1	-1		
	1	-1	1	-2 = resto		

Na terceira aplicação da Regra de Ruffini obtém-se um resto diferente de zero, logo a raiz -1 tem multiplicidade 2.

1.2 Atendendo à alínea anterior pode-se decompor o polinómio $f(x)$ na forma $(x^3-1)(x+1)^2$.

Aplicando novamente a Regra de Ruffini para o polinómio (x^3-1) concluí-se que este pode ser decomposto na forma $(x-1)(x^2+x+1)$.

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0 = resto

Aplicando a fórmula resolvente, vem

$$x^2+x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times1}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

Chega-se à conclusão que esta equação é impossível em $\mathbb{R}$. Logo, o polinómio pode fatorizar-se na forma $f(x)=(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$. Utilizando um quadro de sinal pode-se concluir que o conjunto solução para a inequação $f(x)\geq 0$ é

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$(x+1)^2$	+	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+
x^2+x+1	+	+	+	+	+
$f(x)$	-	0	-	0	+

$$C.S.=\{-1\}\cup[1,+\infty[$$

1.3

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)+1+2x+x^2-2k^2x^3 = x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1+1+2x+x^2+x^2-2k^2x^3 \\ &= x^5+2x^4+x^3(1-2k^2) \end{aligned}$$

Como o polinómio é divisível por $x-1$, pelo Teorema do Resto tem-se

$$\begin{aligned} g(1)=0 &\Leftrightarrow 1^5+2\times1^4+(1-2k^2)=0 \Leftrightarrow 1+2+1-2k^2=0 \Leftrightarrow 4-2k^2=0 \\ &\Leftrightarrow 2k^2=4 \Leftrightarrow k^2=2 \Leftrightarrow k=-\sqrt{2} \vee k=\sqrt{2} \end{aligned}$$

2.1 Pelo Teorema do Resto,

$$\begin{aligned} A(1)=2 \quad &\Leftrightarrow \quad k^2\times 1^3 - k\times 1^2 + 1 - 1 = 2 \;\Leftrightarrow\; k^2-k=2 \;\Leftrightarrow\; k^2-k-2=0 \\ &\Leftrightarrow \quad k=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 1\times(-2)}}{2} \;\Leftrightarrow\; k=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2} \;\Leftrightarrow\; k=\frac{1\pm 3}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad k=\frac{1-3}{2} \;\vee\; k=\frac{1+3}{2} \;\Leftrightarrow\; k=-1 \;\vee\; k=2 \end{aligned}$$

2.2.1 Considerando $k=1$ o polinómio é da forma $A(x)=x^3-x^2+x-1$. Aplicando a Regra de Ruffini ao polinómio $A(x)$ tem-se

	1	-1	1	-1
1		1	0	1
	1	0	1	0 = resto

$A(x)=(x-1)(x^2+1)$

2.2.2 $A(x)=x^3-x^2+x-1$

$A(-2)=(-2)^3-(-2)^2+(-2)-1=-8-4-2-1=-15$

$[A(x)]^2\times A(-2)<0 \;\Leftrightarrow\; [A(x)]^2\times(-15)<0 \;\Leftrightarrow\; [A(x)]^2>0$

Determinando as raízes do polinómio $A(x)$ obtém-se

$$A(x)=0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)(x^2+1)=0 \;\Leftrightarrow\; x-1=0 \;\vee\; x^2+1=0 \;\Leftrightarrow\; x=1 \;\vee\; \underbrace{x^2-1}_{\text{impossível}}=0$$

Sabendo que $[A(x)]^2>0 \Leftrightarrow A(x)\neq 0$, então obtém-se $C.S.=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

3.1 $\begin{cases} x=-2k \\ y=3+k \end{cases} \quad k\in\mathbb{R} \quad\Leftrightarrow\quad (x,y)=(0,3)+k(-2,1),\quad k\in\mathbb{R}$

O ponto $P(0,3)$ e o vetor $\vec{r}(-2,1)$.

3.2

- Interseção com o eixo Ox: $y=0$

  $\begin{cases} x=-2k \\ 0=3+k \end{cases} \quad k\in\mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=-2k \\ k=-3 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=6 \\ k=-3 \end{cases}$

  O ponto de interseção da reta r com o eixo Ox tem de coordenadas $(6,0)$.

- Interseção com o eixo Oy: $x=0$

  $\begin{cases} 0=-2k \\ y=3+k \end{cases} \quad k\in\mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} k=0 \\ y=3 \end{cases}$

  O ponto de interseção da reta r com o eixo Oy tem de coordenadas $(0,3)$.

3.3 A equação reduzida é da forma $y=mx+b$.

$m=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$

Pela alínea **3.1** sabe-se que $P(0,3)$ é um ponto da reta r, então:

$y = mx + b \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$

4.1 $A \in s \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : (1,-2,7) = (1,3,2) + k(0,-1,1), \ k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(1,-2,7) = (1,3,2) + k(0,-1,1), \ k \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow (1,-2,7) = (1,3,2) + (0,-k,k), \ k \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow (1,-2,7) = (1,3-k,2+k), \ k \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ -2 = 3-k \\ 7 = 2+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ k = 5 \\ k = 5 \end{cases}\end{aligned}$$

Sistema possível determinado, logo o ponto $A(1,-2,7)$ pertence à reta s.

4.2 Não, pois um vetor diretor da reta r é $(0,-1,1)$ e qualquer vetor colinear com este é vetor diretor da reta s, ou seja, qualquer vetor da forma $(0,-k,k), \quad k \neq 0$.

5.1 Para determinar a equação reduzida de uma circunferência, é preciso determinar as coordenadas do centro e o respetivo raio. Calculando o diâmetro, tem-se

$$\overline{RS} = \sqrt{\left(-\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4\times 2 + 4 \times 2} = \sqrt{16} = 4$$

Logo, $r = \frac{\overline{RS}}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Falta determinar as coordenadas do centro da circunferência. Para tal, considere um ponto M que representa o ponto médio do diâmetro $[RS]$, isto é, o centro.

$M\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}\right) = M(0,0)$

Portanto a equação reduzida da circunferência é

$$x^2 + y^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

5.2 $x^2 + y^2 \leq 4$

5.3 Se F_1 é um foco de coordenadas $\left(-2\sqrt{3},0\right)$ então F_2 tem coordenadas $\left(2\sqrt{3},0\right)$ e o eixo maior está situado no eixo Ox, sendo portanto a equação reduzida da elipse da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Pelo enunciado conclui-se o valor do semieixo maior: $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$.
Falta apenas determinar o valor do semieixo menor b.
Em primeiro lugar determina-se a distância focal $2c$:

$$\overline{F_1F_2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2} = 4\sqrt{3}$$

Posteriormente, determina-se o valor de c:

$$2c = \overline{F_1F_2} \Leftrightarrow c = 2\sqrt{3}$$

Por último, aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = 16 - 12 \Leftrightarrow b^2 = 4 \Leftrightarrow b = -2 \vee b = 2$$

Como $b > 0$ então $b = 2$. Conclui-se que a equação reduzida da elipse ψ é

$$\psi : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

5.4 $\overrightarrow{AF_1} = F_1 - A$

$F_1 - A = \left(-2\sqrt{3}, 0\right) - (0, 2) = \left(-2\sqrt{3}, -2\right)$

Portanto $\overrightarrow{AF_1}\left(-2\sqrt{3}, -2\right)$.

$\overrightarrow{AF_2} = F_2 - A$

$F_2 - A = \left(2\sqrt{3}, 0\right) - (0, 2) = \left(2\sqrt{3}, -2\right)$

Portanto $\overrightarrow{AF_2}\left(2\sqrt{3}, -2\right)$. Concluí-se que $\overrightarrow{AF_1} + \overrightarrow{AF_2}$ tem de coordenadas $(0, -4)$.

$\overrightarrow{AB} = B - A$

$B - A = (0, -2) - (0, 2) = (0, -4)$ portanto o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem de coordenadas $(0, -4)$. Concluí-se assim que $\overrightarrow{AF_1} + \overrightarrow{AF_2} = \overrightarrow{AB}$.

5.5 Para mostrar que P_a pertence à elipse ψ basta substituir as coordenadas de P_a na equação da elipse.

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{16} + \frac{\left(\frac{\sqrt{16-a^2}}{2}\right)^2}{4} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{16} + \frac{\frac{16-a^2}{4}}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{16} + \frac{16-a^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2+16-a^2}{16} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{16}{16} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad c.q.m \end{aligned}$$

5.6 Sabe-se que P_a pertence à elipse, então por definição de elipse tem-se que

$$d(P_a, F_1) + d(P_a, F_2) = 2a = 8$$

6.1 Como o ponto $(0, 0)$ pertence à circunferência, tem-se

$$(0-2)^2 + (0+2)^2 = r^2 \Leftrightarrow (-2)^2 + 2^2 = r^2 \Leftrightarrow 4 + 4 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 8 \underbrace{\Leftrightarrow}_{r>0} r = 2\sqrt{2}$$

6.2

- Interseção com o eixo Ox: $y = 0$

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + 2^2 = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + 4 - 4x + 4 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 8 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 \end{aligned}$$

Os pontos de interseção com o eixo Ox têm de coordenadas $(0, 0)$ e $(4, 0)$.

- Interseção com o eixo Oy: $x = 0$

$$\begin{aligned} (-2)^2 + (y+2)^2 = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad 4 + y^2 + 4 + 4y = 8 \Leftrightarrow y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow y(y+4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y = 0 \vee y = -4 \end{aligned}$$

Os pontos de interseção com o eixo Oy têm de coordenadas $(0, 0)$ e $(0, -4)$.

Portanto, os pontos de interseção da circunferência com os eixos coordenados têm de coordenadas $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(0, -4)$.

6.3 Pela alínea anterior sabe-se que $A(4,0)$. Da equação da circunferência chega-se à conclusão que o centro tem de coordenadas $(2,-2)$. Considere ainda o ponto D de coordenadas $(0,-2)$.
A região colorida representada na figura é um trapézio, portanto

$$A = \frac{\overline{OA}+\overline{CD}}{2} \times \overline{OD} = \frac{4+2}{2} \times 2 = 6\,\text{u.a.}$$

6.4 $\overrightarrow{AB} = B - A$ logo o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem de coordenadas $(-4,-4)$.

Uma equação vetorial da reta t é:

$$(x,y) = (4,0) + k(-4,-4),\ \ k \in \mathbb{R}$$

Para saber a equação reduzida da reta t é preciso determinar essa reta:

Observando a figura, verifica-se que a reta passa nos pontos $(4,0)$ e $(0,-4)$. O seu declive será $m = \frac{-4-0}{0-4} = \frac{-4}{-4} = 1$.
Como $(0,-4)$ é o ponto de interseção das ordenadas, chega-se à conclusão que a equação reduzida da reta é $y = x - 4$.

6.5 $y \leq 0 \ \wedge\ x \geq 0 \ \wedge\ y \geq -2 \ \wedge\ y \geq x - 4$

6.6 Se a reta é paralela ao eixo das ordenadas então a sua equação é $x = a$. Como passa no ponto de abcissa $\sqrt{3}$ então tem-se que a reta pedida tem equação $x = \sqrt{3}$.

6.7 O vetor $\overrightarrow{v}$ é colinear a $\vec{AB}$ se e só se $\exists \lambda \in \mathbb{R} :\ \vec{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

$\vec{v} = \lambda\vec{AB} = \lambda(-4,-4) = \lambda\overrightarrow{AB}(-4\lambda,-4\lambda),\ \lambda \neq 0$

$$\begin{aligned}
\|\vec{v}\| = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{(-4\lambda)^2 + (-4\lambda)^2} = 4 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{16\lambda^2 + 16\lambda^2} = 4 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{32\lambda^2} = 4 \ \Leftrightarrow\ |\lambda|\,.\sqrt{32} = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad |\lambda| = \frac{4}{\sqrt{32}} \ \Leftrightarrow\ |\lambda| = \frac{4\sqrt{32}}{32} \ \Leftrightarrow\ |\lambda| = \frac{4 \times 4\sqrt{2}}{32} \ \Leftrightarrow\ |\lambda| = \frac{16}{32}\sqrt{2} \ \Leftrightarrow\ |\lambda| = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ \vee\ \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Ao considerar-se $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, o vetor colinear com o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem de coordenadas, $\left(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$.

Ao considerar-se $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$, o vetor colinear com o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem de coordenadas, $\left(-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}\right)$.

7.1 $B(-3,-3,2)$ $\quad$ $C(3,-3,2)$ $\quad$ $D(3,3,2)$

$F(2,-2,4)$ $\quad$ $G(2,2,4)$ $\quad$ $H(-2,2,4)$

7.2 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$

7.3 $E + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} = E + \overrightarrow{ED} = D$

7.4 A equação do plano paralelo ao plano xOy é do tipo $z = c$, em que c representa a cota do ponto médio.
Como a cota de C é 2 e a cota de F é 4, então tem-se que $\frac{4+2}{2} = 3$. Logo $z = 3$ é a equação pedida.

7.5 $\overrightarrow{BF} = F - B$ então $\overrightarrow{BF}(5, 1, 2)$.
Uma equação vetorial da reta BF é:

$$(x, y, z) = (2, -2, 4) + \lambda(5, 1, 2),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

7.6 Para determinar a equação reduzida da esfera é preciso determinar o seu centro e o raio.
Como a esfera tem de diâmetro $[EG]$ basta determinar o ponto médio de $[CF]$ para obter as coordenadas do centro.

$$M\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{-2+2}{2}, \frac{4+4}{2}\right) = M(0, 0, 4)$$

Falta determinar o valor do raio:
$r = \overline{EM} = \sqrt{(-2-0)^2 + (-2-0)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Portanto, a inequação reduzida da esfera de diâmetro $[EG]$ é:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-4)^2 \leq \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-4)^2 \leq 8$$

7.7 Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do plano mediador do segmento de reta $[DG]$.

$$\begin{aligned}
\overline{DP} = \overline{GP} \quad &\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 4z + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 \\
&\Leftrightarrow \quad -2x - 2y + 4z - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x + y - 2z + 1 = 0
\end{aligned}$$

8.1 Pelo Teorema de Pitágoras

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{AB}^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 2a^2$$

Posto isto, a área do quadrado é $A = \overline{AB}^2 = 2a^2$ u.a.

8.2 O octaedro é um poliedro com oito faces, cada uma delas é um triângulo equilátero.

Pelo enunciado sabe-se que $A(a, 0, 0)$ e $B(0, a, 0)$. Considere o triângulo $[ABC]$ e M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$. Começando por determinar as coordenadas de M obtém-se

$$M\left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+a}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = M\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$$

e posteriormente,

$$
\begin{aligned}
\overline{MC} &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+(0-a)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+a^2} = \sqrt{\frac{2a^2+4a^2}{4}} = \sqrt{\frac{6a^2}{4}} \\
&= \frac{|a|\times\sqrt{6}}{2} \underbrace{=}_{a>0} \frac{a\sqrt{6}}{2}
\end{aligned}
$$

Portanto, a área do triângulo é:

$$
A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB}\times\overline{MC}}{2} = \frac{\sqrt{2}a\times\frac{a\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{12}}{4} = \frac{a^2\times 2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}
$$

A área da superfície do octaedro é.

$$
A_{sup.oct} = 8\times\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 4a^2\sqrt{3} \quad u.a.
$$

8.3 $C+\overrightarrow{DF} = C+\overrightarrow{CA} = A$

8.4 $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

8.5 $\overrightarrow{AB} = B-A$, em que $A(a,0,0)$ e $B(0,a,0)$. Portanto $\overrightarrow{AB}(-a,a,0)$

$AB:\ \ (x,y,z) = (a,0,0)+\lambda(-a,a,0),\ \lambda\in\mathbb{R}$

8.6 O ponto médio de $[BE]$ tem de coordenadas $(0,0,0)$ e o raio é igual a $r=a$. Portanto a inequação reduzida da esfera de diâmetro $[BE]$ é da forma

$$
(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 \le a^2 \ \Leftrightarrow\ x^2+y^2+z^2 \le a^2
$$

Ficha de trabalho n.º8 Ano Letivo 2017/2018

1. Na figura está representado, num referencial ortonormado, o gráfico da função f.

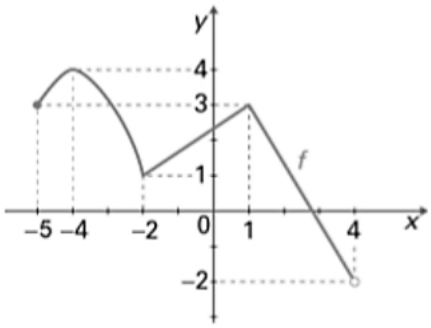
   1.1 Indique o domínio e o contradomínio da função f.

   1.2 Determine, analiticamente, o zero da função f.

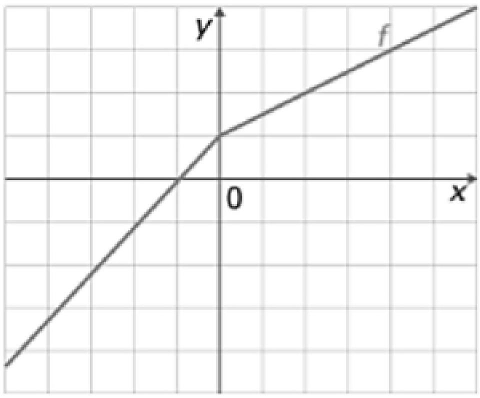
   1.3 Indique um intervalo onde a função f seja injetiva.

   1.4 Estude a função f quanto à monotonia.

   1.5 Indique, caso existam, os extremos absolutos, os extremos relativos, os maximizantes e os minimizantes da função f.



2. Na figura está representada, num referencial ortonormado, parte do gráfico de uma função f. Seja f^{-1} a função inversa de f.
   O gráfico da função f interseta o eixo Ox no ponto de abcissa -1 e interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 1.



   2.1 Calcule o valor exato de $\frac{f^{-1}(2)}{\sqrt{3}-f^{-1}(-3)}$.
   Apresente o valor pedido com denominador racional.

   2.2 Esboce o gráfico da função f^{-1}.

3. Considere a funçãos f definida por $f(x) = 2x + 3$.

   3.1 Mostre que f é uma função bijetiva.

   3.2 Caracterize a função inversa de f.

4. Considere a função $f(x) = 3 + \sqrt{9 - x^2}$.

   4.1 Determine o domínio de f.

4.2 Mostre que f é uma função par.

5. Averigue quais das seguintes funções reais de variável real são pares, quais são ímpares e quais não são pares nem ímpares.

5.1 $f(x) = 3x^2 - 5$

5.2 $g(x) = 2x^3 + 5$

5.3 $i(x) = 3x^4 - x^2 + 1$

5.4 $k(x) = \frac{x}{x^2+2}$

6. Determine o domínio das funções:

6.1 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x-2}}$

6.2 $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+2}}{2x^2-3x+1}$

6.3 $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2-2x+6}}$

6.4 $f(x) = \frac{3x}{-2x^3-2x^2+8x+8}$

7. Considere as funções reais de variável real, f e g, definidas por, respetivamente, por

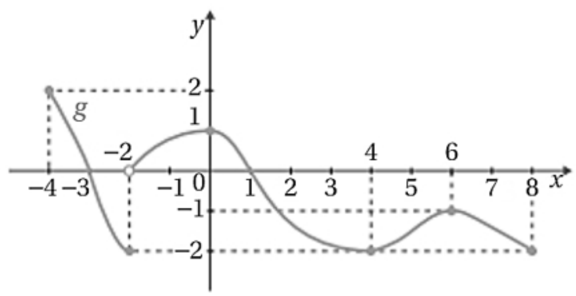
$$f(x) = \sqrt{x - \sqrt{3}} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2} + \sqrt{3}}$$

7.1 Determine o domínio de cada uma das funções f e g.

7.2 Mostre que a função f é injetiva.

7.3 Calcule $(g \circ f)(\sqrt{3})$.
Apresente o valor pedido com denominador racional.

8. Na figura está representada graficamente a função g, de domínio $D_g = [-4, 8]$.



Indique:

8.1 O contradomínio de g;

8.2 $g(4)$;

8.3 x, tal que $g(x) = -2$;

8.4 os zeros de g;

8.5 os intervalos onde a função g é crescente;

8.6 os intervalos onde a função g é decrescente;

8.7 os máximos relativos de g;

8.8 os maximizantes de g;

8.9 os mínimos relativos de g;

8.10 os minimizantes de g;

8.11 um intervalo onde a função seja positiva e crescente.

Soluções

1.1 $D_f = [-5, 4[$ e $D'_f =]-2, 4]$

1.2 $x = \frac{14}{5}$

1.3 por exemplo, $[-2, 1]$

1.4 f é estritamente crescente em $[-5, -4]$ e em $[-2, 1]$;
f estritamente decrescente em $[-4, -2]$ e em $[1, 4[$

1.5 máximo absoluto: 4
máximos relativos: 3,4
mínimo absoluto: não existe
mínimos relativos: 1,3
maximizantes: -4,1
minimizantes: -5 e -2

2.1 $\frac{-2\sqrt{3}+8}{13}$

3.2 $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

4.1 $D_f =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

5.1 f é uma função par.

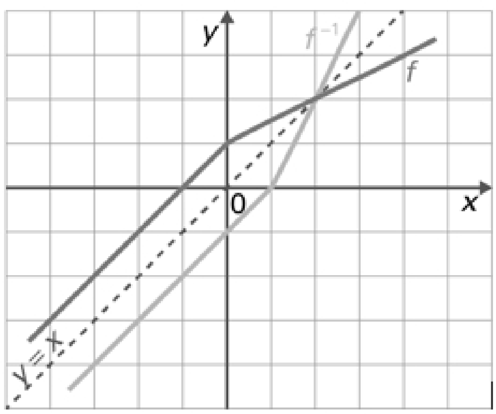
5.2 g não é par nem ímpar.

5.3 i é uma função par.

5.4 k é uma função ímpar.

6.1 $D_f =]-2, +\infty]$

2.2



6.2 $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$

6.3 $D_f = \mathbb{R}$

6.4 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2\}$

7.1 $D_f = [\sqrt{3}, +\infty[$
$D_g = \mathbb{R}$

7.3 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8.1 $D'_g = [-2, 2]$

8.2 $g(4) = -2$

8.3 $g(x) = -2 \iff x = -2 \vee x = 4 \vee x = 8$

8.4 -3 e 1

8.5 $[-2, 0]$ e em $[4, 6]$

8.6 $[-4, -2]$ em $[0, 4]$ e em $[6, 8]$

8.7 -1, 1 e 2

8.8 -4, 0 e 6

8.9 -2

8.10 -2, 4 e 8

8.11 $]-2, 0]$

Proposta de resolução da ficha de trabalho nº8

1.1 $D_f = [-5,4[$ e $D'_f =]-2,4]$

1.2
- Determinar a equação da reta no intervalo $[1,4[$:
  Considere a reta que passa pelos pontos $A(1,3)$ e $B(4,-2)$, o declive será $m = \frac{-2-3}{4-1} = -\frac{5}{3}$.
- Substituir as coordenadas do ponto $A(1,3)$

$$3 = -\frac{5}{3} + b \Leftrightarrow 3 + \frac{5}{3} = b \Leftrightarrow b = \frac{14}{3}$$

  A equação da reta é $y = -\frac{5}{3}x + \frac{14}{3}$.
- Determinar o zero é equivalente a obter a abcissa do ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox.

$$0 = -\frac{5}{3}x + \frac{14}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{3}x = \frac{14}{3} \Leftrightarrow x = \frac{14}{3} \times \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = \frac{14}{5}$$

O zero da função f é $\frac{14}{5}$.

1.3 Por exemplo, o intervalo $[-2,1]$

1.4

x	-5		-4		-2		1		4
$f(x)$	3	↗	4	↘	1	↗	3	↘	-

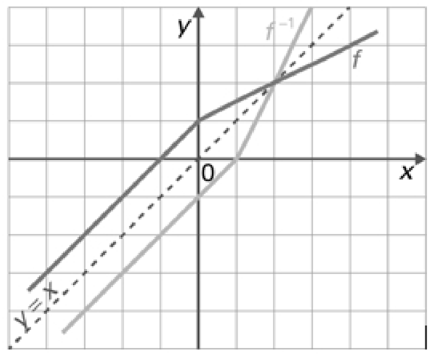
f é estritamente crescente em $[-5,-4]$ e em $[-2,1]$
f é estritamente decrescente em $[-4,-2]$ e em $[1,4[$

1.5
- máximo absoluto: 4
- máximos relativos: 4 e 3
- mínimo absoluto: não existe
- mínimos relativos: 1 e 3
- maximizantes: -4 e 1
- minimizantes: -5 e -2

2.1 $f^{-1}(2) = 2$ pois $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 2$
$f^{-1}(-3) = -4$ pois $f(x) = -3 \Leftrightarrow x + 1 = -3 \Leftrightarrow x = -4$

Cálculos Auxiliares: Sejam $A(0,1)$ e $B(-1,0)$ os pontos por onde passa a função f. O declive é $m = 1$. Então $y = x + 1$ é a equação da nossa reta no intervalo $]-\infty,0]$

$$\frac{f^{-1}(2)}{\sqrt{3} - f^{-1}(-3)} = \frac{2}{\sqrt{3}+4} = \frac{2\left(\sqrt{3}-4\right)}{\left(\sqrt{3}+4\right)\left(\sqrt{3}-4\right)} = \frac{2\sqrt{3}-8}{-13} = \frac{-2\sqrt{3}+8}{13}$$

2.2 

3.1 A função f é bijetiva se for injetiva e sobrejetiva simultaneamente.

- Injetividade
  Por definição, tem-se $\forall x_1, x_2 \in D_f, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

  Logo, a função é injetiva.
- Sobrejetividade
  Por definição, tem-se $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x + 3 \Leftrightarrow -2x = -y + 3 \Leftrightarrow 2x = y - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$$

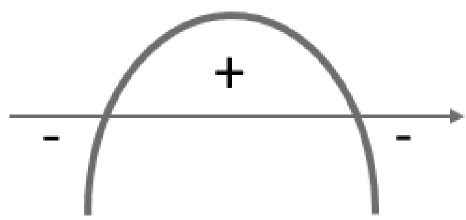
  Portanto, é sobrejetiva, pois para qualquer valor de y irá existir sempre um valor de x.

Concluí-se que a função f é bijetiva.

3.2 Do exercício anterior, tem-se $y = f(x) \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y-3}{2}$. Portanto, a função inversa de f é dada pela expressão $y = \frac{x-3}{2}$, sendo o seu domínio $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

4.1 $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : 9 - x^2 \geq 0\right\} = [-3, 3]$
Cálculos auxiliares:
$9 - x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 9 \;\Leftrightarrow\; x = -3 \;\vee\; x = 3$

Sendo $9 - x^2$ uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo, parábola essa que interseta o eixo Ox nos pontos de abcissa -3 e 3, pode concluir-se que



$$9 - x^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in [-3, 3]$$

4.2 f é uma função par se e só se $\forall x \in D_f,\ x \in D_f \;\Rightarrow\; -x \in D_f \quad \text{e} \quad f(-x) = f(x)$
Atendendo que $D_f = [-3, 3]$

$x \in D_f \;\Rightarrow\; -x \in D_f$
$f(-x) = 3 + \sqrt{9 - (-x)^2} = 3 + \sqrt{9 - x^2} = f(x)$

Como $f(-x) = f(x)$ conclui-se que f é uma função par.

5. Uma função real de variável real é par se $\forall x \in D_f,\ -x \in D_f$ e $f(-x) = f(x)$ e é ímpar se $\forall x \in D_f,\ -x \in D_f$ e $f(-x) = -f(x)$. Atendendo que $D_f = D_g = D_i = D_k = \mathbb{R}$ verifica sempre a condição se $x \in \mathbb{R}$, então $-x \in \mathbb{R}$.

5.1 $f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5 = f(x)$.
A função f é par.

5.2 $g(-x) = 2(-x)^3 + 5 = -2x^3 + 5$.
A função g não é par nem ímpar.

5.3 $i(-x) = 3(-x)^4 - (-x)^2 + 1 = 3x^4 - x^2 + 1 = i(x)$.
A função i é par.

5.4 $k(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+2} = -\frac{x}{x^2+2} = -k(x)$.
A função k é ímpar.

6.1 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 0 \,\wedge\, \sqrt{x-2} \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\} =]2, +\infty[$

6.2 $D_f = \{x \in \mathbb{R} :\ 3x^2 + 2 \geq 0 \,\wedge\, 2x^2 - 3x + 1 \neq 0\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \quad \underbrace{x^2 \geq -\frac{2}{3}}_{\text{condição universal}} \quad \wedge\, x \neq \frac{1}{2} \,\wedge\, x \neq 1 \right\} =$

$= \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}$

Cálculos auxiliares:
$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\times 2\times 1}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3\pm 1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3-1}{4} \,\vee\, x = \frac{3+1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \,\vee\, x = 1$

6.3 $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 - 2x + 6 \geq 0 \,\wedge\, \sqrt{x^2 - 2x + 6} \neq 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 - 2x + 6 > 0\} = \mathbb{R}$

Cálculos auxiliares:
$x^2 - 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\times 6\times 1}}{2} = x = \frac{2\pm\sqrt{-20}}{2}$ Equação impossível em $\mathbb{R}$

6.4 $D_f = \{x \in \mathbb{R} :\ -2x^3 - 2x^2 + 8x + 8 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} :\ (x+1)(-2x^2 + 8) \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-2, -1, 2\}$

Cálculos auxiliares:
Seja $p(x) = -2x^3 - 2x^2 + 8x + 8$; sabe-se que -1 é uma raiz deste polinómio.
Usando a Regra de Ruffini tem-se

$p(x) = (x+1)(-2x^2+8)$

	-2	-2	8	8
-1		2	0	-8
	-2	0	8	0 = resto

$-2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \,\vee\, x = 2$.

7.1 $D_f = \{x \in \mathbb{R} :\ x - \sqrt{3} \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} :\ x \geq \sqrt{3}\} = [\sqrt{3}, +\infty[$

$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} :\ \sqrt{x^2} + \sqrt{3} \neq 0\right\} = \mathbb{R}$

Cálculos auxiliares:
$\sqrt{x^2} + \sqrt{3} \neq 0 \Leftrightarrow |x| + \sqrt{3} \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq -\sqrt{3}$ Condição universal

7.2 Por definição, f é injetiva se e só se $\forall x_1, x_2 \in D_f,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1 - \sqrt{3}} = \sqrt{x_2 - \sqrt{3}} \Rightarrow x_1 - \sqrt{3} = x_2 - \sqrt{3} \Rightarrow x_1 = x_2$

Portanto, f é injetiva.

7.3 $(g \circ f)\left(\sqrt{3}\right) = g\left(f\left(\sqrt{3}\right)\right) = g\,(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

8.1 $D'_g = [-2, 2]$

8.2 $g(4) = -2$

8.3 $g(x) = -2 \Leftrightarrow x = -2 \ \vee \ x = 4 \ \vee \ x = 8$

8.4 Os zeros de g são o -3 e o 1.

8.5 g é crescente em $[-2, 0]$ e em $[4, 6]$.

8.6 g é decrescente em $[-4, -2]$, em $[0, 4]$ e em $[6, 8]$.

8.7 Os máximos relativos de g são: -1,1 e 2.

8.8 Os maximizantes de g são: -4,0 e 6.

8.9 O mínimo relativo de g é -2.

8.10 Os minimizantes de g são: -2,4 e 8.

8.11 $]-2, 0]$

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Escola Secundária de Jaime Cortesão
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

Ficha de trabalho nº9 18/5/2018

Estudo de funções que envolvem radicais quadráticos e cúbicos

Recorra à calculadora gráfica, sempre que necessário, para responder às seguintes questões.

1. Considere as funções reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad g(x) = \sqrt{x-1}, \qquad h(x) = 2\sqrt{x-1} \quad \text{e} \quad i(x) = 2\sqrt{x-1} + 3$$

Para cada uma das funções dadas:

1.1 Determine o domínio e o contradomínio.

1.2 Explique como obter, por transformações geométricas

i) o gráfico de g a partir do gráfico de f;

ii) o gráfico de h a partir do gráfico de g;

iii) o gráfico de i a partir do gráfico de h.

2. Resolva as questões anteriores para as seguintes funções:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \qquad g(x) = \sqrt[3]{x+1}, \qquad h(x) = -2\sqrt[3]{x+1} \quad \text{e} \quad i(x) = -2\sqrt[3]{x+1} - 3$$

3. A partir do gráfico da função, real de variável real, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, utilizando transformações, obtenha os gráficos das funções definidas por:

a) $g(x) = \sqrt{x-1} + 3$

b) $h(x) = -\sqrt{x} - 4$

c) $i(x) = -\sqrt{x+2}$

4. Para as funções g, h e i definidas no exercício anterior, indique o domínio, os intervalos de monotonia e os extremos, caso existam.

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro

Escola Secundária de Jaime Cortesão

Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

Ficha de trabalho nº 10 Ano Letivo 2017/2018

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 3$ e a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 - 4$.

   1.1 Justifique que f é bijetiva e determina uma expressão para $f^{-1}(x)$.

   1.2 Mostre que g é uma função par.

   1.3 Caracterize a função $g \circ f$.

   1.4 Sabe-se que o ponto $A(1, -3)$ pertence ao gráfico da função g. Determina as coordenadas de A', imagem de A pela translação segundo o vetor $\vec{u}(-1, 2)$.

2. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

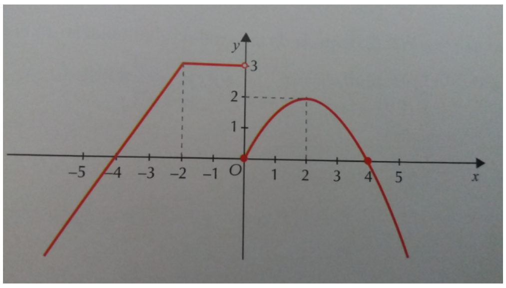
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} - 2 & \text{se} \quad x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 2 \\ |x-4| + 1 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

   Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes.

   2.1 Determine o conjunto dos números reais que são solução da condição $f(x) = 1 \wedge x \geq -1$.

   2.2 Resolva, em $]2, +\infty[$, a condição $f(x) \geq 2$. Apresente o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

3. Na figura está representado parte do gráfico da função f de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que, em $\mathbb{R}^+$, f é definida por uma função quadrática.



   3.1 Defina f analiticamente.

   3.2 Determine os valores de x para os quais se tem $-2f(x) > 0$.

   3.3 Esboce o gráfico da função g definida por $g(x) = f(-x) + 1$.

   3.4 Determine o contradomínio e os zeros da função h definida por $h(x) = f(x+1) - 2$.

   3.5 A função f admite inversa? Justifique.

4. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = -x^2 + 5x - 6$.

   4.1 Determine os zeros de f.

   4.2 Indique uma equação para o eixo de simetria do gráfico de f.

   4.3 Esboce o gráfico de f.

   4.4 A função é sobrejetiva? Justifique.

   4.5 Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $f(x) \leq -6$.

   4.6 Determine o contradomínio de $|f(x)|$.

5. Considere as funções, reais de variável real, definidas por

$$g(x) = 3\sqrt{x+4} + 2 \qquad \text{e} \qquad h(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x} + 5$$

   5.1 Determine os domínios de g e h.

   5.2 Explique como obter os gráficos de g e h como imagens, por transformações geométricas, do gráfico da função definida em $\mathbb{R}_0^+$ por

$$f(x) = \sqrt{x}$$

   e apresente uma representação gráfica dos mesmos.

   5.3 Estude g e h quanto à monotonia e existência de extremos.

6. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

   6.1 $|x - 3| < 2$

   6.2 $|3x| + 1 > 7$

7. Determine os valores de a e c, sabendo que o gráfico da função $f(x) = ax^2 + 2x + c$ tem vértice $V(3, 2)$

Soluções

1.1 $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

1.3 $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$
$(g \circ f)(x) = 4x^2 - 12x + 5$

1.4 $A'(0, -1)$

2.1 $S = \left\{\sqrt{2}, 4\right\}$

2.2 $S =]-\infty, 3] \cup [5, +\infty[$

3.1 $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 6 & \text{se} \quad x \leq -2 \\ 3 & \text{se} \quad -2 < x < 0 \\ -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

3.2 $S =]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$

3.4 $D'_h =]-\infty, 1]$
zeros: $-\frac{11}{3}$ e 1

4.1 zeros: 2 e 3

4.2 $x = \frac{5}{2}$

4.5 $S =]\infty, 0] \cup [5, +\infty[$

4.6 $[0, +\infty[$

6.1 $S =]1, 5[$

6.2 $S =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

7. $a = -\frac{1}{3}$ e $c = -1$

Proposta de resolução da ficha de trabalho nº10

1.1 A função f é bijetiva se for injetiva e sobrejetiva simultaneamente.

- Injetividade
  Por definição, tem-se $\forall x_1, x_2 \in D_f,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

  $$f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \ \Rightarrow\ 2x_1 = 2x_2 \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$$

  Logo, a função f é injetiva.
- Sobrejetividade
  Por definição, tem-se $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$

  $$y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x - 3 \Leftrightarrow -2x = -y - 3 \Leftrightarrow 2x = y + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{2}$$

  Portanto, f é sobrejetiva, porque para qualquer valor de y irá sempre existir um valor de x.

Conclui-se que a função f é bijetiva, sendo $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$.

1.2 g é uma função par se e só se $\forall x \in D_g,\ x \in Dg \ \Rightarrow\ -x \in D_g$ e $g(-x) = g(x)$
Atendendo a que $D_g = \mathbb{R}$, se $x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$.

$g(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = g(x)$.

Conclui-se, assim, que g é uma função par.

1.3 $D_{g \circ f} = \{x \in D_f :\ f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} :\ f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = (2x-3)^2 - 4 = 4x^2 + 9 - 12x - 4 = 4x^2 - 12x + 5$$

1.4 Sabe-se que $A(1, -3)$ pertence ao gráfico da função g. Sendo que o gráfico sofreu uma translação segundo o vetor $\vec{u}(-1, 2)$ as coordenadas do ponto A' são $(0, -1)$.

2.1 Para $-1 \le x \le 2$:
$f(x) = 1 \ \Leftrightarrow\ x^2 - 1 = 1 \ \Leftrightarrow\ x^2 = 2 \ \Leftrightarrow\ x = -\sqrt{2} \ \vee\ x = \sqrt{2} \ \Leftrightarrow\ x = \sqrt{2}$

Para x>2:
$f(x) = 1 \ \Leftrightarrow\ |x-4| + 1 = 1 \ \Leftrightarrow\ |x-4| = 0 \ \Leftrightarrow\ x - 4 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 4$

Para a condição $f(x) = 1 \ \wedge\ x \ge -1$ tem-se como solução $S = \left\{\sqrt{2}, 4\right\}$.

2.2 $f(x) \ge 2 \ \Leftrightarrow\ |x-4| + 1 \ge 2 \ \Leftrightarrow\ |x-4| \ge 1 \ \Leftrightarrow\ x - 4 \le -1 \ \vee\ x - 4 \ge 1 \ \Leftrightarrow\ x \le 3 \ \vee\ x \ge 5$

$S =]-\infty, 3] \cup [5, +\infty[$

3.1 No intervalo de $]-2,0[$ a função é constante sendo $y=3$ a equação da reta que a representa.

- $]-\infty,-2]$
  Neste intervalo a representação gráfica é uma semirreta que passa nos pontos $A(-4,0)$ e $B(-2,3)$:

  $m=\frac{3-0}{-2+4}=\frac{3}{2}$

  $y=\frac{3}{2}x+b \;\Leftrightarrow\; 0=\frac{3}{2}\times(-4)+b \;\Leftrightarrow\; b=\frac{12}{2} \;\Leftrightarrow\; b=6$

  Portanto a equação da reta neste intervalo é $y=\frac{3}{2}x+6$.

- $]0,+\infty[$
  Neste intervalo a representação gráfica é uma parábola de vértice $V(2,2)$ e passa nos pontos $P(0,0)$ e $Q(4,0)$:

  $f(x)=a(x-h)^2+k \;\Leftrightarrow\; f(x)=a(x-2)^2+2$

  $f(0)=0 \;\Leftrightarrow\; a(-2)^2=-2 \;\Leftrightarrow\; 4a=-2 \;\Leftrightarrow\; a=-\frac{2}{4} \;\Leftrightarrow\; a=-\frac{1}{2}$

  Tem-se portanto $f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$.

  Definindo f analiticamente tem-se:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}x+6 & \text{se} \quad x\leq -2 \\ 3 & \text{se} \quad -2<x<0 \\ -\frac{1}{2}(x-2)^2+2 & \text{se} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

3.2 $-2f(x)>0 \;\Leftrightarrow\; f(x)<0$

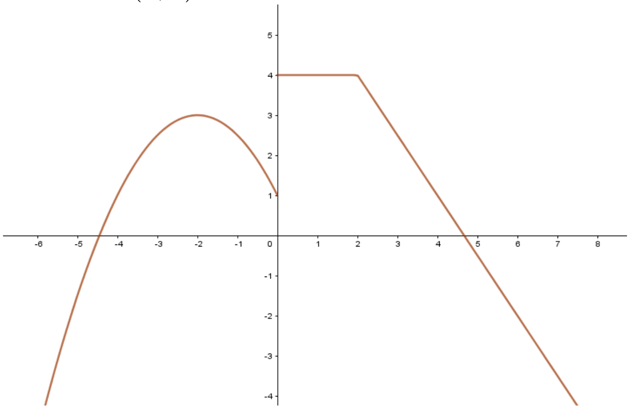
- Para $x\geq 0$
  $f(x)<0 \;\Leftrightarrow\; x>4$

- Para $x\leq -2$
  $f(x)<0 \;\Leftrightarrow\; x<-4$

- Para $-2<x<0$
  $f(x)>0 \;\Leftrightarrow\; -2\times 3>0 \;\Leftrightarrow\; -6>0 \quad$ condição impossível

$S=]-\infty,-4[\,\cup\,]4,+\infty[$

3.3 O gráfico de g resulta de uma reflexão em relação ao eixo Oy seguida de uma translação vertical de vetor $\vec{v}(0,1)$.



3.4 A função h resulta de uma translação de vetor $\vec{u}(-1,-2)$.

- Zeros:
  $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x+1)-2=0$

  i. Para $x \leq -2$

  $\frac{3}{2}(x+1)+6-2=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x+\frac{3}{2}+4=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x=-\frac{11}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{11}{3}$

  ii. Para $x > 0$

  $-\frac{1}{2}(x+1-2)^2+2-2=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x-1)^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

  Os zeros de h são $-\frac{11}{3}$ e 1.

- Contradomínio
  Seja $D'_f =]-\infty,3]$ o contradomínio da função f. Como a função h também resulta de uma translação vertical de vetor $\vec{v}(0,-2)$ então o contradomínio da função h é $D'_h =]-\infty,1]$.

3.5 Não, porque não é uma função injetiva e portanto não é bijetiva. Por exemplo, para $x_1=-2$ e $x_2=-1$ tem-se que $f(x_1)=3$ e $f(x_2)=3$.

4.1

$$\begin{aligned} f(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad -x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times6}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x=\frac{5\pm1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5-1}{2} \vee x=\frac{5+1}{2} \Leftrightarrow x=2 \vee x=3 \end{aligned}$$

Os zeros de f são 2 e 3.

4.2 A expressão de uma função quadrática é $f(x)=a(x-h)^2+k$.
Sabe-se que a reta de equação $x=h$ é o eixo de simetria da parábola. Usando o método de completar quadrados tem-se:

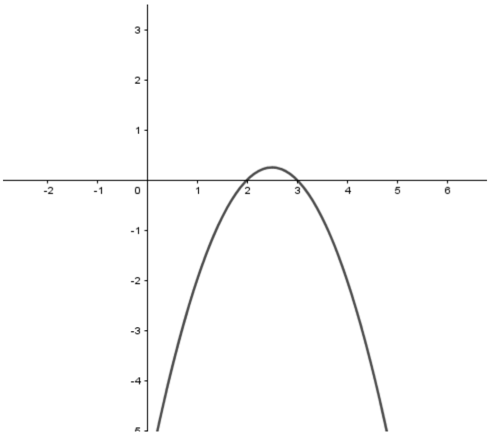
$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2+5x-6=-(x^2-5x+6)=-\left(x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+6\right) \\ &= -\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+6\right]=-\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \end{aligned}$$

A expressão acima referida representa a função quadrática f, em que $h = \frac{5}{2}$ e $k = \frac{1}{4}$. Portanto o eixo de simetria tem de equação $x = \frac{5}{2}$.

Outra resolução:

Sabe-se que $h = -\frac{b}{2a}$, em que $a = -1$ e $b = 5$. Logo,

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \times (-1)} = -\frac{5}{-2} = \frac{5}{2}$$

4.3 

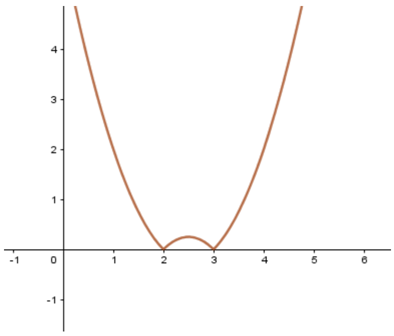
4.4 A função f é sobrejetiva se o seu domínio coincidir com o conjunto de chegada.
Como o contradomínio de f é $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$ e o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$, a função f não é sobrejetiva.

4.5 $f(x) \leq -6 \;\Leftrightarrow\; -x^2 + 5x - 6 \leq -6 \;\Leftrightarrow\; -x^2 + 5x \leq 0$

$-x^2 + 5x = 0 \;\Leftrightarrow\; -x(x-5) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = 5$

$S =]-\infty, 0] \cup [5, +\infty[$

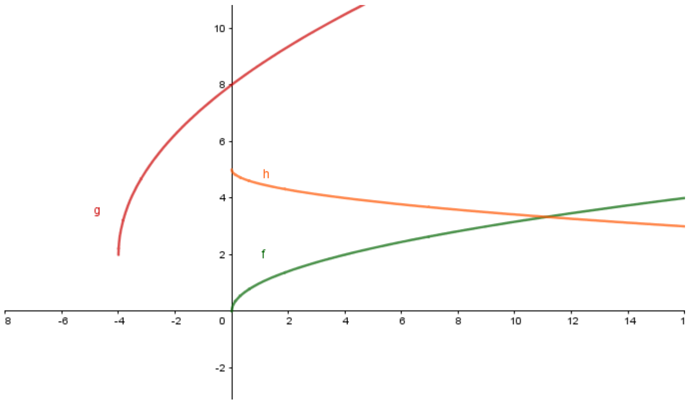
4.6 $D'_{|f(x)|} = [0, +\infty[$



5.1 $D_h = \mathbb{R}_0^+$
$D_g = \{x \in \mathbb{R} : \; x + 4 \geq 0\} = [-4, +\infty[$

5.2 O gráfico de g é a imagem geométrica do gráfico de f pela composição da dilatação vertical de coeficiente 3, com a translação de vetor $\vec{u}(-4, 2)$.

O gráfico de h é a imagem geométrica do gráfico de f pela composição da contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$, com a reflexão em relação ao eixo Ox, seguida da translação de vetor $\vec{v}(0, 5)$.



5.3 A função g é estritamente crescente em todo o seu domínio, tem mínimo absoluto 2 para $x = -4$ e contradomínio $[2, +\infty[$.

A função h é estritamente decrescente em todo o seu domínio, tem máximo absoluto 5 para $x = 0$ e contradomínio $]-\infty, 5]$.

6.1 $|x-3| < 2 \Leftrightarrow x - 3 < 2 \wedge x - 3 > -2 \Leftrightarrow x < 2 + 3 \wedge x > -2 + 3 \Leftrightarrow x < 5 \wedge x > 1$

$S =]1, 5[$

6.2 $|3x| + 1 > 7 \Leftrightarrow |3x| > 6 \Leftrightarrow 3x > 6 \vee 3x < -6 \Leftrightarrow x > 2 \vee x < -2$

$S =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

7. Se o gráfico da função tem vértice $V(3, 2)$, então a nossa expressão será da forma:

$$y = a(x-3)^2 + 2 = a(x^2 + 9 - 6x) + 2 = ax^2 + 9a - 6xa + 2$$

Pelo enunciado sabe-se que $y = ax^2 + 2x + c$. Comparando estas duas expressões tem-se

$$-6xa = 2x \Leftrightarrow -6a = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{6} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$9a + 2 = c \Leftrightarrow c = 9 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \Leftrightarrow c = -\frac{9}{3} + 2 \Leftrightarrow c = -3 + 2 \Leftrightarrow c = -1$$

Portanto, $a = -\frac{1}{3}$ e $c = -1$.

Anexo E

Matrizes

Informações Teste

11.º ano – Matemática A - 27 de outubro

Ano letivo 2017/2018

Caraterização do Teste

O teste inclui 6 itens de seleção (escolha múltipla) e 6 itens de construção, alguns dos quais com várias alíneas.

O teste é cotado para 200 pontos.

A distribuição da cotação pelos temas apresenta-se no quadro seguinte:

Conteúdos programáticos	**Cotação (em pontos)**
Trigonometria: Lei dos senos, Teorema de Carnot, resolução de triângulos	50 pontos
Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações	60 pontos
Razões trigonométricas de ângulos generalizados (seno, cosseno e tangente). Radiano.	35 pontos
Funções trigonométricas: seno cosseno e tangente	55 pontos

O material necessário para o teste é esferográfica de tinta azul ou preta e **calculadora gráfica**.

Não é permitido o uso de corretor.

O teste tem duração de **100 minutos**.

Informações Teste

10.º ano – Matemática A - 6 de dezembro

Ano letivo 2017/2018

Caraterização do Teste

O teste inclui 6 itens de seleção (escolha múltipla) e 6 itens de construção, alguns dos quais com várias alíneas.

O teste é cotado para 200 pontos.

A distribuição da cotação pelos temas apresenta-se no quadro seguinte:

Conteúdos programáticos	**Cotação (em pontos)**
Proposições: valor lógico; operações e suas prioridades; relações lógicas entre as diferentes operações; propriedades da conjunção e disjunção e primeiras leis de De Morgan.	20 pontos
Condições e Conjuntos: Expressão proposicional ou condição; Quantificador universal e quantificador existencial. Segundas leis de De Morgan. Contraexemplos; Conjunto definido por uma condição. Igualdade de conjuntos. Conjuntos definidos em extensão; Operações com conjuntos; Relações entre operações lógicas com condições e operações com conjuntos que definem; Negação de uma implicação universal. Demonstração por contrarrecíproco.	60 pontos
Radicais: Monotonia da potenciação, raízes de índice $n \in N$, $n \geq 2$, propriedades algébricas dos radicais e racionalização de denominadores.	20 pontos
Potências de expoente racional: definição de potência de base positiva e expoente racional e respetivas propriedades.	20 pontos

Conteúdos programáticos	**Cotação (em pontos)**
Polinómios: Definição, adição, subtração e multiplicação de polinómios; Divisão euclidiana e regra de Ruffini; Divisibilidade de polinómios e teorema do resto; Multiplicidade da raiz de um polinómio e respetivas propriedades; Fatorização de polinómios; Resolução de inequações que envolvem polinómios.	80 pontos

O material necessário para o teste é esferográfica de tinta azul ou preta e **calculadora.**

Não é permitido o uso de corretor.

O teste tem duração de **100 minutos**.

Informações Teste

10.º ano – Matemática A – 2 de fevereiro

Ano letivo 2017/2018

Caraterização do Teste

O teste inclui 6 itens de seleção (escolha múltipla) e 5 itens de construção, alguns dos quais com várias alíneas.

O teste é cotado para 200 pontos.

A distribuição da cotação pelos temas apresenta-se no quadro seguinte:

Conteúdos programáticos	Cotação (em pontos)
Proposições: valor lógico; operações e suas prioridades; relações lógicas entre as diferentes operações; propriedades da conjunção e disjunção e primeiras leis de De Morgan.	5 pontos
Condições e Conjuntos: Expressão proposicional ou condição; Quantificador universal e quantificador existencial. Segundas leis de De Morgan. Contraexemplos; Conjunto definido por uma condição. Igualdade de conjuntos. Conjuntos definidos em extensão; Operações com conjuntos; Relações entre operações lógicas com condições e operações com conjuntos que definem; Negação de uma implicação universal. Demonstração por contrarrecíproco.	45 pontos
Radicais: Monotonia da potenciação, raízes de índice $n \in N$, $n \geq 2$, propriedades algébricas dos radicais e racionalização de denominadores.	20 pontos
Polinómios: Definição, adição, subtração e multiplicação de polinómios; Divisão euclidiana e regra de Ruffini; Divisibilidade de polinómios e teorema do resto; Multiplicidade da raiz de um polinómio e respetivas propriedades; Fatorização de polinómios; Resolução de inequações que envolvem polinómios.	40 pontos

Conteúdos programáticos	**Cotação (em pontos)**
Geometria analítica no plano: Referenciais ortonormados; Distância entre dois pontos no plano em função das respetivas coordenadas; Equações e inequações cartesianas de um conjunto de pontos; Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta; Equação reduzida da circunferência e inequação reduzida do cículo; Elipse; Inequações cartesianas de semiplanos.	30 pontos
Cálculo vetorial no plano: Vetores no plano; Norma de um vetor; Operações com vetores; Coordenadas de vetores; Equação vetorial de uma reta; Sistema de equações paramétricas de uma reta.	60 pontos

O material necessário para o teste é esferográfica de tinta azul ou preta e **calculadora.**

Não é permitido o uso de corretor.

O teste tem duração de **100 minutos**.

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Escola Secundária de Jaime Cortesão
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Matriz teste
10º ano – Matemática A – 9 de março
Ano letivo 2017/2018

<table>
<tr><th>Conteúdos</th><th>Recursos</th><th>Estrutura do teste/
Cotações/Instruções</th></tr>
<tr><td><u>Domínio 2: Álgebra</u>
Unidade 3: Polinómios
• Definição, adição, subtração e multiplicação de polinómios;
• Divisão euclidiana e regra de Ruffini;
• Divisibilidade de polinómios e teorema do resto;
• Multiplicidade da raiz de um polinómio e respetivas propriedades;
• Fatorização de polinómios;
• Resolução de inequações que envolvem polinómios.

<u>Domínio 3: Geometria Analítica</u>
Unidade 1: Geometria analítica no plano
• Referenciais ortonormados;
• Distância entre dois pontos no plano em função das respetivas coordenadas;
• Equações e inequações cartesianas de um conjunto de pontos;
• Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta;
• Equação reduzida da circunferência e inequação reduzida do círculo;
• Elipse;
• Inequações cartesianas de semiplanos.

Unidade 2: Cálculo vetorial no plano
• Vetores no plano;
• Norma de um vetor;
• Operações com vetores;
• Coordenadas de vetores;
• Equação vetorial de uma reta;
• Sistema de equações paramétricas de uma reta.

Unidade 3: Geometria Analítica no espaço
• Referenciais cartesianos ortonormados do espaço;
• Equações de planos paralelos aos planos coordenados:
• Equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos;</td>
<td>Material de apoio ao estudo:
• Manual
• Caderno diário

Material a utilizar:
• Folha de teste
• Caneta preta ou azul
• Máquina de calcular cientifica

Notas:
• Não é permitido o uso de lápis nem de corretor
• Não é permitido o empréstimo de material escolar durante o teste
• Não é fornecido qualquer tipo de formulário</td>
<td>O teste é constituído por:
• 6 itens de seleção
Cotação: 5×6=30 pontos
• 4 itens de construção
Cotação: 170 pontos

• Para responder às questões de escolha múltipla:
✓ Escreva, na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção correta;
✓ Não apresente cálculos nem justificações.</td></tr>
</table>

• Distância entre dois pontos no espaço; • Equação do plano mediador de um segmento de reta; • Equação cartesiana reduzida da superfície esférica; • Inequação cartesiana reduzida da esfera. **Unidade 4: Cálculo Vetorial no espaço** • Generalização ao espaço dos conceitos e propriedades básicas do cálculo vetorial; • Equações de retas no espaço.		• Para responder aos itens de construção: ✓ Apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias; ✓ Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Escola Secundária de Jaime Cortesão
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Matriz teste
10º ano – Matemática A – 25 de maio
Ano letivo 2017/2018

Conteúdos	Recursos	Estrutura do teste/ Cotações/Instruções
Domínio 4: Funções reais de variável real **Unidade 1. Funções: Generalidades** • Noção de função, domínio, conjunto de chegada e contradomínio; • Produtos cartesianos de conjuntos; • Gráficos de funções; • Igualdade de funções; • Restrições de uma função; • Imagem de um conjunto por uma função; • Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas; • Composição de funções; • Função inversa de uma função bijetiva. **Unidade 2. Funções reais de variável real: generalidades** • Funções reais de variável real; funções definidas por expressões analíticas; • Propriedades geométricas dos gráficos de funções. **Unidade 3. Monotonia, Extremos e concavidade.** • Intervalos de monotonia de uma função real de variável real: funções afins e funções quadráticas; • Vizinhança de um ponto da reta numérica; extremos relativos e absolutos; • Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real. **Unidade 4. Funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica, módulo e definidas por ramos.** • Funções quadráticas: extremos, sentido das concavidades, raízes e representação gráfica; • Inequações quadráticas; • Funções definidas por ramos;	**Material de apoio ao estudo:** • Manual • Caderno diário **Material a utilizar:** • Folha de teste • Caneta preta ou azul • Máquina de calcular **Notas:** • Não é permitido o uso de lápis nem de corretor • Não é permitido o empréstimo de material escolar durante o teste • Não é fornecido qualquer tipo de formulário	**O teste é constituído por:** • 6 itens de seleção Cotação: 5×6=30 pontos • 4 itens de construção Cotação: 170 pontos • Para responder às questões de escolha múltipla: ✓ Escreva, na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção correta; ✓ Não apresente cálculos nem justificações.

• Estudo das funções $x \longmapsto a\|x-b\|+c, a \neq 0$; • Equações e inequações com módulos; • As funções raiz quadrada e raiz cúbica enquanto funções inversas; • Domínio e representação gráfica das funções definidas analiticamente por $f(x) = a\sqrt{x-b}+c$ e $f(x) = a\sqrt[3]{x-b}+c$;		• Para responder aos itens de construção: ✓ Apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias; ✓ Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Anexo F

Minitestes

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes
3000-303 COIMBRA

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Matemática A – Miniteste 1

Nome: ……………………………………………………….………….. **Nº** …… **Turma** ……

Classificação …………………………………….. **Professora** ……………………………..

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, a letra identifique a opção escolhida.

1. Considere a proposição:

"O quadrado de qualquer número real é um número real positivo."

Qual das seguintes proposições é equivalente à proposição dada?

(A) $\sqrt{3}$ é um número irracional.
(B) A soma dos três menores números primos é 10.
(C) $\sqrt{9}+\sqrt{4}=\sqrt{13}$.
(D) $\sqrt{(-2)^2}=2$.

2. Considere os números $a=\sqrt{6}+1$ e $b=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Qual é o valor exato de a^2+b^2?

(A) $2\sqrt{6}+2$ **(B)** $2\sqrt{6}+12$ **(C)** $4\sqrt{6}+12$ **(D)** $4\sqrt{6}+2$

3. Sendo $A=2^{\frac{1}{3}}$ e $B=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}$, pode afirmar-se que $A^2\times B$ é igual a :

(A) $\sqrt[12]{2}$ **(B)** $2\sqrt[11]{12}$ **(C)** $\sqrt[11]{12}$ **(D)** $\sqrt[12]{2^{11}}$

1. **2.** **3.**

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere $a = 7 + 5\sqrt{2}$ e $\sqrt{2} - 3$. Calcule $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ e apresente o resultado com denominador racional.

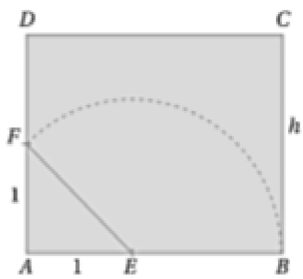
2. Considere o número 259 200. Sabe-se que 259 200 = $2^7 \times 3^4 \times 5^2$. Sabendo que $\sqrt[4]{259\,200} = 6\sqrt[4]{n}$, determine o valor de n.

3. Mostre que $\sqrt{\frac{13}{4} - \sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$.

4. Tendo em conta a figura, sabe-se que:

- $[ABCD]$ é um retângulo de base $[AB]$ e altura h;
- $\overline{AE} = \overline{AF} = 1cm$;
- E e F são pontos de $[AB]$ e $[AD]$, respetivamente;
- A área do retângulo é de 4 cm^2.

Determine o valor de h.



Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes
3000-303 COIMBRA

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Matemática A – Miniteste 2

Nome: ………………………………………………………….………... **N.º** …… **Turma** ……

Classificação …………………………………….. **Professora** ……………………………..

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, a letra que identifique a opção escolhida.

1. Sejam f e g duas funções definidas por $f(x)=\sqrt{6-2x}$ e $g(x)=2-\sqrt{2x}$, respetivamente. Qual das seguintes afirmações é falsa?

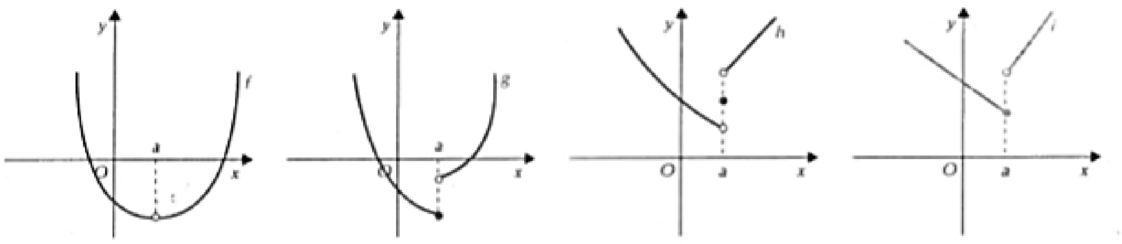
(A) $(g\circ f)(1)=0$

(B) $\frac{f(1)}{g(1)}=2+\sqrt{2}$

(C) $g(1)^{-1}=\frac{1}{2}$

(D) $g(2)-f(2)=0$

2. Considere as funções f, g, h e i, representadas graficamente. Quais destas funções têm um mínimo relativo em a?



(A) f, g e i

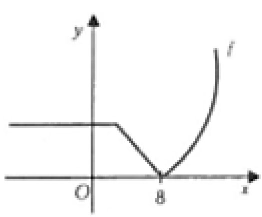
(B) f e i

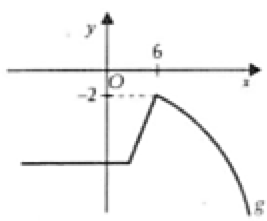
(C) g e i

(D) g e h

3. Na figura encontram-se representados parte dos gráficos das funções f e g.Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $g(x)=f(x+2)-2$
(B) $g(x)=-f(x+2)-2$
(C) $g(x)=-f(x-2)-2$
(D) $g(x)=f(x-2)+2$





1. **2.** **3.**

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

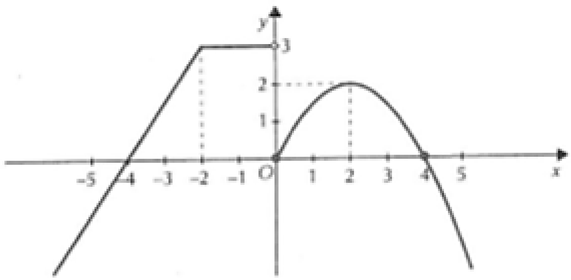
1. Considere as funções reais de variável real f, g e h, definidas, respetivamente, por:
$f(x) = 4x + 1$, $g(x) = \frac{3}{x-1}$, $h(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$ e $i(x) = (x+1)^2$

1.1. Determine os domínios das funções g e h.

1.2. Os objetos para os quais f e i têm a mesma imagem.

1.3. Determine a expressão analítica de $g \circ f$ e averigue se as funções f e g são permutáveis.

2. Na figura está representado parte do gráfico da função f de domínio $\mathbb{R}$. Indique:



2.1. os intervalos em que a função é estritamente crescente.

2.2. caso existam, os mínimos relativos, os máximos relativos e os respetivos minimizantes e maximizantes.

Grupo I			Grupo II				
1	2	3	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2
10	10	10	40	30	40	20	40

Anexo G

Testes

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes
3000-303 COIMBRA

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA A – 10.º Ano

Ficha de avaliação 27/10/2017

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. A expressão $\sqrt[4]{(-2)^4}$:

(A) é igual a -2. **(B)** é igual a 2.
(C) é igual a -16. **(D)** não é um número real.

2. Considera as proposições:

p: "A Filipa leu o *Memorial do Convento*"
q: "A Filipa leu *Os Maias*"
r: "A Filipa leu *Felizmente Há Luar!*"

Sabendo que é verdadeira a proposição:

$$\sim[(p \Rightarrow \sim r) \vee (p \wedge \sim q)]$$

quais foram os livros que a Filipa leu?

(A) Apenas o *Memorial do Convento.* **(B)** O *Memorial do Convento* e *Os Maias.*
(C) *Os Maias* e *Felizmente Há Luar!* **(D)** Os três livros.

3. Qual das proposições seguintes é falsa?

(A) $\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ é } ímpar \Rightarrow n+5 \text{ é } par$
(B) $\exists n \in \mathbb{N} : 43 < 10n < 49$
(C) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$
(D) $\exists x \in \mathbb{R} : x < 0 \wedge x + 1 > 0$

4. Qual das condições seguintes é universal em $\mathbb{N}$?

(A) $3n + 1 > 5$ **(B)** $n + 4$ não é múltiplo de $n + 1$
(C) $3247 - 3n \neq 1$ **(D)** $n^2 + n + 1$ é um número ímpar

5. Considere os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x > 17\} \quad B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é } primo\} \quad C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é } divisor\ de\ 28\}$$

Qual dos seguintes conjuntos é igual a $(\bar{A} \cap B) \cup C$?

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, 14, 17, 28\}$ **(B)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, 14, 28\}$
(C) $\{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, 14, 17\}$ **(D)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, 14\}$

6. Se $p = 2 + \sqrt{2}$ e $q = 2 - \sqrt{2}$, então $p \times q - p$ é igual a:

(A) $-\sqrt{2}$ **(B)** $2 - \sqrt{2}$ **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** $2 + \sqrt{2}$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere as proposições

$$p: \ \forall x \in \mathbb{R}, \ x > 1 \ \Rightarrow \ x > 0 \qquad q: \forall x \in \mathbb{R}, \ 4x^2 - 1 \ \geq 0$$

1.1. Indique, justificando, qual o valor lógico de cada uma das proposições?

1.2. Escreva:

1.2.1. a contrarrecíproca da proposição *p*;

1.2.2. a negação da proposição *p*.

2. O Diogo, o João e o Gabriel são três amigos. Considere as proposições

a: O Diogo toca viola. *b*: O João toca bateria. *c*: O Gabriel toca piano.

Sabendo que a proposição $(b \Rightarrow \sim a) \vee (a \Rightarrow c)$ é falsa, o que pode concluir acerca dos instrumentos que cada um dos amigos toca?

3. Considere os conjuntos

$A = \{x \in \mathbb{Z}: -2 < 2x - 1 < 2\}$ $B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x + 3 = 0\}$ $C = \{\in \mathbb{Z}: |x| < 4\}$

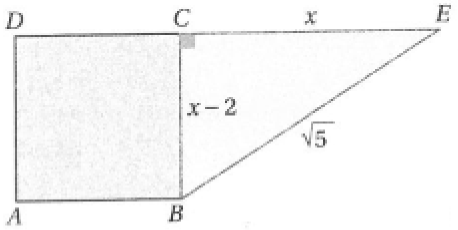
Defina em extensão os conjuntos:
3.1. A **3.2.** B **3.3.** C **3.4.** $A \cap C$ **3.5.** $\bar{B}$ **3.6.** $A \cap \bar{B}$

4. Efetue e simplifique:

4.1. $5\sqrt{12} + \sqrt[3]{54} - 2\sqrt{108} - \sqrt[3]{128}$

4.2. $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) - \left(\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}\right)^2$

5. Na figura está representado o quadrado $[ABCD]$ e o triângulo $[BCE]$ retângulo em C.

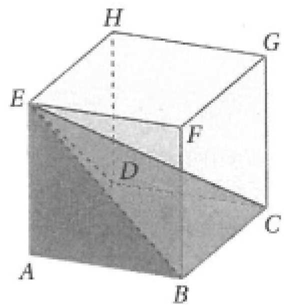


Considere $\overline{CE} = x$, $\overline{BC} = x - 2$ e $\overline{BE} = \sqrt{5}$.

5.1. Mostre que $x = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$.

5.2. Determine a área do quadrado.

6. Na figura está representado o cubo $[ABCDEFGH]$ e a pirâmide $[ABCDE]$. Sabe-se que $\overline{BC} = \sqrt{12}$ cm. Determine o volume da parte do cubo não ocupada pela pirâmide.



Nota: O volume V de uma pirâmide é igual a $V = \frac{1}{3} \times A_b \times h$, em que A_b é a área da base e h é a altura da pirâmide.

Grupo I						Grupo II														
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**1.1**	**1.2.1**	**1.2.2**	**2**	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**3.6**	**4.1**	**4.2**	**5.1**	**5.2**	**6**
5	5	5	5	5	5	10	10	10	15	10	10	10	10	10	10	15	15	10	10	15

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes
3000-303 COIMBRA

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA A – 10.º Ano

Ficha de avaliação 06/12/2017

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Das seguintes proposições, apenas uma é verdadeira. Identifique-a.

(A) Se zero é um número real não positivo, então 2 não é um número primo.

(B) $-\frac{1}{3} < -\frac{2}{5}$ e $3^2 = 9$

(C) $\frac{1}{5} < 1$ ou $4 + 2 = 5$

(D) $\sqrt{2}$ não é um número irracional é equivalente a $2\pi^2 < (2\pi)^2$.

2. Considera, em $\mathbb{R}$, as condições:

$$p(x): 20 - 3x \geq 47 \qquad q(x): |x| < 4 \ \wedge \ x^2 + 5 < 0$$

Das seguintes proposições indique a que **não** é verdadeira:

(A) $\exists x \in \mathbb{R} : p(x)$

(B) $\forall x \in \mathbb{R}, \sim q(x)$

(C) $\forall x \in \mathbb{R}^-, p(x)$

(D) $\exists x \in \mathbb{R}: \sim q(x)$

3. Do retângulo $[ABCD]$ representado na figura, sabe-se que a sua área é igual a 5 e que $\overline{AB} = 2 + \sqrt{3}$. Então, $\overline{AD}$ é:

(A) $\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$

(B) $2 - \sqrt{3}$

(C) $\frac{67}{50}$

(D) $10 - 5\sqrt{3}$

4. Considere a expressão:

$$\frac{\sqrt{ab^3}\ \sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[6]{ab^5}}, a, b \in \mathbb{R}^+$$

Uma expressão equivalente à dada é:

(A) a

(B) b

(C) $\sqrt{ab}$

(D) ab

5. Seja $P(x) = x^3 + x^2 - (k^2 + 1)x - k$, $k \in \mathbb{Z}$. Se $P(x)$ é divisível por $x - 2$, então qual é o valor de k?

(A) 5 **(B)** 4 **(C)** 3 **(D)** 2

6. Seja $P(x)$ um polinómio tal que $P(x) = (x + 2)^n(x - 1)(x^2 - 4)$, $n \in \mathbb{N}$. Qual dos seguintes polinómios representa o quociente da divisão inteira de $P(x)$ por $x - 2$?

(A) $(x + 2)^n(x - 1)$ **(B)** $(x + 2)^{n+1}(x - 1)$

(C) $(x + 2)^n$ **(D)** $(x + 2)^{n-1}(x - 1)$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Recorrendo apenas às propriedades das operações lógicas, determine o valor lógico da proposição

$$\sim[(p \Rightarrow q) \vee p] \Rightarrow q$$

2. Considere, em $\mathbb{R}$, as condições:

$\boldsymbol{a(x)}: 3 - \frac{1-x}{2} < \frac{7}{2}$ $\boldsymbol{b(x)}: (x^2 + 3x)(x - 2) = 0$ $\boldsymbol{c(x)}: |x| \geq 1$

2.1. Determine, sob a forma de intervalo de números reais, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}: a(x)\}$.

2.2. Represente, em extensão, os seguintes conjuntos

2.2.1. $\boldsymbol{B} = \{x \in \mathbb{R}: b(x)\}$ **2.2.2.** $D = \{x \in \mathbb{R}: \sim c(x) \wedge b(x)\}$

2.3. Considere a condição: $c(x) \Rightarrow a(x)$.

2.3.1. Escreva a implicação contrarrecíproca da condição dada.

2.3.2. Indique, justificando, o valor lógico da proposição:

$$\forall x \in \mathbb{R}, c(x) \Rightarrow a(x)$$

2.3.3. Escreva, sem utilizar o símbolo ~, a negação da proposição

$$\forall x \in \mathbb{R}, c(x) \Rightarrow a(x)$$

3. Mostre que:

$$\frac{2\sqrt{28} - \sqrt{14} \times \sqrt[4]{4}}{\sqrt{\frac{7}{9}} + \sqrt[3]{7\sqrt{7}}} = \frac{3}{2}.$$

4. Simplifique a expressão seguinte, apresentando o resultado na forma $a + b\sqrt{3}$, em que a e b são números racionais.

$$\left(\sqrt{3}\right)^{-2} + \left(\sqrt{3}\right)^{-1} + \left(\sqrt{3}\right)^{0} + \left(\sqrt{3}\right)^{1} + \left(\sqrt{3}\right)^{2}$$

5. Considere os polinómios $R(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ e $S(x) = 3x - 2$.

5.1. Sem recorrer ao algoritmo da divisão, determine o quociente e o resto da divisão de $R(x)$ por $S(x)$.

5.2. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $R(x) = 0$.

5.3. Determine o valor exato da expressão

$$\frac{4}{R\left(\sqrt[3]{2}\right)+S(\sqrt[3]{4})}.$$

6. Considere o polinómio $P(x) = x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2$.

6.1. Verifique que 1 é uma raiz de $P(x)$ e determine a sua multiplicidade.

6.2. Decomponha $P(x)$ num produto de fatores de grau 1.

6.3. Resolva a inequação $P(x) \geq 0$.

Grupo I						**Grupo II**														
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**1.**	**2.1**	**2.2.1**	**2.2.2**	**2.3.1**	**2.3.2**	**2.3.3**	**3**	**4**	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**6.1**	**6.2**	**6.3**
5	5	5	5	5	5	15	10	10	15	5	5	10	15	15	10	10	15	10	10	15

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Escola Secundária de Jaime Cortesão
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

Ficha de avaliação 2/2/2018

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Considere as seguintes proposições p e q:

$$\textbf{p:} \sqrt[3]{\sqrt{125}} = \sqrt[3]{5} \qquad \textbf{q:} \frac{7}{2+3\sqrt{2}} = -1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Das quatro proposições que se seguem apenas uma é **falsa**. Identifique-a.

(A) $p \Rightarrow q$ (B) $p \vee q$ (C) $\sim p \wedge q$ (D) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

2. A proposição $\sim (\exists x \in \mathbb{R} : |x-1| = 2)$ é equivalente a:

(A) $\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| = 2$ (B) $\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \neq 2$
(C) $\exists x \in \mathbb{R} : |x-1| = 2$ (D) $\exists x \in \mathbb{R} : |x-1| \neq 2$

3. Considere os conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{x+1}{2} \leq \frac{x}{3} \right\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$$

O conjunto $A \cap B$ pode ser definido por:

(A) $\left[\frac{3}{5}, 2\right[$ (B) $\left[\frac{3}{5}, +\infty\right[$ (C) $]-2, 2[$ (D) $]-\infty, 2[$

4. Considere o polinómio $P(x) = 2x^3 + mx - 10 (m \in \mathbb{R})$.
O valor de m de modo que $P(x)$ dividido por $x+1$ tenha resto 2 é:

(A) -8 (B) -10 (C) -12 (D) -14

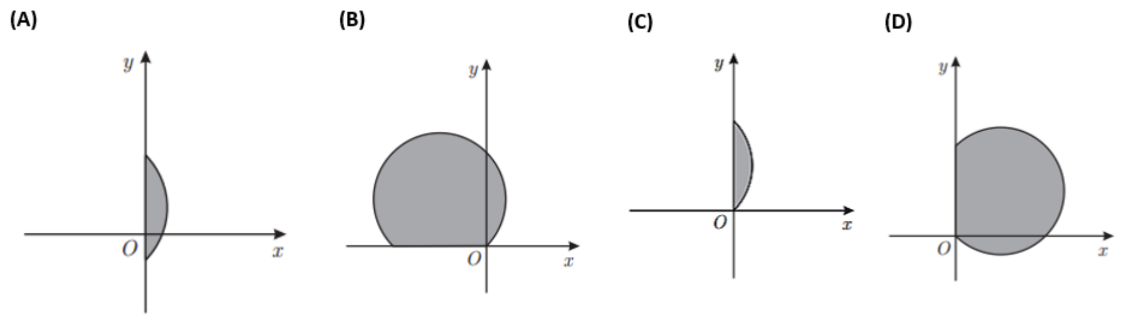
5. Considere, num plano munido de um referencial cartesiano, a reta r definida por

$$(x, y) = (-3, 2) + k(8, -6), \quad k \in \mathbb{R}$$

As coordenadas de um vetor diretor da reta r podem ser:

(A) $(-8, -6)$ (B) $(-3, 2)$ (C) $(4, 3)$ (D) $\left(-1, \frac{3}{4}\right)$

6. Considere a condição $(x+1)^2+(y-1)^2 \leq 2 \quad \wedge \quad x \geq 0$.
Em qual das opções seguintes está representado, em referencial o.n. xOy, o conjunto de pontos definido por esta condição?



Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere os conjuntos:

$A=\left\{x \in \mathbb{Z} : \frac{7}{5} \geq 1-\frac{x+3}{5} > -2\right\} \quad B=\left\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 16\right\} \quad C=\{x \in \mathbb{Z} : a < x \leq b\}$

1.1 Defina em extensão, os conjuntos A, B e $A \setminus B$.

1.2 Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das proposições

(a) $\exists x \in A : \frac{1}{x} \geq 1$ (b) $\forall x \in B, |x| = \sqrt{x^2}$

1.3 Admita que a e b são números inteiros.

Determine a e b de modo que obedeça às duas condições seguintes:
- o número de elementos do conjunto $A \cap C$ seja 6;
- o número de elementos do conjunto $A \cup C$ seja 20.

2. Sejam $a = 2+\sqrt{2}$ e $b = \sqrt{2}-2$.
Calcule e apresente o resultado com denominador racional.

2.1 $\frac{b^2}{a}$ 2.2 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

3. Considere o polinómio $P(x) = x^4+x^3-kx^2-2x+k$, sendo k um número inteiro.

3.1 Sabendo que $P(x)$ é divisível por $x+2$, determina o valor de k.

3.2 Suponha que $k=1$. Determine o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ pelo binómio $x+2$.

3.3 Suponha agora que $k=0$. Determine o conjunto-solução da inequação $P(x)<0$, sabendo que 1 é uma das raízes do polinómio $P(x)$.

4. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A(2,-3)$, $B(-4,2)$ e $C(5,-2)$.
   Escreva uma equação cartesiana que defina:

   4.1 reta perpendicular ao eixo Oy que passa pelo ponto C;

   4.2 o conjunto de pontos do plano que estão à mesma distância de B e de C;

   4.3 a circunferência de diâmetro $[AB]$.

5. Considere, num plano munido de um referencial cartesiano, a reta r definida por:

$$(x,y)=(1,2)+t(-5,3), \quad t \in \mathbb{R}$$

   5.1 Determine a abcissa do ponto da reta r que tem ordenada -7.

   5.2 Determine as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o eixo das ordenadas.

   5.3 Escreva a equação reduzida da reta r.

   5.4 Escreva um sistema de equações paramétricas que defina a reta r.

   5.5 Determine a equação reduzida da reta s, paralela à reta r, que passa pelo ponto P de coordenadas $(-4,1)$.

   5.6 Determine as coordenadas de um vetor diretor da reta de norma igual a $2\sqrt{34}$.

Grupo I						Grupo II																
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**2.1**	**2.2**	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**5.4**	**5.5**	**5.6**
5	5	5	5	5	5	15	10	10	10	10	10	10	15	5	10	10	10	10	5	10	10	10

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro

Escola Secundária de Jaime Cortesão

Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Ficha de avaliação 9/3/2018

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Seja $P(x)$ um polinómio do 3º grau. Sabe-se que

   - 1 e -2 são zeros do polinómio, sendo 1 um zero duplo;
   - $P(-1) = 8$.

   Pode concluir-se que $P(0)$ é igual a:

   (A) 2 (B) 4 (C) -4 (D) 8

2. As três raízes do polinómio $P(x) = 9x^3 - 31x - 10$ são 2, p e q. O valor de $p^2 + q^2$ é:

   (A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{10}{9}$ (C) $\frac{26}{9}$ (D) $\frac{31}{9}$

3. Em relação a um referencial o.n. xOy, a reta de equação $y = \frac{1}{2}x - 1$ é a mediatriz de $[AB]$. Sendo $C(k+1, k), k \in \mathbb{R}$, um ponto equidistante de A e de B, o valor de k é:

   (A) -1 (B) -4 (C) 2 (D) -3

4. Considere, num plano munido de um referencial cartesiano, as retas r e s definidas por:

   $$\textbf{r: } 3x + 2y - 4 = 0 \qquad \text{e} \qquad \textbf{s: } \begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = -2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

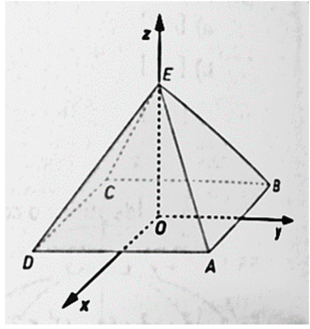
   As retas r e s intersetam-se num ponto I. A que quadrante pertence o ponto I?

   (A) 1º quadrante (B) 2º quadrante (C) 3º quadrante (D) 4º quadrante

5. Considere, fixado um referencial cartesiano do espaço, o ponto $A(2, -3, -4)$.
   Qual das seguintes condições pode definir uma reta paralela ao eixo Oy que passa no ponto A?

   (A) $y = -3 \land z = -4$ (B) $x = 2 \land y = -3$ (C) $x = 2 \land z = -4$ (D) $x = 0 \land y = -3$

6. Num referencial o.n. $Oxyz$ está representada uma pirâmide regular, cuja base está contida no plano xOy. O centro da base da pirâmide coincide com a origem do referencial. Sabe-se que:



- D, A e B têm coordenadas $(3,-4,0)$, $(3,4,0)$, $(-3,4,0)$, respetivamente.
- O vértice E da pirâmide pertence ao eixo Oz.

Sabendo que $d(D,E) = 5\sqrt{2}$, pode-se afirmar que as coordenadas de E são:

(A) $(0,0,3)$ (B) $(0,0,4)$ (C) $(0,3,5)$ (D) $(0,0,5)$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. O polinómio $P(x) = -2x^3 - 2x^2 + kx + 8$, com $k \in \mathbb{R}$, é divisível por $x+1$.

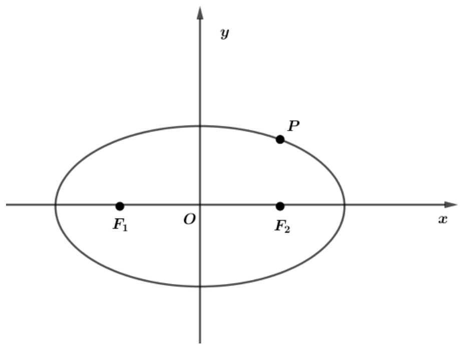
   1.1 Mostre que $k = 8$.

   1.2 Decomponha o polinómio $P(x)$ em fatores do 1º grau.

   1.3 Resolva a inequação $P(x) \geq 0$.

2. Num plano munido de um referencial o.n. xOy, está representada uma elipse. Sabe-se que:

   - A origem do referencial coincide com o centro da elipse;
   - Os focos da elipse são os pontos $F_1(-2,0)$ e $F_2(2,0)$;
   - O ponto $P\left(2,\frac{5}{3}\right)$ pertence à elipse.



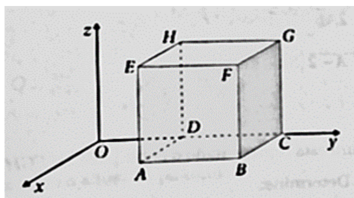
   2.1 Mostre que o eixo maior da elipse é igual a 6.

   2.2 Determine as coordenadas dos vértices da elipse (pontos de interseção com os eixos coordenados).

   2.3 Represente a elipse através da sua equação reduzida.

3. Na figura está representado um cubo $[ABCDEFGH]$ de aresta igual a duas unidades. Sabe-se, fixado um referencial ortonormado do espaço, que:

   - a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy;
   - a aresta $[DC]$ está contida no eixo Oy;
   - o ponto D tem de coordenadas $(0,2,0)$



   3.1 Defina analiticamente:

      a) o plano mediador da aresta $[EF]$;

      b) a aresta $[FG]$;

      c) a face $[EFGH]$.

3.2 Determine a inequação reduzida da esfera tangente a todas as faces do cubo.

3.3 Determine uma equação do plano mediador do segmento de reta $[TP]$ tal que:

- T é o ponto médio da aresta $[EH]$;
- P é o centro da face $[BCGF]$.

4. No espaço, em referencial o.n. $Oxyz$, considera a superfície esférica definida pela equação

$$x^2 + 2x + y^2 + z^2 - 2z = 2$$

e a reta r definida pela equação

$$(x, y, z) = (-3, -1, -2) + k(2, 1, 3), \quad k \in \mathbb{R}$$

.

4.1 Determine as coordenadas dos pontos de interseção da reta r com os planos coordenados.

4.2 Represente a reta r através de equações paramétricas.

4.3 Seja s a reta paralela à reta r que passa pelo ponto de interseção da superfície esférica com o semieixo positivo das ordenadas. Representa a reta s por uma equação vetorial.

4.4 Mostre que o centro da superfície esférica é $C(-1, 0, 1)$ e pertence à reta r.

Grupo I																				
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**3.1 a)**	**3.1 b)**	**3.1 c)**	**3.2**	**3.3**	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**4.4**
5	5	5	5	5	5	10	10	15	10	15	10	10	10	10	10	15	10	10	10	15

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Escola Secundária de Jaime Cortesão
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

Ficha de avaliação 25/5/2018

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. De uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:
   - $g(0) = 1$;
   - g é estritamente crescente em $[0, +\infty[$;
   - g é par;

   Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira.

   (A) O contradomínio de g é $[0, +\infty[$.
   (B) g é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.
   (C) g é injetiva.
   (D) g não tem zeros.

2. Seja f uma função real de variável real, de domínio $[-3, 4]$, definida analiticamente por $f(x) = -x + 3$. Selecione a afirmação verdadeira.

   (A) f é crescente e $D'_f = [-1, 6]$.
   (B) f é decrescente e $D'_f = \mathbb{R}$.
   (C) f é descrescente e $D'_f = [-1, 6]$.
   (D) f é injetiva e crescente.

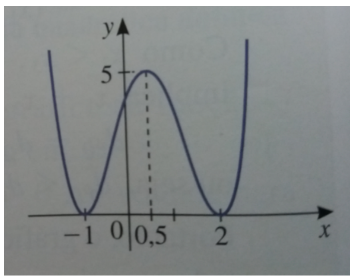
3. Considere a função de domínio $\mathbb{R}$ representada graficamente na figura ao lado. Sabe-se que esta é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e estritamente crescente em $[2, +\infty[$.
   Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

   (A) A função tem o máximo absoluto 5 e o mínimo absoluto 0.

   (B) Um máximo relativo da função é 5 e o mínimo absoluto 0.

   (C) Os mínimos relativos da função são -1 e 2 e o máximo relativo é $0,5$.

   (D) A função não tem extremos absolutos.



4. De uma função quadrática f, sabe-se que a condição $f(x) \leq 0$ tem conjunto solução $[-1, 3]$. Então, o contradomínio de f pode ser:

   (A) $[2, +\infty[$ (B) $]-\infty, 3]$ (C) $[-2, \infty[$ (D) $]-\infty, -2]$

5. Seja f uma função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, tal que:
   - 1 é um maximizante de f;
   - -3 é um mínimo relativo de f.

   Indique qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira:
   (A) -1 é um minimizante e 3 é um máximo relativo da função g, definida por $g(x) = -f(x)$.
   (B) -1 é um maximizante e -3 é um máximo relativo da função h, definida por $h(x) = f(-x)$.
   (C) 2 é um maximizante e -6 é um mínimo relativo da função i, definida por $i(x) = 2f(x)$.
   (D) 3 é um maximizante e -6 é um mínimo relativo da função j, definida por $j(x) = 2f(x2)$.

6. Considera a função definida por $f(x) = |2x - 4|$. O conjunto-solução de $f(x) < 2$ é:

   (A) $]1, 3[$ (B) $[1, 3]$ (C) $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$ (D) $]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere a família de funções reais de variável real definidas por $f(x) = (a - 1)x + 2a$, $a \in \mathbb{R}$. Determine os valores de a para os quais:

   1.1 f seja estritamente decrescente;

   1.2 o gráfico de f interseta o eixo Ox no ponto de abcissa -1;

   1.3 o gráfico de f seja uma reta paralela ao eixo das abcissas.

2. Considere a função quadrática f definida por:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

   2.1 Escreva $f(x)$ na forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$ sendo (h, k) as coordenadas do vértice da parábola que define graficamente a função.

   2.2 Indique os intervalos máximos de monotonia e os extremos de f.

   2.3 Para que valores reais de k a função $f(x) + k$ é sempre positiva?

   2.4 Comente a afirmação: "O gráfico de f é simétrico relativamente ao eixo Oy".

   2.5 Determine o domínio da função g definida por $g(x) = 1 - \sqrt{f(x) - 1}$.

3. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} 4 & se \quad x \leq -1 \\ 2 - x & se \quad -1 < x < 1 \\ x^2 + 1 & se \quad x \geq 1 \end{cases}$

   3.1 Esboce o gráfico da função.

   3.2 Calcule $f\left(-\sqrt[3]{3}\right) - f(0) + f\left(\sqrt{2}\right)$.

   3.3 Indique o contradomínio de f.

   3.4 Mostre analiticamente que a função não tem zeros.

   3.5 Para que valores reais de k a equação $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções?

4. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ pela expressão $f(x) = 2\,|x-1| + 4$.

   4.1 Determine as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de f com os eixos coordenados.

   4.2 Indique o contradomínio de f.

   4.3 Resolva a condição $f(x) < 6$.

   4.4 Indique um intervalo do domínio onde a função é injetiva.

Anexo H

Autorização para a frequência do apoio

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes
3000-303 COIMBRA

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Apoio Pedagógico Acrescido

Exmo/a. Sr/a. Encarregado/a de Educação

A professora de Matemática, após a realização da primeira ficha de avaliação sumativa e análise dos respetivos resultados, decidiu, como estratégia que leve o/a seu/sua educando/a a ultrapassar algumas dificuldades de aprendizagem conduzindo-o/a a possível sucesso educativo, recomendar a assistência a aulas de Apoio Pedagógico Acrescido.

Disciplina(s)	Dia da semana	Hora
Matemática A	4.ª feira	15h15min – 16h05min

Data _____/_____/_____ A professora de Matemática A______________________

Declaração

Eu,____Encarregado/a de Educação do/a aluno/a____ nº_____ Turma_____ Ano____ declaro que tomei conhecimento do Plano de Apoio que foi proposto ao meu/à minha educando/a e declaro que autorizo ☐ não autorizo ☐ a sua frequência.

Data ___/___/____ Assinatura do/a Encarregado/a de Educação ______________________

Anexo I

Fichas para o apoio

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Escola Secundária de Jaime Cortesão
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

Apoio Pedagógico Acrescido 14 de Março de 2018

---

1. No referencial o.n. da figura está representado o gráfico de uma função f, constituido por dois segmentos de reta e por parte da parábola definida por $y = 2x^2$.
Indica:

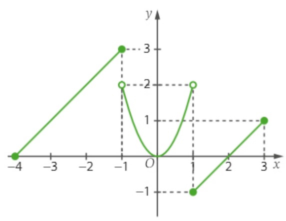
   1.1 as coordenadas do ponto do gráfico de f cuja abcissa é 1;

   1.2 as abcissas dos pontos do gráfico de ordenadas 0;

   1.3 os valores de $f(3)$ e $f(-1)$;

   1.4 o domínio de f;

   1.5 o contradomínio de f.



2. Sejam f e g as funções definidas por:

   2.1 2.2 $\frac{x+3}{5} > 2(x-1)$ 2.3 $\frac{x}{3} + \frac{1-x}{2} \geq x$

3. Escreva na forma reduzida os seguintes polinómios

   3.1 $(a+3)(a-3) + 2(a+4)(a-3)$ 3.2 $(3x+5)^2 - 2(x-4)^2$
   3.3 $(2x+\sqrt{3})(2x-\sqrt{3}) - 3(a-1)$ 3.4 $(a^2-4)(a^2+4) + (a+4)^2$

4. Fatorize os seguintes polinómios, começando por colocar em evidência fatores comuns e observando em seguida eventual ocorrência de casos notáveis que permitam prosseguir a fatorização.

   4.1 $3xy^2 - 12x^3$ 4.2 $3ax^2 + 6ax + 3a$
   4.3 $3x(x-y)^3 - 12x^3(x-y)$ 4.4 $-xy^2 + 2xy - x$

5. Considere a constante real a dada por

$$a = \sqrt{4 + \sqrt{11 + \sqrt[3]{123 + \sqrt{4}}}}$$

   Qual é o valor de a?

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro

Escola Secundária de Jaime Cortesão

Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

Apoio 11 de Abril de 2018

---

1. Determinar o domínio das funções reias de variável real definidas por:

1.1 $a(x) = \sqrt{x-1}$

1.2 $b(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$

1.3 $c(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

1.4 $d(x) = \sqrt{-x}$

1.5 $e(x) = \sqrt{5-2x}$

1.6 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$

1.7 $g(x) = \frac{1-\sqrt{2+x}}{x^2+2x-3}$

1.8 $h(x) = \sqrt{3-|1-x|}$

1.9 $i(x) = \frac{3x}{x^2-1}$

1.10 $j(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$

1.11 $k(x) = \sqrt{1-2x}$

1.12 $l(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$

1.13 $m(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{|x|-2}$

1.14 $n(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+x-12}$

1.15 $o(x) = \sqrt{1-\frac{1-2x}{2}}$

1.16 $p(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^3-7x^2+2x+3}}$

1.17 $q(x) = \frac{4x^2}{x^3+2x^2+x-4}$

Apoio 9 de Maio de 2018

---

1. Considere as seguintes funções:

   $f(x) = x^2 + 16x + 64$, $g(x) = x^2 - 10x + 25$, $h(x) = 2x^2 - 8x + 8$ e $i(x) = 4x^2 - 12x + 9$

   Para cada uma delas:

   1.1 Determine os zeros.

   1.2 Determine as coordenadas do vértice do gráfico.

   1.3 Apresente o quadro de sinal.

   1.4 Apresente o quadro de variação.

Anexo J

Relatório de Apoio

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes
3000-303 COIMBRA
Cod. 161974

RELATÓRIO DE APOIO
Tipo de apoio: **Apoio Pedagógico Acrescido**

Relatório/Balanço do **2.º** Período Ano letivo **2017/2018**	Disciplina **Matemática A** Estagiária **Vanda Campos**	Ano **10.º** Turma **1**	Horário: dia da semana **4ª feira**, **15h15min – 16h05min**

Alunos a frequentar este período		Tempos		Descrição da situação do aluno, de acordo com o registado no plano de apoio, nas dificuldades diagnosticadas, e seu reflexo nas aprendizagens. **Indicar a classificação obtida**.	Evolução		Observações/ Sugestões
Nº	Nome	**Dadas**	**Assistidas**		Sim	Não	
2		10	10	Bastante participativa, porém muito faladora. É de notar que a maior parte dos exercícios consegue resolver sozinha. Precisa de estar mais concentrada e de um estudo sistemático. **Classificação obtida: 10**	X		Deve continuar no apoio.
4		10	3	Das poucas vezes em que compareceu ao apoio mostrou-se indiferente e desestabilizou as colegas. **Classificação obtida: 3**		X	Excluída do apoio.
7		10	1	Foi proposto para apoio, tendo comparecido apenas uma vez. **Classificação obtida: 6**		X	Excluído do apoio.
28		10	3	Teve um bom desempenho, envolvendo-se ativamente nas atividades propostas. É de notar que os conteúdos se encontram bem assimilados. Precisa de se concentrar mais na resolução dos exercícios, pois os erros que faz são mera distração. **Classificação obtida: 13**	X		Excluída do apoio.
14		10	10	Apresenta dificuldades no raciocínio matemático e falta de concentração na resolução dos exercícios. Precisa de trabalhar mais em casa. **Classificação obtida: 7**	X		Deve continuar no apoio.

Alunos a frequentar este período		Tempos		Descrição da situação do aluno, de acordo com o registado no plano de apoio, nas dificuldades diagnosticadas, e seu reflexo nas aprendizagens. **Indicar a classificação obtida**.	Evolução		Observações/ Sugestões
Nº	Nome	**Dadas**	**Assistidas**		Sim	Não	
17		10	9	Bastante participativa, porém muito faladora. É de notar que a maior parte dos exercícios consegue resolver sozinha. Precisa de estar mais concentrada na resolução dos mesmos e de um estudo sistemático em casa. **Classificação obtida: 10**	X		Deve continuar no apoio.
20		10	9	Apresenta dificuldades na compreensão dos enunciados dos problemas e na resolução dos mesmos, dependendo, muitas vezes do professor. É de notar que os conteúdos lecionados nos anos anteriores não se encontram bem assimilados. **Classificação obtida: 8**		X	Deve continuar no apoio.
—		☐	☐		☐	☐	
—		☐	☐		☐	☐	
—		☐	☐		☐	☐	

Apreciação final do professor do apoio: No geral, os alunos que frequentam o apoio, são alunos participativos e interessados. Precisam de um estudo sistemático e de qualidade e rever os conteúdos lecionados nos anos anteriores.

Novas Propostas:

Assinaturas da estagiária que leciona o apoio e da Professora da Disciplina:

____________________ ____________________

Anexo K

Kahoot! na turma 10º 1

Agrupamento de Escolas Coimbra Centro
Escola Secundária de Jaime Cortesão
Rua Olímpio Nicolau Rui Fernandes

Kahoot - Perguntas/Resposta Ano Letivo 2017/2018

1. "Se amanhã estiver sol então vou à praia". A negação da proposição dada é:

   (A) Se amanhã não estiver sol, então não vou à praia.
   (B) Amanhã não vai estar sol ou vou à praia.
   (C) Amanhã vai estar sol e não vou à praia.
   (D) Se amanhã estiver sol, então não vou à praia.

Resposta: C

2. Considere as proposições p e q. Quando se afirma que $p \Rightarrow q$, é verdade que:

   (A) q é condição suficiente para p
   (B) p é condição necessária para q
   (C) q não é condição necessária para p
   (D) p é condição suficiente para q

Resposta: C

3. Sabendo que a proposição $p \Rightarrow \sim q$ é falsa, quais das seguintes proposições é verdadeira?

   (A) $\sim p \wedge q$
   (B) $q \Rightarrow \sim p$
   (C) $p \Rightarrow (q \vee \sim p)$
   (D) $p \Leftrightarrow \sim q$

Resposta: C

4. A proposição $a \wedge (a \vee b)$ é equivalente a:

   (A) V
   (B) F
   (C) b
   (D) a

Resposta: D

5. Considera a proposição $\forall x \in \mathbb{R}, x > 4 \Rightarrow x > 2$. A proposição contrarrecíproca é:
   (A) $\forall x \in \mathbb{R}, x < 4 \Rightarrow x < 2$
   (B) $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$
   (C) $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 2 \Rightarrow x \leq 4$
   (D) $\exists x \in \mathbb{R}, x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$

Resposta: C

6. O conjunto $\left\{x \in \mathbb{N} : x^2 = 16\right\}$
   (A) $\{-4, 4\}$
   (B) $\{-4\}$
   (C) $\{4\}$
   (D) $\emptyset$

Resposta: C

7. Temos que $p : \forall x \in \mathbb{R}, x < 2 \Rightarrow x^2 + x < 2$. Qual é a proposição que representa $\sim p$?
   (A) $\exists x \in \mathbb{R} : x < -2 \wedge x^2 + x \geq 2$
   (B) $\exists x \in \mathbb{R} : x < -2 \vee x^2 + x \geq 2$
   (C) $\exists x \in \mathbb{R} : x \geq -2 \vee x^2 + x \geq 2$
   (D) $\forall x \in \mathbb{R} : x < -2 \wedge x^2 + x \geq 2$

Resposta: A

8. Em $\mathbb{R}$, $x + 1 < x$ é uma condição
   (A) possível e universal
   (B) impossível
   (C) possível mas não universal
   (D) universal

Resposta: B

9. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a < b$. Se $c > 0$, qual das seguintes expressões é verdadeira?
   (A) $a + c > b + c$
   (B) $a \times c < b \times c$
   (C) $a + c = b + c$
   (D) $a \times c > b \times c$

Resposta: B

10. A fração $\frac{2}{\sqrt{6}}$ escreve-se com o denominador racional na forma:

   (A) $\sqrt{6}$

   (B) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

   (C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

   (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Resposta: C

11. Qual das afirmações seguintes está correta?

   (A) $p \wedge \sim p \Leftrightarrow v$
   (B) $p \vee \sim p \Leftrightarrow v$

Resposta: B

12. Considera os conjuntos $A =]-6, 2]$ e $Q =]-3, +\infty[$. Qual das opções seguintes apresenta o conjunto $\bar{A} \cup \bar{Q}$

   (A) $[-6, -3] \cup]-2, +\infty[$
   (B) $]-6, -3[\cup [2, +\infty[$
   (C) $]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$
   (D) $]-\infty, -3[\cup [2, +\infty[$

Resposta: C

Anexo L

Kahoot! no RVCC

1. A área de um retângulo com 10cm de comprimento e 2dm de largura é:

(A) $20cm^2$ **(B)** $20dm^2$ **(C)** $200dm^2$ **(D)** $2dm^2$

2. O perímetro de uma circunferência de diâmetro 2dm é:

(A) 12,56 dm **(B)** 19,72 dm **(C)** 6,28 cm **(D)** 628 mm

3. Uma embalagem cilíndrica para sumo tem um volume igual a 1,57l. Então

(A) altura = 125cm e raio = 4cm **(B)** altura = 125cm e raio = 2cm

4. A área de um quadrado com 4 cm de lado é:

(A) 16 cm^2 **(B)** 16 cm **(C)** 8 cm^3 **(D)** 16 cm^3

5. 12,5 litros de água correspondem a:

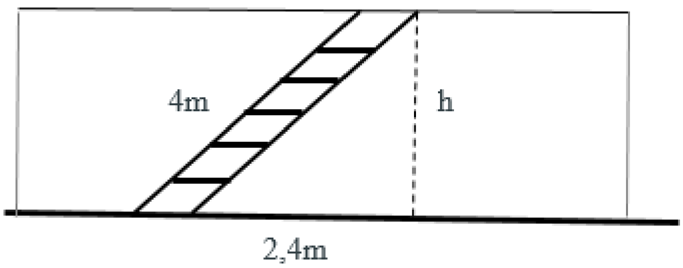
(A) 125 cm^3 **(B)** 12,5 dm^3 **(C)** 0,0125 m^3 **(D)** 1,25 dm^3

6. Um paralelepípedo tem de volume 42 cm^3, comprimento 7 cm e altura de 0,2dm. Qual a sua largura?

(A) 7 cm **(B)** 3 cm **(C)** 7 cm^2 **(D)** 3 cm^2

7. Uma escada mede 4 e está apoiada num muro e dista 2,4 m da base do muro. A altura h do muro é:

(A) 2,3m
(B) 3,0m
(C) 3,2m
(D) 3,8m

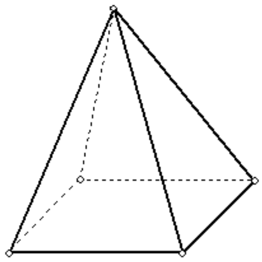


8. A média dos gastos em Internet de 5 amigos é:

Patrícia	15 €
Joana	10 €
Pedro	35 €
Daniel	35 €
Catarina	35 €
Carlota	50 €

(A) 180€ **(B)** 30€ **(C)** 25€ **(D)** 35€

9. O sólido geométrico representado na figura é:



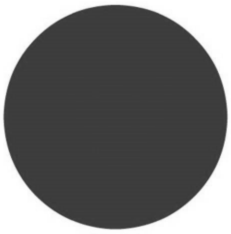
(A) um prisma triangular

(B) uma pirâmide triangular

(C) um prisma quadrangular

(D) uma pirâmide quadrangular

10. A figura plana representada na figura é:



(A) uma esfera

(B) um cilindro

(C) um círculo

(D) uma circunferência