

Maria Manuel Dionísio Pereira

Modelos Discretos para a Equação do Telégrafo: Convergência e Estabilidade

Dissertação de Mestrado em Matemática, Área de Especialização em Análise Aplicada e Computação, orientada pelo Professor Doutor José Augusto Mendes Ferreira e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Julho 2018



UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Modelos Discretos para a Equação do Telégrafo: Convergência e Estabilidade

Maria Manuel Dionisio Pereira



UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Mestrado em Matemática

Master in Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Julho 2018

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer ao meu orientador, Professor José Augusto Ferreira, por toda a disponibilidade, dedicação e todos os ensinamentos que muito contribuíram para a realização desta dissertação. Em segundo lugar, à Daniela Jordão que foi o meu "grilo falante" durante todo este ano, estando sempre presente quando eu mais precisava, um obrigado não chega.

Ao Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, a todos os seus docentes e funcionários que de certa forma marcaram todo este percurso durante 6 anos.

Aos meus pais agradeço todo o apoio que me deram toda a minha vida e a oportunidade de estar aqui. À minha restante família que sempre me apoiaram e estiveram comigo durante todo este processo.

Aos meus amigos, em especial à Mafalda, a Maria Beatriz, Daniela Silva e Bruna Rodrigues entrámos juntas neste jornada e mantivemos-nos assim até hoje, um obrigada por todas as horas de companheirismo e amizade, que espero que perdurem.

Ao NEMAT/AAC, e em especial ao André Estrada que numa reunião nas Amarelas deu-me o privilégio de entrar para aquela que viria a ser a minha segunda casa, ao Henrique Duarte por durante três anos ter partilhado comigo o mesmo amor e dedicação pelo núcleo e ao Marco Frieden por todas as discussões e conversas em que ambos temos razão.

Por fim, gostaria de agradecer aos meus amigos do secundário Adriana, Pedro, gémeas e Fábio, aos amigos do curso, a todos aqueles amigos que durante este trajeto tive o prazer de conhecer, aos amigos do núcleos de estudantes, aos amigos dos voluntariados que fizeram destes 6 anos ainda mais especiais e não faria sentido sem eles.

"C'est le temps que tu as perdu pour ta rose qui fait ta rose si importante"
- Antoine de Saint-Exupéry

Resumo

O objectivo principal deste trabalho é o estudo do problema de condições iniciais e de fronteira definido pela equação do telégrafo. Embora esta equação tenha um grande número de aplicações e tenha sido largamente utilizada na literatura, recentemente surgiu associada à libertação de fármacos e seu transporte em dispositivos médicos de entrega de fármacos responsivos a ultrasons.

No ponto de vista analítico, a existência e unicidade de solução fraca são estabelecidos. No ponto de vista numérico, vários métodos numéricos são estudados analítica ou numericamente. O suporte teórico para a estabilidade e convergência são desenvolvidos para o método de diferenças finitas implícito construído utilizando operadores de diferenças de segunda ordem para aproximar as derivadas espacial e temporal de segunda ordens e o operador de diferenças *backward* implícito para a derivada temporal de primeira ordem. O resultado de convergência mostra que as derivadas numéricas da solução numérica convergem para as correspondentes derivadas da solução contínua. Outros métodos de diferenças são considerados ao longo deste trabalho que são estudados pelo menos numericamente. Resultados numéricos que pretendem ilustrar os resultados teóricos obtidos estão também contidos neste trabalho.

Abstract

The main objective of this work is the study of the initial boundary value problem defined by the telegraph equation. Although the telegraph equation has a huge number of applications and was largely considered in the literature, recently it has been used to describe drug transport and drug delivery within ultrasound responsive drug delivery systems.

From analytical point of view the existence and uniqueness of the weak solution are established. From numerical point of view, several numerical methods were studied analytically or numerically. The stability and convergence supports were developed for the implicit finite difference method defined by the second order finite difference operators for the second order derivatives and the implicit backward finite difference operator for the first order time derivative. The convergence result shows that the numerical space and time derivatives of the numerical approximations converge for the correspondent derivatives of the theoretical solution. Other methods were also studied at least numerically. Numerical experiments illustrating the obtained theoretical results are also included.

Conteúdo

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
2 A Equação do Telégrafo - Modelo Contínuo	3
2.1 Introdução	3
2.2 Solução Fraca para a Equação com Termo Fonte	4
2.3 Solução Fraca Aproximada e sua Caracterização	5
2.4 Resultados de Existência e Unicidade	7
3 Equação do Telégrafo - Aproximação Semi-discreta	11
3.1 Introdução	11
3.2 A Aproximação Semi-Discreta	11
3.3 Estabilidade de $p_h(t)$	12
3.4 Análise da Convergência	15
3.5 Método de Diferenças Finitas versus MEF	16
4 Equação do Telégrafo - Modelo Discreto	19
4.1 Introdução	19
4.2 Estabilidade	20
4.3 Convergência	23
5 Outros Métodos para a Equação do Telégrafo	25
5.1 Introdução	25
5.2 Método de Ordem mais Elevada	25
5.3 Outro método	27
6 Simulação Numérica	29
6.1 Introdução	29
6.2 Método Implícito	30
6.3 Método de Ordem Mais Elevada	32
6.4 Método Explícito	33

7 Conclusão	35
Bibliografia	37

Lista de Figuras

6.1	Solução numérica de p_h^m para uma malha $N = 400$ e $M = 200$ e $\alpha = 2$. As imagens superiores representa o perfil da onda no instante final.	30
6.2	Solução numérica p_h^m para a malha $N = 400$ e $M = 200$ e $c = 1$ As imagens superiores representam o perfil da onda no instante final $T = 1$	31
6.3	Comparação entre solução numérica e a solução teórica, para $c = 1$, $\alpha = 2.1$, $N = 400$ e $M = 200$, (6.1).	31
6.4	Solução numérica p_h^m para uma malha $N = 100$ e $M = 1000$ e $T = 0.1$. As imagens superiores representam o gráfico da solução da equação da onda instante final.	32
6.5	Solução Numérica para no instante $T = 0.1$	33
6.6	Solução numérica p_h^m para uma malha $N = 100$ e $M = 1000$. As imagens superiores representam o perfil da olução no instante final.	34

Lista de Tabelas

6.1	Erros para diferentes malhas com $c = 10$, $\alpha = 2$ e $M = 2000$ obtidos com o método (4.1).	32
6.2	Erros para diferentes malhas para o método proposto em [1].	33
6.3	Erros para diferentes malhas com $c = 1$, $\alpha = 0.05$ e $M = 2000$ para o Método Explícito.	34

Capítulo 1

Introdução

A equação do telégrafo é uma equação de derivadas parciais de segunda ordem, linear, que pertence à classe das equações hiperbólicas. Esta equação tem sido utilizada para descrever um conjunto vasto de fenómenos físicos e biológicos clássicos. A evolução tecnológica recente e a sua aplicação na saúde, mais especificamente, no desenvolvimento de dispositivos médicos para o tratamento de patologias como o cancro, coloca novos problemas matemáticos entre os quais a equação do telégrafo tem um papel de relevo.

Entre os dispositivos médicos em estudo para o tratamento oncológico, há que destacar dispositivos para a libertação de fármacos em que se recorre a ultrasons para estimular a libertação dos fármacos bem como o seu transporte e absorção pelo tecido alvo. Um ultrassom é uma onda sonora que tem frequências superiores a 20kHz e portanto não é audível pelo ser humano ([8]). Salientamos que, desde do século XX, os ultrasons são utilizados no diagnóstico de patologias.

Nos sistemas de entrega de fármacos anteriores, os fármacos são colocados em sistema polimérico que são introduzidos no sistema circulatório. Uma alternativa a este procedimento é o recurso a uma injeção para colocar o fármaco directamente no tecido alvo. Posteriormente, o tecido alvo é bombardeado com ultrasons que estimulam o transporte e a absorção de fármacos.

A evolução de um fármaco num tecido alvo sob a acção de um ultrassom deverá ser descrito por uma equação para o ultrassom e uma equação para a concentração do fármaco. A propagação da onda acústica é descrita por uma equação hiperbólica que depende naturalmente do tipo de tecido. Assim, no caso de, num tecido mole ([7], [6]), foi proposta a equação

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, t) + 2\alpha c \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) \right) = c^2 \left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho} \nabla \rho \cdot \nabla \right) p(x, t), x \in \Omega, t > 0, \quad (1.1)$$

em que Ω denota o domínio espacial (tecido alvo), c denota a velocidade do som, ρ a densidade do tecido e α o coeficiente de atenuação. Por ∇^2 representamos o operador de Laplace e ∇ o operador gradiente, isto é, caso $\Omega \subseteq R^n$, $\nabla^2 u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$ e $\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)$. A equação anterior é naturalmente modificada em função das características do tecido.

Se a densidade do tecido é inalterada, então a equação (1.1) reduz-se a

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, t) + \alpha \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = c^2 \Delta p(x, t), x \in \Omega, t > 0. \quad (1.2)$$

Observamos que a equação (1.2) se reduz à tradicional equação de onda caso se considere uma mudança de variável conveniente. De facto, se tomarmos $p(x,t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}v(x,t)$, $x \in \Omega, t > 0$, então para $v(x,t)$ obtemos a seguinte equação de onda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \Delta v(x,t) + \frac{\alpha^2}{4}v(x,t), x \in \Omega, t > 0. \quad (1.3)$$

Observamos que as equações anteriores são complementadas com condições iniciais para a posição e para a velocidade, e caso Ω seja limitado, então há que considerar condições de fronteira.

O objectivo central deste trabalho é o estudo no ponto de vista analítico e numérico de problemas de condições iniciais e de fronteira definido por (1.3). Este estudo é relevante por si só, mas tal estudo tem um papel relevante no estudo de sistemas de libertação de fármacos estimulados por ultrasons em que a equação para a onda de pressão acústica é acoplada à equação de convecção-difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \text{div}(v(p(x,t))u(x,t)) = \text{div}(D(p(x,t))u(x,t)), x \in \Omega, t > 0, \quad (1.4)$$

em que v representa a velocidade e u representa a concentração do fármaco. Na equação anterior, div representa o operador divergência definido por $\text{div}(w(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(x)$, $w(x) = (w_1(x), \dots, w_n)$.

Além deste capítulo introdutório, este trabalho é composto por mais 5 capítulos que descrevemos de um modo sumário seguidamente.

No capítulo 2, "A Equação Do Telégrafo- O Modelo Contínuo", é feita a apresentação de um resultado de existência e unicidade para o problema de condições iniciais e de fronteira envolvendo a equação do telégrafo. Salientamos que este problema será posteriormente estudado no ponto de vista numérico nos capítulos seguintes.

No capítulo 3, "A Equação do Telégrafo - Aproximação Semi-Discreta", é introduzida a discretização espacial que será objecto de estudo neste trabalho. Neste capítulo apresentamos alguns resultados para a aproximação semi-discreta que mais não são do que versões discretas de resultados conhecidos para as soluções contínuas.

O estudo de um método numérico obtido por integração do sistema estudado no capítulo anterior com o método de Euler implícito, é apresentado no capítulo 4, "Equação do Telégrafo - Modelo Discreto". É aqui apresentando um resultado de estabilidade utilizando o método de energia e um resultado de convergência. A prova para malhas não uniformes foi mostrado em ([4]).

Com o objectivo de comparar o método estudado no capítulo anterior com outros métodos que surgem na literatura, no capítulo 5, "Outros Métodos para a Equação do Telégrafo", são apresentado outros métodos recolhidos na literatura da especialidade e são apresentados alguns resultados.

No último capítulo, "Simulação numérica", capítulo 6, são apresentados resultados numéricos que pretendem ilustrar os resultados teóricos apresentados nos capítulos anteriores.

Capítulo 2

A Equação do Telégrafo - Modelo Contínuo

2.1 Introdução

No capítulo introdutório, a equação do telégrafo foi associada à propagação de uma onda de pressão acústica num tecido alvo utilizada para estimular a libertação de fármacos de sistemas poliméricos, o seu transporte e a absorção nos tecidos alvo. Este cenário surgiu enquadrado no contexto das doenças oncológicas onde a quimioterapia constitui o tratamento tradicional e onde novos sistemas de tratamento são urgentemente necessários.

Seja p a pressão acústica descrita pela equação do telégrafo

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, t) + 2\alpha c \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) \right) = c^2 \left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho} \nabla \rho \cdot \nabla \right) p(x, t) + f(x, t), x \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.1)$$

em que Ω denota o domínio de propagação, c a velocidade de propagação, ρ a densidade do tecido alvo e α o coeficiente de atenuação. Recordamos que no caso particular da densidade ρ ser inalterada, então obtemos

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, t) + \alpha \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = c^2 \Delta p(x, t) + f(x, t), x \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.2)$$

A equação anterior é completada por condições iniciais e de fronteira obtendo-se o problema de condições iniciais e de fronteira que, no caso particular de condições de fronteira de Dirichlet homogêneas, toma a forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, t) + \alpha \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = c^2 \Delta p(x, t) + f(x, t) & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ p(x, t) = 0 & \partial\Omega, t \in \mathbb{R}^+, \\ p(x, 0) = \phi(x) & \text{em } x \in \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) & \text{em } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

em que $\partial\Omega$ denota a fronteira do Ω .

Se considerarmos a mudança de variável $p(x, t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}v(x, t)$, a equação anterior dá lugar à equação da onda com termo fonte

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \Delta v(x, t) + \frac{\alpha^2}{4} v(x, t) + e^{\frac{\alpha}{2}t} f(x, t) & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ v(x, t) = 0 & \partial\Omega, t \in \mathbb{R}^+ \\ v(x, 0) = \phi(x) & \text{em } x \in \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) + \frac{\alpha}{2} \phi(x) & \text{em } x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

A solução no sentido usual, isto é, $p \in C^{2,2}(\Omega \times \mathbb{R}_0^+) \cap C^{1,0}(\Omega \times \mathbb{R}_0^+) \cap C^{0,0}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$, requer condições adicionais para as funções ϕ e ψ . Por exemplo, no caso particular $f = 0$, $\Omega = \mathbb{R}$, $\psi \in C_0^2(\mathbb{R})$, $\phi \in C_0^1(\mathbb{R})$. Na definição anterior, $C^{i,j}(\omega_1 \times \Omega_2)$ denota o espaço das funções com derivadas parciais, de ordem inferior ou igual a i no primeiro argumento e de ordem inferior ou igual a j no segundo argumento, em $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Com o objectivo de introduzir um conceito de solução num sentido mais geral e que não requer condições tão restritivas, neste capítulo introduzimos o conceito de solução fraca para o problema (2.2) e posteriormente estabelecemos um resultado de existência e unicidade para a solução deste problema. Neste capítulo seguimos fundamentalmente a referência [3].

2.2 Solução Fraca para a Equação com Termo Fonte

Introduzimos seguidamente algumas notações que serão utilizadas posteriormente. Seja $g : \overline{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Para $t \in [0, T]$, por $g(t)$ denotamos a seguinte função $g(t) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(t)(x) = g(x, t)$, $x \in \overline{\Omega}$. Por $g'(t)$ denotamos a função $g'(t)(x) = \frac{\partial g}{\partial t}(x, t)$, $x \in \overline{\Omega}$, $t \in \mathbb{R}^+$. De modo análogo é definida a função $g''(t)$. A notação introduzida é dada por $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ denotamos o espaço das funções com suporte compacto em Ω e com derivadas de todas as ordem contínuas em Ω .

O conceito de solução fraca é seguidamente motivado. Consideremos o problema (2.4) com \mathbb{R}_0^+ substituído por $[0, T]$. Seja $q \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Por (\cdot, \cdot) denotamos o produto usual em $L^2(\Omega)$. A partir da primeira equação de (2.4), vem

$$(v''(t), q) = c^2 (\Delta v(t), q) + \frac{\alpha^2}{4} (v(t), q) \quad (2.5)$$

e portanto,

$$(v''(t), q) + c^2 (\nabla v(t), \nabla q) - \frac{\alpha^2}{4} (v(t), q) = 0 \quad (2.6)$$

Atendendo a que $H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}$ relativamente à norma do espaço $H_0^1(\Omega)$, consideramos a seguinte igualdade

$$(v''(t), q) + c^2 (\nabla v(t), \nabla q) - \frac{\alpha^2}{4} (v(t), q) = 0 \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \quad (2.7)$$

para caracterizar a solução de (2.4) no sentido fraco.

Na definição que introduzimos seguidamente vamos ainda utilizar as notações seguintes: o dual de $H^1(\Omega)$ é representado por $H^{-1}(\Omega)$ e por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotamos o produto dual; por $L^2(0, T, V)$ representamos o espaço das funções $g : [0, T] \mapsto V$ tais que $\int_0^T \|g(t)\|_V^2 dt < \infty$, para $V = H_0^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$.

Definição 1. Diz-se que a função $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ tal que $v' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e $v'' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ é uma solução fraca do problema (2.4) com \mathbb{R}_0^+ substituído por $[0, T]$, se

1. $\langle v''(t), g \rangle + c^2(\nabla v(t), \nabla g) - \frac{\alpha^2}{4}(v(t), g) = 0$, para $g \in H_0^1(\Omega)$ e $t \in [0, T]$,
2. $v(0) = \phi(0)$; $v'(0) = \psi + \frac{\alpha}{2}\phi$.

2.3 Solução Fraca Aproximada e sua Caracterização

Com o objetivo de construir uma solução do problema (2.4) e tendo em conta a definição anterior (1), fixemos o conjunto de funções $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ que é simultaneamente uma base ortogonal de $H_0^1(\Omega)$ e ortonormada de $L^2(\Omega)$. Seja agora $m \in \mathbb{N}$ e consideremos

$$v_m(t) := \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k. \quad (2.8)$$

Pretendemos determinar v_m tal que

$$(v_m''(t), w_k) + c^2(\nabla v_m(t), \nabla w_k) - \frac{\alpha^2}{4}(v_m(t), w_k) = 0, \quad t \in [0, T] \text{ e } k = 1, \dots, m \quad (2.9)$$

e

$$d_m^k(0) = (\phi, w_k) \quad (k = 1, \dots, m) \quad \text{e} \quad d_m^k(0) = (\psi + \frac{\alpha}{2}\phi, w_k) \quad (k = 1, \dots, m). \quad (2.10)$$

De (2.9) obtemos para os coeficientes $d_m(t) = [d_m^{(1)}(t), \dots, d_m^{(m)}(t)]^T$ o seguinte sistema diferencial ordinário de segunda ordem

$$\begin{cases} d_m''(t) - A d_m(t) = 0 & t \in [0, T] \\ d_m(0), d_m'(0) & \text{dados} \end{cases} \quad (2.11)$$

em que $A = c^2 M - \frac{\alpha^2}{4} I_d$, e $M = \text{Diag}(r_i)$, em que $r_i = \|\nabla w_i\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2$ para $i = 1, \dots, m$, e I_d representa a matriz identidade.

O problema de condição inicial de segunda ordem (2.11) tem solução única que é estabelecida no resultado seguinte:

Teorema 1. Para $m \in \mathbb{N}$, existe uma única solução $v_m(t) = \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k$, em que os coeficientes d_m^k são soluções do sistema diferencial ordinário (2.11).

No resultado seguinte caracterizamos a solução aproximada $v_m(t)$.

Teorema 2. Existe uma constante positiva C dependente apenas de Ω , c^2 , α tal que,

$$\begin{aligned} \max_{[0,T]} \left(\|v'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) + \|v''_m(t)\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 &\leq \\ &\leq C \left(\|\nabla\phi\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + \|\psi + \frac{\alpha}{2}\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

para $m \in \mathbb{N}$.

Proof. Considerando a equação (2.9). Observamos que esta igualdade vale para $w \in \mathcal{L}(\{w_k\}_{k=1}^\infty)$ (espaço gerado por $\{w_k\}_{k=1}^\infty$). Atendendo a que $v'_m(t) \in \mathcal{L}(\{w_k\}_{k=1}^\infty)$, de (2.9) vem

$$(v''_m(t), v'_m(t)) + c^2 (\nabla v_m(t), \nabla v'_m(t)) - \frac{\alpha^2}{4} (v(t), v'_m(t)) = 0 \quad (2.13)$$

Atendendo a que se tem

$$(v_m(t), v'_m(t)) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2} \|v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 \|v'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \varepsilon \neq 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = (v_m(t), v'_m(t)) \quad (2.15)$$

e

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v_m(t)\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 = (\nabla v_m(t), \nabla v'_m(t)) \quad (2.16)$$

obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\|v'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c^2 \|\nabla v_m(t)\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 \right) \leq \frac{\alpha^2}{8\varepsilon^2} \|v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{2} \|v'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.17)$$

$$\leq \frac{C_P^2}{8\varepsilon^2} \|\nabla v_m(t)\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{2} \|v'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.18)$$

em que a última desigualdade resulta por aplicação da desigualdade de Poincaré com constante C_P .

Seja $\eta(t)$ definida por

$$\eta(t) = \|v'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c^2 \|\nabla v_m(t)\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2. \quad (2.19)$$

Utilizando a definição anterior, (2.17) é reescrita na forma equivalente seguinte

$$\eta'(t) \leq \max \left\{ \frac{\alpha^2 C_P^2}{8c^2 \varepsilon^2}, \frac{\varepsilon^2 \alpha^2}{2} \right\} \eta(t) \quad (2.20)$$

e portanto,

$$\eta(t) \leq e^{\max \left\{ \frac{\alpha^2 C_P^2}{8c^2 \varepsilon^2}, \frac{\varepsilon^2 \alpha^2}{2} \right\} t} \left(\|v'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c^2 \|\nabla v_m(0)\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 \right). \quad (2.21)$$

Uma vez que

$$\|v'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\psi + \frac{\alpha}{2}\phi\|_{L^2(\Omega)}^2$$

e que,

$$\|\nabla v_m(0)\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 \leq \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2$$

De (2.21) e aplicando novamente a desigualdade de Poincaré, concluímos que existe uma constante positiva C tal que

$$\|v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \left(\|\nabla \phi\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \|\psi + \frac{\alpha}{2} \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \quad (2.22)$$

onde $t \in [0, T]$.

Por último, seja $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$, e consideremos $u = u_1 + u_2$, em que $u_1 \in \mathcal{L}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ (espaço gerado por w_1, w_2, \dots, w_m) e $(u_2, w_k) = 0$ e $k = 1, \dots, m$. Temos $\|u_1\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$. De facto,

$$1 \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|u_1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

De (2.8) e (2.9) vem

$$\langle v_m''(t), u \rangle = (v_m''(t), u) = (v_m''(t), u_1) = -c^2(\nabla v_m(t), \nabla u_1) + \frac{\alpha^2}{4}(v_m(t), u_1), \quad (2.23)$$

e portanto facilmente obtemos

$$\begin{aligned} |\langle v_m''(t), u \rangle| &\leq \max\left\{c^2, \frac{\alpha^2}{4}\right\} \left(\|\nabla v_m(t)\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + \|v_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\|\nabla u_1\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \|v_m(t)\|_{H_0^1}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Consequentemente,

$$\int_0^T \|v_m''(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 ds = \int_0^T \sup_{u \in H_0^1, \|u\|_{H_0^1}=1} |\langle v_m''(s), u \rangle|^2 ds \quad (2.25)$$

$$\leq C \int_0^T \|v_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \leq C \left(\|\nabla \phi\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \|\psi + \frac{\alpha}{2} \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad (2.26)$$

Conjugando as desigualdades (2.22) e (2.25), estabelecemos a relação pretendida. \square

2.4 Resultados de Existência e Unicidade

De seguida, utilizando o Teorema 2, pretendemos provar a existência de solução fraca do problema em estudo bem como concluir a sua unicidade.

Teorema 3. *O problema de condições iniciais e de fronteira (2.3) tem pelo menos uma solução fraca.*

Proof. A desigualdade (2.12) do Teorema 2 permite concluir o seguinte:

- $\{v_m\}_{m=1}^\infty$ é limitada em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$,

- $\{v'_m\}_{m=1}^\infty$ é limitada em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$,
- $\{v''_m\}_{m=1}^\infty$ é limitada em $L^2(0, T; L^2(\tilde{\Omega}))$.

Então existem uma subsucessão $\{v_{m_l}\}_{l=1}^\infty$ de $\{v_m\}_{m=1}^\infty$ e $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ com $v' \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $v'' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ tais que

$$\begin{cases} v_{m_l} \rightharpoonup v & \text{em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ v'_{m_l} \rightharpoonup v' & \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \\ v''_{m_l} \rightharpoonup v'' & \text{em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \end{cases} \quad (2.27)$$

em que \rightharpoonup denota a convergência fraca no espaço correspondente.

Fixemos um inteiro N e uma função u em $\mathcal{C}^1([0, T]; H_0^1(\Omega))$ definida pela expressão seguinte

$$u(t) = \sum_{k=1}^N d^k(t) w_k \quad (2.28)$$

em que $\{d^k(t)\}_{k=1}^N$ são funções regulares.

Consideremos agora $m \geq N$. De (2.9) vem facilmente

$$\int_0^T \left(\langle v''_m(s), u(s) \rangle + c^2 (\nabla v_m(s), \nabla u(s)) - \frac{\alpha^2}{4} (v_m(s), u(s)) \right) ds = 0. \quad (2.29)$$

Se considerarmos $m = m_l$ e a convergência definida em (2.27) obtemos a forma anterior da seguinte forma,

$$\int_0^T \left(\langle v''(s), u(s) \rangle + c^2 (\nabla v(s), \nabla u(s)) - \frac{\alpha^2}{4} (v(s), u(s)) \right) ds = 0. \quad (2.30)$$

A igualdade anterior é verdadeira para qualquer função $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ pois o conjunto das funções definidas por (2.28) é denso neste espaço. De (2.30) obtemos

$$(v''(t), u) + (\nabla v(t), \nabla u) - \frac{\alpha^2}{4} (v(t), u) = 0, \quad u \in H_0^1(\Omega) \text{ e quase certamente em } [0, T]. \quad (2.31)$$

Temos ainda $v \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ e $v' \in \mathcal{C}([0, T]; H^{-1}(\Omega))$. Mostremos que v verifica as condições iniciais, isto é,

$$v(0) = \phi \quad ; \quad v'(0) = \psi + \frac{\alpha}{2} \phi \quad (2.32)$$

Para o efeito, consideremos uma função $u \in \mathcal{C}^2([0, T]; H_0^1(\Omega))$ tal que $u(T) = u'(T) = 0$. Integrando por partes, duas vezes em ordem a t , a igualdade (2.30), vem

$$\int_0^T \left((v(t), u''(t)) + c^2 (\nabla v(t), \nabla u(t)) - \frac{\alpha^2}{4} (v_m(t), u(t)) \right) dt = - \langle v'(0), u(0) \rangle + (v(0), u'(0)). \quad (2.33)$$

De forma idêntica, deduz-se a igualdade

$$\begin{aligned} \int_0^T \left((u''(t), v_m(t)) + c^2(\nabla v_m(t), \nabla u(t)) - \frac{\alpha^2}{4}(v_m(t), u(t)) \right) dt = \\ = - \langle v'_m(0), u(0) \rangle + (v_m(0), u'(0)). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Fazendo $m = m_l$ e tendo em atenção que $d_m^k(0) = (\phi, w_k)$, $d'_m{}^k(0) = (\phi + \frac{\alpha}{2}\psi, w_k)$, $k = 1, \dots, m$, das convergências fracas (2.27) obtemos a igualdade

$$\begin{aligned} \int_0^T \left((u''(t), v(t)) + c^2(\nabla v(t), \nabla u(t)) - \frac{\alpha^2}{4}(v(t), u(t)) \right) dt \\ = (\phi, u'(0)) + (\psi + \frac{\alpha}{2}\phi, u(0)). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Comparemos as equações (2.33) e (2.35). Atendendo a que $u'(0)$ e $u(0)$ são arbitrários, obtém-se que v é uma solução fraca do problema (2.3). \square

Estabelecemos seguidamente o teorema de unicidade

Teorema 4 ([3]). *A solução fraca de (2.3) é única.*

Proof. A demonstração pode ser encontrada em [3]. \square

Capítulo 3

Equação do Telégrafo - Aproximação Semi-discreta

3.1 Introdução

Consideremos o problema de condições iniciais e de fronteira (2.2) envolvendo a equação do telégrafo para $\Omega = [a, b]$. Neste capítulo seguindo [9] e [10], introduzimos a aproximação semi-discreta para a solução de (2.3) definida a partir do operador de diferenças centradas de segunda ordem definido numa partição uniforme e estudamos algumas das suas propriedades de estabilidade e convergência. No que diz respeito à estabilidade utilizamos o método de energia e estabelecemos uma desigualdade que é uma versão discreta da correspondente versão contínua. O resultado de convergência mostra que o erro da aproximação semi-discreta, da sua derivada no tempo e da sua "derivada" no espaço, apresentam convergência de segunda ordem. Salientamos que o resultado de convergência é estabelecido assumindo que a solução do problema diferencial é suave, isto é, $p(t) \in C^4(\bar{\Omega})$ para $t \in [0, T]$.

3.2 A Aproximação Semi-Discreta

O objectivo central desta secção é a introdução de uma aproximação para a solução do problema diferencial (2.3) introduzindo a discretização do operador de Laplace. Consideremos em $\bar{\Omega} = [a, b]$ uma malha uniforme $\bar{\Omega}_h$ de espaçamento $h = \frac{b-a}{N}$,

$$\bar{\Omega}_h = \{x_i, i = 0, \dots, N, x_0 = a, x_N = b, x_i = x_{i-1} + h, i = 0, \dots, N\}.$$

Seja Ω_h o seguinte conjunto $\Omega_h = \bar{\Omega}_h(a, b)$. Por $V_{h,0}$ denotamos o espaço das funções de rede definidas em $\bar{\Omega}_h$ nulas em x_0 e x_N .

O estudo de estabilidade e convergência que apresentamos seguidamente utilizamos a norma $\|\cdot\|_h$ definida em $W_{h,0}$ e que é induzida pelo produto interno

$$(v_h, w_h)_h = \sum_{i=1}^{N-1} h v_h(x_i) w_h(x_i), \quad v_h, w_h \in V_{h,0},$$

isto é

$$\|v_h\|_h = \sqrt{(v_h, v_h)_h}, v_h \in W_{h,0}.$$

Por D_{-x} denotamos o operador de diferenças *backward*

$$D_{-x}v_h(x_i) = \frac{v_h(x_i) - v_h(x_{i-1}))}{h}, i = 1, \dots, N, v_h \in W_{h,0},$$

e por D_2 denotamos o operador de diferenças centradas de segunda ordem

$$D_2v_h(x_i) = \frac{v_h(x_{i+1}) - 2v_h(x_i) + v_h(x_{i-1}))}{h^2}, i = 1, \dots, N-1, v_h \in V_{h,0}.$$

Seja $p_h(t) \in W_{h,0}$, para $t \in [0, T]$, a solução do sistema diferencial ordinário

$$\begin{cases} p_h''(t) + \alpha p_h'(t) = c^2 D_2 p_h(t) + f_h(t) & \text{em } \Omega_h \times (0, T] \\ p_h(x_0, t) = p_h(x_N, t) = 0 & \text{em } (0, T] \\ p_h(0) = \psi_h & \text{em } \Omega_h \\ p_h'(0) = \phi_h & \text{em } \Omega_h, \end{cases} \quad (3.1)$$

em que, por simplicidade, tomamos $f_h(t)(x_i) = f(x_i, t)$, $i = 1, \dots, N-1$, $\phi_h(x_i) = \phi(x_i)$, $\psi_h(x_i) = \psi(x_i)$, $i = 1, \dots, N-1$.

A solução $p_h(t)$ é dita aproximação semi-discreta para $p(t)$.

A existência da aproximação semi-discreta $p_h(t)$ é facilmente garantida uma vez que $p_h(t)$ é solução de um sistema diferencial ordinário de segunda ordem que se pode reescrever na forma matricial

$$\begin{cases} Z_h'(t) = A_h Z_h(t) + F_h(t), t \in (0, T] \\ Z_h(0) \text{ dado,} \end{cases}$$

em que $Z_h(t) = [p_h(x_1, t) \dots p_h(x_{N-1}, t) p_h'(x_1, t) \dots p_h'(x_{N-1}, t)]^T$, $F_h = [0 \dots 0 f_h(x_1) \dots f_h(x_{N-1})]^T$,

$$A_h = \begin{bmatrix} 0 & I_{N-1} \\ -\alpha I_{N-1} & \frac{c^2}{h^2} M \end{bmatrix},$$

em que

$$M_h = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

3.3 Estabilidade de $p_h(t)$

Começemos por considerar o problema diferencial (2.2) e vejamos de forma sumária a estabilidade da solução $p(t)$. Da equação diferencial vem

$$(p''(t), p'(t)) + \alpha \|p'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c^2 (\nabla p(t), \nabla p'(t)) = (f(t), p(t))$$

e portanto

$$(p''(t), p'(t)) + (\alpha - \varepsilon^2) \|p'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c^2 (\nabla p(t), \nabla p'(t)) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

em que $\varepsilon \neq 0$.

Atendendo a que a desigualdade anterior pode ser reescrita na forma equivalente seguinte

$$\frac{d}{dt} \left(\|p'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2(\alpha - \varepsilon^2) \int_0^t \|p'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + c^2 \|\nabla p(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq \frac{1}{2\varepsilon^2} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

concluimos

$$\begin{aligned} & \|p'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2(\alpha - \varepsilon^2) \int_0^t \|p'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + c^2 \|\nabla p(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + c^2 \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para $\alpha > 0$ e $\varepsilon^2 < \alpha$, a última desigualdade mostra a estabilidade do problema (2.2).

Pretendemos seguidamente estabelecer um resultado de estabilidade que pode ser visto como uma versão discreta da desigualdade (3.2). Utilizamos a notação seguinte

$$\|D_{-x}u_h\|_+^2 = \sum_{i=1}^N h(D_{-x}u_h(x_i))^2, u_h \in W_{h,0}.$$

Observamos que se tem a identidade seguinte

$$(D_2u_h, v_h)_h = -(D_{-x}u_h, D_{-x}v_h)_+, u_h, v_h \in W_{h,0},$$

em que

$$(D_{-x}u_h, D_{-x}v_h)_+ = \sum_{i=1}^N h D_{-x}u_h(x_i) D_{-x}v_h(x_i).$$

Teorema 5. *A solução do problema semi-discreto (3.1) satisfaz*

$$\begin{aligned} & \|p'_h(t)\|_h^2 + 2(\alpha - \varepsilon^2) \int_0^t \|p'(s)\|_h^2 ds + 2c^2 \|D_{-x}p_h(t)\|_+^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t \|f_h(s)\|_h^2 ds + \|\psi\|_h^2 + c^2 \|D_{-x}\phi\|_+^2, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.3)$$

em que $\varepsilon \neq 0$ e $2\alpha - \varepsilon \geq 0$.

Proof. Da primeira equação de (3.1) obtemos

$$(p''_h(t), p'_h(t))_h + \alpha (p'_h(t), p'_h(t))_h = c^2 (D_2p_h(t), p'_h(t))_h + (f_h(t), p'_h(t))_h \quad (3.4)$$

Atendendo a que

$$(D_2p_h(t), p'_h(t))_h = -(D_{-x}p_h(t), D_{-x}p'_h(t))_h$$

e

$$(D_{-x}p_h(t), D_{-x}p'_h(t))_h = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D_{-x}p_h(t)\|_+^2$$

de (3.4) concluímos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|p'_h(t)\|_h^2 + \alpha \|p'_h(t)\|_h^2 = -c^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D_{-x}p_h(t)\|_+^2 + (f_h(t), p'_h(t))_h. \quad (3.5)$$

Uma vez que vale a desigualdade seguinte

$$(f_h(t), p'_h(t))_h \leq \frac{1}{4\varepsilon^2} \|f_h(t)\|_h^2 + \varepsilon^2 \|p'_h(t)\|_h^2 \quad (3.6)$$

com $\varepsilon \neq 0$, vem ainda

$$\frac{1}{dt} \|p'_h(t)\|_h^2 + 2(\alpha - \varepsilon^2) \|p'_h(t)\|_h^2 + c^2 \frac{d}{dt} \|D_{-x}p_h(t)\|_+^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon^2} \|f_h(t)\|_h^2, \quad t \in (0, T]. \quad (3.7)$$

A desigualdade anterior admite a representação equivalente seguinte

$$\frac{1}{dt} \left(\|p'_h(t)\|_h^2 + 2(\alpha - \varepsilon^2) \int_0^t \|p'_h(s)\|_h^2 ds + c^2 \|D_{-x}p_h(t)\|_+^2 - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t \|f_h(s)\|_h^2 ds \right) \leq 0, \quad t \in (0, T], \quad (3.8)$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \|p'_h(t)\|_h^2 + 2(\alpha - \varepsilon^2) \int_0^t \|p'_h(s)\|_h^2 ds + c^2 \|D_{-x}p_h(t)\|_+^2 &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t \|f_h(s)\|_h^2 ds + \|\psi\|_h^2 + c^2 \|D_{-x}\phi\|_+^2, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

□

Comparando as desigualdades continua (3.2) e a semi-discreta (3.3) concluímos que esta última pode ser efectivamente vista como uma versão discreta da primeira.

O conceito de estabilidade está associado à propagação de perturbações das condições iniciais de um problema diferencial. Uma vez que o problema em estudo é linear facilmente concluímos a estabilidade no sentido anterior. De facto, sejam $p_h(t)$ e $\tilde{p}_h(t)$ duas soluções de (3.1) com condições iniciais definidas por ϕ_h, ψ_h e $\tilde{\phi}_h, \tilde{\psi}_h$, respetivamente. Consideremos agora $w_h(t) = p_h(t) - \tilde{p}_h(t)$ que é solução do problema semi-discreto (3.1) com $f_h(t) = 0$ e condições iniciais $\phi_h - \tilde{\phi}_h$ e $\psi_h - \tilde{\psi}_h$. O Teorema 5 permite concluir o resultado seguinte

$$\begin{aligned} \|w'(t)\|_h^2 + 2(\alpha - \varepsilon^2) \int_0^t \|w'_h(s)\|_h^2 ds + c^2 \|D_{-x}w_h(t)\|_h^2 &\leq \\ &\leq \|\psi - \tilde{\psi}\|_h^2 + c^2 \|D_{-x}(\phi - \tilde{\phi})\|_+^2, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A desigualdade anterior mostra que o problema semi-discreto (3.1) é estável.

3.4 Análise da Convergência

Seja $E_h(t)$ o erro de semi-discretização espacial definida pelo operador D_2

$$E_h(t) = R_h p(t) - p_h(t), \quad (3.11)$$

isto é,

$$E_h(x_i, t) = p(x_i, t) - p_h(x_i, t), \quad i = 0, \dots, N,$$

em que $p_h(t)$ é a solução de (3.1), $p(t)$ é a solução de do correspondente problema diferencial e R_h denota o operador de restrição usual.

Seja $T_h(t)$ o erro de truncatura espacial associado ao operador D_2 . Observamos que este erro satisfaz a igualdade seguinte.

Note-se que,

$$p''(t) + \alpha p'(t) = c^2 D_2 p(t) + f_h(t) + T_h(t),$$

e portanto admite a representação

$$T_h(x_i, t) = c^2 \left(\frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(\xi_i, t) + \frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(\eta_i, t) \right) h^2,$$

para $i = 1, \dots, N-1$ e $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Atendendo a que

$$p_h''(t) + \alpha p_h'(t) = c^2 D_2 p_h(t) + f_h(t)$$

concluimos que $E_h(t)$ é solução do problema de condições iniciais e de fronteira,

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_h''(t) + \alpha E_h'(t) = c^2 D_2 E_h(t) - T_h(x_i, t) & \text{em } \Omega_h \times (0, T], \\ E_h(0) = 0 & \text{em } \Omega_h, \\ E_h'(0) = 0 & \text{em } \Omega_h, \\ E_h(x_0, t) = E_h(x_N, t) = 0 & \text{em } (0, T]. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

O Teorema 5 permite estabelecer um majorante para o erro $E_h(t)$. De facto, considerando o teorema mencionado obtemos

$$\|E_h'(t)\|_h^2 + (2\alpha - \varepsilon^2) \int_0^t \|E_h'(s)\|_h^2 ds + c^2 \|D_{-x} E_h(t)\|_+^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t \|T_h(s)\|_h^2 ds, \quad t \in [0, T]. \quad (3.13)$$

Concluimos deste modo o seguinte resultado:

Teorema 6. *Se o problema (2.3) tem solução $p(t) \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$, então existe uma constante C positiva tal que*

$$\|E'_h(t)\|_h^2 + (2\alpha - \varepsilon^2) \int_0^t \|E'_h(s)\|_h^2 ds + c^2 \|D_{-x}E_h(t)\|_+^2 \leq Ch^4 \int_0^t \left\| \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} \right\|_\infty^2 ds, \quad t \in [0, T]. \quad (3.14)$$

onde $C = \frac{(b-a)}{2\varepsilon^2 12^2}$, $e \varepsilon \neq 0, 2(\alpha - \varepsilon^2) > 0$.

Proof. O resultado é uma consequência imediata de (3.13) pois

$$\begin{aligned} \|T_h(t)\|_h^2 &= \sum_{j=1}^{N-1} h \left(\frac{c^2 h^2}{24} \left(\frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(\xi_i, t) + \frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(\eta_i, t) \right) \right)^2 \\ &\leq (b-a) \frac{c^2}{12^2} h^4 \left\| \frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(t) \right\|_\infty^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

□

O Teorema 6 mostra que, embora o erro de truncatura $T_h(t)$ seja de segunda ordem, $E'_h(t)$ e $D_{-x}E_h(t)$ são também de segunda ordem. Atendendo a que o erro $E_h(t)$ verifica a desigualdade

$$\max_{i=1, \dots, N-1} |E_h(x_i, t)| \leq |\Omega| \|D_{-x}E_h(t)\|_+,$$

concluimos também que se tem $\|E_h(t)\|_\infty \leq Ch^2$.

3.5 Método de Diferenças Finitas versus MEF

O Teorema 6 mostra que o método introduzido apresenta ordem de convergência igual a 2. Uma vez que, como mostramos seguidamente, o método considerado é equivalente a um método de elementos finitos segmentado linear completamente discreto no espaço, este resultado mostra que esta solução de elementos finitos apresenta as mesmas propriedades de convergência. No que diz respeito à "derivada no espaço" da solução de elementos finitos segmentada linear, este resultado permite concluir que tal derivada apresenta convergência quadrática para a correspondente derivada da solução fraca.

Seguidamente mostramos que o método de diferenças finitas introduzido é efectivamente equivalente ao método de elementos finitos segmentado linear combinado com fórmulas de quadratura convenientes.

Recordamos que a solução fraca do problema envolvendo a equação do telégrafo em análise, verifica, além das condições iniciais anteriormente introduzidas, a igualdade seguinte

$$(p''(t), g(t)) + \alpha (p'(t), g(t))_h = -c^2 (\nabla p(t), \nabla g(t)) + (f(t), g(t)), \quad \forall g \in H_0^1(\Omega) \quad (3.16)$$

quase certamente em $[0, T]$ ([3]).

Seja P_h o operador de interpolação segmentado linear associado à partição Ω_h e seja $V_h = \{P_h g_h, g_h \in W_{h,0}\}$ o espaço das funções segmentadas lineares associadas a tal partição. Observamos que $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. A aproximação de elementos finitos segmentada linear $P_h p_h(t) \in V_h$ satisfaz a igualdade

$$((P_h p_h(t))'', P_h g_h) + \alpha ((P_h p_h(t))', P_h g_h) = -c^2 (\nabla P_h p_h(t), \nabla P_h g_h) + (f(t), P_h g_h), \forall g_h \in W_{h,0} \quad (3.17)$$

e

$$P_h p_h(0) = P_h R_h \phi, P_h p_h'(0) = P_h R_h \psi.$$

Notamos que

$$(\nabla P_h p_h(t), \nabla P_h g_h) = (D_{-x} p_h(t), D_{-x} g_h)_+.$$

Por outro lado, se considerarmos a seguinte aproximação

$$(P_h q_h, P_h u_h) \simeq (q_h, u_h)_h, q_h, u_h \in W_{h,0},$$

nos restantes termos de (3.17) envolvendo o produto interno de $L^2(\Omega)$, obtemos

$$(p_h''(t), g_h)_h + \alpha (p_h'(t), g_h)_h = -c^2 (D_{-x} p_h(t), D_{-x} g_h)_+ (f_h(t), g_h)_h, \forall g_h \in W_{h,0}, \quad (3.18)$$

em que $f_h(x_i, t) = f(x_i, t), i = 1, \dots, N-1$.

Finalmente, escolhendo a função g_h de modo conveniente, obtemos

$$p_h''(t) + \alpha p_h'(t) = c^2 D_2 p_h(t) + f_h(t), \quad \text{em } \Omega_h \times (0, T], \quad (3.19)$$

que é justamente a identidade que caracteriza o método das diferenças finitas em estudo. Observamos ainda, uma vez que $p_h(t) \in W_{h,0}$, então $p_h(x_0, t) = p_h(x_N, t) = 0$ e, por outro lado, $p_h(0) = R_h \phi, p_h'(0) = R_h \psi$.

Capítulo 4

Equação do Telégrafo - Modelo Discreto

4.1 Introdução

Neste capítulo pretendemos estudar o comportamento da solução do problema (3.1) quando consideramos a integração temporal deste sistema com um método adequado. Notamos que, uma vez que o sistema diferencial de segunda ordem (3.1) pode ser reescrito como um sistema diferencial ordinário de primeira ordem (como vimos no capítulo anterior), poderíamos ter recorrido a métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, como métodos de Euler ou métodos de Runge-Kutta. A abordagem adoptada permite introduzir um método numérico cuja análise de estabilidade e convergência são facilmente construída a partir do método de energia.

Consideremos a malha temporal uniforme $\{t_m, m = 0, \dots, M\}$ em que $\Delta t = t_{m+1} - t_m$ e $M\Delta t = T$. Substituímos em (3.1) a derivada temporal de segunda ordem $p_h''(t_m)$ por $D_{2,t}p_h(t_m)$, em que $D_{2,t}$ denota operador de diferenças centradas de segunda ordem

$$D_{2,t}p_h(t_m) = \frac{p_h(t_{m+1}) - 2p_h(t_m) + p_h(t_{m-1}))}{\Delta t^2}$$

e a derivada temporal de primeira ordem mas calculada em t_{m+1} , $p_h'(t_{m+1})$, por $D_{-t}p_h(t_{m+1})$, em que D_{-t} denota o operador *backward*

$$D_{-t}p_h(t_{m+1}) = \frac{p_h(t_{m+1}) - p_h(t_m)}{\Delta t}.$$

Observamos que esta última aproximação é equivalente a substituir $p_h'(t_m)$ por $D_t p_h(t_m)$, em que D_t denota o operador de diferenças *forward*

$$D_t p_h(t_m) = \frac{p_h(t_{m+1}) - p_h(t_m)}{\Delta t}.$$

A velocidade inicial é também substituída considerando a o operador D_t .

Somos então conduzidos ao seguinte sistema completamente discreto no tempo e no espaço

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{2,t}p_h^{m+1} + \alpha D_{-t}p_h^{m+1} = c^2 D_{2t}p_h^{m+1} + f_h(t_m) \quad \text{em } \Omega_h \times t_1, t_2, \dots, t_{M-1}, \\ p_h^0 = R_h \phi \quad \text{em } \Omega_h, \\ \frac{p_h^1 - p_h^0}{\Delta t} = R_h \psi \quad \text{em } \Omega_h \\ p_h^m(x_0) = p_h^m(x_N) = 0, m = 1, \dots, M. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

4.2 Estabilidade

O resultado seguinte estabelece a estabilidade do método numérico (4.1)([2]):

Teorema 7. *Seja $p_h^m \in W_{h,0}, m = 0, \dots, M$ definida por (4.1). Então para $\Delta t < \frac{1}{2}$ tem-se,*

$$\|D_{-t}p_h^m\|_h^2 + c^2 \|D_{-x}p_h^m\|_+^2 \leq e^{\frac{2t}{1-2\Delta t}} \left(\|R_h \psi\|_h^2 + c^2 (\|D_{-x}R_h \phi\|_+ + \Delta t \|D_{-x}R_h \psi\|_+)^2 + \frac{1}{2} \max_{j=1, \dots, m-1} \|f_h(t_j)\|_h^2 \right) \quad (4.2)$$

para $m=2, \dots, M$.

Proof. Consideremos a primeira equação de (4.1). Fazendo o produto interno membro a membro, desta equação por $D_{-t}p_h^{m+1}$, obtemos a expressão seguinte

$$(D_{2t}p_h^m, D_{-t}p_h^{m+1})_h + \alpha (D_{-t}p_h^{m+1}, D_{-t}p_h^{m+1})_h = c^2 (D_{2x}p_h^m, D_{-t}p_h^{m+1})_h + (f_h(t_{m+1}), D_{-t}p_h^{m+1})_h. \quad (4.3)$$

Para $(D_{2t}p_h^m, D_{-t}p_h^{m+1})_h$ obtemos, sucessivamente,

$$(D_{2t}p_h^m, D_{-t}p_h^{m+1})_h = \left(\frac{D_{-t}p_h^{m+1} - D_{-t}p_h^m}{\Delta t}, D_{-t}p_h^{m+1} \right)_h \quad (4.4)$$

$$= \frac{\|D_{-t}p_h^{m+1}\|_h^2 - (D_{-t}p_h^m, D_{-t}p_h^{m+1})_h}{\Delta t} \quad (4.5)$$

$$\geq \frac{\|D_{-t}p_h^{m+1}\|_h^2 - \|D_{-t}p_h^m\|_h^2 \|D_{-t}p_h^{m+1}\|_h^2}{\Delta t} \geq \quad (4.6)$$

$$\geq \frac{\|D_{-t}p_h^{m+1}\|_h^2 - \|D_{-t}p_h^m\|_h^2}{2\Delta t}. \quad (4.7)$$

Para $(D_{2x}p_h^m, D_{-t}p_h^{m+1})_h$ obtemos as representações equivalente seguintes

$$\begin{aligned} (D_{2x}p_h^m, D_{-t}p_h^{m+1})_h &= (D_{-x}p_h^{m+1}, D_{-x}D_{-t}p_h^{m+1})_+ \\ &= (D_{-x}p_h^{m+1}, \frac{D_{-x}p_h^{m+1} - D_{-x}p_h^m}{\Delta t})_+ \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(\|D_{-x}p_h^{m+1}\|_+^2 - (D_{-x}p_h^{m+1}, D_{-x}p_h^m)_+ \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Atendendo a que se tem

$$|(D_{-x}p_h^{m+1}, D_{-x}p_h^m)_+| \leq \frac{1}{2} \|D_{-x}p_h^{m+1}\|_+^2 + \frac{1}{2} \|D_{-x}p_h^m\|_+^2,$$

de (4.8) vem ainda

$$-(D_{2x}p_h^m, D_{-t}p_h^{m+1})_h \leq \frac{1}{2\Delta t} \left(-\|D_{-x}p_h^{m+1}\|_+^2 + \|D_{-x}p_h^m\|_+^2 \right). \quad (4.9)$$

Conjugando (4.3) com (4.4), (4.9) e atendendo a que se tem

$$(f_h(t_m), D_{-t}p_h^{m+1})_h \leq \frac{1}{2} \|f_h(t_m)\|_h^2 + \frac{1}{2} \|D_{-t}p_h^{m+1}\|_h^2,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\|D_{-t}p_h^{m+1}\|_h^2 - \|D_{-t}p_h^m\|_h^2}{2\Delta t} + \alpha \|D_{-t}p_h^{m+1}\|_h^2 &\leq c^2 \left(\frac{\|D_{-x}p_h^m\|_+^2 - \|D_{-x}p_h^{m+1}\|_+^2}{2\Delta t} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \|f_h(t_m)\|_h^2 + \frac{1}{2} \|D_{-t}p_h^{m+1}\|_h^2. \end{aligned}$$

e portanto

$$(1 - 2\Delta t) \|D_{-t}p_h^{m+1}\|_h^2 + c^2 \|D_{-x}p_h^{m+1}\|_+^2 \leq \|D_{-t}p_h^m\|_h^2 + c^2 \|D_{-x}p_h^m\|_+^2 + \Delta t \|f_h(t_m)\|_h^2, \quad (4.10)$$

para $m = 1, \dots, M-1$.

Assim, para $\Delta t < \frac{1}{2}$, de (4.10) concluimos

$$\begin{aligned} \|D_{-t}p_h^{m+1}\|_h^2 + c^2 \|D_{-x}p_h^{m+1}\|_+^2 &\leq \frac{1}{1-2\Delta t} \left(\|D_{-t}p_h^m\|_h^2 + c^2 \|D_{-x}p_h^m\|_+^2 \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{1-2\Delta t} \|f_h(t_m)\|_h^2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

para $m = 1, \dots, M-1$.

A desigualdade (4.11) permite estabelecer a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|D_{-t}p_h^m\|_h^2 + c^2 \|D_{-x}p_h^m\|_+^2 &\leq \left(\frac{1}{1-2\Delta t} \right)^{m-1} \left(\|D_{-t}p_h^1\|_h^2 + c^2 \|D_{-x}p_h^1\|_+^2 \right) \\ &\quad + \Delta t \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{1}{1-2\Delta t} \right)^{m-j} \|f_h(t_j)\|_h^2, \end{aligned} \quad (4.12)$$

para $m = 2, \dots, M$.

Observamos agora que se tem as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-2\Delta t} \right)^{m-1} &= \left(1 + \frac{2\Delta t}{1-2\Delta t} \right)^{m-1} \\ &\leq e^{\frac{2\Delta t(m-1)}{1-2\Delta t}} \\ &\leq e^{\frac{2T}{1-2\Delta t}}, \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{1}{1-2\Delta t} \right)^{m-j} \|f_h(t_j)\|_h^2 &= \Delta t \left(\frac{1}{1-2\Delta t} \right)^{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} (1-2\Delta t)^{j-1} \|f_h(t_j)\|_h^2 \\
&= \Delta t \left(\frac{1}{1-2\Delta t} \right)^{m-1} \max_{j=1, \dots, m-1} \|f_h(t_j)\|_h^2 \sum_{j=1}^{m-1} (1-2\Delta t)^{j-1} \\
&= \Delta t \left(\frac{1}{1-2\Delta t} \right)^{m-1} \max_{j=1, \dots, m-1} \|f_h(t_j)\|_h^2 \frac{1 - (1-2\Delta t)^{m-1}}{1 - (1-2\Delta t)} \\
&\leq e^{\frac{2T}{1-2\Delta t}} \frac{1}{2} \max_{j=1, \dots, m-1} \|f_h(t_j)\|_h^2.
\end{aligned}$$

Conjugando as últimas estimativas com a desigualdade (4.12) obtemos

$$\begin{aligned}
\|D_{-t}p_h^m\|_h^2 + c^2 \|D_{-x}p_h^m\|_+^2 &\leq e^{\frac{2T}{1-2\Delta t}} \left(\|D_{-t}p_h^1\|_h^2 + c^2 \|D_{-x}p_h^1\|_h^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \max_{j=1, \dots, m-1} \|f_h(t_j)\|_h^2,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

para $m = 2, \dots, M$.

Para concluir o resultado pretendido notamos que se tem

$$D_{-x}p_h^1 = D_{-x}R_h\phi + \Delta t D_{-x}R_h\psi.$$

De facto, de $D_{-t}p_h^1 = R_h\psi$ vem

$$D_{-x}D_{-t}p_h^1 = D_{-x}R_h\psi$$

isto é

$$D_{-t}D_{-x}p_h^1 = D_{-x}R_h\psi$$

ou ainda

$$D_{-x}p_h^1 = D_{-x}p_h^0 + \Delta t D_{-x}R_h\psi.$$

□

Sejam p_h^m e \tilde{p}_h^m duas soluções definidas por (4.1) com condições iniciais ϕ_h, ψ_h e $\tilde{\phi}_h, \tilde{\psi}_h$, respectivamente. O teorema anterior permite facilmente concluir para $\omega_h^m = p_h^m - \tilde{p}_h^m$ a estimativa

$$\begin{aligned}
\|D_{-t}\omega_h^m\|_h^2 + c^2 \|D_{-x}\omega_h^m\|_+^2 &\leq e^{\frac{2T}{1-2\Delta t}} \left(\|\psi_h - \tilde{\psi}_h\|_h^2 + c^2 (\|D_{-x}(\phi_h - \tilde{\phi}_h)\|_+ + \right. \\
&\quad \left. + \Delta t \|D_{-x}(\psi_h - \tilde{\psi}_h)\|_+)^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Concluimos a estabilidade do esquema numérico para perturbações das condições iniciais tais que

$$\begin{aligned}
&\|\psi_h - \tilde{\psi}_h\|_h^2, \\
&\|D_{-x}(\phi_h - \tilde{\phi}_h)\|_+, \\
&\Delta t \|D_{-x}(\psi_h - \tilde{\psi}_h)\|_+,
\end{aligned}$$

são pequenos.

4.3 Convergência

Pretendemos seguidamente estabelecer a convergência do método numérico (4.1). Com este objectivo observamos que o erro de truncatura verifica

$$\begin{cases} D_{2,t}p(x_i, t_m) + \alpha D_{-t}p(x_i, t_{m+1}) = c^2 D_{2,x}p(x_i, t_{m+1}) + f(x_i, t_m) + T_h(x_i, t_m) & \text{em } \Omega_h, m = 1, \dots, M-1, \\ D_{-t}p(x_i, t_1) = \psi(x_i) + T_h(x_i, t_1) & i = 1, \dots, N-1, \\ p(x_i, t_0) = \phi(x_i) & i = 1, \dots, N-1, \end{cases} \quad (4.15)$$

e portanto, para $i = 1, \dots, N-1, m = 1, \dots, M$, T_h admite a seguinte representação

$$\begin{aligned} T_h(x_i, t_m) &= D_{2,t}p(x_i, t_m) + \alpha D_{-t}p(x_i, t_{m+1}) - c^2 D_{2,x}p(x_i, t_{m+1}) - f(x_i, t_m) \\ &= \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x_i, t_m) + \frac{\Delta t^2}{24} \left(\frac{\partial^4 p}{\partial t^4}(x_i, \xi_1) + \frac{\partial^4 p}{\partial t^4}(x_i, \xi_2) \right) \\ &\quad + \alpha \left(\frac{\partial p}{\partial t}(x_i, t_m) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x_i, \xi_3) \right) \\ &\quad - c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_i, t_m) + \frac{h^2}{24} \left(\frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(\eta_1, t_{m+1}) + \frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(\eta_2, t_{m+1}) \right) \right) \\ &\quad - c^2 \Delta t \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2}(x_i, \xi_4) - f(x_i, t_m) \\ &= \frac{\Delta t^2}{24} \left(\frac{\partial^4 p}{\partial t^4}(x_i, \xi_1) + \frac{\partial^4 p}{\partial t^4}(x_i, \xi_2) \right) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x_i, \xi_3) \\ &\quad - c^2 \frac{h^2}{24} \left(\frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(\eta_1, t_{m+1}) + \frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(\eta_2, t_{m+1}) \right) \\ &\quad - c^2 \Delta t \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2}(x_i, \xi_4) \end{aligned}$$

Para $T_h(x_i, t_1)$ temos

$$\begin{aligned} T_h(x_i, t_1) &= D_{-t}p(x_i, t_1) - \psi(x_i) \\ &= \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x_i, \xi_4), \end{aligned}$$

em que $\xi_\ell \in (t_{m-1}, t_{m+1}), \eta_j \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

Atendendo a que a solução numérica é definida por (4.1), obtemos para o erro global e definido por

$$E_h^m = R_h p(t_m) - p_h^m$$

isto é

$$E_h^m(x_i) = p(x_i, t_m) - p_h^m(x_i), i = 0, \dots, M,$$

o seguinte problema de diferenças

$$\begin{cases} D_{2,t}E_h^{m+1} + \alpha D_{-t}p_h^{m+1} = c^2 D_{2,x}p_h^{m+1} + T_h(t_m) & \text{em } \Omega_h, m = 1, \dots, M-1, \\ D_{-t}E_h^1(x_i) = T_h(x_i, t_1) & i = 1, \dots, N-1, \\ E_h^0 = 0 & i = 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (4.16)$$

Considerando agora o Teorema 7 obtemos, para $\Delta t < \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \|D_{-t}E_h^m\|_h^2 + c^2\|D_{-x}E_h^h\|_+^2 \leq & e^{\frac{2T}{1-2\Delta t}} \left(\|T_h(t_1)\|_h^2 + c^2(\Delta t\|D_{-x}T_h(t_1)\|_+)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \max_{j=1, \dots, m-1} \|T_h(t_j)\|_h^2 \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

para $m = 2, \dots, M$. Assim, se $p \in C^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$ (espaço das funções definidas em $\overline{\Omega} \times [0, T]$ com derivadas parciais até à ordem 4 contínuas naquele domínio), então

$$\|D_{-t}E_h^m\|_h^2 + c^2\|D_{-x}E_h^h\|_+^2 \leq C\|p\|_{C^4(\overline{\Omega} \times [0, T])}(\Delta t^2 + h^4). \quad (4.18)$$

Por outro lado

$$\|E_h^1\|_h \leq C\Delta t^2\|p\|_{C^2(\overline{\Omega} \times [0, T])}. \quad (4.19)$$

Provamos o resultado seguinte:

Teorema 8. *Se $\Delta t < \frac{1}{2}$ e $p \in C^4(\overline{\Omega} \times [0, T])$, então existe uma constante positiva C , independente de h e Δt tal que o error \tilde{E}_h^m verifica (4.18) e (4.19).*

Capítulo 5

Outros Métodos para a Equação do Telégrafo

5.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos de forma muito sumária outros métodos retirados da literatura e que são considerados no capítulo de experimentação numérica.

Com o objectivo de simplificar, consideramos o problema (2.3) com $\alpha = 0$ isto é, consideramos a equação de onda

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (5.1)$$

para o problema da secção 5.2.

5.2 Método de Ordem mais Elevada

Começemos por introduzir os métodos proposto em [1]. Uma aproximação de ordem mais elevada para derivada de segunda pode ser obtida a partir da seguinte representação

$$\frac{\partial^2 p(x_i, t_n)}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \left[a_0 p_i^n + \sum_{m=1}^M a_m (p(x_{i-m}, t_n) + p(x_{i+1}, t_n)) \right] + \mathcal{O}(h^{2m}) \quad (5.2)$$

desde que os coeficientes a_0 e a_m sejam calculados de forma conveniente.

- No caso particular de $M = 1$ obtemos, sucessivamente,

$$\frac{\partial^2 p(x_i, t_n)}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} [a_0 p_h^n + a_1 (p(x_{i-1}, t_n) + p(x_{i+1}, t_n))] + \mathcal{O}(h^2) \quad (5.3)$$

$$= \frac{1}{h^2} \left[a_0 p(x_i, t_n) + a_1 \left(2p(x_i, t_n) + h^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_i, t_n) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(x_i, t_n) \right) \right] + \mathcal{O}(h^2) \quad (5.4)$$

$$= \frac{1}{h^2} \left[a_0 p(x_i, t_n) + 2a_1 p(x_i, t_n) + a_1 h^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_i, t_n) \right] + \mathcal{O}(h^2) \quad (5.5)$$

$$= \frac{(a_0 + 2a_1) p(x_i, t_n)}{h^2} + a_1 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_i, t_n) + \mathcal{O}(h^2). \quad (5.6)$$

Assim, para termos a última igualdade, os coeficientes a_0 e a_1 deverão verificar as igualdades seguintes

$$\begin{cases} a_0 + 2a_1 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

isto é

$$\begin{cases} a_0 = -2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Obtemos deste modo a usual discretização da derivada de segunda ordem de segunda ordem.

- Consideremos agora $M = 2$. Neste caso obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p(x_i, t_n)}{\partial x^2} &= \frac{1}{h^2} [a_0 p_h^n + a_1 (p(x_{i-1}, t_n) + p(x_{i+1}, t_n))] + a_2 (p(x_{i-2}, t_n) + p(x_{i+2}, t_n)) \mathcal{O}(h^4) \\ &= \frac{1}{h^2} \left[a_0 p(x_i, t_n) + a_1 \left(2p(x_i, t_n) + h^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_i, t_n) + \frac{2}{4!} h^4 \frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(x_i, t_n) \right) \right] \\ &\quad + a_2 \left(2p(x_i, t_n) + (2h)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_i, t_n) + \frac{2(2h)^4}{4!} \frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(x_i, t_n) \right) \mathcal{O}(h^4) \\ &= \frac{1}{h^2} \left[(a_0 + 2a_1 + 2a_2) p(x_i, t_n) \right. \\ &\quad \left. + (a_1 + 4a_2) h^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_i, t_n) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{4!} a_1 + \frac{2^5}{4!} a_2 \right) h^4 \frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(x_i, t_n) \right] + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

Assim, os coeficientes a_j deverão verificar

$$\begin{cases} a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_1 + 4a_2 = 1 \\ a_1 + 16a_2 = 0. \end{cases}$$

Obtemos assim

$$\begin{cases} a_0 = -\frac{5}{2} \\ a_1 = \frac{4}{3} \\ a_2 = -\frac{1}{12}. \end{cases}$$

No primeiro caso, se $\Delta t = \mathcal{O}(h^2)$ então o Teorema 8 permite concluir

$$\|D_{-t} E_h^m\|_h^2 + c^2 \|D_{-x} E_h^h\|_+^2 \leq Ch^4$$

e

$$\|E_h^1\|_h \leq Ch^2.$$

No segundo caso, não podemos garantir que se $\Delta t = O(h^4)$, então o erro E_h^m é também de ordem 4. No capítulo seguinte ilustramos o comportamento do método obtido considerando esta discretização espacial e a integração temporal análoga à estudada no último capítulo.

5.3 Outro método

De seguida consideremos um novo método que foi introduzido em ([5]). Este método é obtido considerando a discretização temporal de segunda ordem. De facto, os autores consideraram

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x_i, t_m) = D_{2t}p(x_i, t_m) - \frac{(\Delta t^2)}{12} \frac{\partial^4 p}{\partial t^4}(x_i, t_m) + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x_i, t_m) = D_{ct}p(x_i, t_m) - \frac{\Delta t^2}{3} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3}(x_i, t_m) + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = D_{2x}p(x_i, t_m) - \frac{(\Delta x^2)}{12} \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (5.9)$$

$$(5.10)$$

em que D_{2t} e D_{2x} denotam os operadores de diferenças centradas de segunda ordem em t e em x , respectivamente,

$$D_{ct}p(x_i, t_m) = \frac{p(x_i, t_{m+1}) - p(x_i, t_{m-1})}{2\Delta t}.$$

e $i = 1, \dots, N-1$ e $n = 0, \dots, M-1$. Assim, os autores introduzem o método seguinte

$$p_i^{n+1} = \frac{2 + \alpha\Delta t - 2s}{1 + \alpha\Delta t} p_i^n + \frac{s(p_{i+1}^n + p_{i-1}^n)}{1 + \alpha\Delta t} - \frac{1}{1 + \alpha\Delta t} p_i^{n-1} \quad (5.11)$$

em que $s = \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}$.

O método anterior apresenta erro de truncatura de segunda ordem em x e em t e portanto, assumindo que o método é estável, poderemos inferir que tal método apresenta convergência quadrática. Notamos que tal estudo analítico não foi objecto deste trabalho.

Capítulo 6

Simulação Numérica

6.1 Introdução

O objectivo principal deste capítulo é ilustrar os resultados teóricos apresentados ao longo deste trabalho. Além de ilustrarmos o comportamento qualitativo do modelo (2.3) em função dos diferentes parâmetros envolvidos na equação do telégrafo, pretendemos ilustrar o teorema central de convergência demonstrado no capítulo 4 - Teorema 8- estabelecido para o método (4.1). Iremos ainda averiguar as propriedades de convergência dos métodos introduzidos no último capítulo e que não foram estudados analiticamente.

Para tal, consideremos como exemplo as funções ϕ , ψ e a função $f(x, t)$ tal que

$$p(x, t) = e^{-t} \sin(2\pi x), \quad x \in [0, 1] \quad t \in [0, 1] \quad (6.1)$$

é a solução do problema (2.3) com as condições iniciais

$$\begin{cases} p(x, 0) = \sin(2\pi x), \\ \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = -\sin(2\pi x). \end{cases} \quad (6.2)$$

Na secção 6.2 começamos por considerar o método estudado nesta dissertação no capítulo 4, na secção 6.3 consideremos o método descrito na secção 5.2 e por último, na secção 6.4, consideramos o método descrito na secção 5.3.

No cálculo dos erros que são apresentados seguidamente nas Tabelas (6.1), (6.2) e (6.3), foi considerada a solução do problema dada em (6.1), a solução numérica obtida com cada método e o erro

$$E_h^m(x_i) = p_h^m(x_i) - p(x_i, t_m). \quad (6.3)$$

Recordamos novamente que relativamente ao método por nós estudado, uma vez que provámos que

$$\|D_{-x}E_h^m\|_+ \leq C(\Delta t + h^2),$$

então

$$\max_m \|E_h^m\|_\infty = \max_i |E_h^m(x_i)| \leq C(\Delta t + h^2).$$

Logo se $\Delta t = O(h^2)$, obtemos

$$\|E_h^m\|_\infty \leq Ch^2.$$

Por fim foi calculado $\|E_h^m\|_\infty$.

6.2 Método Implícito

Começamos com uma pequena ilustração do comportamento qualitativo da solução da equação do telégrafo. Os gráficos apresentados nas figuras (6.1) e (6.2) foram obtidos com $N = 400$ e $M = 200$. A figura (6.1) ilustra a influência do parâmetro c . No gráfico da figura da esquerda consideramos $c = 0.4$ e $c = 10$ no gráfico da imagem direita. Em ambos os casos tomamos $\alpha = 1$.

Na figura (6.2) pretendemos ilustrar a influência do parâmetro α . O gráfico da imagem da esquerda foi obtido com $\alpha = 2.1$ e tomamos $\alpha = 0$ no gráfico da imagem da direita.

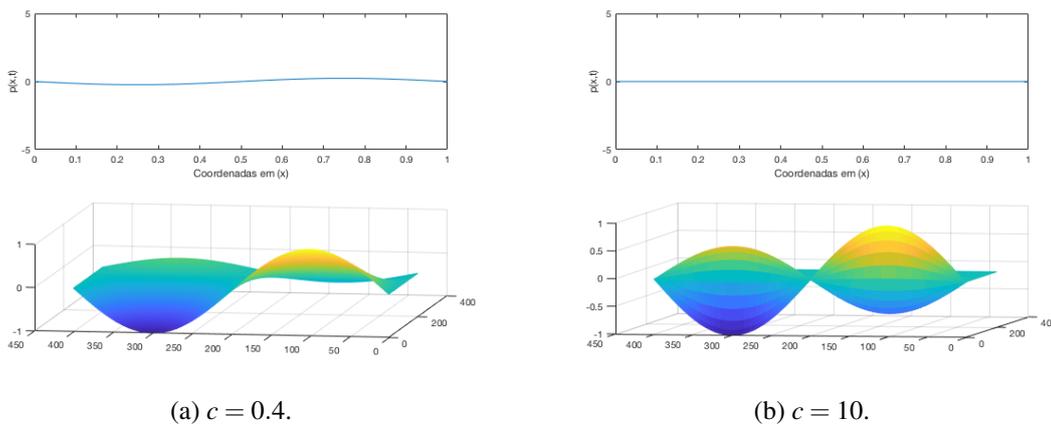


Fig. 6.1 Solução numérica de p_h^m para uma malha $N = 400$ e $M = 200$ e $\alpha = 2$. As imagens superiores representa o perfil da onda no instante final.

Salienta-se que em cada uma das figuras de (6.1) e (6.2), a imagem inferior apresenta a solução numérica obtida para uma malha uniforme para todos os instantes de tempo considerados, enquanto que a figura superior representa o perfil da onda no instante final.

Pelas imagens (6.1) podemos inferir, para os casos considerados, que para uma constante c maior observamos uma maior vibração na onda.

A imagem (6.2) ilustra o comportamento da solução para dois α distintos. Observamos α maior induz uma menor propagação da onda. Salientamos que o caso $\alpha = 0$ corresponde a um caso particular da equação do telégrafo - a equação da onda.

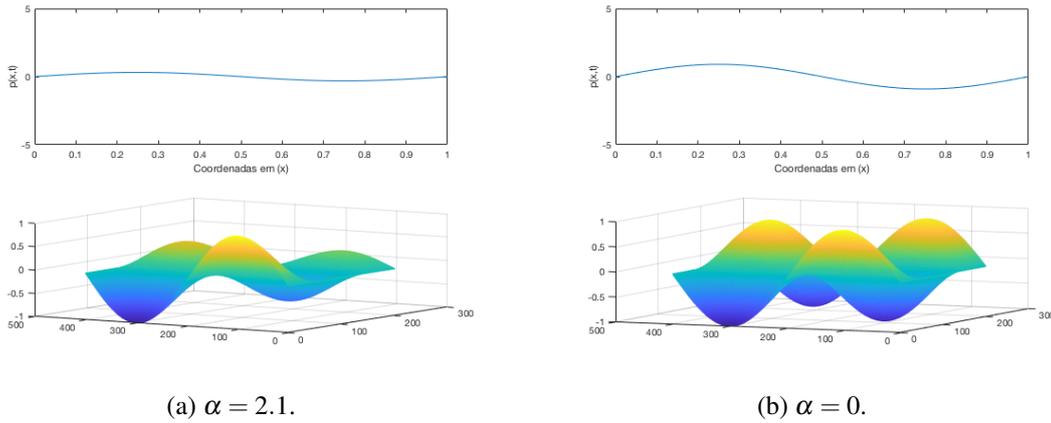


Fig. 6.2 Solução numérica p_h^m para a malha $N = 400$ e $M = 200$ e $c = 1$. As imagens superiores representam o perfil da onda no instante final $T = 1$.

No que se segue, pretendemos ilustrar a convergência do método numérico (4.1) considerando sempre o exemplo descrito no início deste capítulo, bem como a ordem de convergência obtida no capítulo (4.1) estabelecida no Teorema (8). Fixámos $c = 1$ e $\alpha = 2.1$. Na figura (6.3) ilustramos a solução obtida numericamente e a solução exata.

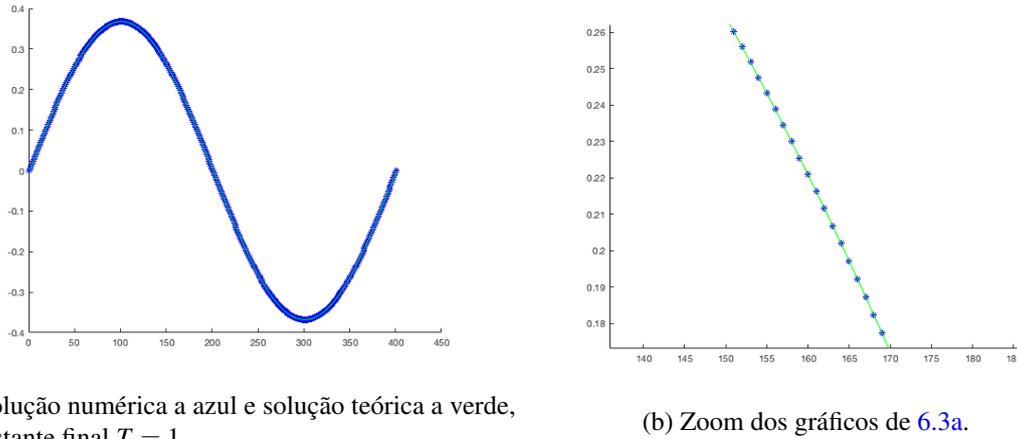


Fig. 6.3 Comparação entre solução numérica e a solução teórica, para $c = 1$, $\alpha = 2.1$, $N = 400$ e $M = 200$, (6.1).

Para terminar esta secção, pretendemos ilustrar o resultado do Teorema 8, ou seja, pretendemos ilustrar a convergência quadrática do erro global. Com este objectivo fixemos $\Delta t = \frac{1}{M}$. Na expressão (6.4), r denota a aproximação numérica para a ordem de convergência do método. Consideramos 4 malhas com $N_\ell = 20 * 2^{(\ell-1)}$, para $\ell = 1, \dots, 4$, e $h_\ell = \frac{1}{N_\ell}$. Seja $E_{h_\ell}^m$ o erro associado à malha ℓ . A ordem de convergência r_i é dada por

$$\frac{E_{h_1}^n}{E_{h_2}^n} = \left(\frac{ch_1}{ch_2} \right)^r \quad (6.4)$$

isto é

$$r = \frac{\ln\left(\frac{E_{h_1}^n}{E_{h_2}^n}\right)}{\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}. \quad (6.5)$$

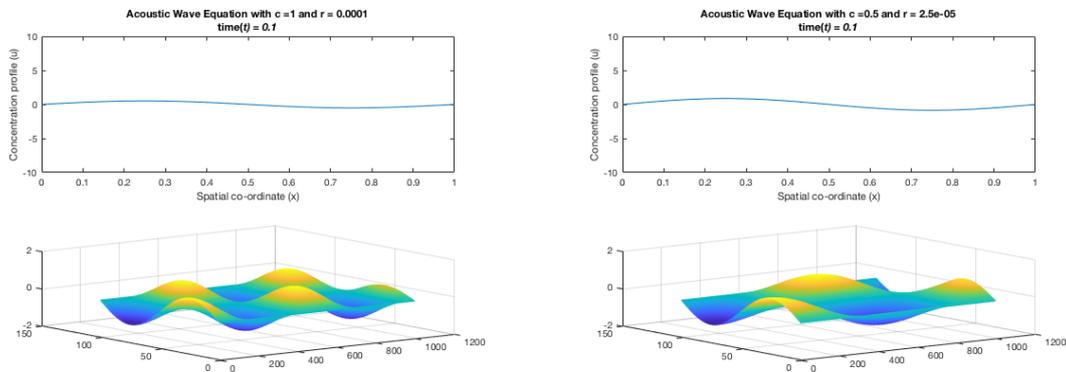
Na Tabela (6.1) são apresentados os erros obtidos para cada uma das malhas referidas anteriormente bem como as ordens de convergência correspondente. Notemos as ordens de convergência encontradas são aproximadamente 2, como estabelecido no Teorema 8.

N	$Erro$	r
20	0.010463408721689	
40	0.002608317801437	2.004161357219479
80	6.505174765762956e-04	2.003459938932922
160	1.615474081575474e-04	2.009630212001453

Tabela 6.1 Erros para diferentes malhas com $c = 10$, $\alpha = 2$ e $M = 2000$ obtidos com o método (4.1).

6.3 Método de Ordem Mais Elevada

Nesta secção iremos apresentar um estudo de simulação numérica para o método proposto em [1]. Este método apresenta uma discretização espacial com erro de truncatura de quarta ordem e, com o $\alpha = 0$, o erro de truncatura temporal é de segunda ordem em Δt . Uma vez que pretendemos observar ordem 4 globalmente, é suficiente considerar $\Delta t = O(h^2)$. Os gráficos contidos nas figuras 6.4 foram obtidos com $N = 100$ e $M = 1000$ e $T = 0.1$. À semelhança do que foi feito anteriormente, a imagem (6.4a) pretende ilustrar a influência do parâmetro c . Na figura (6.4a) tomámos $c = 1$ e $c = 0.5$ na figura (6.4b).



(a) Solução numérica para $c = 1$.

(b) Solução numérica para $c = 0.5$.

Fig. 6.4 Solução numérica p_h^m para uma malha $N = 100$ e $M = 1000$ e $T = 0.1$. As imagens superiores representam o gráfico da solução da equação da onda instantânea final.

Salienta-se novamente que em cada uma das figuras de (6.4), a imagem inferior representa a solução numérica obtida para a malha uniforme em todos os instantes de tempo considerados, enquanto que a figura superior representa o perfil da solução no instante final.

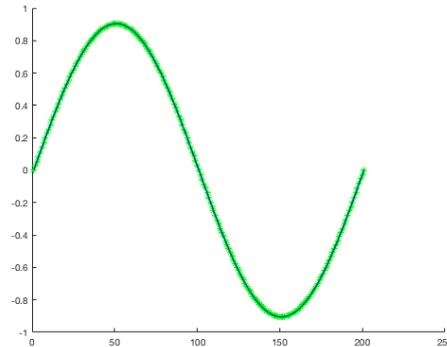


Fig. 6.5 Solução Numérica para no instante $T = 0.1$.

Na figura (6.5) verificamos que a solução numérica está próxima da solução real. De seguida, na Tabela (6.2) pretendemos ilustrar a ordem de convergência do método utilizado. Nas condições anteriores, o erro de truncatura é de ordem 4 pois tomámos $\alpha = 0$, $h = 10^{-2}$ e $\Delta t = 10^{-4}$ ou seja $\Delta t = h^2$. Assim, é expectável que a ordem de convergência seja aproximadamente 4.

N	<i>Erro</i>	r
20	0.023544498241461	
40	0.012345362986502	0.931420721409439
80	0.006161388622317	1.002641816252781
160	0.003074588818990	1.002862050688937
320	0.001519504453073	1.016792581280102

Tabela 6.2 Erros para diferentes malhas para o método proposto em [1].

Contrariamente ao anteriormente anunciado, os resultados apresentados na tabela anterior (6.2) apenas permitem inferir que o método em estudo tem ordem de convergência igual a 1. Esta questão deverá ser estudada posteriormente.

6.4 Método Explícito

Por último, ilustramos o comportamento método explícito considerado na última secção do capítulo anterior. Os resultados apresentados nas figuras (6.6) foram obtidos com uma malha uniforme com $N = 100$ e $M = 1000$. A figura (6.6a) ilustra o comportamento da solução do problema em estudo para $c = 10$ e $\alpha = 2$ e a figura (6.6b) ilustra o comportamento para $c = 1$ e $\alpha = 0.05$.

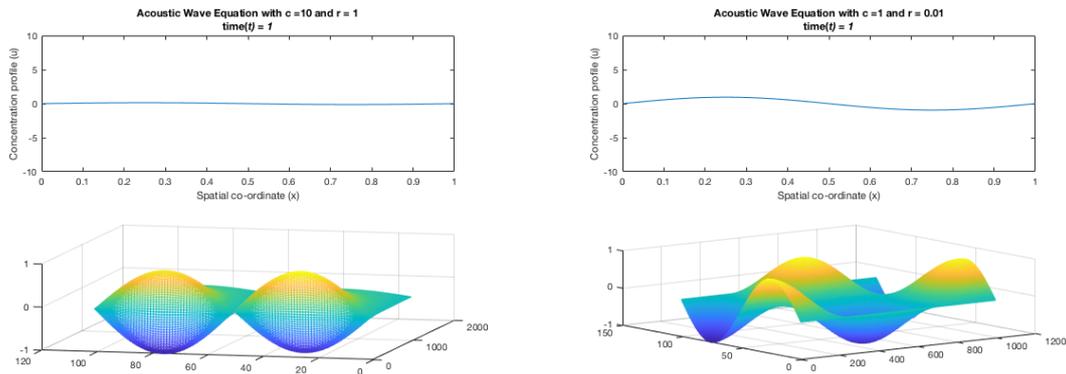
(a) Solução numérica para $c = 10$ e $\alpha = 2$.(b) Solução numérica para $c = 1$ e $\alpha = 0.05$.

Fig. 6.6 Solução numérica p_h^m para uma malha $N = 100$ e $M = 1000$. As imagens superiores representam o perfil da solução no instante final.

Notamos que o erro de truncatura, tanto no espaço como no tempo, é de segunda ordem. A ordem de convergência quadrática observada para o método (6.2) foi obtida considerando uma escolha particular de Δt . De facto, tomamos nesse caso $\Delta t = h^2$. No caso presente tal restrição não é necessária. As ordens de convergência apresentadas na tabela seguinte foram calculada utilizando a relação (6.4).

N	<i>Erro</i>	r
20	0,004729525848100	
40	0,001165020201888	2,021340583500526
80	2,825448695493726e-04	2,043803073892238
160	6,249274252434489e-05	2,176719432991499
320	1,111655640290143e-05	2,490978704017532

Tabela 6.3 Erros para diferentes malhas com $c = 1$, $\alpha = 0.05$ e $M = 2000$ para o Método Explícito.

A Tabela (6.3) resume o resultado dos erros obtidos para cada uma das malhas referidas bem como as ordens de convergência obtida numericamente. Como facilmente constatamos, a ordem de convergência observada é aproximadamente 2.

Capítulo 7

Conclusão

A libertação, transporte e absorção de fármacos estimulados por ultrasons é um campo onde a investigação tem sido intensa nas últimas décadas. Dispositivos médicos de transporte e entrega de fármacos onde a utilização de estímulos é frequente têm sido utilizado em oncologia com o objectivo de substituir o tradicional administração da quimioterapia. Assim, os fármacos são colocados em dispositivos poliméricos que são introduzidos na corrente sanguínea e que apresentam alguma afinidade com o tecido alvo. Este tecido é posteriormente "bombardeado" com um ultrassom que gera uma onda de pressão acústica que se propaga e que induz alterações significativas no dispositivo polimérico bem como no tecido alvo. A completa descrição do transporte e absorção do fármaco depende das características da onda de pressão que é descrita por uma equação do telégrafo.

A aplicação da equação do telégrafo na libertação de fármacos foi a principal motivação para este trabalho. A necessidade de estabelecer a existência e unicidade do problema diferencial que descreve a propagação da onda de pressão bem como o transporte e absorção do fármaco, passa necessariamente pelo estudo da primeira equação.

Após uma breve introdução, iniciámos este trabalho com o estudo da existência e unicidade de solução fraca do problema de condições iniciais e de fronteira envolvendo a equação do telégrafo - capítulo 2. Uma vez que não é conhecida a expressão da solução do problema em estudo, é necessário desenvolver ferramentas numéricas que permitam de forma precisa determinar, pelo menos de forma aproximada, a solução do problema contínuo.

No capítulo 3 iniciámos o estudo do modelo discreto que irá substituir a equação do telégrafo contínua, considerando a aproximação semi-discreta definida pelo operador de diferenças centradas de segunda ordem definido a partir de uma malha uniforme. Mostrámos que esta aproximação é estável e convergente com ordem de convergência igual a 2. Esta propriedade vale para a aproximação semi-discreta, para a sua derivada temporal e para a sua "derivada" no espaço. Terminámos este capítulo observando que a aproximação semi-discreta introduzida coincide com a solução de elementos finitos segmentada linear combinada com fórmulas de integração convenientes.

O estudo de um método implícito foi considerado no capítulo 4. Neste capítulo destacamos o Teorema 7 onde se caracteriza a solução numérica a partir das condições iniciais e que tem com consequência a estabilidade do método numérico (4.1). A convergência deste método é estabelecida no Teorema 8. Neste resultado provamos que as "derivadas numéricas" temporal e espacial a solução numérica convergem para as correspondentes derivadas da solução contínua.

Com o objectivo de comparar o método (4.1) com outros métodos propostos na literatura, no capítulo 5 introduzimos de modo sumário outros métodos apresentados na literatura. Entre estes métodos destacamos o método proposto em [1] em que a discretização espacial apresenta ordem 4.

A simulação numérica que ilustra os resultados apresentados neste trabalho está incluída no capítulo 6. Neste capítulo ilustramos a influência dos parâmetros da equação do telégrafo no comportamento da solução do modelo contínuo. Ilustramos ainda o resultado de convergência demonstrado para o método (4.1). Mostramos numericamente que método explícito obtido discretizando as derivadas temporais de segunda e primeira ordens com os operadores de diferenças centras de segunda ordens, apresenta convergência quadrática. Finalmente, os resultados de simulação não permitem concluir que o método numérico obtido discretizando a derivada espacial com um operador de diferenças que induz um erro de truncatura de quarta ordem e considerando $\Delta t = O(h^2)$ com $\alpha = 0$ apresenta ordem de convergência igual a quatro.

Bibliografia

- [1] Abdulkadir, Y. A. (2015). Comparison of finite difference schemes for the wave equation based on dispersion. *Scientific Research Publishing*, pages 1545–1562.
- [2] Branco, J. and Ferreira, J. (2007). A singular perturbation of the heat equation with memory. *Journal of Computational and Applied Mathematics*.
- [3] Evans, L. C. (2006). *Partial Differential Equations*. Providence, R.I : AMS, 2008., 4nd edition.
- [4] Ferreira, J., Jordão, D., and Pinto, L. (2017). Second order approximations for kinetic and potential energies in maxwell’s wave equations. (120).
- [5] Najafi, H. S. and Izadi, F. (2014). Comparison of two finite difference methods for solving the damped wave equation. *International Journal of Mathematical Engineering and Science*, pages 35–49.
- [6] Pierce, A. D. (1981). *Acoustics : an introduction to its physical principles and applications*. New York : McGraw-Hill Book Comp, Reading,Massachusetts, 2nd edition.
- [7] Pulkkien, A., Werner, B., Martin, E., and Hynynen, K. (2014). Numerical simulations of clinical focused ultrasound functional neurosurgery. *Phys Med Biol*, (59):1679 – 1700.
- [8] Rachier, D. (2006). *The Science and applications of Acoustics*.
- [9] Suli, E. (2005). *An Introduction to the Numerical Analysis of Partial Differential Equations*. University of Oxford, 2000.
- [10] Suli, E. (2012). *Lecture Notes on Finite Element Methods for Partial Differential Equations*. University of Oxford, 2000.