

Daniel Filipe Ferreira Bastos

MODELAÇÃO E ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DE LAJES DE COMPORTAMENTO ELÁSTICO LINEAR COM APOIOS PONTUAIS E PLANOS: COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES PARA ELEMENTOS PLANOS E SÓLIDOS

MODELING AND ANALYSIS BY FINITE ELEMENTS OF LINEAR ELASTIC SLABS WITH POINT AND PLANE SUPPORTS: COMPARISON OF THE SOLUTIONS FOR PLANE AND SOLID ELEMENTS

Dissertação de Mestrado Integrado em Engenharia Civil, na área de Especialização em Estruturas, orientada pelo Professor Doutor Anísio Alberto Martinho de Andrade e pelo Professor Doutor Paulo Manuel Mendes Pinheiro da Providência e Costa

Coimbra, 07 de fevereiro de 2018



UNIVERSIDADE DE COIMBRA



FCTUC DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Daniel Filipe Ferreira Bastos

MODELAÇÃO E ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DE LAJES DE COMPORTAMENTO ELÁSTICO LINEAR COM APOIOS PONTUAIS E PLANOS: COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES PARA ELEMENTOS PLANOS E SÓLIDOS

MODELING AND ANALYSIS BY FINITE ELEMENTS OF LINEAR ELASTIC SLABS WITH POINT AND PLANE SUPPORTS: COMPARISON OF THE SOLUTIONS FOR PLANE AND SOLID ELEMENTS

Dissertação de Mestrado Integrado em Engenharia Civil, na área de Especialização em Estruturas, orientada pelo Professor Doutor Anísio Alberto Martinho de Andrade e pelo Professor Doutor Paulo Manuel Mendes Pinheiro da Providência e Costa

Esta Dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor.
O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer responsabilidade, legal ou outra, em relação a erros ou omissões que possa conter.

Coimbra, 07 de fevereiro de 2018

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todas as pessoas e instituições, que de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização da presente dissertação e para o decorrer do meu percurso académico:

Em primeiro lugar quero agradecer à minha família, em particular aos meus pais e irmão pela ajuda, esforço e sacrifício que demonstraram, assim como o apoio incondicional durante estes seis anos académicos.

À Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra, particularmente ao departamento de Engenharia Civil, professores e funcionários que o agregam, que proporcionaram a minha evolução pessoal e progresso profissional.

Aos meus orientadores, Professor Doutor Anísio Alberto Martinho de Andrade e Professor Doutor Paulo Manuel Mendes Pinheiro da Providência e Costa pela disponibilidade demonstrada, valiosa partilha de conhecimentos e pela contribuição e incentivo de realização da presente dissertação.

Ao Pedro Fernandes pela disponibilidade, ajuda e fornecimento de informação útil para a realização da presente dissertação.

À Jéssica, por todo o apoio, sacrifício, paciência e coragem transmitida durante todas as etapas da minha vida, o meu mais sincero agradecimento.

Por último, tenho de agradecer aos meus amigos João Neto, Miguel Tomás, Ricardo Nunes, João Alves, José Oliveira, João Neves, Filipe Rodrigues, Bruno Lucas, Bruno Alvim e João Sousa que me acompanharam durante esta longa caminhada.

RESUMO

Esta dissertação aborda a modelação e a análise de lajes retangulares de comportamento elástico linear com apoios pontuais ou, alternativamente, planos em dois lados opostos, tendo por objetivo a comparação dos modelos e das soluções de elementos finitos para elementos planos e para elementos sólidos, para o caso particular da ação de uma carga pontual.

A razão de ser deste estudo centra-se nos resultados inesperados, para a distribuição transversal da carga em tabuleiros de pontes mistas, obtidos por Fernandes (2017). Tendo em vista o esclarecimento deste resultado, Fernandes (2017) desenvolveu um modelo mais simples, de uma laje homogénea sobre apoios pontuais, com elementos finitos planos de laje. Os resultados para este segundo caso foram ainda mais surpreendentes, tendo ele concluído que a explicação para tais respostas estaria, eventualmente, numa eventual incapacidade do tipo de elemento finito utilizado para se combinar com apoios e forças pontuais aplicadas. Assim, no termo da sua investigação, propôs o aprofundamento deste tópico.

Os elementos finitos planos podem ser obtidos, analiticamente, a partir dos elementos finitos sólidos por supressão de uma dimensão, constituindo, pois, uma aproximação dos elementos sólidos: por este motivo, a sua eficácia pode ser averiguada comparando as soluções obtidas com modelos de elementos planos e de elementos sólidos.

Depois de realizada a comparação referida no parágrafo anterior, expandiu-se o âmbito do estudo segundo duas direções distintas. Na primeira, adotou-se uma modelação mais realista dos apoios, considerando as suas dimensões finitas em planta. A segunda, necessária para comparar, e validar, os resultados dos problemas descritos nos dois parágrafos anteriores, consistiu em considerar apoios pontuais flexíveis.

Este estudo permitiu (i) identificar as formas mais apropriadas de modelação de apoios de tabuleiros de pontes, (ii) os casos em que os modelos com elementos finitos planos de laje podem – e nesse caso devem, dado o seu menor custo – ou não ser utilizados, (iii) determinar a tendência de distribuição lateral de forças no tabuleiro considerado e, (iv) responder, talvez de forma ainda não totalmente conclusiva, à questão colocada por Fernandes (2017).

PALAVRAS-CHAVE: Elementos finitos planos de laje; Elementos finitos sólidos; Apoios pontuais; Apoios planos; Distribuição lateral de forças em pontes.

ABSTRACT

This dissertation considers the modeling and analysis of linear elastic rectangular slabs with point and plane supports on two opposite sides. Its objective is the comparison of finite element models and solutions using plane and solid elements, for the particular case of a point load.

The reason for this investigation are the unexpected results for the transversal load distribution in timber-concrete composite decks of bridges, obtained by Fernandes (2017). Having in view the explanation of these results, Fernandes (2017) developed a simpler model, of a homogeneous slab on point supports, using plane finite elements. The results were even more unforeseen for this second case, and he concluded that the possible cause for such responses might lay in the inability of the used plane finite element to deal with point supports and applied forces. He therefore proposed, by the end of his dissertation, further investigations on this topic.

In their analytical formulation, the plane finite elements can be obtained from solid finite elements by suppression of one dimension, and can therefore be considered as an approximation of the solid elements. Hence, to verify their effectiveness, the solutions obtained with plane finite elements models can be compared to the solution for solid finite elements models.

After the comparison referred to in the previous paragraph, the investigation scope was expanded along two different directions. First, a more realistic modeling of the supports was adopted, considering their finite dimensions in plan. Secondly, flexible point supports were considered in order to enable the comparison and validation of the previous results.

This investigation allowed (i) to identify the most appropriate forms of bridge deck supports modeling, (ii) the cases where models with plane finite elements may – and in this case should, because of their lower cost – or may not be used, (iii) to determine the trends of lateral distribution of loads in considered type of decks, and, last but not least, (iv) to give an answer, albeit not totally satisfactory, to the question identified by Fernandes (2017).

KEYWORDS: Plane slab finite elements; Solid finite elements; Point supports; Plane supports; Transverse load distribution in bridge decks.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	ii
ABSTRACT	iii
ÍNDICE.....	iv
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Enquadramento geral.....	1
1.2. Objetivos e âmbito da dissertação	3
1.3. Organização da dissertação	4
2. ANTECEDENTES PARA O TEMA EM ANÁLISE.....	5
2.1. Introdução.....	5
2.2. Modelos simplificados desenvolvidos por Fernandes	6
2.3. Resultados obtidos por Fernandes	8
3. MODELOS NUMÉRICOS COM APOIOS PONTUAIS RÍGIDOS	11
3.1. Introdução.....	11
3.2. Modelação e Análise para a carga aplicada na Posição 1.....	11
3.2.1. Modelos de elementos planos	11
3.2.1.1. Modelação e convergência da solução	11
3.2.1.2. Modelação no SAP2000.....	16
3.2.2. Modelos de elementos sólidos	17
3.2.2.1. Modelação e convergência da solução	17
3.2.3. Comparação entre soluções de modelos de elementos planos e elementos sólidos ..	26
3.3. Outras posições da carga aplicada.....	28
3.3.1. Carga aplicada na Posição 2	28
3.3.1.1. Modelos de elementos planos	28
3.3.1.2. Modelos de elementos sólidos.....	31
3.3.1.3. Comparação entre soluções de modelos de elementos planos e elementos sólidos...	33

3.3.2.	Carga aplicada na Posição 3	35
3.3.2.1.	Modelos de elementos planos	35
3.3.2.2.	Modelos de elementos sólidos.....	36
3.3.2.3.	Comparação entre soluções de modelos de elementos planos e elementos sólidos...	37
4.	MODELOS NUMÉRICOS COM APOIOS PLANOS ELÁSTICOS	39
4.1.	Introdução	39
4.2.	Modelação e Análise para a carga aplicada na Posição 1.....	42
4.2.1.	Modelo de elementos planos.....	42
4.2.1.1.	Modelação e convergência da solução	42
4.2.2.	Modelos de elementos sólidos	48
4.2.2.1.	Modelação e convergência da solução	48
4.2.3.	Comparação entre soluções de modelos de elementos planos e elementos sólidos ..	53
4.3.	Restantes posições da carga aplicada	54
4.3.1.	Carga aplicada na Posição 2	54
4.3.2.	Carga aplicada na Posição 3	57
4.4.	Avaliação do efeito do valor da rigidez dos apoios.....	59
5.	MODELOS NUMÉRICOS COM APOIOS PONTUAIS ELÁSTICOS	65
6.	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	70
6.1.	Conclusões.....	70
6.2.	Trabalhos Futuros	72
7.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73

1. INTRODUÇÃO

1.1. Enquadramento geral

Em projeto corrente de edifícios e pontes, nos modelos estruturais utilizados na análise, considera-se a simplificação (i) da geometria dos elementos estruturais, adotando modelos de elementos lineares (estruturas reticuladas) ou laminares, (ii) das condições de apoio, (iii) das relações constitutivas e (iv) das próprias ações. Como é óbvio, só de forma aproximada (i) um elemento linear (1D) ou mesmo um elemento plano (2D) podem aproximar um corpo tridimensional, e (ii) um apoio pontual ou uma carga concentrada podem aproximar domínios de apoio e de aplicação de tensões bidimensionais. Para além destas aproximações, os modelos utilizados em projeto simplificam também frequentemente a geometria da deformação, linearizando-a, e, geralmente mais importante para o dimensionamento em engenharia civil, é a linearização das relações constitutivas: estas duas simplificações são adotadas neste trabalho, que considera a hipótese das deformações infinitesimais e um comportamento material elástico linear homogéneo e isotrópico.

Uma peça linear é uma peça em que uma das dimensões é consideravelmente superior às outras duas. Como refere Dias da Silva (2013), as peças lineares são muito utilizadas no campo das engenharias Civil, Mecânica (muitos órgãos de máquinas podem ser analisados como peças lineares), Aeronáutica (por exemplo as asas de planadores e aviões de baixa velocidade), entre outras.

As peças lineares são definidas pelo seu eixo, sendo as cargas e as condições de apoio definidas relativamente a determinados pontos desse eixo. A teoria das peças lineares considera então uma única dimensão segundo o eixo da peça.

De forma semelhante a uma peça linear, uma peça laminar é um corpo em que uma das dimensões é muito menor que as outras duas. Este facto proporcionou o desenvolvimento da teoria das peças laminares, em que essa terceira dimensão é como que condensada, sobejando duas dimensões para descrever o problema. Esta é a principal diferença relativamente à teoria das peças lineares, que apenas considera uma dimensão (Providência *et al.*, 2014).

As peças laminares são definidas pelo seu plano médio, sendo as cargas e as condições de apoio definidas relativamente a pontos desse plano. Além disso, admite-se que estas cargas são tais que conduzem principalmente a esforços e momentos “transversais” a esse plano (Leitão e

Castro, 2014), ou seja, momentos flectores e de torção em torno de eixos paralelos ao plano médio.

Por laje, entende-se uma estrutura laminar, pois a sua espessura é bastante inferior às outras duas dimensões, plana sujeita sobretudo a esforços e momentos “transversais” ao seu plano médio. Claro que se tratando estas lajes de tabuleiros de pontes, também podem apresentar outros tipos de esforços para além destes. Todavia, nos casos estudados nesta dissertação tal não se verifica em virtude do carregamento transversal considerado e das condições de apoio isostáticas no plano médio.

De acordo com Leitão e Castro (2014), num sólido elástico tridimensional a teoria da elasticidade determina o comportamento dos elementos de laje, nomeadamente os campos de deslocamentos, tensões e deformações. Porém esta solução é bastante pesada do ponto de vista matemático e a sua aplicação pelos projetistas ao dimensionamento é complexa.

O facto de as lajes serem estruturas laminares planas permite exprimir, pelo menos aproximadamente, o seu comportamento em função de grandezas definidas apenas sobre o seu plano médio, nomeadamente os deslocamentos e os campos de esforços referidos a esse plano. Todavia, para definir estas grandezas, é necessário admitir como válidas algumas hipóteses sobre o comportamento destes elementos estruturais, as quais não vão ser aqui descritas porque se afastam do âmbito numérico proposto para esta dissertação.

Como referem Providência *et al.* (2014), as lajes adotadas em estruturas correntes podem ser classificadas como lajes finas, ou seja, apresentam uma esbelteza definida pela relação entre a menor dimensão em planta e a espessura superior a 10. Para este feito é usual utilizar-se a teoria de Kirchhoff para lajes, equivalente à teoria de Euler-Bernoulli para vigas, que se baseia na hipótese de que um segmento reto inicialmente normal à superfície média da laje se mantém reto e normal à sua configuração deformada, o que equivale a ignorar a deformação por corte (hipótese de Kirchhoff).

Porém, se a esbelteza da laje for inferior a 5, ou seja, se a sua espessura for muito elevada quando comparada com as outras dimensões, a laje é classificada como laje espessa: neste caso não faz sentido adotar uma teoria bidimensional, devendo, em vez disso, empregar-se elementos finitos volumétricos (elementos sólidos) para a sua modelação.

Como já foi referido anteriormente, a utilização de elementos sólidos implica uma metodologia bastante pesada tanto do ponto de vista matemático, como de modelação e tempo de execução computacional, o que torna a sua utilização pouco frequente em engenharia civil estrutural.

Todavia, há construções onde se utilizam lajes espessas, como por exemplo para contenção de radiações, bunkers ou algumas lajes de ensoleiramento geral (Providência *et al.*, 2014): nesses casos não faz sentido utilizar modelos de elementos finitos que não sejam sólidos.

Interposto a estes dois tipos de laje, tem-se a laje moderadamente espessa, que é uma laje que apresenta deformação por corte não desprezável: neste caso, é habitualmente adotada a teoria de Reissner-Mindlin, a qual se baseia na hipótese cinemática de que um segmento reto inicialmente normal à superfície média da laje se mantém reto, mas não obrigatoriamente normal à superfície média.

1.2. Objetivos e âmbito da dissertação

Esta dissertação centra-se na modelação e análise de lajes retangulares de comportamento elástico linear cujos apoios considerados são pontuais ou planos, sendo o seu objetivo a comparação dos modelos e das soluções para os elementos finitos planos e para os elementos finitos sólidos disponibilizados no programa de análise estrutural utilizado, particularmente quando sujeitas à ação de uma carga pontual – que é o tipo de ação considerado para analisar a distribuição ou repartição lateral de cargas em tabuleiros de pontes. O ponto de partida para este estudo foram os resultados inesperados obtidos com um modelo de elementos planos por Fernandes (2017): de facto, as soluções para modelos com elementos planos deste tipo de lajes, podem apresentar conjuntos de reações com gradientes muito elevados, particularmente junto aos bordos longitudinais (Fernandes, 2017). Nesta dissertação, pretende-se, sempre no âmbito da análise linear por elementos finitos, avaliar se esta resposta inesperada é uma característica do problema físico ou se é resultado da aproximação associada à utilização conjunta de elementos finitos planos com apoios pontuais.

Acrescente-se um esclarecimento relativo ao interesse prático deste tópico. Os apoios pontuais constituem possivelmente a solução mais frequente para os tabuleiros das pontes. Além disso, a capacidade de distribuição lateral dos tabuleiros é normalmente avaliada pela forma dos “campos” transversais de momento fletor, reações de apoio e flechas causados por uma força pontual aplicada a um ponto interior da laje. Era justamente quando investigava um problema deste tipo que Fernandes (2017) se deparou com o resultado inesperado referido anteriormente.

Nesta dissertação, por forma a avaliar se estas teorias simplificadas, utilizadas para estabelecer os elementos finitos planos, conduzem a erros grosseiros quando se procede à modelação com esses elementos, (i) aborda-se a modelação e análise de lajes elásticas lineares homogéneas e isotrópicas de espessura constante e comportamento elástico linear sobre apoios pontuais e planos, e (ii) comparam-se as soluções numéricas determinadas com modelos de elementos

finitos planos e de elementos finitos sólidos, procurando-se assim responder à questão levantada por Fernandes (2017) ou, pelo menos, dar uns primeiros passos para tal.

1.3. Organização da dissertação

A presente dissertação encontra-se organizada em seis capítulos, excluindo as Referências Bibliográficas. No capítulo 1 é realizada uma breve introdução ao tema, apresentando-se também os objetivos e âmbito do trabalho realizado e finalizando-se com a presente organização da dissertação.

No capítulo 2, apresentam-se os antecedentes para o problema em análise, onde se descrevem os modelos desenvolvidos por Fernandes (2017), assim como os resultados obtidos por aquele investigador.

No capítulo 3 são desenvolvidos os modelos de elementos finitos planos e sólidos da laje com apoios pontuais, é efetuado o estudo de convergência das soluções com o refinamento da malha e procede-se à comparação entre as duas soluções.

No capítulo 4 procede-se ao desenvolvimento de modelos de elementos finitos planos e sólidos da laje com apoios planos. É realizado o estudo de convergência das soluções com o refinamento da malha e posteriormente procede-se à comparação dos resultados determinados por estes dois modelos. Também, neste capítulo, é avaliado o efeito da variação do valor da rigidez vertical dos apoios.

No capítulo 5 são desenvolvidos novos modelos de elementos finitos planos e sólidos com apoios pontuais, com rigidez vertical finita, de forma a analisar como varia a repartição da carga pelos apoios, avaliar a diferença de resultados entre os modelos com elementos finitos planos e os modelos com elementos finitos sólidos e comparar os resultados obtidos com modelos de apoios pontuais e de apoios planos.

No capítulo 6 são reunidas, de forma concisa, as principais conclusões retiradas desta dissertação e elencadas sugestões para trabalhos futuros relativas a questões despoletadas pelo presente trabalho.

2. ANTECEDENTES PARA O TEMA EM ANÁLISE

2.1. Introdução

Em geral, as dissertações de mestrado apresentam a seguir ao capítulo da introdução, um capítulo de revisão bibliográfica ou estado da arte, onde se faz um levantamento do trabalho de outros investigadores cujos resultados podem ser pertinentes para o tema da dissertação. No caso presente porém, (i) não só o problema a analisar foi totalmente definido por Fernandes (2017), (ii) como os elementos finitos considerados são simples, os disponibilizados pelos programas de análise considerados (SAP2000 e Robot), (iii) como o método consensualmente aceite para este tipo de averiguações está perfeitamente estabelecido (Cook *et al.*, 2001), consistindo na modelação alternativa da estrutura com elementos sólidos e na análise do desvio dos resultados entre as soluções para elementos finitos planos de laje e para elementos finitos sólidos.

Na dissertação de mestrado de Fernandes (2017) que teve como tema a análise da distribuição transversal de cargas em tabuleiros de pontes mistas madeira-betão com interação parcial, foi observada, como se referiu, uma distribuição não previsível, e dificilmente justificável, para os valores das reações de apoio: por exemplo, a segunda viga mais perto da carga concentrada quase não contribuía para a suportar a carga aplicada.

Assim, Fernandes (2017) recorreu a dois modelos simplificados, não mistos, para tentar determinar se na origem deste resultado para as lajes mistas estava (i) uma característica comportamental (da solução exata) do próprio problema, sendo nesse caso a surpresa perante o resultado uma mera consequência do desconhecimento desse comportamento para este tipo de problemas com lajes mistas, (ii) um erro no modelo de elementos finitos desenvolvidos, que envolvia elementos lineares, elementos planos e elementos link – utilizados tanto para modelar os ligadores entre as malhas dos outros elementos como a condição de não descolamento/interpenetração entre a laje de betão e as vigas de madeira –, ou (iii) uma “deficiência numérica” dos elementos finitos de laje do programa de análise estrutural utilizado (SAP200) que impedia a sua conjugação com apoios pontuais rígidos, e portanto tornava inadequada a sua utilização para modelar a laje do tabuleiro neste tipo de problemas. Assim, julgou-se mais adequada, e conveniente para o leitor deste trabalho, uma exposição precisa do problema levantado por Fernandes (2017), do que uma descrição dos elementos finitos de laje e dos elementos finitos sólidos considerados nos programas de análise utilizados.

2.2. Modelos simplificados desenvolvidos por Fernandes

O primeiro modelo simplificado considerado por Fernandes (2017), e o que mais interessa para a presente dissertação, consiste num modelo de elementos planos de uma laje com 15 m de comprimento, 6 m de largura e 30 cm de espessura, uma laje fina portanto, homogénea, isotrópica e elástica linear, com módulo de elasticidade de 33 GPa (correspondente a um betão C30/37) e coeficiente de Poisson de 0,2, diretamente suportada por 8 apoios pontuais, tal como os do tabuleiro misto, ou seja, um triplo que restringe todas as translações (x, y e z), um duplo que restringe as translações em z e y (transversal) e seis apoios simples que restringem apenas a translação em z (vertical), como se representa nas Figuras 2.1 e 2.2.

Uma carga pontual de 100 kN foi aplicada a meio vão sucessivamente a 1 m (Posição 1), 2 m (Posição 2) e 3 m (Posição 3) do bordo da laje, ou seja, $y = 1$ m, 2 m e 3 m, como no tabuleiro misto madeira-betão. Note-se que a posição, a que será considerada mais pormenorizadamente nesta dissertação (Posição 1), fica “entre” o primeiro e o segundo apoio da laje.

Esta laje foi modelada, com elementos finitos planos de laje que serão caracterizados mais à frente, e analisada por Fernandes (2017) com o programa de cálculo automático SAP2000.

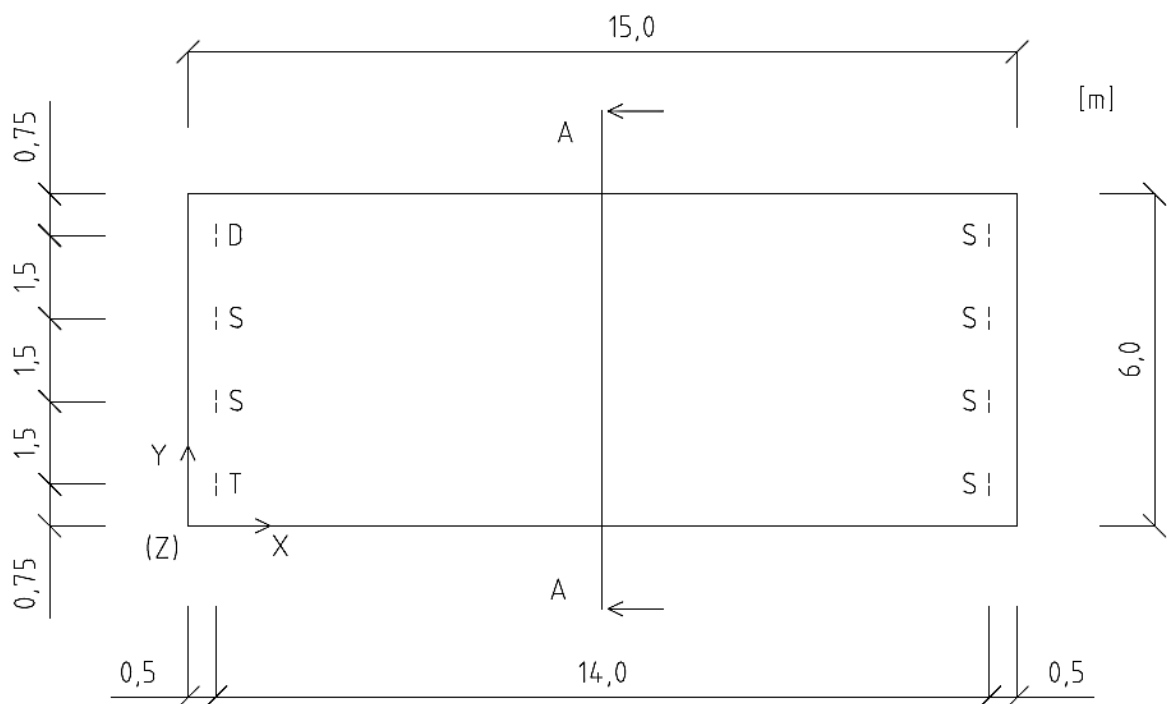


Figura 2.1 – Planta da laje com localização e caracterização dos apoios pontuais

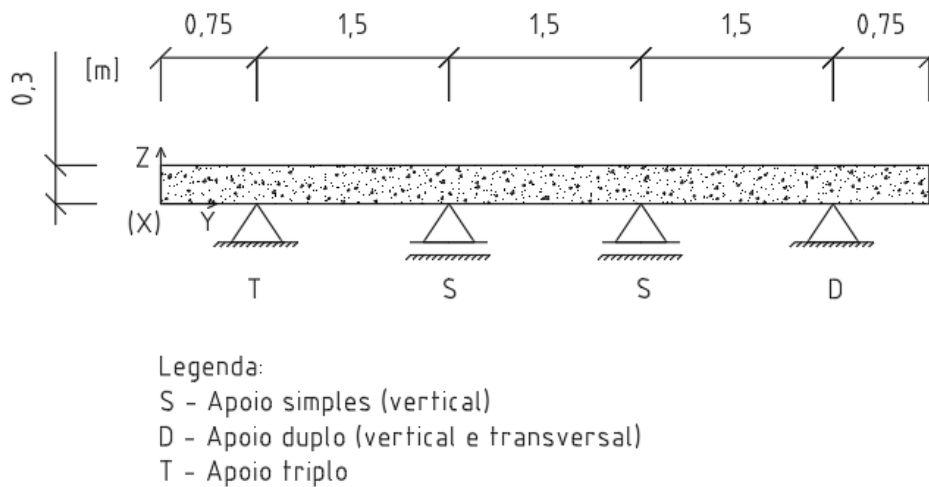


Figura 2.2 – Corte A-A da laje e representação das condições de apoio (no modelo com elementos planos; os apoios, tal como a carga pontual, referem-se ao plano médio da laje)

O segundo modelo simplificado, considerado por Fernandes (2017), “consiste numa viga rígida, simulando uma secção transversal rígida do tabuleiro de betão armado, assente sobre apoios pontuais verticais elásticos, que simulam a rigidez vertical proporcionada pelas vigas de madeira” (Fernandes, 2017), como representado na Figura 2.3.

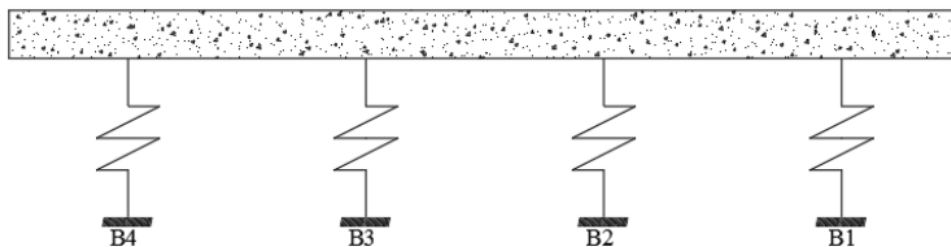


Figura 2.3 – Viga rígida sobre apoios elásticos lineares (Figura retirada de Fernandes (2017))

Visto que este modelo apresenta apenas dois graus de liberdade, ou seja, a rotação e o deslocamento vertical – uma vez que se ignora o deslocamento transversal, é facilmente analisado pelo método dos deslocamentos, tendo-se para uma força vertical de 100 kN, a reação no apoio i , dada pela expressão 2.1 (Providência e Andrade, 2015). Uma vez que a rigidez dos apoios é igual, é irrelevante o seu valor para este modelo.

$$B_i = \frac{100 \text{ kN}}{n} \left(1 + \frac{(2i - 1 - n)(2\bar{l} - 1)}{\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{n} (2j - 1) - 1 \right)^2} \right), \text{ com } n = 4 \quad (2.1)$$

em que:

B_i – Valor da reação de apoio i para uma força vertical de valor 100 kN;

\bar{l} – distância do ponto de aplicação da carga ao bordo livre direito do tabuleiro, dividida pela largura total do tabuleiro, ou seja, para a carga na Posição 1 toma o valor de 1/6, para a Posição 2 toma o valor de 2/6 e para a Posição 3 toma o valor de 3/6;

n – número total de vigas (4 para o caso estudado).

2.3. Resultados obtidos por Fernandes

A presente dissertação tem como ponto de partida justamente o primeiro destes dois modelos simplificados, ou, mais especificamente, a informação sobre o mesmo e respetivos resultados apresentados por Fernandes (2017).

Como é requerido pela análise por elementos finitos, Fernandes (2017) efetuou um estudo de convergência da solução com o refinamento da malha: os valores das reações para as malhas com elementos finitos planos de laje de dimensão 0,25 x 0,25 m e 0,125 x 0,125 m, e o seu desvio relativo, para a carga na Posição 1, foram lidos no Quadro 6.2 daquela dissertação e estão apresentados no Quadro 2.1. Estes valores levaram Fernandes (2017) a concluir que a aproximação obtida com a malha regular de elementos finitos planos de dimensão 0,125 m era adequada, passando ele a utilizar essa malha na análise que efetuou subsequentemente.

Quadro 2.1 – Variação das reações de apoio com o refinamento da malha, para a carga na Posição 1 (Fernandes, 2017)

Reação no apoio	R1 (kN)	R2 (kN)	R3 (kN)	R4 (kN)
Malha 0,25 m	47,71	-7,68	13,90	-3,93
Malha 0,125 m	47,72	-7,73	13,97	-3,96
Desvio relativo [%]	0,02	0,65	0,50	0,76

De referir que os apoios foram numerados segundo o eixo y, da esquerda para a direita de acordo com o esquema da Figura 2.4, correspondendo a reação de apoio, R_j , ao apoio, A_j .

Fernandes (2017) apresentada nas suas Fig. 6.19 a 6.21 os resultados relativos à repartição transversal da carga pelas vigas/apoios, para os seus três modelos e para as diferentes posições de carga; esses resultados reproduzem-se nas Figuras 2.5 a 2.7 do presente documento. O resultado menos espectável no modelo misto é o reduzido valor da reação no segundo apoio.

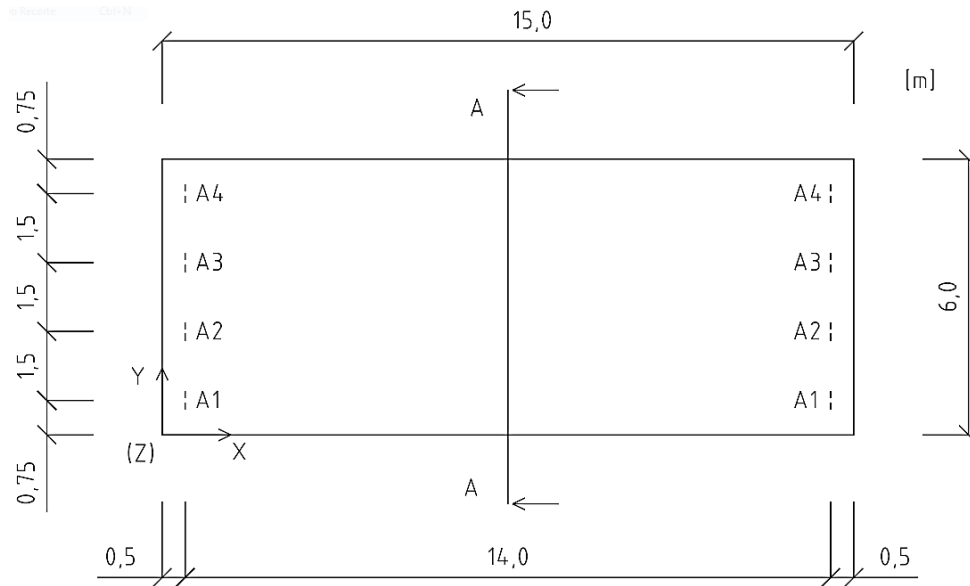


Figura 2.4 – Planta da laje com identificação/numeração dos apoios pontuais

Como se referiu anteriormente, a Posição 1 da carga situa-se entre os apoios A1 e A2, a 0,25 m do primeiro e 1,25 m do segundo: porque motivo é então, para o modelo misto, tão reduzido o valor da reação no apoio A2, por exemplo por comparação com a reação no apoio mais afastado A3?

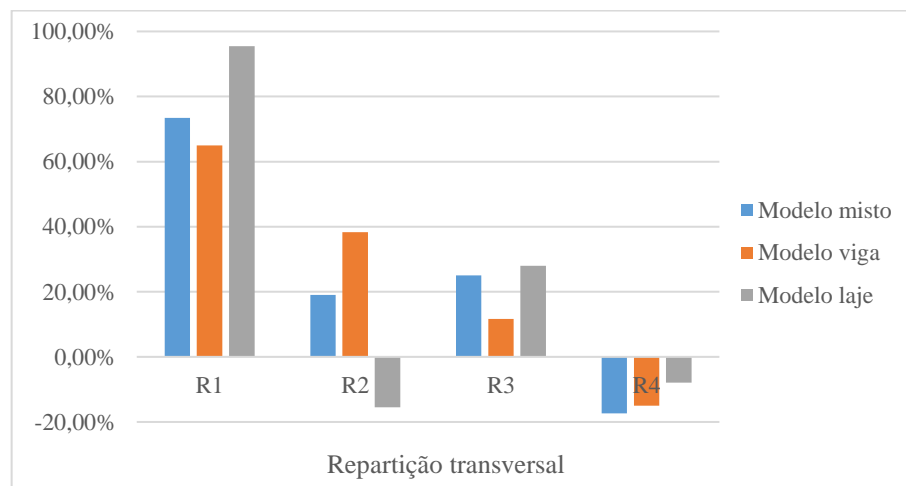


Figura 2.5 – Comparação dos três modelos para a carga na Posição 1 (Fernandes, 2017)

Ora, os resultados para o modelo de laje revelam um agravamento desta tendência, com inversão do sinal da reação do apoio A2, o que levou Fernandes (2017) a concluir que “os resultados para o modelo de laje isotrópica, particularmente para a posição da carga central,

mas não só, permitem confirmar as suspeitas levantadas [...] acerca da estranheza da distribuição dos valores das reações: a componente laje parece ser a causa para tais resultados, possivelmente em resultado da combinação da sua componente de torção com cargas e apoios pontuais” (Fernandes, 2017).

A análise da repartição transversal das reações para o modelo de laje, para a carga na Posição 1, permite observar tendências surpreendentes, sobretudo de R1 e R2, uma vez que o apoio A1 suporta quase a totalidade da carga e o apoio adjacente A2, em vez de suportar um valor superior ao apoio A3, tem sinal oposto, revelando a tendência da laje para descolar.

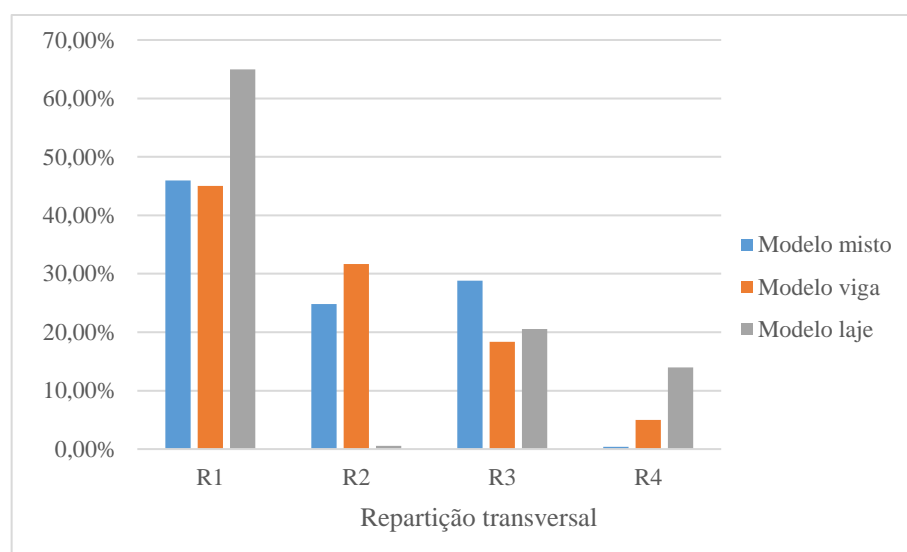


Figura 2.6 – Comparação dos três modelos para carga na Posição 2 (Fernandes, 2017)

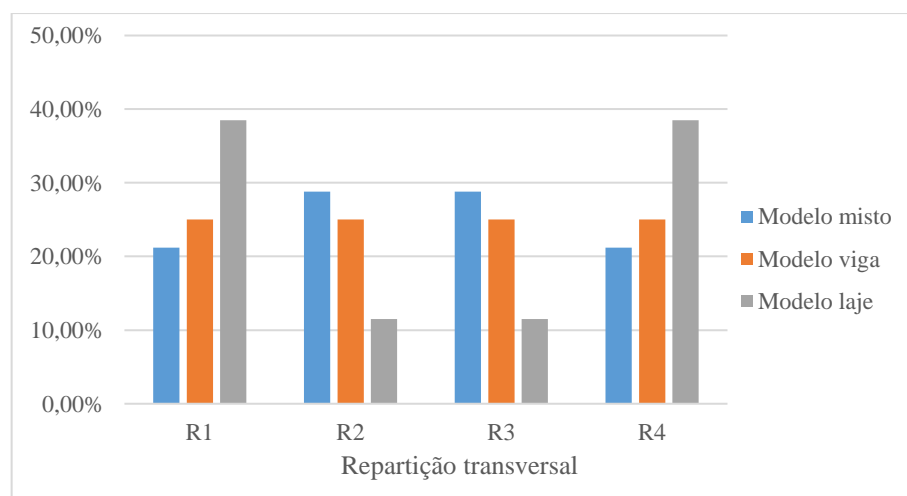


Figura 2.7 – Comparação dos três modelos para carga na Posição 3 (Fernandes, 2017)

3. MODELOS NUMÉRICOS COM APOIOS PONTUAIS RÍGIDOS

3.1. Introdução

De forma a tentar perceber se, efetivamente, em lajes de comportamento elástico linear com apoios pontuais se confirmam as tendências comportamentais referidas no capítulo anterior, decidiu-se efetuar uma nova modelação desta laje (em tudo igual à descrita no capítulo anterior: dimensões, material, apoios e carga aplicada), desta vez com elementos finitos sólidos, e comparar os resultados determinados com os dois modelos: o anterior de elementos planos e o novo de elementos sólidos, sendo que inicialmente se procedeu à modelação do modelo de elementos planos, de forma a confirmar a solução determinada por Fernandes (2017).

As comparações efetuadas nos Quadros desta dissertação baseiam-se sempre na determinação dos desvios relativos ao modelo que, à partida, aproxima melhor o comportamento real (*Valor_{mais rigoroso}*), ou seja, no denominador considera-se sempre o resultado para este modelo, ver expressão 3.1.

$$Desvio [\%] = \frac{Valor_{mais\ rigoroso} - Valor_{menos\ rigoroso}}{Valor_{mais\ rigoroso}} \times 100 \% \quad (3.1)$$

3.2. Modelação e Análise para a carga aplicada na Posição 1

3.2.1. Modelos de elementos planos

3.2.1.1. Modelação e convergência da solução

No Robot, este modelo é desenvolvido através de um “Projeto de placa”, tendo-se optado inicialmente por uma malha regular de elementos de quatro nós, e efetuado o estudo de convergência da solução com o refinamento da malha, cujos resultados se apresentam no Quadro 3.1.

Analisando este quadro, conclui-se que o desvio relativo entre as malhas de 25 x 25 cm e 12,5 x 12,5 cm é significativamente superior ao obtido por Fernandes (2017). Neste sentido, continuou-se a refinar a malha, de forma a obter uma solução com desvio relativo mais baixo.

Todavia, nem com uma malha de 0,781 25 cm se conseguiram desvios relativos suficientemente baixos (p. ex. abaixo de 5%).

Quadro 3.1 – Soluções para a malha regular de elementos planos, para carga na Posição 1

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			
25	46,35	92,70	/	-4,80	-9,60	/	12,22	24,44	/	-3,77	-7,54	/
12,5	46,05	92,10	-0,65	-4,22	-8,44	-13,74	11,95	23,90	-2,26	-3,78	-7,56	0,26
6,25	45,86	91,72	-0,41	-3,79	-7,58	-11,35	11,68	23,36	-2,31	-3,74	-7,48	-1,07
3,125	45,70	91,40	-0,35	-3,43	-6,86	-10,50	11,42	22,84	-2,28	-3,69	-7,38	-1,36
1,5625	45,56	91,12	-0,31	-3,10	-6,20	-10,65	11,18	22,36	-2,15	-3,64	-7,28	-1,37
0,78125	45,43	90,86	-0,29	-2,78	-5,56	-11,51	10,94	21,88	-2,19	-3,59	-7,18	-1,39

O Quadro 3.2 apresenta o número de elementos finitos e o tempo de cálculo para cada uma das malhas.

Quadro 3.2 – Número de elementos finitos e tempo de cálculo para as malhas regulares, para a carga na Posição 1

Malha Regular	Malha	Elementos	Tempo de Cálculo
	[cm]	Finitos	[s]
	25	1 440	1
	12,5	5 760	1
	6,25	23 040	3
	3,125	92 160	14
	1,5625	368 640	66
	0,78125	1 474 560	342

Pode-se concluir que um modelo de elementos planos de uma simples laje, cuja análise computacional demora 342 s, e que, apesar disso ainda apresenta um desvio relativo relativamente alto, não é uma solução adequada para um projetista, o qual necessita de fiabilidade conjugada com alguma velocidade.

Para fazer face a este elevado esforço de cálculo e com o objetivo de reduzir o desvio relativo, decidiu-se experimentar uma malha não regular. O Robot oferece o algoritmo de triangulação de Delaunay para malhas planas de elementos de três nós. Assim, definiu-se uma malha de Delaunay com emissores nos nós dos apoios e da carga pontual, num total de 9 emissores, a

qual se representa na Figura 3.1. Os emissores da malha são os pontos em que a malha apresentará refinamento máximo, ou seja, dimensão mínima.

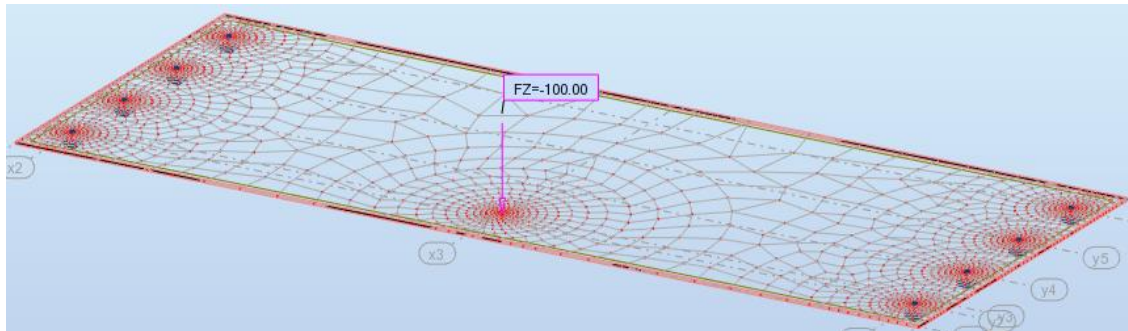


Figura 3.1 – Malha de Delaunay (cada elemento de quatro nós corresponde a dois de três) baseada em nove emissores (Robot)

Este tipo de malha, caracterizado por um refinamento que aproxima o gradiente estimado da solução, permite reduzir o número total de elementos finitos e, dessa forma, o esforço de cálculo computacional. No Robot, define-se uma malha do tipo Delaunay localizando os seus emissores, a dimensão do menor elemento, parâmetro H_0 , e a razão entre as dimensões de elementos contíguos, parâmetro Q , ver Figura 3.2. Neste caso, usou-se $Q = 1,2$, que é o valor por defeito.

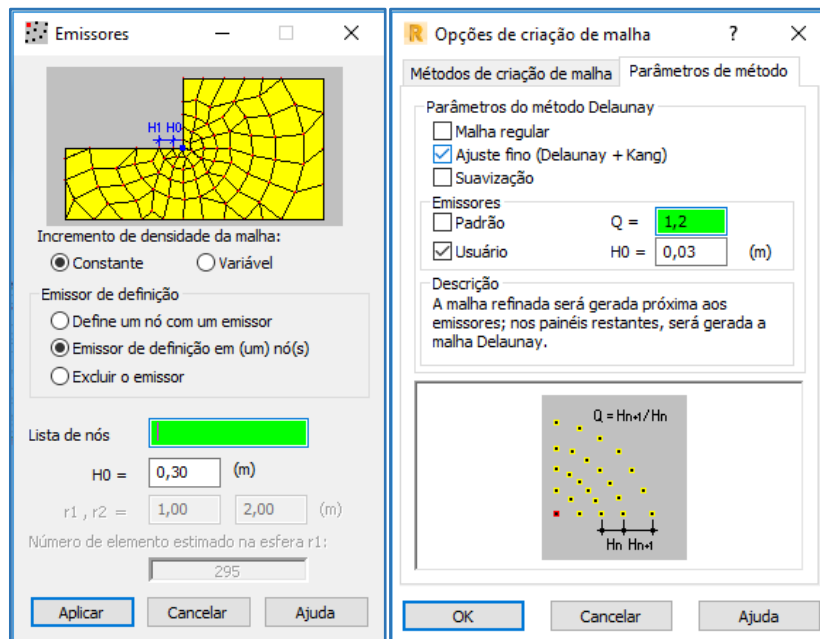


Figura 3.2 – Robot: especificação da malha de Delaunay para superfícies

Para este tipo de malha foram adotados elementos planos “quadrangulares” (um “elemento” de quatro nós é constituído por dois de três (Shewchuk, 2012; George e Frey, 2008)) e triangulares para o mesmo valor de H_0 , de forma a comparar as soluções.

Nos Quadros 3.3 e 3.4, estão apresentados os valores das reações de apoio, assim como os desvios relativos para cada uma das malhas.

Quadro 3.3 – Soluções com malha de Delaunay de elementos “quadrangulares”, para carga na Posição 1

H0 [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
3,125	46,10	92,20	/	-4,12	-8,24	/	11,60	23,20	/	-3,58	-7,16	/
1,5625	45,94	91,88	-0,35	-3,74	-7,48	-10,16	11,33	22,66	-2,38	-3,53	-7,06	-1,42
0,78125	45,80	91,60	-0,31	-3,41	-6,82	-9,68	11,10	22,20	-2,07	-3,48	-6,96	-1,44
0,390625	45,65	91,30	-0,33	-3,07	-6,14	-11,07	10,85	21,70	-2,30	-3,44	-6,88	-1,16
0,1953125	45,54	91,08	-0,24	-2,80	-5,60	-9,64	10,64	21,28	-1,97	-3,39	-6,78	-1,47
0,0976563	45,52	91,04	-0,04	-2,77	-5,54	-1,08	10,63	21,26	-0,09	-3,39	-6,78	0,00

Quadro 3.4 – Soluções com malha de Delaunay de elementos triangulares, para carga na Posição 1

H0 [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
3,125	46,18	92,36	/	-4,25	-8,50	/	11,62	23,24	/	-3,55	-7,10	/
1,5625	46,02	92,04	-0,35	-3,92	-7,84	-8,42	11,44	22,88	-1,57	-3,54	-7,08	-0,28
0,78125	45,88	91,76	-0,31	-3,57	-7,14	-9,80	11,16	22,32	-2,51	-3,47	-6,94	-2,02
0,390625	45,73	91,46	-0,33	-3,21	-6,42	-11,21	10,91	21,82	-2,29	-3,42	-6,84	-1,46
0,1953125	45,62	91,24	-0,24	-2,93	-5,86	-9,56	10,68	21,36	-2,15	-3,37	-6,74	-1,48
0,0976563	45,59	91,18	-0,07	-2,88	-5,76	-1,74	10,66	21,32	-0,19	-3,37	-6,74	0,00

Dos Quadros 3.3 e 3.4 conclui-se que para ambos os casos se atinge um valor adequado para o desvio relativo com a malha com $H_0 = 0,976\ 563$ mm, ou seja, aproximadamente 1 mm, sendo os valores das reações muito parecidos. Como foi referido anteriormente, este tipo de malha requer um menor número de elementos finitos comparativamente a uma malha regular, o que permite reduzir o esforço computacional de cálculo (ou seja, tempo de cálculo), como se pode concluir dos Quadros 3.5 e 3.6.

Quadro 3.5 – Número de elementos finitos e tempo de cálculo para as malhas de Delaunay com elementos “quadrangulares”, para a carga na Posição 1

Malha de Delaunay	H0	Elementos	Tempo de Cálculo
	[cm]	Finitos	[s]
	3,125	2 489	1
	1,5625	3 521	1
	0,78125	4 668	1
	0,390625	5 895	1
	0,1953125	7 154	2
	0,0976563	8 348	2

Quadro 3.6 – Número de elementos finitos e tempo de cálculo para as malhas de Delaunay com elementos triangulares, para a carga na Posição 1

Malha de Delaunay	H0	Elementos	Tempo de Cálculo
	[cm]	Finitos	[s]
	3,125	4 608	1
	1,5625	6 639	1
	0,78125	8 897	1
	0,390625	11 346	1
	0,1953125	13 859	2
	0,0976563	16 271	3

Note-se que para um dado valor do parâmetro H0, o um número de elementos triangulares é aproximadamente o dobro do de “quadrangulares”.

Comparando os valores para as reações de apoio com os determinados por Fernandes (2017), detetam-se algumas diferenças, sobretudo na reação R2, que toma neste caso um valor absoluto significativamente mais baixo, como se verifica no Quadro 3.7.

Quadro 3.7 – Comparação dos valores das reações de apoio com os de Fernandes (2017), para a carga na Posição 1

Modelo	R1 [kN]	R2 [kN]	R3 [kN]	R4 [kN]
Fernandes (2017) - SAP2000	47,71	-7,68	13,90	-3,93
Elementos “Quadrangulares”	45,52	-2,77	10,63	-3,39
Elementos Triangulares	45,59	-2,88	10,66	-3,37

Recorde-se que em ambos os casos foi previamente garantida a convergência da solução: observe-se primeiro que Fernandes (2017) conseguiu garantir esta convergência com uma malha regular muito grosseira, enquanto que nesta dissertação, com o Robot, o processo foi muito mais complexo, o que poderá indiciar uma maior eficácia do algoritmo implementado no SAP2000 para este tipo de problemas. Mas, o mais perturbante são as diferenças entre as duas soluções, que revelam que ou o problema que está a ser comparado não é exatamente o mesmo, ou o modelo numérico difere ou o tipo de elemento finito difere.

3.2.1.2. Modelação no SAP2000

De forma a tentar identificar a origem para esta disparidade, optou-se por desenvolver um modelo desta laje também no SAP2000, com elementos de dimensão 25 x 25 cm, tendo-se considerado também o seu refinamento, correspondendo à dimensão de 12,5 x 12,5 cm.

O desenvolvimento deste modelo e a análise subsequente permitiram encontrar uma explicação para a discordância entre os valores referidos. De facto, Fernandes (2017) usou o elemento *shell-thin* do SAP2000, ou seja, a sua solução decorre da teoria das lajes finas, que adota a hipótese de Kirchhoff, a qual ignora a distorção. Todavia, a teoria das lajes moderadamente espessas (Reissner-Mindlin) funciona melhor em engenharia civil porque não ignora aquela parcela da deformação, sendo aconselhável a utilização do elemento *shell-thick*. Para o tipo de espessuras usuais em lajes de betão armado, por exemplo, o grau de aproximação determinado pela teoria de Reissner-Mindlin é naturalmente superior ao da teoria de Kirchhoff (Arnold *et al.*, 2002).

Em contrapartida, o Robot só oferece o modelo de lajes moderadamente espessas. De acordo com Providência *et al.* (2014), os elementos finitos de laje disponibilizados pelo Robot, desenvolvidos por Katili (Katili, 1993) são generalizações do DKQ e do DKT (Bathe *et al.*, 1983), elementos quadrangular e triangular baseados na teoria discreta de Kirchhoff. Esta teoria é estabelecida a partir da teoria de Reissner-Mindlin de forma a garantir a conformidade do elemento finito, mas constrange o valor da deformação de corte num número discreto de pontos.

Assim, ainda no SAP2000, desenvolveram-se dois novos modelos: um com elementos *shell-thick* e outro com elementos *shell-thin*.

O Quadro 3.8 apresenta o valor das reações e desvios relativos determinados para a análise com o modelo de elementos *shell-thin*, os quais são exatamente iguais aos obtidos por Fernandes (2017).

Quadro 3.8 – Valores das reações de apoio para o modelo com elementos *shell-thin*, para a carga na Posição 1

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
25	47,71	95,41	/	-7,68	-15,35	/	13,90	27,81	/	-3,93	-7,86	/
12,5	47,72	95,44	0,03	-7,73	-15,46	0,69	13,97	27,95	0,49	-3,96	-7,92	0,76

Por outro lado, o Quadro 3.9 apresenta as reações e desvios relativos para o modelo com elementos *shell-thick*.

Quadro 3.9 – Valores das reações de apoio para o modelo com elementos *shell-thick*, para a carga na Posição 1

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
25	46,69	93,38	/	-5,31	-10,62	/	12,22	24,43	/	-3,60	-7,19	/
12,5	46,55	93,09	-0,32	-4,98	-9,95	-6,75	11,98	23,95	-2,00	-3,55	-7,10	-1,24

Os valores das reações de apoio do Quadro 3.9, aproximam-se dos determinados para a malha regular no Robot, ver Quadro 3.1. Também se observa que o desvio relativo, para este modelo com elementos *shell-thick*, é mais elevado, tal como no Robot. Justificada a aparente disparidade de resultados determinados pelo SAP2000 e pelo Robot, conclui-se que a solução para o modelo de elementos planos é a que se apresentou no Quadro 3.3, referente a malha de Delaunay de elementos “quadrangulares”, que dispõe de um menor esforço de cálculo comparativamente a malha de Delaunay de elementos triangulares.

3.2.2. Modelos de elementos sólidos

3.2.2.1. Modelação e convergência da solução

Seguidamente, desenvolveu-se um modelo de elementos sólidos para a laje, para o que, na interface gráfica do Robot, se deve seleccionar um “Projeto de estrutura volumétrica”. O novo modelo é representado de forma esquemática nas Figuras 3.3 e 3.4.

De forma a aproveitar a numeração dos nós estabelecida no Robot, no nó 1 localiza-se um apoio triplo (impede todas as translações), no nó 4 um apoio duplo (impede as translações em y e z) e nos nós 2, 3, 5, 6, 7, e 8 apoios simples (impedem as translações em z).

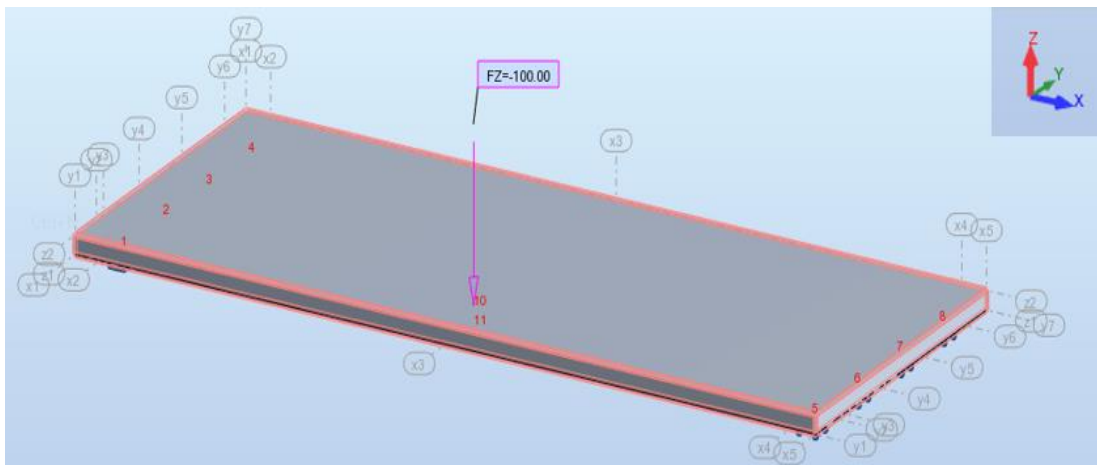


Figura 3.3 – Representação esquemática do modelo de elementos sólidos da laje (Robot)

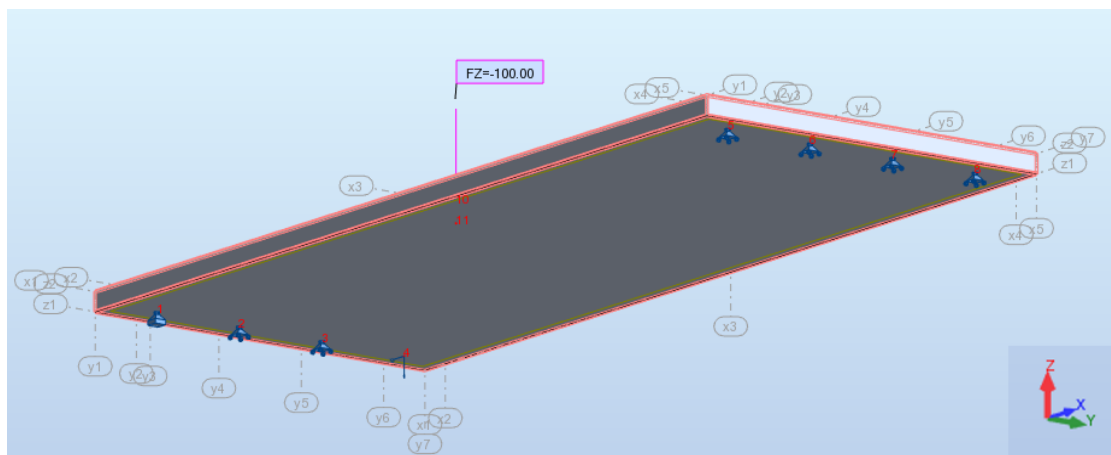


Figura 3.4 – Caracterização dos apoios pontuais para o modelo de elementos sólidos (Robot)

Em seguida, foram definidas várias malhas regulares de dimensão decrescente, igual em planta à dos modelos de elementos planos, por forma a analisar a convergência da solução. O algoritmo de geração da malha do Robot divide sempre a espessura da laje em 5 camadas de igual espessura, ou seja, os elementos finitos volumétricos para a malha regular são paralelepípedos de 8 nós com 6 cm de espessura, como se representa nas Figuras 3.5 e 3.6.

No Quadro 3.10, estão apresentados os valores das reações de apoio, assim como os desvios relativos para cada tipo de malha regular de elementos sólidos.

Analisando o Quadro 3.10, verifica-se que o desvio relativo, nomeadamente em R2, é muito elevado. Além disso, como já se referiu, a modelação com este tipo de elementos é bastante pesada dos pontos de vista matemático e computacional: por exemplo, como se pode verificar

no Quadro 3.11, para a malha com elementos de 3,125 x 3,125 x 6 cm o tempo de cálculo já foi de 578 segundos.

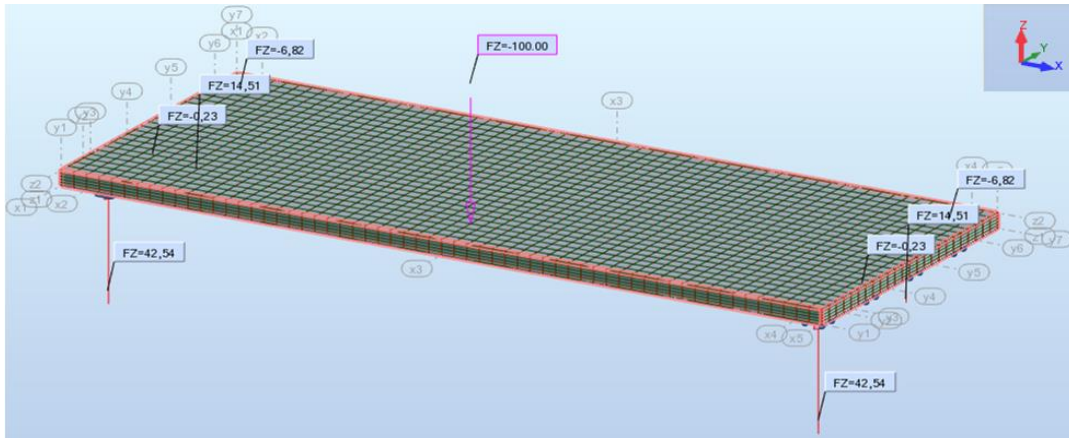


Figura 3.5 – Malha de elementos finitos sólidos de 25 x 25 x 6 cm, para carga na Posição 1 (Robot)

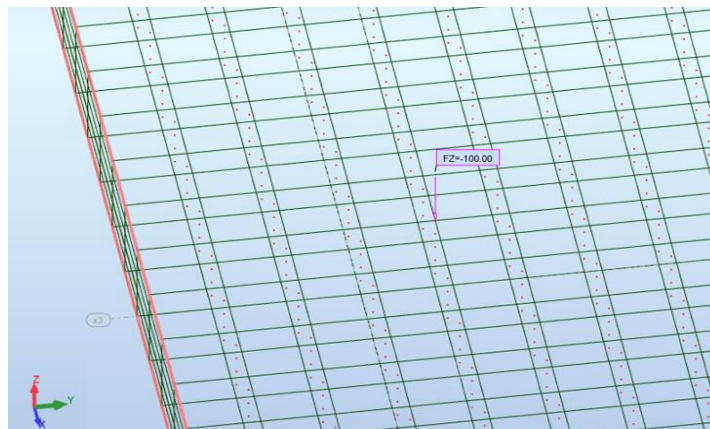


Figura 3.6 – Pormenor dos nós dos elementos finitos sólidos (Robot)

Quadro 3.10 – Soluções para a malha regular de elementos sólidos, para carga na Posição 1

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
25	42,54	85,08	/	-0,23	-0,46	/	14,51	29,02	/	-6,82	-13,64	/
12,5	43,44	86,88	2,07	0,16	0,32	243,75	11,02	22,04	-31,67	-4,62	-9,24	-47,62
6,25	42,96	85,92	-1,12	2,02	4,04	92,08	8,75	17,50	-25,94	-3,73	-7,46	-23,86
3,125	42,11	84,22	-2,02	4,01	8,02	49,63	7,31	14,62	-19,70	-3,43	-6,86	-8,75

Quadro 3.11 – Número de elementos finitos e tempo de cálculo para as malhas regulares de elementos sólidos, para a carga na Posição 1

Malha Regular	Malha	Elementos	Tempo de Cálculo
	[cm]	Finitos	[s]
	25	7 200	3
	12,5	28 800	14
	6,25	115 200	78
	3,125	460 800	578

Decidiu-se, assim, tentar utilizar também neste caso uma malha de Delaunay com emissores. Esta malha é definida apenas em planta, analogamente ao estabelecido para elementos planos.

De acordo com o knowledge.autodesk@2015, no caso dos elementos sólidos, os elementos com dimensão menor em planta, H_0 , são colocados até à distância r_1 do emissor; a partir daí aplica-se a dilatação de razão Q , a qual é interrompida quando se atinge a distância r_2 ao emissor, ou seja:

- r_1 - raio da circunferência em que cujo interior da malha será caracterizado pelo comprimento inicial H_0 ;
- r_2 - raio da circunferência que, conjuntamente com a anterior, define um anel em que cujo interior da densidade da malha será progressivamente diminuída.

Para estes parâmetros foram utilizados os valores definidos por defeito no Robot, os quais são indicados na Figura 3.7. Do mesmo modo, também para o parâmetro Q se usou o valor por defeito, ou seja, $Q = 1,20$. Foram analisados modelos com malhas de elementos de base “quadrangular” e triangular, com igual valor de H_0 , originando prismas quadrangulares (8 nós) e triangulares (6 nós), por forma a comparar as soluções.

Procedeu-se seguidamente a uma análise linear com estes modelos, tendo-se verificado que a solução não era simétrica, sendo que eram diferentes os valores das reações nos apoios com mesma ordenada transversal y , como o mostram as Figuras 3.8 e 3.9.

A solução escolhida para ultrapassar esta inconveniência foi modelar apenas metade da laje, impedindo os deslocamentos longitudinais dos nós situados sobre a superfície de simetria, e reduzindo-se o valor da carga, que manteve a posição, a 50 kN. Optou-se por modelar a parte esquerda da laje com quatro apoios: um duplo, que restringe as translações em z e y e três simples que restringem apenas a translação em z . Como se explicou, na face que está sobre o plano de simetria foram impedidos todos os deslocamentos U_x , como exibido na Figura 3.10.

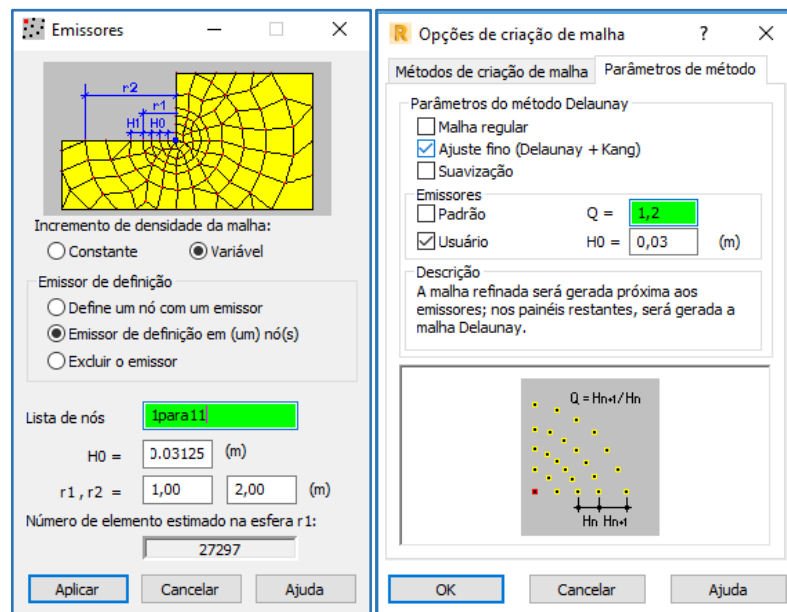


Figura 3.7 – Robot: especificação da malha de Delaunay para elementos sólidos

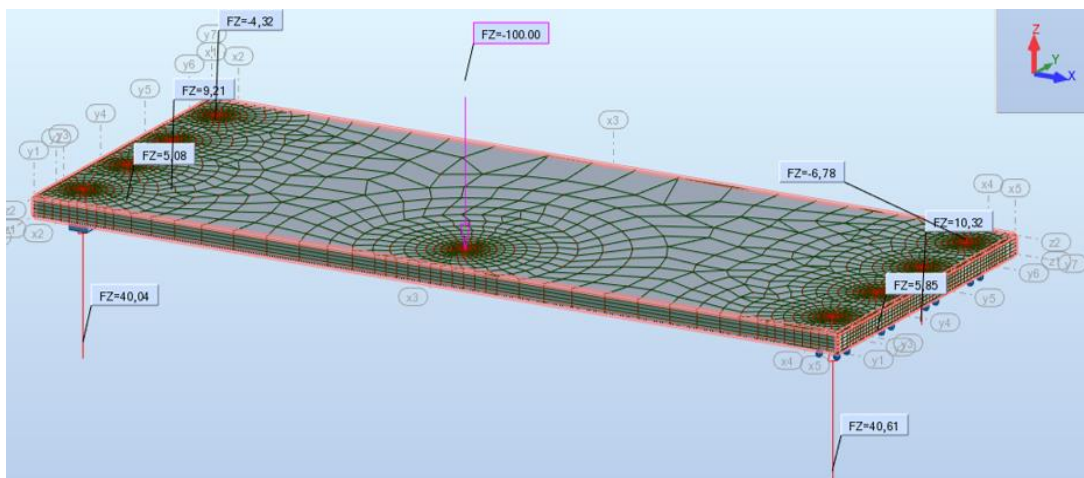


Figura 3.8 – Reações de apoio para malha de Delaunay de elementos de base “quadrangular”, com $H_0 = 3,125$ cm, para carga na Posição 1 (Robot)

Seguidamente, efetuou-se a análise de convergência da solução, para as malhas com os dois tipos de elementos sólidos definidos acima, ver Quadros 3.12 e 3.13.

Os Quadros 3.12 e 3.13 mostram que não se atingiu um desvio suficientemente pequeno, sendo que o desvio relativo para o modelo com elementos de base “quadrangular” é maior que para o modelo com elementos de base triangular, além de que a convergência para o último tende a piorar para as malhas com elementos iniciais, (H_0), mais pequenos. Note-se também que as

reações de apoio tomam valores muito diferentes quando se adotam elementos de base triangular ou “quadrangular”.

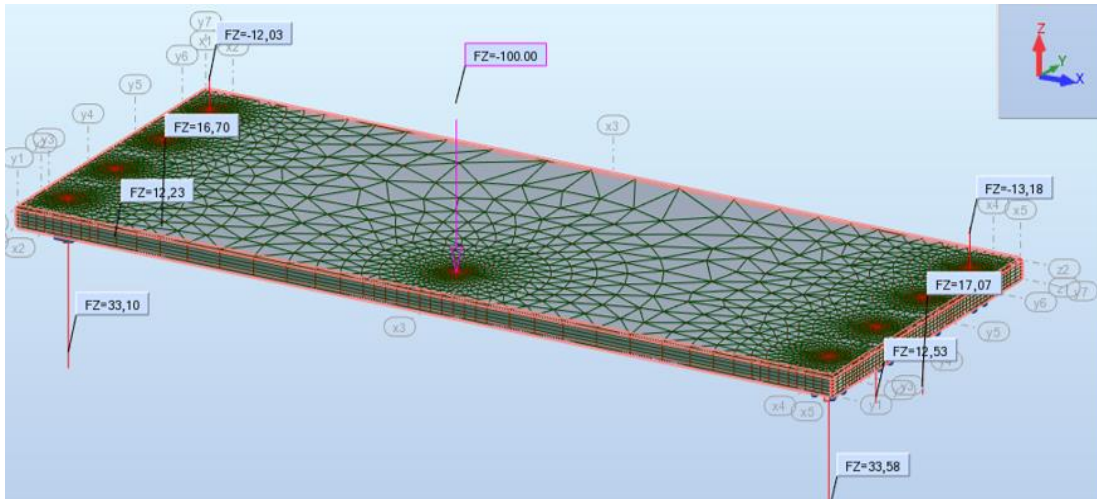


Figura 3.9 – Reações de apoio para malha de Delaunay de elementos de base triangular, com $H_0 = 3,125$ cm, para carga na Posição 1 (Robot)

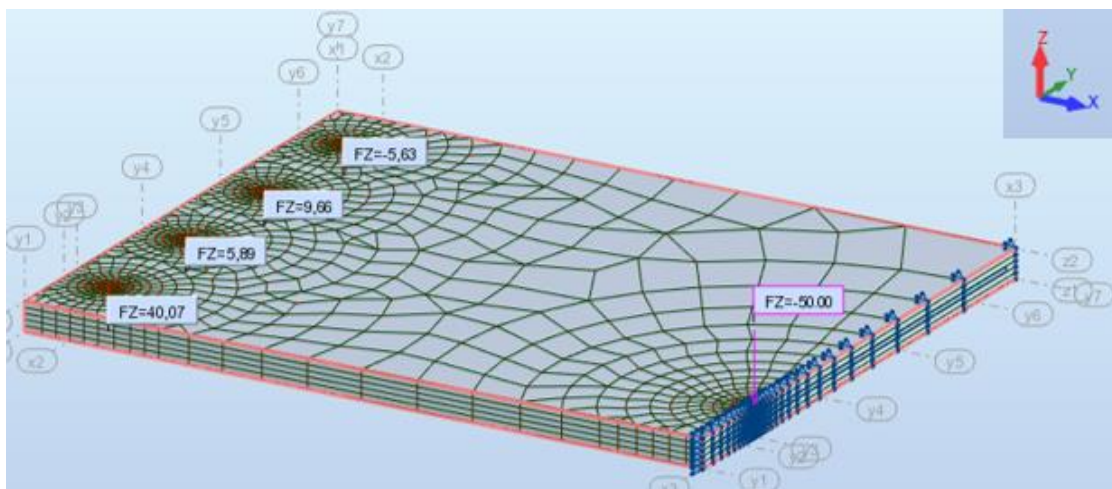


Figura 3.10 – Reações de apoio para malha de Delaunay de elementos de base “quadrangular”, com $H_0 = 3,125$ cm, para carga na Posição 1 (Robot)

Relativamente ao esforço de cálculo (número de elementos finitos e tempo de cálculo), apresentado nos Quadros 3.14 e 3.15, respetivamente para elementos sólidos de base “quadrangular” e base triangular, ambas as soluções requerem tempos de cálculo semelhantes: porém, quando se define uma malha de elementos de base “quadrangular”, o número de elementos finitos é muito inferior (quase metade).

Quadro 3.12 – Soluções com malha de Delaunay de elementos sólidos de base “quadrangular”, com $Q = 1,20$, para carga na Posição 1

H0 [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
3,125	40,07	80,14	/	5,89	11,78	/	9,66	19,32	/	-5,63	-11,26	/
1,5625	39,08	78,16	-2,53	7,94	15,88	25,82	8,55	17,10	-12,98	-5,57	-11,14	-1,08
0,78125	38,46	76,92	-1,61	9,10	18,20	12,75	8,10	16,20	-5,56	-5,65	-11,30	1,42
0,390625	38,03	76,06	-1,13	10,41	20,82	12,58	6,75	13,50	-20,00	-5,19	-10,38	-8,86
0,1953125	37,19	74,38	-2,26	11,50	23,00	9,48	7,09	14,18	4,80	-5,78	-11,56	10,21
0,09765625	38,80	77,60	4,15	9,67	19,34	-18,92	5,93	11,86	-19,56	-4,40	-8,80	-31,36

Quadro 3.13 – Soluções com malha de Delaunay de elementos sólidos de base triangular, com $Q = 1,20$, para carga na Posição 1

H0 [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
3,125	34,02	68,04	/	11,83	23,66	/	15,93	31,86	/	-11,79	-23,58	/
1,5625	34,58	69,16	1,62	12,73	25,46	7,07	12,46	24,92	-27,85	-9,77	-19,54	-20,68
0,78125	34,45	68,90	-0,38	13,06	26,12	2,53	12,18	24,36	-2,30	-9,70	-19,40	-0,72
0,390625	33,80	67,60	-1,92	14,26	28,52	8,42	11,73	23,46	-3,84	-9,80	-19,60	1,02
0,1953125	33,35	66,70	-1,35	14,90	29,80	4,30	11,83	23,66	0,85	-10,07	-20,14	2,68
0,09765625	33,98	67,96	1,85	14,52	29,04	-2,62	10,69	21,38	-10,66	-9,19	-18,38	-9,58

Quadro 3.14 – Número de elementos finitos e tempo de cálculo para as malhas de Delaunay de elementos sólidos de base “quadrangular”, com $Q = 1,20$, para a carga na Posição 1

Malha de Delaunay	H0	Elementos	Tempo de Cálculo
	[cm]	Finitos	[s]
	3,125	6 200	2
	1,5625	8 800	4
	0,78125	11 715	4
	0,390625	14 755	6
	0,1953125	17 890	7
	0,0976563	20 960	8

Quadro 3.15 – Número de elementos finitos e tempo de cálculo para as malhas de Delaunay de elementos sólidos de base triangular, com $Q = 1,20$, para a carga na Posição 1

Malha de Delaunay	H0	Elementos	Tempo de Cálculo
	[cm]	Finitos	[s]
	3,125	11 515	2
	1,5625	16 595	4
	0,78125	22 315	6
	0,390625	28 375	7
	0,1953125	34 650	8
	0,0976563	40 785	10

Uma vez que com este modelo não se conseguiu atingir um desvio relativo suficientemente pequeno, ou seja, pelo menos inferior a 5 %, arbitrou-se um novo valor para o parâmetro Q , $Q = 1,10$, ou seja, o tamanho do elemento seguinte será 10% superior ao anterior, mantendo-se o valor dos restantes parâmetros, ou seja, o incremento da dimensão em planta dos elementos é mais progressivo, ou suave, que no caso anterior. Esta opção origina um maior esforço de cálculo, pois requer um maior número de elementos finitos, apresentando-se os resultados nos Quadros 3.16 e 3.17.

Os Quadros 3.16 e 3.17 permitem verificar que os desvios relativos, para as malhas com os dois tipos de elementos, são muito inferiores aos obtidos para $Q = 1,20$, tendo sido considerados adequados. Observa-se, também, que os valores para as reações de apoio obtidos com elementos de base triangular se aproximam mais dos valores das reações de apoios obtidos com elementos de base “quadrangular”.

Quadro 3.16 – Soluções com malha de Delaunay de elementos sólidos de base “quadrangular”, com $Q = 1,10$, para carga na Posição 1

H0	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
[cm]												
3,125	41,64	83,28		4,27	8,54		8,21	16,42		-4,12	-8,24	
1,5625	40,76	81,52	-2,16	6,17	12,34	30,79	7,05	14,10	-16,45	-3,98	-7,96	-3,52
0,78125	40,36	80,72	-0,99	6,98	13,96	11,60	6,63	13,26	-6,33	-3,97	-7,94	-0,25
0,390625	39,76	79,52	-1,51	8,11	16,22	13,93	6,17	12,34	-7,46	-4,04	-8,08	1,73
0,1953125	39,10	78,20	-1,69	9,21	18,42	11,94	5,95	11,90	-3,70	-4,26	-8,52	5,16
0,09765625	39,03	78,06	-0,18	9,24	18,48	0,32	6,10	12,20	2,46	-4,37	-8,74	2,52

Quadro 3.17 – Soluções com malha de Delaunay de elementos sólidos de base triangular, com $Q = 1,10$, para carga na Posição 1

H0 [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
3,125	38,40	76,80	/	7,31	14,62	/	11,85	23,70	/	-7,56	-15,12	/
1,5625	38,04	76,08	-0,95	8,49	16,98	13,90	10,55	21,10	-12,32	-7,09	-14,18	-6,63
0,78125	37,65	75,30	-1,04	9,56	19,12	11,19	9,62	19,24	-9,67	-6,82	-13,64	-3,96
0,390625	37,52	75,04	-0,35	10,19	20,38	6,18	8,71	17,42	-10,45	-6,42	-12,84	-6,23
0,1953125	37,13	74,26	-1,05	11,04	22,08	7,70	8,19	16,38	-6,35	-6,36	-12,72	-0,94
0,09765625	36,82	73,64	-0,84	11,37	22,74	2,90	8,48	16,96	3,42	-6,66	-13,32	4,50

No que diz respeito ao esforço de cálculo, acontece o esperado, o número de elementos finitos aumenta substancialmente e o tempo de cálculo triplica, como se verifica nos Quadros 3.18 e 3.19. Porém, é perfeitamente aceitável o tempo de cálculo máximo de cerca de 35 s.

Quadro 3.18 – Número de elementos finitos e tempo de cálculo para as malhas de Delaunay de elementos sólidos de base “quadrangular”, com $Q = 1,10$, para a carga na Posição 1

Malha de Delaunay	H0	Elementos	Tempo de Cálculo
	[cm]	Finitos	[s]
	3,125	13 100	5
	1,5625	20 730	8
	0,78125	29 905	14
	0,390625	40 070	20
	0,1953125	50 710	29
	0,0976563	61 560	35

Quadro 3.19 – Número de elementos finitos e tempo de cálculo para as malhas de Delaunay de elementos sólidos de base triangular, com $Q = 1,10$, para a carga na Posição 1

Malha de Delaunay	H0	Elementos	Tempo de Cálculo
	[cm]	Finitos	[s]
	3,125	24 785	6
	1,5625	39 700	10
	0,78125	57 775	15
	0,390625	78 015	21
	0,1953125	99 265	29
	0,0976563	120 900	34

De modo a esclarecer a alteração substancial com o parâmetro Q do valor das reações para as malhas com elementos de base triangular, foram desenvolvidos novos modelos, com $Q = 1,05$, ou seja, no anel de expansão, o tamanho do elemento seguinte será apenas 5 % superior ao anterior, mantendo-se os restantes parâmetros. Desta forma, obtiveram-se modelos muito pesados, cujos tempos de cálculo quadruplicaram relativamente aos modelos com $Q = 1,10$. Todavia, observou-se uma boa convergência tanto para elementos de base “quadrangular” como para elementos de base triangular, com desvios inferiores a 1 %.

Mais relevante é o facto das reações de apoio para as malhas de elementos de base “quadrangular” e triangular, tomarem valores muito parecidos, com as primeiras situadas na gama determinada para $Q = 1,10$, e as segundas a aproximarem-se destas, como se constata no Quadro 3.20. Conclui-se que há uma grande variação de valores para as malhas de elementos de base triangular, os quais, tendem a convergir para valores obtidos para as malhas de elementos de base “quadrangular”.

Quadro 3.20 – Reações de apoio para as malhas de Delaunay, com $H_0 = 0,097\ 656\ 3\ \text{cm}$ e $Q = 1,05$, para carga na Posição 1

Elementos de Base	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
“Quadrangular”	39,60	79,20	-0,13	8,73	17,46	1,03	5,40	10,80	-0,93	-3,73	-7,46	-0,27
Triangular	38,87	77,74	-0,10	9,34	18,68	1,07	6,36	12,72	-1,26	-4,57	-9,14	-0,66

Os desvios apresentados no Quadro 3.20 são relativos à malha de Delaunay, com $H_0 = 0,195\ 312\ 5\ \text{cm}$ e $Q = 1,05$, respetivamente, para elementos de base “quadrangular” e triangular.

3.2.3. Comparação entre soluções de modelos de elementos planos e elementos sólidos

Tendo já a convergência da solução sido realizada para a carga na Posição 1, e tendo já sido determinado quais são os modelos (malhas) que proporcionam uma melhor solução – (i) malha de Delaunay com $H_0 = 0,097\ 656\ 3\ \text{cm}$, de elementos planos “quadrangulares” com $Q = 1,20$ para o modelo com elementos planos (Figura 3.11) e (ii) malha de Delaunay com $H_0 = 0,097\ 656\ 3\ \text{cm}$, de elementos de base “quadrangular”, com $Q = 1,10$ para o modelo com elementos sólidos (Figura 3.12), – procedeu-se à comparação destas duas soluções, como apresentado no Quadro 3.21.

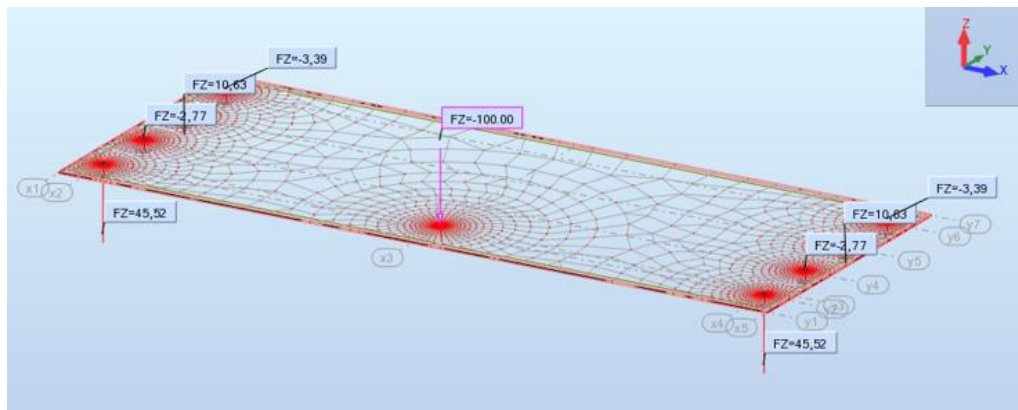


Figura 3.11 – Reações de apoio para malha de Delaunay de elementos “quadrangulares” planos com $H_0 = 0,097\ 656\ 3\ \text{cm}$ e $Q = 1,20$, para carga na Posição 1 (Robot)

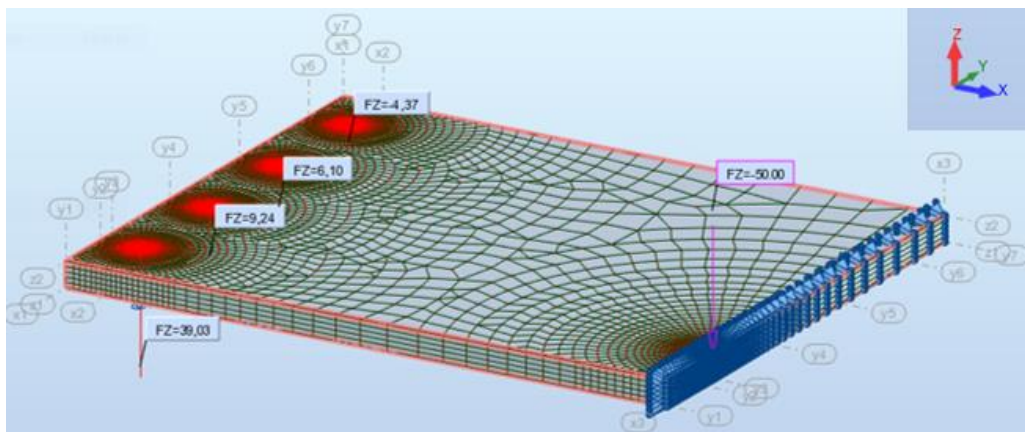


Figura 3.12 – Reações de apoio para malha de Delaunay de elementos sólidos de base “quadrangular”, com $H_0 = 0,097\ 656\ 3\ \text{cm}$ e $Q = 1,10$, para carga na Posição 1 (Robot)

Quadro 3.21 – Comparação das soluções: reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos planos e elementos sólidos, para carga na Posição 1

Modelo	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			[%]
Elem. Planos	45,52	91,04	/	-2,77	-5,54	/	10,63	21,26	/	-3,39	-6,78	/
Elem. Sólidos	39,03	78,06	-16,63	9,24	18,48	129,98	6,10	12,20	-74,26	-4,37	-8,74	22,43

Do Quadro 3.21 conclui-se que os valores do desvio nas reações são muito significativos, superiores a 10% nos quatro apoios. Embora a grandeza relativa da reação no apoio A1 continue a ser dominante, observa-se que para a solução com elementos sólidos a sua importância

diminui ligeiramente. Verifica-se também que a reação no outro apoio extremo, A4, conserva o sentido (tração), sofrendo para a solução com elementos sólidos, um aumento de cerca de 2% da carga. Todavia, as grandes diferenças verificam-se nos apoios centrais, sobretudo no apoio A2, visto que com uma solução de elementos planos a laje revelava uma tendência para descolar, e com a solução de elementos sólidos, a reação não só troca de sinal, como também passa a suportar cerca de 18% da carga, ou seja, contribui de forma significativa para a sustentação da carga aplicada. Por sua vez, a reação de apoio R3 diminui substancialmente e torna-se inferior a R2, correspondendo a um padrão para a repartição de carga entre os quatro apoios menos oscilante, como representado na Figura 3.13. Em termos práticos, e no que respeita à redistribuição transversal de forças, que era o objetivo da investigação de Fernandes (2017), observa-se que o modelo de elementos sólidos revela que é mais eficaz do que o modelo de elementos planos faria supor.

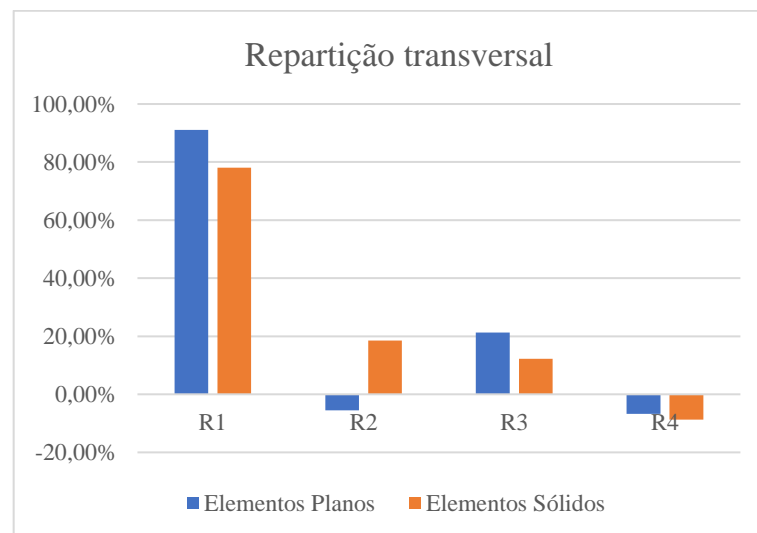


Figura 3.13 – Comparação das soluções, após convergência, determinadas para modelos de elementos planos e de elementos sólidos, para carga na Posição 1

3.3. Outras posições da carga aplicada

3.3.1. Carga aplicada na Posição 2

3.3.1.1. Modelos de elementos planos

Após a comparação das soluções determinadas com o modelo de elementos planos e com o modelo de elementos sólidos para a carga na Posição 1, procedeu-se à comparação das soluções para a carga aplicada na Posição 2, de modo a verificar se as conclusões determinadas anteriormente são independentes da posição da carga. Uma vez que já se investigou a

convergência da solução e quais os tipos de elementos finitos mais eficazes, agora já só foram criados modelos com elementos finitos quadrangulares ou de base “quadrangular”, tanto no modelo de elementos planos como no de elementos sólidos.

Mesmo sabendo *a priori* que os resultados com malhas regulares não são os mais adequados, começou-se por criar um modelo de elementos planos com uma malha regular com as características consideradas para a análise com a carga na Posição 1, ver Figura 3.14.

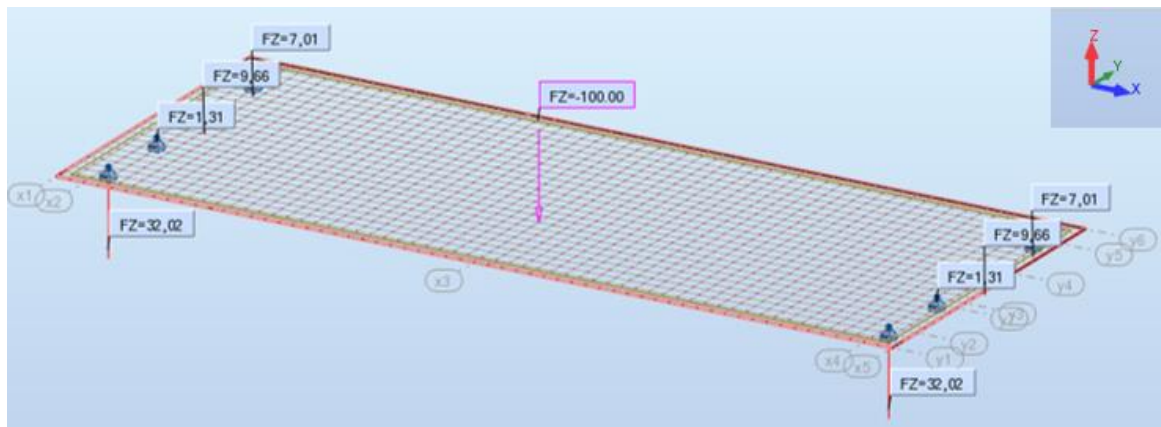


Figura 3.14 – Malha de elementos finitos planos de 25 x 25 cm, para a carga na Posição 2 (Robot)

Os Quadros 3.22 e 3.23 apresentam os resultados da convergência da solução com o refinamento da malha, assim como o número de elementos finitos e o tempo de cálculo.

Quadro 3.22 – Soluções para a malha regular de elementos planos, para carga na Posição 2

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
25	32,02	64,04	/	1,31	2,62	/	9,66	19,32	/	7,01	14,02	/
12,5	31,82	63,64	-0,63	1,65	3,30	20,61	9,57	19,14	-0,94	6,96	13,92	-0,72
6,25	31,71	63,42	-0,35	1,88	3,76	12,23	9,46	18,92	-1,16	6,96	13,92	0,00
3,125	31,61	63,22	-0,32	2,07	4,14	9,18	9,35	18,70	-1,18	6,97	13,94	0,14
1,5625	31,53	63,06	-0,25	2,25	4,50	8,00	9,24	18,48	-1,19	6,98	13,96	0,14
0,78125	31,45	62,90	-0,25	2,42	4,84	7,02	9,14	18,28	-1,09	6,99	13,98	0,14

Visto que nem com uma malha de com elementos de 0,781 25 cm de lado se conseguiu um valor suficientemente baixo para o desvio relativo, sobretudo na reação R2, e com um tempo

de cálculo de 525 s, procedeu-se ao desenvolvimento de uma malha de Delaunay com emissores nos nós dos apoios e da carga pontual, similar à da Figura 3.1.

Quadro 3.23 – Número de elementos finitos e tempo de cálculo para as malhas regulares, para a carga na Posição 2

Malha Regular	Malha	Elementos	Tempo de Cálculo
	[cm]	Finitos	[s]
	25	1 440	1
	12,5	5 760	1
	6,25	23 040	3
	3,125	92 160	14
	1,5625	368 640	64
	0,78125	1 474 560	525

Os Quadros 3.24 e 3.25 apresentam os resultados da convergência da solução com refinamento da malha, assim como o número de elementos finitos e o tempo de cálculo para cada uma das malhas.

Dos Quadros 3.24 e 3.25 conclui-se que se atinge um valor muito bom para o desvio relativo com a malha com $H_0 = 0,976\ 563\ \text{mm}$, ou seja, aproximadamente 1 mm, como já sucedera anteriormente para o caso da carga na Posição 1, com tempos de cálculo de apenas 1 s. Conclui-se que a tendência para a convergência da solução anteriormente verificada parece ser geral e não depender da posição da carga.

Quadro 3.24 – Soluções com malha de Delaunay de elementos “quadrangulares”, para carga na Posição 2

H0	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
3,125	31,88	63,76	/	1,67	3,34	/	9,36	18,72	/	7,09	14,18	/
1,5625	31,79	63,58	-0,28	1,87	3,74	10,70	9,23	18,46	-1,41	7,11	14,22	0,28
0,78125	31,70	63,40	-0,28	2,04	4,08	8,33	9,15	18,30	-0,87	7,11	14,22	0,00
0,390625	31,62	63,24	-0,25	2,22	4,44	8,11	9,04	18,08	-1,22	7,12	14,24	0,14
0,1953125	31,54	63,08	-0,25	2,38	4,76	6,72	8,95	17,90	-1,01	7,13	14,26	0,14
0,0976563	31,53	63,06	-0,03	2,40	4,80	0,83	8,94	17,88	-0,11	7,13	14,26	0,00

Quadro 3.25 – Número de elementos finitos e tempo de cálculo para as malhas de Delaunay com elementos “quadrangulares”, para a carga na Posição 2

Malha de Delaunay	H0	Elementos	Tempo de Cálculo
	[cm]	Finitos	[s]
	3,125	2 523	1
	1,5625	3 553	1
	0,78125	4 707	1
	0,390625	5 928	1
	0,1953125	7 194	1
	0,0976563	8 390	1

3.3.1.2. Modelos de elementos sólidos

Dispondo já de uma solução aceitável para o modelo de elementos planos, desenvolveu-se o modelo de elementos sólidos para a laje, para a carga na Posição 2. Tal como para a carga na Posição 1, foram definidas várias malhas regulares de dimensão em planta dos elementos finitos decrescente, igual à dos modelos de elementos planos, de forma a analisar a convergência da solução.

Nos Quadros 3.26 e 3.27 são apresentados os resultados da convergência da solução com refinamento da malha, bem como o respetivo número de elementos finitos e o tempo de cálculo.

Quadro 3.26 – Soluções para a malha regular de elementos sólidos, para carga na Posição 2

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
25	29,04	58,08	/	4,63	9,26	/	11,96	23,92	/	4,37	8,74	/
12,5	29,90	59,80	2,88	4,43	8,86	-4,51	9,77	19,54	-22,42	5,90	11,80	25,93
6,25	29,72	59,44	-0,61	5,30	10,60	16,42	8,57	17,14	-14,00	6,41	12,82	7,96
3,125	29,22	58,44	-1,71	6,37	12,74	16,80	7,93	15,86	-8,07	6,48	12,96	1,08

Analisando os Quadro 3.26 e 3.27, constata-se que, quando se procede ao refinamento da malha, o valor do desvio relativo é excessivo, nomeadamente em R2 e R3, e que para a malha com elementos de 3,125 x 3,125 x 6 cm o tempo de cálculo já foi de 585 segundos, sendo, pois, conveniente, também neste caso, a opção por uma malha de Delaunay com emissores.

Quadro 3.27 – Número de elementos finitos e tempo de cálculo para as malhas regulares de elementos sólidos, para carga na Posição 2

Malha Regular	Malha	Elementos	Tempo de Cálculo
	[cm]	Finitos	[s]
	25	7 200	3
	12,5	28 800	15
	6,25	115 200	77
	3,125	460 800	585

Após a definição da malha de Delaunay, e tal como sucedido para a carga na Posição 1, verificou-se que a solução não era simétrica. Assim, decidiu-se novamente modelar apenas metade da laje, impedindo os deslocamentos longitudinais dos nós sobre a superfície de simetria, e considerando apenas uma carga de 50 kN na mesma posição.

Visto que para a carga na Posição 2 também não foi possível atingir um desvio relativo suficientemente pequeno entre refinamentos sucessivos com $Q = 1,20$, adotou-se $Q = 1,10$, correspondendo a uma expansão mais lenta da dimensão dos elementos, apresentando-se os resultados nos Quadros 3.28 e 3.29.

Quadro 3.28 – Soluções com malha de Delaunay de elementos sólidos de base “quadrangular”, com $Q = 1,10$, para carga na Posição 2

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
3,125	29,33	58,66	/	6,09	12,18	/	8,14	16,28	/	6,43	12,86	/
1,5625	29,23	58,46	-0,34	6,71	13,42	9,24	7,21	14,42	-12,90	6,84	13,68	5,99
0,78125	28,52	57,04	-2,49	7,60	15,20	11,71	7,57	15,14	4,76	6,31	12,62	-8,40
0,390625	28,55	57,10	0,11	7,83	15,66	2,94	7,02	14,04	-7,83	6,60	13,20	4,39
0,1953125	28,00	56,00	-1,96	8,60	17,20	8,95	7,14	14,28	1,68	6,26	12,52	-5,43
0,09765625	27,83	55,66	-0,61	8,85	17,70	2,82	7,14	14,28	0,00	6,18	12,36	-1,29

Tal como já foi referido anteriormente, em termos práticos, para o problema em análise o tempo de cálculo máximo de cerca de 34 s obtido é aceitável.

Quadro 3.29 – Número de elementos finitos e tempo de cálculo para as malhas de Delaunay de elementos sólidos de base “quadrangular”, com $Q = 1,10$, para a carga na Posição 2

Malha de Delaunay	Malha	Elementos	Tempo de Cálculo
	[cm]	Finitos	[s]
	3,125	13 365	5
	1,5625	21 045	9
	0,78125	30 230	13
	0,390625	40 405	19
	0,1953125	51 050	25
	0,0976563	61 915	34

3.3.1.3. Comparação entre soluções de modelos de elementos planos e elementos sólidos

A comparação dos resultados entre as duas soluções para a carga na Posição 2 é realizada de forma análoga à da carga na Posição 1. As malhas que proporcionam uma melhor solução são as mesmas: (i) malha de Delaunay com $H_0 = 0,097\ 656\ 3\ \text{cm}$, de elementos planos “quadrangulares” com $Q = 1,20$ para o modelo com elementos planos (Figura 3.15) e (ii) malha de Delaunay com $H_0 = 0,097\ 656\ 3\ \text{cm}$, de elementos de base “quadrangular”, com $Q = 1,10$ para o modelo com elementos sólidos (Figura 3.16). A comparação das duas soluções é apresentada no Quadro 3.30.

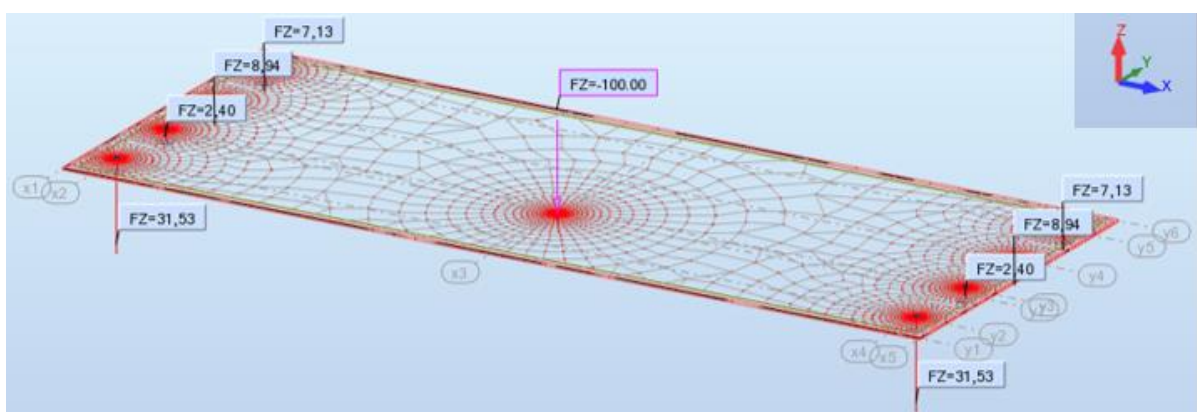


Figura 3.15 – Reações de apoio para malha de Delaunay de elementos “quadrangulares” planos com $H_0 = 0,097\ 656\ 3\ \text{cm}$ e $Q = 1,20$, para carga na Posição 2 (Robot)

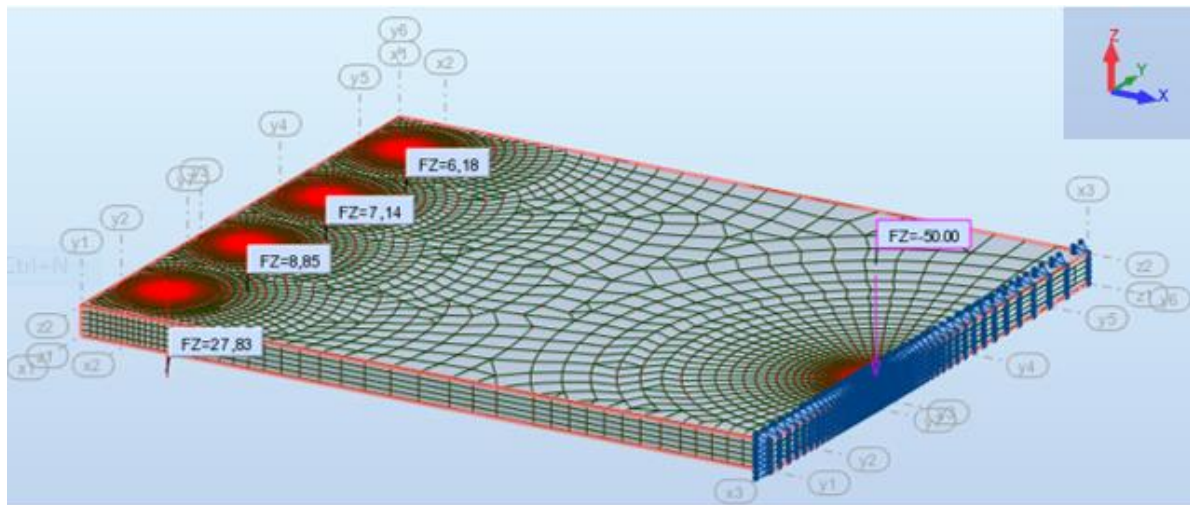


Figura 3.16 – Reações de apoio para malha de Delaunay de elementos sólidos de base “quadrangular”, com $H_0 = 0,097\ 656\ 3\ \text{cm}$ e $Q = 1,10$, para carga na Posição (Robot)

Quadro 3.30 – Comparação das soluções: reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos planos e elementos sólidos, para carga na Posição 2

Modelo	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			
Elem. Planos	31,53	63,06	/	2,4	4,80	/	8,94	17,88	/	7,13	14,26	/
Elem. Sólidos	27,83	55,66	-13,30	8,85	17,70	72,88	7,14	14,28	-25,21	6,18	12,36	-15,37

Analisando o Quadro 3.30 verifica-se que a existência de desvios muito elevados se mantém, sendo superiores a 10% para todas as reações de apoio. Todavia, para este caso já não há reações de apoio com sinal negativo, suspendendo a tendência da laje de descolar.

O apoio A1 continua a apresentar a reação de apoio mais elevada, mais de 50% da carga, mesmo sofrendo uma significativa redução para modelo com elementos sólidos. No mesmo sentido, nos apoios A3 e A4, os valores da reação sofrem pequenas reduções, cerca de 3% e 2% respetivamente, resultando de uma diferença de aproximadamente 1 kN entre as duas reações.

Mais uma vez, a principal diferença, ocorre no apoio A2, visto que na solução de elementos planos o apoio suporta apenas cerca de 5% da carga, enquanto que na solução de elementos sólidos já suporta cerca de 18% da carga (curiosamente, o mesmo valor que se observou quando a carga foi aplicada na Posição 1), correspondendo a uma tendência mais regular de repartição de carga entre os apoios A2, A3 e A4, ou, pelo menos, não oscilatória, ver Figura 3.17.

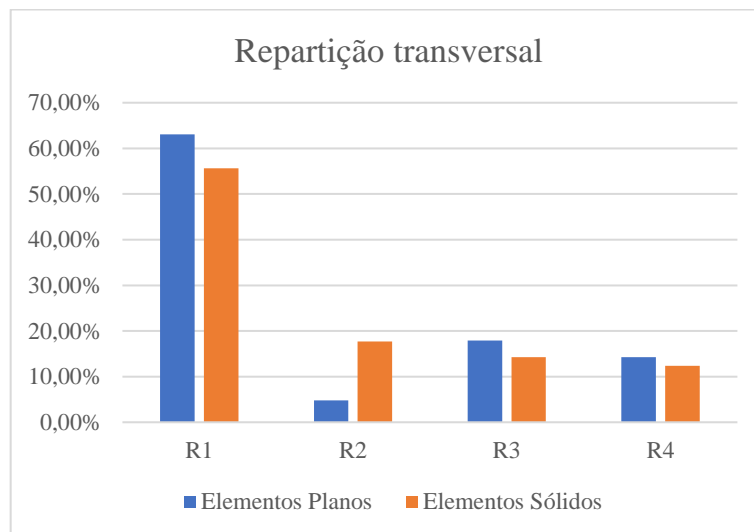


Figura 3.17 – Comparação das soluções após convergência determinadas para modelos de elementos planos e de elementos sólidos, para carga na Posição 2

3.3.2. Carga aplicada na Posição 3

3.3.2.1. Modelos de elementos planos

Por fim, efetuou-se a comparação das soluções para a carga aplicada na Posição 3, ou seja, no centro da laje. Realizado o modelo de elementos planos, procedeu-se à criação de uma malha regular, para a qual, e contrariamente ao sucedido para a carga nas Posições 1 e 2, se encontraram desvios muito reduzidos, inferiores a 1%, logo após o segundo refinamento, como se verifica no Quadro 3.31, não sendo necessário criar uma malha de Delaunay.

Quadro 3.31 – Soluções para a malha regular de elementos planos, para carga na Posição 3

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
25	18,86	37,72	/	6,14	12,28	/	6,14	12,28	/	18,86	37,72	/
12,5	18,75	37,50	-0,59	6,25	12,50	1,76	6,25	12,50	1,76	18,75	37,50	-0,59
6,25	18,69	37,38	-0,32	6,31	12,62	0,95	6,31	12,62	0,95	18,69	37,38	-0,32

O Quadro 3.32 exhibe o número de elementos finitos e o tempo de cálculo para cada uma das malhas.

Quadro 3.32 – Número de elementos finitos e tempo de cálculo para as malhas regulares, para a carga na Posição 3

Malha Regular	Malha	Elementos	Tempo de Cálculo
	[cm]	Finitos	[s]
	25	1 440	1
	12,5	5 760	1
6,25	23 040	3	

3.3.2.2. Modelos de elementos sólidos

Fruindo de uma solução credível para o modelo de elementos planos, desenvolveu-se o modelo de elementos sólidos para a laje com carga na Posição 3, onde inicialmente também se procedeu à criação de uma malha regular de dimensão decrescente. Tal como no modelo de elementos planos, no modelo de elementos sólidos também foram obtidos desvios relativos muito reduzidos no segundo refinamento, como se pode verificar no Quadro 3.33.

Quadro 3.33 – Soluções para a malha regular de elementos sólidos, para carga na Posição 3

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			[%]
25	16,28	32,56	/	8,72	17,44	/	8,72	17,44	/	16,28	32,56	/
12,5	17,34	34,68	6,11	7,66	15,32	-13,84	7,66	15,32	-13,84	17,34	34,68	6,11
6,25	17,49	34,98	0,86	7,51	15,02	-2,00	7,51	15,02	-2,00	17,49	34,98	0,86

No Quadro 3.34 estão apresentados o número de elementos finitos e o tempo de cálculo para cada uma das malhas.

Quadro 3.34 – Número de elementos finitos e tempo de cálculo para as malhas regulares de elementos sólidos, para a carga na Posição 3

Malha Regular	Malha	Elementos	Tempo de Cálculo
	[cm]	Finitos	[s]
	25	7 200	3
	12,5	28 800	16
6,25	115 200	78	

Analisando os Quadros 3.33 e 3.34, observa-se que, para a malha com elementos de $6,25 \times 6,25 \times 6$ cm, se obtiveram desvios relativos máximos de 2%, que em termos práticos é um valor adequado para a presente análise linear pelo método dos elementos finitos. Apesar do tempo de cálculo ter sido de 78 segundos, mais do dobro do tempo de cálculo requerido pela análise com os modelos de elementos sólidos para a carga nas Posições 1 e 2 (34 s), não foi necessário criar malhas de Delaunay, o que tornou o procedimento muito menos moroso que os anteriores.

3.3.2.3. Comparação entre soluções de modelos de elementos planos e elementos sólidos

Posto isto, procedeu-se à comparação dos resultados determinados com (i) a malha regular de elementos finitos planos quadrangulares $6,25 \times 6,25$ cm, (Figura 3.18) e (ii) a malha regular com elementos finitos sólidos de $6,25 \times 6,25 \times 6$ cm (Figura 3.19). A comparação das duas soluções é apresentada no Quadro 3.35.

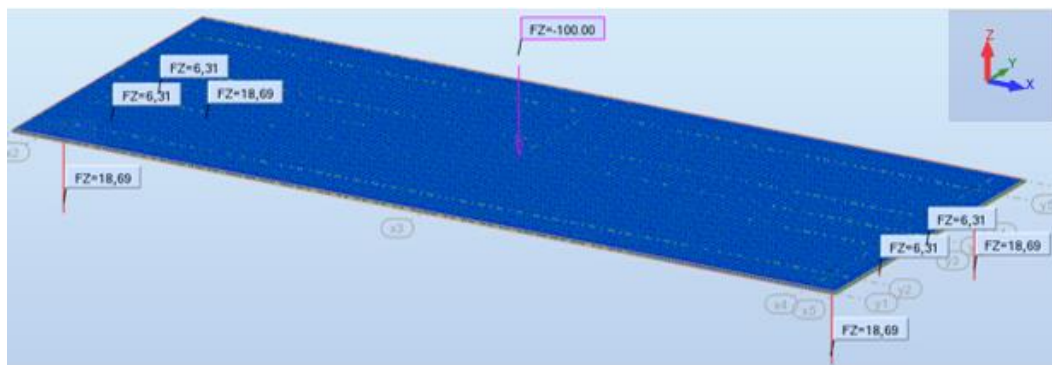


Figura 3.18 – Reações de apoio para malha de elementos finitos planos de $6,25 \times 6,25$ cm, para a carga na Posição 3 (Robot)

O Quadro 3.35 permite constatar, como era espetável, que os apoios A1 e A4 suportam a mesma carga, assim como os apoios A2 e A3 também suportam a mesma carga, visto que a carga é aplicada no centro da laje. Observa-se também que os desvios relativos são muito inferiores aos obtidos quando a carga é aplicada nas Posições 1 e 2, sendo inferiores a 10% em A1 e A4 e apresentando máximos de aproximadamente 16% nos apoios centrais, o que se traduz em diferenças inferiores a 2 kN na reação de apoio entre o modelo de elementos planos e o de elementos sólidos. A Figura 3.20 mostra que a repartição da carga transversal determinada para dois os modelos é muito parecida. De uma forma sintética, embora a dupla simetria deste caso pareça reduzir o desvio associado à utilização de um modelo de elementos planos, observa-se que, no que respeita ao tópico investigado por Fernandes (2017), o modelo de elementos sólidos

mostra que a distribuição lateral de forças é um pouco mais eficaz do que o modelo de elementos planos deixaria supor.

Quadro 3.35 – Comparação das soluções: reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos planos e elementos sólidos, para carga na Posição 3

Modelo	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			
Elem. Planos	18,69	37,38	/	6,31	12,62	/	6,31	12,62	/	18,69	37,38	/
Elem. Sólidos	17,49	34,98	-6,86	7,51	15,02	15,98	7,51	15,02	15,98	17,49	34,98	-6,86

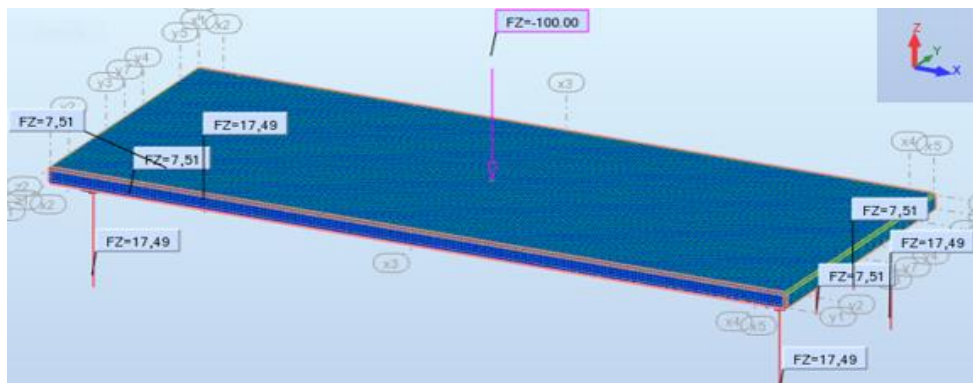


Figura 3.19 – Reações de apoio para malha de elementos finitos sólidos de 6,25 x 6,25 x 6 cm, para carga na Posição 3 (Robot)

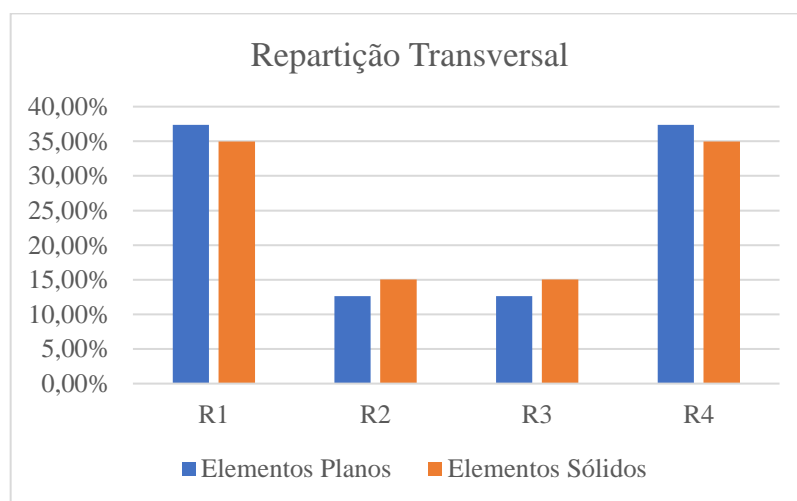


Figura 3.20 – Comparação das soluções, após convergência, determinadas para modelos de elementos planos e de elementos sólidos, para carga na Posição 3

4. MODELOS NUMÉRICOS COM APOIOS PLANOS ELÁSTICOS

4.1. Introdução

Concluiu-se anteriormente que numa laje homogénea, isotrópica e elástica linear com apoios pontuais, a distribuição lateral de forças, determinada pelo modelo de elementos sólidos, é mais eficaz do que aquela que o modelo de elementos planos deixaria suportar. Assim, decidiu-se investigar o que sucede quando na modelação dos apoios se considera a área de contacto efetiva (apoios planos), o que se aproxima mais da realidade, pois o tabuleiro de uma ponte não está assente em “pontos”, mas sim em aparelhos de apoio, os quais constituem uma superfície de contacto “plana” entre o tabuleiro e a infraestrutura que o suporta.

Os resultados obtidos nesta investigação contradizem as conclusões de Rombach (2004), ver também Pacoste *et al.* (2012), os quais sugeriam que a modelação dos apoios através de elementos planos tenderia a introduzir momentos de encastramento: de facto, constatou-se a inexistência de tais momentos, os quais por outro lado, são inevitáveis no caso de elementos planos rígidos bilaterais.

O desenvolvimento desta tarefa segue os passos definidos no capítulo 3: (i) modelação da laje com elementos planos, (ii) estudo da convergência da solução com o refinamento da malha de elementos planos, (iii) modelação da laje com elementos sólidos, (iv) convergência da solução com o refinamento da malha de elementos sólidos e (v) comparação dos resultados determinados com aqueles dois tipos de elementos.

De uma forma resumida, os aparelhos de apoio são dispositivos que fazem a transição entre o tabuleiro da ponte, ou seja, a superestrutura, e os encontros ou os pilares, ou seja, a infraestrutura (Figura 4.1): as suas principais funções são a transmissão das cargas às fundações e a garantia da estabilidade do tabuleiro sem se restringir excessivamente o seu movimento natural. Estes dispositivos são necessários para responder às condições de estabilidade e movimento previstas durante o período de vida útil da estrutura. Devido à sua relevância, os aparelhos de apoio têm de ter certas características, de forma a permitir o seu correto funcionamento e durabilidade.

Embora existam vários tipos de aparelhos de apoio, para esta dissertação foram considerados apenas apoios elastoméricos (apoios NEOARM, segundo o FIP Industriale (2012)), que

consistem em placas de um elastómero (neopreno ou um material similar) intercaladas com chapas em aço, que se encontram unidas às primeiras por vulcanização (Figura 4.2). Estes apoios são utilizados para a transmissão das cargas, particularmente das verticais, e permitem pequenas rotações e deslocamentos do tabuleiro.



Figura 4.1 – Transição entre o tabuleiro de ponte e os pilares através de apoios elastoméricos (Fonte: fercanorte@)

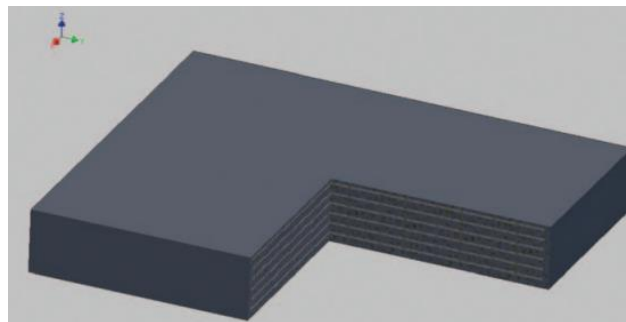


Figura 4.2 – Pormenor de um aparelho de apoio elastomérico (Fonte: FIP Industriale (2012))

Para a modelação da laje torna-se necessário determinar as dimensões e a rigidez do aparelho de apoio, visto que este será modelado por elementos pontuais, ou seja, molas. Relativamente às dimensões do apoio considerou-se apenas a carga vertical máxima que o aparelho tem de suportar. Este valor foi determinado por Fernandes (2017) que no seu Quadro 5.2, para $t = \infty$, apresenta um valor do esforço transversal atuante máximo de 408 kN em cada viga.

Recorrendo ao FIP Industriale (2012), adotando um apoio retangular e considerando que a deformação lateral máxima é aproximadamente 7 mm (simplificação devida a uma variação de temperatura de 50 °C, para um vão longitudinal de 14 m e um coeficiente de dilatação térmica linear do betão de $10^{-5}/\text{°C}$, $\Delta l = 50 \cdot 14 \cdot 10^{-5} = 0,007 \text{ m}$), verifica-se que um apoio NEOARM de dimensões 150 x 200 x 31 mm, constituído por três camadas de elastómero, cada uma com uma espessura de 6 mm, apresenta uma capacidade de carga acima daquele valor.

Segundo Guerreiro (2003) a rigidez vertical de uma lâmina de elastómero resulta da contribuição devida à deformação por distorção, $K_{v,\gamma}$, com a contribuição devida à variação de volume das lâminas de elastómero, $K_{v,vol}$. Admitindo que a deformação total é a soma das duas componentes de deformação, obtém-se a seguinte expressão para o cálculo da rigidez vertical individual de cada camada, $K_{v,i}$:

$$\frac{1}{K_{v,i}} = \frac{1}{K_{v,\gamma}} + \frac{1}{K_{v,vol}} \quad (4.1)$$

em que a rigidez vertical de cada camada associada à distorção, $K_{v,\gamma}$, e à variação de volume, $K_{v,vol}$, são dadas pelas expressões 4.2 e 4.3:

$$K_{v,\gamma} = \beta_2 \frac{GS^2A}{h_{el}} \quad (4.2)$$

$$K_{v,vol} = \frac{E_b A}{h_{el}} \quad (4.3)$$

em que:

β_2 – coeficiente dependente da forma da secção;

G – módulo de distorção da lâmina de elastómero ($G \sim 0,7$ a 2 MPa);

S – fator de forma ($S = A_{carregada}/A_{livre}$);

A – área em planta da lâmina de elastómero;

h_{el} – altura de cada lâmina de elastómero ($h_{el} = 6$ mm);

E_b – módulo de compressibilidade do elastómero ($E_b \sim 2000$ MPa);

Segundo a Parte 3 da EN 1337 Structural Bearings, para uma secção retangular $\beta_2 = 5$.

O fator de forma de cada camada de elastómero, S , é dado por:

$$S = \frac{2 \cdot 0,15 \cdot 0,20}{2 \cdot 0,20 \cdot 0,006 + 2 \cdot 0,15 \cdot 0,006} = 14,29 \quad (4.4)$$

Assim vem que a rigidez vertical de cada camada é de:

$$K_{v,\gamma} = 5 \cdot \frac{700 \cdot 14,29^2 \cdot 0,15 \cdot 0,20}{0,006} = 3\,573\,572 \text{ kN/m} \quad (4.5)$$

$$K_{v,vol} = \frac{E_b A}{h_{el}} = \frac{2\,000\,000 \cdot 0,15 \cdot 0,20}{0,006} = 10\,000\,000 \text{ kN/m} \quad (4.6)$$

$$K_{v,i} = \frac{3\,573\,572 \cdot 10\,000\,000}{3\,573\,572 + 10\,000\,000} = 2\,632\,743 \text{ kN/m} \quad (4.7)$$

Sendo o apoio NEOARM constituído por três camadas iguais, a sua rigidez é dada por:

$$K_v = \frac{K_{v,i}}{n} = \frac{2\,632\,743}{3} = 877\,581 \text{ kN/m} \quad (4.8)$$

De forma simplificada, em cada um dos oito apoios, foi considerado para a rigidez vertical o valor $K_v = 1\,000\,000 \text{ kN/m}$.

Como já foi referido anteriormente, o modelo de apoios planos não só aproxima melhor a estrutura real que o modelo de apoios pontuais, como pode evitar eventuais inconsistências numéricas no modelo de elementos finitos.

Da mesma forma, modelou-se a carga pontual de 100 kN como uma pressão equivalente. Sabendo que uma pressão é uma força por unidade de área, torna-se necessário definir a área onde será aplicada esta força, a qual se admitiu corresponder à área de contato da roda de um veículo. De acordo com a Parte 2 da EN 1991, a área de contacto de cada roda é definida por um quadrado de 0,4 m de lado. Assim sendo, a pressão exercida nesta área vale:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{100}{0,4 \cdot 0,4} = 625 \text{ kPa} \quad (4.9)$$

4.2. Modelação e Análise para a carga aplicada na Posição 1

4.2.1. Modelo de elementos planos

4.2.1.1. Modelação e convergência da solução

Dispondo das dimensões e da rigidez vertical de cada um dos apoios, procedeu-se à criação do modelo de elementos planos, considerando inicialmente a carga na Posição 1. No Robot, tal como o modelo de elementos planos com apoios pontuais, este modelo é desenvolvido através de um “Projeto de placa”, como apresentado na Figura 4.3.

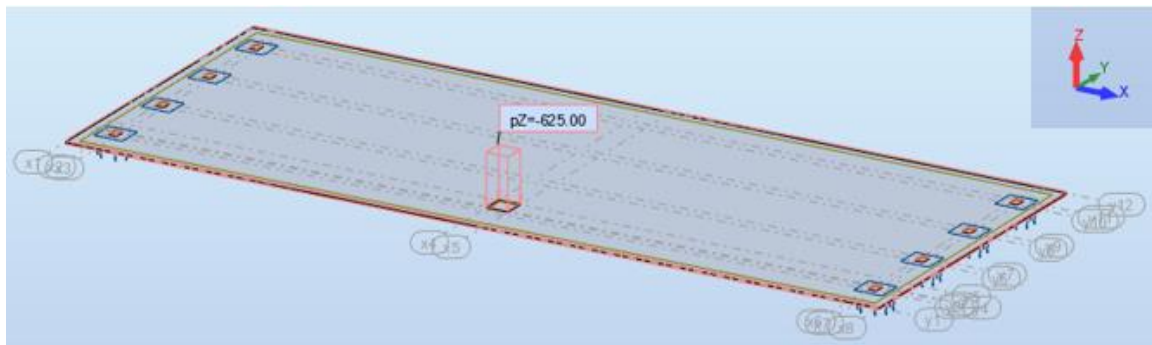


Figura 4.3 – Desenvolvimento de modelo de laje de elementos planos com apoios planos: representação esquemática (Robot)

Este modelo fica concluído com a criação da malha de elementos finitos, e requer a análise da convergência da solução com o refinamento desta malha. Foram então criados dois tipos de malha, uma malha regular de elementos quadrangulares para a zona dos apoios planos e carga (A+C) e uma malha de Delaunay de elementos “quadrangulares” para o resto da laje (L).

No Robot, um apoio plano é representado por uma série de elementos pontuais em paralelo. Cada apoio tem dimensões em planta 15 x 20 cm e a área de contacto da carga é 40 x 40 cm. Assim, por forma a criar uma malha A+C regular, foi necessário encontrar um divisor comum para ambas as dimensões, ou seja, 5 cm, valor que definiu o lado do elemento da malha. Relativamente à malha L, foi definida primeiramente uma malha de Delaunay com uma dimensão máxima dos elementos de 25 cm, tal como na secção 3.2.1.1. A sequência de refinamento adotada nesta análise considerou inicialmente uma malha regular de elementos quadrangulares de 5 cm de lado nos apoios e na carga (A+C) e 25 cm no resto da laje (L), seguida de três refinamentos desta, 12,5 cm, 6,25 cm e 3,125 cm, até se atingir a convergência. Seguidamente, de forma semelhante, consideram-se malhas de elementos quadrangulares de 2,5 cm, 1,25 cm e 0,625 cm nos A+C, e, para cada um destes casos, consideram-se no resto da laje (L), as mesmas quatro malhas anteriormente referidas.

Uma vez que cada um dos oito apoios planos da laje é modelado por n elementos pontuais de apoio no Robot, a reação em cada apoio plano, R_{apoi} , é dada pelo somatório das n reações nesses elementos pontuais,

$$R_{apoi} = \sum_{i=1}^n R_{nó i} \quad (4.10)$$

Por exemplo, com uma malha regular de 5 cm nos apoios planos, cada apoio é modelado por 20 elementos pontuais, ou seja, 20 reações de apoio, sendo a reação no apoio plano dada pelo

somatório das 20 reações naqueles elementos pontuais (Figuras 4.4 e 4.5). Como se observa no Quadro 4.1, a malha regular de 2,5 cm apresenta 63 reações pontuais, a de 1,25 cm 221 e a de 0,625 cm 825.

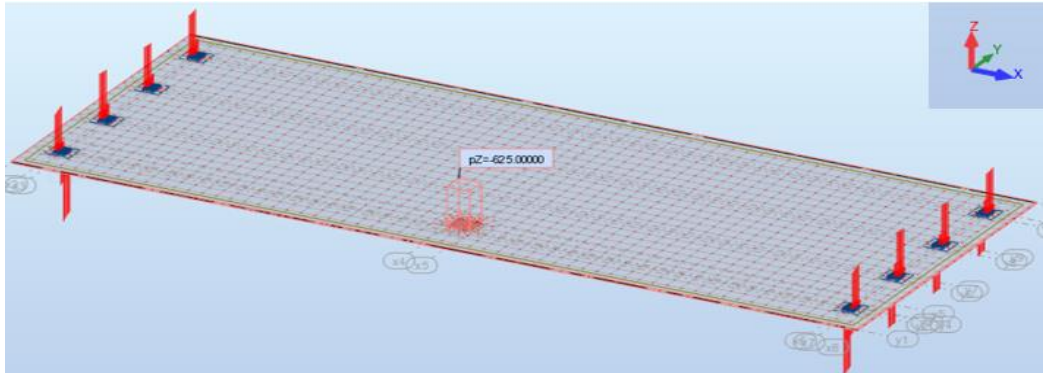


Figura 4.4 – Modelo de elementos planos: malha regular de 5 cm nos A+C e malha de Delaunay de 25 cm no resto da laje, para carga na Posição 1 (Robot)

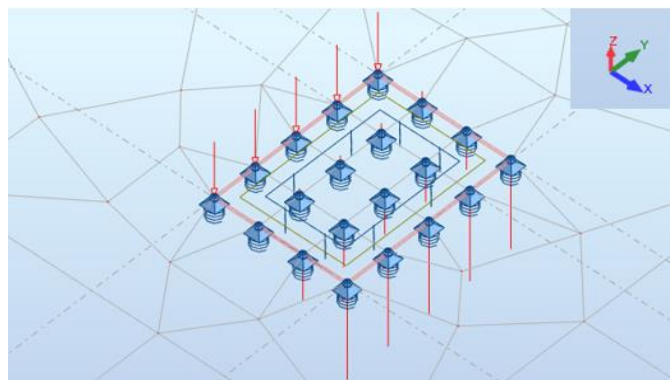


Figura 4.5 – Modelo de elementos planos: representação dos 20 elementos pontuais num apoio com uma malha regular de 5 cm (Robot)

Da mesma forma, a rigidez vertical de cada apoio plano é dada pelo somatório da rigidez vertical de todos os elementos pontuais que o modelam. Visto que a rigidez vertical de cada apoio plano vale $K_{apoi o} = 1\,000\,000$ kN/m, a rigidez vertical de cada elemento pontual, $K_{nó}$, é dada por:

$$K_{nó} = \frac{K_{apoi o}}{n} \quad (4.11)$$

O Quadro 4.1 apresenta o número de nós e a rigidez vertical de cada nó, em função da malha regular considerada no apoio. Note-se que se considerou que a rigidez é idêntica em todos os

nós; uma alternativa seria considerar esta rigidez de acordo com a área de influência de cada, tendo nesse caso os nós de canto um quarto da rigidez e os laterais metade.

Quadro 4.1 – Número de elementos pontuais e rigidez vertical de cada elemento pontual

Malha	Número de elementos	Rigidez vertical de cada elemento pontual
[cm]	pontuais	[kN/m]
5	20	50 000,00
2,5	63	15 873,02
1,25	221	4 524,89
0,625	825	1 212,12

O Quadro 4.1 permite verificar que, por exemplo, para uma malha regular de 5 cm nos apoios, resulta uma rigidez vertical por elemento pontual de $K_{nó} = 50\,000$ kN/m; é este o valor da rigidez a considerar no Robot.

Começando por fixar a malha regular de 5 cm nos A+C, e refinando a malha no resto da laje (L), e efetuando a análise, obtiveram-se as reações de apoio e os respetivos desvios relativos apresentados no Quadro 4.2.

Quadro 4.2 – Modelos de elementos planos: análise de convergência com malha regular de 5 cm nos A+C, para carga na Posição 1

Malha regular de 5 cm nos A+C													
		R1			R2			R3			R4		
Malha	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	
[cm]			[%]			[%]			[%]			[%]	
25	41,36	82,71	/	4,15	8,31	/	8,91	17,83	/	-4,42	-8,85	/	
12,5	41,25	82,50	-0,25	4,30	8,61	3,52	8,93	17,86	0,19	-4,49	-8,98	1,42	
6,25	41,22	82,43	-0,09	4,36	8,72	1,23	8,93	17,87	0,04	-4,51	-9,02	0,46	

Observada a convergência da solução com base nos refinamentos mencionados, nos Quadros 4.2 a 4.5 verifica-se que seja qual for a malha nos A+C, existe sempre convergência logo no primeiro refinamento, ou seja, para a malha de Delaunay de 12,5 cm em L. Porém para um maior rigor na comparação de resultados, foi efetuado outro refinamento para cada um dos casos, tentando-se alcançar desvios relativos máximos próximos de 1%. Dos Quadros 4.2 a 4.5 observa-se que, independentemente da dimensão dos elementos da malha nos A+C, R1 tende a

diminuir com a diminuição da dimensão dos elementos no resto da laje e, em contrapartida, R2, R3 e R4 tendem a aumentar em valor absoluto.

Quadro 4.3 – Modelos de elementos planos: análise de convergência com malha regular de 2,5 cm nos A+C, para carga na Posição 1

Malha regular de 2,5 cm nos A+C													
		R1			R2			R3			R4		
Malha	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	
[cm]			[%]			[%]			[%]			[%]	
25	41,68	83,36	/	3,83	7,66	/	8,65	17,31	/	-4,16	-8,33	/	
12,5	41,57	83,14	-0,27	3,99	7,97	3,94	8,68	17,35	0,24	-4,23	-8,46	1,58	
6,25	41,53	83,07	-0,09	4,04	8,08	1,29	8,68	17,36	0,03	-4,25	-8,50	0,46	

Quadro 4.4 – Modelos de elementos planos: análise de convergência com malha regular de 1,25 cm nos A+C, para carga na Posição 1

Malha regular de 1,25 cm nos A+C													
		R1			R2			R3			R4		
Malha	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	
[cm]			[%]			[%]			[%]			[%]	
25	41,84	83,68	/	3,68	7,35	/	8,50	17,01	/	-4,02	-8,04	/	
12,5	41,73	83,47	-0,26	3,82	7,65	3,88	8,54	17,07	0,39	-4,09	-8,19	1,80	
6,25	41,70	83,40	-0,08	3,87	7,75	1,33	8,54	17,08	0,05	-4,11	-8,23	0,48	

Quadro 4.5 – Modelos de elementos planos: análise de convergência com malha regular de 0,625 cm nos A+C, para carga na Posição 1

Malha regular de 0,625 cm nos A+C													
		R1			R2			R3			R4		
Malha	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	
[cm]			[%]			[%]			[%]			[%]	
25	41,94	83,88	/	3,57	7,14	/	8,44	16,89	/	-3,95	-7,91	/	
12,5	41,82	83,64	-0,29	3,74	7,48	4,50	8,46	16,93	0,23	-4,02	-8,04	1,70	
6,25	41,78	83,57	-0,08	3,79	7,58	1,35	8,47	16,94	0,06	-4,04	-8,09	0,51	

Os Quadros 4.6 a 4.9 apresentam o número de elementos finitos e o tempo de cálculo para cada malha, observando-se um aumento considerável do esforço de cálculo, em termos relativos apenas, quando se atinge 825 elementos pontuais em cada apoio.

Quadro 4.6 – Modelos de elementos planos: número de elementos finitos e tempo de cálculo para malha regular de 5 cm nos A+C, para carga na Posição 1

Malha	Elementos	Tempo de Cálculo
[cm]	Finitos	[s]
25	1 927	1
12,5	6 141	1
6,25	23 124	4

Quadro 4.7 – Modelos de elementos planos: número de elementos finitos e tempo de cálculo para malha regular de 2,5 cm nos A+C, para carga na Posição 1

Malha	Elementos	Tempo de Cálculo
[cm]	Finitos	[s]
25	2 823	1
12,5	7 045	1
6,25	24 004	4

Quadro 4.8 – Modelos de elementos planos: número de elementos finitos e tempo de cálculo para malha regular de 1,25 cm nos A+C, para carga na Posição 1

Malha	Elementos	Tempo de Cálculo
[cm]	Finitos	[s]
25	5 788	1
12,5	9 783	2
6,25	26 682	5

Quadro 4.9 – Modelos de elementos planos: número de elementos finitos e tempo de cálculo para malha regular de 0,625 cm nos A+C, para carga na Posição 1

Malha	Elementos	Tempo de Cálculo
[cm]	Finitos	[s]
25	12 828	7
12,5	19 195	8
6,25	35 989	10

Em seguida, foram comparadas as soluções mais refinadas em L, para cada uma das quatro malhas regulares dos A+C. Fixando a malha de Delaunay de 6,25 cm em L, obtiveram-se os desvios reunidos Quadro 4.10.

Quadro 4.10 – Reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos e apoios planos, para carga na Posição 1

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4			$\frac{N_{Apoios}}{Apoio}$
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	
5	41,22	82,43	/	4,36	8,72	/	8,93	17,87	/	-4,51	-9,02	/	20
2,5	41,53	83,07	0,76	4,04	8,08	-7,89	8,68	17,36	-2,96	-4,25	-8,50	-6,07	63
1,25	41,70	83,40	0,40	3,87	7,75	-4,25	8,54	17,08	-1,61	-4,11	-8,23	-3,33	221
0,625	41,78	83,57	0,20	3,79	7,58	-2,19	8,47	16,94	-0,85	-4,04	-8,09	-1,75	825

4.2.2. Modelos de elementos sólidos

4.2.2.1. Modelação e convergência da solução

O passo seguinte consistiu na criação do modelo de elementos sólidos para a laje, agora com elementos de apoio planos. Selecionando na interface gráfica do Robot um “Projeto de estrutura volumétrica”, o novo modelo da laje é representado de forma esquemática na Figura 4.6, sendo que as condições de apoio são iguais às do modelo de elementos sólidos com apoios pontuais, apresentado na secção 3.2.2.1, com exceção das restrições das translações segundo z, que passam a ser elásticas.

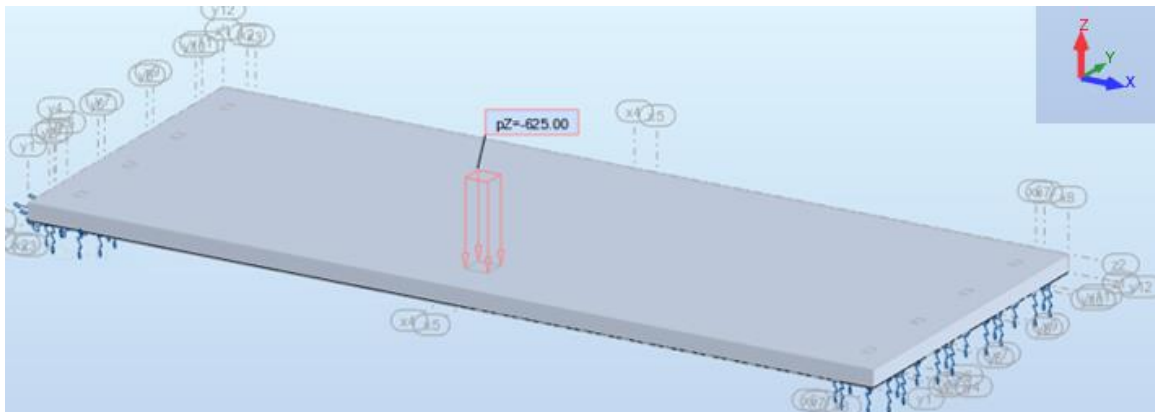


Figura 4.6 – Desenvolvimento de modelo de laje de elementos sólidos com apoios planos: representação esquemática (Robot)

Posto isto, foram consideradas as malhas já referidas para os A+C e para L. Verificou-se que a análise resultava numa solução sem simetria nos valores das reações nos apoios com a mesma ordenada transversal y, como também já fora observado nos modelos de apoios pontuais.

A solução para esta questão passou novamente por modelar apenas metade da laje, com condições de apoio análogas às do modelo de elementos sólidos com apoios pontuais de apenas metade da laje, apresentado na secção 3.2.2.1, e cuja pressão aplicada se manteria nos 625 kPa, em virtude da redução da força aplicada para 50 kN e da área para 0,20 x 0,40 m, ver Figura 4.7.

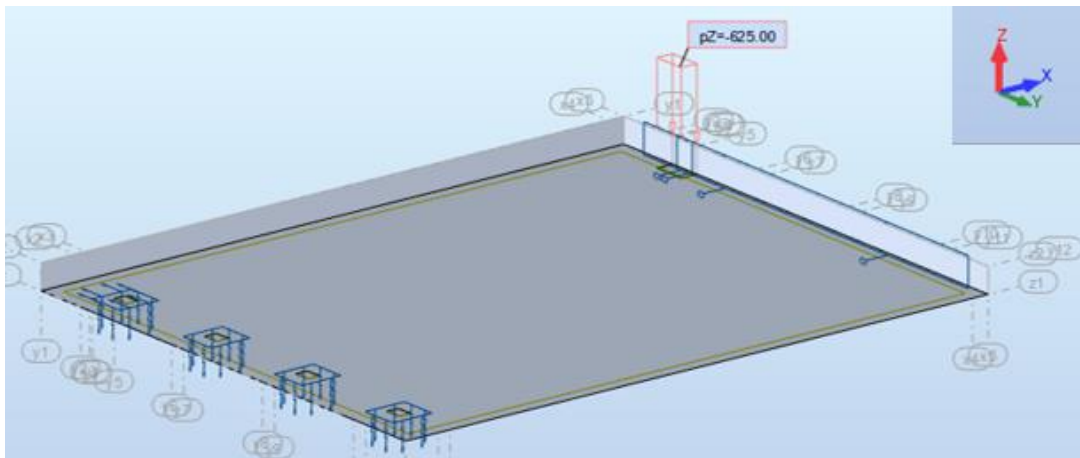


Figura 4.7 – Desenvolvimento do modelo de elementos sólidos de apenas metade da laje com apoios planos (Robot)

Gerando-se uma malha de 5 cm nos A+C, e refinando a malha em L, obtiveram-se as reações de apoio e os respetivos desvios relativos apresentados no Quadro 4.11.

Quadro 4.11 – Modelos de elementos sólidos: análise de convergência com malha regular de 5 cm nos A+C, para carga na Posição 1

Malha regular de 5 cm nos A+C												
Malha [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
25	39,03	78,06	/	6,89	13,78	/	10,51	21,01	/	-6,42	-12,85	/
12,5	40,39	80,78	3,36	5,27	10,54	-30,70	9,62	19,25	-9,18	-5,28	-10,56	-21,65
6,25	40,80	81,60	1,00	4,80	9,61	-9,71	9,31	18,62	-3,36	-4,91	-9,82	-7,54
3,125	40,91	81,81	0,26	4,69	9,39	-2,36	9,21	18,42	-1,09	-4,81	-9,61	-2,16

Como se observa do Quadro 4.11, a convergência da solução só se verifica para a malha de Delaunay de 3,125 cm em L, ou seja, requer mais dois “refinamentos” que para o modelo de elementos planos. Nos Quadros 4.12, 4.13 e 4.14 observa-se a mesma tendência, concluindo-

se que independentemente da dimensão dos elementos da malha nos A+C, só há convergência para a malha de Delaunay de 3,125 cm em L.

Dos Quadros 4.11 a 4.14 observa-se que para todos os casos de malha nos A+C, existem desvios muito elevados, sobretudo no primeiro refinamento da malha em L, quando se compara com os modelos de elementos planos. Este resultado pode-se dever ao facto dos elementos finitos volumétricos dos A+C serem bastante distorcidos, pois como já se referiu na secção 3.2.2.1 o algoritmo de geração da malha do Robot divide sempre a laje em 5 camadas de igual espessura.

Outro possível fator para este resultado baseia-se na grande diferença entre a dimensão dos elementos da malha nos A+C e a dos elementos do resto da laje (25 cm), originando elementos finitos muito distorcidos na transição dos A+C para o resto da laje, ver Figura 4.8.

Quadro 4.12 – Modelos de elementos sólidos: análise de convergência com malha regular de 2,5 cm nos A+C, para carga na Posição 1

Malha regular de 2,5 cm nos A+C												
Malha [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
25	40,95	81,90	/	5,20	10,40	/	8,14	16,27	/	-4,29	-8,57	/
12,5	40,61	81,22	-0,83	5,06	10,12	-2,71	9,41	18,82	13,55	-5,09	-10,17	15,74
6,25	41,07	82,13	1,11	4,54	9,09	-11,38	9,08	18,15	-3,68	-4,69	-9,38	-8,48
3,125	41,19	82,38	0,30	4,41	8,82	-3,07	8,98	17,96	-1,10	-4,58	-9,15	-2,43

Quadro 4.13 – Modelos de elementos sólidos: análise de convergência com malha regular de 1,25 cm nos A+C, para carga na Posição 1

Malha regular de 1,25 cm nos A+C												
Malha [cm]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
25	40,82	81,64	/	5,22	10,43	/	8,53	17,07%	/	-4,57	-9,14	/
12,5	41,43	82,86	1,46	4,34	8,68	-20,23	8,44	16,88%	-1,09	-4,21	-8,41	-8,63
6,25	41,21	82,42	-0,53	4,41	8,82	1,64	8,95	17,90%	5,68	-4,57	-9,13	7,89
3,125	41,34	82,67	0,31	4,27	8,54	-3,31	8,85	17,70%	-1,13	-4,45	-8,91	-2,56

Quadro 4.14 – Modelos de elementos sólidos: análise de convergência com malha regular de 0,625 cm nos A+C, para carga na Posição 1

Malha regular de 0,625 cm nos A+C												
	R1			R2			R3			R4		
Malha	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
[cm]			[%]			[%]			[%]			[%]
25	39,36	78,73	/	6,56	13,12	/	10,24	20,49	/	-6,17	-12,34	/
12,5	41,42	82,83	4,96	4,34	8,68	-51,10	8,49	16,97	-20,73	-4,24	-8,49	-45,36
6,25	41,29	82,59	-0,30	4,33	8,66	-0,28	8,87	17,74	4,32	-4,49	-8,98	5,53
3,125	41,41	82,82	0,28	4,20	8,40	-3,03	8,78	17,55	-1,04	-4,39	-8,78	-2,36

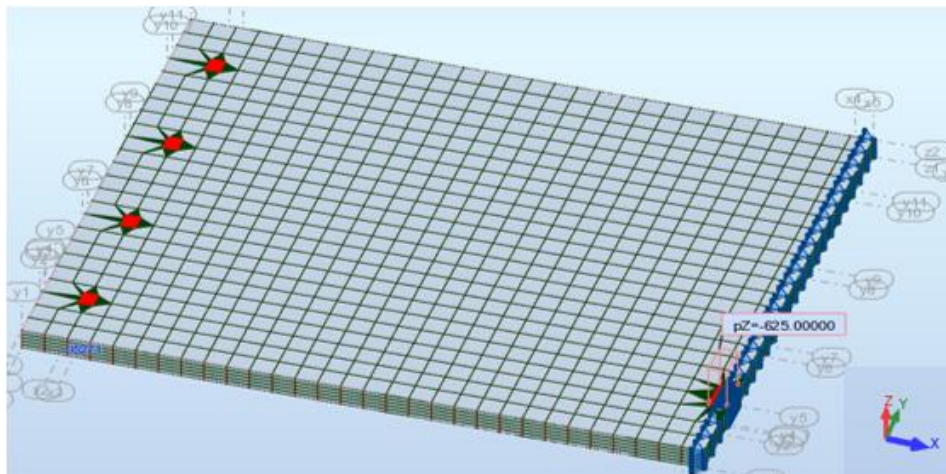


Figura 4.8 – Modelo de elementos sólidos: malha regular de 0,625 cm em planta nos A+C e malha de Delaunay de 25 cm em planta em L, para carga na Posição 1 – modelação de apenas metade da laje (Robot)

Relativamente ao número de elementos finitos e ao tempo de cálculo para cada um dos casos, através dos Quadros 4.15 a 4.18 verifica-se o esperado, ou seja, um aumento muito significativo do esforço de cálculo, provocado pelo acréscimo do número de elementos finitos.

Analogamente ao que se fez anteriormente, foram comparadas as soluções para cada uma das quatro malhas regulares dos A+C, considerando sempre a malha mais refinada no resto da laje.

Assim, fixando a malha de Delaunay com elementos de dimensão máxima de 3,125 cm em L, obtêm-se os valores para os desvios apresentados no Quadro 4.19.

Quadro 4.15 – Modelos de elementos sólidos: número de elementos finitos e tempo de cálculo para malha regular de 5 cm nos A+C, para carga na Posição 1

Malha	Elementos	Tempo de Cálculo
[cm]	Finitos	[s]
25	4 825	1
12,5	15 330	6
6,25	57 810	30
3,125	230 010	187

Quadro 4.16 – Modelos de elementos sólidos: número de elementos finitos e tempo de cálculo para malha regular de 2,5 cm nos A+C, para carga na Posição 1

Malha	Elementos	Tempo de Cálculo
[cm]	Finitos	[s]
25	7 465	2
12,5	17 660	6
6,25	60 050	33
3,125	231 370	208

Quadro 4.17 – Modelos de elementos sólidos: número de elementos finitos e tempo de cálculo para malha regular de 1,25 cm nos A+C, para carga na Posição 1

Malha	Elementos	Tempo de Cálculo
[cm]	Finitos	[s]
25	14 385	5
12,5	26 140	9
6,25	66 575	35
3,125	237 110	210

Quadro 4.18 – Modelos de elementos sólidos: número de elementos finitos e tempo de cálculo para malha regular de 0,625 cm nos A+C, para carga na Posição 1

Malha	Elementos	Tempo de Cálculo
[cm]	Finitos	[s]
25	32 070	13
12,5	49 555	21
6,25	94 720	50
3,125	259 745	214

Quadro 4.19 – Reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos sólidos e apoios planos, para carga na Posição 1

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4			$\frac{N_{Apoios}}{Apoio}$
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	
5	40,91	81,81	/	4,69	9,39	/	9,21	18,42	/	-4,81	-9,61	/	20
2,5	41,19	82,38	0,69	4,41	8,82	-6,42	8,98	17,96	-2,57	-4,58	-9,15	-5,03	63
1,25	41,34	82,67	0,35	4,27	8,54	-3,30	8,85	17,70	-1,46	-4,45	-8,91	-2,78	221
0,625	41,41	82,82	0,18	4,20	8,40	-1,58	8,78	17,55	-0,82	-4,39	-8,78	-1,48	825

4.2.3. Comparação entre soluções de modelos de elementos planos e elementos sólidos

Dispondo da solução, após a convergência, tanto para elementos planos como para elementos sólidos, para a carga na Posição 1, (i) malha regular de 0,625 cm nos A+C e malha de Delaunay de 6,25 cm em L (Figura 4.9) e (ii) malha regular de 0,625 cm nos A+C e malha de Delaunay de 3,125 cm em L (Figura 4.10), respetivamente, procedeu-se à comparação destas duas soluções, a qual é exibida no Quadro 4.20.

Quadro 4.20 – Comparação das soluções: reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos planos e elementos sólidos, para carga na Posição 1

Modelo	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
Elem. Planos	41,78	83,57	/	3,79	7,58	/	8,47	16,94	/	-4,04	-8,09	/
Elem. Sólidos	41,41	82,82	-0,90	4,20	8,40	9,78	8,78	17,55	3,52	-4,39	-8,78	7,87

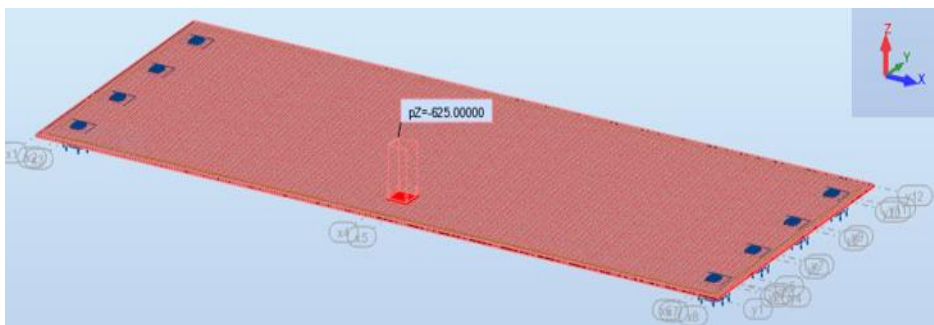


Figura 4.9 – Modelo de elementos planos: malha regular de 0,625 cm em planta nos A+C e malha de Delaunay de 6,25 cm em L, para carga na Posição 1 (Robot)

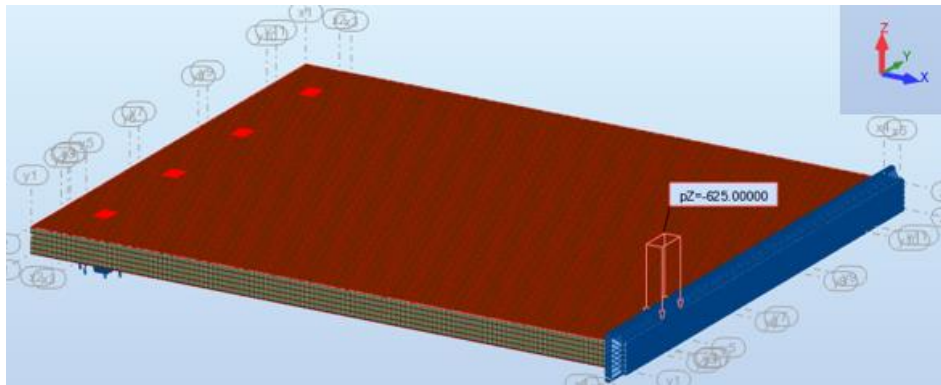


Figura 4.10 – Modelo de elementos sólidos: malha regular de 0,625 cm em planta nos A+C e malha de Delaunay de 3,125 cm em planta em L, para carga na Posição 1 – modelação de apenas metade da laje (Robot)

O Quadro 4.20 permite verificar que contrariamente ao sucedido para apoios pontuais, os valores do desvio das reações de apoio são sempre inferiores a 10%, ou seja, para todos os apoios a diferença entre a reação de apoio, quando modelado com elementos planos ou elementos sólidos é inferior a 1 kN. Uma conclusão muito importante é, pois, que para apoios planos, o modelo de elementos sólidos é **dispensável**. Em termos práticos, o tempo de cálculo do modelo de elementos planos, com um total de 35 989 elementos finitos, foi de 10 segundos, enquanto que para o modelo de elementos sólidos, com um total de 259 745 elementos finitos volumétricos, sete vezes superior ao anterior, o tempo de cálculo foi de 214 segundos, vinte vezes superior.

4.3. Restantes posições da carga aplicada

4.3.1. Carga aplicada na Posição 2

Tendo-se concluído que para a carga na Posição 1 é desnecessário o desenvolvimento de um modelo de elementos sólidos, procedeu-se à comparação das soluções para a carga aplicada nas Posições 2 e 3.

Relativamente à situação de carga aplicada na Posição 2 e aplicando o mesmo procedimento de refinamento, verificou-se a ocorrência de convergência da solução após um único refinamento da malha no resto da laje (malha de Delaunay de 12,5 cm), no caso de elementos planos, e após três refinamentos (malha de Delaunay de 3,125 cm – igual a carga na Posição 1), para o caso de elementos sólidos. De referir que para o caso do modelo de elementos sólidos também se

verificou a assimetria dos valores das reações nos apoios com a mesma ordenada transversal y, tendo sido necessário desenvolver o modelo de apenas metade da laje.

Em ambos os casos foram atingidos desvios inferiores a 2% e os tempos de cálculo e o número de elementos finitos são praticamente iguais aos obtidos para a carga na Posição 1, ver Quadros 4.6 a 4.9, para o caso dos modelos com elementos planos e Quadros 4.15 a 4.18, para o caso dos modelos com elementos sólidos.

Fixando a malha de Delaunay de 12,5 cm em L, para o caso de elementos planos e a malha de Delaunay de 3,125 cm para o caso de elementos sólidos obtêm-se, respetivamente, os valores para reações de apoio e desvios apresentados nos Quadros 4.21 e 4.22.

Quadro 4.21 – Reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos planos, para carga na Posição 2

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4			$\frac{N_{\text{Apoios}}}{\text{Apoio}}$
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	
5	28,30	56,60	/	7,01	14,02	/	9,23	18,45	/	5,46	10,92	/	20
2,5	28,60	57,19	1,04	6,72	13,43	-4,43	8,96	17,92	-2,98	5,73	11,46	4,66	63
1,25	28,75	57,51	0,55	6,56	13,12	-2,37	8,81	17,63	-1,65	5,87	11,75	2,45	221
0,625	28,83	57,67	0,28	6,48	12,96	-1,25	8,74	17,49	-0,82	5,94	11,89	1,22	825

Quadro 4.22 – Reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos sólidos, para carga na Posição 2

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4			$\frac{N_{\text{Apoios}}}{\text{Apoio}}$
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	
5	27,94	55,89	/	7,38	14,77	/	9,56	19,11	/	5,12	10,23	/	20
2,5	28,21	56,42	0,94	7,12	14,23	-3,75	9,32	18,63	-2,56	5,36	10,71	4,46	63
1,25	28,35	56,70	0,49	6,98	13,96	-1,96	9,19	18,37	-1,41	5,48	10,96	2,32	221
0,625	28,42	56,84	0,25	6,91	13,83	-0,97	9,12	18,23	-0,77	5,55	11,10	1,20	825

Deste modo, as duas soluções a comparar para carga na Posição 2 são (i) malha regular de 0,625 cm nos A+C e malha de Delaunay de 12,5 cm em L (Figura 4.11) e (ii) malha regular de 0,625 cm nos A+C e malha de Delaunay de 3,125 cm em L (Figura 4.12), respetivamente, para elementos planos e elementos sólidos. A comparação das duas soluções é apresentada no Quadro 4.23.

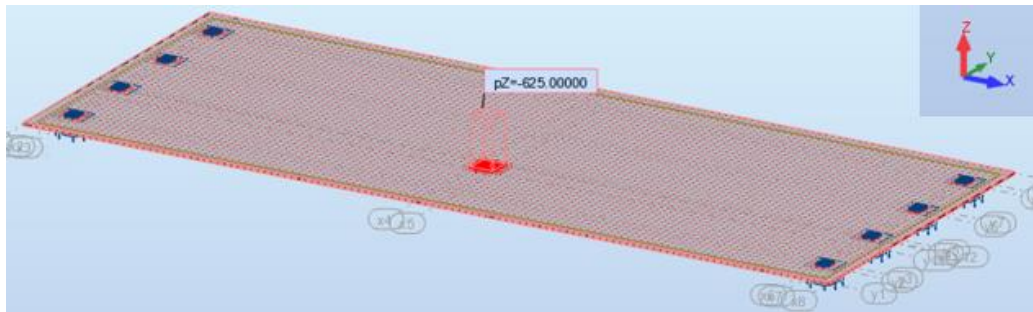


Figura 4.11 – Modelo de elementos planos: malha regular de 0,625 cm em planta nos A+C e malha de Delaunay de 12,5 cm em L, para carga na Posição 2 (Robot)

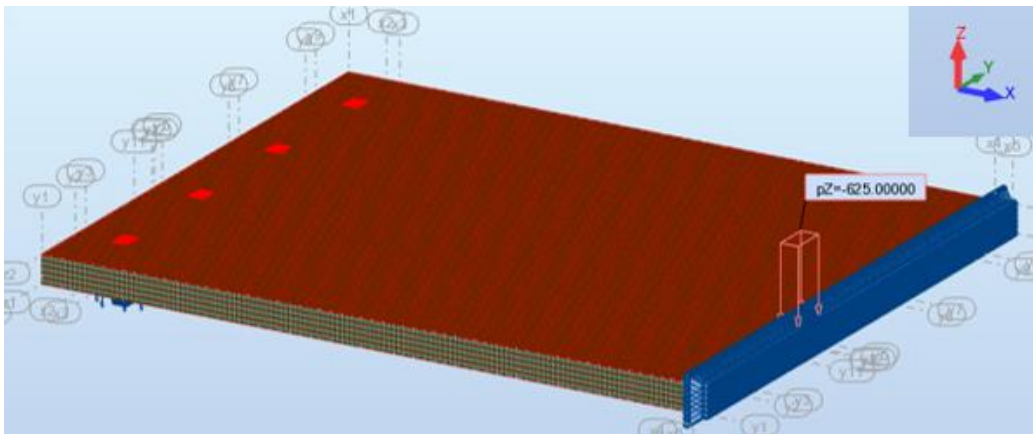


Figura 4.12 – Modelo de elementos sólidos: malha regular de 0,625 cm em planta nos A+C e malha de Delaunay de 3,125 cm em planta em L, para carga na Posição 2 (Robot)

Quadro 4.23 – Comparação das soluções: reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos planos e elementos sólidos, para carga na Posição 2

Modelo	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			
Elem. Planos	28,83	57,67	/	6,48	12,96	/	8,74	17,49	/	5,94	11,89	/
Elem. Sólidos	28,42	56,84	-1,45	6,91	13,83	6,28	9,12	18,23	4,11	5,55	11,10	-7,14

O Quadro 4.23 permite manter a conclusão anteriormente apresentada, de que para apoios planos, a utilização de elementos sólidos é **desnecessária**, pois os valores do desvio de todas as reações de apoio se mantêm sempre inferiores a 10%, tendo tendência a diminuir à medida que a posição da carga se aproxima do centro da laje.

4.3.2. Carga aplicada na Posição 3

Para finalizar, resta comparar as soluções para a carga aplicada na Posição 3. Repetindo o procedimento de refinamento, verificou-se que no caso de elementos planos a convergência da solução ocorre também após um refinamento da malha em L (malha de Delaunay de 12,5 cm), e para o caso de elementos sólidos após dois refinamentos (malha de Delaunay de 6,25 cm), tendo também sido necessário desenvolver o modelo de apenas metade da laje.

Com os modelos de elementos planos foram atingidos desvios inferiores a 1%, enquanto que com os modelos de elementos sólidos foram obtidos desvios máximos de 3%. Todavia, a título de curiosidade, no caso dos modelos de elementos sólidos, efetuando o terceiro refinamento em L (malha de Delaunay de 3,125 cm), todos os desvios obtidos foram inferiores a 1%. Os tempos de cálculo e o número de elementos finitos também se mantêm praticamente iguais aos obtidos com a carga na Posição 1, ver Quadros 4.6 a 4.9, para o caso dos modelos com elementos planos e Quadros 4.15 a 4.18, para o caso dos modelos com elementos sólidos.

Assim sendo, para uma malha de Delaunay de 12,5 cm em L, para o caso de elementos planos e uma malha de Delaunay de 6,25 cm em L, para o caso de elementos sólidos obtêm-se, respetivamente, os valores para reações de apoio e desvios relativos apresentados nos Quadros 4.24 e 4.25.

Comparando as duas soluções para carga na Posição 3, (i) malha regular de 0,625 cm nos A+C e malha de Delaunay de 12,5 cm em L (Figura 4.13) e (ii) malha regular de 0,625 cm nos A+C e malha de Delaunay de 6,25 cm em L (Figura 4.14), respetivamente para elementos planos e elementos sólidos, obtêm-se os seguintes desvios relativos apresentados no Quadro 4.26.

Quadro 4.24 – Reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos planos, para carga na Posição 3

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4			$\frac{N_{\text{Apoios}}}{\text{Apoio}}$
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	
5	16,32	32,64	/	8,68	17,36	/	8,68	17,35	/	16,32	32,65	/	20
2,5	16,61	33,21	1,71	8,39	16,79	-3,39	8,40	16,79	-3,34	16,61	33,21	1,70	63
1,25	16,75	33,51	0,89	8,25	16,49	-1,80	8,24	16,49	-1,84	16,76	33,51	0,90	221
0,625	16,83	33,66	0,46	8,17	16,34	-0,96	8,17	16,34	-0,91	16,83	33,66	0,45	825

Quadro 4.25 – Reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos sólidos, para carga na Posição 3

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4			$N_{\text{Apoios}} / \text{Apoio}$
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	
5	15,90	31,80	/	9,09	18,19	/	9,12	18,24	/	15,89	31,78	/	20
2,5	16,14	32,28	1,51	8,85	17,70	-2,76	8,88	17,75	-2,75	16,13	32,27	1,51	63
1,25	16,27	32,54	0,79	8,72	17,44	-1,49	8,75	17,50	-1,46	16,26	32,52	0,79	221
0,625	16,34	32,68	0,42	8,65	17,30	-0,80	8,68	17,36	-0,78	16,33	32,66	0,42	825

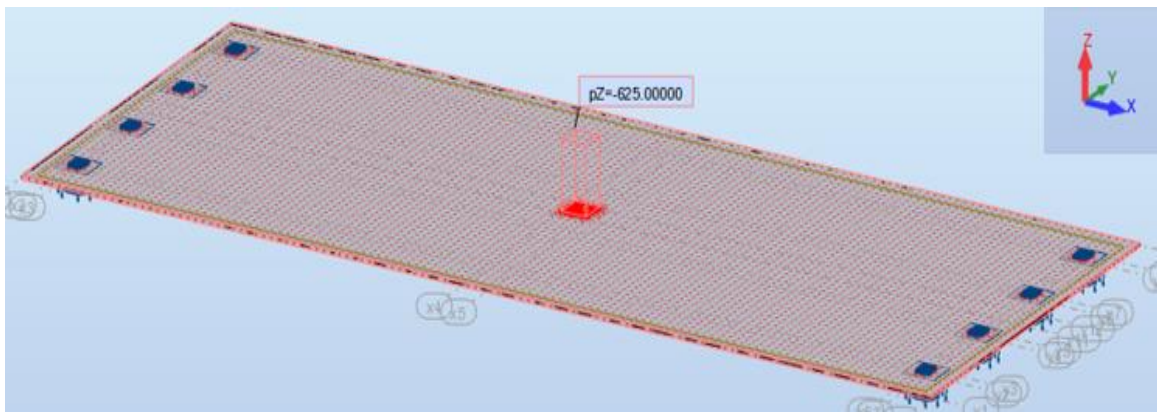


Figura 4.13 – Modelo de elementos planos: malha regular de 0,625 cm em planta nos A+C e malha de Delaunay de 12,5 cm em L, para carga na Posição 3 (Robot)

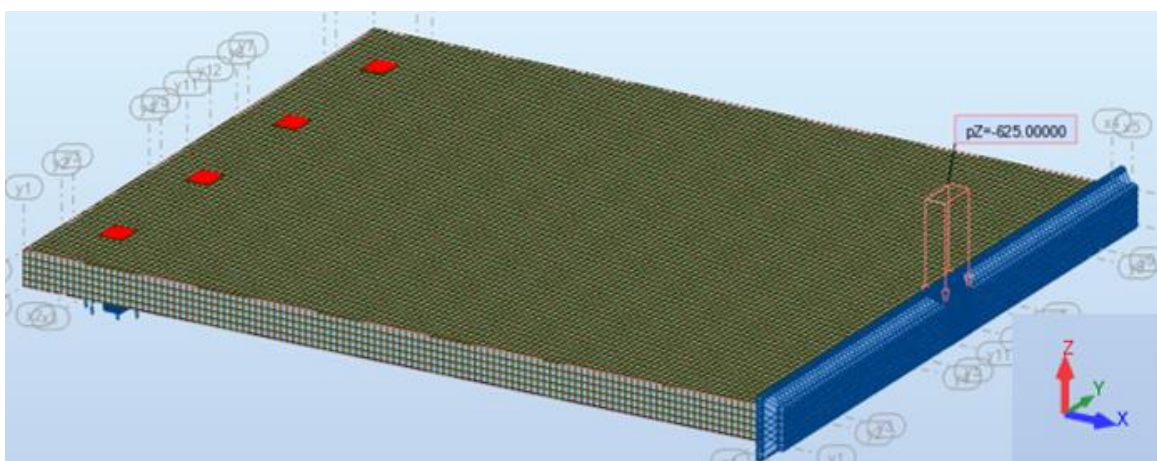


Figura 4.14 – Modelo de elementos sólidos: malha regular de 0,625 cm em planta nos A+C e malha de Delaunay de 6,25 cm em planta em L, para carga na Posição 3 (Robot)

Quadro 4.26 – Comparação das soluções: reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos planos e elementos sólidos, para carga na Posição 3

Modelo	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			[%]
Elem. Planos	16,83	33,66	/	8,17	16,34	/	8,17	16,34	/	16,83	33,66	/
Elem. Sólidos	16,34	32,68	-3,01	8,65	17,30	5,58	8,68	17,36	5,88	16,33	32,66	-3,07

Os valores do Quadro 4.26 permitem concluir novamente que para apoios planos o desenvolvimento de modelos de elementos sólidos é **desnecessário**. A tendência de diminuição dos desvios à medida que a posição da carga se aproxima do centro da laje é mais uma vez observada, sendo que para o caso de carga na Posição 3 foi possível atingir a convergência com menos “refinamentos”, como já havia sucedido na modelação da laje com apoios pontuais.

4.4. Avaliação do efeito do valor da rigidez dos apoios

Depois de se ter chegado à conclusão de que para apoios planos o desenvolvimento de modelos de elementos sólidos é desnecessário, foi necessário verificar se este resultado se mantinha para outros valores da rigidez vertical dos apoios, de modo a cobrir eventuais variações verificáveis na prática, pois basta utilizar um apoio NEOARM com dimensões diferentes ou com uma forma diferente (circular), ou pontes ou viadutos de dimensão, tipologia ou sujeitas a ações diferentes, para se alterar o valor daquela rigidez.

A título de curiosidade apresentam-se dois exemplos: se fosse utilizado um apoio NEOARM de dimensões 150 x 250 x 31 mm, com três camadas de elastómero, cada uma com uma espessura de 6 mm, a rigidez vertical aumentaria cerca de 42%, e se fosse adotado um apoio NEOARM circular de 200 x 23 mm, com duas camadas de elastómero, cada uma com uma espessura de 6 mm, a rigidez vertical quase que duplicava, como se mostra no Quadro 4.27.

Quadro 4.27 – Comparação da rigidez vertical de diferentes aparelhos de apoio

Apoio NEOARM	K_v	Desvio
[mm]	[kN/m]	[%]
150x200x31	877 192,98	/
150x250x31	1 247 291,60	42,19
φ200x23	1 712 706,28	95,25

Face a este pressuposto, foi repetido o estudo de convergência para apoios planos com uma rigidez 10x inferior e 10x superior à considerada na análise apresentada acima, de forma a verificar como variava a repartição da carga pelos apoios e o número de refinamentos da malha necessário para se atingir a convergência. De forma a não ultrapassar o limite de páginas regulamentado para este documento, só se apresentam resultados relativos à situação da carga aplicada na Posição 1, ou seja, a mais desfavorável.

Assim sendo, para $K_v = 100\ 000\ \text{kN/m}$, a convergência da solução foi obtida após um único refinamento da malha em L (malha de Delaunay de 12,5 cm em L), para elementos planos (desvios abaixo de 1%) e após três refinamentos (malha de Delaunay de 3,125 cm em L), para o caso de elementos sólidos (modelação de apenas metade da laje).

Relativamente a $K_v = 10\ 000\ 000\ \text{kN/m}$, a convergência da solução também foi obtida com apenas um refinamento da malha em L (malha de Delaunay de 12,5 cm em L), para elementos planos (desvios abaixo de 4%) e também com três refinamentos (malha de Delaunay de 3,125 cm em L), para o caso de elementos sólidos (modelo de apenas metade da laje).

Como um dos objetivos deste estudo é o de analisar a variação do valor das reações de apoio para as três situações de rigidez vertical, procurou-se comparar soluções determinadas para uma mesma malha. Posto isto, visto que para o caso de $K_v = 1\ 000\ 000\ \text{kN/m}$, foi necessário efetuar mais um refinamento no caso dos elementos planos, também para o caso de elementos planos se apresentam os resultados para uma malha de Delaunay de 6,25 cm em L.

Os Quadros 4.28 a 4.31 apresentam os valores das reações de apoio e respetivos desvios para os modelos de elementos planos (malha de Delaunay de 6,25 cm em L) e para modelos de elementos sólidos (malha de Delaunay de 3,125 cm em L), consoante a rigidez vertical dos apoios.

Quadro 4.28 – Reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos planos, com $K_v = 100\ 000\ \text{kN/m}$, para carga na Posição 1

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4			N_{Apoios} Apoio
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	
5	36,44	72,88	/	13,88	27,76	/	4,45	8,89	/	-4,76	-9,52	/	20
2,5	36,46	72,93	0,07	13,86	27,72	-0,13	4,43	8,85	-0,43	-4,75	-9,50	-0,22	63
1,25	36,48	72,96	0,04	13,85	27,70	-0,06	4,42	8,83	-0,22	-4,75	-9,49	-0,11	221
0,625	36,48	72,97	0,02	13,85	27,69	-0,03	4,41	8,82	-0,11	-4,74	-9,49	-0,05	825

Quadro 4.29 – Reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos sólidos, com $K_v = 100\ 000\ kN/m$, para carga na Posição 1

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4			N_{Apoios} Apoio
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	
5	36,16	72,32	/	14,15	28,31	/	4,72	9,45	/	-5,04	-10,08	/	20
2,5	36,19	72,37	0,07	14,14	28,28	-0,10	4,71	9,41	-0,35	-5,03	-10,06	-0,16	63
1,25	36,20	72,40	0,03	14,13	28,26	-0,06	4,70	9,40	-0,19	-5,03	-10,05	-0,09	221
0,625	36,21	72,43	0,04	14,12	28,23	-0,10	4,69	9,37	-0,24	-5,02	-10,03	-0,20	825

Quadro 4.30 – Reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos planos, com $K_v = 10\ 000\ 000\ kN/m$, para carga na Posição 1

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4			N_{Apoios} Apoio
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	
5	37,28	74,55	/	6,05	12,09	/	16,23	32,45	/	-9,55	-19,10	/	20
2,5	38,00	75,99	1,90	5,14	10,28	-17,63	16,05	32,10	-1,08	-9,19	-18,38	-3,92	63
1,25	38,44	76,89	1,16	4,59	9,19	-11,93	15,91	31,81	-0,91	-8,94	-17,89	-2,75	221
0,625	38,69	77,38	0,64	4,30	8,59	-6,91	15,81	31,62	-0,60	-8,80	-17,60	-1,65	825

Quadro 4.31 – Reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos sólidos, com $K_v = 10\ 000\ 000\ kN/m$, para carga na Posição 1

Malha [cm]	R1			R2			R3			R4			N_{Apoios} Apoio
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	
5	38,32	76,63	/	4,76	9,53	/	15,98	31,95	/	-9,05	-18,11	/	20
2,5	38,83	77,67	1,34	4,15	8,29	-14,90	15,77	31,54	-1,30	-8,75	-17,50	-3,46	63
1,25	39,20	78,40	0,93	3,72	7,44	-11,41	15,61	31,21	-1,06	-8,53	-17,05	-2,65	221
0,625	39,43	78,85	0,58	3,46	6,93	-7,45	15,48	30,96	-0,79	-8,37	-16,75	-1,82	825

Em paralelo, relacionando as três situações, Quadros 4.10, 4.28 e 4.30 para modelos de elementos planos e Quadros 4.19, 4.29 e 4.31 para modelos de elementos sólidos, conclui-se que para ambos os casos, os desvios relativos diminuem com o aumento da flexibilidade dos apoios e, regra geral, aumentam com o aumento da rigidez dos apoios, possivelmente em virtude do acréscimo dos gradientes de tensões com a rigidez dos apoios. A grande diferença perante as três situações analisadas é a repartição transversal da carga pelos apoios, que será posteriormente analisada.

Analisando os Quadros 4.32 e 4.33, que comparam as soluções com modelos de elementos planos e modelos de elementos sólidos para cada um dos casos, verifica-se que perante uma situação mais flexível, a utilização de elementos sólidos mantém-se **desnecessária**, observando-se desvios inferiores a 10%.

Perante uma solução mais rígida foi obtido um desvio de cerca de 24% na reação R2, que em termos percentuais é um valor que ainda não tinha sido obtido nos modelos com apoios planos. Porém, em termos práticos, também se pode concluir que mesmo perante uma solução mais rígida, a utilização de elementos sólidos continua a ser **desnecessária**, visto que em termos absolutos, a diferença entre as soluções é inferior a 1 kN.

Quadro 4.32 – Comparação das soluções: reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos planos e elementos sólidos, com $K_v = 100\ 000\ kN/m$, para carga na Posição 1

Modelo	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			[%]
Elem. Planos	36,48	72,97	/	13,85	27,69	/	4,41	8,82	/	-4,74	-9,49	/
Elem. Sólidos	36,21	72,43	-0,75	14,12	28,23	1,91	4,69	9,37	5,85	-5,02	-10,03	5,44

Quadro 4.33 – Comparação das soluções: reações de apoio, após convergência, para os modelos de elementos planos e elementos sólidos, com $K_v = 10\ 000\ 000\ kN/m$, para carga na Posição 1

Modelo	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			[%]
Elem. Planos	38,69	77,38	/	4,30	8,59	/	15,81	31,62	/	-8,80	-17,60	/
Elem. Sólidos	39,43	78,85	1,87	3,46	6,93	-24,05	15,48	30,96	-2,13	-8,37	-16,75	-5,08

Relativamente à repartição transversal da carga pelos apoios, os Quadros 4.34 e 4.35 apresentam as variações/desvios das reações de apoio relativas à situação de $K_v = 1\ 000\ 000\ kN/m$, respetivamente para elementos planos e elementos sólidos, para a malha mais refinada.

Os Quadros 4.34 e 4.35 permitem concluir, uma vez mais, que a utilização de modelos de elementos sólidos é **dispensável**, em virtude de os resultados obtidos com os modelos de

elementos planos e de elementos sólidos serem semelhantes, por isso a análise que se segue baseia-se unicamente no Quadro 4.34 (modelo de elementos planos).

Quadro 4.34 – Repartição transversal da carga pelos apoios, para os modelos de elementos planos, para carga na Posição 1

K_v [kN/m]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
100 000	36,48	72,97	-12,68	13,85	27,69	265,20	4,41	8,82%	-47,90	-4,74	-9,49	17,34
1 000 000	41,78	83,57	/	3,79	7,58	/	8,47	16,94%	/	-4,04	-8,09	/
10 000 000	38,69	77,38	-7,40	4,30	8,59	13,31	15,81	31,62%	86,71	-8,80	-17,60	117,62

Quadro 4.35 – Repartição transversal da carga pelos apoios, para os modelos de elementos sólidos, para carga na Posição 1

K_v [kN/m]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]	[kN]	[%]	Desvio [%]
100 000	36,21	72,43	-12,55	14,12	28,23	235,92	4,69	9,37	-46,61	-5,02	-10,03	14,32
1 000 000	41,41	82,82	/	4,20	8,40	/	8,78	17,55	/	-4,39	-8,78	/
10 000 000	39,43	78,85	-4,78	3,46	6,93	-17,59	15,48	30,96	76,39	-8,37	-16,75	90,81

Assim sendo, adotando uma rigidez 10x inferior, observa-se uma diminuição das reações de apoio R1 e R3, devendo-se evidenciar o facto de R3 diminuir para aproximadamente metade do valor original. Em contrapartida, nos apoios A2 e A4 o valor das reações sofre um aumento significativo, sendo que R2 aumenta de forma impressionante (265%), passando este apoio a suportar cerca de 30% da carga, em vez de 8% (aproximadamente).

Quando se considera uma rigidez 10x superior, também se observam algumas alterações, sobretudo nos apoios mais distantes transversalmente à posição da carga (A3 e A4). Estes dois apoios sofrem um acréscimo substancial, 87% em R3 e 118% em R4, aliviando assim os apoios mais próximos da carga, que, em contrapeso, sofrem uma diminuição da carga suportada. Ou seja, o acréscimo da rigidez dos apoios diminui a eficácia de transmissão lateral de cargas do tabuleiro.

Dos Quadros 4.34 e 4.35 verifica-se também que os desvios relativos entre as três soluções, quando se modela com elementos sólidos, são, regra geral, inferiores aos desvios relativos aquando a modelação com elementos planos.

Nas Figuras 4.15 e 4.16 comparam-se as três soluções, observando-se a oscilação do valor das reações de apoio provocada pela alteração da rigidez vertical. É de realçar que a variação do valor da reação com a rigidez dos apoios não é monótona em todos os apoios. Por exemplo, R1 aumenta inicialmente quando se aumenta a rigidez dos apoios, mas depois reduz-se quando a rigidez continua a aumentar, indiciando a presença de pelo menos dois mecanismos resistentes concorrentes.

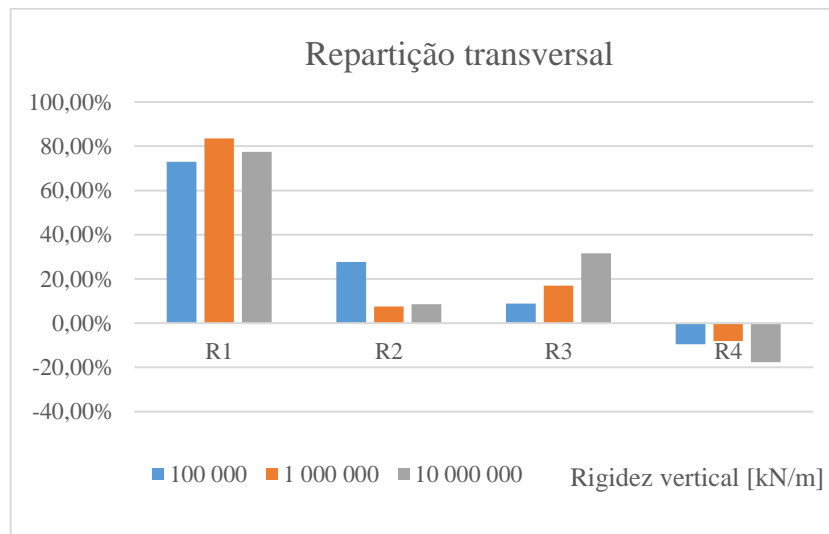


Figura 4.15 – Comparação da repartição transversal da carga pelos apoios consoante a rigidez vertical, para os modelos de elementos planos, para carga na Posição 1

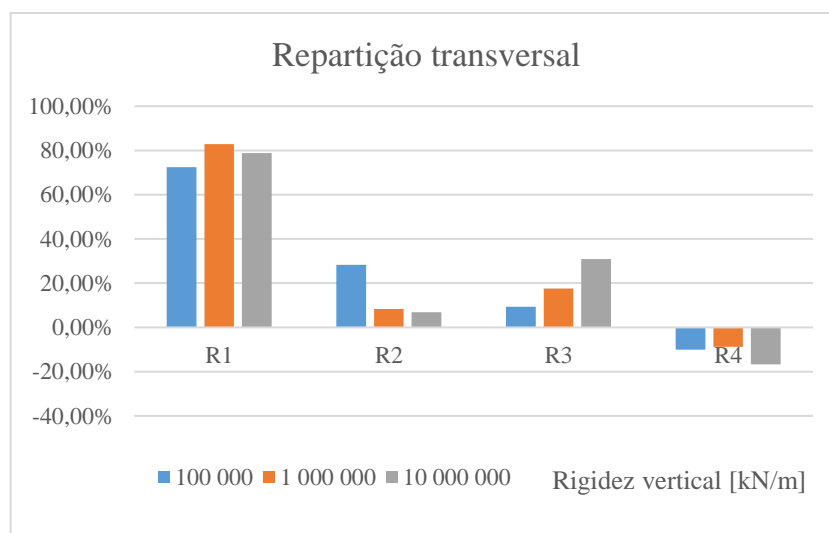


Figura 4.16 – Comparação da repartição transversal da carga pelos apoios consoante a rigidez vertical, para os modelos de elementos sólidos, para carga na Posição 1

5. MODELOS NUMÉRICOS COM APOIOS PONTUAIS ELÁSTICOS

Nos modelos com apoios pontuais anteriormente analisados estes apoios eram rígidos, o que impede que se proceda à comparação dos resultados então obtidos com os resultados agora obtidos para apoios planos, que apresentam rigidez vertical finita. Verificou-se, pois, ser necessário criar novos modelos com apoios pontuais com rigidez vertical finita, para permitir a realização de tal comparação.

Assim sendo, foram criados modelos de elementos planos e modelos de elementos sólidos, agora com apoios pontuais flexíveis, para a carga na Posição 1, com os três valores de rigidez vertical anteriormente estabelecidos para os apoios, de forma a analisar como varia a repartição da carga pelos apoios, verificar se diferem os resultados entre os modelos com elementos planos e os modelos com elementos sólidos e, seguidamente, comparar os resultados obtidos com modelos de apoios pontuais e de apoios planos.

Para ambos os casos, foram adotados os modelos (malhas) que proporcionaram uma melhor solução na modelação dos apoios pontuais com rigidez infinita, ver secção 3.2.3, (i) malha de Delaunay com $H_0 = 0,097\ 656\ 3$ cm, de elementos planos “quadrangulares” com $Q = 1,20$ para o modelo com elementos planos (Figura 3.11) e (ii) malha de Delaunay com $H_0 = 0,097\ 656\ 3$ cm, de elementos de base “quadrangular”, com $Q = 1,10$ para o modelo com elementos sólidos (Figura 3.12), sendo que a única alteração se traduzirá na rigidez vertical.

De realçar que foi sempre efetuado um modelo com malha de Delaunay com $H_0 = 0,195\ 312\ 5$ cm, por forma a verificar a convergência da solução para as malhas adotadas, o que ocorreu para todos os casos, independentemente da rigidez vertical.

O Quadro 5.1 apresenta a repartição transversal da carga pelos apoios e as variações/desvios das reações de apoio relativas à situação de $K_v = 1\ 000\ 000\ kN/m$ para modelos com elementos planos, ver também Figura 5.1.

Do Quadro 5.1 conclui-se que na modelação com apoios pontuais, a rigidez vertical continua a ter grande importância na repartição transversal da carga, existindo grandes variações tanto quando se reduz a rigidez dos apoios como quando se aumenta a mesma, como mostra a Figura 5.1. Porém, esta figura revela uma tendência monótona da variação do valor da reação em cada apoio com a rigidez dos mesmos, exceto no apoio R4.

Quadro 5.1 – Apoios pontuais elásticos: repartição transversal da carga pelos apoios, para os modelos de elementos planos, para carga na Posição 1

K_v [kN/m]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			
100 000	36,60	73,20	-14,43	13,77	27,54	318,54	4,32	8,64	-36,38	-4,69	-9,38	65,14
1 000 000	42,77	85,54	/	3,29	6,58	/	6,79	13,58	/	-2,84	-5,68	/
10 000 000	45,15	90,30	5,56	-1,90	-3,80	-157,75	10,01	20,02	47,42	-3,27	-6,54	15,14

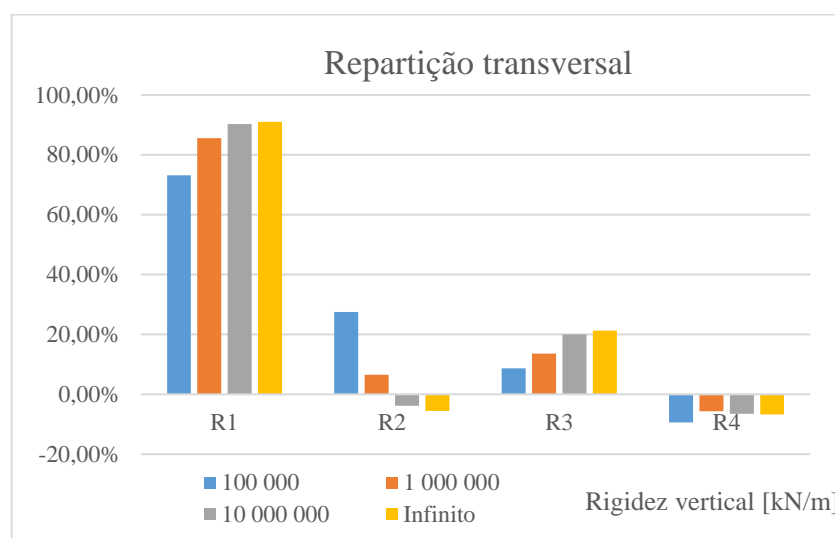


Figura 5.1 – Apoios pontuais: comparação da repartição transversal da carga pelos apoios consoante a rigidez vertical, para os modelos de elementos planos, para carga na Posição 1

Comparando os Quadros 4.34 e 5.1 verifica-se que quando maior a flexibilidade dos apoios maior é a aproximação da solução entre apoios pontuais e apoios planos, porém, para apoios mais rígidos, as reações de apoios já se alteram substancialmente, ver Quadros 5.2 a 5.4.

Quadro 5.2 – Comparação das soluções entre modelos de elementos planos com apoios planos e pontuais elásticos, com $K_v = 100\ 000\ kN/m$, para carga na Posição 1

Apoios	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			
Planos	36,48	72,97	/	13,85	27,69	/	4,41	8,82	/	-4,74	-9,49	/
Pontuais	36,60	73,20	0,32	13,77	27,54	-0,56	4,32	8,64	-2,09	-4,69	-9,38	-1,13

Quadro 5.3 – Comparação das soluções entre modelos de elementos planos com apoios planos e pontuais elásticos, com $K_v = 1\,000\,000\text{ kN/m}$, para carga na Posição 1

Apoios	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			
Planos	41,78	83,57	/	3,79	7,58	/	8,47	16,94	/	-4,04	-8,09	/
Pontuais	42,77	85,54	2,36	3,29	6,58	-13,23	6,79	13,58	-19,82	-2,84	-5,68	-29,75

Quadro 5.4 – Comparação das soluções entre modelos de elementos planos com apoios planos e pontuais elásticos, com $K_v = 10\,000\,000\text{ kN/m}$, para carga na Posição 1

Apoios	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			
Planos	38,69	77,38	/	4,30	8,59	/	15,81	31,62	/	-8,80	-17,60	/
Pontuais	45,15	90,30	16,70	-1,90	-3,80	-144,23	10,01	20,02	-36,69	-3,27	-6,54	-62,83

Os Quadros 5.2 a 5.4 permitem verificar que embora para $K_v = 100\,000\text{ kN/m}$, os desvios entre ambas as soluções sejam desprezáveis, à medida que a rigidez vertical dos apoios aumenta, aumenta o desvio entre as duas soluções, evidenciando que no modelo com apoios mais rígidos, com apoios pontuais, o apoio A2 volta a apresentar reação negativa (como já se verificara com rigidez infinita), ou seja, uma diminuição de 144% no valor da reação de apoio. Verifica-se também que para todos os casos, com o aumento da rigidez vertical, R1 tende a aumentar e R2, R3 e R4 tendem a diminuir.

Relativamente aos modelos de elementos sólidos, o Quadro 5.5 apresenta a repartição transversal da carga pelos apoios e as variações/desvios das reações de apoio relativas à situação de $K_v = 1\,000\,000\text{ kN/m}$, ver também Figura 5.2.

Quadro 5.5 – Apoios pontuais elásticos: repartição transversal da carga pelos apoios, para os modelos de elementos sólidos, para carga na Posição 1

K_v [kN/m]	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			
100 000	35,34	70,68	-7,58	15,28	30,56	43,47	5,09	10,18	-9,75	-5,71	-11,42	26,05
1 000 000	38,24	76,48	/	10,65	21,30	/	5,64	11,28	/	-4,53	-9,06	/
10 000 000	38,94	77,88	1,83	9,40	18,80	-11,74	6,04	12,08	7,09	-4,38	-8,76	-3,31

Analisando o Quadro 5.5 verifica-se que na modelação com elementos sólidos, os desvios relativos são menos significativos quando comparados com os desvios dos elementos planos. Neste caso, para apoios mais rígidos, os desvios até são muito reduzidos (maioritariamente inferiores a 10%), havendo um maior desequilíbrio para apoios mais flexíveis. A Figura 5.2 revela uma repartição transversal da carga pelos apoios quase linear, sem a oscilação observada nos modelos de elementos planos com apoios pontuais.

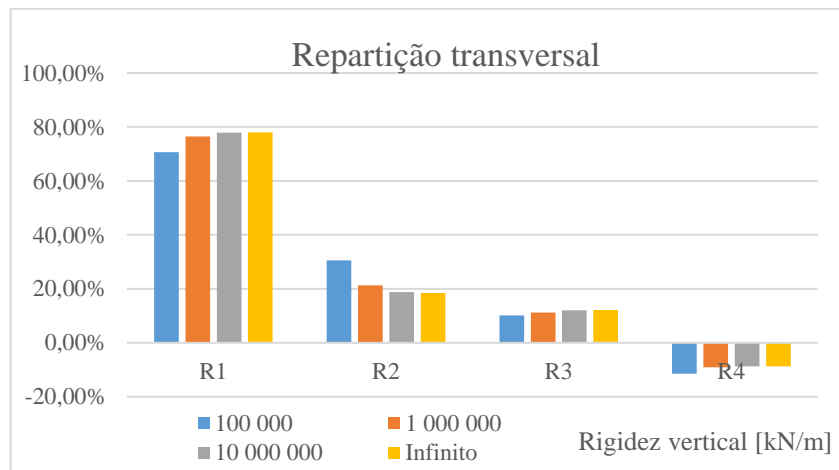


Figura 5.2 – Apoios pontuais: comparação da repartição transversal da carga pelos apoios consoante a rigidez vertical, para os modelos de elementos sólidos, para carga na Posição 1

Comparando as Figuras 5.1 e 5.2 é possível voltar a concluir que no que respeita à redistribuição transversal de forças, que constituía o objetivo da investigação de Fernandes (2017), o modelo de elementos planos nem sempre permite chegar a uma solução semelhante à determinada com o modelo de elementos sólidos. Relacionando os Quadros 4.35 e 5.5 verifica-se que quando maior a flexibilidade, maior é a aproximação da solução entre apoios pontuais e apoios planos, como já se observara para modelos de elementos planos, mantendo-se também a tendência de, para apoios mais rígidos, as reações de apoios já variarem significativamente, ver Quadros 5.6 a 5.8.

Quadro 5.6 – Comparação das soluções entre modelos de elementos sólidos com apoios planos e pontuais elásticos, com $K_v = 100\ 000\ kN/m$, para carga na Posição 1

Apoios	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			
Planos	36,21	72,43	/	14,12	28,23	/	4,69	9,37	/	-5,02	-10,03	/
Pontuais	35,34	70,68	-2,41	15,28	30,56	8,24	5,09	10,18	8,61	-5,71	-11,42	13,82

Quadro 5.7 – Comparação das soluções entre modelos de elementos sólidos com apoios planos e pontuais elásticos, com $K_v = 1\,000\,000\text{ kN/m}$, para carga na Posição 1

Apoios	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			
Planos	41,41	82,82	/	4,20	8,40	/	8,78	17,55	/	-4,39	-8,78	/
Pontuais	38,24	76,48	-7,65	10,65	21,30	153,42	5,64	11,28	-35,74	-4,53	-9,06	3,23

Quadro 5.8 – Comparação das soluções entre modelos de elementos sólidos com apoios planos e pontuais elásticos, com $K_v = 10\,000\,000\text{ kN/m}$, para carga na Posição 1

Apoios	R1			R2			R3			R4		
	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio	[kN]	[%]	Desvio
			[%]			[%]			[%]			
Planos	39,43	78,85	/	3,46	6,93	/	15,48	30,96	/	-8,37	-16,75	/
Pontuais	38,94	77,88	-1,24	9,40	18,80	171,43	6,04	12,08	-60,99	-4,38	-8,76	-47,69

Analisando os Quadros 5.6 a 5.8 verifica-se, novamente, que para $K_v = 100\,000\text{ kN/m}$, os desvios entre as duas soluções são desprezáveis, e que à medida que a rigidez vertical dos apoios aumenta, o aumento dos desvios entre as duas soluções permanece. O apoio A2 é sempre o mais crítico, dispondo sempre de desvios superiores a 150% para os outros casos de rigidez vertical. Todavia, com elementos sólidos, constata-se que a tendência para uma reação aumentar ou diminuir já não depende da rigidez vertical, sobretudo em R3 e R4 onde se observam oscilações. Porém, nos apoios mais próximos da carga, A1 e A2 a tendência mantém-se, com o aumento da rigidez vertical, R1 tende a diminuir e R2 tende a aumentar.

Assim sendo, é possível concluir que ao contrário do que se observou com apoios planos, se se optar por um modelo simplificado, utilizando apoios pontuais, deve-se adotar um modelo de elementos sólidos, pois os resultados obtidos com um modelo de elementos planos são bastante diferentes, e, portanto, não merecem confiança.

6. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

6.1. Conclusões

Listam-se em seguida as principais conclusões alcançadas, e justificadas neste trabalho:

1. O principal objetivo da presente dissertação consistiu na comparação dos modelos e das soluções para elementos finitos planos e para elementos finitos sólidos, particularmente para o caso da ação de uma carga pontual. Assim sendo, perante uma laje de comportamento elástico linear, modelada com apoios pontuais, e no que respeita à distribuição transversal de forças, que era o objetivo da investigação de Fernandes (2017), conclui-se que no modelo de elementos sólidos a distribuição lateral de forças revela ser um pouco mais eficaz do que o modelo de elementos planos deixaria supor – em termos práticos, do projeto, pode pois afirmar-se que a solução baseada no modelo de elementos finitos planos de laje é conservadora.
2. Relativamente ao tipo de malha adotado para problemas deste tipo, conclui-se que é recomendável a adoção de malhas do tipo Delaunay de elementos “quadrangulares” com recurso a emissores, que é uma malha não uniforme cujo refinamento tende a aproximar o gradiente estimado para os deslocamentos, permitindo reduzir o número total de elementos finitos e, dessa forma, o esforço de cálculo computacional. A opção por elementos “quadrangulares” ou de base “quadrangular” não só origina um menor esforço de cálculo, como também, dispõe de soluções mais estáveis que a malha de Delaunay de elementos triangulares ou de base triangular, os quais, tendem a convergir para os valores determinados com as malhas de elementos de base “quadrangular”.
3. Em relação à modelação com o programa de cálculo automático SAP2000, conclui-se que é aconselhável a utilização do elemento *shell-thick*, ou seja, a solução baseia-se na teoria das lajes moderadamente espessas (Reissner-Mindlin), a qual parece dar resultado mais rigorosos nas estruturas habituais de engenharia civil, porque não ignora a parcela de deformação de corte, o que, para o tipo de espessuras usuais em lajes de betão armado, como já foi referido, o grau de aproximação determinado pela teoria de Reissner-Mindlin é naturalmente superior ao da teoria de Kirchhoff. (Note-se que a laje analisada, embora utilize um material elástico linear, tem as dimensões de uma laje de betão armado, e as suas características elásticas são as de um betão com comportamento

-
- à tração igual ao de compressão, e sem o amaciamento característico do betão, ou seja, com uma rigidez constante.)
4. No que diz respeito à modelação de lajes com apoios planos, conclui-se que o modelo de elementos sólidos é dispensável, pois, com um modelo de elementos sólidos obtiveram-se desvios inferiores a 10%, comparativamente aos modelos de elementos planos, e um número de elementos finitos aproximadamente sete vezes superior, assim como um tempo de cálculo aproximadamente vinte vezes superior.
 5. Relativamente à variação da rigidez vertical dos apoios: tanto para modelos de elementos planos como para modelos de elementos sólidos os desvios relativos à solução mais realista, $K_v = 1\,000\,000\text{ kN/m}$, diminuem com o aumento da flexibilidade dos apoios e, regra geral, aumentam com o aumento da rigidez dos apoios, possivelmente em virtude do acréscimo dos gradientes de tensões na vizinhança dos apoios com a rigidez dos apoios. Porém, a grande diferença perante as três situações analisadas é a repartição transversal da carga pelos apoios.
 6. A consideração de flexibilidade, na modelação dos apoios pontuais permitiu concluir que a flexibilidade dos apoios continua a ter grande importância na repartição transversal da carga, existindo grandes variações quando se varia a rigidez vertical dos apoios. Todavia, verifica-se que na modelação com elementos sólidos, quando se varia a rigidez dos apoios, os desvios relativos do valor da reação, são menos significativos quando comparados com os desvios dos elementos planos, ver Quadro 5.5 e Figura 5.2. Assim, no que respeita à distribuição transversal de forças, que constituiu o objetivo da investigação de Fernandes (2017), o modelo de elementos planos nem sempre permite chegar a uma solução adequada, ou seja, suficientemente próxima da determinada com o modelo de elementos sólidos.
 7. Por comparação entre modelos com apoios planos e modelos com apoios pontuais conclui-se que quanto maior a flexibilidade dos apoios maior é a aproximação entre as soluções para apoios planos e apoios pontuais, ver Quadros 5.2 e 5.6; porém, para apoios mais rígidos, as reações de apoio entre modelos com apoios planos e apoios pontuais já se alteram substancialmente, ver Quadros 5.4 e 5.8.
 8. Ao contrário do que se observou com os modelos de apoios planos, conclui-se que se se optar por um modelo simplificado, aplicando apoios pontuais, deve-se adotar um modelo de elementos sólidos, visto que os resultados obtidos com um modelo de elementos planos são bastante diferentes dos obtidos com o modelo de elementos sólidos, e, portanto, não são dignos de confiança.
-

6.2. Trabalhos Futuros

Tendo em conta o objetivo desta dissertação, que tem por base a comparação dos modelos e das soluções para elementos planos e para elementos sólidos, particularmente quando sujeitas à ação de uma carga pontual, sugere-se que se efetue o mesmo estudo, aplicando o procedimento estabelecido no capítulo 3, para uma laje com um maior número de apoios nas extremidades, correspondendo a uma situação com maior número de vigas – note-se que uma solução típica das lajes mistas madeira betão, as vigas/longarinas, ou troncos, justapostas transversalmente, parecem formar uma laje de madeira (Rodrigues, 2014) –, de forma a avaliar e comparar as soluções entre elementos planos e elementos sólidos.

Uma segunda sugestão consiste na modelação do tabuleiro misto estudado por Fernandes (2017) com o mesmo número de apoios ao apresentado na presente dissertação, ou seja, 8 apoios e comparar os modelos e as soluções para elementos planos e para elementos sólidos.

Na presente dissertação, quando se modelam apoios considerando a área de contacto efetiva (apoios planos), estes são simulados por elementos pontuais, ou seja, molas. Outra solução, pouco usual (Shu *et al.*, 2017), é a modelação dos apoios com elementos sólidos, de modo a simular os apoios elastoméricos ou de outros tipos.

Por fim, sugere-se que se efetue a modelação e análise da laje de betão armado considerando o comportamento materialmente não linear do betão e do aço.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnold, D. N., Madureira, A. L. e Zhang, S. (2002). “On the Range of Applicability of the Reissner-Mindlin and Kirchhoff - Love Plate Bending Models”. *Journal of Elasticity*, Vol. 67, pp. 171-185.

Bathe, K. J., Dvorkin, E. e Ho, L. W. (1983). “Our Discrete-Kirchhoff and Isoparametric Shell Elements for Nonlinear Analysis - An Assessment”. *Computers & Structures*, Vol. 16, pp. 89-98.

CEN (2003). “Eurocode 1 Part 2: Traffic loads on bridges”. Comité Europeu para a Normalização, Bruxelas, Bélgica.

CEN (2005). “EN 1337-3, Structural Bearings – Part 3: Elastomeric Bearings”. Comité Europeu para a Normalização, Bruxelas, Bélgica.

Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E. e Witt, R. J. (2001) “Concepts and Applications of Finite Element Analysis”. 4ª Edição. Wiley.

Dias da Silva, V. (2013). “Mecânica e Resistência dos Materiais”. 4ª Edição. Zauri, Coimbra.

Fercanorte@ (2014). <http://www.fercanorte.com.pt>. Fercanorte.

Fernandes, P. (2017). “Análise da distribuição transversal de cargas concentradas em tabuleiros de pontes mistos madeira-betão”. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra, Coimbra.

FIP Industriale (2012). “Neoarm Bearings”. FIP Industriale, Itália

George, P. L. e Frey, P. J. (2010). “Mesh Generation: Application to finite elements”. 2ª Edição, Wiley.

Guerreiro, L. (2003). “Comportamento de Blocos de Elastómero (Borrachas)”. DECivil IST, Lisboa.

Katili, I. (1993). “A New Discrete Kirchhoff-Mindlin Element Based on Mindlin-Reissner Plate Theory and Assumed Shear Strain Fields – Part II: An Extended DKQ Element for Thick-Plate Bending Analysis”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 1885-1908.

Knowledge.autodesk@ (2015). <https://knowledge.autodesk.com/>. Autodesk Knowledge Network.

Leitão, V. M. A. e Castro, L. M. S. S. (2014). “Apontamentos sobre Análise de Lajes”. *Análise de estruturas I*, Grupo de Análise de Estruturas do Departamento de Engenharia Civil, Arquitetura e Georrecursos do IST, Lisboa.

Pacoste, C., Plos, M. e Johansson, M. (2012). “Recommendations for Finite Element Analysis for the Design of Concrete Slabs”. KTH, Estocolmo, Suécia.

Providência, P., Costa, R. e Andrade, A. (2014). “Apontamentos de Apoio à Disciplina de PAC”. Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra, Coimbra.

Providência, P. e Andrade, A. (2015). “Apontamentos de Teoria das Estruturas”. Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra, Coimbra.

Rodrigues, J. N. (2014). “Pontes com Estrutura Mista Madeira-Betão e o seu Potencial de Aplicação”. Tese de Doutoramento, Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra, Coimbra.

Rombach, G. A. (2004). “Finite Element Design of Concrete Structures”. Thomas Telford, Londres.

Shewchuk, J. R. (2012). “Lecture Notes on Delaunay Mesh Generation”. Department of Electrical Engineering and Computer Sciences University of California at Berkeley, Berkeley.

Shu, J., Belletti, B., Muttoni, A., Scolari, M. e Plos, M. (2017). “Internal Force Distribution in RC Slabs Subjected to Punching Shear”. *Engineering Structures*, Vol. 153, pp. 766-781.