



Ana Paula Alves Lisboa

# INFLUÊNCIA DA FLEXIBILIDADE DAS LIGAÇÕES VIGA-PILAR NOS COMPRIMENTOS EFETIVOS DE PILARES EM PÓRTICOS REGULARES DE BETÃO ARMADO

INFLUENCE OF THE FLEXIBILITY OF BEAM-COLUMN JOINTS IN THE EFFECTIVE  
LENGTHS OF COLUMNS IN REGULAR FRAMES OF REINFORCED CONCRETE

Dissertação de Mestrado Integrado em Engenharia Civil, na área de Especialização em Estruturas,  
orientada pelo Professor Doutor Anísio Alberto Martinho de Andrade e pelo Professor Doutor Ricardo Joel Teixeira Costa

Coimbra, 4 de Maio de 2018



UNIVERSIDADE DE COIMBRA



**FCTUC** DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Ana Paula Alves Lisboa

# **INFLUÊNCIA DA FLEXIBILIDADE DAS LIGAÇÕES VIGA-PILAR NOS COMPRIMENTOS EFETIVOS DE PILARES EM PÓRTICOS REGULARES DE BETÃO ARMADO**

## **INFLUENCE OF THE FLEXIBILITY OF BEAM-COLUMN JOINTS IN THE EFFECTIVE LENGTHS OF COLUMNS IN REGULAR FRAMES OF REINFORCED CONCRETE**

Dissertação de Mestrado Integrado em Engenharia Civil, na área de Especialização em Estruturas,  
orientada pelo Professor Doutor Anísio Alberto Martinho de Andrade e pelo Professor Doutor Ricardo Joel Teixeira Costa

Esta Dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor.  
O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer  
responsabilidade, legal ou outra, em relação a erros ou omissões  
que possa conter.

Coimbra, 4 de Maio de 2018

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu orientador, Professor Doutor Anísio Alberto Martinho de Andrade, pela orientação, apoio e disponibilidade ao longo deste percurso.

Ao meu orientador Professor Doutor Ricardo Joel Teixeira Costa, pela disponibilidade.

À Rita Andrade, por todos os momentos partilhados desde o primeiro dia deste percurso académico, pela amizade e companheirismo.

À Ana Sofia Almeida, pela amizade e por me acompanhar durante a realização deste processo e em todas as batalhas finais na conclusão do curso, sem dúvida, que tornou a caminhada mais leve e divertida.

À minha prima Flávia, por todo o apoio e amizade desde sempre.

À minha mãe, Isabel, por todo o apoio ao longo deste percurso e ao longo da vida, por todo o esforço e confiança que depositou em mim. Por me incentivar a ser e a dar sempre o melhor de mim e por ser a melhor mãe do mundo.

À minha restante família e amigos, muito obrigada.

## RESUMO

Na modelação de estruturas porticadas de betão armado, é prática corrente assumir que as ligações viga-pilar possuem uma resistência superior à dos elementos adjacentes e se comportam como rígidas. No entanto, estudos recentes mostram que as ligações viga-pilar apresentam em alguns casos uma capacidade resistente inferior à das peças lineares adjacentes e são normalmente responsáveis por uma parcela significativa da deformabilidade das estruturas.

Esta dissertação tem como objetivo fundamental avaliar a influência da flexibilidade das ligações viga-pilar nos comprimentos efetivos de encurvadura de pilares em pórticos regulares de betão armado. Consideram-se apenas pórticos planos e ligações viga-pilar interiores. O estudo, realizado em regime materialmente linear, incide sobre duas subestruturas arquétipo, constituídas por um número reduzido de barras – uma representativa de pórticos contraventados (nos quais o modo crítico de instabilidade não envolve deslocamentos laterais dos nós) e a outra representativa de pórticos não contraventados (cujo modo crítico de instabilidade envolve deslocamentos laterais dos nós). Nestas subestruturas arquétipo, a deformabilidade das ligações viga-pilar é representada por intermédio de elementos pontuais com rigidez rotacional finita (“molas rotacionais”) colocados nas extremidades das vigas, junto à sua intersecção com o eixo do pilar. Este tipo de modelação permite ter em conta, de uma forma simples, o escorregamento da armadura longitudinal da(s) viga(s) adjacentes no interior da ligação.

A utilização de subestruturas arquétipo permite que, com a variação de um número restrito de parâmetros, sejam retiradas conclusões relativas a uma gama bastante alargada de estruturas porticadas regulares.

**Palavras-chave:** Ligações viga-pilar; Pórticos de betão armado; Pórticos contraventados; Pórticos não contraventados; Comprimento efetivo de encurvadura

## ABSTRACT

In the modelling of reinforced concrete frames, it is common practice to assume that the strength of beam-column joints is superior to that of all adjacent members and that they behave rigidly. However, recent studies have shown that beam-column joints may exhibit a lower strength than adjacent members and are responsible for a significant portion of the deformability of the overall structure.

The main goal of this dissertation is to assess the influence of beam-column joint flexibility on the effective buckling lengths of columns in regular reinforced concrete frames. The study is restricted to planar frames with linear material behaviour and interior beam-column joints. It concerns two archetypal substructures, one representative of braced frames (in which the critical buckling mode involves no lateral displacements of the nodes) and the other representative of unbraced frames (whose critical buckling mode involves lateral displacements of the nodes). In these archetypal substructures, the deformation of the beam-column joints is represented by point elements with finite rotational stiffness ("rotational springs") placed at the ends of the beams, at its intersection with the axis of the column. This modelling approach makes it possible to account, in a simple way, for the slip of the longitudinal reinforcement of the adjacent beam(s) within the connection.

The use of archetypal substructures allows, with the variation of a limited number of parameters, conclusions to be drawn regarding a fairly broad range of regular planar frames.

**Keywords:** Beam-column joints; Reinforced concrete frames; Braced frames; Unbraced frames; Effective buckling lengths

## ÍNDICE

AGRADECIMENTOS.....	i
RESUMO.....	ii
ABSTRACT.....	iii
ÍNDICE.....	iv
SIMBOLOGIA.....	vi
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Enquadramento geral.....	1
1.2 Objetivos e âmbito da dissertação.....	5
1.3 Organização da dissertação.....	6
2 ELEMENTOS FINITOS PARA A ANÁLISE LINEAR DE ESTABILIDADE DE PÓRTICOS PLANOS LINEARMENTE ELÁSTICOS.....	8
2.1 Equação diferencial de uma peça linear prismática em compressão uniforme. Energia potencial total.....	8
2.2 Elemento finito com quatro deslocamentos nodais independentes.....	10
2.3 Elementos finitos com deslocamentos nodais dependentes .....	16
2.3.1 Elemento finito em que o deslocamento transversal de um dos nós é dependente.....	16
2.3.2 Elemento finito em que a rotação de um dos nós é dependente .....	18
3 INFLUÊNCIA DA FLEXIBILIDADE DAS LIGAÇÕES VIGA-PILAR NO COMPRIMENTO EFECTIVO DE PILARES – ESTUDO PARAMÉTRICO.....	21
3.1 Pórticos planos regulares, totalmente contraventados e não contraventados. Subestruturas arquétipo .....	21
3.2 Subestrutura arquétipo totalmente contraventada .....	24
3.2.1 Matriz de rigidez e equação característica.....	24
3.2.2 Estudo paramétrico.....	27
3.3 Subestrutura arquétipo não contraventada.....	34
3.3.1 Matriz de rigidez e equação característica.....	34

---

3.3.2 Estudo paramétrico.....	41
4 CONCLUSÃO.....	46
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	48

## SIMBOLOGIA

### Letras maiúsculas latinas

- $A_1, A_2, A_3, A_4$  - Constantes  
 $B_1, B_2, B_3, B_4$  - Constantes  
 $C_1, C_2, C_3, C_4$  - Constantes  
 $D_1, D_2, D_3, D_4$  - Constantes  
 $EI$  - Rigidez de flexão da secção transversal  
 $K_g^{(e)}$  - Matriz de rigidez geométrica  
 $K_m^{(e)}$  - Matriz de rigidez material (elástica)  
 $L$  - Comprimento de elemento  
 $L_b$  - Comprimento da viga  
 $L_c$  - Comprimento do pilar  
 $M$  - Distribuição de momentos fletores  
 $P$  - Força de compressão uniforme no pilar  
 $P_{cr}$  - Menor carga de bifurcação de um pilar; carga crítica  
 $P_E$  - Carga crítica de Euler  
 $Q$  - Distribuição de esforços de corte

### Letras minúsculas latinas

- $d_i^{(e)}$  - Deslocamentos nodais elementares  
 $k_1$  - Relação entre a rigidez das vigas  
 $k_2$  - Relação entre a rigidez das molas  
 $l_e$  - Comprimento de encurvadura do pilar  
 $s$  - Rigidez da mola rotacional  
 $w$  - Deslocamento transversal do eixo da peça  
 $x, z$  - Sistema de eixos Cartesiano

### Letras minúsculas gregas

- $\beta_{cr}$  - Parâmetro de carga crítica  
 $\phi_i$  - Funções de estabilidade de Livesley  
 $\rho$  - Razão entre a rigidez do pilar e da viga  
 $\sigma$  - parâmetro adimensional que relaciona a rigidez da mola do lado direito com a rigidez da viga do lado direito  
 $\psi_i$  - Função de forma do tipo  $i$



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Enquadramento geral

É prática corrente assumir na modelação de estruturas porticadas de betão armado que as ligações ente vigas e pilares têm uma resistência superior à dos elementos adjacentes e se comportam como rígidas<sup>1</sup>. No entanto, estudos levados a cabo nas últimas décadas (Paulay e Priestley, 1992, Kim *et al.*, 2009, Costa *et al.*, 2013, Costa *et al.*, 2017) mostram que as ligações viga-pilar apresentam em alguns casos uma capacidade resistente inferior à das peças lineares adjacentes e são normalmente responsáveis por uma parcela significativa da flexibilidade lateral das estruturas. Por este motivo, os documentos normativos mais recentes relativos ao projeto de estruturas, não só de betão armado como de outros materiais, requerem a verificação explícita da capacidade resistente destas ligações e a consideração da sua flexibilidade na análise (*e.g.*, ASCE/SEI 41-06, 2007, NP EN 1992-1-1, 2010, NP EN 1993-1-1, 2010, NP EN 1993-1-8, 2010, NP EN 1998-1, 2010, NP EN 1998-3, 2017).

Um aspeto que não tem merecido muita atenção por parte da comunidade científica é o efeito da flexibilidade das ligações viga-pilar na definição dos comprimentos efetivos (ou de encurvadura) usados para avaliar a redução da capacidade de carga dos elementos comprimidos devido à encurvadura por flexão (varejamento).

O comprimento de encurvadura de um pilar prismático isolado é definido como o comprimento de um pilar simplesmente apoiado, com a mesma secção, cuja carga crítica elástica é igual à do pilar considerado (Reis e Camotim, 2001). Fisicamente, o comprimento de encurvadura de um pilar corresponde à distância entre dois pontos de inflexão consecutivos do modo crítico de instabilidade (eventualmente “prolongado”). A título ilustrativo, apresentam-se na Figura 1.1

---

<sup>1</sup> No âmbito desta dissertação, chama-se ligação viga-pilar ao troço de pilar compreendido na altura da viga com secção transversal mais alta que intersecta o pilar na região em causa (ACI 352R-02, 2002).

---

alguns exemplos de comprimentos de encurvadura de pilares isolados com diferentes condições de apoio.

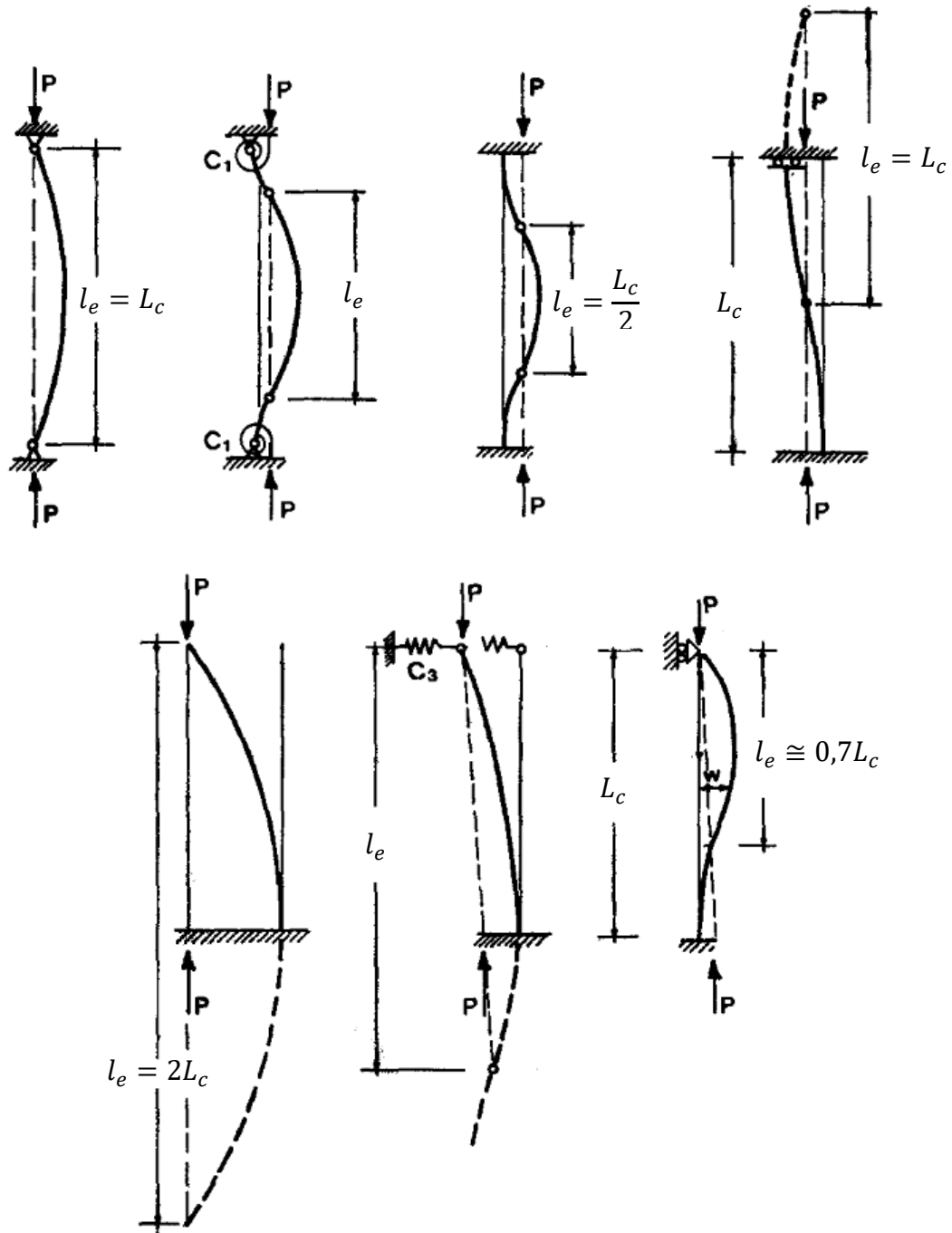


Figura 1.1 – Comprimentos de encurvadura de pilares isolados com diferentes condições de apoio (Bazant e Cedolin, 1991)

O conceito de comprimento de encurvadura pode ser alargado aos pilares integrados em pórticos. É então definido como o comprimento de um pilar simplesmente apoiado, com a mesma secção, que instabilizaria em simultâneo com o pórtico, sujeito a um dado carregamento proporcional (Reis e Camotim, 2001)<sup>2</sup>. Assim, se  $\lambda_{cr}$  é o valor do parâmetro de carga crítica do pórtico, o comprimento de encurvadura de uma coluna  $i$  (com rigidez de flexão  $EI_i$ ) é dado por

$$(l_e)_i = \pi \sqrt{\frac{EI_i}{N_i(\lambda_{cr})}}, \quad (1)$$

onde  $N_i(\lambda_{cr})$  representa o esforço de compressão nesse pilar quando o pórtico instabiliza. Corresponde ainda, no modo de instabilidade crítico do pórtico, à distância entre dois pontos de inflexão consecutivos do pilar considerado (eventualmente “prolongado”).

Decorre da definição anterior que, em rigor, a determinação dos comprimentos de encurvadura dos pilares de um pórtico requer o cálculo prévio do parâmetro de carga crítica do pórtico. No entanto, quando os pórticos são regulares, tanto ao nível geométrico como das propriedades mecânicas e do carregamento, o seu comportamento estrutural exhibe uma regularidade semelhante (Kollár, 1999). Este facto permite que o estudo, ainda que aproximado, da estabilidade de um pilar integrado num pórtico regular seja realizado sobre uma subestrutura representativa – subestrutura arquétipo –, constituída por um número reduzido de barras e com condições de fronteira que induzem um comportamento idêntico ao que seria induzido pela parte da estrutura não modelada (neste caso, um modo crítico de instabilidade). Variando um conjunto reduzido de características desta subestrutura arquétipo é possível obter conclusões relativas a uma gama bastante alargada de estruturas porticadas regulares. Será esta a abordagem adotada na presente dissertação, como aliás tem sido habitual no estudo de outros aspetos relacionados com ligações viga-pilar (*e.g.*, Gomes *et al.*, 1998, Hegger *et al.*, 2004, Mitra e Lowes, 2007).

Os modos de instabilidade de um pórtico plano regular podem dividir-se em dois grandes tipos (Reis e Camotim, 2001): (1) modos que envolvem deslocamento laterais dos nós e (2) modos que não envolvem deslocamentos laterais dos nós. Em pórticos não contraventados, o modo crítico

---

<sup>2</sup> Admite-se que o carregamento pode ser totalmente equilibrado apenas com esforços axiais nas barras do pórtico. Deste modo, os momentos flectores num estado de equilíbrio fundamental são identicamente nulos.

de instabilidade é do tipo (1); em pórticos totalmente contraventados, os deslocamentos laterais dos nós estão impedidos, pelo que o modo crítico é do tipo (2), o único tipo possível (Figura 1.2). Tal leva a que seja necessário considerar duas tipologias arquétipo distintas.

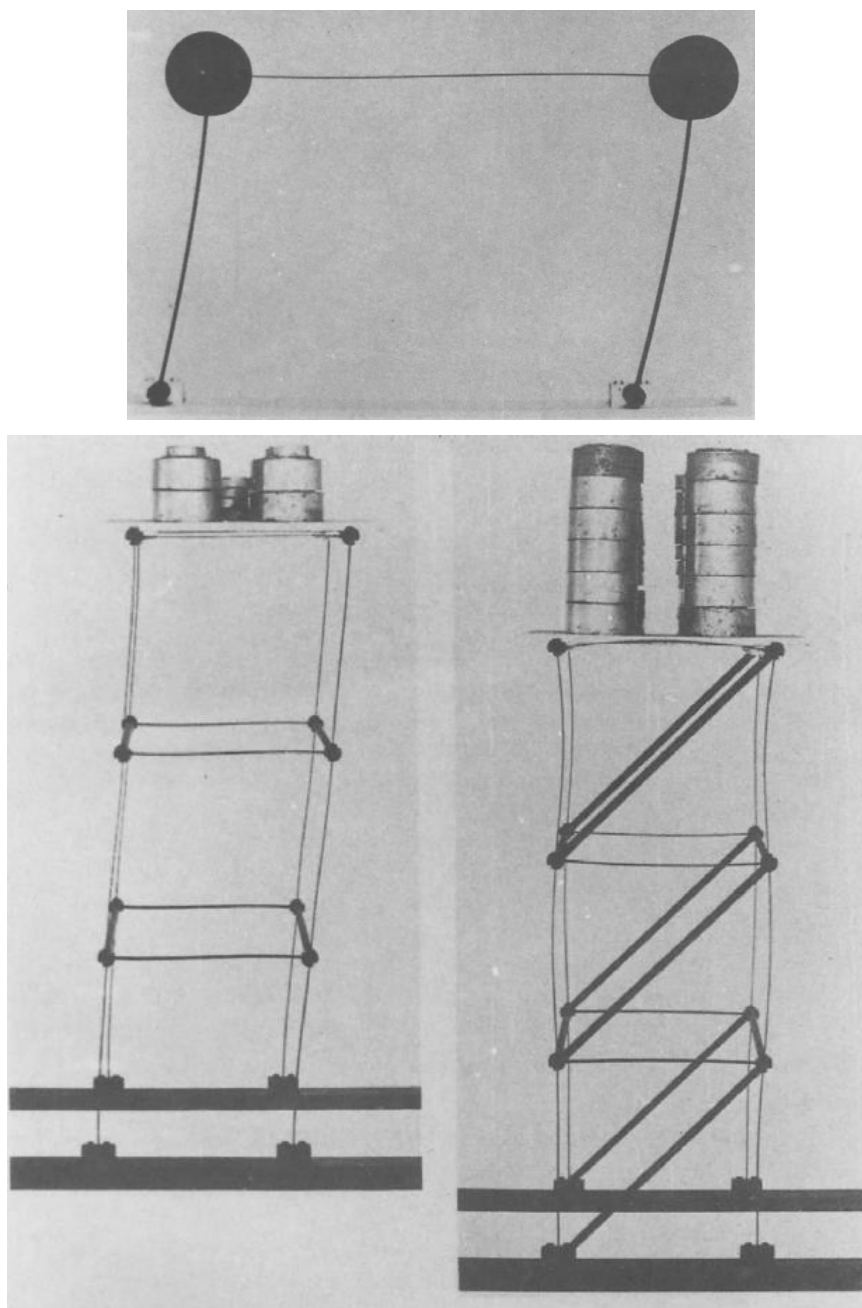


Figura 1.2 – Exemplos de modos de instabilidade com deslocamentos laterais (pórticos não contraventados) e sem deslocamentos laterais (pórtico contraventado) em modelos didáticos (Pignataro *et al.*, 1991)

## 1.2 Objetivos e âmbito da dissertação

Tal como o seu título indica, esta dissertação tem como objetivo fundamental avaliar, através da análise de subestruturas arquétipo, a influência da flexibilidade das ligações viga-pilar nos comprimentos de encurvadura de pilares em pórticos regulares de betão armado. Consideram-se apenas pórticos planos, não contraventados ou totalmente contraventados, e ligações viga-pilar interiores (Figura 1.3).

O estudo é realizado em regime materialmente linear. Nos pilares e vigas, desprezam-se as extensões elásticas associadas aos esforços axial e transversal e adota-se uma relação linearizada deslocamento transversal-curvatura, válida para pequenas rotações.

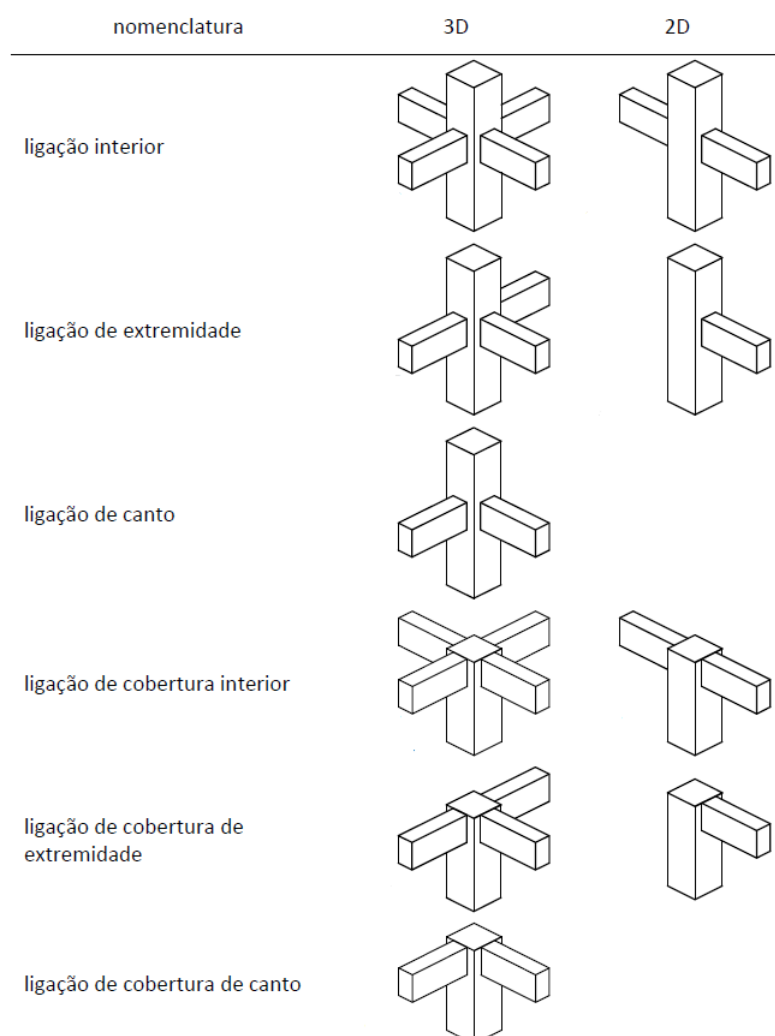


Figura 1.3 – Tipologias de ligações viga-pilar em pórticos ortogonais planos e tridimensionais, em função do número e disposição das peças lineares adjacentes (Costa, 2013)

Numa ligação viga-pilar de um pórtico de betão armado, são duas as fontes de deformação mais relevantes (Costa, 2013): (1) o escorregamento da armadura longitudinal da(s) viga(s) adjacentes no interior da ligação e (2) a distorção da ligação. Neste trabalho, considera-se apenas o primeiro destes efeitos, que é modelado por intermédio de elementos pontuais com rigidez rotacional finita (“molas rotacionais”) colocados nas extremidades das vigas, junto à sua intersecção com o eixo do pilar. Este tipo de modelação, muito atrativo pela sua simplicidade, é também comum nas estruturas metálicas (NP EN 1993-1-8, 2010).

### **1.3 Organização da dissertação**

A dissertação encontra-se dividida em quatro capítulos, o primeiro dos quais é a presente Introdução.

No capítulo 2 são formulados vários elementos finitos unidimensionais para a análise linear de estabilidade de pórticos planos linearmente elásticos. Começa-se pelo elemento com dois nós e dois deslocamentos independentes por nó (rotação e deslocamento transversal), com funções de forma ditas “exatas” (isto é, que satisfazem exatamente a equação diferencial de uma peça linear prismática em compressão uniforme). De forma a estabelecer a ponte com os conteúdos da unidade curricular “Teoria das Estruturas II”, este elemento é depois “linearizado”, o que, de facto, corresponde à adoção, como funções de forma, dos polinómios cúbicos de Hermite. Segue-se a formulação, por eliminação de Gauss, de dois elementos finitos com deslocamentos nodais dependentes, os quais permitem reduzir o grau de indeterminação cinemática de uma malha de elementos finitos sem afetar o rigor da solução.

No capítulo 3 é realizado um estudo paramétrico em que se pretende avaliar a influência da flexibilidade das ligações viga-pilar nos comprimentos efetivos (ou de encurvadura) de pilares em pórticos planos regulares de betão armado. Como já referido, o estudo é realizado em regime materialmente linear e incide sobre duas subestruturas arquétipo, representativas de pilares interiores em pórticos totalmente contraventados ou não contraventados. Ambas as subestruturas arquétipo incluem uma ligação viga-pilar interior e estão limitadas pelas secções de meio vão e de meia altura das vigas e dos pilares adjacentes; diferem nas condições de fronteira. Para modelar a flexibilidade das ligações viga-pilar, recorre-se a elementos pontuais

com rigidez rotacional finita (“molas rotacionais”) nas extremidades das vigas, junto à sua intersecção com o eixo do pilar.

No quarto capítulo e último capítulo são apresentadas as principais conclusões retiradas deste trabalho e fazem-se algumas sugestões para desenvolvimentos futuros.

## 2 ELEMENTOS FINITOS PARA A ANÁLISE LINEAR DE ESTABILIDADE DE PÓRTICOS PLANOS LINEARMENTE ELÁSTICOS

### 2.1 Equação diferencial de uma peça linear prismática em compressão uniforme. Energia potencial total

Considere-se, no plano Euclideano  $x, z$ , uma peça linear esbelta com comprimento  $L_c$  e eixo perfeitamente reto, paralelo a  $x$ . A peça é constituída por um material de comportamento elástico linear e encontra-se sujeita à ação de forças de compressão  $P$  aplicadas de forma concêntrica nas suas extremidades. A rigidez de flexão da secção transversal é designada por  $EI$ . Desprezam-se as extensões elásticas associadas aos esforços axial e transversal. A configuração retilínea desta peça linear é, obviamente, uma configuração de equilíbrio, qualquer que seja o valor da compressão uniforme  $P$ . No entanto, sabe-se que para certos valores de  $P$  são possíveis outras configurações de equilíbrio, ditas adjacentes, nas quais a peça se encontra fletida (*e.g.*, Dias da Silva, 2013, Reis e Camotim, 2001). Admitindo que as forças de compressão mantêm a sua direção inicial (sendo, portanto, conservativas), o equilíbrio de um troço infinitesimal da peça linear numa configuração fletida permite escrever (ver Figura 2.1)

$$\sum M_b = 0 \Leftrightarrow M'(x)dx - Q(x)dx - Pw'(x)dx = 0 \Leftrightarrow Q(x) = M'(x) - Pw'(x) \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 \Leftrightarrow Q'(x) = 0, \quad (3)$$

onde as funções  $w, M, Q$  representam, respetivamente, o deslocamento transversal do eixo da peça, a distribuição de momentos fletores e a distribuição de esforços de corte, estes últimos definidos perpendicularmente à configuração retilínea inicial. Diferenciando a primeira das duas equações anteriores em ordem a  $x$  e introduzindo o resultado na segunda equação, obtém-se

$$M''(x) - P w''(x) = 0. \quad (4)$$



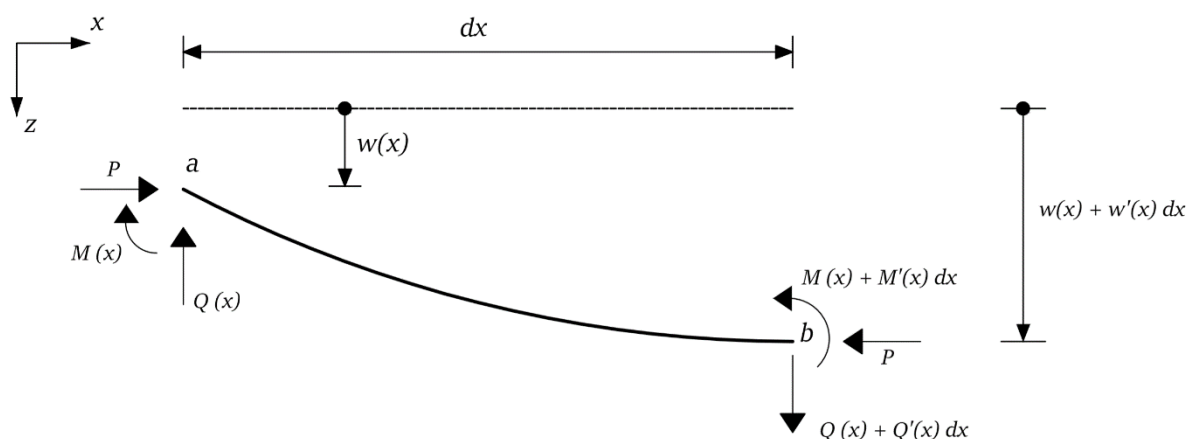


Figura 2.1 – Equilíbrio, numa configuração fletida, de um troço infinitesimal de uma peça linear em compressão uniforme

Utilizando a relação momento-curvatura elástica linear

$$M(x) = -EI \chi(x) \quad (5)$$

e a relação curvatura-deslocamento transversal linearizada

$$\chi(x) = w''(x), \quad (6)$$

válida para pequenas rotações (Dias da Silva, 2013), pode finalmente escrever-se

$$EI w^{(4)}(x) + P w''(x) = 0, \quad 0 < x < L. \quad (7)$$

Para  $P > 0$  (compressão), a solução geral desta equação diferencial homogénea é (Birkhoff e Rota, 1989)

$$w(x) = A + Bx + C \sin(kx) + D \cos(kx), \quad (8)$$

com  $k = \sqrt{P/EI}$ .

Nas condições atrás referidas, a energia potencial total é dada por (Bazant e Cedolin, 1991)

$$V(x) = \frac{EI}{2} \int_0^{L_c} w''(x)^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^{L_c} w'(x)^2 dx. \quad (9)$$

A primeira parcela representa a energia de deformação elástica da peça linear em flexão; a segunda parcela representa o potencial das forças exteriores (ou seja, o simétrico do trabalho por elas realizado).

## 2.2 Elemento finito com quatro deslocamentos nodais independentes

Considere-se um elemento finito unidimensional genérico ( $e$ ), de comprimento  $L$ , com dois nós – um em cada extremidade – e quatro deslocamentos nodais independentes (ou graus de liberdade), numerados localmente como indicado na Figura 2.2. O elemento encontra-se submetido a uma compressão uniforme  $P$ . Tal como no subcapítulo anterior, desprezam-se as deformações elásticas associadas aos esforços axial e transversal, pelo que a secção transversal é caracterizada unicamente pela sua rigidez de flexão  $EI$ . O sistema de eixos Cartesiano  $x, z$  é agora um referencial local, com origem no nó 1.

Adotam-se funções de forma do tipo

$$\psi_i(x) = A_i + B_i x + C_i \sin(kx) + D_i \cos(kx), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (10)$$

onde  $A_i, B_i, C_i$  e  $D_i$  são constantes a determinar. As condições de fronteira

$$\psi_1'(0) = 1 \quad (11)$$

$$\psi_1(0) = \psi_1'(L) = \psi_1(L) = 0 \quad (12)$$

permitem obter as constantes  $A_1, B_1, C_1$  e  $D_1$  da primeira função de forma:

$$A_1 = \frac{kL \cos(kL) - \sin(kL)}{k[2 - 2\cos(kL) - kL \sin(kL)]} \quad (13)$$

$$B_1 = \frac{1}{2 - kL \cot\left(\frac{kL}{2}\right)} \quad (14)$$

$$C_1 = \frac{1}{k} \left( 1 - \frac{1}{2 - kL \cot\left(\frac{kL}{2}\right)} \right) \quad (15)$$

$$D_1 = -\frac{kL \cos(kL) - \sin(kL)}{k[2 - 2\cos(kL) - kL \sin(kL)]}. \quad (16)$$

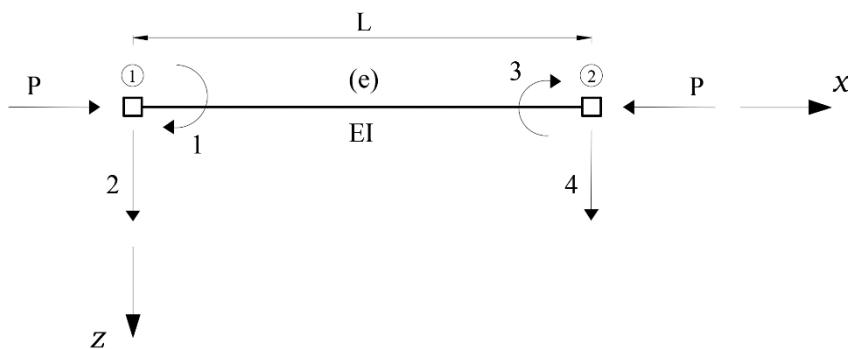


Figura 2.2 – Elemento finito com quatro deslocamentos nodais independentes

De maneira inteiramente análoga, as condições

$$\psi_2(0) = 1 \quad (17)$$

$$\psi_2'(0) = \psi_2'(L) = \psi_2(L) = 0 \quad (18)$$

$$\psi_3'(L) = 1 \quad (19)$$

$$\psi_3'(0) = \psi_3(0) = \psi_3(L) = 0 \quad (20)$$

$$\psi_4(L) = 1 \quad (21)$$

$$\psi_4'(0) = \psi_4(0) = \psi_4'(L) = 0 \quad (22)$$

forneem as constantes que definem as restantes três funções de forma. Obtém-se

$$A_2 = 1 - \frac{1}{2 - kL \cot\left(\frac{kL}{2}\right)} \quad (23)$$

$$B_2 = -\frac{k}{kL - 2 \tan\left(\frac{kL}{2}\right)} \quad (24)$$

$$C_2 = \frac{1}{kL - 2 \tan\left(\frac{kL}{2}\right)} \quad (25)$$

$$D_2 = \frac{1}{2 - kL \cot\left(\frac{kL}{2}\right)} \quad (26)$$

$$A_3 = -\frac{kL - \sin(kL)}{k[2 - 2\cos(kL) - kL\sin(kL)]} \quad (27)$$

$$B_3 = \frac{1}{2 - kL \cot\left(\frac{kL}{2}\right)} \quad (28)$$

$$C_3 = -\frac{1}{k[2-kL\cot(\frac{kL}{2})]} \quad (29)$$

$$D_3 = \frac{kL-\sin(kL)}{k[2-2\cos(kL)-kL\sin(kL)]} \quad (30)$$

$$A_4 = \frac{1}{2-kL\cot(\frac{kL}{2})} \quad (31)$$

$$B_4 = \frac{k}{kL-2\tan(\frac{kL}{2})} \quad (32)$$

$$C_4 = -\frac{1}{kL-2\tan(\frac{kL}{2})} \quad (33)$$

$$D_4 = -\frac{1}{2-kL\cot(\frac{kL}{2})}. \quad (34)$$

Introduzindo a combinação linear

$$w(x) = \sum_{i=1}^4 d_i^{(e)} \psi_i(x) \quad (35)$$

na expressão (9) da energia potencial total (com o limite de integração  $L$  no lugar de  $L_c$ ) e derivando em ordem aos deslocamentos nodais elementares  $d_i^{(e)}$ , chega-se à seguinte definição geral para os coeficientes da matriz de rigidez elementar (dita “exata”, uma vez que as funções de forma satisfazem exatamente a equação diferencial (7) – Reis e Camotim, 2001):

$$K_{ij}^{(e)} = \int_0^L EI \psi_i'' \psi_j'' dx - P \int_0^L \psi_i' \psi_j' dx, \quad i, j = 1, \dots, 4. \quad (36)$$

Tem-se então

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4\phi_3 & 6\frac{\phi_2}{L} & 2\phi_4 & -6\frac{\phi_2}{L} \\ 6\frac{\phi_2}{L} & 12\frac{\phi_1}{L^2} & 6\frac{\phi_2}{L} & -12\frac{\phi_1}{L^2} \\ 2\phi_4 & 6\frac{\phi_2}{L} & 4\phi_3 & -6\frac{\phi_2}{L} \\ -6\frac{\phi_2}{L} & -12\frac{\phi_1}{L^2} & -6\frac{\phi_2}{L} & 12\frac{\phi_1}{L^2} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

com

$$\phi_2 = \frac{\beta^2}{3(1-\beta \cot(\beta))} \quad (38)$$

$$\phi_1 = \beta \cot(\beta) \phi_2 \quad (39)$$

$$\phi_3 = \frac{3}{4} \phi_2 + \frac{1}{4} \beta \cot(\beta) \quad (40)$$

$$\phi_4 = \frac{3}{2} \phi_2 - \frac{1}{2} \beta \cot(\beta), \quad (41)$$

sendo o parâmetro  $\beta$  definido por

$$\beta = \frac{kL}{2} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}}, \quad (42)$$

onde  $P_E = \pi^2 EI/L^2$  designa a carga crítica de Euler.

As funções  $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) acima introduzidas são conhecidas por funções de estabilidade de Livesley (Livesley, 1975) e estão representadas graficamente na Figura 2.3 em termos da variável independente  $P/P_E$  (para  $0 \leq P/P_E \leq 4$ ). Constata-se que todas elas assumem um valor unitário para  $P = 0$ , pelo que, nesse caso, se recupera naturalmente a matriz de rigidez linear do elemento viga de Euler-Bernoulli.

As funções de estabilidade de Livesley dependem não linearmente da força de compressão  $P$ . Quando  $P \rightarrow 0^+$ , a fórmula de MacLaurin (Ferreira, 1999) permite escrever

$$\phi_1 = 1 - \frac{PL^2}{10EI} + O(P^2) \quad (43)$$

$$\phi_2 = 1 - \frac{PL^2}{60EI} + O(P^2) \quad (44)$$

$$\phi_3 = 1 - \frac{PL^2}{30EI} + O(P^2) \quad (45)$$

$$\phi_4 = 1 + \frac{PL^2}{60EI} + O(P^2), \quad (46)$$

onde se utilizou o símbolo “ $O$  maiúsculo” de Bachmann-Landau<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Escreve-se  $f(x) = O(g(x))$  quando  $x \rightarrow a$  se e só se existem números positivos  $\delta$  e  $M$  tais que

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

para  $|x - a| < \delta$ .

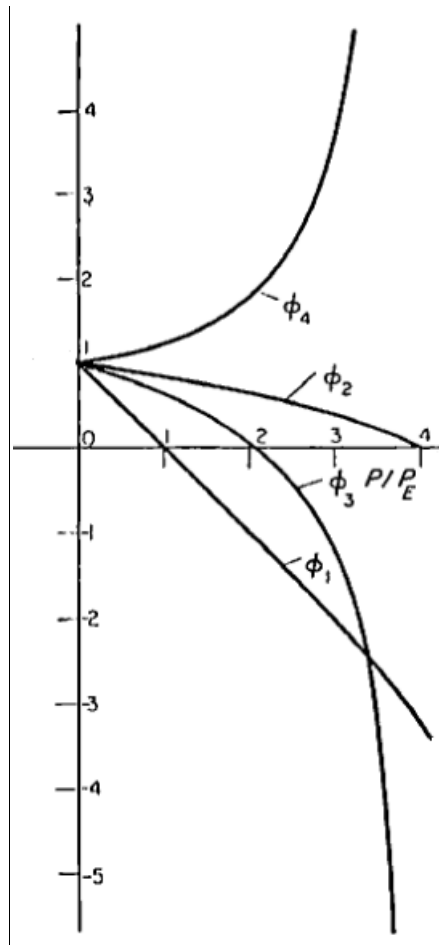


Figura 2.3 – Funções de estabilidade de Livesley (Livesley, 1975)

Conclui-se, assim, que a matriz de rigidez “exata” (37) pode ser aproximada pela matriz linearizada

$$\mathbf{K}_{lin}^{(e)} = \mathbf{K}_m^{(e)} + \mathbf{K}_g^{(e)}, \quad (47)$$

com

$$\mathbf{K}_m^{(e)} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} \\ 2 & \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{K}_g^{(e)} = -P \begin{bmatrix} \frac{2L}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5L} \\ -\frac{L}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5L} \end{bmatrix}. \quad (49)$$

As matrizes  $\mathbf{K}_m^{(e)}$  e  $\mathbf{K}_g^{(e)}$  são habitualmente designadas por matrizes de rigidez material (elástica) e geométrica, respectivamente (Dias da Silva, 2013). Refira-se que os coeficientes da matriz de rigidez linearizada também podem ser obtidos através da definição geral (36) utilizando como funções de forma os polinómios cúbicos de Hermite

$$\psi_1(x) = L \left[ \left( \frac{x}{L} \right)^2 - 2 \frac{x}{L} + 1 \right] \frac{x}{L} \quad (50)$$

$$\psi_2(x) = 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + 1 \quad (51)$$

$$\psi_3(x) = L \left( \frac{x}{L} \right)^2 \left( \frac{x}{L} - 1 \right) \quad (52)$$

$$\psi_4(x) = -2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2, \quad (53)$$

os quais se encontram representados graficamente na Figura 2.4.

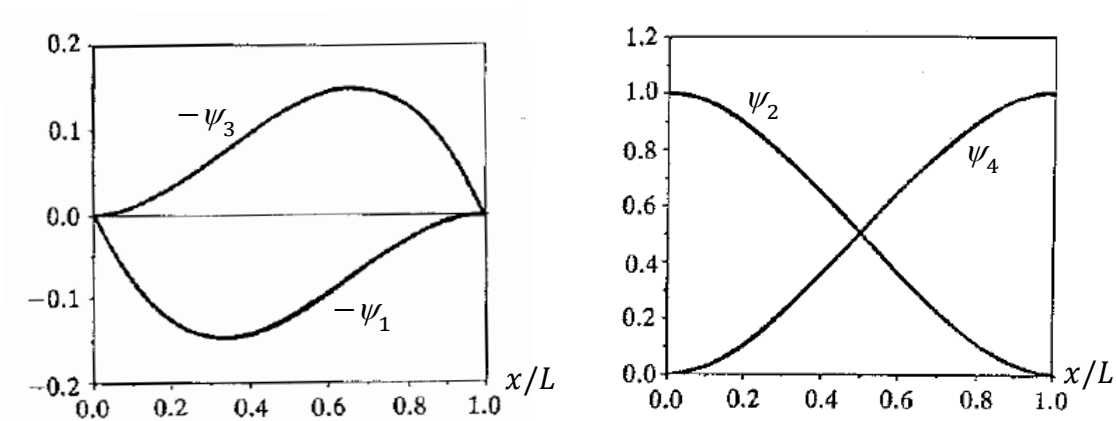


Figura 2.4 – Funções de forma cúbicas de Hermite (adaptado de Reddy, 1993)

## 2.3 Elementos finitos com deslocamentos nodais dependentes

O elemento finito formulado no subcapítulo anterior, juntamente com o elemento pontual, são os suficientes para analisar as estruturas reticuladas planas consideradas neste trabalho. No entanto, torna-se interessante formular outros elementos finitos unidimensionais que permitem reduzir o grau de indeterminação cinemática de uma malha de elementos finitos sem afectar o rigor da solução, tal como exposto em Providência e Andrade (2018) no âmbito do método dos deslocamentos.

### 2.3.1 Elemento finito em que o deslocamento transversal de um dos nós é dependente

Suponha-se que o elemento finito representado na Figura 2.2 possui uma libertação transversal na extremidade direita. Sendo nulo o esforço de corte  $Q$  nessa extremidade, o deslocamento nodal correspondente,  $d_4^{(e)}$ , pode ser escrito em função dos restantes três deslocamentos nodais do elemento. De facto, da quarta equação do sistema elementar  $\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{d}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}$ , com a matriz  $\mathbf{K}^{(e)}$  definida por (37) e  $F_4^{(e)} = 0$ , conclui-se que

$$-\frac{6EI}{L^2}\phi_2 d_1 - \frac{12EI}{L^3}\phi_1 d_2 - \frac{6EI}{L^2}\phi_2 d_3 + \frac{12EI}{L^3}\phi_1 d_4 = 0 \Leftrightarrow d_4 = \frac{L\phi_2}{2\phi_1}(d_1 + d_3) + d_2. \quad (54)$$

Por este motivo, o deslocamento transversal do nó direito pode ser considerado dependente dos restantes deslocamentos nodais do elemento e, como tal, eliminado (ou condensado, como também se diz). Para isso, (1) multiplica-se a quarta linha da matriz de rigidez elementar (37) por  $L\phi_2/(2\phi_1)$  e adiciona-se o resultado à primeira e terceira linhas e (2) adiciona-se a quarta linha à segunda. Suprimindo agora a quarta linha e a quarta coluna, obtém-se a matriz de rigidez “exata” de um novo elemento, representado na Figura 2.5, com apenas três deslocamentos nodais independentes (duas rotações e um deslocamento transversal):

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4\phi_3 - 3\frac{\phi_2^2}{\phi_1} & 0 & 2\phi_4 - 3\frac{\phi_2^2}{\phi_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\phi_4 - 3\frac{\phi_2^2}{\phi_1} & 0 & 4\phi_3 - 3\frac{\phi_2^2}{\phi_1} \end{bmatrix}. \quad (55)$$



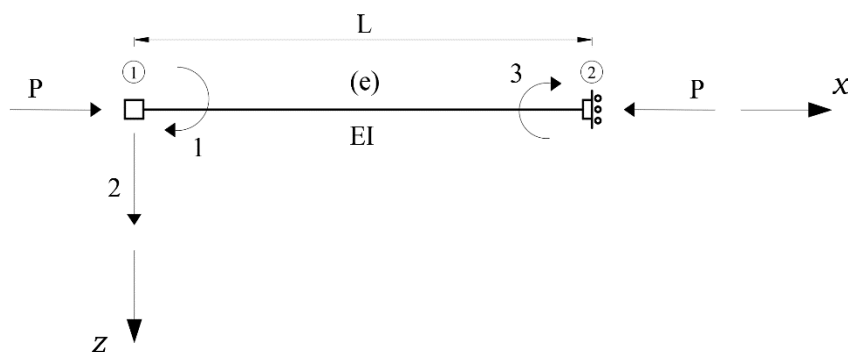


Figura 2.5 – Elemento finito em que o deslocamento transversal do nó direito é dependente

Esta matriz de rigidez elementar também pode ser obtida recorrendo à definição geral (36) (agora com  $i, j = 1, 2, 3$ ) e adotando três funções de forma do tipo (10), com constantes determinadas pelas condições

$$\psi_1'(0) = 1 \quad (56)$$

$$\psi_1(0) = \psi_1'(L) = -EI\psi_1'''(L) - P\psi_1'(L) = 0 \quad (57)$$

$$\psi_2(0) = 1 \quad (58)$$

$$\psi_2'(0) = \psi_2'(L) = -EI\psi_2'''(L) - P\psi_2'(L) = 0 \quad (59)$$

$$\psi_3'(L) = 1 \quad (60)$$

$$\psi_3'(0) = \psi_3(0) = -EI\psi_3'''(L) - P\psi_3'(L) = 0. \quad (61)$$

Para  $P = 0$ , também agora se recupera a matriz de rigidez linear do elemento viga de Euler-Bernoulli análogo (elemento viga 3 na nomenclatura de Providência e Andrade, 2018).

Tendo agora em atenção que

$$4\phi_3 - 3\frac{\phi_2^2}{\phi_1} = 1 - \frac{PL^2}{3EI} + O(P^2) \quad (62)$$

$$2\phi_4 - 3\frac{\phi_2^2}{\phi_1} = -1 - \frac{PL^2}{6EI} + O(P^2) \quad (63)$$

quando  $P \rightarrow 0^+$ , a matriz de rigidez linearizada do elemento da Figura 2.5 vem dada pela soma das parcelas material

$$\mathbf{K}_m^{(e)} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

e geométrica

$$\mathbf{K}_g^{(e)} = -\frac{PL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

### 2.3.2 Elemento finito em que a rotação de um dos nós é dependente

Considera-se agora o caso de um elemento finito com uma articulação na extremidade direita. Sendo o momento nulo nessa extremidade, a rotação nodal correspondente pode ser considerada como dependente e eliminada. Por um procedimento inteiramente análogo ao descrito no subcapítulo anterior, obtém-se, a partir de (37), a matriz de rigidez “exata”

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4\phi_3 - \frac{\phi_4^2}{\phi_3} & \frac{3\phi_2}{L} \left(2 - \frac{\phi_4}{\phi_3}\right) & -\frac{3\phi_2}{L} \left(2 - \frac{\phi_4}{\phi_3}\right) \\ \frac{3\phi_2}{L} \left(2 - \frac{\phi_4}{\phi_3}\right) & \frac{6}{L^2} \left(2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3}\right) & -\frac{6}{L^2} \left(2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3}\right) \\ -\frac{3\phi_2}{L} \left(2 - \frac{\phi_4}{\phi_3}\right) & -\frac{6}{L^2} \left(2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3}\right) & \frac{6}{L^2} \left(2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3}\right) \end{bmatrix}, \quad (66)$$

respeitante ao elemento finito representado na Figura 2.6, com três deslocamentos nodais independentes (uma rotação e dois deslocamentos transversais). Refira-se ainda que esta matriz de rigidez elementar também pode ser obtida através da definição geral (36) (agora com  $i, j = 1, 2, 3$ ) e com três funções de forma do tipo (10), cujas constantes são agora determinadas pelas condições

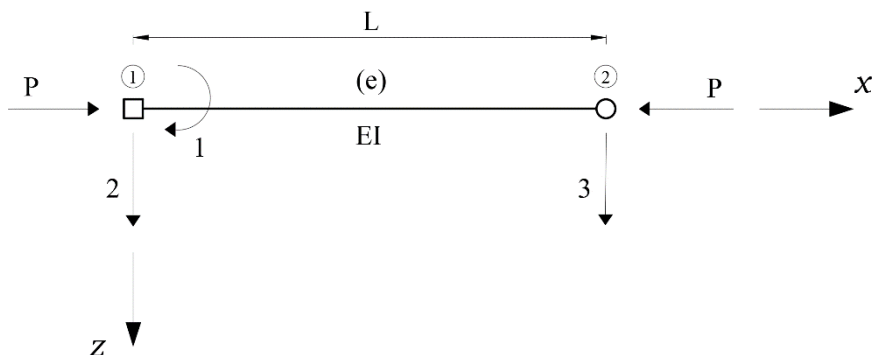


Figura 2.6 – Elemento finito em que a rotação do nó direito é dependente

$$\psi_1'(0) = 1 \quad (67)$$

$$\psi_1(0) = \psi_1'(L) = -EI\psi_1''(L) = 0 \quad (68)$$

$$\psi_2(0) = 1 \quad (69)$$

$$\psi_2'(0) = \psi_2(L) = -EI\psi_2''(L) = 0 \quad (70)$$

$$\psi_3(L) = 1 \quad (71)$$

$$\psi_3'(0) = \psi_3(0) = -EI\psi_3''(L) = 0. \quad (72)$$

Para  $P = 0$ , a matriz (66) reduz-se à matriz rigidez linear do elemento viga de Euler-Bernoulli análogo (elemento viga 2 na nomenclatura de Providência e Andrade, 2018).

Finalmente, e uma vez que

$$4\phi_3 - \frac{\phi_4^2}{\phi_3} = 3 - \frac{PL^2}{5EI} + O(P^2) \quad (73)$$

$$\frac{6}{L^2} \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) = \frac{3}{L^2} - \frac{6P}{5EI} + O(P^2) \quad (74)$$

$$\frac{3\phi_2}{L} \left( 2 - \frac{\phi_4}{\phi_3} \right) = \frac{3}{L} - \frac{PL}{5EI} + O(P^2) \quad (75)$$

quando  $P \rightarrow 0^+$ , é fácil concluir que a matriz de rigidez linearizada deste terceiro tipo de elemento é definida pela parcela material

$$\mathbf{K}_m^{(e)} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{L} & -\frac{3}{L} \\ \frac{3}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{3}{L^2} \\ -\frac{3}{L} & -\frac{3}{L^2} & \frac{3}{L^2} \end{bmatrix} \quad (76)$$

e pela parcela geométrica

$$\mathbf{K}_g^{(e)} = -\frac{P}{5} \begin{bmatrix} L & 1 & -1 \\ 1 & \frac{6}{L} & -\frac{6}{L} \\ -1 & -\frac{6}{L} & \frac{6}{L} \end{bmatrix} \quad (77)$$

### **3 INFLUÊNCIA DA FLEXIBILIDADE DAS LIGAÇÕES VIGA-PILAR NO COMPRIMENTO EFECTIVO DE PILARES – ESTUDO PARAMÉTRICO**

#### **3.1 Pórticos planos regulares, totalmente contraventados e não contraventados. Subestruturas arquétipo**

O estudo paramétrico apresentado neste capítulo tem por objetivo avaliar de que modo a flexibilidade das ligações viga-pilar afeta os comprimentos efetivos (ou de encurvadura) de pilares integrados em pórticos planos e regulares de betão armado. Consideram-se apenas ligações interiores (de acordo com a nomenclatura da Figura 1.3), cuja deformabilidade é modelada por intermédio de elementos pontuais com rigidez rotacional finita (“molas rotacionais”) colocados nas extremidades das vigas, junto à sua intersecção com o eixo do pilar. Esta abordagem permite considerar, de uma forma simples, o escorregamento da armadura longitudinal das vigas adjacentes no interior da ligação. Admite-se um comportamento materialmente linear.

Como referido na Introdução, a determinação dos comprimentos de encurvadura dos pilares de um pórtico requer, em rigor, o cálculo prévio do parâmetro de carga crítico desse pórtico. No entanto, quando o pórtico exhibe regularidade na geometria, nas propriedades mecânicas e no carregamento, o estudo pode incidir não sobre o pórtico completo, mas sobre uma subestrutura representativa – designada por subestrutura arquétipo –, constituída por um número reduzido de barras e com condições de fronteira que induzem um modo crítico de instabilidade idêntico ao que seria induzido pela parte da estrutura não modelada. Sendo distintos os modos críticos de instabilidade de pórticos totalmente contraventados e não contraventados, é necessário considerar duas tipologias arquétipo distintas (Figuras 3.1 e 3.2). Ambas incluem uma ligação viga-pilar interior, os troços das vigas adjacentes até às respetivas secções de meio vão, de comprimento  $L_b/2$ , e os troços dos pilares adjacentes até às respetivas secções de meia altura,

de comprimento  $L_c/2$ . A subestrutura arquétipo representativa de pórticos totalmente contraventados, cujo modo crítico de instabilidade não envolve deslocamentos laterais dos nós, possui encastramentos móveis nas extremidades de vigas e colunas (isto é, a rotação é impedida e os deslocamentos transversais permanecem livres); uma vez que se admite que todas as barras são axialmente rígidas, o deslocamento axial apenas é restringido nas extremidades do troço de viga à esquerda da ligação e do troço de pilar inferior (Figura 3.1). A subestrutura arquétipo representativa de pórticos não contraventados apresenta articulações móveis nas extremidades dos dois troços de viga e uma articulação fixa na base do troço de pilar inferior (Figura 3.2).

Quanto ao carregamento aplicado às duas subestruturas arquétipo, optou-se por considerar apenas uma força vertical  $P$  no topo do troço superior do pilar (sem qualquer força vertical adicional aplicada no nó central)<sup>4</sup>, porque se admite que, nos pisos inferiores, onde se verificam os maiores esforços de compressão, será reduzida a relação entre as forças verticais aplicadas num piso e as forças verticais totais aplicadas nos pisos que lhe são superiores.

As rigidezes de flexão das duas vigas adjacentes à ligação considerada, à esquerda e à direita, são designadas por  $k_1EI_b$  e  $EI_b$ , respetivamente. A secção transversal dos pilares adjacentes é idêntica, com rigidez de flexão  $EI_c$ . As molas rotacionais que permitem simular a deformabilidade da ligação têm rigidezes  $k_2s$  (à esquerda do nó central) e  $s$  (à direita) – Figura 3.3.

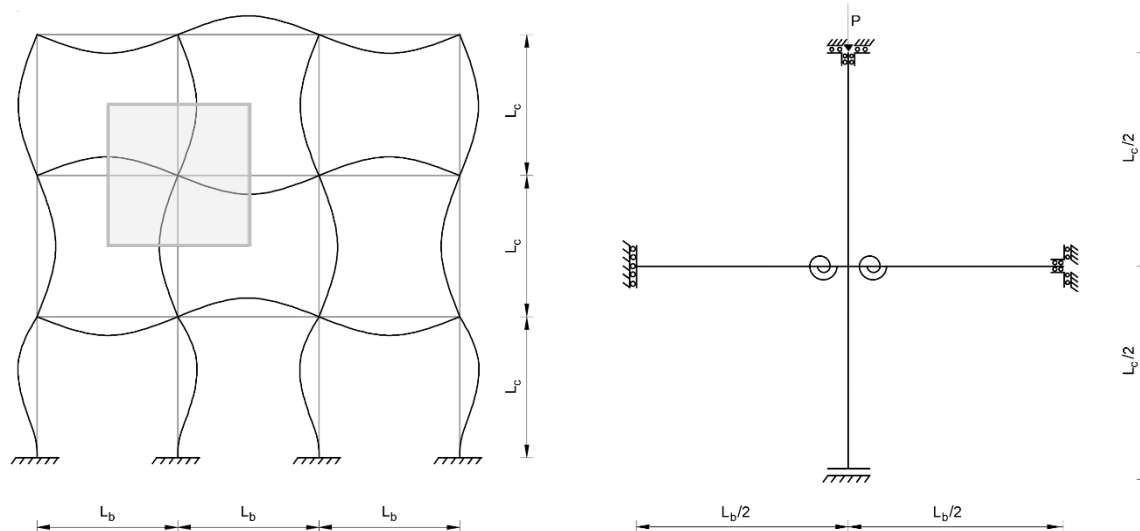


Figura 3.1 – Modo crítico de instabilidade de um pórtico plano regular totalmente contraventado e correspondente subestrutura arquétipo

<sup>4</sup> A carga que devia ser aplicada ao nível das vigas foi considerada de forma conservadora no topo do pilar.

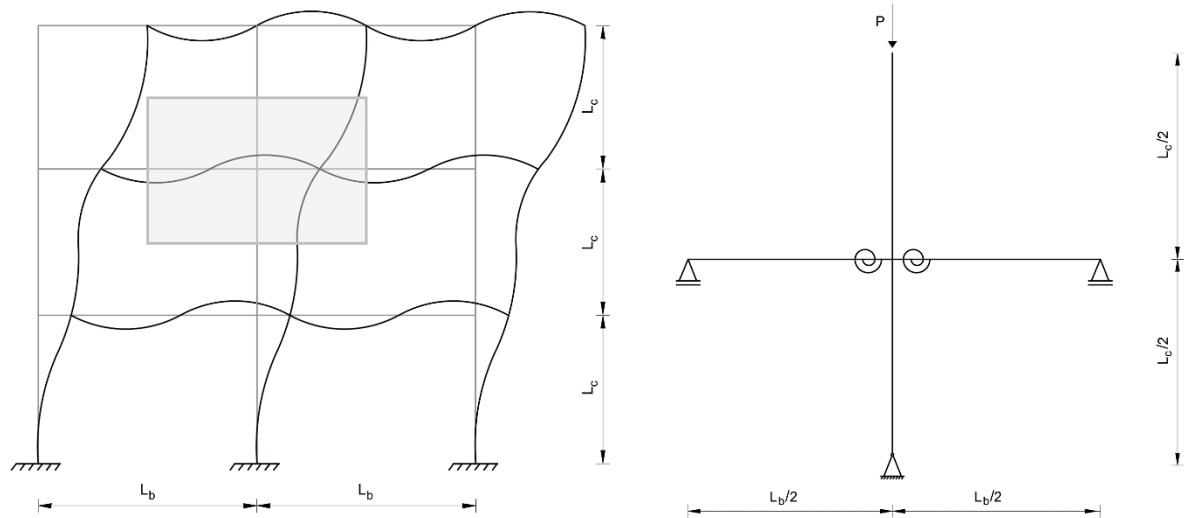


Figura 3.2 – Modo crítico de instabilidade de um pórtico plano regular não contraventado e correspondente subestrutura arquétipo

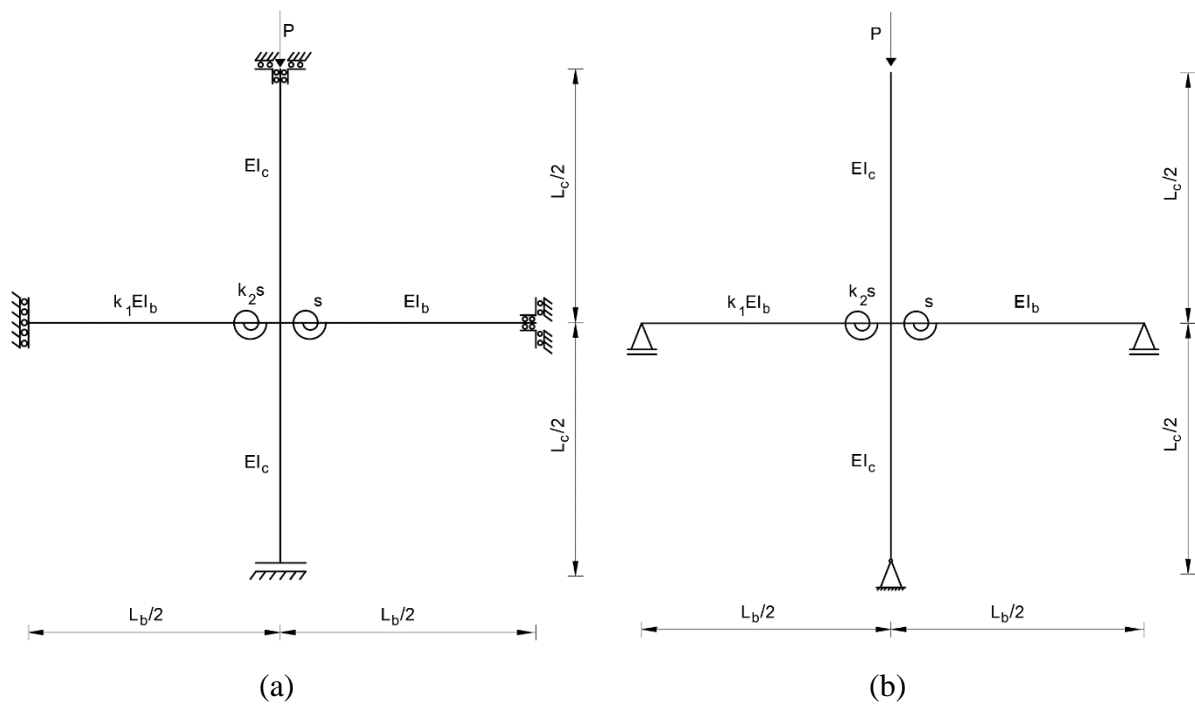


Figura 3.3 – Subestruturas arquétipo (a) totalmente contraventada e (b) não contraventada

## 3.2 Subestrutura arquétipo totalmente contraventada

### 3.2.1 Matriz de rigidez e equação característica

Cada uma das peças lineares da subestrutura arquétipo totalmente contraventada foi discretizada com um único elemento finito “exato” em que o deslocamento transversal numa das extremidades é dependente (subcapítulo 2.3.1)<sup>5</sup>. Note-se que, para as vigas, o esforço axial na configuração de equilíbrio fundamental é nulo, pelo que, nesses elementos, as funções de estabilidade de Livesley (38)-(41) têm valor unitário. Nos dois troços de coluna, o esforço axial é uniforme e igual a  $P$  (compressão). As ligações flexíveis viga-pilar foram modeladas com elementos pontuais (de comprimento nulo), com rigidez rotacional finita e rigidezes de corte e axial infinitamente grandes. A malha de elementos finitos adotada, com um total de seis elementos (dois pontuais e quatro lineares), apresenta assim um grau de indeterminação cinemática igual a três, com os deslocamentos (rotações) nodais independentes indicados na Figura 3.4.

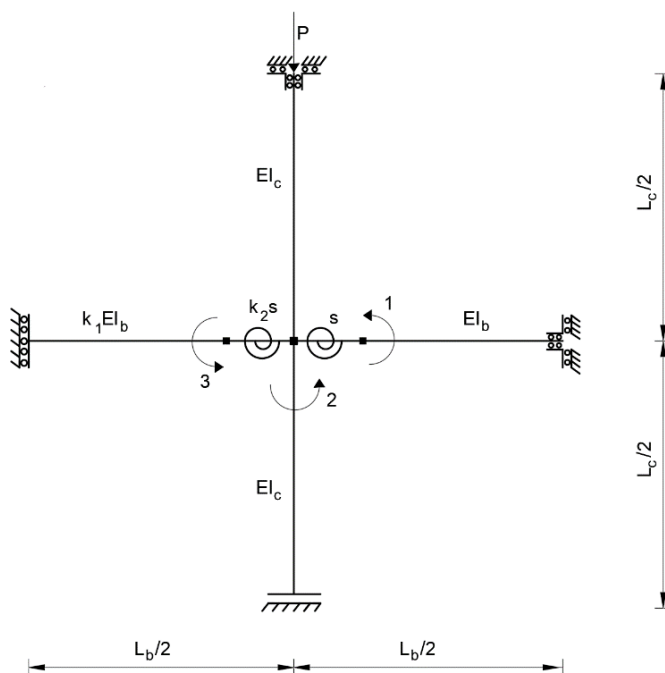


Figura 3.4 – Subestrutura arquétipo totalmente contraventada – Discretização e deslocamentos nodais independentes

<sup>5</sup> Caso se tivesse optado por elementos linearizados, poderia vir a revelar-se necessário, para obter resultados precisos, considerar mais do que um elemento finito por barra (eventualmente dois ou mesmo três – Reis e Camotim, 2001), o que conduziria a um grau de indeterminação cinemática significativamente maior.



A construção, por colunas, da matriz de rigidez da subestrutura arquétipo está esquematizada na Figura 3.5. Obtém-se

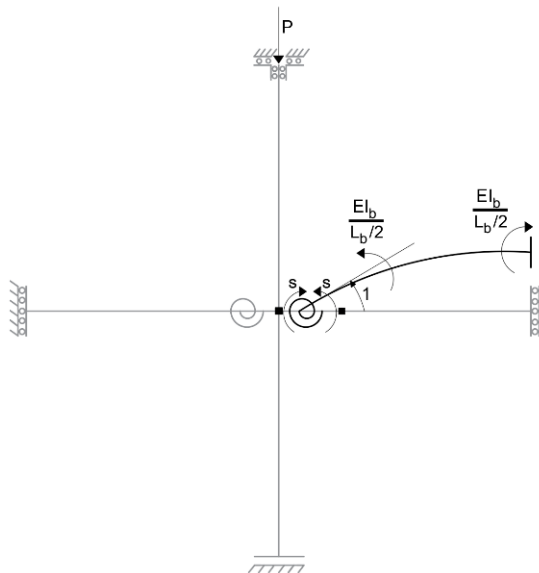
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{2EI_b}{L_b} + s & -s & 0 \\ -s & \frac{4EI_c}{L_c} \left( 4\phi_3 - 3\frac{\phi_2^2}{\phi_1} \right) + (1 + k_2)s & -k_2s \\ 0 & -k_2s & \frac{2k_1EI_b}{L_b} + k_2s \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Com a introdução dos quocientes adimensionais

$$\rho = \frac{EI_c/L_c}{EI_b/L_b} \quad (79)$$

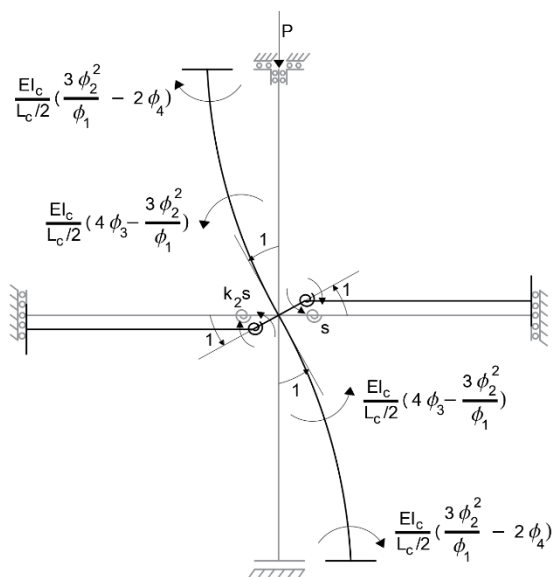
$$\sigma = \frac{sL_b}{EI_b}, \quad (80)$$

a matriz de rigidez anterior pode ser escrita na forma

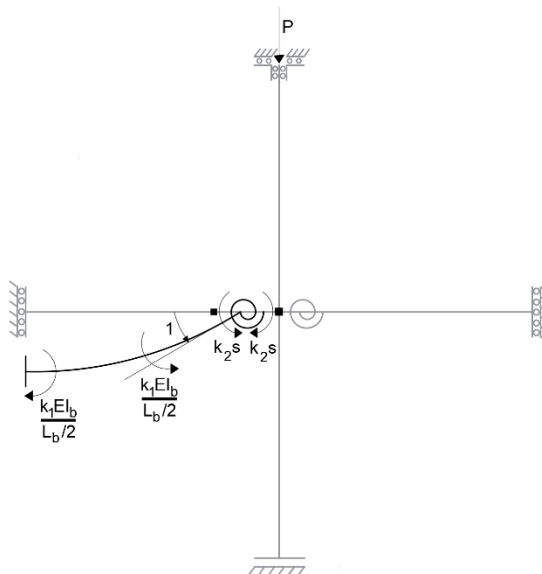


$$(a) \quad d_1 = 1, \quad d_2 = d_3 = 0$$

Figura 3.5 – Construção, por colunas, da matriz de rigidez da subestrutura arquétipo totalmente contraventada



(b)  $d_2 = 1, d_1 = d_3 = 0$



(c)  $d_3 = 1, d_1 = d_2 = 0$

Figura 3.5 (cont.) – Construção, por colunas, da matriz de rigidez da subestrutura arquétipo totalmente contraventada

$$\mathbf{K} = \frac{EI_b}{L_b} \begin{bmatrix} 2 + \sigma & -\sigma & 0 \\ -\sigma & 4\rho \left( 4\phi_3 - 3\frac{\phi_2^2}{\phi_1} \right) + (1 + k_2)\sigma & -k_2\sigma \\ 0 & -k_2\sigma & 2k_1 + k_2\sigma \end{bmatrix}. \quad (81)$$

A equação característica consiste no anulamento do determinante desta matriz. Trata-se de uma equação altamente não linear no parâmetro

$$\beta = \frac{kL_c}{4} = \frac{L_c}{4} \sqrt{\frac{P}{EI_c}} \quad (82)$$

(recorde-se a definição das funções de estabilidade de Livesley no capítulo 2). Neste trabalho, a determinação da sua menor raiz positiva, designada por parâmetro de carga crítica e representada pelo símbolo  $\beta_{cr}$ , é feita com a função *FindRoot* do programa *Mathematica* (Wolfram Research, 2006), recorrendo quando necessário às potencialidades gráficas deste programa para estabelecer uma estimativa inicial<sup>6</sup>. Conhecido  $\beta_{cr}$ , a carga crítica de bifurcação da estrutura é dada por

$$P_{cr} = 16\beta_{cr}^2 \frac{EI_c}{L_c^2}. \quad (83)$$

O comprimento de encurvadura do pilar é, assim,

$$l_e = \frac{\pi}{4\beta_{cr}} L_c. \quad (84)$$

Nas considerações anteriores, admitiu-se que  $0 \leq s < +\infty$ . Quando  $s = +\infty$  (ligação viga-pilar rígida), a malha de elementos finitos apresenta apenas uma rotação nodal independente (a rotação do nó central) e a equação característica reduz-se a (Figura 3.6)

$$\frac{4EI_c}{L_c} \left( 4\phi_3 - 3\frac{\phi_2^2}{\phi_1} \right) + \frac{2EI_b}{L_b} (1 + k_1) = 0 \Leftrightarrow 1 + k_1 + 2\rho \left( 4\phi_3 - 3\frac{\phi_2^2}{\phi_1} \right) = 0, \quad (85)$$

que é, obviamente, independente de  $k_2$ .

### 3.2.2 Estudo paramétrico

No estudo paramétrico realizado, foram consideradas as seguintes gamas de variação para os diferentes parâmetros adimensionais envolvidos:

- A razão  $k_1$  entre as rigidezes de flexão das secções transversais das vigas à esquerda e à direita do nó central, assim como a razão  $k_2$  entre as rigidezes rotacionais dos elementos pontuais à esquerda e à direita do nó central, assumem valores no intervalo [0,25; 1,00].

---

<sup>6</sup> Quando, de um cálculo para o seguinte, apenas um dos parâmetros sofre uma pequena variação, sendo todos os outros dados iguais, o resultado do primeiro pode ser utilizado como estimativa inicial para o segundo.

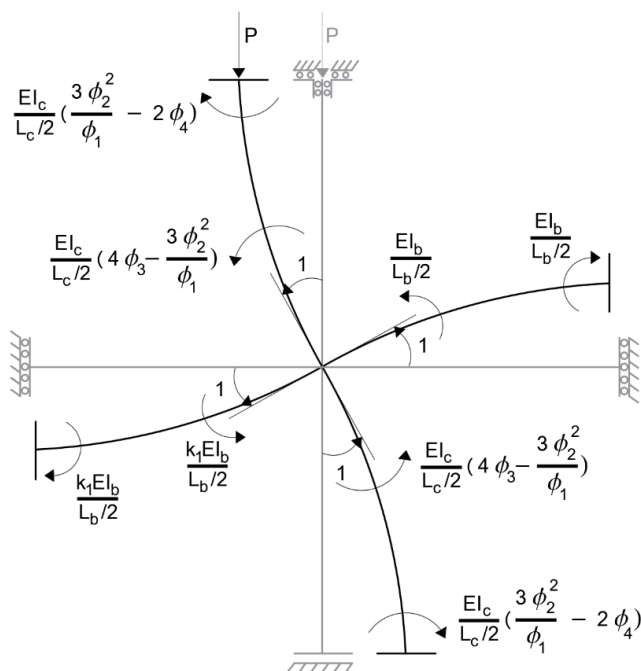


Figura 3.6 – Construção da matriz de rigidez da subestrutura arquétipo totalmente contraventada quando  $s = +\infty$

- A razão  $\rho$  entre a rigidez de flexão do pilar,  $EI_c/L_c$ , e a rigidez de flexão da viga do lado direito,  $EI_b/L_b$ , varia no intervalo  $[0,25; 2,00]$ .
- O parâmetro  $\sigma$ , definido em (80), toma os valores 10 e 20. A título de referência, consideraram-se também os casos  $\sigma = 0$  (ligação viga-pilar perfeitamente articulada, com continuidade do pilar) e  $\sigma = +\infty$  (ligação viga-pilar rígida).

Julga-se que, desta forma, o estudo será representativo dos pórticos planos regulares de betão armado, totalmente contraventados, correntes na prática atual de projeto.

Para  $\sigma = 0$ , tem-se sempre  $l_e/L_c = 1$ , independentemente dos valores dos restantes parâmetros ( $k_1$ ,  $k_2$  e  $\rho$ ), como se ilustra na Figura 3.7. De facto, neste caso a equação característica fica simplesmente

$$4\phi_3 - 3\frac{\phi_2^2}{\phi_1} = 0, \quad (86)$$

cujas menor raiz positiva é sempre  $\beta_{cr} = 0,7854$ .

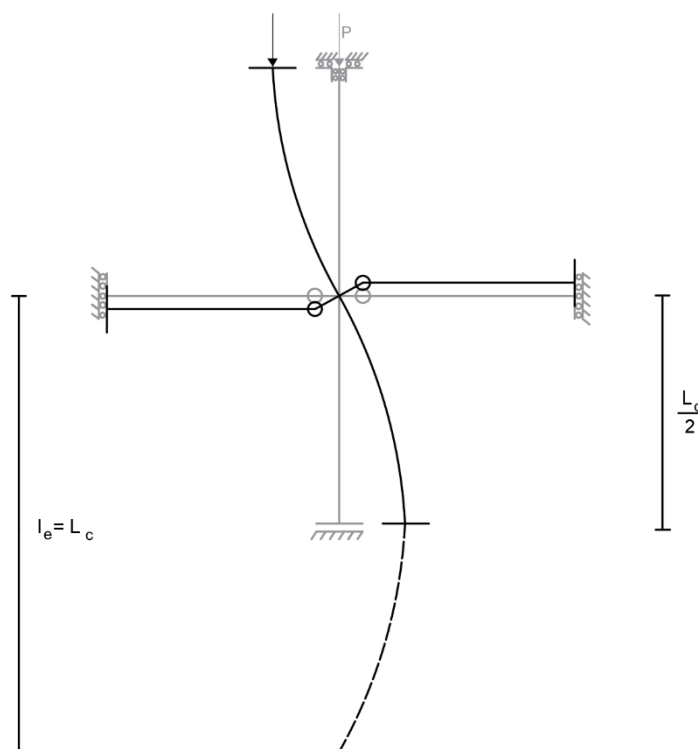


Figura 3.7 – Modo de instabilidade crítica da subestrutura arquétipo totalmente contraventada para  $\sigma = 0$

Os restantes resultados obtidos estão representados graficamente nas Figuras 3.8 a 3.11. Cada uma destas figuras diz respeito a um valor fixo de  $k_1$  e inclui quatro gráficos, um para cada valor de  $k_2$  considerado. Para facilitar a leitura, os resultados são também apresentados em forma tabular nos Quadros 3.1 a 3.4, organizados da mesma forma. Constata-se que:

- O comprimento de encurvadura  $l_e$  está sempre compreendido entre  $L_c/2$  e  $L_c$ , em conformidade com o carácter totalmente contraventado do pórtico.
- Para iguais valores de  $k_1$  e  $\rho$ , as razões  $l_e/L_c$  obtidas com qualquer combinação de  $\sigma \in \{10; 20; +\infty\}$  e  $k_2 \in \{0,25; 0,50; 0,75; 1,00\}$  pouco diferem umas das outras (se bem que se verifica sempre uma ligeira diminuição de  $l_e/L_c$  quando  $\sigma$  e/ou  $k_2$  aumentam). Este resultado indica que a deformabilidade de ligações viga-pilar com características de rigidez ( $s = EI_b \sigma / L_b$  e  $k_2 s$ ) naquela gama não afeta de forma significativa os comprimentos de encurvadura dos pilares em pórticos regulares totalmente contraventados (diferenças relativas que não ultrapassam os 6%).

- Para iguais valores de  $\sigma$  e  $k_2$ , a razão  $l_e/L_c$  decresce quando  $\rho$  (resp.  $k_1$ ) diminui (resp. aumenta). Este resultado reflete a diminuição do comprimento de encurvadura com o progressivamente maior grau de encastramento conferido pelas vigas ao pilar.

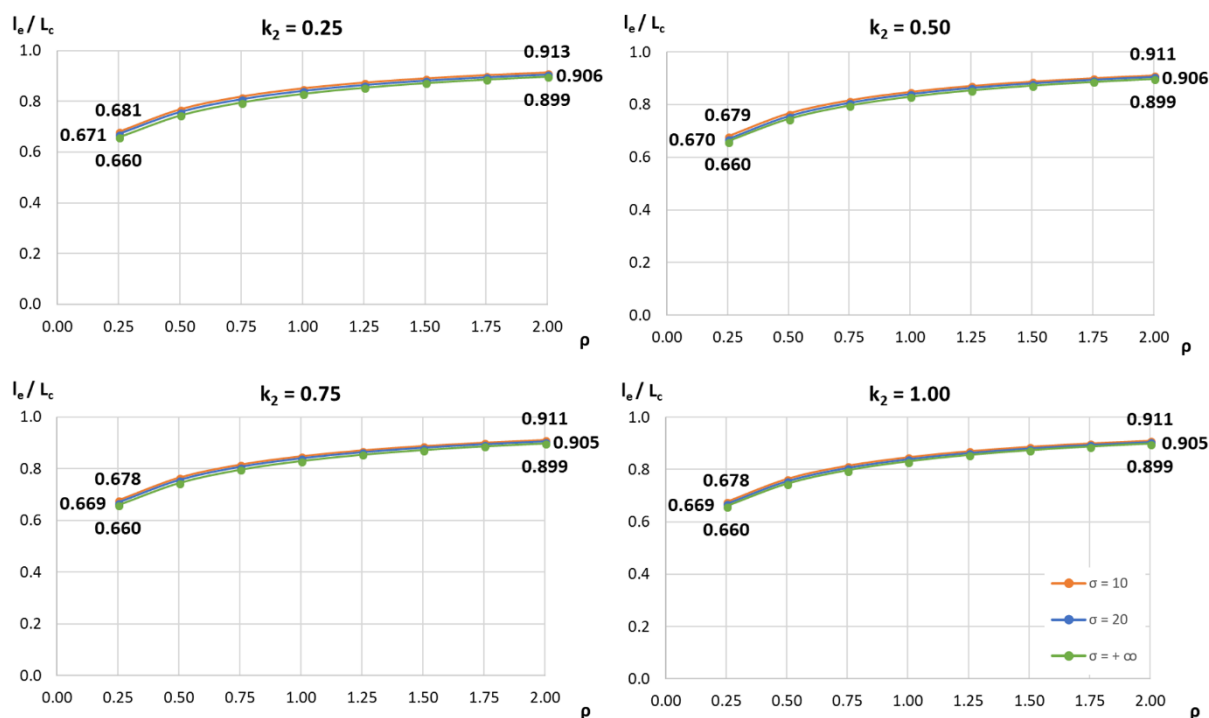


Figura 3.8 – Subestrutura contraventada – Relação  $l_e/L_c$  em função de  $\rho$  para  $k_1 = 0,25$  e valores selecionados de  $k_2$

Quadro 3.1 – Subestrutura contraventada – Relação  $l_e/L_c$  para  $k_1 = 0,25$

$k_2$	$\sigma$	$\rho$							
		0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.25	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	0.681	0.769	0.819	0.851	0.873	0.890	0.903	0.913
	20	0.671	0.758	0.809	0.842	0.865	0.882	0.896	0.906
	$+\infty$	0.660	0.746	0.797	0.831	0.855	0.873	0.888	0.899
0.50	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	0.679	0.767	0.817	0.849	0.872	0.888	0.901	0.911
	20	0.670	0.757	0.807	0.841	0.864	0.881	0.895	0.906
	$+\infty$	0.660	0.746	0.797	0.831	0.855	0.873	0.888	0.899
0.75	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	0.678	0.766	0.816	0.848	0.871	0.888	0.901	0.911
	20	0.669	0.756	0.807	0.840	0.864	0.881	0.895	0.905
	$+\infty$	0.660	0.746	0.797	0.831	0.855	0.873	0.888	0.899
1.00	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	0.678	0.765	0.816	0.848	0.871	0.888	0.900	0.911
	20	0.669	0.756	0.807	0.840	0.864	0.881	0.894	0.905
	$+\infty$	0.660	0.746	0.797	0.831	0.855	0.873	0.888	0.899

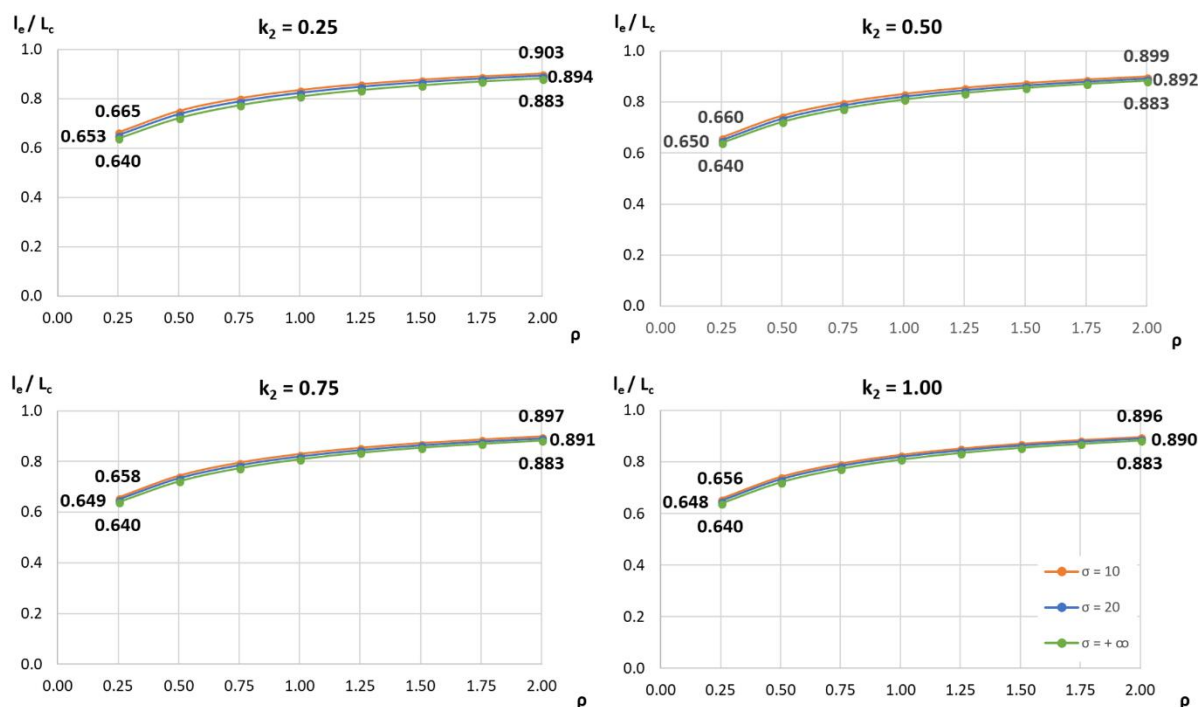


Figura 3.9 – Subestrutura contraventada – Relação  $l_e/L_c$  em função de  $\rho$  para  $k_1 = 0,50$  e valores seleccionados de  $k_2$

Quadro 3.2 – Subestrutura contraventada – Relação  $l_e/L_c$  para  $k_1 = 0,50$

$k_2$	$\sigma$	$\rho$							
		0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.25	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	0.665	0.752	0.803	0.837	0.860	0.878	0.892	0.903
	20	0.653	0.738	0.790	0.824	0.849	0.868	0.882	0.894
	$+\infty$	0.640	0.722	0.774	0.810	0.836	0.855	0.871	0.883
0.50	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	0.660	0.746	0.797	0.831	0.855	0.873	0.888	0.899
	20	0.650	0.735	0.786	0.821	0.846	0.865	0.880	0.892
	$+\infty$	0.640	0.722	0.774	0.810	0.836	0.855	0.871	0.883
0.75	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	0.658	0.743	0.795	0.829	0.853	0.872	0.886	0.897
	20	0.649	0.733	0.785	0.820	0.845	0.864	0.879	0.891
	$+\infty$	0.640	0.722	0.774	0.810	0.836	0.855	0.871	0.883
1.00	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	0.656	0.742	0.793	0.828	0.852	0.871	0.885	0.896
	20	0.648	0.733	0.784	0.819	0.844	0.863	0.878	0.890
	$+\infty$	0.640	0.722	0.774	0.810	0.836	0.855	0.871	0.883

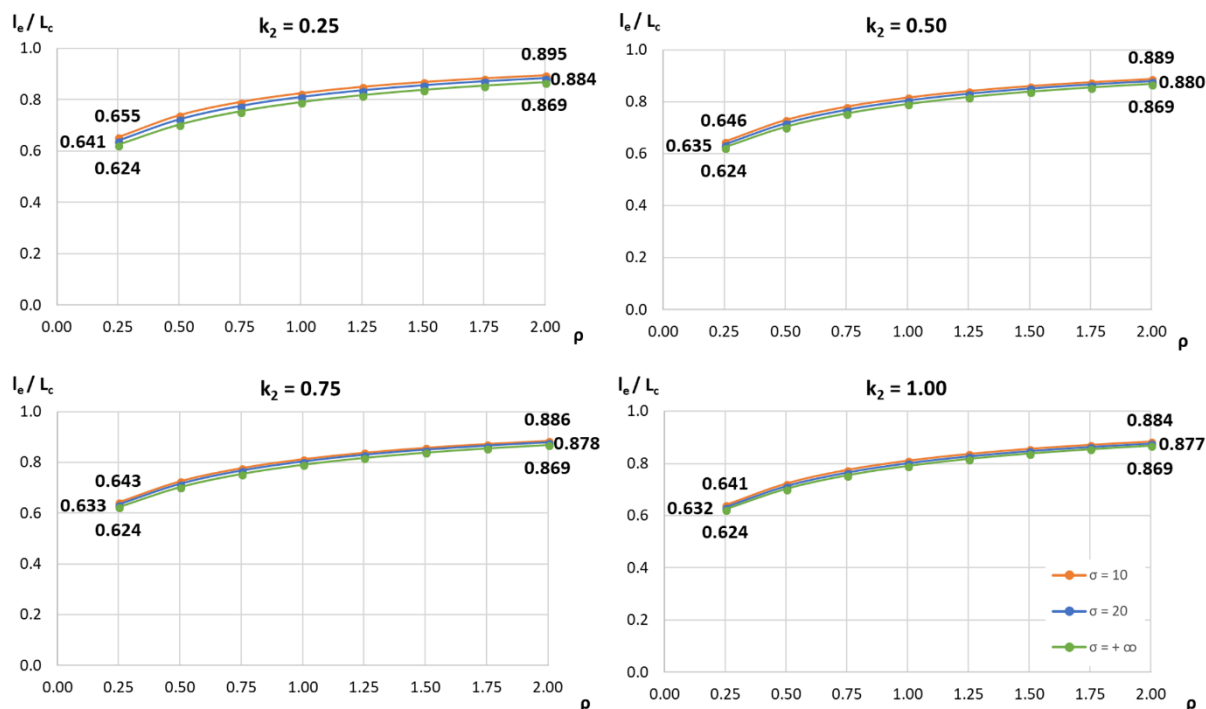


Figura 3.10 – Subestrutura contraventada – Relação  $l_e/L_c$  em função de  $\rho$  para  $k_1 = 0,75$  e valores selecionados de  $k_2$

Quadro 3.3 – Subestrutura contraventada – Relação  $l_e/L_c$  para  $k_1 = 0,75$

$k_2$	$\sigma$	$\rho$							
		0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.25	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	0.655	0.740	0.792	0.826	0.851	0.869	0.884	0.895
	20	0.641	0.724	0.775	0.811	0.837	0.856	0.872	0.884
	$+\infty$	0.624	0.703	0.755	0.791	0.818	0.839	0.855	0.869
0.50	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	0.646	0.730	0.782	0.817	0.842	0.862	0.877	0.889
	20	0.635	0.717	0.769	0.805	0.831	0.851	0.867	0.880
	$+\infty$	0.624	0.703	0.755	0.791	0.818	0.839	0.855	0.869
0.75	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	0.643	0.726	0.778	0.813	0.839	0.858	0.873	0.886
	20	0.633	0.715	0.767	0.803	0.829	0.849	0.865	0.878
	$+\infty$	0.624	0.703	0.755	0.791	0.818	0.839	0.855	0.869
1.00	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	0.641	0.724	0.775	0.811	0.837	0.856	0.872	0.884
	20	0.632	0.714	0.766	0.801	0.828	0.848	0.864	0.877
	$+\infty$	0.624	0.703	0.755	0.791	0.818	0.839	0.855	0.869



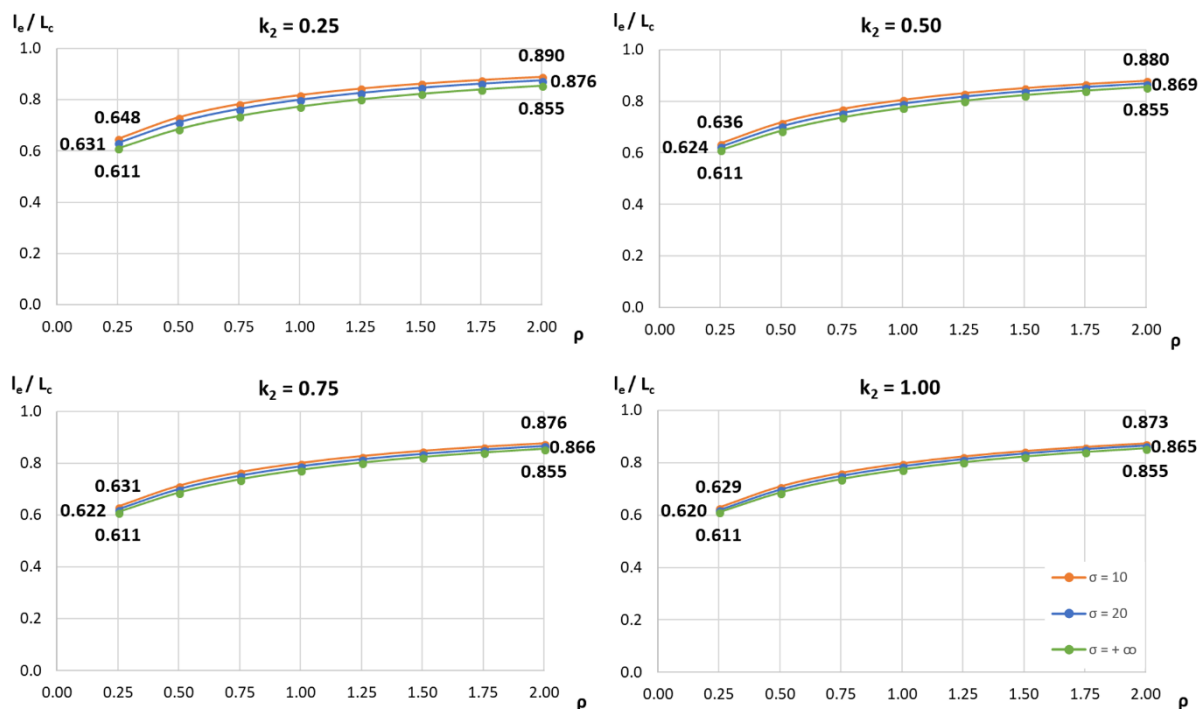


Figura 3.11 – Subestrutura contraventada – Relação  $l_e/L_c$  em função de  $\rho$  para  $k_1 = 1,00$  e valores seleccionados de  $k_2$

Quadro 3.4 – Subestrutura contraventada – Relação  $l_e/L_c$  para  $k_1 = 1,00$

$k_2$	$\sigma$	$\rho$							
		0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.25	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	0.648	0.732	0.784	0.819	0.844	0.863	0.878	0.890
	20	0.631	0.712	0.764	0.800	0.827	0.847	0.863	0.876
	$+\infty$	0.611	0.686	0.737	0.774	0.802	0.824	0.841	0.855
0.50	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	0.636	0.718	0.770	0.806	0.832	0.852	0.868	0.880
	20	0.624	0.703	0.755	0.792	0.818	0.839	0.856	0.869
	$+\infty$	0.611	0.686	0.737	0.774	0.802	0.824	0.841	0.855
0.75	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	0.631	0.712	0.764	0.800	0.827	0.847	0.863	0.876
	20	0.622	0.700	0.752	0.788	0.815	0.836	0.853	0.866
	$+\infty$	0.611	0.686	0.737	0.774	0.802	0.824	0.841	0.855
1.00	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	0.629	0.709	0.761	0.797	0.824	0.844	0.860	0.873
	20	0.620	0.698	0.750	0.786	0.813	0.835	0.851	0.865
	$+\infty$	0.611	0.686	0.737	0.774	0.802	0.824	0.841	0.855

### 3.3 Subestrutura arquétipo não contraventada

#### 3.3.1 Matriz de rigidez e equação característica

A malha de elementos finitos adotada para a subestrutura arquétipo não contraventada é idêntica à descrita no subcapítulo 3.2.1. A única diferença é que se utiliza agora, para cada uma das peças lineares, um único elemento finito “exato” em que a rotação numa das extremidades é dependente (subcapítulo 2.3.2). Mais uma vez, na configuração de equilíbrio fundamental, o esforço axial nas vigas é nulo, pelo que, nesses elementos, as funções de estabilidade de Livesley  $\phi_i$  têm valor unitário; nos dois troços de coluna, o esforço axial é uniforme e igual a  $P$  (compressão). Para  $s > 0$  finito<sup>7</sup>, a malha apresenta, portanto, um grau de indeterminação cinemática igual a cinco, com os deslocamentos nodais independentes indicados na Figura 3.12.

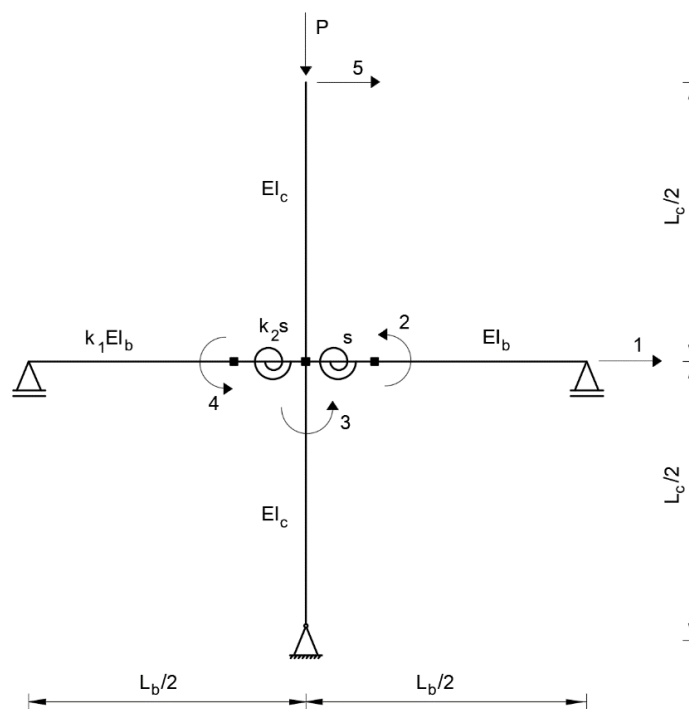


Figura 3.12 – Subestrutura arquétipo não contraventada – Discretização e deslocamentos nodais independentes ( $s > 0$  finito)

<sup>7</sup> Para  $s = 0$  (ligação viga-pilar perfeitamente articulada, com continuidade do pilar), a subestrutura transforma-se num mecanismo e a sua carga crítica anula-se; o comprimento de encurvadura seria então infinitamente grande. O caso  $s = +\infty$  será analisado mais à frente.

A construção, por colunas, da matriz de rigidez da subestrutura arquétipo está esquematizada na Figura 3.13. Obtém-se

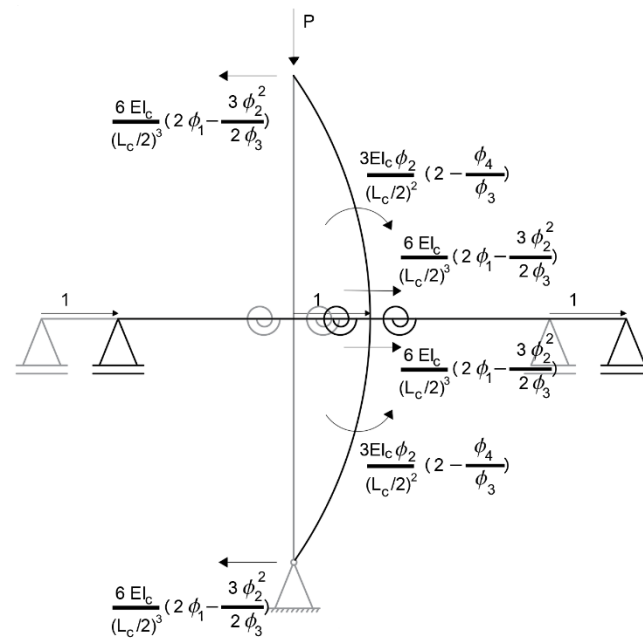
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{12 EI_c}{(L_c/2)^3} \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) & 0 & 0 & 0 & -\frac{6 EI_c}{(L_c/2)^3} \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) \\ 0 & \frac{3EI_b}{L_b/2} + s & -s & 0 & 0 \\ 0 & -s & \frac{2 EI_c}{L_c/2} \left( 4\phi_3 - \frac{\phi_4^2}{\phi_3} \right) + (1 + k_2)s & -k_2s & \frac{3 EI_c \phi_2}{(L_c/2)^2} \left( 2 - \frac{\phi_4}{\phi_3} \right) \\ 0 & 0 & -k_2s & \frac{3 k_1 EI_b}{L_b/2} + k_2s & 0 \\ -\frac{6 EI_c}{(L_c/2)^3} \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) & 0 & \frac{3 EI_c \phi_2}{(L_c/2)^2} \left( 2 - \frac{\phi_4}{\phi_3} \right) & 0 & \frac{6 EI_c}{(L_c/2)^3} \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) \end{bmatrix}. \quad (87)$$

Usando os quocientes adimensionais (79) e (80), a equação característica  $\det \mathbf{K} = 0$  pode ser escrita na forma

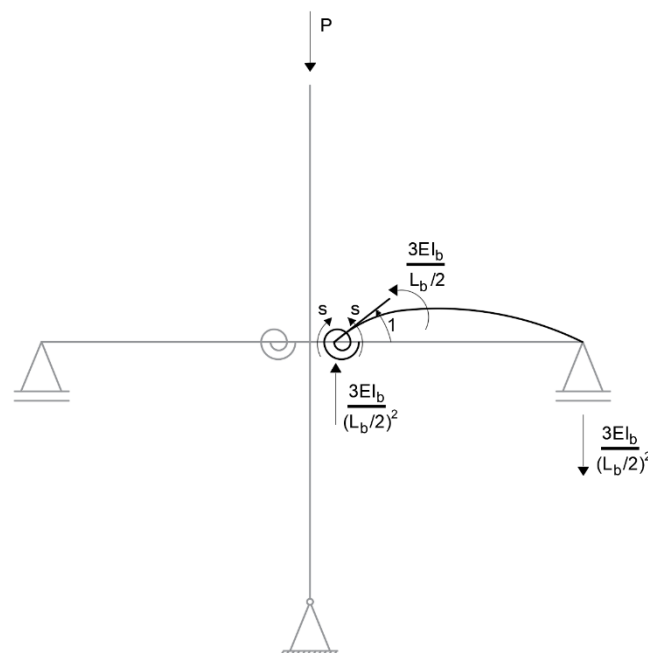
$$\det \begin{bmatrix} 24\rho \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) & 0 & 0 & 0 & -12\rho \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) \\ 0 & 6 + \sigma & -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 4\rho \left( 4\phi_3 - \frac{\phi_4^2}{\phi_3} \right) + (1 + k_2)\sigma & -k_2\sigma & 6\rho\phi_2 \left( 2 - \frac{\phi_4}{\phi_3} \right) \\ 0 & 0 & -k_2\sigma & 6k_1 + k_2\sigma & 0 \\ -12\rho \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) & 0 & 6\rho\phi_2 \left( 2 - \frac{\phi_4}{\phi_3} \right) & 0 & 12\rho \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) \end{bmatrix} = 0. \quad (88)$$

Para  $s = +\infty$  (ligação viga-pilar rígida), o grau de indeterminação cinemática da malha de elementos finitos adotada reduz-se a três, com os deslocamentos nodais independentes indicados na Figura 3.14. A correspondente matriz de rigidez fica (Figura 3.15)

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{12 EI_c}{(L_c/2)^3} \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) & 0 & -\frac{6 EI_c}{(L_c/2)^3} \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) \\ 0 & \frac{2 EI_c}{L_c/2} \left( 4\phi_3 - \frac{\phi_4^2}{\phi_3} \right) + \frac{3EI_b}{L_b/2} (1 + k_1) & \frac{3 EI_c \phi_2}{(L_c/2)^2} \left( 2 - \frac{\phi_4}{\phi_3} \right) \\ -\frac{6 EI_c}{(L_c/2)^3} \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) & \frac{3 EI_c \phi_2}{(L_c/2)^2} \left( 2 - \frac{\phi_4}{\phi_3} \right) & \frac{6 EI_c}{(L_c/2)^3} \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) \end{bmatrix} \quad (89)$$

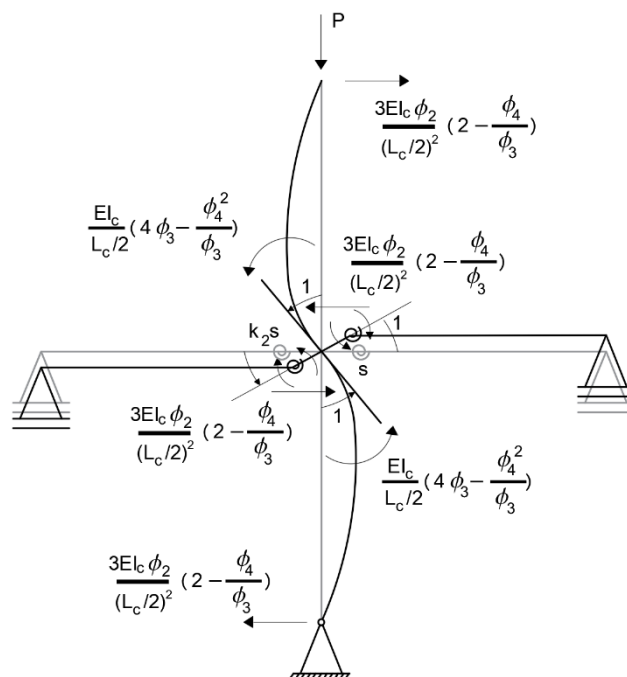


(a)  $d_1 = 1, d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 0$

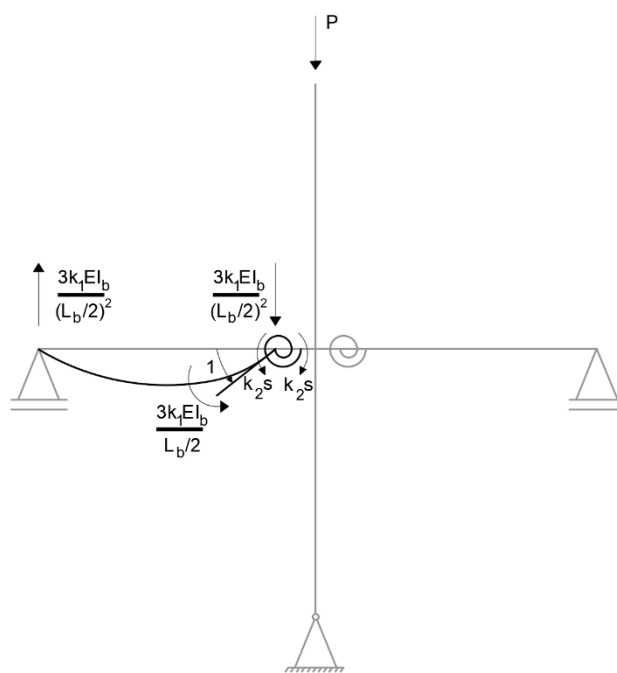


(b)  $d_2 = 1, d_1 = d_3 = d_4 = d_5 = 0$

Figura 3.13 – Construção, por colunas, da matriz de rigidez da subestrutura arquétipo não contraventada ( $s > 0$  finito)

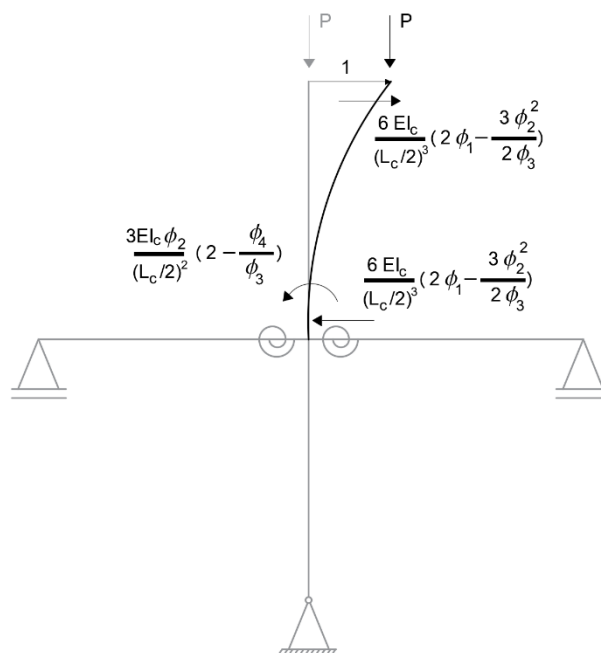


(c)  $d_3 = 1, d_1 = d_2 = d_4 = d_5 = 0$



(d)  $d_4 = 1, d_1 = d_2 = d_3 = d_5 = 0$

Figura 3.13 (cont.) – Construção, por colunas, da matriz de rigidez da subestrutura arquétipo não contraventada ( $s > 0$  finito)



(e)  $d_5 = 1, d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$

Figura 3.13 (cont.) – Construção, por colunas, da matriz de rigidez da subestrutura arquétipo não contraventada ( $s > 0$  finito)

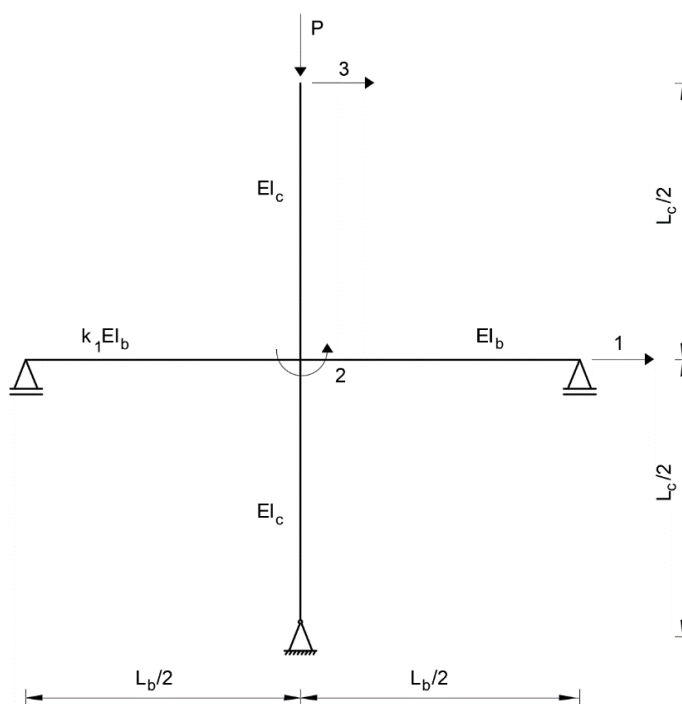
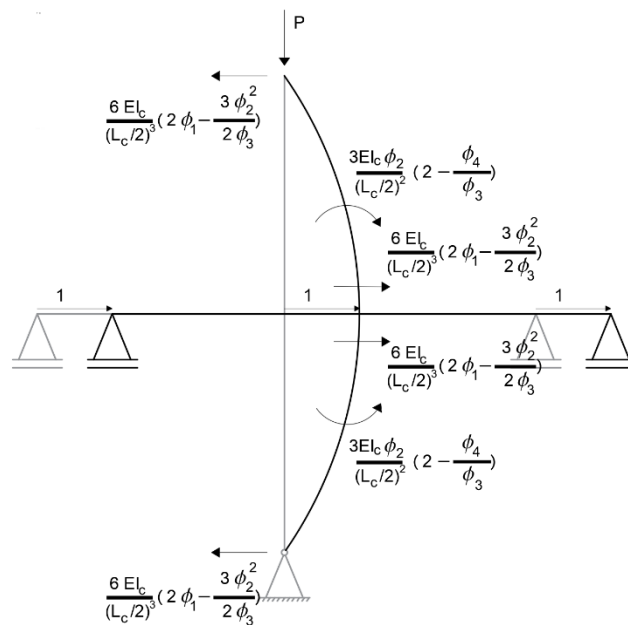
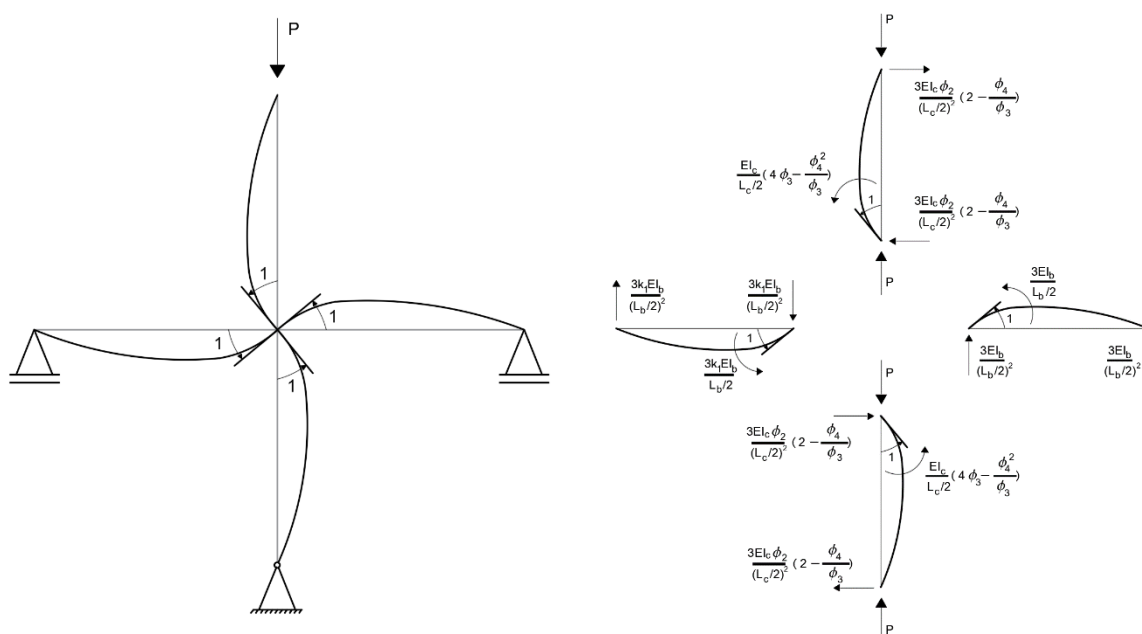


Figura 3.14 – Subestrutura arquétipo não contraventada – Deslocamentos nodais independentes quando  $s = +\infty$

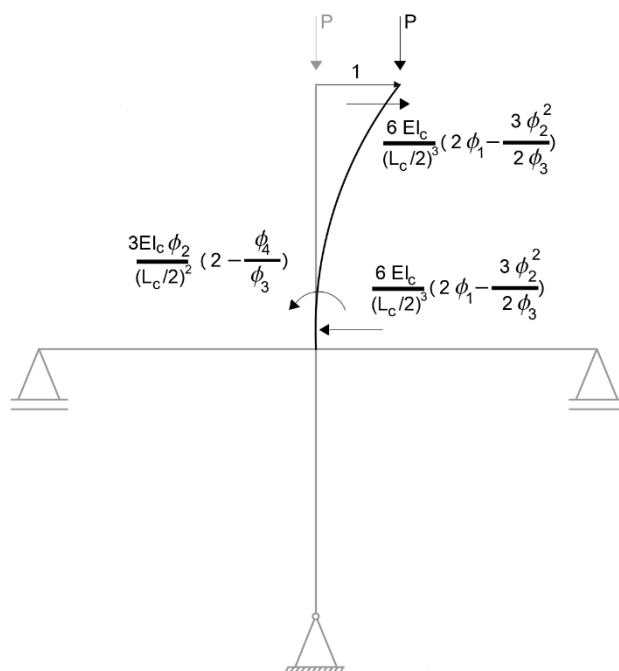


(a)  $d_1 = 1, d_2 = d_3 = 0$



(b)  $d_2 = 1, d_1 = d_3 = 0$

Figura 3.15 – Construção, por colunas, da matriz de rigidez da subestrutura arquétipo não contraventada quando  $s = +\infty$



$$(c) d_3 = 1, d_1 = d_2 = 0$$

Figura 3.15 (cont.) – Construção, por colunas, da matriz de rigidez da subestrutura arquétipo não contraventada quando  $s = +\infty$

e a equação característica (independente de  $k_2$ ) pode ser colocada na forma

$$\det \begin{bmatrix} 12\rho \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) & 0 & -6\rho \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) \\ 0 & 2\rho \left( 4\phi_3 - \frac{\phi_4^2}{\phi_3} \right) + 3(1 + k_1) & 3\rho\phi_2 \left( 2 - \frac{\phi_4}{\phi_3} \right) \\ -6\rho \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) & 3\rho\phi_2 \left( 2 - \frac{\phi_4}{\phi_3} \right) & 6\rho \left( 2\phi_1 - \frac{3\phi_2^2}{2\phi_3} \right) \end{bmatrix} = 0. \quad (90)$$

Para a determinação da menor raiz positiva,  $\beta_{cr}$ , das equações características (88) e (90), recorreu-se novamente às funções *Plot* (quando necessário estabelecer uma estimativa inicial) e *FindRoot* do programa *Mathematica* (Wolfram Research, 2006). Conhecido  $\beta_{cr}$ , o comprimento de encurvadura do pilar é dado por (84).



### 3.3.2 Estudo paramétrico

No estudo paramétrico realizado, as gamas de variação consideradas para os parâmetros adimensionais  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\rho$  e  $\sigma$  foram as definidas anteriormente no subcapítulo 3.2.2. Exclui-se, no entanto, o caso  $\sigma = 0$ , pela razão apontada na nota de rodapé 6. Os resultados obtidos estão representados graficamente nas Figuras 3.16 a 3.19. Cada uma destas figuras diz respeito a um valor fixo de  $k_1$  e inclui quatro gráficos, um para cada valor de  $k_2$  considerado. Para facilitar a leitura, os resultados são também apresentados em forma tabular nos Quadros 3.5 a 3.8, organizados da mesma forma. Salientam-se os seguintes aspetos:

- O comprimento de encurvadura  $l_e$  é sempre superior a  $L_c$ , em conformidade com o carácter não contraventado do pórtico.
- Para iguais valores de  $\rho$ ,  $k_1$  e  $k_2$ , a razão  $l_e/L_c$  aumenta de forma significativa quando  $\sigma$  diminui (*e.g.*, quando  $\rho = 2,00$ ,  $k_1 = 1,00$  e  $k_2 = 0,25$ , a razão  $l_e/L_c$  para  $\sigma = 10$  é cerca de 32% superior relativamente ao caso de referência  $\sigma = +\infty$ ). Verifica-se também que, para iguais valores de  $\rho$ ,  $k_1$  e  $\sigma \neq +\infty$ , a razão  $l_e/L_c$  aumenta moderadamente quando  $k_2$  diminui, sobretudo para valores elevados de  $\rho$  e  $k_1$ . Estes resultados mostram que a deformabilidade das ligações viga-pilar não deve ser desprezada no cálculo dos comprimentos de encurvadura de pilares em pórticos regulares não contraventados.
- Para iguais valores de  $\sigma$  e  $k_2$ , a razão  $l_e/L_c$  decresce quando  $\rho$  (resp.  $k_1$ ) diminui (resp. aumenta). Este resultado reflete a diminuição do comprimento de encurvadura com o progressivamente maior grau de encastramento (*i.e.*, de restrição da rotação) conferido pelas vigas ao pilar.

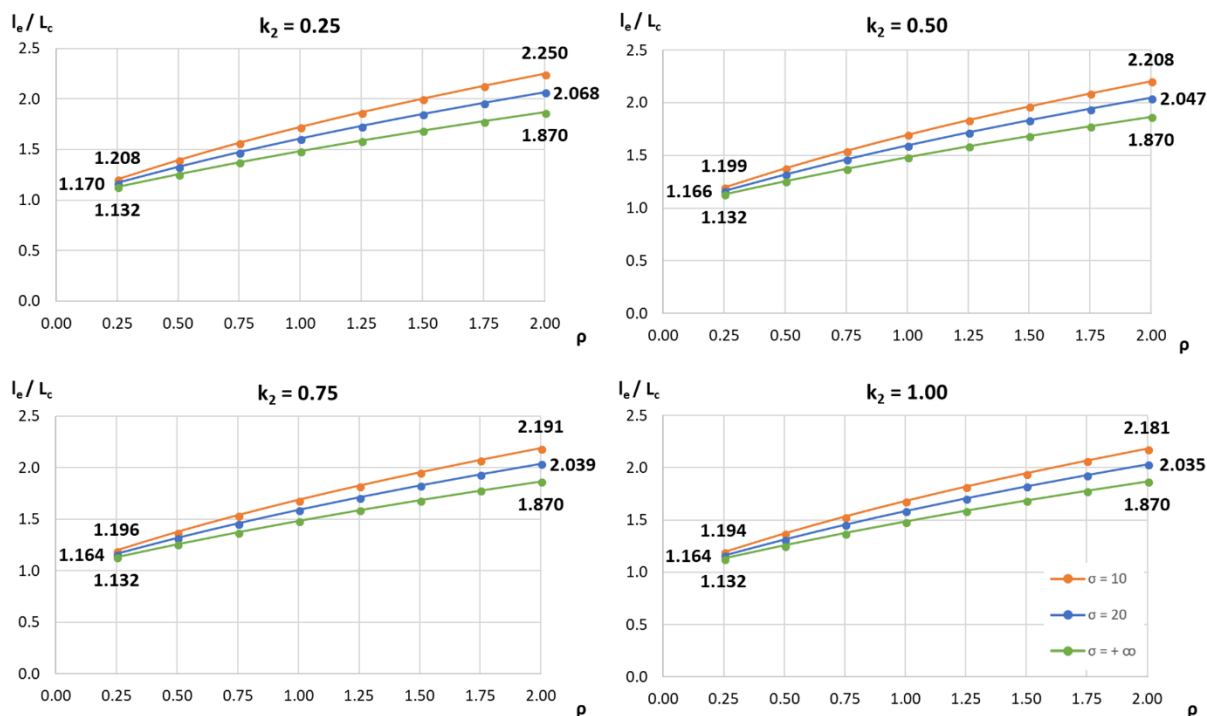


Figura 3.16 – Subestrutura não contraventada – Relação  $l_e/L_c$  em função de  $\rho$  para  $k_1 = 0,25$  e valores seleccionados de  $k_2$

Quadro 3.5 – Subestrutura não contraventada – Relação  $l_e/L_c$  para  $k_1 = 0,25$

$k_2$	$\sigma$	$\rho$							
		0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.25	10	1.208	1.398	1.569	1.725	1.870	2.004	2.130	2.250
	20	1.170	1.329	1.475	1.610	1.735	1.852	1.963	2.068
	$+\infty$	1.132	1.257	1.375	1.486	1.589	1.688	1.781	1.870
0.50	10	1.199	1.382	1.547	1.699	1.839	1.969	2.092	2.208
	20	1.166	1.321	1.464	1.596	1.719	1.835	1.944	2.047
	$+\infty$	1.132	1.257	1.375	1.486	1.589	1.688	1.781	1.870
0.75	10	1.196	1.375	1.538	1.688	1.826	1.955	2.076	2.191
	20	1.164	1.318	1.460	1.591	1.713	1.828	1.936	2.039
	$+\infty$	1.132	1.257	1.375	1.486	1.589	1.688	1.781	1.870
1.00	10	1.194	1.372	1.533	1.681	1.819	1.947	2.067	2.181
	20	1.164	1.317	1.458	1.589	1.710	1.825	1.933	2.035
	$+\infty$	1.132	1.257	1.375	1.486	1.589	1.688	1.781	1.870

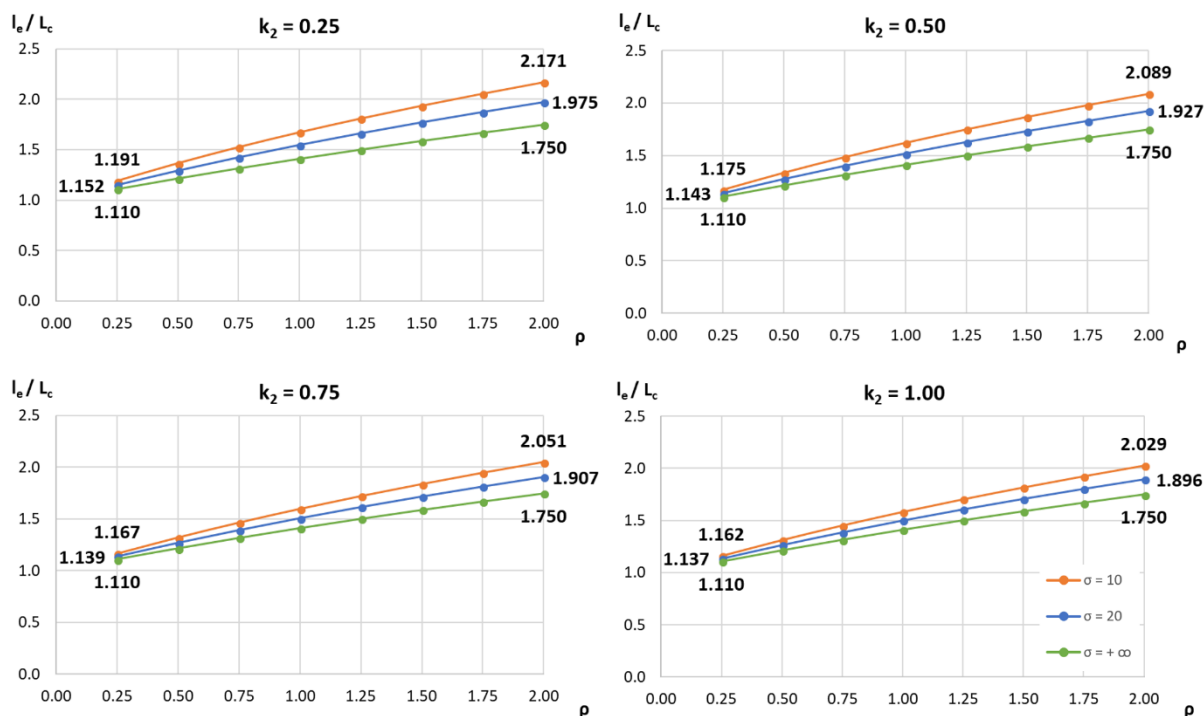


Figura 3.17 – Subestrutura não contraventada – Relação  $l_e/L_c$  em função de  $\rho$  para  $k_1 = 0,50$  e valores selecionados de  $k_2$

Quadro 3.6 – Subestrutura não contraventada – Relação  $l_e/L_c$  para  $k_1 = 0,50$

$k_2$	$\sigma$	$\rho$							
		0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.25	10	1.191	1.368	1.528	1.675	1.811	1.938	2.058	2.171
	20	1.152	1.295	1.428	1.551	1.666	1.775	1.877	1.975
	$+\infty$	1.110	1.216	1.317	1.413	1.503	1.589	1.672	1.750
0.50	10	1.175	1.337	1.486	1.623	1.750	1.870	1.982	2.089
	20	1.143	1.278	1.403	1.521	1.631	1.735	1.833	1.927
	$+\infty$	1.110	1.216	1.317	1.413	1.503	1.589	1.672	1.750
0.75	10	1.167	1.323	1.466	1.599	1.722	1.838	1.947	2.051
	20	1.139	1.271	1.394	1.509	1.617	1.718	1.815	1.907
	$+\infty$	1.110	1.216	1.317	1.413	1.503	1.589	1.672	1.750
1.00	10	1.162	1.314	1.455	1.585	1.706	1.819	1.927	2.029
	20	1.137	1.267	1.388	1.502	1.609	1.709	1.805	1.896
	$+\infty$	1.110	1.216	1.317	1.413	1.503	1.589	1.672	1.750

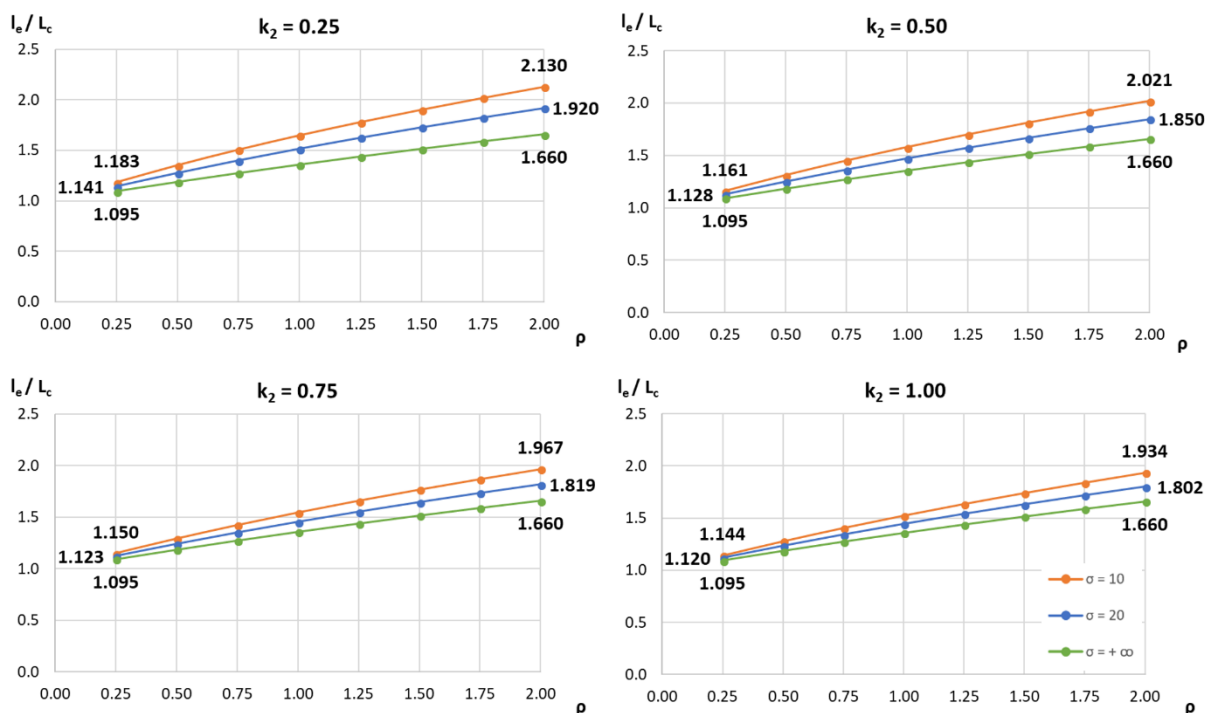


Figura 3.18 – Subestrutura não contraventada – Relação  $l_e/L_c$  em função de  $\rho$  para  $k_1 = 0,75$  e valores seleccionados de  $k_2$

Quadro 3.7 – Subestrutura não contraventada – Relação  $l_e/L_c$  para  $k_1 = 0,75$

$k_2$	$\sigma$	$\rho$							
		0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.25	10	1.183	1.352	1.507	1.649	1.781	1.904	2.020	2.130
	20	1.141	1.275	1.400	1.517	1.626	1.730	1.827	1.920
	$+\infty$	1.095	1.187	1.275	1.359	1.439	1.516	1.589	1.660
0.50	10	1.161	1.312	1.451	1.580	1.700	1.813	1.920	2.021
	20	1.128	1.250	1.365	1.473	1.575	1.671	1.763	1.850
	$+\infty$	1.095	1.187	1.275	1.359	1.439	1.516	1.589	1.660
0.75	10	1.150	1.292	1.423	1.546	1.660	1.768	1.870	1.967
	20	1.123	1.240	1.351	1.455	1.553	1.646	1.735	1.819
	$+\infty$	1.095	1.187	1.275	1.359	1.439	1.516	1.589	1.660
1.00	10	1.144	1.280	1.407	1.526	1.636	1.741	1.840	1.934
	20	1.120	1.234	1.342	1.444	1.541	1.632	1.719	1.802
	$+\infty$	1.095	1.187	1.275	1.359	1.439	1.516	1.589	1.660

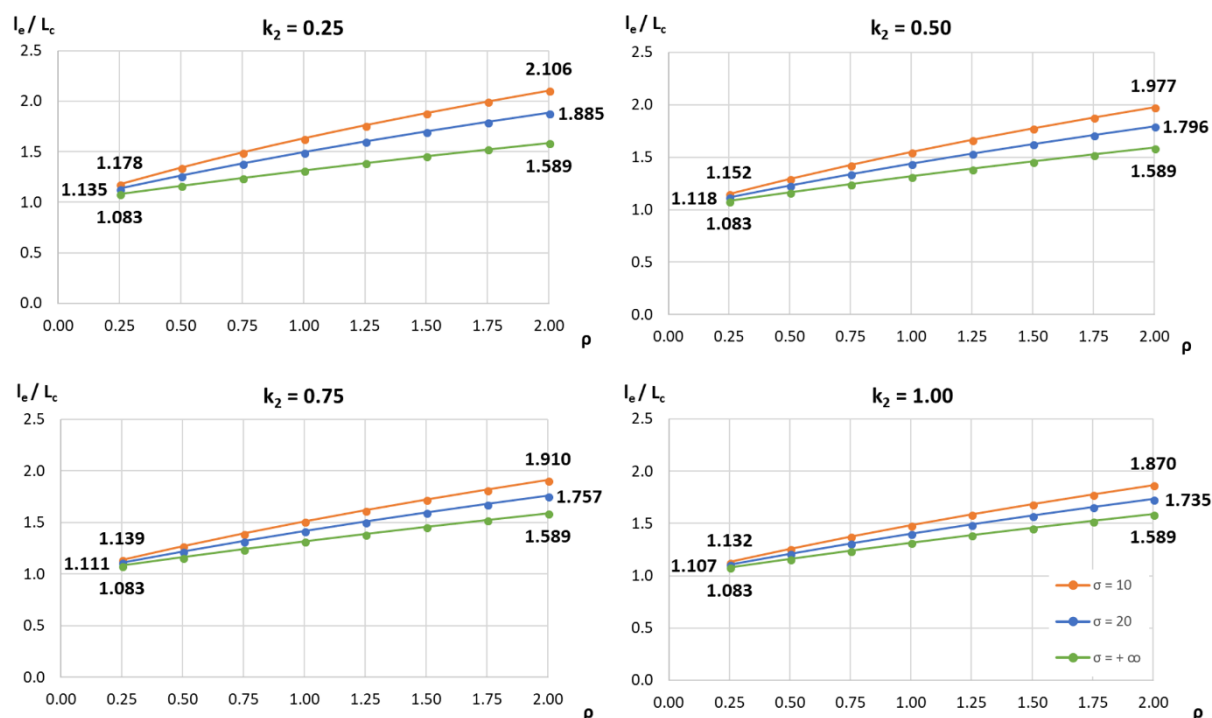


Figura 3.19 – Subestrutura não contraventada – Relação  $l_e/L_c$  em função de  $\rho$  para  $k_1 = 1,00$  e valores seleccionados de  $k_2$

Quadro 3.8 – Subestrutura não contraventada – Relação  $l_e/L_c$  para  $k_1 = 1,00$

$k_2$	$\sigma$	$\rho$							
		0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.25	10	1.178	1.343	1.494	1.633	1.763	1.884	1.998	2.106
	20	1.135	1.263	1.383	1.495	1.600	1.700	1.794	1.885
	$+\infty$	1.083	1.164	1.242	1.317	1.389	1.459	1.525	1.589
0.50	10	1.152	1.295	1.428	1.552	1.667	1.776	1.879	1.977
	20	1.118	1.232	1.339	1.441	1.537	1.627	1.714	1.796
	$+\infty$	1.083	1.164	1.242	1.317	1.389	1.459	1.525	1.589
0.75	10	1.139	1.272	1.395	1.511	1.619	1.721	1.818	1.910
	20	1.111	1.219	1.321	1.417	1.508	1.595	1.678	1.757
	$+\infty$	1.083	1.164	1.242	1.317	1.389	1.459	1.525	1.589
1.00	10	1.132	1.257	1.375	1.486	1.589	1.688	1.781	1.870
	20	1.107	1.211	1.310	1.403	1.492	1.577	1.658	1.735
	$+\infty$	1.083	1.164	1.242	1.317	1.389	1.459	1.525	1.589

## 4 CONCLUSÃO

Nesta dissertação, analisou-se a influência da flexibilidade das ligações viga-pilar nos comprimentos de encurvadura de pilares em pórticos planos e regulares de betão armado. O estudo é realizado em regime materialmente linear e incide sobre duas subestruturas arquétipo, representativas de pilares interiores em pórticos totalmente contraventados ou não contraventados. Ambas as subestruturas arquétipo incluem uma ligação viga-pilar interior e estão limitadas pelas secções de meio vão e de meia altura das vigas e dos pilares adjacentes; diferem nas condições de fronteira. Para modelar a flexibilidade das ligações viga-pilar, recorre-se a elementos pontuais com rigidez rotacional finita (“molas rotacionais”) nas extremidades das vigas, junto à sua intersecção com o eixo do pilar, o qual é contínuo. A gama de valores adotada para os diferentes parâmetros adimensionais envolvidos na definição do problema cobre os pórticos regulares de betão armado correntes na prática atual de projeto.

Os resultados obtidos mostram que:

- Em pórticos regulares totalmente contraventados, a deformabilidade de ligações viga-pilar com características de rigidez na gama considerada não afeta de forma significativa os comprimentos de encurvadura dos pilares (diferenças relativas que não ultrapassam os 6%) e poderá ser desprezada.
- Pelo contrário, em pórticos regulares não contraventados, a deformabilidade das ligações viga-pilar afeta consideravelmente os comprimentos de encurvadura dos pilares e não deve ser desprezada.

Finalmente, com base na experiência adquirida durante a realização deste trabalho, sugerem-se os seguintes desenvolvimentos futuros:

- Avaliação da representatividade das subestruturas arquétipo utilizadas nos estudos paramétricos e dos erros cometidos quando se extrapolam os resultados para pórticos completos.

- Análise de outras tipologias de ligações viga-pilar, tanto em pórticos planos como em pórticos tridimensionais (Figura 1.3).
- Consideração de situações intermédias entre pórticos não contraventados e pórticos totalmente contraventados.
- Consideração explícita das dimensões reais da ligação viga-pilar e dos principais mecanismos envolvidos na sua resposta, incluindo a deformabilidade por corte (Figura 4.1). Para tal, a ligação poderá ser individualizada como um elemento estrutural per se e modelada por intermédio macro-elemento como o representado na Figura 4.2, proposto por Costa, 2013).
- De forma mais ambiciosa, poder-se-á pensar ainda na inclusão de não linearidades materiais e efeitos diferidos.

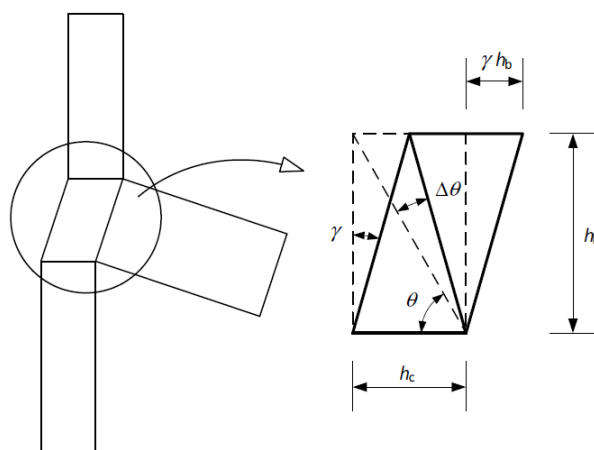


Figura 4.1 – Distorção de uma ligação viga-pilar (Costa, 2013)

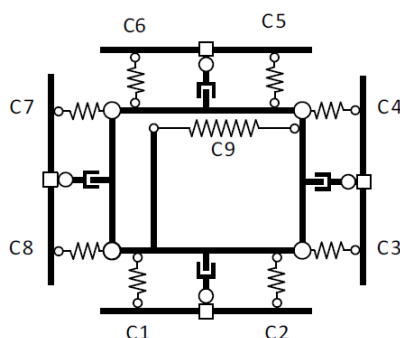


Figura 4.2 – Macro-elemento proposto por Costa (2013)

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACI 352R-02 (2002). “Recommendations for Design of Beam-Column Connections in Monolithic Reinforced Concrete Structures”. American Concrete Institute.
- ASCE/SEI 41-06 (2007). “Seismic Rehabilitation of Existing Buildings”. American Society of Civil Engineers, Reston, Virginia.
- Bazant, Z.P., Cedolin, L. (1991). “Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories”. Oxford University Press, New York.
- Birkhoff, G., Rota, G.-C. (1989). “Ordinary Differential Equations” (4<sup>th</sup> edition). Wiley, New York.
- Costa, R.J.T. (2013). “Modelação de Ligações Viga-Pilar na Análise de Estruturas Porticadas Planas de Betão Armado”. Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra
- Costa, R., Gomes, F., Providência, P., Dias, A. (2013). “Influence of Shear Deformation of Exterior Beam-Column Joints on the Quasi-Static Behavior of RC Framed Structures”. *Computers and Concrete*, Vol. 12, Issue 4, pp. 393-411.
- Costa, R., Providência, P., Ferreira, M. (2017). “Influence of Joint Modelling on the Pushover Analysis of a RC Frame”. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 64, Issue 5, pp. 641-652.
- Dias da Silva, V. (2013). “Mecânica e Resistência dos Materiais” (4<sup>a</sup> edição). Coimbra.
- Ferreira, J.C. (1987). “Introdução à Análise Matemática”. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Gomes, F.C.T., Kulhmann, U., Matteis, G.D., Mandara, A. (1998). “Recent Developments on Classification of Joints”. COST-C1 International Conference – Control of the Semi-Rigid Behaviour of Civil Engineering Structural Connections, Liège.



- Hegger, J., Sherif, A., Roeser, W. (2004). “Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beam-Column Connections”. *ACI Structural Journal*, Vol. 101, Issue 5, pp. 604-614.
- Kim, J., LaFave, J.M., Song, J. (2009). “Joint Shear Behaviour of Reinforced Concrete Beam-Column Connections”. *Magazine of Concrete Research*, Vol. 61, Issue 2, pp. 119-132.
- Kollár, L. (1999). “Structural Stability in Engineering Practice”. E & FN Spon, London.
- Livesley, R.K. (1975). “Matrix Methods of Structural Analysis”. Pergamon Press, Oxford.
- Mitra, N., Lowes L.N. (2007). “Evaluation, Calibration, and Verification of a Reinforced Concrete Beam-Column Joint Model”. *Journal of Structural Engineering – ASCE*, Vol. 133, Issue 1, pp. 105-120.
- NP EN 1992-1-1 (2010). “Eurocódigo 2 – Projeto de Estruturas de Betão. Parte 1-1: Regras Gerais e Regras para Edifícios”. Instituto Português da Qualidade, Caparica.
- NP EN 1993-1-1 (2010). “Eurocódigo 3 – Projecto de Estruturas de Aço. Parte 1-1: Regras Gerais e Regras para Edifícios”. Instituto Português da Qualidade, Caparica.
- NP EN 1993-1-8 (2010). “Eurocódigo 3 – Projecto de Estruturas de Aço. Parte 1-8: Projecto de Ligações”. Instituto Português da Qualidade, Caparica.
- NP EN 1998-1 (2010). “Eurocódigo 8 – Projecto de Estruturas para a Resistência aos Sismos. Parte 1: Regras Gerais, Acções Sísmicas e Regras para Edifícios”. Instituto Português da Qualidade, Caparica.
- NP EN 1998-3 (2017). “Eurocódigo 8 – Projecto de Estruturas para a Resistência aos Sismos. Parte 3: Avaliação e Reabilitação de Edifícios”. Instituto Português da Qualidade, Caparica.
- Paulay, T., Priestley, M.J.N. (1992). “Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings”. Wiley, New York.
- Pignataro, M., Rizzi, N., Luongo, A. (1991). “Stability, Bifurcation and Postcritical Behaviour of Elastic Structures”. Elsevier, Amsterdam.
- Providência, P., Andrade, A. (2018). “Teoria das Estruturas I – Apontamentos de Apoio às Aulas”. Mestrado Integrado em Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Reddy, J.N. (1993). “An Introduction to the Finite Element Method” (2<sup>nd</sup> edition). McGraw-Hill, New York.

Reis, A., Camotim, D. (2001). “Estabilidade Estrutural”. McGraw-Hill, Lisboa.

Wolfram Research (2006). “Wolfram Mathematica 6.2”. Champaign, Illinois.