



Maria Carolina da Silva Rasquinho

Otimização convexa sobre o preço de opções *call* europeias

Dissertação de Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças,
orientada pelo Professor Doutor João Eduardo da Silveira Gouveia,
apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia
e à Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra.

Março 2017



UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Otimização convexa sobre o preço de opções *call* europeias

Maria Carolina da Silva Rasquinho



UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças

Master in Quantitative Methods in Finance

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Março de 2017

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador, Doutor João Eduardo da Silveira Gouveia, pelo constante apoio e orientação.

Aos meus pais por todo o apoio e carinho e por me possibilitarem o terminar deste curso. À minha irmã, por todo o carinho.

Às minhas colegas de curso, Carla, Dulce, Inês e Vânia pela amizade, companheirismo e bons momentos de trabalho e lazer ao longo dos últimos cinco anos.

Aos amigos como o Rui, Tiago, Daniel, David e Margarida pelos momentos partilhados. Ao Bruce por toda a paciência e carinho.

À Estudantina Feminina de Coimbra por tantos bons momentos me deu e por me permitir fazer parte do melhor grupo a que pertenci.

À Inês Santos por ser a minha família durante os últimos seis meses.

Resumo

A atribuição de preços a opções é um problema fulcral de matemática financeira com elevada complexidade resultante do caráter de incerteza associado ao poder de escolha do possuidor da opção. Nesse sentido, este trabalho pretende estabelecer limites para o preço de opções *call* europeias, assumindo a não existência de arbitragem. Não especificamos qualquer modelo para a dinâmica do preço do ativo subjacente à opção, considerando apenas restrições sobre a distribuição probabilística do mesmo, na maturidade. Para isso, usamos o problema generalizado do momento e introduzimos ferramentas de otimização convexa, nomeadamente a programação semidefinida. Partindo do trabalho de Bertsimas e Popescu [1], começamos por considerar separadamente restrições sobre os momentos das distribuições e sobre preços de algumas opções do mesmo tipo da que pretendemos estudar. De seguida, com o intuito de melhorar os resultados obtidos pelas abordagens anteriores, propomos um método híbrido cujas propriedades analisamos. Finalizamos este trabalho com um estudo numérico comparativo onde observamos melhorias com a utilização do método híbrido, em comparação às abordagens presentes na literatura analisadas nesta dissertação.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
2 Preliminares	3
2.1 Problema generalizado do momento	3
2.1.1 Programação cónica	3
2.1.2 Problema generalizado do momento	4
2.2 Não negatividade de polinómios de uma variável	7
3 Limitar preços de opções	13
3.1 Introdução ao modelo teórico subjacente	13
3.2 Informação acerca dos momentos do ativo subjacente	13
3.2.1 Validade de um vetor de momentos	14
3.2.2 Limite superior	15
3.2.3 Limite inferior	17
3.2.4 Exemplos	18
3.3 Informação acerca dos preços de outras <i>calls</i>	23
3.3.1 Validade da função de avaliação do preço da opção	23
3.3.2 Limite superior	26
3.3.3 Limite inferior	27
3.3.4 Exemplos	29
3.4 Informação acerca dos momentos do ativo subjacente e outros preços de opções	31
3.4.1 Limite superior	31
3.4.2 Limite inferior	33
4 Resultados numéricos	35
4.1 Distribuição discreta e finita	35
4.1.1 Momentos	35
4.1.2 Preços	37
4.1.3 Preços e momentos	38
4.2 Distribuição discreta e infinita	39

4.2.1	Momentos	39
4.2.2	Preços	40
4.2.3	Preços e momentos	41
4.3	Distribuição contínua	42
4.3.1	Momentos	42
4.3.2	Preços	43
4.3.3	Preços e momentos	44
5	Conclusão	47
	Bibliografia	49
	Anexo A Algoritmo usado	51

Lista de Figuras

2.1	Representação de um cone K e do seu dual K^*	4
2.2	Representação do polinómio $h(x)$, $x \in [-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$	9
2.3	Representação do polinómio $h_2(x)$, $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$	11
3.1	Preços de fecho do índice S&P 500 para o primeiro e segundo períodos de tempo considerados.	19
3.2	Preços reais e corrigidos de opções referentes ao índice S&P 500 entre 8 e 30 de abril de 2005.	26
3.3	Preços reais e limites superior e inferior dados oito preços de outras opções sobre o índice S&P 500 de 4 a 15 de janeiro de 2016.	29
3.4	Preços reais e limites superior e inferior dados oito preços de outras opções sobre o índice S&P 500 de 4 de janeiro a 5 de fevereiro de 2016.	30
3.5	Intervalos definidos tendo em conta o preço de exercício requerido, k	32
4.1	Preços reais e limites superior e inferior para os primeiros sete momentos do modelo do lançamento do dado.	36
4.2	Preços reais e limites superior e inferior dados seis preços de outras opções sobre o modelo do lançamento do dado.	37
4.3	Preços reais e limites superior e inferior pelas três abordagens estudadas do modelo do lançamento do dado.	38
4.4	Preços reais e limites superior e inferior para os primeiros sete momentos do modelo de Poisson.	39
4.5	Preços reais e limites superior e inferior dados seis preços de outras opções sobre o modelo de Poisson.	41
4.6	Preços reais e limites superior e inferior para os primeiros quatro momentos e preços de seis opções do modelo de Poisson.	41
4.7	Preços reais e limites superior e inferior para os primeiros sete momentos do modelo de Pareto.	43
4.8	Preços reais e limites superior e inferior dados seis preços de outras opções sobre o modelo de Pareto.	44
4.9	Preços reais e limites superior e inferior para os primeiros quatro momentos e preços de seis opções do modelo de Pareto.	45

Lista de Tabelas

3.1	Momentos empíricos do índice S&P 500 entre os períodos considerados.	19
3.2	Limite superior obtido por dois métodos considerando dois e três momentos.	22
3.3	Preços reais e limites superior e inferior de opções obtidos computacionalmente considerando dois, três e quatro momentos do índice S&P 500 para o primeiro período de tempo.	23
3.4	Preços reais e limites superior e inferior de opções obtidos computacionalmente considerando dois, três e quatro momentos do índice S&P 500 para o segundo período de tempo.	23
3.5	Preços observados e corrigidos de opções <i>calls</i> transacionadas dia 8 de Abril de 2005 sobre o índice S&P 500.	25
3.6	Preços reais e corrigidos de <i>calls</i> sobre o índice S&P 500 transacionadas no primeiro período de tempo, entre 4 e 15 de janeiro de 2016.	29
3.7	Preços reais e limites superior e inferior de cinco opções dados oito preços sobre o índice S&P 500 transacionadas em 4 de janeiro de 2016 e com maturidade em 15 de janeiro do mesmo ano.	30
3.8	Preços reais e corrigidos de <i>calls</i> sobre o índice S&P 500 transacionadas em 4 de janeiro de 2016 e com maturidade em 5 de fevereiro de 2016.	30
3.9	Preços reais e limites superior e inferior de cinco opções dados oito preços sobre o índice S&P 500 transacionadas em 4 de janeiro de 2016 e com maturidade em 5 de fevereiro do mesmo ano.	31
4.1	Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções para os primeiros sete momentos do modelo do lançamento do dado.	36
4.2	Preços e preços de exercício de seis opções sobre o modelo do lançamento do dado.	37
4.3	Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções dados seis preços de outras opções do modelo do lançamento do dado.	37
4.4	Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções para os primeiros quatro momentos e preços de seis opções do modelo do lançamento do dado.	38
4.5	Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções para os primeiros sete momentos do modelo de Poisson.	39
4.6	Preços e preços de exercício de opções sobre o modelo de Poisson.	40
4.7	Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções dados seis preços de opções do modelo de Poisson.	40

4.8	Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções para os primeiros quatro momentos e preços de seis opções do modelo de Poisson.	42
4.9	Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções para os primeiros sete momentos do modelo de Pareto.	43
4.10	Preços e preços de exercício de seis opções sobre o modelo de Pareto.	44
4.11	Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções dados seis preços de opções do modelo de Pareto.	44
4.12	Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções para os primeiros quatro momentos e preços de seis opções do modelo de Pareto.	45

Capítulo 1

Introdução

Opções são contratos que permitem a compra de um produto financeiro, o ativo subjacente à opção, e são utilizadas por forma a reduzir o risco inerente à detenção de um ativo. Estes ativos são geralmente ações, índices de ações, matérias-primas ou taxas de juro. Opções são contratos padronizados na medida em que tanto a quantidade de ativos, o preço a que os ativos serão transacionados e a maturidade, data em que a opção termina, são pré-definidos. [2]

Podemos encontrar opções de dois tipos: opções de compra (*call options*) e de venda (*put options*). Existem também diferentes estilos de opções como as de estilo americano e europeu onde as primeiras se distinguem das segundas pelo facto de poderem ser transacionadas em qualquer momento até à maturidade. [3]

As opções de compra europeias, que são o objeto de estudo desta dissertação, permitem que o detentor da opção possa exercer o seu direito, mas não o dever, de comprar um ativo por um determinado preço, denominado preço de exercício, na maturidade da opção. Assim, conforme a evolução do mercado, o detentor da opção decide se pretende ou não exercê-la. Ao possível ganho do detentor chamamos *payoff*, sendo neste caso dado por

$$\max(0, X - k),$$

onde k representa o preço de exercício e X o preço do ativo subjacente à opção na maturidade. Notemos que, por serem opções europeias, o ativo subjacente à opção apenas pode ser transacionado na maturidade.

Devido ao carácter de incerteza associado ao poder de escolha do possuidor da opção, atribuir-lhe um preço justo, isto é, o preço que o comprador da opção paga ao vendedor para a ter em sua posse, torna-se bastante difícil. Esta é uma questão muito importante na matemática financeira uma vez que, caso as opções sejam mal avaliadas, poderão existir no mercado oportunidades de arbitragem. Estas oportunidades de arbitragem são estratégias em que, sem investimento inicial, há uma probabilidade positiva de gerar lucro no futuro sem que hajam possibilidades de perda [3].

Tal como Black e Scholes, vários autores têm estudado a avaliação de opções assumindo não só a ausência de arbitragem mas também uma dinâmica para o preço do ativo. Por outro lado, nesta dissertação, apenas assumiremos a não existência de arbitragem sem considerar nenhuma distribuição para o preço do ativo. Neste contexto, um resultado importante dado por Harrison e Kreps [4] e

Harrison e Pliska [5, 6], foi a conexão entre o pressuposto da não arbitragem e a existência de uma medida de probabilidade neutra ao risco. Sob a suposição de não arbitragem, o preço de uma opção europeia pode ser atribuído pelo retorno esperado do ganho exercido na maturidade, descontado a uma taxa de juro, onde a esperança é tomada sob a probabilidade neutra ao risco [3]. Assumindo que a taxa de juro sem risco é nula, ignorando os custos de transação e considerando o *payoff* de uma opção *call* europeia, a frase anterior é equivalente a

$$q(k) = E[\max(0, X - k)],$$

onde, mais uma vez, k representa o preço de exercício e X o preço do ativo subjacente à opção na maturidade. [1]

O objetivo deste trabalho é assim encontrar limites superior e inferior para o preço de opções *call* europeias, assumindo apenas a não existência de arbitragem.

No Capítulo 2, introduziremos alguns conceitos teóricos necessários. Lembraremos conceitos de programação cônica e apresentaremos um importante problema da matemática financeira: o problema generalizado do momento. Este permitir-nos-á encontrar os limites referidos anteriormente através da resolução de problemas de otimização num espaço de distribuições onde o integral de algumas funções é conhecido. Faremos ainda uma pequena abordagem à não negatividade de polinómios com uma variável.

Nos Capítulos 3 e 4, através da programação semidefinida, encontraremos os limites para os preços das opções. Numa primeira fase, calcularemos esses limites com base nos dados referentes aos momentos do preço do ativo subjacente. Seguidamente, consideramos somente os preços de opções do mesmo tipo e sobre o mesmo ativo mas com preços de exercícios diferentes. Estes estudos serão feitos com base nos trabalhos de Bertsimas e Popescu [1]. Finalmente, tentaremos uma nova abordagem reunindo as informações anteriores. Queremos verificar se a introdução de ambas as informações (momentos e preços de outras opções) nos garante resultados melhorados. Enquanto no Capítulo 3 exemplificaremos o que foi estudado usando dados do mercado, no Capítulo 4 testaremos dados teóricos. Procuramos com isto ter uma noção mais correta da aplicação dos resultados encontrados evitando os erros associados ao uso de dados reais. Por fim, no Capítulo 5 serão expostas as conclusões deste trabalho.

Capítulo 2

Preliminares

O objetivo deste capítulo é introduzir alguns conceitos teóricos necessários ao desenvolvimento dos capítulos seguintes. Começaremos por fazer uma revisão sobre programação cónica e introduziremos o problema generalizado do momento, com base no trabalho de Lasserre [7]; seguidamente, iremos deparar-nos com a questão da não negatividade de polinómios de uma variável, tal como estudaram Bertsimas e Popescu [1].

2.1 Problema generalizado do momento

Nesta secção iremos trabalhar com uma formulação do problema generalizado do momento sob o ponto de vista da otimização convexa. Além da formulação deste problema e do seu dual, apresentaremos algumas considerações suficientes que garantem a dualidade forte entre os mesmos.

2.1.1 Programação cónica

Começemos por recordar alguns conceitos de geometria convexa que serão utilizados. Um conjunto K diz-se um **cone convexo** se for fechado para a adição e multiplicação por escalares. Seguidamente apresentamos a definição de cone dual.

Definição 2.1.1. *Dado um cone $K \subseteq \mathbb{R}^n$, o seu **cone dual**, K^* , é o conjunto $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \geq 0, \forall x \in K\}$.*

Vejamos exemplos de cones e dos seus cones duais:

- $(\mathbb{R}_+^n)^* = \mathbb{R}_+^n$;
- $(S_+^n)^* = S_+^n$, onde S_+^n representa o conjunto das matriz positivas semidefinidas;
- Cone K e K^* presentes na Figura 2.1.

Recordemos também que o dual de um cone dual é o fecho do cone principal.

Nesta dissertação trabalharemos com problemas de programação cónica, sendo estes definidos do seguinte modo.

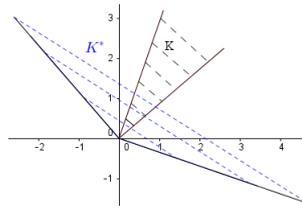


Fig. 2.1 Representação de um cone K e do seu dual K^* .

Dado um cone convexo e fechado $K \subseteq \mathbb{R}^n$, um **programa cônico sobre K** na forma normal é um problema de otimização do tipo

$$\begin{aligned} p &= \min c^T x \\ \text{s.a. } Ax &= b \\ x &\in K, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $c \in \mathbb{R}^n$ e o seu **problema dual** é

$$\begin{aligned} p^* &= \max b^T y \\ \text{s.a. } c - A^T y &\in K^*. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Surge-nos agora a questão da aplicabilidade da dualidade forte e fraca a estes problemas. Para a dualidade fraca, temos um teorema semelhante ao que se verifica na programação linear.

Teorema 2.1.1 (Dualidade Fraca). *Se x for solução admissível de (2.1) e y solução admissível de (2.2) então $c^T x \geq b^T y$. Notemos, em particular, que $p \geq p^*$.*

Demonstração. Se x e y forem admissíveis para o primal e dual, respetivamente, temos

$$\begin{aligned} c^T x - b^T y &= c^T x - y^T Ax + y^T Ax - y^T b \\ &= (c^T - y^T A)x + y^T (Ax - b) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

uma vez que $(c^T - y^T A)^T \in K^*$ e $x \in K$, por definição de cone dual vem $(c^T - y^T A)x \geq 0$. \square

Ao contrário da dualidade fraca, a dualidade forte muitas vezes exige condições adicionais como as condições de Slater.

Teorema 2.1.2 (Dualidade Forte com condições de Slater). *Se o primal (2.1) (resp. dual (2.2)) for estritamente admissível, isto é, se for admissível quando substituirmos K pelo seu interior nas restrições do primal (resp. K^* pelo seu interior nas restrições do dual) então $p = p^*$ e o primal (resp. dual) tem um otimizante.*

2.1.2 Problema generalizado do momento

O problema generalizado do momento (PGM) é um problema fundamental que surge com o propósito de dar resposta a problemas em muitas áreas da matemática aplicada e outras. No contexto desta

dissertação, aparece com o objetivo de resolver o problema de encontrar limites para o preço de opções *call* europeias sem ser assumido nenhum modelo para a dinâmica do preço do ativo subjacente. De um modo geral permite-nos abordar problemas de otimização num espaço de distribuições onde o integral de algumas funções é conhecido.

Definição 2.1.2. *Seja S um subconjunto de \mathbb{R}^n e $\mathcal{M}(S)$ o conjunto das medidas de Borel finitas em S . Definimos o **Problema generalizado do momento** como*

$$\begin{aligned} \rho &= \max_{\mu \in \mathcal{M}(S)} \int_S F d\mu \\ \text{s.a. } \int_S h_j d\mu &= e_j, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}$ e F, h_1, \dots, h_m são integráveis com respeito a qualquer $\mu \in \mathcal{M}(S)$.

Uma vez que iremos aplicar resultados de programação cónica, teremos de reescrever o PGM como um programa de otimização cónico. Para isso, sendo $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)$, consideremos o cone

$$C(S) = \left\{ (x_0, \mathbf{e}) : x_0 = \int_S F d\mu, e_j = \int_S h_j d\mu, j = 1, \dots, m \text{ para todo } \mu \in \mathcal{M}(S) \right\}. \quad (2.4)$$

Podemos então reescrever o problema (2.3) como

$$\begin{aligned} \rho &= \max_{x_0 \in \mathbb{R}} x_0 \\ \text{s.a. } (x_0, \mathbf{e}) &\in C(S). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Notemos que $C(S)$ é um cone convexo mas, em geral, não fechado. Assim, iremos considerar o problema de otimização sobre o seu fecho

$$\begin{aligned} \rho &= \max_{x_0 \in \mathbb{R}} x_0 \\ \text{s.a. } (x_0, \mathbf{e}) &\in \overline{C(S)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Este é um problema cónico. Atendamos que poderá acontecer que (2.6) tenha um maximizante quando em (2.5) o valor ótimo não é atingido. No resultado seguinte apresentamos o cone dual de $\overline{C(S)}$.

Lema 2.1.1. *Considerando $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$, o cone dual de $\overline{C(S)}$ é $P(S)$ onde*

$$P(S) := \left\{ (y_0, \mathbf{y}) : y_0 F(x) + \sum_{i=1}^m y_i h_i(x) \geq 0, \forall x \in S \right\}.$$

Demonstração. Ora o cone dual de $\overline{C(S)}$ é o mesmo que o cone dual de $C(S)$, que é dado por

$$\{(y_0, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{m+1} : (y_0, \mathbf{y})^T (x_0, \mathbf{e}) \geq 0, \forall (x_0, \mathbf{e}) \in C(S)\}.$$

Por definição de $C(S)$, a condição $(x_0, \mathbf{e}) \in C(S)$ traduz-se por $(x_0, \mathbf{e}) = (\int_S F d\mu, \int_S h_j d\mu, j = 1, \dots, m, \mu \in \mathcal{M}(S))$. Assim,

$$\overline{C(S)}^* = \left\{ (y_0, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{m+1} : y_0 \int_S F d\mu + \sum_{i=1}^m y_i \int_S h_i d\mu \geq 0, \text{ para todo } \mu \in \mathcal{M}(S) \right\},$$

ou seja,

$$\overline{C(S)}^* = \left\{ (y_0, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{m+1} : y_0 F(x) + \sum_{i=1}^m y_i h_i(x) \geq 0, \text{ para todo } x \text{ em } S \right\}.$$

□

Reescrevendo o problema (2.6) na forma canónica do dual, vem

$$\begin{aligned} \rho &= \max_{x_0 \in \mathbb{R}} x_0 \\ \text{s.a. } &(0, \mathbf{e}) - (-1, 0, \dots, 0)x_0 \in \overline{C(S)}. \end{aligned}$$

É simples agora construir o primal de ρ como

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min \sum_{i=1}^m e_i y_i \\ \text{s.a. } &(-1, \mathbf{y}) \in \overline{C(S)}^* = P(S). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Aplicando a definição de $P(S)$, vemos que (2.7) é equivalente a

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min \sum_{i=1}^m e_i y_i \\ \text{s.a. } &\sum_{i=1}^m y_i h_i(x) \geq F(x), \forall x \in S, \end{aligned} \quad (2.8)$$

problema a que chamaremos PGM-D. Este problema passa por encontrar os coeficientes de peso mínimo tal que a combinação linear das funções h_i com esses coeficientes seja um majorante para F em S .

Pela dualidade fraca, sabemos que $\rho^* \geq \rho$ mas, para garantir a igualdade, é necessário que se verifiquem algumas condições, como as condições de Slater apresentadas no Teorema 2.1.2.

Notemos ainda que, se em vez do PGM original estivéssemos interessados em

$$\begin{aligned} \rho &= \min_{\mu \in \mathcal{M}(S)} \int_S F d\mu \\ \text{s.a. } &\int_S h_j d\mu = e_j, j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.9)$$

teríamos como dual o problema

$$\begin{aligned} \rho^* &= \max \sum_{i=1}^m e_i y_i \\ \text{s.a. } &\sum_{i=1}^m y_i h_i(x) \leq F(x), \forall x \in S, \end{aligned} \quad (2.10)$$

e verificar-se-ia $\rho \geq \rho^*$.

Pretendemos agora verificar se existe dualidade forte entre (2.3) e (2.8) e também entre (2.9) e (2.10). Para isso, consideremos o seguinte resultado.

Proposição 2.1.1. *Se as funções $F(x)$ e $h_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, forem não negativas em S , então o problema (2.10) é estritamente admissível. Nessas condições temos ainda que o problema (2.8) é estritamente admissível se e só se for admissível.*

Demonstração. Começemos por analisar o problema (2.10). O vetor nulo verifica as restrições pelo que este problema é sempre admissível. Então para qualquer $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}_+^m$, o vetor $-\lambda$ é também admissível uma vez que

$$F(x) \geq 0 \geq \sum_{i=1}^m -\lambda_i h_i(x), \quad \forall x \in S.$$

Assim, como $-\mathbb{R}_+^m$ está contido nos pontos admissíveis do problema e tem interior não vazio, (2.10) é estritamente admissível. Pensando agora em (2.8) e admitindo que existe um \mathbf{y} que verifica as restrições então $\mathbf{y} + \mathbb{R}_+^m$ é também admissível e, tendo interior não vazio, podemos concluir que o problema (2.8) é estritamente admissível. \square

Podemos agora apresentar as condições de dualidade forte.

Corolário 2.1.1. *Se as funções $F(x)$ e $h_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, forem não negativas em S , então os problemas (2.9) e (2.10) têm a mesma solução. Temos ainda que, se (2.8) for admissível, então há dualidade forte entre (2.3) e (2.8).*

Demonstração. Basta recorrer às condições de Slater apresentadas no Teorema 2.1.2. \square

2.2 Não negatividade de polinómios de uma variável

Encontrar condições para que um polinómio seja não negativo é uma questão importante na determinação do limite dos preços de opções. Ela surge de uma forma natural porque, como vimos na secção anterior, o problema da determinação dos limites para os preços leva a um problema de desigualdade entre funções. Quando se trata de polinómios de uma só variável esta questão torna-se simples, uma vez que basta verificar se é possível escrever os polinómios como uma soma de quadrados (SDQ), isto é, basta verificar se existem polinómios $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$g(x) = \sum_{i=1}^n q_i(x)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bertsimas e Popescu apresentam em [1] condições para que um polinómio de uma variável e de grau par seja não negativo, usando métodos de programação semidefinida, apresentadas seguidamente.

É fácil verificar que, se um polinómio de uma variável puder ser escrito como uma SDQ então é não negativo. A condição contrária também é verdadeira. Suponhamos que um dado polinómio é não negativo na reta real. Isto implica que as raízes reais do polinómio tenham multiplicidade par, digamos $2s_l$ para cada raiz r_l , uma vez que se a multiplicidade fosse ímpar, o sinal do polinómio mudaria perto

dessas raízes e o polinómio não seria não negativo. Sendo m_j a multiplicidade das raízes complexas e $a_j + ib_j, a_j - ib_j$ os pares conjugados dessas raízes, g pode ser escrito como

$$g(x) = c \prod_l (x - r_l)^{2s_l} \prod_j (x - (a_j + ib_j))^{m_j} (x - (a_j - ib_j))^{m_j}.$$

Obviamente que se g é não negativo então o coeficiente c também o é, logo podemos escrever $c = (\sqrt{c})^2$ e $(x - (a_j + ib_j))(x - (a_j - ib_j)) = ((x - a_j)^2 + b_j^2)$. Reescrevendo g obtemos

$$g(x) = (\sqrt{c})^2 \prod_l (x - r_l)^{2s_l} \prod_j ((x - a_j)^2 + b_j^2)^{m_j}.$$

Expandindo os termos, vemos que g pode ser escrito como uma SDQ obtendo o resultado seguinte.

Teorema 2.2.1. *Um polinómio de uma variável é não negativo se e só se puder ser escrito como uma SDQ.*

Tendo encontrado a relação entre a não negatividade de polinómios e as SDQ, procuramos agora relacionar a programação semidefinida com o estudado. Suponhamos então que g é não negativo de grau $2n$, logo é uma SDQ. Podemos escrever g à custa de uma matriz positiva semidefinida Q e dos vetores $\bar{x}_n = (1, x, x^2, \dots, x^n)$, $\bar{q}_k = (1, q_1^k, q_2^k, \dots, q_n^k)$ onde os $q_i(x)$ se podem escrever como $\bar{q}_i^T \bar{x}_n$, $i = 0, \dots, n$. Vem então

$$g(x) = \sum_{i=1}^n q_i(x)^2 = \sum_{i=1}^n (\bar{q}_i^T \bar{x}_n)^2 = \sum_{i=1}^n \bar{x}_n^T \bar{q}_i \bar{q}_i^T \bar{x}_n = \bar{x}_n^T \left(\sum_{i=1}^n \bar{q}_i \bar{q}_i^T \right) \bar{x}_n = \bar{x}_n^T Q \bar{x}_n. \quad (2.11)$$

Por outro lado, se g se pode escrever como (2.11) então obviamente que $g(x) \geq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, por definição de matriz positiva semidefinida. Obtemos assim o resultado que associa programação semidefinida e não negatividade de polinómios na reta real.

Proposição 2.2.1. *O polinómio $g(x) = \sum_{r=0}^{2n} y_r x^r$ satisfaz $g(x) \geq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ se e só se existe uma matriz $Q = [q_{ij}]_{i,j=0,\dots,n}$ positiva semidefinida, tal que $g(x) = \bar{x}_n^T Q \bar{x}_n$, ou seja,*

$$y_r = \sum_{i,j: i+j=r} q_{ij}, \quad r = 0, \dots, 2n. \quad (2.12)$$

Ilustremos o que acabámos de estudar com um exemplo. Consideremos o polinómio

$$h(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5$$

cujo gráfico para $x \in [-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$ está presente na Figura 2.2. Podemos escrever este polinómio como uma SDQ à custa da sua raiz real, $x = 1$, de multiplicidade 2, e das raízes imaginárias $x = -2 - i$, $x = -2 + i$ obtendo

$$h(x) = (x - 1)^2 \left((x + 2)^2 + 1 \right) = (x^2 + x - 2)^2 + (x - 1)^2.$$

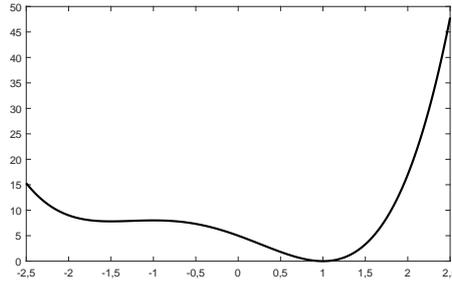


Fig. 2.2 Representação do polinómio $h(x)$, $x \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

Assim, o polinómio é não negativo em \mathbb{R} e a matriz Q será dada por $(-2, 1, 1)(-2, 1, 1)^T + (-1, 1, 0)(-1, 1, 0)^T$, isto é,

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pretendemos agora verificar quando é que um polinómio é não negativo num sub-intervalo de \mathbb{R} . Começemos por considerar o intervalo $[a, b]$ onde a e b são dois números reais tais que $a < b$. Verificar se um polinómio $g(x) = \sum_{r=0}^n y_r x^r$ é não negativo neste intervalo é o mesmo que verificar a condição seguinte

$$(1+t^2)^n g\left(a + (b-a)\frac{t^2}{1+t^2}\right) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Notemos que como $\frac{t^2}{1+t^2} \in [0, 1]$ então $a + (b-a)\frac{t^2}{1+t^2} \in [a, b]$ e a multiplicação de g por $(1+t^2)^n$ garante que a expressão anterior seja um polinómio. Fazendo as operações e simplificações necessárias e usando o binómio de Newton, obtemos

$$(1+t^2)^n g\left(a + (b-a)\frac{t^2}{1+t^2}\right) = \sum_{l=0}^n t^{2l} \left(\sum_{m=0}^l \sum_{r=m}^{n-l+m} y_r \binom{r}{m} \binom{n-r}{l-m} a^{r-m} b^m \right).$$

Aplicando agora a Proposição 2.2.1 obtemos uma caracterização de não negatividade.

Proposição 2.2.2. *O polinómio $g(x) = \sum_{r=0}^n y_r x^r$ satisfaz $g(x) \geq 0$ para todos os $x \in [a, b]$ se e só se existe uma matriz $Q = [q_{ij}]_{i,j=0,\dots,n}$ positiva semidefinida tal que*

$$\begin{aligned} \sum_{i,j: i+j=2l-1} q_{ij} &= 0, \quad l = 1, \dots, n, \\ \sum_{i,j: i+j=2l} q_{ij} &= \sum_{m=0}^l \sum_{r=m}^{n+m-l} y_r \binom{r}{m} \binom{n-r}{l-m} a^{r-m} b^m, \quad l = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para um polinómio $g(x) = \sum_{r=0}^n y_r x^r$ ser não negativo num intervalo do tipo $[0, a]$, onde $a > 0$, basta-nos garantir que

$$(1+t^2)^n g\left(\frac{at^2}{1+t^2}\right) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

É de notar que $\frac{at^2}{1+t^2} \in [0, a]$ e mais uma vez $(1+t^2)^n$ garante que a expressão anterior seja um polinómio. Usando o binómio de Newton, facilmente se prova que

$$(1+t^2)^n g\left(\frac{at^2}{1+t^2}\right) = \sum_{l=0}^n t^{2l} \left(\sum_{r=0}^l y_r \binom{n-r}{l-r} a^r \right).$$

Usando novamente a Proposição 2.2.1 obtemos na proposição seguinte o resultado para este tipo de intervalo.

Proposição 2.2.3. *O polinómio $g(x) = \sum_{r=0}^n y_r x^r$ satisfaz $g(x) \geq 0$ para todos os $x \in [0, a]$ se e só se existe uma matriz $Q = [q_{ij}]_{i,j=0,\dots,n}$ positiva semidefinida tal que*

$$\begin{aligned} \sum_{i,j: i+j=2l-1} q_{ij} &= 0, \quad l = 1, \dots, n, \\ \sum_{i,j: i+j=2l} q_{ij} &= \sum_{r=0}^l y_r \binom{n-r}{l-r} a^r, \quad l = 0, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Finalmente estudaremos as condições de não negatividade de polinómios em intervalos do tipo $[a, \infty[$. Basta-nos garantir que

$$g(a(1+t^2)) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Notemos que $a(1+t^2) \in [a, \infty[$. Usando o binómio de Newton e simplificando vem

$$g(a(1+t^2)) = \sum_{l=0}^n t^{2l} \left(\sum_{r=l}^n y_r \binom{r}{l} a^r \right).$$

Aplicando mais uma vez a Proposição 2.2.1 obtemos a caracterização desejada.

Proposição 2.2.4. *O polinómio $g(x) = \sum_{r=0}^n y_r x^r$ satisfaz $g(x) \geq 0$ para todos os $x \in [a, \infty[$ se e só se existe uma matriz $Q = [q_{ij}]_{i,j=0,\dots,n}$ positiva semidefinida tal que*

$$\begin{aligned} \sum_{i,j: i+j=2l-1} q_{ij} &= 0, \quad l = 1, \dots, n, \\ \sum_{i,j: i+j=2l} q_{ij} &= \sum_{r=l}^n y_r \binom{r}{l} a^r, \quad l = 0, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ilustremos esta última proposição com um exemplo. Consideremos o polinómio

$$h_2(x) = 2x^3 - x^2$$

cuja representação gráfica para $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$ está presente na Figura 2.3. Queremos verificar se o polinómio h_2 é não negativo em $[\frac{1}{2}, \infty[$. Ora, isto é equivalente a verificar se

$$h_2\left(\frac{1}{2}(1+t^2)\right) = \frac{1}{4}(1+t^2)^3 - \frac{1}{4}(1+t^2)^2 = \frac{1}{4}(t^2(1+t^2)^2)$$

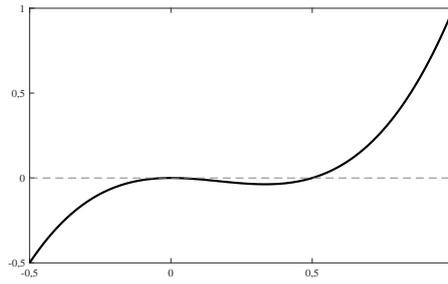


Fig. 2.3 Representação do polinómio $h_2(x)$, $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$.

é não negativo para $t \in \mathbb{R}$. Este polinómio tem como raízes $x = 0$, $x = i$, $x = -i$ todas de multiplicidade 2 podendo assim ser reescrito como uma SDQ da forma seguinte

$$\frac{1}{4} (t^2 (t^2 + 1)^2) = \frac{t^6}{4} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^2}{4} = \left(\frac{t^3}{2}\right)^2 + \left(\frac{t^2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2.$$

Assim, a matriz Q resulta de $(0, 0, 0, \frac{1}{2}) (0, 0, 0, \frac{1}{2})^T + (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T + (0, \frac{1}{2}, 0, 0) (0, \frac{1}{2}, 0, 0)^T$, ou seja,

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Como facilmente se verifica, esta matriz verifica as condições dadas pela Proposição 2.2.4.

$$q_{01} + q_{10} = 0, \quad q_{21} + q_{12} + q_{30} + q_{03} = 0, \quad q_{32} + q_{23} = 0, \quad q_{00} = 0,$$

$$q_{20} + q_{11} + q_{02} = \frac{1}{4}, \quad q_{31} + q_{22} + q_{13} = \frac{1}{2}, \quad q_{33} = \frac{1}{4}.$$

Para terminar esta secção deixamos uma breve nota sobre o caso multivariado. Neste caso, a existência de somas de quadrados é apenas condição necessária para a não negatividade. Por esta razão, o estudo de mais de uma variável é mais delicado e está fora do âmbito deste trabalho.

Capítulo 3

Limitar preços de opções

3.1 Introdução ao modelo teórico subjacente

O objetivo deste capítulo é determinar limites para o preço de uma opção *call* europeia com determinado preço de exercício, considerando a informação acerca dos momentos do ativo subjacente e os preços de outras opções sobre o mesmo ativo e com a mesma maturidade.

Admitiremos daqui em diante que X é uma variável aleatória não negativa que representa o preço do ativo subjacente à opção que queremos avaliar na data de maturidade da mesma. Vamos designar o preço da opção que queremos limitar por q e por k o seu preço de exercício.

Assim, dado um k , assumindo que são conhecidos os m primeiros momentos de X , e_1, \dots, e_m , $e_0 = 1$, e ainda possivelmente preços de n opções sobre esse ativo com a mesma maturidade, q_1, q_2, \dots, q_n , cujos preços de exercício são $0 < k_1 < \dots < k_n$, respetivamente, estamos interessados em calcular limites para $q(k)$. Em termos da variável aleatória temos as seguintes restrições.

1. $E[X^i] = e_i$, $i = 0, \dots, m$;
2. $E[\max(0, X - k_i)] = q_i$, $i = 1, \dots, n$.

Admitimos ainda que $k_0 = 0$ e $q_0 = q(0) = E[\max(0, X - 0)] = E[X]$. Podemos definir um limite superior K para o preço do ativo X na maturidade da *call*. Isto é feito estabelecendo $k_{n+1} = K$ e $q_{n+1} = q(K) = 0$. Caso contrário assumimos simplesmente $k_{n+1} = \infty$.

Começemos por verificar quais os limites para o preço das *calls* que obtemos quando consideramos apenas os momentos do ativo subjacente.

3.2 Informação acerca dos momentos do ativo subjacente

Pretendemos nesta secção usar os momentos do ativo subjacente.

Para verificar a validade dos dados, geralmente sujeitos a muito ruído, é necessário averiguar quando é que um vetor é um vetor de momentos de alguma variável aleatória.

3.2.1 Validade de um vetor de momentos

Queremos determinar se $\mathbf{e} = (e_0, e_1, \dots, e_m)$, onde $e_0 = 1$, é passível de ser um vetor de momentos para uma distribuição não negativa. Este é conhecido como problema do momento de Stieltjes truncado, um problema clássico da teoria das probabilidades. Quando se trata apenas de uma variável aleatória não negativa, Curto e Fialkow apresentam em [8] condições necessárias e suficientes que garantem a validade um vetor de momentos. Antes de as apresentar, consideremos alguma notação necessária.

Para $j \geq 0$ e $e_0, \dots, e_{2j+1} \in \mathbb{R}$, definimos as matrizes de Hankel, $A(j)$ e $B(j)$, como

$$A(j) = \begin{bmatrix} e_0 & \cdots & e_j \\ \vdots & & \vdots \\ e_j & \cdots & e_{2j} \end{bmatrix}, \quad B(j) = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_{j+1} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{j+1} & \cdots & e_{2j+1} \end{bmatrix}$$

e o vetor

$$v(i, j) = [e_i, \dots, e_{i+j}]'$$

Teorema 3.2.1. *Consideremos $m + 2$ números positivos e_0, \dots, e_{m+1} , $m \geq 0$, sendo $g = \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$, $h = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, e $A(g)$, $B(h-1)$, $v(g+1, g)$ e $v(g+1, g-1)$ como definidos acima. O vetor $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_{m+1}) \in C(\mathbb{R}_+)$, isto é, existe uma medida de Borel positiva, μ , em $[0, \infty[$ tal que*

$$\int t^n d\mu = e_n \quad (0 \leq n \leq m+1) \quad e \quad \int t^{m+2} d\mu < +\infty$$

se e só se $A(g) \succeq 0$, $B(h-1) \succeq 0$, $v(g+1, g) \in R(A(g))$ se m é par e $v(g+1, g-1) \in R(B(h-1))$ se m é ímpar, onde $A(\cdot) \succeq 0$ representa as matrizes positivas semidefinidas e $R(\cdot)$ é o espaço das linhas de uma matriz.

Notemos que as condições deste teorema garantem-nos que (e_0, \mathbf{e}) pertence ao cone $C(S)$ definido no capítulo anterior, satisfazendo assim o problema (2.5). No entanto, como estamos interessados em resolver o problema (2.6) sobre $\overline{C(S)}$, basta-nos, para isso, uma relaxação do teorema anterior onde consideramos apenas as primeiras duas condições.

Consideremos, por exemplo, o vetor $(e_0, \mathbf{e}) = (1, 1, 1, 2)$. Aplicando o Teorema 3.2.1 obtemos

$$A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad B(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad v(2, 1) \in \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Embora as duas primeiras condições se verifiquem sempre, a terceira nunca é satisfeita pois $v(2, 1) = (1, 2) \notin \langle (1, 1) \rangle$ e portanto $(e_0, \mathbf{e}) \notin C(\mathbb{R}_+)$. Considerando um ε que verifique $\sqrt{2}-1 \geq \varepsilon > 0$, e uma pequena perturbação no vetor inicial, $(e_0, \mathbf{e}') = (1, 1, 1 + \varepsilon, 2)$, teremos as condições

$$A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \varepsilon \end{bmatrix} \succeq 0, \quad B(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 + \varepsilon \\ 1 + \varepsilon & 2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad v(2, 1) = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Estas três condições são sempre verificadas e por isso concluímos que o vetor perturbado, (e_0, \mathbf{e}') pertence a $C(\mathbb{R}_+)$. Assim, $(e_0, \mathbf{e}) \in \overline{C(\mathbb{R}_+)}$.

3.2.2 Limite superior

Nesta secção o nosso objetivo é encontrar um máximo, se existir, sob todas as distribuições de X para $E[\max(0, X - k)]$ considerando as restrições dos momentos referidas anteriormente. Baseando-nos em Bertsimas e Popescu [1], formulamos este problema da seguinte forma

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \max_X E[\max(0, X - k)] \\ \text{s.a. } E[X^i] &= e_i, \quad i = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Considerando as distribuições associadas a X , este problema é equivalente a

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \max_{\mu \in \mathcal{M}(S)} \int_0^{\infty} \max(0, x - k) d\mu \\ \text{s.a. } \int_0^{\infty} x^i d\mu &= e_i, \quad i = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Como facilmente observamos, este é um caso do PGM onde $S = \mathbb{R}_+$, $F(x) = \max(0, x - k)$ e $h_i(x) = x^i$, $i = 0, \dots, m$. Associamos a cada restrição de (3.1) as variáveis duais (w_0, \dots, w_m) obtendo o problema

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^* &= \min \sum_{i=0}^m e_i w_i \\ \text{s.a. } \sum_{i=0}^m w_i x^i &\geq \max(0, x - k), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Foi provado por Isii [9] que temos dualidade forte entre estes dois problemas, ou seja, ao resolver o problema anterior, obtemos a solução de (3.1). De facto, recorrendo ao Corolário 2.1.1, verificamos que qualquer solução admissível de (3.2) é também solução de (3.1). Este facto deve-se a (3.2) ser admissível já que as funções $\max(0, x - k)$ e x^i , $i = 0, \dots, m$, são não negativas em \mathbb{R}_+ e $(w_0, w_1, \dots, w_m) = (0, 1, 0, \dots, 0)$, é uma solução possível pois $x \geq \max(0, x - k)$ em \mathbb{R}_+ .

Podemos reescrever a região admissível de (3.2) obtendo

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m w_i x^i &\geq 0, \quad \forall x \in [0, k], \\ \sum_{i=0}^m w_i x^i &\geq x - k, \quad \forall x \in [k, \infty[. \end{aligned}$$

Podemos ainda reagrupá-las obtendo as restrições

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m w_i x^i &\geq 0, \quad \forall x \in [0, k], \\ (w_0 + k) + (w_1 - 1)x + \sum_{i=2}^m w_i x^i &\geq 0, \quad \forall x \in [k, \infty[. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como facilmente se constata, encontrar esta região passa por verificar a não negatividade de polinómios em dois intervalos diferentes. Para tal, recorreremos ao estudado anteriormente na Secção 2.2 sobre não

negatividade de polinómios univariados. Assim, pela Proposição 2.2.3, depreendemos que, para ser verificada a primeira condição, basta que exista uma matriz $T = [t_{ij}]_{i,j=0,\dots,m}$ positiva semidefinida que verifique as condições seguintes.

$$\begin{aligned} \sum_{i,j: i+j=2l-1} t_{ij} &= 0, \quad l = 1, \dots, m, \\ \sum_{i,j: i+j=2l} t_{ij} &= \sum_{r=0}^l w_r \binom{m-r}{l-r} k^r, \quad l = 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Usando a Proposição 2.2.4 na segunda restrição de (3.3) verificamos que é necessário a existência de uma matriz $Z = [z_{ij}]_{i,j=0,\dots,m}$ positiva semidefinida, que verifique

$$\begin{aligned} \sum_{i,j: i+j=2l-1} z_{ij} &= 0, \quad l = 1, \dots, m, \\ z_{00} &= (w_0 + k) + (w_1 - 1)k + \sum_{r=2}^m w_r k^r, \\ z_{11} + z_{02} + z_{20} &= (w_1 - 1)k + \sum_{r=2}^m w_r r k^r, \\ \sum_{i,j: i+j=2l} z_{ij} &= \sum_{r=l}^m w_r \binom{r}{l} k^r, \quad l = 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Reunindo estas condições, obtemos o resultado que nos dá o limite superior para o preço de opções *calls* europeias.

Teorema 3.2.2. *O limite superior para o preço de uma opção call europeia com preço de exercício k , dados os m primeiros momentos do preço do ativo subjacente, e_1, \dots, e_m , e $e_0 = 1$, é dado pela solução do seguinte problema de otimização semidefinido:*

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=0}^m e_i w_i \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i,j: i+j=2l-1} t_{ij} = 0, \quad l = 1, \dots, m, \\ & \sum_{i,j: i+j=2l} t_{ij} = \sum_{r=0}^l w_r \binom{m-r}{l-r} k^r, \quad l = 0, \dots, m, \\ & \sum_{i,j: i+j=2l-1} z_{ij} = 0, \quad l = 1, \dots, m, \\ & z_{00} = (w_0 + k) + (w_1 - 1)k + \sum_{r=2}^m w_r k^r, \\ & z_{11} + z_{02} + z_{20} = (w_1 - 1)k + \sum_{r=2}^m w_r r k^r, \\ & \sum_{i,j: i+j=2l} z_{ij} = \sum_{r=l}^m w_r \binom{r}{l} k^r, \quad l = 2, \dots, m, \\ & T, Z \succeq 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2.3 Limite inferior

Tendo agora em vista a obtenção do limite inferior anteriormente referido, pretendemos encontrar o mínimo, caso exista, para $E[\max(0, X - k)]$ sobre todas as distribuições e considerando as restrições dos momentos. Formulamos então o problema da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \underline{\rho} &= \min_{\mu \in \mathcal{M}(S)} \int_0^{\infty} \max(0, x - k) d\mu \\ \text{s.a.} \quad &\int_0^{\infty} x^i d\mu = e_i, \quad i = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Usando uma vez mais as variáveis w_0, w_1, \dots, w_m , obtemos o problema dual.

$$\begin{aligned} \underline{\rho}^* &= \max \sum_{i=0}^m e_i w_i \\ \text{s.a.} \quad &\sum_{i=0}^m w_i x^i \leq \max(0, x - k), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aplicando novamente o Corolário 2.1.1 verificamos que existe sempre dualidade forte entre estes dois problemas uma vez que $\max(0, x - k)$ e $x^i, i = 0, \dots, m$, são funções não negativas em \mathbb{R}_+ .

A região admissível de (3.8) pode escrever-se como

$$-\sum_{i=0}^m w_i x^i \geq -\max(0, x - k), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=0}^m w_i x^i \geq 0, \quad \forall x \in [0, k], \\ &-\left((w_0 + k) + (w_1 - 1)x + \sum_{i=2}^m w_i x^i \right) \geq 0, \quad \forall x \in [k, \infty[. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Constatamos que, para encontrar a região admissível de (3.8), é necessário recorrer de novo às condições de não negatividade de polinómios. Notamos ainda que estas são as condições simétricas das condições presentes em (3.3). Assim, para encontrar o limite inferior para o preço das opções, basta substituir no Teorema 3.2.2 a função objetivo pela sua simétrica e as últimas restrições por $T \preceq 0$ e $Z \preceq 0$. Posto isto, obtemos o teorema que se segue.

Teorema 3.2.3. *O limite inferior para o preço de uma opção call europeia com preço de exercício k , dados os m primeiros momentos do preço do ativo subjacente, e_1, \dots, e_m , e $e_0 = 1$, é dado pela solução*

do seguinte problema de otimização semidefinido:

$$\begin{aligned}
& \min - \left(\sum_{i=0}^m e_i w_i \right) \\
& \text{s.a.} \quad \sum_{i,j: i+j=2l-1} t_{ij} = 0, \quad l = 1, \dots, m, \\
& \quad \sum_{i,j: i+j=2l} t_{ij} = \sum_{r=0}^l w_r \binom{m-r}{l-r} k^r, \quad l = 0, \dots, m, \\
& \quad \sum_{i,j: i+j=2l-1} z_{ij} = 0, \quad l = 1, \dots, m, \\
& z_{00} = (w_0 + k) + (w_1 - 1)k + \sum_{r=2}^m w_r k^r, \\
& z_{11} + z_{02} + z_{20} = (w_1 - 1)k + \sum_{r=2}^m w_r r k^r, \\
& \quad \sum_{i,j: i+j=2l} z_{ij} = \sum_{r=l}^m w_r \binom{r}{l} k^r, \quad l = 2, \dots, m, \\
& T, Z \preceq 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

3.2.4 Exemplos

No que se segue serão ilustrados os resultados anteriormente expostos considerando dados reais referentes a um conjunto de opções onde o ativo subjacente é o índice S&P 500. Este é um índice composto por quinhentos ativos (ações) cotado em bolsas norte-americanas. Consideraremos dois conjuntos de opções: um com início no dia 4 de janeiro de 2016 e com término em 15 de janeiro do mesmo ano e outro com início também dia 4 de janeiro mas com maturidade a 5 de fevereiro de 2016. Designaremos estes períodos de tempo por 1 e 2, respetivamente. A informação relativa aos preços das opções foi retirada do site <https://datashop.cboe.com/> no dia 7 de janeiro de 2017.

Os dados que analisaremos referentes à evolução do ativo estarão enquadrados num período de tempo igual ao tempo de “vida” da opção, terminando no dia anterior à transação da mesma. Isto significa que entre 4 e 15 de janeiro de 2016, como a bolsa esteve funcional durante 10 desses dias, iremos considerar os preços de fecho dos 10 dias úteis anteriores a esse período. O análogo será feito para o segundo período de tempo considerado. Começemos por analisar os preços de fecho do índice durante o primeiro e segundo períodos, ilustrados na Figura 3.1. A informação relativa à cotação de fecho do índice S&P 500 foi retirada do site <https://finance.yahoo.com/> no dia 7 de janeiro de 2017.

Iremos considerar os momentos empíricos do índice uma vez que não é objetivo desta dissertação aprofundar a previsão dos mesmos. Também não consideraremos os custos de transação associados. Assim sendo, os resultados que obteremos serão afetados por esta ingénua aproximação. Posto isto, os quatro primeiros momentos empíricos do índice referido acima são os presentes na Tabela 3.1.

Na literatura encontramos fórmulas para os limites do preço das *calls* quando temos informação acerca dos primeiros dois e três momentos de X . Será portanto interessante comparar estas fórmulas e os resultados obtidos computacionalmente pelos Teoremas 3.2.2 e 3.2.3.

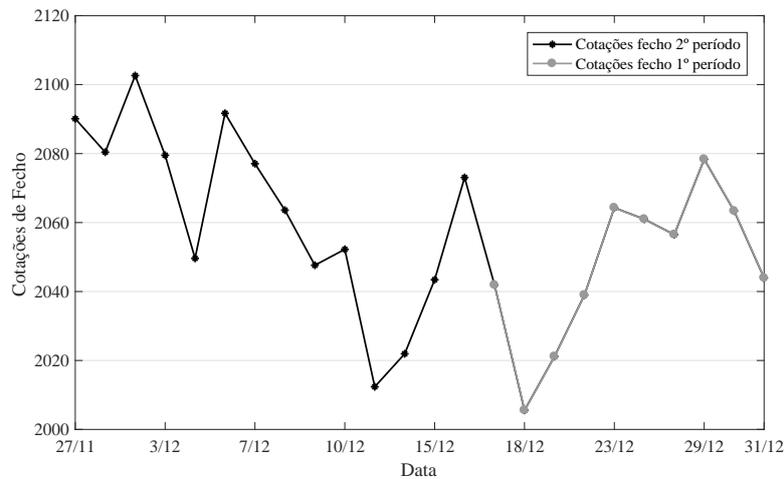


Fig. 3.1 Preços de fecho do índice S&P 500 para o primeiro e segundo períodos de tempo considerados.

	1º Mom.	2º Mom.	3º Mom.	4º Mom.
1º Período de tempo	2047,50	4192688,33	8586293249,00	17585837282491,70
2º Período de tempo	2056,68	4230546,27	8703426348,00	17908016419078,30

Tabela 3.1 Momentos empíricos do índice S&P 500 entre os períodos considerados.

Dois momentos

Começamos por fazer uma análise quando são considerados apenas os dois primeiros momentos. Teremos, primeiramente, de garantir que $\mathbf{e} = (1, e_1, e_2)$ é um vetor de momentos. Usando o Teorema 3.2.1 para $m = 1$, $g = 1$, $h = 1$, vemos que a primeira e segunda condições passam por garantir que as matrizes

$$A(1) = \begin{bmatrix} 1 & e_1 \\ e_1 & e_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B(0) = e_1$$

sejam positivas semidefinidas, isto é, que $e_2 \geq e_1^2$, $e_2 \geq 0$ e $e_1 \geq 0$. A terceira condição do teorema é trivialmente verificada uma vez que $v(2, 0) = e_2$ e o espaço das linhas de $B(0)$ é simplesmente \mathbb{R} .

Para uma leitura mais simples, definimos μ e γ como sendo $e_1 = \mu k$, $e_2 = e_1^2 \gamma$ para um k positivo. O vetor de momentos passa a ser $(1, \mu k, \gamma(\mu k)^2)$ e as condições anteriores resumem-se na proposição seguinte.

Proposição 3.2.1. *Seja $\mathbf{e} = (1, e_1, e_2)$. Se definirmos μ e γ como $e_1 = \mu k$ e $e_2 = e_1^2 \gamma$, para um dado k positivo, então \mathbf{e} é um vetor de momentos se e só se $\gamma \geq 1$ e $\mu \geq 0$.*

Podemos encontrar em [10] uma fórmula fechada dada por Lo para o limite superior quando são conhecidos apenas os dois primeiros momentos, e consequentemente, a média e a variância do ativo subjacente. Bertsimas e Popescu em [1] demonstram esta fórmula através da resolução do problema (3.2), mas por questões de notação, iremos apoiar-nos na formulação de Zuluaga [11] para a apresentar. Neste artigo encontramos a fórmula considerando $k = 1$, sendo feito aqui o ajuste para um qualquer k positivo, que representa o preço de exercício da opção que estamos a avaliar.

Teorema 3.2.4. Considerando o vetor $\mathbf{e} = (1, e_1, e_2)$ e um dado $k > 0$, onde μ e γ verificam a Proposição 3.2.1, o limite superior para o preço de opções call europeias obtido pela resolução do problema (3.2) é dado por:

$$\bar{\rho} = \begin{cases} \frac{k}{2} \left((\mu - 1) + \sqrt{(\gamma - 1)\mu^2 + (\mu - 1)^2} \right) & \text{se } \mu \leq \frac{2}{\gamma}, \\ k \left(\mu - \frac{1}{\gamma} \right) & \text{se } \mu > \frac{2}{\gamma}. \end{cases}$$

Para o limite inferior, temos o teorema seguinte.

Teorema 3.2.5. Considerando o vetor $\mathbf{e} = (1, e_1, e_2)$ e um dado $k > 0$, onde μ e γ verificam a Proposição 3.2.1, o limite inferior para o preço de opções call europeias obtido pela resolução do problema (3.8) é dado por:

$$\underline{\rho} = k \max(\mu - 1, 0).$$

Notemos que apenas o primeiro momento tem influência na fórmula do limite inferior.

Usando a informação acerca dos momentos do índice S&P 500 nos dois períodos considerados, verificamos que os limites obtidos resolvendo o problema de otimização e as fórmulas anteriores, foram os mesmos. Consultando as Tabelas 3.3 e 3.4 verificamos que os limites obtidos não se aproximam dos valores reais, o que era expectável. Isto deve-se ao uso dos momentos empíricos e ainda a outras simplificações como a não consideração dos custos de transação.

Três momentos

Iremos agora analisar que fórmulas se podem encontrar quando consideramos o terceiro momento.

Uma vez mais, através do Teorema 3.2.1, obtemos as condições para que $\mathbf{e} = (1, e_1, e_2, e_3)$ seja um vetor de momentos válido. A primeira condição que surge é $A(1) \succeq 0$, que foi analisada anteriormente. Esta reflete-se em garantir que $e_2 \geq e_1^2$. Seguidamente teremos de verificar quando é que $B(1) \succeq 0$, isto é,

$$B(1) = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 & e_3 \end{bmatrix} \succeq 0.$$

Esta condição traduz-se por verificar quando é que $e_1 e_3 \geq e_2^2$ e $e_1, e_3 \geq 0$. Por fim, deparamo-nos com a condição de $v(2, 1) = (e_2, e_3)$ pertencer ao espaço gerado pelas linhas de $A(1)$. Desta última, surgem dois casos: se a matriz $A(1)$ é singular então $e_2 = e_1^2$ e a condição de $v(2, 1)$ estar no espaço das linhas de $A(1)$ reduz-se a existir um t tal que

$$v(2, 1) = (e_2, e_3) = t(1, e_1)$$

o que é equivalente a $e_2 = e_1 e_3$. Esta, por sua vez, é equivalente a $e_1 e_3 = e_2^2$; se a matriz $A(1)$ é não singular então esta condição verifica-se sempre e temos ainda $e_2 > e_1^2$ o que implica que a condição em $B(1)$ seja $e_1 e_3 \geq e_2^2$ e $e_1 > 0$. Assim, para que $(1, e_1, e_2, e_3)$ seja um vetor de momentos não trivial, temos de garantir uma das duas condições seguintes:

$$e_2 = e_1^2, e_1 \geq 0 \text{ e } e_1 e_3 = e_2^2,$$

$$e_2 > e_1^2, e_1 > 0 \text{ e } e_1 e_3 \geq e_2^2.$$

Como anteriormente, usaremos uma forma mais legível definindo μ, γ e β como $e_1 = \mu k, e_2 = e_1^2 \gamma$ e $e_3 = \beta e_1^3$ com $k > 0$. O vetor de momentos passa a ser $(1, \mu k, \gamma(\mu k)^2, \beta(\mu k)^3)$ e resumimos estas condições na proposição seguinte.

Proposição 3.2.2. *Seja $e = (1, e_1, e_2, e_3)$. Se definirmos μ, γ e β como $e_1 = \mu k, e_2 = e_1^2 \gamma$ e $e_3 = \beta e_1^3$, para um dado k positivo, então e é um vetor de momentos se e só se é verificada uma das duas condições seguintes*

1. $\gamma = 1, \mu \geq 0$ e $\beta = \gamma^2$
2. $\gamma > 1, \mu > 0$ e $\beta \geq \gamma^2$.

Sabendo agora como garantir que um vetor de três momentos seja válido, analisemos as fórmulas que podemos encontrar quando se verificam cada uma das condições anteriores. Novamente usaremos os resultados de Zuluaga [11] apresentados seguidamente para um qualquer k real positivo.

Consideremos o primeiro caso da Proposição 3.2.2.

Teorema 3.2.6. *Considerando o vetor $e = (1, e_1, e_2, e_3)$ e um dado $k > 0$, onde μ, γ e β verificam a condição 1. da Proposição 3.2.2 o limite superior e inferior para o preço de opções call europeias é dado por*

$$\bar{\rho} = \underline{\rho} = k \max \left(\mu - \frac{1}{\gamma}, 0 \right).$$

Notemos que, para este caso, os limites superior e inferior coincidem. Analisemos agora o segundo caso da Proposição 3.2.2.

Teorema 3.2.7. *Considerando o vetor $e = (1, e_1, e_2, e_3)$, onde μ, γ e β verificam a condição 2. da Proposição 3.2.2 e um dado $k > 0$, o limite superior para o preço de opções call europeias é dado por*

$$\bar{\rho} \leq \begin{cases} k \min \{a(\mu, \gamma, \beta), b(\mu, \gamma)\}, & \text{se } \mu \leq \frac{2\gamma}{\beta} \\ kb(\mu, \gamma), & \text{se } \frac{2\gamma}{\beta} < \mu \leq \frac{2}{\gamma}, \end{cases}$$

$$\bar{\rho} = k \left(\mu - \frac{1}{\gamma} \right), \quad \text{se } \mu > \frac{2}{\gamma},$$

onde

$$a(\mu, \gamma, \beta) = \frac{32\mu\sqrt{1-2\gamma\mu+\beta\mu^2} \left(4\beta\mu^2 - 7\gamma\mu + 3 + \sqrt{1-2\gamma\mu+\beta\mu^2}(4\gamma\mu-3) + \sqrt{1+8\sqrt{1-2\gamma\mu+\beta\mu^2}(1-\sqrt{1-2\gamma\mu+\beta\mu^2}-\gamma\mu)} \right)}{(4\sqrt{1-2\gamma\mu+\beta\mu^2} + \sqrt{1+8\sqrt{1-2\gamma\mu+\beta\mu^2}-1})^3},$$

$$b(\mu, \gamma) = \frac{1}{2} \left((\mu - 1) + \sqrt{(\gamma - 1)\mu^2 + (\mu - 1)^2} \right).$$

Notemos que para $\mu > \frac{2}{\gamma}$ temos o mesmo limite dado por Lo no Teorema 3.2.4. Como verificamos, para $\mu \leq \frac{2}{\gamma}$ apenas encontramos um majorante para o limite superior e aqui, somente para $\mu \leq \frac{2\gamma}{\beta}$ é que o terceiro momento traz alguma melhoria, sendo este um caso pouco comum. Seguidamente apresentamos um exemplo deste caso.

	2 Momentos	3 Momentos
Fórmulas	0,1837	0,1452
Prob. Optim.	0,1837	0,1441

Tabela 3.2 Limite superior obtido por dois métodos considerando dois e três momentos.

Consideremos o vetor de momentos $\mathbf{e} = (1, e_1, e_2, e_3)$ onde $k = 3$, $\mu = 0,8$, $\gamma = 1,1$ e $\beta = 1,3$. Aplicando as fórmulas anteriores, obtemos os resultados presentes na Tabela 3.2.

Verificamos que a adição do terceiro momento diminui o valor obtido usando apenas dois momentos para ambos os métodos. Notamos ainda que o valor obtido pelas fórmulas usando três momentos é um majorante do valor que resulta do problema de otimização, como era previsto.

Averiguemos agora o limite inferior para a segunda condição da Proposição 3.2.2.

Teorema 3.2.8. *Considerando o vetor $\mathbf{e} = (1, e_1, e_2, e_3)$, onde μ , γ e β verificam a condição 2. da Proposição 3.2.2 e um dado $k > 0$, o limite inferior para o preço de opções call europeias é dado por:*

$$\underline{\rho} = \begin{cases} k(\mu - 1) & \text{se } \mu \geq \tilde{\mu}, \\ k \frac{(\gamma\mu - 1)^2}{\beta\mu - \gamma} & \text{se } \frac{1}{\gamma} < \mu \leq \tilde{\mu}, \\ 0 & \text{se } \mu \leq \frac{1}{\gamma}, \end{cases}$$

onde

$$\tilde{\mu} = \frac{2(\gamma - 1)}{(\beta - \gamma) - \sqrt{(\beta - 3\gamma + 2)^2 + 4(\gamma - 1)^3}}.$$

Como podemos aferir, a consideração do terceiro momento melhora o limite inferior para valores de μ a satisfazer $\frac{1}{\gamma} < \mu \leq \tilde{\mu}$.

Considerando os dois exemplos referentes a opções sobre o índice S&P 500, podemos ver a influência do terceiro momento nas Tabelas 3.3 e 3.4. Comparando o segundo e terceiro momentos, para o primeiro período, notamos que apenas encontramos uma ligeira melhoria de 0,02 no limite inferior para $k = 2030$ e de 0,102 no limite superior para $k = 2085$. Para o segundo período considerado, encontramos uma melhoria nos limites superiores de 0,085, 0,133 e 0,137 para $k = 2070$, 2100 e 2140, respetivamente.

Quatro momentos

Embora não sejam conhecidas fórmulas para o preço de opções quando são considerados os quatro primeiros momentos do ativo, podemos calculá-los com base na resolução dos problemas de otimização, como anteriormente.

Recorrendo ao Teorema 3.2.1, verificamos que as condições que tornam $\mathbf{e} = (1, e_1, e_2, e_3, e_4)$ um vetor de momentos válido são $A(2) \succeq 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & e_1 & e_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix} \succeq 0,$$

$B(1) \succeq 0$, analisada anteriormente, e $v(3, 1) = (e_3, e_4)$ pertencer ao espaço das linhas de $B(1)$.

As Tabelas 3.3 e 3.4 permitem-nos observar as diferenças existentes quando consideramos o quarto momento e os mesmos conjuntos de dados apresentados nas subsecções anteriores relativos ao índice S&P 500.

	k=1875		k=1930		k=1970		k=2030		k=2085	
	L. inf.	L. sup.								
2 Mom.	172,500	173,124	117,500	118,412	77,500	78,869	17,500	22,335	0	2,687
3 Mom.	172,500	173,124	117,500	118,412	77,500	78,869	17,502	22,335	0	2,585
4 Mom.	172,500	172,576	117,500	118,011	77,500	78,366	17,509	22,168	0	2,113
V. Real	125,40		90,60		51,50		14,75		2,65	

Tabela 3.3 Preços reais e limites superior e inferior de opções obtidos computacionalmente considerando dois, três e quatro momentos do índice S&P 500 para o primeiro período de tempo.

	k=1995		k=2015		k=2070		k=2100		k=2140	
	L. inf.	L. sup.								
2 Mom.	61,678	64,104	41,678	45,125	0	7,478	0	3,334	0	1,827
3 Mom.	61,678	64,104	41,678	45,125	0	7,393	0	3,201	0	1,690
4 Mom.	61,678	63,489	41,678	44,076	0,238	7,012	0	2,270	0	0,909
V. Real	44,70		42,30		14,00		6,80		1,73	

Tabela 3.4 Preços reais e limites superior e inferior de opções obtidos computacionalmente considerando dois, três e quatro momentos do índice S&P 500 para o segundo período de tempo.

Facilmente se constata que, em ambos os exemplos, a adição do quarto momento estreita o intervalo entre o limite inferior e superior principalmente devido à diminuição dos limites superiores. Novamente, estes valores não são próximos dos valores reais. Como já foi referido, dadas as simplificações assumidas e a aproximação pelos momentos empíricos, tal era esperado.

3.3 Informação acerca dos preços de outras *calls*

Tendo agora em conta o preço de algumas opções com preços de exercício $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n$, procuramos novamente limitar o preço de uma outra opção sobre o mesmo ativo e com a mesma maturidade das opções consideradas mas com diferente preço de exercício, k . Consideraremos que k , está entre k_j e k_{j+1} , isto é, $k_j < k < k_{j+1}$, $j = 1, \dots, n-1$. Lembremos que o preço de uma opção *call* europeia sob o ativo cujo preço é representado por X é dado por

$$q(k) = E[\max(0, X - k)],$$

onde consideramos a taxa de juro e os custos de transação nulos.

3.3.1 Validade da função de avaliação do preço da opção

Para o uso correto da informação acerca dos preços de opções e conseqüente boa aplicação da teoria subjacente, surge-nos a questão de verificar se os preços observados no mercado são válidos.

Seguidamente serão apresentadas as condições de declive que nos dão as condições de aplicabilidade dos preços observados à teoria subjacente.

Proposição 3.3.1. *Seja X a distribuição do preço de um ativo e $k > 0$ um preço de exercício. Se $q(\cdot)$ for uma função válida enquanto função que avalia o preço de uma opção call então será não crescente, convexa e, em cada troço definido por k_j, k_{j+1} , terá declive não inferior a -1.*

Demonstração. Começemos por demonstrar que é uma função não crescente. Ora, para isso, considerando todos os k_j, k_{j+1} tais que $k_j < k_{j+1}$, temos de garantir que $q(k_j) - q(k_{j+1}) \geq 0$, $j = 1, \dots, n-1$. Assim, para $j = 1, \dots, n-1$, vem

$$\begin{aligned} q(k_j) - q(k_{j+1}) &= E[\max(0, X - k_j) - \max(0, X - k_{j+1})] \\ &= \int_{-\infty}^{k_j} \underbrace{(0-0)}_0 d\mu + \int_{k_j}^{k_{j+1}} \underbrace{(x - k_j - 0)}_{\geq 0} d\mu + \int_{k_{j+1}}^{+\infty} \underbrace{(k_{j+1} - k_j)}_{\geq 0} d\mu \geq 0. \end{aligned}$$

Provemos agora que é uma função convexa. Considerando um $\alpha \in [0, 1]$, teremos de garantir que

$$\alpha q(k_j) + (1 - \alpha)q(k_{j+1}) - q(\alpha k_j + (1 - \alpha)k_{j+1}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Ora, para $j = 1, \dots, n-1$, a expressão anterior é equivalente a

$$E[\alpha \max(0, X - k_j) + (1 - \alpha) \max(0, X - k_{j+1}) - \max(0, X - (\alpha k_j + (1 - \alpha)k_{j+1}))].$$

Fazendo as substituições necessárias e dividindo os integrais em $k_j, \alpha k_j + (1 - \alpha)k_{j+1}, k_{j+1}$, vem

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{k_j} (0 + 0 - 0) d\mu + \int_{k_j}^{\alpha k_j + (1 - \alpha)k_{j+1}} (\alpha(x - k_j) + 0 - 0) d\mu \\ &+ \int_{\alpha k_j + (1 - \alpha)k_{j+1}}^{k_{j+1}} (\alpha(x - k_j) + 0 - (x - \alpha k_j - (1 - \alpha)k_{j+1})) d\mu \\ &+ \int_{k_{j+1}}^{+\infty} (\alpha(x - k_j) + (1 - \alpha)(x - k_{j+1}) - (x - \alpha k_j - (1 - \alpha)k_{j+1})) d\mu \\ &= \int_{k_j}^{\alpha k_j + (1 - \alpha)k_{j+1}} \underbrace{\alpha(x - k_j)}_{\geq 0} d\mu + \int_{\alpha k_j + (1 - \alpha)k_{j+1}}^{k_{j+1}} \underbrace{(1 - \alpha)(k_{j+1} - x)}_{\geq 0} d\mu \geq 0. \end{aligned}$$

Resta-nos provar que o declive é não inferior a -1 em cada troço definido por k_j, k_{j+1} . Para isso temos de mostrar que para $j = 1, \dots, n-1$,

$$\frac{q(k_{j+1}) - q(k_j)}{k_{j+1} - k_j} \geq -1,$$

isto é,

$$q(k_j) - q(k_{j+1}) \leq k_{j+1} - k_j, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Ora,

$$\begin{aligned} q(k_j) - q(k_{j+1}) &= E[\max(0, X - k_j)] - E[\max(0, X - k_{j+1})] \\ &= \int_{-\infty}^{k_j} 0 \, d\mu + \int_{k_j}^{k_{j+1}} (x - k_j) \, d\mu + \int_{k_{j+1}}^{+\infty} (x - k_j) - (x - k_{j+1}) \, d\mu. \end{aligned}$$

Uma vez que, no segundo integral $x \in [k_j, k_{j+1}]$, podemos majora-lo por $\int_{k_j}^{k_{j+1}} (k_{j+1} - k_j) \, d\mu$ obtendo

$$\begin{aligned} &\leq 0 + \int_{k_j}^{k_{j+1}} (k_{j+1} - k_j) \, d\mu + \int_{k_{j+1}}^{+\infty} (k_{j+1} - k_j) \, d\mu \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} (k_{j+1} - k_j) \, d\mu \\ &\leq k_{j+1} - k_j. \end{aligned}$$

□

Como facilmente se constata, quando trabalhamos com dados reais, estas condições nem sempre se verificam. Por essa razão, nos exemplos que apresentaremos, sempre que os preços das opções não verificarem estas condições, serão considerados preços corrigidos, por forma a ser aplicável a teoria subjacente, sem assumirmos nenhuma dinâmica para o preço do ativo subjacente. Isto é conseguido resolvendo um problema de otimização em que procuramos minimizar a diferença entre o preço real e o corrigido impondo as condições de declive, isto é, para os preços observados q_i , $i = 1, \dots, n$, vem

$$\begin{aligned} \min \quad &\sum_{i=1}^n |q_i - r_i| \\ \text{s.a.} \quad &r_2 - r_1 \geq k_1 - k_2, \\ &\frac{r_{i+1} - r_i}{k_{i+1} - k_i} \geq \frac{r_i - r_{i-1}}{k_i - k_{i-1}}, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ &r_i \geq r_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Notemos que podemos considerar outras normas como a norma infinito ou a norma euclidiana ao invés da norma 1. Como foi referido, sempre que não se verifiquem as condições de declive, trabalharemos com os preços r_i , $i = 1, \dots, n$. Ilustremos este facto usando dados referentes a opções *call* sobre o índice S&P 500 transacionadas dia 8 de Abril de 2005 e com maturidade no final desse mês. Estes dados foram obtidos no dia 10 de dezembro de 2016 em <https://datashop.cboe.com/>.

Na Tabela 3.5 são apresentados os preços e preços corrigidos de opções sobre este índice para alguns preços de exercício e na Figura 3.2 podemos ver a sua representação.

Preço de Exercício	1100	1105	1110	1115	1120	1125	1130	1135	1140
Preço da Opção	22,60	19,60	16,60	13,70	12,80	10,00	7,30	5,70	5,00
Preço Corrigido	22,600	19,600	16,600	14,084	11,921	9,758	7,596	5,700	5,000

Tabela 3.5 Preços observados e corrigidos de opções *calls* transacionadas dia 8 de Abril de 2005 sobre o índice S&P 500.

Na Figura 3.2 pode-se facilmente notar que estes preços reais não definem uma curva convexa.

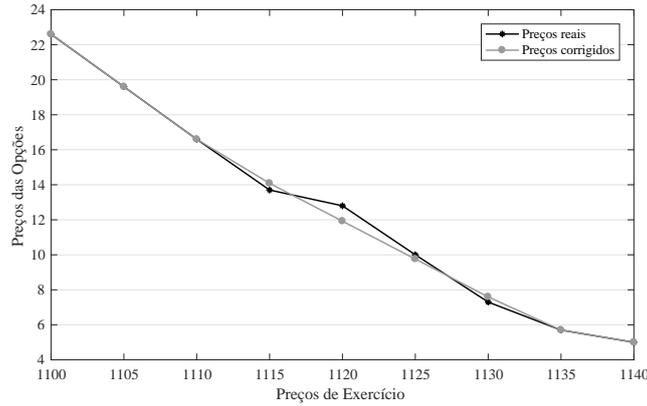


Fig. 3.2 Preços reais e corrigidos de opções referentes ao índice S&P 500 entre 8 e 30 de abril de 2005.

Estamos agora em condições de estudar os limites superior e inferior considerando preços de outras opções.

3.3.2 Limite superior

Formulamos o problema de encontrar o melhor limite superior a partir da informação acerca dos preços de outras opções como um problema de otimização contínuo sobre todas as medidas de probabilidade μ possíveis para o preço do ativo, como se segue:

$$\begin{aligned} \bar{v} = \max_{\mu \in \mathcal{M}(S)} & \int_0^{\infty} \max(0, x - k) d\mu \\ \text{s.a.} & \int_0^{\infty} \max(0, x - k_i) d\mu = q_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ & \int_0^{\infty} d\mu = 1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Este problema é também um caso do PGM onde $S = \mathbb{R}_+$, $F(x) = \max(0, x - k)$ e $h_i(x) = \max(0, x - k_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Considerando um conjunto discreto de valores $S \subseteq \mathbb{R}_+$ que incluam os preços de exercício $k_i \in S$, $i = 1, \dots, n$, podemos formular um problema mais restrito, restringido às distribuições do preço $p_x = P(X = x)$ sobre S , isto é,

$$\begin{aligned} \bar{v}_{Dis} = \max & \sum_{x \geq k} (x - k) p_x \\ \text{s.a.} & \sum_{x \geq k_i} (x - k_i) p_x = q_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ & \sum_{x \geq 0} p_x = 1, \quad p_x \geq 0, \quad \forall x \in S. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Facilmente se observa que $\bar{v} \geq \bar{v}_{Dis}$, uma vez que, no problema (3.13), estamos a maximizar sobre um conjunto de distribuições discretas. Usando as variáveis duais u_1, \dots, u_n e v , construímos o dual de

(3.12)

$$\begin{aligned} \bar{v}^* = \min \quad & v + \sum_{i=1}^n u_i q_i \\ \text{s.a.} \quad & g(x) = v + \sum_{i=1}^n \max(0, x - k_i) u_i \geq \max(0, x - k), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (3.14)$$

O dual do problema mais restrito, (3.13), é também (3.14) excetuando o facto das restrições apenas terem de ser verificadas num conjunto discreto de pontos $x \in S$, onde X toma valores. Notemos que a função $g(x)$, para ambos os problemas, é linear por troços e a mudança de declive ocorre nos pontos k_i , $i = 1, \dots, n$. Assim, é suficiente resolver para cada problema as restrições nos pontos k_j . Inferimos pois que (3.14) é equivalente a

$$\begin{aligned} \bar{v}_2^* = \min \quad & v + \sum_{i=1}^n u_i q_i \\ \text{s.a.} \quad & g(k_1) = v \geq 0, \\ & g(k_2) = v + (k_2 - k_1)u_1 \geq 0, \\ & \vdots \\ & g(k_j) = v + (k_j - k_1)u_1 + \dots + (k_j - k_{j-1})u_{j-1} \geq 0, \\ & g(k) = v + (k - k_1)u_1 + \dots + (k - k_j)u_j \geq 0, \\ & g(k_{j+1}) = v + (k_{j+1} - k_1)u_1 + \dots + (k_{j+1} - k_j)u_j \geq k_{j+1} - k, \\ & \vdots \\ & g(k_n) = v + (k_n - k_1)u_1 + \dots + (k_n - k_{n-1})u_{n-1} \geq k_n - k, \\ & u_1 + u_2 + \dots + u_n \geq 1, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde a última restrição serve para controlar o caso em que $x \rightarrow \infty$. Temos $\bar{v}_2^* = \bar{v}^*$ e também a existência de dualidade fraca para ambos os pares primal-dual, ou seja, $\bar{v}^* \geq \bar{v} \geq \bar{v}_{Dis}$. Notemos ainda que temos dualidade forte para a versão discreta (3.13) uma vez que estes são problemas de otimização linear, logo $\bar{v}_{Dis} = \bar{v}_2^* = \bar{v}^*$. Mostrámos então que $\bar{v} = \bar{v}_{Dis} = \bar{v}^*$. Assim, existe uma distribuição discreta dos preços das ações que atinge o limite \bar{v} . Notemos que se estivéssemos apenas interessados na dualidade $\bar{v} = \bar{v}^*$ ela seguiria do Corolário 2.1.1 sempre que $k_i \leq k$, $i = 1, \dots, n$.

3.3.3 Limite inferior

Baseando-nos no que foi feito para o limite superior, podemos encontrar o limite inferior de forma semelhante. Começemos por considerar o problema que queremos ver resolvido

$$\begin{aligned} \underline{v} = \min \quad & \int_0^\infty \max(0, x - k) d\mu \\ \text{s.a.} \quad & \int_0^\infty \max(0, x - k_i) d\mu = q_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ & \int_0^\infty d\mu = 1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Recorrendo, uma vez mais, às distribuições discretas do preço $p_x = P(X = x)$ sobre um conjunto discreto de valores $S \subseteq \mathbb{R}_+$ que incluam os preços de exercício $k_i \in S$, $i = 1, \dots, n$, o problema mais restrito será

$$\begin{aligned} \underline{v}_{Dis} = \min & \sum_{x \geq k} (x - k) p_x \\ \text{s.a.} & \sum_{x \geq k_i} (x - k_i) p_x = q_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ & \sum_{x \geq 0} p_x = 1, \quad p_x \geq 0, \quad \forall x \in S. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dualizando (3.16) vem

$$\begin{aligned} \underline{v}^* = \max & v + \sum_{i=1}^n u_i q_i \\ \text{s.a.} & h(x) = v + \sum_{i=1}^n \max(0, x - k_i) u_i \leq \max(0, x - k), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Mais um vez, o dual do problema mais restrito é o mesmo do problema inicial com exceção de que em (3.17) as restrições apenas têm que ser verificadas num conjunto discreto de pontos $x \in S$. Podemos reescrever (3.18) como

$$\begin{aligned} \underline{v}_2^* = \max & v + \sum_{i=1}^n u_i q_i \\ \text{s.a.} & h(k_1) = v \leq 0, \\ & h(k_2) = v + (k_2 - k_1) u_1 \leq 0, \\ & \vdots \\ & h(k_j) = v + (k_j - k_1) u_1 + \dots + (k_j - k_{j-1}) u_{j-1} \leq 0, \\ & h(k) = v + (k - k_1) u_1 + \dots + (k - k_j) u_j \leq 0 \\ & h(k_{j+1}) = v + (k_{j+1} - k_1) u_1 + \dots + (k_{j+1} - k_j) u_j \leq k_{j+1} - k, \\ & \vdots \\ & h(k_n) = v + (k_n - k_1) u_1 + \dots + (k_n - k_{n-1}) u_{n-1} \leq k_n - k, \\ & u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq 1, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde, uma vez mais, a última restrição serve para controlar o caso em que $x \rightarrow \infty$. Temos que $\underline{v} \leq \underline{v}_{Dis}$ e $\underline{v}_2^* = \underline{v}^*$ uma vez que (3.18) e (3.19) são equivalentes. Novamente temos a existência de dualidade fraca para ambos os pares primal-dual, ou seja, $\underline{v}^* \leq \underline{v} \leq \underline{v}_{Dis}$. Mais ainda, temos dualidade forte para a versão discreta (3.17) e $\underline{v}_{Dis} = \underline{v}_2^* = \underline{v}^*$. Mostrámos então que $\underline{v} = \underline{v}_{Dis} = \underline{v}^*$. Poderíamos novamente ter aplicado o Corolário 2.1.1 garantindo dualidade forte entre (3.16) e (3.18) devido à não negatividade de $\max(0, x - k_i)$, $i = 1, \dots, n$ e $\max(0, x - k)$. Este caminho alternativo mostra ainda que podemos resolver o problema usando programação linear.

Resolvendo os problemas (3.15) e (3.19), como fizeram Bertsimas e Popescu em [1], obtemos o teorema seguinte.

Teorema 3.3.1. *Dados preços n de opções que obedecem às condições de declive, q_1, \dots, q_n , com preços de exercício $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n$, sobre o ativo X , os valores possíveis para o preço de uma opção call com preço de exercício $k \in (k_j, k_{j+1})$, para algum $j = 0, \dots, n$, pertencem a $[\underline{v}, \bar{v}]$, onde*

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \max \left(q_j \frac{k - k_{j-1}}{k_j - k_{j-1}} + q_{j-1} \frac{k_j - k}{k_j - k_{j-1}}, q_{j+1} \frac{k_{j+2} - k}{k_{j+2} - k_{j+1}} + q_{j+2} \frac{k - k_{j+1}}{k_{j+2} - k_{j+1}} \right), \\ \bar{v} &= q_j \frac{k_{j+1} - k}{k_{j+1} - k_j} + q_{j+1} \frac{k - k_j}{k_{j+1} - k_j}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

com $k_0 = 0$, $k_{n+1} = k_n + 1$, $q_0 = k_1 + q_1$, $q_{n+1} = q_n$, e, na operação do máximo em \underline{v} , consideramos os valores se estiverem definidos.

Com este teorema, concluímos que as condições de declive são condições necessárias e suficientes para uma função ser válida enquanto função que avalia os preços de opções. Vejamos agora algumas aplicações deste resultado.

3.3.4 Exemplos

Consideremos as oito opções referidas na Tabela 3.6. Estas não satisfazem as condições de declive pelo que usaremos correções aos preços, contidas na mesma tabela.

Preço de Exercício	1725	1745	1870	1960	2050	2070	2110	2125
Preço da Opção	270,65	247,90	130,55	58,00	10,60	4,75	0,84	0,35
Preço Corrigido	269,386	249,386	130,550	58,000	10,600	4,750	0,840	0,350

Tabela 3.6 Preços reais e corrigidos de *calls* sobre o índice S&P 500 transacionadas no primeiro período de tempo, entre 4 e 15 de janeiro de 2016.

Aplicando o Teorema 3.3.1 encontramos os limites superior e inferior para alguns preços de exercício entre 1850 e 2100 que apresentamos na Tabela 3.7 e representamos na Figura 3.3.

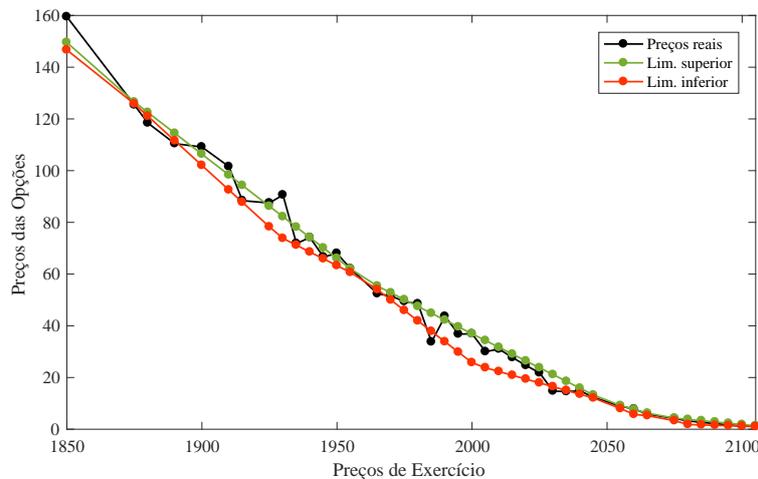


Fig. 3.3 Preços reais e limites superior e inferior dados oito preços de outras opções sobre o índice S&P 500 de 4 a 15 de janeiro de 2016.

	k=1875		k=1930		k=1970		k=2030		k=2085	
	L. inf.	L. sup.								
	125,797	126,519	73,800	82,183	49,939	52,733	16,450	21,133	1,657	3,284
V. Real	125,40		90,60		51,50		14,75		2,65	

Tabela 3.7 Preços reais e limites superior e inferior de cinco opções dados oito preços sobre o índice S&P 500 transacionadas em 4 de janeiro de 2016 e com maturidade em 15 de janeiro do mesmo ano.

Como podemos observar, por vezes, os valores reais não se encontram entre os limites embora estes se encontrem muito próximos dos valores reais.

Recorrendo ao exemplo usado anteriormente sobre opções transacionadas no segundo período de tempo, entre 4 de janeiro e 5 de fevereiro de 2016, concluímos que os preços observados, mais uma vez, não satisfazem as condições de declive. Na Tabela 3.8 encontram-se os preços corrigidos que serão considerados no cálculo dos limites.

Preço de Exercício	1925	1930	1990	2045	2060	2095	2170	2180
Preço da Opção	97,10	93,25	47,00	18,70	16,35	7,75	0,65	0,40
Preço Corrigido	97,100	93,246	47,000	18,700	15,415	7,750	0,650	0,400

Tabela 3.8 Preços reais e corrigidos de *calls* sobre o índice S&P 500 transacionadas em 4 de janeiro de 2016 e com maturidade em 5 de fevereiro de 2016.

Aplicando novamente o Teorema 3.3.1 a preços de exercício entre 1950 e 2160 obtemos os limites presentes na Tabela 3.9 e que representamos na Figura 3.4.

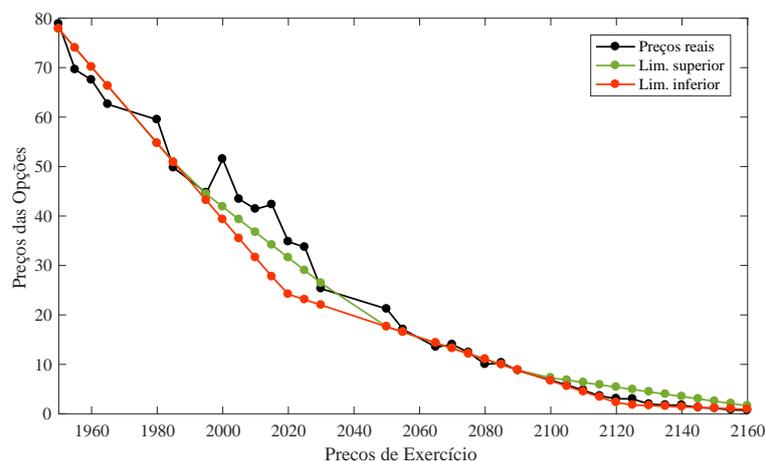


Fig. 3.4 Preços reais e limites superior e inferior dados oito preços de outras opções sobre o índice S&P 500 de 4 de janeiro a 5 de fevereiro de 2016.

Como podemos observar, para preços de exercício de valor até aproximadamente 1990, os limites praticamente coincidem. Entre 1990 e 2050 alguns preços reais são superiores a ambos os limites e para preços superiores a 2100 os preços reais encontram-se entre os limites.

	k=1995		k=2015		k=2070		k=2100		k=2140	
	L. inf.	L. sup.								
	43,146	44,427	27,731	34,136	13,225	13,225	6,655	7,277	1,400	3,490
V. Real	44,70		42,30		14,00		6,80		1,73	

Tabela 3.9 Preços reais e limites superior e inferior de cinco opções dados oito preços sobre o índice S&P 500 transacionadas em 4 de janeiro de 2016 e com maturidade em 5 de fevereiro do mesmo ano.

3.4 Informação acerca dos momentos do ativo subjacente e outros preços de opções

Nesta secção esperamos encontrar uma melhoria aos dois métodos anteriores, encontrados na literatura. Iremos averiguar se a conjugação desses dois métodos se revela preferível a cada um isoladamente. Para isso, criaremos um problema de otimização em que incorporaremos nas restrições não só a informação sobre os momentos da ação subjacente mas também os preços de outras opções.

Neste capítulo não será possível a elaboração de exemplos com dados retirados do mercado. Isto deve-se ao facto dos momentos empíricos do ativo e os preços das opções não serem compatíveis e, consequentemente, os problemas que permitem encontrar tais limites tornam-se inadmissíveis. Uma forma de contornar esta questão seria ajustar os preços e momentos de uma forma semelhante ao que fizemos para os preços em (3.11), mas tal estudo não foi efetuado neste trabalho. No entanto, no próximo capítulo, apresentaremos exemplos desta abordagem onde os dados usados já permitem uma comparação efetiva.

Consideraremos a mesma notação usada atrás e comecemos por estudar o limite superior.

3.4.1 Limite superior

Baseando-nos nos dois capítulos anteriores, facilmente se depreende que estamos à procura da solução do problema

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma} = \max_{\mu \in \mathcal{M}(S)} & \int_0^{\infty} \max(0, x - k) d\mu \\
 \text{s.a.} & \int_0^{\infty} x^i d\mu = e_i, \quad i = 0, 1, \dots, m, \\
 & \int_0^{\infty} \max(0, x - k_i) d\mu = q_i, \quad i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Dualizando obtemos

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}^* = \min & \sum_{i=0}^m w_i e_i + \sum_{i=1}^n u_i q_i \\
 \text{s.a.} & g(x) = \sum_{i=0}^m x^i w_i + \sum_{i=1}^n \max(0, x - k_i) u_i \geq \max(0, x - k), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

De novo, recorrendo ao Corolário 2.1.1, garantimos a dualidade forte entre estes problemas pois $(w_0, w_1, \dots, w_m) = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $(u_1, \dots, u_n) = (0, \dots, 0)$ é admissível e as funções $\max(0, x - k)$, x^i , $i = 0, \dots, m$, e $\max(0, x - k_i)$, $i = 1, \dots, n$, são não negativas em \mathbb{R}_+ . Como g toma diferentes formas con-

soante cada sub-intervalo que estejamos a considerar, iremos analisar como esta função se define em cada um deles. Para uma leitura mais clara do que se vai expor, definimos os intervalos

$$I_0 = [0, k_1[, \quad I_1 = [k_1, k_2[, \quad \dots, \quad I_j = [k_j, k_{j+1}[, \quad I_{j+1} = [k_{j+1}, k_{j+2}[, \quad \dots, \quad I_n = [k_n, +\infty[$$

como se ilustra na Figura 3.5.

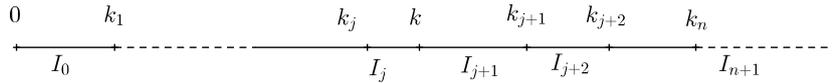


Fig. 3.5 Intervalos definidos tendo em conta o preço de exercício requerido, k .

Lembrando que $k_0 = 0$ e $k_{n+1} = +\infty$, definimos ainda

$$\delta(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } k > k_i, \\ 1 & \text{se } k < k_i, \end{cases} \quad i = 0, \dots, n+1.$$

Assim, a região admissível do problema (3.22) pode ser escrita, para $l = 0, \dots, n+1$, como

$$g(x) = \sum_{i=0}^m x^i w_i + \sum_{i=1}^{l-\delta(l)} u_i (x - k_i) \geq \delta(l)(x - k), \quad \forall x \in I_l.$$

Definimos agora a variável w' como sendo igual a w exceto nas duas primeiras coordenadas, ou seja, $w' = (w'_0, w'_1, w_2, \dots, w_m)$, onde

$$w'_0 = \left(w_0 - \sum_{i=1}^{l-\delta(l)} u_i k_i + \delta(l)k \right) \quad \text{e} \quad w'_1 = \left(w_1 + \sum_{i=1}^{l-\delta(l)} u_i - \delta(l) \right), \quad l = 0, \dots, n+1.$$

Portanto, para $l = 0, \dots, n+1$, podemos reescrever a região admissível do problema como

$$g(x) = \sum_{i=0}^m x^i w'_i \geq 0, \quad \forall x \in I_l.$$

Tendo de ser garantida a não negatividade de certos polinómios em diferentes intervalos, usaremos as proposições estudadas na Secção 2.2. Começando pelo intervalo I_0 , aplicamos a Proposição 2.2.3 considerando a matriz $R = [r_{ij}]_{i,j=0,\dots,m}$ positiva semidefinida, obtendo

$$\begin{aligned} \sum_{i,j: i+j=2l_1-1} r_{ij} &= 0, \quad l_1 = 1, \dots, m, \\ \sum_{i,j: i+j=2l_1} r_{ij} &= \sum_{r=0}^{l_1} w'_r \binom{m-r}{l_1-r} k_1^r, \quad l_1 = 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Aplicando a Proposição 2.2.2 a cada um dos intervalos I_l , $l = 1, \dots, n$ e considerando a matriz $S = [s_{ij}]_{i,j=0,\dots,m}$ positiva semidefinida temos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j: i+j=2l_1-1} s_{ij} &= 0, \quad l_1 = 1, \dots, m, \\ \sum_{i,j: i+j=2l_1} s_{ij} &= \sum_{N=0}^{l_1} \sum_{r=N}^{m+N-l_1} w'_r \binom{r}{N} \binom{m-r}{l_1-N} k_l^{r-N} k_{l+1}^N, \quad l_1 = 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ao último intervalo, I_{n+1} , aplicamos a Proposição 2.2.4 usando a matriz $Z = [z_{ij}]_{i,j=0,\dots,m}$ positiva semidefinida obtendo

$$\begin{aligned} \sum_{i,j: i+j=2l_1-1} z_{ij} &= 0, \quad l_1 = 1, \dots, m, \\ \sum_{i,j: i+j=2l_1} z_{ij} &= \sum_{r=l_1}^m w'_r \binom{r}{l_1} k_n^r, \quad l_1 = 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Finalmente podemos resumir o que acabámos de estudar no teorema seguinte.

Teorema 3.4.1. *O melhor limite superior para o preço de uma opção call europeia com preço de exercício $k > 0$ com base na informação dos m primeiros momentos do ativo e_i , $i = 1, \dots, m$, $e_0 = 1$, e em n preços de opções q_1, \dots, q_n , com preços de exercício $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n$, sobre o mesmo ativo, é a solução do problema*

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=0}^m w_i e_i + \sum_{i=1}^n u_i q_i \\ \text{s.a.} \quad & (3.23), (3.24) \text{ e } (3.25), \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde as matrizes das condições (3.23) a (3.25), $R = [r_{ij}]$, $S = [s_{ij}]$ e $Z = [z_{ij}]$, $i, j = 0, \dots, m$ são positivas semidefnidas.

3.4.2 Limite inferior

Pretendemos agora encontrar a solução do problema

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \min_{\mu \in \mathcal{M}(S)} \int_0^\infty \max(0, x - k) d\mu \\ \text{s.a.} \quad & \int_0^\infty x^i d\mu = e_i, \quad i = 0, 1, \dots, m, \\ & \int_0^\infty \max(0, x - k_i) d\mu = q_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Dualizando o problema anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^* &= \max \sum_{i=0}^m w_i e_i + \sum_{i=1}^n u_i q_i \\ \text{s.a.} \quad & h(x) = \sum_{i=0}^m x^i w_i + \sum_{i=1}^n \max(0, x - k_i) u_i \leq \max(0, x - k), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Garantimos dualidade forte ente estes problemas recorrendo novamente ao Corolário 2.1.1 uma vez que as funções $\max(0, x - k)$, x^i , $i = 0, \dots, m$, e $\max(0, x - k_i)$, $i = 1, \dots, n$, são não negativas em \mathbb{R}_+ .

Podemos agora reescrever (3.28) como

$$\begin{aligned} \min \quad & - \left(\sum_{i=0}^m w_i e_i + \sum_{i=1}^n u_i q_i \right) \\ \text{s.a.} \quad & -h(x) = - \left(\sum_{i=0}^m x^i w_i + \sum_{i=1}^n \max(0, x - k_i) u_i \right) \geq \max(0, x - k), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (3.29)$$

A função h tem expressões diferentes conforme o intervalo I_l que se esteja a considerar. Assim, de uma forma análoga ao subcapítulo anterior, aplicamos as Proposições de 2.2.2 a 2.2.4 a cada intervalo, obtendo o teorema que se segue.

Teorema 3.4.2. *O melhor limite inferior para o preço de uma opção call europeia com preço de exercício $k > 0$ com base na informação dos m primeiros momentos do ativo e_i , $i = 1, \dots, m$, $e_0 = 1$, e em n preços de opções q_1, \dots, q_n , com preços de exercício $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n$, sobre o mesmo ativo, é a solução do problema*

$$\begin{aligned} \min \quad & - \left(\sum_{i=0}^m w_i e_i + \sum_{i=1}^n u_i q_i \right) \\ \text{s.a.} \quad & (3.23), (3.24) \text{ e } (3.25), \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde as matrizes das condições (3.23) a (3.25), $R = [r_{ij}]$, $S = [s_{ij}]$ e $Z = [z_{ij}]$, $i, j = 0, \dots, m$ são negativas semidefinidas.

Na implementação desta e das outras abordagens, usámos o *software* MATLAB. Poderá ser consultado o Anexo A para mais informações.

Capítulo 4

Resultados numéricos

Como observámos no Capítulo 3, o ruído inerente a aproximações nos modelos reais afeta os resultados previstos, o que nos leva a perder a noção da eficácia dos métodos estudados. Tentaremos neste capítulo contornar esse problema testando os resultados com três distribuições conhecidas por forma a verificar se os valores obtidos são os esperados. Estudaremos um modelo com uma distribuição discreta e finita, a experiência do lançamento do dado, uma distribuição discreta e infinita, a distribuição de Poisson, e uma contínua, de Pareto. A escolha destas distribuições e correspondentes parâmetros foi feita de modo a que os seus suportes fossem constituídos apenas por valores não negativos, representando de forma real possíveis preços de ativos e opções.

Por forma a aplicar a teoria estudada na Secção 3.2, relativa à informação sobre momentos do preço do ativo, iremos considerar apenas os momentos das distribuições ignorando qualquer informação adicional conhecida sobre as mesmas. Consideraremos para cada modelo os primeiros sete momentos da distribuição pois, para momentos de ordem superior, surgem erros de mau condicionamento que podem afetar os resultados. Na exemplificação dos resultados da Secção 3.3, apenas tomaremos em consideração a informação sobre $E[\max(0, X - k)]$ onde X terá a distribuição correspondente, para vários valores de k , uma vez mais, ignorando outras características das distribuições. Finalmente, na exemplificação do estudo dos momentos e preços de outras opções, apresentado na Secção 3.4, reuniremos as informações dos dois tópicos anteriores. Aqui usaremos todos os preços considerados anteriormente mas apenas momentos de ordem não superior a quatro.

4.1 Distribuição discreta e finita

Para exemplificação de um modelo discreto e finito, consideremos a experiência do lançamento de um dado equilibrado.

4.1.1 Momentos

Seja X a variável aleatória que representa o número obtido na face virada para cima no lançamento de um dado equilibrado. O vetor dos primeiros momentos de X é $\mathbf{e} = (1, \frac{7}{2}, \frac{91}{6}, \frac{147}{2}, \frac{2275}{6}, \frac{4067}{6}, \frac{67171}{6}, \frac{125587}{2})$. Iremos calcular limites para opções com preços de exercícios entre um e seis com base neste vetor de momentos.

Na Figura 4.1 vemos os resultados obtidos considerando os momentos de um a sete. A verde escuro estão representados os limites superiores considerando apenas o primeiro momento e, conforme consideramos mais momentos, os limites superiores vão sendo representados por verdes cada vez mais claros. O análogo é feito para os limites inferiores, mas em tons de vermelho. Na Tabela 4.1 são apresentados os valores obtidos para cinco preços de exercício diferentes.

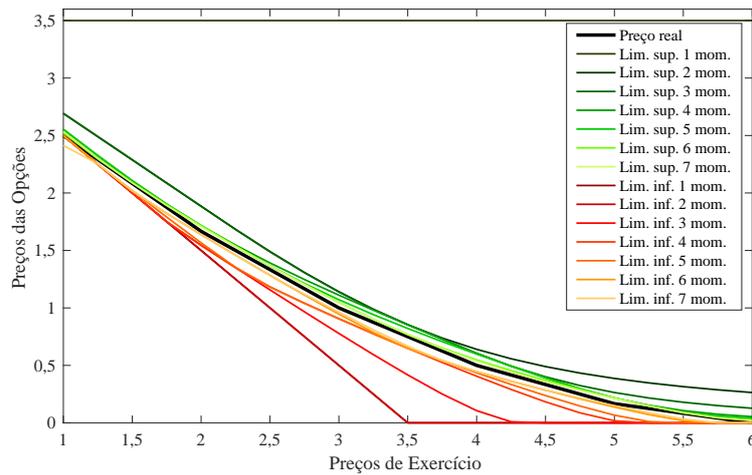


Fig. 4.1 Preços reais e limites superior e inferior para os primeiros sete momentos do modelo do lançamento do dado.

Mom.	k=1		k=2,2		k=3,4		k=4,6		k=5,8	
	L. inf.	L. sup.								
1	2,500	3,500	1,300	3,500	0,100	3,500	0	3,500	0	3,500
2	2,500	2,692	1,300	1,723	0,100	0,905	0	0,466	0	0,282
3	2,500	2,692	1,389	1,723	0,487	0,905	0	0,368	0	0,145
4	2,500	2,554	1,389	1,579	0,699	0,904	0,142	0,352	0	0,070
5	2,500	2,554	1,394	1,574	0,699	0,868	0,200	0,352	0	0,055
6	2,499	2,523	1,494	1,574	0,701	0,820	0,253	0,337	0	0,040
7	2,418	2,533	1,494	1,567	0,723	0,820	0,257	0,328	0	0,038
V. Real	2,500		1,533		0,800		0,300		0,033	

Tabela 4.1 Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções para os primeiros sete momentos do modelo do lançamento do dado.

Analisando os resultados obtidos na Figura 4.1 e Tabela 4.1 verificamos que a diferença entre os limites superior e inferior vai diminuindo à medida que aumentamos o número de momentos até ao sétimo. Em geral, vemos que há uma aproximação ao preço real com o aumento do número de momentos, o que não se verificava no capítulo anterior, com o uso de dados reais. Podemos ainda verificar que, para o preço de exercício $k = 1$, a consideração do sétimo momento piora os resultados obtidos com seis.

4.1.2 Preços

Consideremos agora seis opções cujos preços e preços de exercício estão presentes na Tabela 4.2 como informação base ao cálculo do limites do preço. Para cada preço de exercício, k , os preços das opções foram calculados de acordo com

$$q(k) = \frac{1}{6} \sum_{r=1}^6 \max((r - k), 0).$$

Preço de Exercício	0,679	0,858	1,743	3,279	5,818	5,983
Preço da Opção	2,821	2,642	1,881	0,861	0,030	0,003

Tabela 4.2 Preços e preços de exercício de seis opções sobre o modelo do lançamento do dado.

Aplicando o Teorema 3.3.1 obtemos os limites inferior e superior para alguns preços de exercício presentes na Tabela 4.3. Na Figura 4.2 podemos ver representado a verde os limites superiores e a vermelho os inferiores.

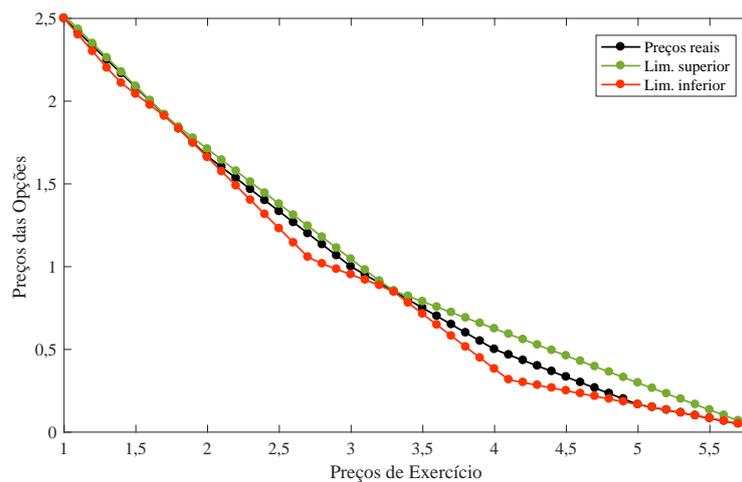


Fig. 4.2 Preços reais e limites superior e inferior dados seis preços de outras opções sobre o modelo do lançamento do dado.

	k=1		k=2,2		k=3,4		k=4,6		k=5,8	
	L. inf.	L. sup.								
	2,500	2,520	1,488	1,577	0,780	0,821	0,233	0,429	0,033	0,036
V. Real	2,500		1,533		0,800		0,300		0,033	

Tabela 4.3 Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções dados seis preços de outras opções do modelo do lançamento do dado.

Analisando a Figura 4.2 e a Tabela 4.3 verificamos que os limites superior e inferior são muito próximos dos valores reais sendo a maior diferença observada para preços de exercício entre 3,5 e 5, correspondentes à maior diferença entre preços de exercício conhecidos considerados na Tabela 4.2.

4.1.3 Preços e momentos

Consideremos agora os primeiros quatro momentos de X e os preços presentes na Tabela 4.2. Aplicando os Teoremas 3.4.1 e 3.4.2, obtemos, para determinados preços de exercício, os valores presentes na Tabela 4.4. Na Figura 4.3 podemos observar os resultados obtidos num domínio reduzido por forma a efetuarmos uma análise mais criteriosa. A verde estão representados os limites quando consideramos apenas os primeiros quatro momentos, a vermelho apenas os seis preços e a azul temos a representação dos limites envolvendo os quatro momentos e os seis preços.

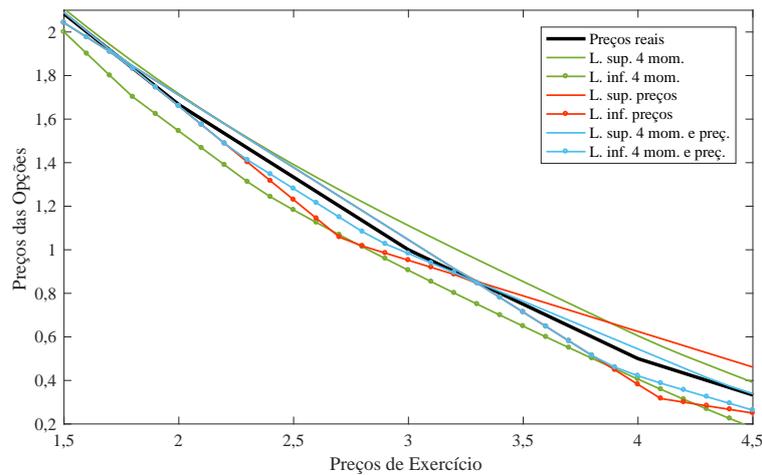


Fig. 4.3 Preços reais e limites superior e inferior pelas três abordagens estudadas do modelo do lançamento do dado.

Mom.	k=1		k=2,2		k=3,4		k=4,6		k=5,8	
	L. inf.	L. sup.								
1	2,500	2,520	1,488	1,577	0,780	0,821	0,233	0,429	0,033	0,036
2	2,500	2,520	1,488	1,577	0,780	0,812	0,233	0,338	0,033	0,035
3	2,500	2,520	1,488	1,577	0,780	0,808	0,233	0,313	0,033	0,034
4	2,500	2,520	1,488	1,577	0,780	0,807	0,233	0,308	0,033	0,034
V. Real	2,500		1,533		0,800		0,300		0,033	

Tabela 4.4 Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções para os primeiros quatro momentos e preços de seis opções do modelo do lançamento do dado.

Pela análise da Figura 4.3 verificamos que as linhas azuis estão mais próximas dos preços verdadeiros quando comparadas com as linhas vermelhas e verdes. Para alguns preços de exercício, as linhas a azul coincidem com as linhas vermelhas e verdes. Da Tabela 4.4 verificamos ainda que, quando consideramos os preços e o primeiro momento do ativo, obtemos os mesmos resultados que obtivemos sem o primeiro momento. No entanto, quando são considerados mais momentos, os limites obtidos nesta abordagem aproximam-se mais dos preços reais. Concluímos que se obtém, neste exemplo, uma melhoria efetiva em relação às duas abordagens anteriores.

4.2 Distribuição discreta e infinita

Consideremos agora a variável aleatória Y com distribuição de Poisson de parâmetro λ sendo a sua função de probabilidade dada por

$$f(y) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} \mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(y).$$

Escolheremos o parâmetro $\lambda = 5$.

4.2.1 Momentos

O vetor de momentos de Y é $e=(1, 5, 30, 205, 1555, 12880, 115155, 1101705)$. Considerando então os primeiros sete momentos, obtemos os limites, para alguns preços de exercícios, presentes na Tabela 4.5 e representados na Figura 4.4.

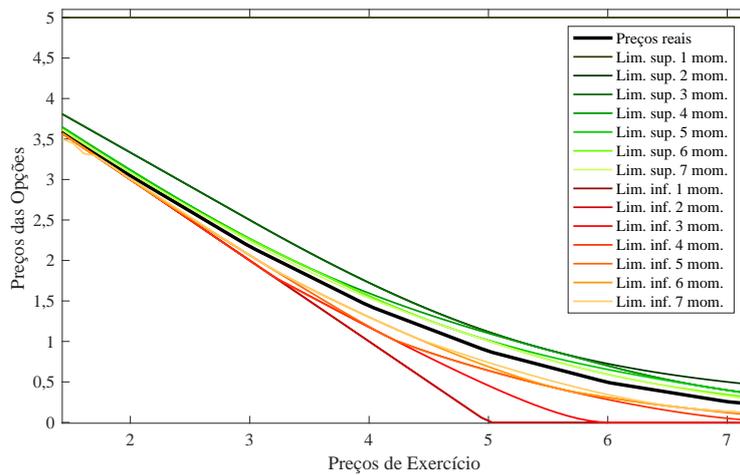


Fig. 4.4 Preços reais e limites superior e inferior para os primeiros sete momentos do modelo de Poisson.

Mom.	k=1,5		k=2,9		k=4,3		k=5,7		k=7,1	
	L. inf.	L. sup.								
1	3,500	5,000	2,100	5,000	0,700	5,000	0	5,000	0	5,000
2	3,500	3,750	2,100	2,583	0,700	1,522	0	0,822	0	0,484
3	3,500	3,750	2,100	2,583	0,951	1,522	0,066	0,817	0	0,377
4	3,500	3,581	2,100	2,347	0,969	1,431	0,378	0,817	0,037	0,376
5	3,500	3,581	2,157	2,347	0,969	1,373	0,379	0,747	0,107	0,376
6	3,500	3,546	2,157	2,338	1,102	1,373	0,379	0,698	0,124	0,325
7	3,432	3,546	2,160	2,316	1,102	1,365	0,447	0,698	0,124	0,306
V. Real	3,527		2,259		1,269		0,609		0,242	

Tabela 4.5 Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções para os primeiros sete momentos do modelo de Poisson.

Pela análise da Figura 4.4 vemos que, em geral, à medida que aumentamos o número de momentos tidos em consideração, os intervalos definidos pelos limites obtidos vão sendo cada vez mais limitadores, traduzindo uma melhor aproximação aos valores reais. Observando a Tabela 4.5, inferimos que a informação acerca do sétimo momento transporta erros de condicionamento piorando os resultados obtidos com seis momentos, em alguns casos.

4.2.2 Preços

Começemos por calcular os preços das opções que usaremos como informação. Estaremos assim interessados em calcular $E[\max(0, Y - k)]$ para vários valores de k . Admitindo que $k \in [j, j + 1]$, $j \in \mathbb{N}_0$, vem

$$\begin{aligned}
 E[\max(0, Y - k)] &= \sum_{i=0}^{+\infty} \max(0, i - k) \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \\
 &= \sum_{i=j+1}^{+\infty} (i - k) \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} i \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} - \sum_{i=0}^j i \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \right) - k \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} - \sum_{i=0}^j \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \right) \\
 &= \lambda - \sum_{i=0}^j i \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} - k \left(1 - \sum_{i=0}^j \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \right).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Calculamos assim os preços das opções para alguns preços de exercício presentes na Tabela 4.6.

Preços de Exercício	0,498	1,413	2,658	5,957	7,247	7,958
Preço da Opção	4,505	3,610	2,472	0,510	0,223	0,128

Tabela 4.6 Preços e preços de exercício de opções sobre o modelo de Poisson.

Aplicando novamente o Teorema 3.3.1 obtemos os limites inferior e superior. Na Tabela 4.7 apresentamos os valores para algumas opções e na Figura 4.5 temos a sua representação.

	k=1,5		k=2,9		k=4,3		k=5,7		k=7,1	
	L. inf.	L. sup.								
	3,525	3,531	2,250	2,327	0,969	1,495	0,567	0,663	0,242	0,255
V. Real	3,527		2,259		1,269		0,609		0,242	

Tabela 4.7 Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções dados seis preços de opções do modelo de Poisson.

Como podemos observar na Tabela 4.7, os limites teóricos obtidos são muito próximos dos preços reais das opções. Na Figura 4.5, verificamos ainda que a maior diferença entre os limites superiores e inferiores se verifica para preços de exercício entre três e cinco novamente correspondente à falta de informação de preços de outras opções, para esses preços de exercício, na Tabela 4.6.

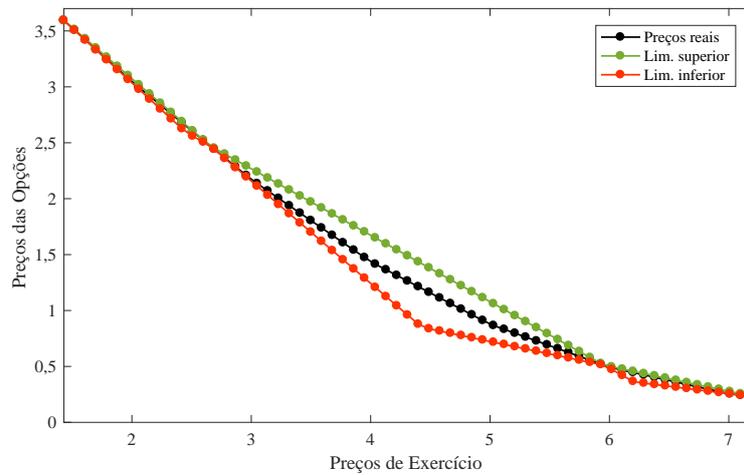


Fig. 4.5 Preços reais e limites superior e inferior dados seis preços de outras opções sobre o modelo de Poisson.

4.2.3 Preços e momentos

Consideremos agora os primeiros quatro momentos e os preços presentes na Tabela 4.6. Aplicando os Teoremas 3.4.1 e 3.4.2 obtemos os resultados ilustrados na Figura 4.6 e, tendo em conta alguns preços de exercício, obtemos os valores presentes na Tabela 4.8.

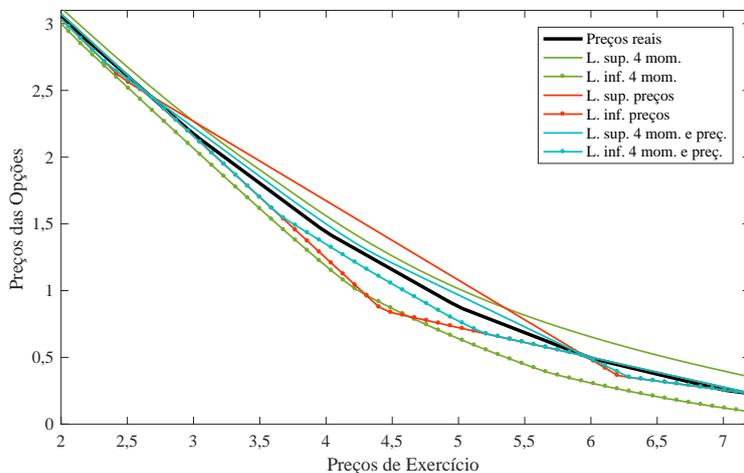


Fig. 4.6 Preços reais e limites superior e inferior para os primeiros quatro momentos e preços de seis opções do modelo de Poisson.

Os resultados obtidos usando a informação dos momentos e preços é, novamente, preferível às duas abordagens anteriores. Concluímos da análise da Tabela 4.8 que, para alguns preços de exercício, o aumento do número de momentos traz melhorias nas aproximações. Da Figura 4.6, notamos também uma aproximação dos limites aos valores reais usando esta abordagem principalmente para preços de exercício entre 3,5 e 5. Este intervalo de valores corresponde à maior diferença observada entre limites superior e inferiores na subsecção anterior.

Mom.	k=1,5		k=2,9		k=4,3		k=5,7		k=7,1	
	L. inf.	L. sup.								
1	3,525	3,531	2,250	2,327	0,969	1,495	0,567	0,663	0,242	0,255
2	3,525	3,531	2,250	2,306	0,969	1,360	0,567	0,640	0,242	0,255
3	3,525	3,531	2,250	2,306	1,164	1,360	0,567	0,640	0,242	0,255
4	3,525	3,531	2,250	2,294	1,165	1,311	0,567	0,633	0,242	0,255
V. Real	3,527		2,259		1,269		0,609		0,242	

Tabela 4.8 Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções para os primeiros quatro momentos e preços de seis opções do modelo de Poisson.

4.3 Distribuição contínua

Consideremos agora a variável Z com distribuição de Pareto de parâmetros $\alpha > 1$ e $\theta > 0$, onde θ é o parâmetro de escala e a sua função densidade é dada por

$$f(z) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{(z+\theta)^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z).$$

Os momentos desta distribuição são conhecidos. Para cada $i \geq 0$, o momento de ordem i de Z é

$$E(Z^i) = \frac{\theta^i \Gamma(i+1) \Gamma(\alpha-i)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Uma vez mais, iremos precisar de calcular $E[\max(0, Z-k)]$ para vários valores de k . Escolhendo um $k \geq 0$, vem

$$\begin{aligned} E[\max(0, Z-k)] &= \int_k^{+\infty} (z-k) \frac{\alpha\theta^\alpha}{(z+\theta)^{\alpha+1}} dz \\ &= \left[-\frac{\theta^\alpha (\theta+x)^{-\alpha} (k(1-\alpha) + \theta + \alpha x)}{\alpha-1} \right]_k^{+\infty}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

No que se segue, iremos considerar $\alpha = 10$ e $\theta = 15$.

4.3.1 Momentos

De acordo com os parâmetros escolhidos, os momentos de Z são dados pela expressão

$$E(Z^i) = \frac{15^i \Gamma(i+1) \Gamma(10-i)}{\Gamma(10)}, \quad i \geq 0.$$

Assim, os primeiros sete momentos de Z são $\mathbf{e} = (1, \frac{5}{3}, \frac{25}{4}, \frac{1125}{28}, \frac{5625}{14}, \frac{84375}{14}, \frac{3796875}{28}, \frac{18984375}{4})$. Tendo em conta estes momentos, os limites inferior e superior do preço das opções para vários preços de exercício estão representados na Figura 4.7 sendo que alguns desses valores estão presentes na Tabela 4.9.

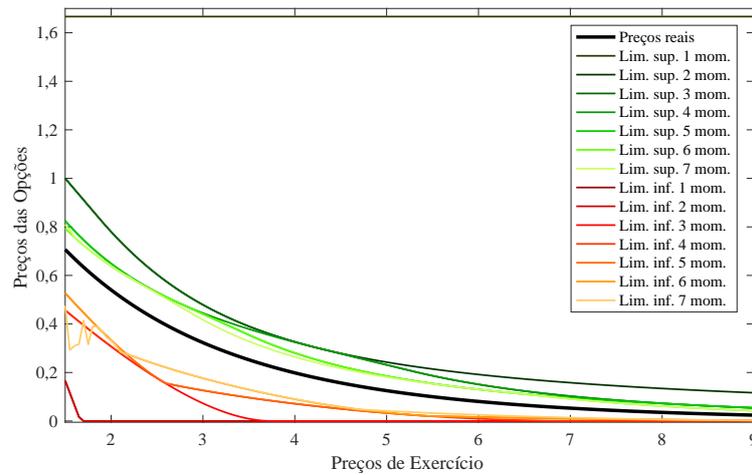


Fig. 4.7 Preços reais e limites superior e inferior para os primeiros sete momentos do modelo de Pareto.

Mom.	k=1,5		k=3,2		k=4,9		k=6,6		k=8,3	
	L. inf.	L. sup.								
1	0,167	1,667	0	1,667	0	1,667	0	1,667	0	1,667
2	0,167	1,000	0	0,440	0	0,249	0	0,170	0	0,128
3	0,457	1,000	0,042	0,440	0	0,241	0	0,119	0	0,066
4	0,457	0,825	0,114	0,417	0,036	0,241	0,003	0,119	0	0,066
5	0,527	0,825	0,114	0,407	0,036	0,192	0,012	0,108	0,004	0,066
6	0,527	0,794	0,157	0,407	0,039	0,192	0,012	0,107	0,004	0,055
7	0,475	0,809	0,157	0,378	0,044	0,188	0,018	0,107	0,005	0,055
V. Real	0,707		0,292		0,131		0,063		0,032	

Tabela 4.9 Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções para os primeiros sete momentos do modelo de Pareto.

Como podemos observar na Tabela 4.9 e Figura 4.7, com o aumento do número de momentos diminuímos a diferença entre limite superior e inferior e aumentamos a aproximação dos limites aos preços reais. Podemos constatar ainda que para alguns preços de exercício o valor mais próximo do real é atingido para seis momentos e para outros preços de exercício conseguimos uma melhor aproximação considerando ainda o sétimo momento. De novo, este parece ser o máximo que o condicionamento do problema nos permite atingir.

4.3.2 Preços

Pelos parâmetros escolhidos, a expressão (4.2) virá

$$\begin{aligned}
 E[\max(0, Z - k)] &= \left[-\frac{15^{10}(15+z)^{-10}(-9k+15+10z)}{9} \right]_k^{+\infty} \\
 &= \frac{64\,072\,265\,625}{(k+15)^9}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como informação de preços de opções, usaremos a Tabela 4.10.

Preços de Exercício	0,958	1,422	4,971	6,957	9,790	10,800
Preço da Opção	0,955	0,738	0,127	0,054	0,018	0,013

Tabela 4.10 Preços e preços de exercício de seis opções sobre o modelo de Pareto.

Usando novamente o Teorema 3.3.1, obtemos os limites representados da Figura 4.8. Na Tabela 4.11 temos ainda alguns valores para cinco preços de exercício.

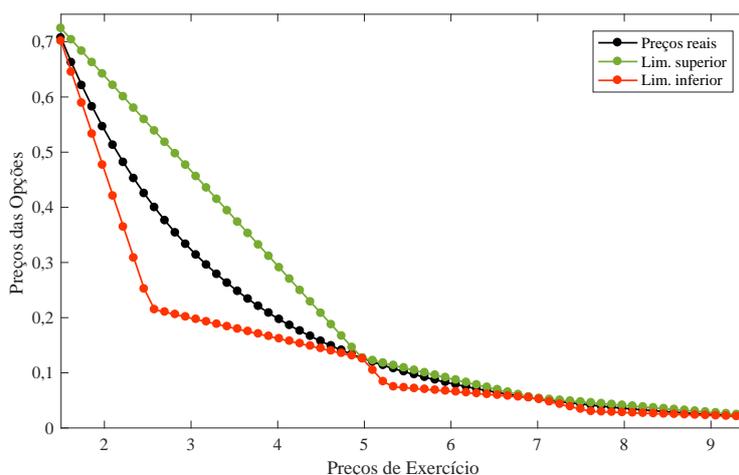


Fig. 4.8 Preços reais e limites superior e inferior dados seis preços de outras opções sobre o modelo de Pareto.

	k=1,5		k=3,2		k=4,9		k=6,6		k=8,3	
	L. inf.	L. sup.								
	0,701	0,724	0,192	0,432	0,129	0,139	0,059	0,067	0,026	0,037
V. Real	0,707		0,292		0,131		0,063		0,032	

Tabela 4.11 Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções dados seis preços de opções do modelo de Pareto.

Da análise da Tabela 4.11 verificamos que os limites obtidos são muito próximos dos valores reais sendo a maior diferença encontrada para $k = 3,2$. É notória ainda, na Figura 4.8, que a maior diferença entre limites superior e inferior se verifica para preços de exercício entre dois e cinco novamente associada a falta de informação relativa a preços de outras opções da Tabela 4.10, para esses preços de exercício.

4.3.3 Preços e momentos

Consideremos agora os primeiros quatro momentos e os preços presentes na Tabela 4.10. Aplicando os Teoremas 3.4.1 e 3.4.2 obtemos os resultados ilustrados na Figura 4.9 e para alguns preços de exercício, os valores presentes na Tabela 4.12.

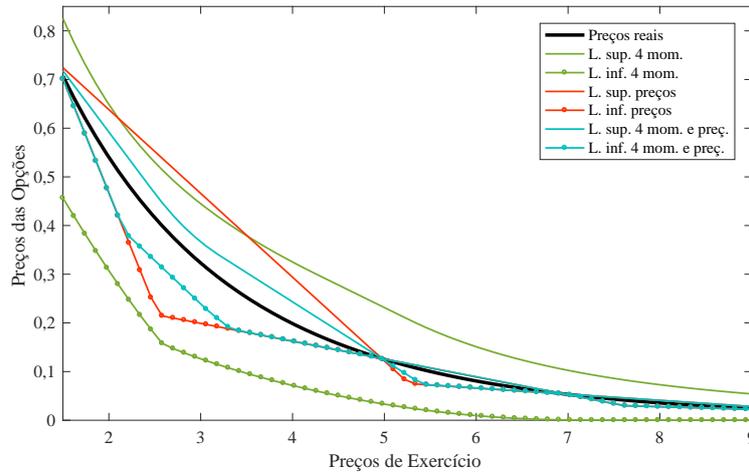


Fig. 4.9 Preços reais e limites superior e inferior para os primeiros quatro momentos e preços de seis opções do modelo de Pareto.

Mom.	k=1,5		k=3,2		k=4,9		k=6,6		k=8,3	
	L. inf.	L. sup.								
1	0,701	0,724	0,192	0,432	0,129	0,139	0,059	0,067	0,026	0,037
2	0,701	0,719	0,192	0,345	0,129	0,135	0,059	0,067	0,026	0,037
3	0,701	0,719	0,203	0,345	0,129	0,135	0,059	0,067	0,026	0,037
4	0,701	0,718	0,207	0,339	0,129	0,135	0,059	0,067	0,026	0,037
V. Real	0,707		0,292		0,131		0,063		0,032	

Tabela 4.12 Preços reais e limites superior e inferior de algumas opções para os primeiros quatro momentos e preços de seis opções do modelo de Pareto.

Na Figura 4.9 observamos que, para preços de exercício inferiores a cinco, esta abordagem é bastante mais próxima da realidade que qualquer uma das duas anteriores. Para preços superiores, obtemos praticamente os mesmos valores que obtivemos sem a consideração dos momentos. Também aqui podemos constatar o que já verificamos anteriormente: quando apenas consideramos os primeiros momentos conseguimos valores semelhantes aos obtidos usando a abordagem dos preços mas, para certos preços de exercício, quando aumentamos o número de momentos tidos em conta, melhoramos os limites.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho foram encontrados intervalos que limitam o preço de opções *call* europeias, uma questão que se revela importante devido à dificuldade em encontrar um preço justo para as mesmas. Iniciamo-lo com a definição do problema generalizado do momento e com alguns conceitos de programação cónica que nos serviram de suporte ao longo de toda a dissertação. Usando programação semidefinida, estudámos ainda a caracterização de polinómios não negativos de uma variável. Foi também através da resolução de problemas semidefinidos que encontramos os limites referidos.

Numa primeira fase, abordámos a relação entre os momentos do ativo subjacente e o preço das opções. Verificámos que quando trabalhámos com dados reais relativos a opções *call* europeias cujo ativo subjacente era o índice S&P 500, esta abordagem não se revelou muito eficiente. No entanto, quando aplicámos o estudado a distribuições conhecidas, os resultados obtidos revelaram-se muito próximos dos esperados. Acreditamos, portanto, que o erro no uso dos dados reais se deve ao facto dos momentos usados serem os empíricos e não os estimados por algum método mais fiável.

Posteriormente, averiguámos se a informação relativa ao preço de outras opções do mesmo tipo e sobre o mesmo ativo se revelariam úteis. Verificámos que os preços das opções encontrados no mercado, de uma forma geral, não verificam certas condições necessárias a este estudo. Assim, foi necessária usar correção aos mesmos. Os limites superior e inferior obtidos foram próximos dos preços reais das opções apesar de algumas vezes coincidirem ou serem ambos superiores ou inferiores. Na aplicação às distribuições teóricas obtivemos, uma vez mais, valores muito próximos dos reais.

A última abordagem usada foi uma conjugação das duas anteriores. Propusemos uma nova formulação semidefinida que permite calcular limites superior e inferior baseados em informação sobre momentos e preços simultaneamente. Provámos a validade dessa abordagem, mostrando que verifica a propriedade da dualidade forte. Deparámo-nos, contudo, com um problema aquando do uso de dados reais, uma vez que a junção dos momentos e preços tornavam o problema de otimização inadmissível. Uma possível solução para este problema seria trabalhar com preços e momentos aproximados obtidos de uma forma semelhante à utilizada para corrigir os preços, referida anteriormente. Por limitações de tempo, esta abordagem não foi explorada. Por outro lado, a utilização dos dados gerados pelas distribuições conhecidas, revelou-se útil neste contexto. Pudemos verificar que os resultados obtidos usando ambas as informações aproximaram-se, de facto, mais dos reais do que nas duas abordagens anteriores.

Concluimos que a nova abordagem proposta nesta dissertação se revelou uma melhoria em relação às apresentadas na literatura, para as distribuições conhecidas. Assim, pensamos que com um uso mais criterioso dos momentos de um ativo e com alguns ajustes nos preços das opções retirados dos mercados, esta abordagem revelar-se-ia uma melhoria relativamente às anteriores. Poderá também ser aplicável a outros contextos em que dados de melhor qualidade estejam disponíveis.

Para a aplicação dos resultados teóricos, foram feitas implementações no *software* MATLAB. No Anexo A, é possível encontrar uma breve descrição da implementação usada.

Bibliografia

- [1] Dimitris Bertsimas and Ioana Popescu. On the relation between option and stock prices: A convex optimization approach. *Operations Research*, 50(2), 2002.
- [2] Opções. <http://www.bolsadelisboa.com.pt/centro-de-aprendizagem/opcoes>. Acedido em: 28-01-2017.
- [3] Luís Nunes Vicente. *Introdução à Matemática Financeira*. Departamento de Matemática da F.C.T.U.C., 2015.
- [4] J Michael Harrison and David M Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic theory*, 20(3):381–408, 1979.
- [5] J Michael Harrison and Stanley R Pliska. A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets. *Stochastic processes and their applications*, 15(3):313–316, 1983.
- [6] J Michael Harrison and Stanley R Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic processes and their applications*, 11(3):215–260, 1981.
- [7] Jean Bernard Lasserre. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications*, volume 1. Imperial College Press, London, 2010.
- [8] Raúl E Curto and Lawrence A Fialkow. Recursively generated weighted shifts and the subnormal completion problem. *Integral Equations and Operator Theory*, 17(2):202–246, 1993.
- [9] Keiiti Isii. The extrema of probability determined by generalized moments (i) bounded random variables. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 12(2):119–134, 1960.
- [10] Andrew W Lo. Semi-parametric upper bounds for option prices and expected payoffs. *Journal of Financial Economics*, 19(2):373–387, 1987.
- [11] Luis F Zuluaga, Javier Peña, and Donglei Du. Third-order extensions of lo’s semiparametric bound for european call options. *European Journal of Operational Research*, 198(2):557–570, 2009.
- [12] Johan Lofberg. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, pages 284–289. IEEE, 2005.
- [13] J.F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11–12:625–653, 1999. Version 1.05 available from <http://fewcal.kub.nl/sturm>.

Anexo A

Algoritmo usado

Todos os resultados foram obtidos usando o *software* MATLAB (versão 9.1.0 R2016b). Usámos a extensão YALMIP [12] (versão R20150919) e o *solver* SEDUMI 1.3 [13] (versão 1.05) para resolver os problemas de otimização. Cada variável de decisão dos problemas de otimização foi definida como *sdpvar*. Usámos a função *optimize*, definida na extensão, cujo propósito é a obtenção do mínimo de uma função objetivo linear. Esta função tem três parâmetros: restrições, função objetivo e opções. O código que implementámos permite a consideração de preços e momentos, funcionando assim para todas as abordagens.

Começámos por normalizar o vetor dos momentos devido à grande ordem de grandeza dos mesmos. Isto foi feito dividindo cada componente do vetor, à exceção da primeira, por uma potência do preço de exercício requerido, $k > 0$, isto é,

$$\mathbf{e} = \left(1, \frac{e_1}{k}, \frac{e_2}{k^2}, \dots, \frac{e_m}{k^m}\right).$$

No final o resultado obtido foi multiplicado por k . Por forma a aproximar os preços quando estes não verificam as condições de declive como em (3.11), usámos uma vez mais a função *optimize*. Posteriormente normalizamos ainda os vetores de preços e preços de exercício obtendo, respetivamente

$$\mathbf{q} = \left(\frac{q_1}{k}, \dots, \frac{q_n}{k}\right) \quad \mathbf{s} = \left(\frac{s_1}{k}, \dots, \frac{s_n}{k}\right).$$

Criámos ainda um vetor K que é constituído pelos preços de exercício dados e pelo preço requerido, k , por ordem crescente. Sendo o vetor \mathbf{s} constituído pelos preços de exercício retirados do mercado, obtemos o vetor K de dimensão $n + 1$,

$$\mathbf{K} = (s_1, \dots, s_{J-1}, k, s_{J+1}, \dots, s_n).$$

onde J é a posição de k no novo vetor. Seguidamente temos o código utilizado para o cálculo dos limites pela resolução de (3.26) e (3.30).

```
function [Lim_sup, Lim_inf] = Lim_prec_mom(qq,s,kk,e)
%Sumário: Calcula os limites para o preço de calls com base nos momentos
%do ativo subjacente e preços de outras opções ou apenas um deles
```

```
%Inputs
%qq: Preços das opções obtidos do mercado
%s: Preços de exercício do mercado
%kk: Preço de exercício requerido (tem se ser positivo)
%e: Momentos do ativo subjacente

%Outputs
%Lim_sup: limite superior encontrado
%Lim_inf: limite inferior encontrado

%Garantir que os preços satisfazem as condições de declive
q=PrecoConvexo(qq,s);

%Número de opções usadas
n=length(q);

%Número de momentos usados
m=length(e)-1;

%Normalizar os vetores dos momentos, preços e preços de exercício
precooriginal=kk;
for i=2:m+1
    e(i)=e(i)/kk^(i-1);
end
s=s/kk; q=q/kk;
kk=1;

%Cria o vetor K
if n>0
    %Desobrir a posição J
    if s(n)<kk J=n+1;
    else
        for i=1:n
            if s(i)>=kk
                J=i;
                break;
            end
        end
    end
end

%Juntar k a s
for i=1:J-1
```

```

        K(i)=s(i);
    end
    K(J)=kk;
    for i=J+1:n+1
        K(i)=s(i-1);
    end

    %Variável de decisão
    u = sdpvar(n,1);

elseif n==0
    K(1)=kk; u=0; s=0; q=0;
end

%Variáveis de decisão
if m==0
    Y1=sdpvar; Y=sdpvar(m+2,m+2,n+1);
else
    Y = sdpvar(m+1,m+1,n+2);
end
w = sdpvar(m+1,1);

%Restrições
F=[], G=[];

%Matriz A é uma matriz auxiliar que coloca o valor 1 nas anti-diagonais.
%Quando o terceiro índice é par, coloca o valor 1 nas anti-diagonais pares.
%Analogamente para os índice ímpares
if m==0 aux=2;
else aux=1;
end
A=zeros(m+aux,m+aux,2*(m+aux));
for i=1:m+aux
    for j=1:m+aux
        A(i,j,i+j)=1;
    end
end

%Separar os 3 tipos de intervalos. Notar que se n=0, apenas temos o primeiro
%e último intervalo

%1º intervalo- [0,k_1]

```

```

if m>0
    for l1=1:m
        F=[F, sum(sum(A(:,:,2*l1+1).*Y(:,:,1)))==0];
    end
    for l1=0:m
        aux=zeros(l1+1,1);
        for r=0:l1
            aux(r+1)=nchoosek(m-r,l1-r)*K(1)^r;
        end

        F=[F, aux'*w(1:l1+1,1)==sum(sum(A(:,:,2*l1+2).*Y(:,:,1)))];
    end
else
    F=[F, w==Y1];
end

%Intervalos - [Kl,Kl+1], l=1,...,n-1
for l=1:n
    if l<J
        var_x=0; var_k=0; ind=l;
    else
        var_x=-1; var_k=kk; ind=l-1;
    end

    if m==0
        F=[F, sum(sum(A(:,:,3).*Y(:,:,1)))==0];
        % l1=0
        F=[F,w-s(1:ind)'+u(1:ind)+var_k+(sum(u(1:ind))+var_x)*K(l)==Y(1,1,1)];

        %l1=1
        F=[F, w-s(1:ind)'+u(1:ind)+var_k%
            +(sum(u(1:ind))+var_x)*K(l+1)==sum(sum(A(:,:,4).*Y(:,:,1)))];
    end

    else
        for l1=1:m
            F=[F, sum(sum(A(:,:,2*l1+1).*Y(:,:,l+1)))==0];
        end
        for l1=0:m
            aux2=zeros(m-l1+1,l1+1); aux1=0;
            for N=0:l1
                for r=N:m+N-l1
                    aux3=K(1).^(r-N)*K(l+1).^N;
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        aux2(r+1,N+1)=nchoosek(r,N)*nchoosek(m-r,l1-N)*aux3;
    end
end
for i=1:N+1
    aux1=aux2(:,i)+aux1;
end
vec=[-s(1:ind)'*u(1:ind)+var_k;sum(u(1:ind))+var_x;zeros(m-1,1)];
F=[F,aux1'*(w+vec)==sum(sum(A(:,:,2*l1+2).*Y(:,:,l1+1)))];
end
end
end

%Intervalo - [Kn,+inf]
if m==0
    F=[F, sum(sum(A(:,:,3).*Y(:,:,n+1)))==0]; %l1=0

    F=[F,w-s'*u+kk+(sum(u)-1)*K(n+1)==Y(1,1,n+1)]; %l1=1

    F=[F,(sum(u)-1)*K(n+1)==sum(sum(A(:,:,4).*Y(:,:,n+1)))];
else
    for l1=1:m
        F=[F, sum(sum(A(:,:,2*l1+1).*Y(:,:,n+2)))==0];
    end
    for l1=0:m
        aux=zeros(m-l1+1,1);
        for r=l1:m
            aux(r-l1+1)=nchoosek(r,l1)*K(n+1)^r;
        end

        if l1==0
            vec2=[-s'*u+kk;(sum(u)-1);zeros(m-1,1)];
        elseif l1==1
            vec2=[(sum(u)-1);zeros(m-1,1)];
        else
            vec2=zeros(m-l1+1,1);
        end
        F=[F,aux'*(w((l1+1):m+1,1)+vec2)==sum(sum(A(:,:,2*l1+2).*Y(:,:,n+2)))];
    end
end
end
end

```

```
G=F;

%Matrices positivas semidefinidas
if m==0
    for l=1:n+1
        F=[F, Y(:, :, l)>=0];
    end
    F=[F, Y1>=0];
else
    for l=1:n+2
        F=[F, Y(:, :, l)>=0];
    end
end

%Matrices negativas semidefinidas
if m==0
    for l=1:n+1
        G=[G, Y(:, :, l)<=0];
    end
    G=[G, Y1<=0];
else
    for l=1:n+2
        G=[G, Y(:, :, l)<=0];
    end
end

Objective = u'*q + e'*w;

sol_sup = optimize(F, Objective);
Lim_sup=precooriginal*double(Objective);

sol_inf = optimize(G, -Objective);
Lim_inf=precooriginal*double(Objective);

end
```