Vânia Filipa Nunes Lapa

MODELOS DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA EM OTIMIZAÇÃO FINANCEIRA: CONSTRUÇÃO DE UM ÍNDICE DE FUNDOS

Dissertação de Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças, orientada pelo Professor Doutor José Luís Esteves dos Santos e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia e à Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra.

Março de 2017

· U C ·

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Modelos de programação inteira em otimização financeira: construção de um índice de fundos

Vânia Filipa Nunes Lapa

· U C ·

Universidade de Coimbra
Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças
Master in Quantitative Methods in Finance

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Março de 2017

Agradecimentos

Esta dissertação marca o fim de uma etapa muito importante na minha vida e, como tal, não poderia deixar de agradecer a todos os que, direta ou indiretamente, contribuíram para a sua concretização.

Ao meu orientador, Professor Doutor José Luís Esteves dos Santos, o meu sincero agradecimento pela disponibilidade, dedicação, orientação e revisão desta dissertação.

A todos os Professores que me acompanharam durante a minha formação académica, ao Departamento de Matemática e à Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra.

Às minhas colegas de curso, Carla, Carolina, Dulce e Inês, por estes cinco anos de bons momentos, amizade e companheirismo.

Um especial agradecimento aos meus Pais e Irmã por serem o grande apoio da minha vida, por acreditarem sempre em mim, pela paciência e incentivo ao longo deste percurso. Sem eles nada disto seria possível.

Aos meus Avós por todo o carinho e ensinamentos de vida.

Ao João por toda a dedicação, carinho, paciência e transmissão de confiança. O meu profundo agradecimento por fazeres parte da minha vida.

Resumo

Esta dissertação foca-se em problemas relacionados com a seleção de carteiras, nomeadamente a construção de um índice de fundos e a otimização de portefólios com um nível mínimo de transação. Num problema geral de otimização de portefólios, e com o intuito de obter melhores resultados, um agente económico que pretenda investir no mercado bolsista deverá acompanhar a evolução dos preços dos ativos, fazendo uma análise complexa e contínua. Uma forma de contornar esta situação seria investir num índice de fundos, isto é, numa carteira que siga um determinado índice de mercado tão perto quanto possível. Para o efeito, construiu-se um modelo de programação inteira que pode ser resolvido usando o método de *Branch-and-Bound*.

Além disso, um dos problemas de seleção de carteiras mais importantes da literatura foi apresentado por Markowitz, cujo objetivo é obter uma carteira com o menor risco possível para um dado nível mínimo de retorno esperado. Contudo, as soluções obtidas através deste problema de otimização poderão representar portefólios inviáveis em termos práticos, uma vez que estes poderão incluir investimentos demasiado reduzidos em certos ativos e, consequentemente, os retornos obtidos podem não superar os custos de transação ou manutenção. Como tal, optou-se por utilizar um modelo que, apesar de não ser de programação inteira, pode ser resolvido utilizando a mesma técnica por forma a obter soluções que satisfaçam um nível mínimo de transação para cada ativo, no caso de a sua posição na carteira ser positiva.

Conteúdo

Lista de Figuras **ix**

Lista de Tabelas **xi**

1 Introdução **1**

2 Construção de um índice de fundos **3**

2.1 Enquadramento teórico 3

2.1.1 *Branch-and-Bound* 5

2.1.2 Ajuste de matrizes de correlação 10

2.2 Análise preliminar 12

2.3 Análise de dados reais 14

2.3.1 Variação do número de ativos em estudo – n 16

2.3.2 Variação do número de ativos a incluir no índice – q 16

2.3.3 Desempenho das carteiras obtidas 17

2.4 Exemplo adicional 18

3 Otimização de portefólios com um nível mínimo de transação **21**

3.1 Enquadramento teórico 21

3.1.1 *Branch-and-Bound* 23

3.1.2 Ajuste de matrizes de covariâncias 32

3.2 Análise preliminar 32

3.3 Análise de dados reais 34

3.3.1 Variação do número de ativos em estudo – n 34

3.3.2 Variação do nível mínimo de transação – l 38

3.3.3 Desempenho das carteiras obtidas 41

4 Conclusão **45**

Bibliografia **47**

Lista de Figuras

2.1 Esquema da árvore de pesquisa utilizada no método *Branch-and-Bound*, onde cada nó representa a região admissível de um problema linear. 6
2.2 Árvore binária correspondente ao problema apresentado. 14

3.1 Esquema da árvore de pesquisa utilizada no método *Branch-and-Bound*, onde cada nó representa a região admissível de um problema quadrático. 24
3.2 Árvore binária correspondente ao problema apresentado. 34
3.3 Número de iterações do algoritmo para cada heurística tendo em conta o número de ativos incluídos no problema. 37
3.4 Número de iterações utilizando cada uma das heurística tendo em conta o nível mínimo de transação l. 40
3.5 Retornos diários das carteiras especificadas na Tabela 3.3. 41
3.6 Retornos diários das carteiras especificadas na Tabela 3.4. 42
3.7 Retornos diários das carteiras especificadas na Tabela 3.5. 42
3.8 Valorização das carteiras da Tabela 3.3 relativamente ao dia 01/09/2016. 43
3.9 Valorização das carteiras da Tabela 3.4 relativamente ao dia 01/09/2016. 44
3.10 Valorização das carteiras da Tabela 3.5 relativamente ao dia 01/09/2016. 44

Lista de Tabelas

2.1 Semelhança entre os ativos pertencentes ao índice e respetivos representados. 15
2.2 Soluções obtidas considerando que o índice de mercado é constituído por 5 ativos. . . 16
2.3 *Tracking error* entre os diferentes índices de fundos e respetivo índice de mercado. . 18
2.4 Número de iterações do algoritmo em função da heurística utilizada. 19

3.1 Soluções obtidas nas diferentes iterações. 33
3.2 Estimativas para a média e desvio padrão dos retornos diários de cada ativo no período 01/09/2015–31/08/2016. 35
3.3 Carteiras obtidas a partir de um conjunto constituído por 5 ativos, para vários níveis mínimos de retorno esperado, e respetivo nível de risco associado. 35
3.4 Carteiras obtidas a partir de um conjunto constituído por 10 ativos, para vários níveis mínimos de retorno esperado, e respetivo nível de risco associado. 36
3.5 Carteiras obtidas a partir de um conjunto constituído por 15 ativos, para vários níveis mínimos de retorno esperado, e respetivo nível de risco associado. 36
3.6 Carteiras obtidas, com nível mínimo de transação de 10% para todos os ativos, e respetivo nível de risco associado. 39
3.7 Carteiras obtidas, com nível mínimo de transação de 20% para todos os ativos, e respetivo nível de risco associado. 39
3.8 Carteiras obtidas, com nível mínimo de transação de 30% para todos os ativos, e respetivo nível de risco associado. 40

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho foca-se em variantes do problema de seleção de carteiras, cujo objetivo se prende com o facto de que o investidor, tendo à sua disposição um determinado conjunto de títulos financeiros, pretende determinar como é que o seu capital deverá ser distribuído por esses ativos, por forma a que a carteira obtida seja o mais adequada possível tendo em conta os seus objetivos. Apesar de o investidor pretender maximizar o retorno da sua carteira, tenciona também proteger os seus investimentos em ambiente de incerteza, isto é, pretende minimizar o risco. Desta forma, um investidor avesso ao risco tenderá a optar por carteiras com menor risco e, consequentemente, poderá obter menor retorno. Por sua vez, um investidor atraído pelo risco vai optar por carteiras com maior risco, uma vez que se espera obter maiores retornos [16].

Para determinar a carteira com as características pretendidas, baseamo-nos, por exemplo, em dados históricos dos títulos financeiros. Trivialmente, serão selecionados os ativos que tiveram melhor desempenho no passado. Contudo, não há garantias de que os bons resultados se continuem a perpetuar no futuro, porque as cotações dos ativos podem ser influenciadas por diversos fatores socioeconómicos.

Nos modelos desenvolvidos ao longo deste trabalho há algumas limitações em termos práticos, pois não se inclui (diretamente) os custos de transação associados às compras e vendas de ativos e custos de manutenção dos títulos, os ativos são infinitamente divisíveis e também não se consideram, caso existam, dividendos.

Um dos problemas associado à seleção de carteiras de investimento deve-se ao facto de que o risco destas não é diretamente observável, pelo que temos várias medidas para o avaliar. A variância dos retornos foi inicialmente apresentada como uma medida de risco por Irving Fisher (1906) [6]. Jacob Marschak (1938) [13] sugeriu usar a média e a matriz de covariância dos retornos como uma primeira aproximação para a utilidade dos investidores. Em 1959, baseado nestas ideias, Harry Markowitz [12] afirmou que incluir um determinado título na carteira iria influenciar a decisão de selecionar os restantes ativos, uma vez que há ativos cujos retornos podem seguir a mesma tendência (quer de subida ou descida). Desta forma, para reduzir o risco, devemos evitar incluir títulos na carteira cujos retornos estejam demasiado correlacionados. Surge assim um modelo para o problema da seleção de carteiras, permitindo determinar uma carteira eficiente: para um dado nível de retorno esperado, escolhe-se o portefólio com menor risco. Para evitar obter um problema de otimização multi-objetivo, isto é,

minimizar o risco e maximizar o retorno, este desenvolveu um modelo de programação quadrática cujo objetivo é minimizar o risco da carteira para um certo nível mínimo de retorno.

A seleção de carteiras obriga o investidor a fazer uma análise profunda e contínua do mercado. Uma alternativa seria fazer um investimento que siga a evolução de um determinado tipo de índice de mercado. Deste modo, o investidor poderia repartir o montante a investir por todos os títulos constituintes do índice e, portanto, o retorno obtido seria o mesmo do índice de mercado de referência. Contudo, o número de títulos de um determinado índice de mercado e o seu custo unitário podem ser fatores que condicionam a aquisição de todos os seus constituintes [5]. Como tal, outra estratégia para atingir esse objetivo seria selecionar um subconjunto de ativos cujos retornos sigam, o mais próximo possível, a evolução do índice de mercado a seguir. A uma carteira com estas característica dá-se o nome de índice de fundos.

A diferença entre um índice de fundos e uma carteira tradicional prende-se com o facto de como se selecionam os títulos financeiros para o portefólio. O gestor de uma carteira tradicional tem o direito de comprar ou vender os títulos enquanto segue a sua evolução. Com os índices de fundos é diferente: não são os investidores que decidem quais os títulos que são selecionados para o índice [5].

A abordagem de otimização média-variância de Markowitz nem sempre é viável, no sentido em que pode reproduzir soluções que não são exequíveis na prática, pois poderão incluir investimentos demasiado reduzidos em certos títulos financeiros. Como tal, no Capítulo 3 será desenvolvido um modelo de otimização, baseado no problema de Markowitz, ao qual se impõe que, se se selecionar um determinado ativo para o portefólio, tem de ter um peso superior ou igual a um determinado limite. Note-se que esta imposição poderia ser associada a qualquer tipo de problema de otimização.

Capítulo 2

Construção de um índice de fundos

Índice de fundos é um fundo de investimento que tem como objetivo seguir um determinado índice de mercado. Para construir um índice de fundos temos duas alternativas: **replicação completa** e **indexação**. A primeira consiste em construir uma carteira com todas as ações constituintes do índice de referência, enquanto que a segunda se baseia numa carteira constituída por uma amostra o mais representativa possível do índice, evitando o investimento em todos os ativos [14]. Esta aproximação não produzirá necessariamente um portefólio eficiente. Contudo, será determinada uma carteira que siga o mais possível o índice de referência, poupando o investidor de uma análise detalhada e contínua do mercado [8].

Em índices com muitos ativos ou cujos títulos têm cotações muito elevadas, como é o caso do índice S&P 500, a estratégia de replicação completa não é a mais adequada, uma vez que pode ser bastante dispendioso investir em todos os seus constituintes [14]. Neste caso, a melhor alternativa para a construção de um índice de fundos é a indexação, pelo que esta estratégia será descrita ao longo deste capítulo.

2.1 Enquadramento teórico

Dado um conjunto de n ações, pretende selecionar-se um subconjunto de dimensão q, $q < n$, que seja o mais representativo possível do conjunto inicial. Como tal, este modelo vai basear-se na semelhança entre os ativos financeiros para selecionar os mais adequados para o índice de fundos [8].

Denotemos a relação entre os retornos dos ativos i e j por ρ_{ij}, i, $j \in \{1,...,n\}$, que poderá ser expressa através do coeficiente de correlação entre as variáveis aleatórias R_i e R_j que descrevem os retornos destes. Se os retornos de dois ativos seguem a mesma tendência (tanto de subida como de descida), dizemos que são positivamente correlacionados, ou seja, $\rho_{ij} \in (0,1]$. Caso contrário, se se movem em direções opostas, são negativamente correlacionados, isto é, $\rho_{ij} \in [-1,0)$. No caso em que os retornos não têm qualquer relação, dizemos que não estão correlacionados de forma linear ($\rho_{ij} = 0$). Quanto mais próxima é a relação entre os retornos de dois ativos, maior é o respetivo coeficiente de correlação. [16]

Seja y_j, $j \in \{1,...,n\}$, a variável binária que descreve se o ativo j figura no índice. Então, se este ativo for selecionado para o índice, y_j será igual a 1; caso contrário, y_j será igual a 0. Para cada

ativo i, $i \in \{1,...,n\}$, a variável binária x_{ij}, $j \in \{1,...,n\}$, indica qual é o ativo no índice que mais se assemelha a este. Assim, se j é o ativo financeiro do índice mais semelhante a i então $x_{ij} = 1$; senão x_{ij} toma o valor 0. Note-se que para cada ativo só pode haver um único representante no índice e cada representante no índice deve representar pelo menos um ativo.

Desta forma, pretende-se resolver o seguinte problema determinístico de programação inteira, denotado por (M), onde ρ_{ij} representa uma estimativa para a correlação entre R_i e R_j, obtidos através de dados históricos [8].

$$\text{maximizar} \quad f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} x_{ij}$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = q \tag{2.1a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i = 1,...,n \tag{2.1b}$$

$$x_{ij} \leq y_j, \; i,j = 1,...,n \tag{2.1c}$$

$$x_{ij}, \; y_j \in \{0,1\}, \; i,j = 1,...,n \tag{2.1d}$$

Depois de determinada uma solução para o problema anterior, deverá calcular-se as proporções de cada título financeiro no índice de fundos. Denotemos então por c_i, $i \in \{1,...,n\}$, o valor de mercado mais recente do título financeiro i nos dados históricos considerados. Desta forma, a proporção w_j de cada ativo no índice de fundos é dada por

$$w_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\, c_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i}. \tag{2.2}$$

Note-se que w representa uma carteira admissível, ou seja, $w_j \geq 0$, $j \in \{1,...,n\}$, e $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

Para simplificar a notação, denotemos por z o vetor em $\mathbb{R}^{n^2+n}$ que contém todas as componentes da matriz x e do vetor y, isto é,

$$z = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} & \dots & x_{n1} & \dots & x_{nn} & y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T \tag{2.3}$$

e representemos por ρ o vetor em $\mathbb{R}^{n^2+n}$ que contém todas as estimativas dos coeficientes de correlação ρ_{ij}, $i,\ j \in \{1,...,n\}$, e n componentes nulas, ou seja,

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \dots & \rho_{1n} & \dots & \rho_{n1} & \dots & \rho_{nn} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T. \tag{2.4}$$

Deste modo, a função objetivo é dada por $f(z) = \rho^T z$. Note-se que tanto a função objetivo como as restrições do problema são lineares e, como as variáveis do problema são binárias, estamos perante um problema de programação linear inteira. Além disso, como a função objetivo é contínua (porque é linear) numa região admissível fechada e limitada, pelo Teorema de Weierstrass existe um maximizante.

Importa salientar que estamos perante um problema de otimização de grande escala que envolve uma grande quantidade de variáveis: para cada conjunto de n títulos financeiros teremos um problema

com n^2+n variáveis e n^2+n+1 restrições. Aliando isto ao facto de as variáveis serem binárias, pode resolver-se o problema (M), por exemplo, utilizando o algoritmo *Branch-and-Bound*.

2.1.1 *Branch-and-Bound*

O algoritmo *Branch-and-Bound* consiste numa estratégia de divisão do modelo inicial constituído pelo conjunto de restrições (2.1) em subproblemas, onde a restrição (2.1d) é relaxada em restrições lineares da forma $0 \leq x_{ij} \leq 1$ e $0 \leq y_j \leq 1$, i, $j \in \{1,...,n\}$, formando assim uma árvore binária, onde cada nó representa a sub-região admissível de um programa linear.

Deste modo, resolve-se primeiro o problema relaxando a restrição (2.1d) e caso a solução ótima encontrada z verifique a restrição de integralidade, não é necessário procurar mais soluções. Caso contrário, pelo menos uma componente da solução (digamos z_j) não é binária. Assim, consideram-se dois novos subproblemas: o primeiro consiste no programa linear com região admissível constituída pelas restrições (2.1a)-(2.1c) e $z_j = 0$ e o segundo consiste no mesmo problema linear, mas desta vez, adicionando a restrição linear $z_j = 1$. Caso existam várias componentes da solução ótima que não satisfaçam (2.1d), escolhemos para j o **último** índice do vetor z cuja respetiva componente não é binária. À medida que adicionamos restrições, aumentamos um nível na árvore binária. Em qualquer um dos casos, o subproblema resultante continua a ser de programação linear com menos uma variável, pois z_j está fixa. O processo repete-se para cada um dos subproblemas. De cada vez que se inclui uma nova restrição, o valor objetivo ótimo será igual ou menor ao do problema anterior, porque estamos a otimizar f numa região mais restrita.

Denotemos então por S a região admissível do problema (M) com a relaxação de (2.1d) e por S_j^0 e S_j^1, $j \in \{1,...,n^2+n\}$, os conjuntos que representam o conjunto de soluções que satisfazem as restrições $z_j = 0$ e $z_j = 1$, respetivamente, isto é,

$$S_j^0 = \{z \in \mathbb{R}^{n^2+n} : z_j = 0\}, \tag{2.5a}$$

$$S_j^1 = \{z \in \mathbb{R}^{n^2+n} : z_j = 1\}. \tag{2.5b}$$

Desta forma, a região admissível do problema (M) é dada por

$$\Pi = \left(\bigcap_{i=1}^{n^2+n} \left(S_i^0 \cup S_i^1\right) \right) \cap S. \tag{2.6}$$

O algoritmo vai guardando sempre a melhor solução admissível encontrada, z^*, enquanto percorre a árvore de pesquisa.

Como foi referido anteriormente, o valor da função objetivo mantém-se ou diminui de cada vez que se desce um nível na árvore binária. Deste modo, podemos evitar explorar certos ramos da árvore desnecessários, usando um limite inferior para a solução ótima do problema, permitindo fazer alguns cortes na árvore de pesquisa. Esse limite inferior pode ser obtido, por exemplo, através do valor de uma solução admissível do problema e será denotado por β^*. Consequentemente, este valor será atualizado em cada iteração se $f(z) > \beta^*$ e se a solução obtida nesse nó pertencer ao conjunto Π. Nas condições descritas anteriormente, atualiza-se β^* com o valor de $f(z)$.

Os passos descritos anteriormente podem ser implementados no algoritmo seguinte, referente ao procedimento *Branch-and-Bound*, onde $PL(\Omega)$ é uma função que resolve o programa linear com a função objetivo do programa (M) na região admissível Ω. O algoritmo é inicializado chamando $\text{BnB}(S, [\,], -\infty)$, onde $[\,]$ representa um vetor solução "vazio", que não irá ser considerado no problema.

Algoritmo 2.1 BnB

Entrada: Ω, z^*, β^* ▷ *Ω representa a região admissível do subproblema a resolver, z^* denota a melhor solução admissível encontrada e β^* representa o melhor limite inferior determinado para o valor da função objetivo.*

Saída: z^*, β^*

```
1  início
2      z ← PL(Ω);                ▷ Resolve o problema linear tendo em conta a região admissível Ω.
3      se f(z) > β* então
4          se z ∈ Π então
5              β* ← f(z);
6              z* ← z;
7          senão
8              j ← último índice de z cuja respetiva componente não é binária;
9              [z*, β*] ← BnB(Ω ∩ S_j^0, z*, β*);
10             [z*, β*] ← BnB(Ω ∩ S_j^1, z*, β*);
11         fim
12     fim
13 fim
```

O Algoritmo 2.1 pode ser esquematizado no diagrama da Figura 2.1, em que cada nó da árvore binária representa a região admissível do subproblema em estudo.

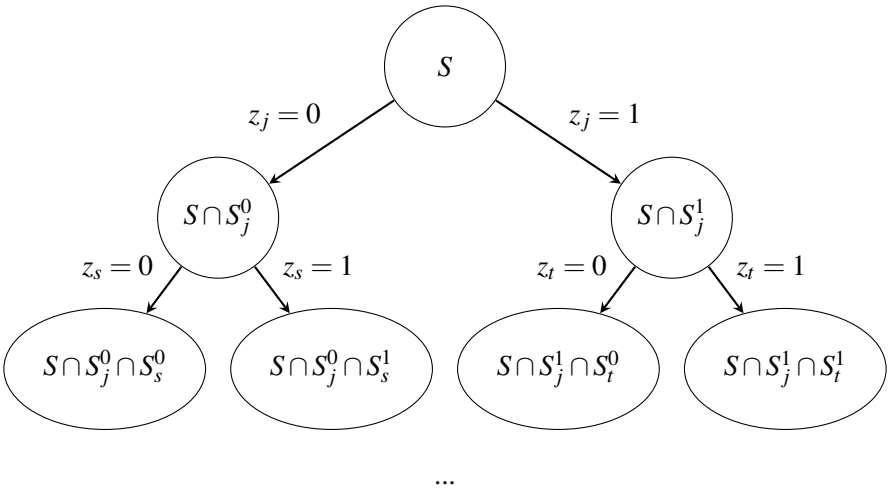


Figura 2.1: Esquema da árvore de pesquisa utilizada no método *Branch-and-Bound*, onde cada nó representa a região admissível de um problema linear.

A eficiência deste algoritmo está muito dependente da porção da árvore de pesquisa que pode ser eliminada utilizando o limite inferior β^*. Assim, pode diminuir-se o número de iterações deste algoritmo calculando uma solução heurística que permita melhorar o limite inferior β^* para um valor próximo da solução ótima do problema.

Heurísticas

Uma heurística é um algoritmo que permite obter uma solução admissível, denotada por z^H, para um problema de forma rápida mas não necessariamente ótima. Se $f(z^H) > \beta^*$, então atualiza-se z^* e β^* com os valores da solução heurística.

No Algoritmo 2.2 descreve-se um melhoramento do procedimento *Branch-and-Bound* descrito no Algoritmo 2.1, usando uma solução heurística.

Algoritmo 2.2 BnBH

Entrada: Ω, z^*, β^* ▷ *Ω representa a região admissível do subproblema a resolver, z^* denota a melhor solução admissível encontrada e β^* representa o melhor limite inferior determinado para o valor da função objetivo.*

Saída: z^*, β^*

```
1  início
2      z ← PL(Ω);                ▷ Resolve o problema linear tendo em conta a região admissível Ω.
3      se f(z) > β* então
4          se z ∈ Π então
5              β* ← f(z);
6              z* ← z;
7          senão
8              [z^H, β] ← heurística(Ω);   ▷ β representa o valor da função objetivo referente à
   solução heurística z^H.
9              se β > β* então
10                 β* ← β;
11                 z* ← z^H;
12             fim
13             j ← último índice de z cuja respetiva componente não é binária;
14             [z*, β*] ← BnBH(Ω ∩ S_j^0, z*, β*);
15             [z*, β*] ← BnBH(Ω ∩ S_j^1, z*, β*);
16         fim
17     fim
18 fim
```

Seguidamente, apresentam-se as heurísticas desenvolvidas para aplicação no modelo *Branch-and--Bound*, como descrito anteriormente.

Heurística 0 Este procedimento permite analisar o comportamento do programa quando não é considerada nenhuma heurística. Deste modo, a heurística devolve apenas o valor de $-\infty$[1] para β, permitindo validar qualquer solução admissível que venha a ser encontrada numa relaxação do problema, à semelhança do que aconteceria se não se determinasse nenhuma solução heurística, visto que o valor da função objetivo é certamente superior a $-\infty$.

Heurística 1 Consiste numa heurística baseada no nó da árvore binária que representa um determinado subproblema e nos coeficientes de correlações ρ_{ij}, i, $j \in \{1,...,n\}$. A ideia consiste em inicializar a solução tendo em conta as restrições dos conjuntos S_j^0 ou S_j^1 incluídos em Ω. De seguida, utilizando uma estratégia *greedy*, atribuir o valor 1 a uma componente da matriz x não inicializada correspondente ao maior valor de ρ_{ij}, com $i \neq j$, e fazer os ajustes necessários para manter a admissibilidade da solução. O processo segue até que todas as variáveis estejam inicializadas.

Para explicar melhor esta heurística, sejam x^H e y^H as variáveis correspondentes a x e y indicadas em (2.3) relativamente à solução heurística z^H.

Inicialmente, tal como foi referido anteriormente, impomos as restrições da região admissível Ω do subproblema na solução heurística e inicializamos as restantes componentes das variáveis x^H e y^H ainda não inicializadas com $+\infty$, valor que será mais tarde descartado.

Seguidamente, com o objetivo de maximizar o valor da função objetivo, pretende-se determinar qual é o maior coeficiente de correlação ρ_{ij}, com $i \neq j$. Denotemos então por P a matriz de correlação constituída pelos coeficientes ρ_{ij}, i, $j \in \{1,...,n\}$. Caso ainda não tenhamos selecionado q ativos para o índice, devemos determinar qual é a componente de P com maior valor apenas nas colunas correspondentes aos ativos disponíveis não representados ou que já estão no índice de fundos (ver Exemplo 2.1). Caso contrário, se o nosso índice já está completo, devemos determinar qual o maior coeficiente de correlação analisando apenas as colunas correspondentes aos ativos pertencentes ao índice. Em ambos os casos, ignoramos os elementos da diagonal principal da matriz das correlações e consideramos apenas as linhas correspondentes à matriz x^H que ainda não satisfazem a restrição (2.1b) (confrontar com o Algoritmo 2.3).

Depois de determinado o maior coeficiente de correlação, atribuímos o valor 1 à correspondente componente da matriz x^H, ou seja, o ativo i será representado pelo ativo j no índice, pelo que $x_{ij}^H = 1$, e todas as restantes componentes da linha i são atualizadas para 0.

Após estas atualizações, se o número de linhas que ainda não satisfazem a restrição (2.1b) for igual ao número de ativos que falta incluir no índice, basta incluir os ativos i no índice e atualizar o valor de x_{ii}^H para 1, em que i representa as linhas que ainda não estavam inicializadas. Caso possamos proceder a estas alterações, a matriz x^H fica totalmente inicializada.

Este processo repete-se enquanto existirem linhas da matriz x^H cuja soma dos respetivos elementos seja diferente de 1.

Por fim, para todas as componentes do vetor y^H que ainda não estejam atualizadas devolvemos o valor 0.

[1] Em termos computacionais, este valor é representado por -*intmax*, em que *intmax* simboliza o maior número inteiro considerado pelo *software* MATLAB.

No final deste processo, devolve-se para β o valor da função objetivo referente a esta solução heurística. Note-se que ao construir uma solução heurística baseada neste algoritmo, obtém-se sempre uma solução admissível para o problema (M).

Os passos descritos anteriormente podem ser implementados no Algoritmo 2.3.

Algoritmo 2.3 Heurística 1

Entrada: Ω ▷ *Ω representa o nó da árvore binária correspondente à região admissível do subproblema a resolver.*

Saída: z^H, β

1 **início**
2 $x^H_{ij} \leftarrow +\infty, \quad y^H_j \leftarrow +\infty, \quad i,j \in \{1,...,n\};$
3 Atualizar x^H e y^H de forma consistente, tendo em conta o nó da árvore binária que está a ser analisado.
4 $I^y \leftarrow \{j \in \{1,...,n\} : y^H_j = 1\};$ ▷ *Constituintes do índice.*
5 $J \leftarrow \{j \in \{1,...,n\} : y^H_j \neq 0\};$ ▷ *Constituintes ou possíveis constituintes do índice.*
6 $I \leftarrow \{i \in \{1,...,n\} : \sum_{j=1}^n x^H_{ij} \neq 1\};$ ▷ *Linhas da matriz x^H que não satisfazem (2.1b).*
7 **enquanto** $|I| > 0$ **faz**
8 **se** $|I^y| < q$ **então**
9 $J_{aux} \leftarrow (I \cap J) \cup I^y;$
10 **senão**
11 $J_{aux} \leftarrow I^y;$
12 **fim**
13 $(i', j') \leftarrow argmax\{\rho_{ij} : i \in I, j \in J_{aux}, i \neq j\};$
14 **se** $j' \notin I^y$ **então**
15 $y^H_{j'} \leftarrow 1; \quad I^y \leftarrow I^y \cup \{j'\};$
16 $x^H_{j'j'} \leftarrow 1; \quad x^H_{j'k} \leftarrow 0, \forall k \neq j'; \quad I \leftarrow I \backslash \{j'\};$
17 **fim**
18 $x^H_{i'j'} \leftarrow 1; \quad x^H_{i'k} \leftarrow 0, \forall k \neq i'; \quad I \leftarrow I \backslash \{i'\};$
19 **se** $|I| = q - |I^y|$ **então**
20 $\forall i \in I, \quad y^H_i \leftarrow 1, \quad I^y \leftarrow I^y \cup \{i\};$
21 $\forall i \in I, \quad x^H_{ii} \leftarrow 1, \quad x^H_{ik} \leftarrow 0, \forall k \neq i;$
22 $I \leftarrow \emptyset;$
23 **fim**
24 **fim**
25 $y^H \leftarrow 0, \forall j \notin I^y;$
26 $z^H = \begin{bmatrix} x^H_{11} & \dots & x^H_{1n} & \dots & x^H_{n1} & \dots & x^H_{nn} & y^H_1 & \dots & y^H_n \end{bmatrix}^T;$
27 $\beta \leftarrow f(z^H);$
28 **fim**

Vejamos um exemplo ilustrativo do algoritmo anterior.

Exemplo 2.1. Suponhamos que se pretende construir um índice de fundos constituído por dois ativos ($q = 2$) através de um índice de mercado, em que os ativos estão correlacionados de acordo com a seguinte matriz de correlação:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 \\ 0,9 & 1 & 0,6 & 0,5 \\ 0,8 & 0,6 & 1 & 0,4 \\ 0,7 & 0,5 & 0,4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Suponhamos ainda que pretendemos calcular a solução heurística na primeira iteração do modelo, isto é, para além das restrições da relaxação do problema (M), não será considerada mais nenhuma imposição.

Inicialmente, pretende-se determinar o valor máximo de toda a matriz de correlação. Contudo, encontramos esse valor em mais do que uma posição da matriz: primeira linha e segunda coluna e segunda linha e primeira coluna. Neste caso, poderemos selecionar, por exemplo, aquela cuja soma da respetiva coluna for maior. Logo, dado que ainda não se incluiu nenhum ativo no índice, atualizamos o valor de y_1^H e de x_{11}^H para 1. Dada a posição do maior valor da matriz, atualizamos ainda o valor de x_{21}^H para 1.

De seguida, dado que ainda temos de selecionar mais um ativo para o índice, devemos determinar qual o maior coeficiente de correlação da submatriz constituída pelas colunas 1, 3 e 4 e pelas linhas 3 e 4. Não faz sentido considerar a segunda coluna porque o ativo 2 já está representado pelo ativo 1, pelo que deixa de ser um candidato ao índice. Desta forma, verifica-se que o elemento máximo se encontra na terceira linha e primeira coluna. Como o ativo 1 já foi incluído no índice de fundos, basta atualizar a componente x_{31}^H para 1.

Falta agora atualizar apenas a quarta linha da matriz x^H. Porém, falta ainda incluir mais um título no índice. Deste modo, adiciona-se o ativo 4 ao índice de fundos, que será representado por ele próprio, isto é, $y_4^H = 1$ e $x_{44}^H = 1$.

Relembra-se ainda que sempre que alteramos uma determinada componente da matriz x^H para 1, os restantes elementos da respetiva linha são atualizados para 0. Da mesma forma, as componentes do vetor y^H que não correspondem a nenhum ativo incluído no índice de fundos tomam o valor nulo.

Terminado o algoritmo, a solução heurística é dada por

$$y^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1.2 Ajuste de matrizes de correlação

As matrizes de correlação P são **simétricas** e **semidefinidas positivas**, isto é, satisfazem $P = P^T$ e $x^T P x \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, as componentes da diagonal principal destas matrizes são iguais a 1. Contudo, quando se analisa dados reais, usam-se estimativas para estas matrizes, podendo afetar estas propriedades. Como tal, é necessário ajustar ou corrigir a matriz estimada.

Seja $\hat{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma estimativa para a matriz das correlações P. Pretende-se encontrar uma matriz simétrica, semidefida positiva e com uns na diagonal principal o mais próxima possível de $\hat{P}$. Para obter uma matriz com estas propriedades, usa-se a norma de Frobenius como medida de proximidade à matriz $\hat{P}$, pois é possível comparar todas as entradas entre a matriz estimada e a matriz pretendida. Portanto, o problema para determinar uma matriz simétrica e semidefinida positiva mais próxima de $\hat{P}$ é dado por

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \left\|X-\hat{P}\right\|_F \\ \text{sujeito a} & X \in C_S^n \\ & diag(X) = \mathbf{1} \end{array} \tag{2.7}$$

em que C_S^n representa o cone das matrizes simétricas e semidefinidas positivas de dimensão $n \times n$, ou seja,

$$C_S^n = \{X \in S^n : X \succeq 0\}, \tag{2.8}$$

e onde $diag(.)$ representa a diagonal principal de uma matriz quadrada e $\mathbf{1}$ representa um vetor em $\mathbb{R}^n$ cujas componentes são todas iguais a um [8].

O problema (2.7) pode ser escrito como um problema de programação linear cónico. Para o efeito, podemos inicialmente escrevê-lo da seguinte forma:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & t \\ \text{sujeito a} & \left\|X-\hat{P}\right\|_F \leq t \\ & X \in C_S^n \\ & diag(X) = \mathbf{1} \end{array} \tag{2.9}$$

Veja-se que a primeira restrição do problema anterior pode ser representada por uma restrição cónica de segunda ordem, introduzindo as variáveis x e $\hat{\rho}$ que representam vetores em $\mathbb{R}^{n^2}$ contendo todas as componentes das matrizes X e $\hat{P}$, respetivamente. Deste modo, definindo $y \in \mathbb{R}^{n^2+1}$ tal que $y_0 = t$ e $(y_1, ..., y_{n^2})^T = x - \hat{\rho}$ tem-se

$$\begin{aligned} \left\|X-\hat{P}\right\|_F \leq t &\Leftrightarrow \left\|(y_1, ..., y_{n^2})^T\right\|_2 \leq y_0 \\ &\Leftrightarrow y \in C_q^{n^2+1} \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde $C_q^{n^2+1} = \left\{y \in \mathbb{R}^{n^2+1} : y_0 \geq \sqrt{y_1^2 + ... + y_{n^2}^2}\right\}$ representa o cone de segunda ordem.

Além disso, a restrição referente à diagonal principal da matriz das correlações pode ser transformada numa restrição linear do tipo $Bx = \mathbf{1}$, em que B é uma matriz de dimensão $n \times n^2$, cujas componentes são todas iguais a zero, exceto as entradas $(i, (i-1) \times n + i)$, $i \in \{1, ..., n\}$, que tomam valor 1.

Portanto, o problema (2.9) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & y_0 \\ \text{sujeito a} & (y_1, ..., y_{n^2})^T = x - \hat{\rho} \\ & Bx = \mathbf{1} \\ & X \in C_S^n \\ & y \in C_q^{n^2+1} \end{array} \tag{2.11}$$

Tendo obtido um problema cónico com função objetivo linear, uma restrição linear e duas cónicas, podemos facilmente resolvê-lo com o *solver* SDPT3 (versão 4.0) do *software* MATLAB [17].

2.2 Análise preliminar

Para explicitar de forma detalhada o algoritmo descrito anteriormente, resolve-se o problema (M) com um conjunto de 4 ativos dos quais se pretende selecionar apenas 2 títulos para o índice, isto é, $q = 2$. A matriz das correlações é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0 & 1 & -0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}5 & -0{,}1 & 1 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}9 & -0{,}3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Apresenta-se de seguida as soluções encontradas na resolução do problema, utilizando a heurística 0. Assinalou-se a vermelho as componentes da solução x e y que não são binárias. O valor de β^* corresponde ao melhor limite inferior encontrado para o valor da função objetivo.

Note-se que sempre que houver componentes da matriz x e/ou do vetor y que não sejam binárias, começa-se por analisar a **última** componente do vetor z (construído de acordo com (2.3)), isto é, primeiro verifica-se as entradas do vetor y e só no caso em que todas as componentes deste forem binárias é que passamos à matriz x.

Na **1ª iteração** resolveu-se o problema de programação linear relaxando (2.1d) e obteve-se a seguinte solução:

$$x = \begin{bmatrix} 0{,}4224 & 0 & 0{,}5776 & 0 \\ 0 & 0{,}5589 & 0 & 0{,}4411 \\ 0{,}4224 & 0 & 0{,}5776 & 0 \\ 0 & 0{,}5589 & 0 & 0{,}4411 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} 0{,}4224 & 0{,}5589 & 0{,}5776 & 0{,}4411 \end{bmatrix}^T.$$

O valor da função objetivo referente a esta solução é $f(z) = 3{,}4$ e, como não é usada nenhuma heurística, o valor de β^* permanece igual a $-\infty$. Analisando a solução obtida podemos constatar que todas as variáveis do vetor y violam a restrição (2.1d). Como $f(z) > \beta^*$, procede-se à primeira ramificação da árvore de pesquisa acrescentando as restrições $y_4 = 0$ e $y_4 = 1$ (confrontar com a Figura 2.2) [2].

Na **2ª iteração** resolveu-se o primeiro subproblema com região admissível $S \cap S_4^0$ e a solução obtida foi

$$x = \begin{bmatrix} 0{,}4653 & 0 & 0{,}5347 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}4653 & 0 & 0{,}5347 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} 0{,}4653 & 1 & 0{,}5347 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

À semelhança do que acontecia anteriormente, a solução obtida nesta iteração tem valor ótimo igual a $f(z) = 3{,}4$ e, como ainda não encontrámos nenhuma solução admissível, o valor de β^*

[2] Para simplificar a descrição deste exemplo, optou-se por associar S_i^0 e S_i^1 à variável y_i e não z_i, como descrito na Subsecção 2.1.1.

mantém-se. Mais uma vez, continuamos a ter variáveis não binárias no vetor y. Ora, como $f(z) > \beta^*$, podemos descer mais um nível na árvore binária, acrescentando as restrições $y_3 = 0$ e $y_3 = 1$.

Na **3ª iteração** resolveu-se o subproblema respeitante à região admissível $S \cap S_4^0 \cap S_3^0$ e a solução obtida é dada por

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

O valor da função objetivo correspondente à solução anterior é $f(z) = 3{,}4$. Como todas as componentes da matriz x e do vetor y são binárias, e uma vez que $f(z) > \beta^*$, atualizamos o valor de z^* com z e β^* com $f(z)$, em que z^* denota a melhor solução admissível encontrada para o problema. Estando determinada a primeira solução admissível, podemos passar ao próximo subproblema.

Na **4ª iteração** resolveu-se o problema de programação linear com região admissível $S \cap S_4^0 \cap S_3^1$, tendo-se obtido a seguinte solução:

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

O valor da função objetivo correspondente à solução anterior é $f(z) = 3{,}4$. Apesar de se ter determinado mais uma solução admissível para o problema, como $f(z) = \beta^*$, não se atualiza o valor de z^* e β^*. Desta forma, passamos ao problema linear com região admissível correspondente ao próximo nó da árvore que ainda não foi tratado.

Na **5ª iteração**, resolveu-se o subproblema respeitante à região admissível $S \cap S_4^1$ e a solução obtida é dada por

$$x = \begin{bmatrix} 0{,}3895 & 0 & 0{,}6105 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}3895 & 0 & 0{,}6105 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} 0{,}3895 & 0 & 0{,}6105 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Mais uma vez, o valor ótimo correspondente a esta solução é $f(z) = 3{,}4$ e também o valor de β^* é igual a 3,4. Analisando a solução obtida verificamos que há componentes do vetor y que não são binárias. Contudo, dado que $f(z) = \beta^*$, não compensa voltar a subdividir a árvore binária, pois isso não iria melhorar o valor de β^*.

Tendo percorrido todos os nós da árvore de pesquisa, damos o algoritmo por terminado. A melhor solução encontrada para o problema foi

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

cujo valor ótimo é dado por $\beta^* = 3{,}4$. Esta solução corresponde a colocar os ativos 1 e 2 no índice (que se representam a eles próprios) e fazer representar o ativo 3 pelo ativo 1 e o ativo 4 pelo ativo 2.

Supondo, por exemplo, que o valor de mercado dos ativos envolventes neste problema é 8, 1, 5 e 3 unidades monetárias, respetivamente, o índice de fundos obtido neste problema é representado pela carteira w tal que $w = \left(\frac{13}{17}, \frac{4}{17}, 0, 0\right)$.

Os passos descritos anteriormente foram esquematizados no diagrama da Figura 2.2.

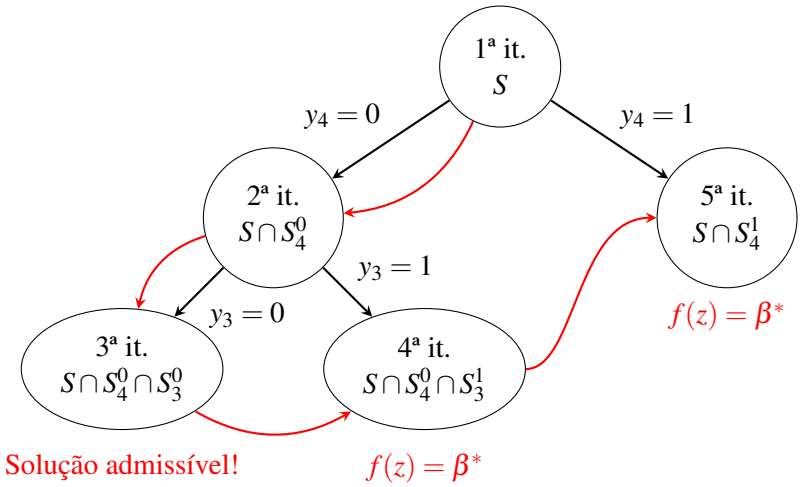


Figura 2.2: Árvore binária correspondente ao problema apresentado.

2.3 Análise de dados reais

É necessário ter cuidado na escolha do período que vamos analisar, pois uma amostra com dados muito antigos pode refletir certas tendências que já não se verificam atualmente (por exemplo, períodos de crise económica). Por outro lado, uma amostra com poucos dados pode levar igualmente a erros de estimação.

Como tal, para fazer uma análise deste algoritmo *Branch-and-Bound* em contexto real, extraiu-se uma amostra dos dados históricos diários das ações, que constituíam o PSI 20 em 01/09/2016, correspondente ao período entre **01/09/2015** e **31/08/2016**. Sendo que nem todos os ativos foram transacionados ao longo de todo o período referido anteriormente, considerou-se apenas as datas em que todos os ativos incluídos num determinado problema tinham sido cotados. Desta forma, obteve-se uma amostra correspondente a 250 observações. O presente estudo empírico foi desenvolvido com recurso ao *software* MATLAB (versão 8.6.0, R2015b) e os diferentes problemas de programação linear foram resolvidos através do *solver* `linprog`.

Os títulos analisados foram: Altri, BCP, BPI, CTT, EDP, EDP Renováveis, Galp, Jerónimo Martins, Mota-Engil, NOS, Pharol, Portucel, REN, Semapa e Sonae. Neste conjunto, não se incluiu os títulos da Corticeira Amorim, do Montepio e da Sonae Capital porque só entraram para o índice em 2016. Os dados relativos às cotações de fecho destes títulos acionistas foram extraídos da base de dados da Euronext [3].

Sendo c_{it} a cotação de fecho do ativo i, $i \in \{1,...,n\}$, no t-ésimo dia observado, $t \in \{0,1,...,T\}$, calculou-se os retornos aritméticos [18], que representam a variação relativa do preço do ativo i entre $t-1$ e t relativamente ao seu valor em $t-1$.

$$r_{it} = \frac{c_{it} - c_{it-1}}{c_{it-1}}, \; i \in \{1,...,n\}, t \in \{1,...,T\} \tag{2.12}$$

Com base nos retornos, foram calculadas estimativas para a média μ_i dos retornos de cada ativo i e covariância σ_{ij} entre os retornos dos ativos i e j através das seguintes fórmulas.

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}, \quad i \in \{1,...,n\} \tag{2.13a}$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \hat{\mu}_i)(r_{jt} - \hat{\mu}_j), \quad i,\ j \in \{1,...,n\} \tag{2.13b}$$

Desta forma, a estimativa para o coeficiente de correlação ρ_{ij} entre os retornos dos ativos i e j é dada por

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{ii}\hat{\sigma}_{jj}}}, \quad i,\ j \in \{1,...,n\}, \tag{2.14}$$

onde $\sqrt{\hat{\sigma}_{ii}}$ representa o desvio padrão dos retornos do ativo i.

De seguida, apresenta-se na Tabela 2.1 o valor ótimo da função objetivo do problema (M) tendo em conta o número de ativos n do índice de referência e o número de títulos q que pretendemos selecionar para o índice de fundos. Note-se que, de acordo com o problema apresentado, obrigatoriamente temos que $q < n$. Para valores de n a variar entre 5, 10 e 15 considerou-se os primeiros cinco, dez e quinze ativos mencionados anteriormente.

q \ n	5	10	15
1	2,6520	5,2631	8,0521
2	3,4098	6,0209	8,8441
3	3,9777	6,5888	9,4523
4	4,5290	7,1424	10,0388
5	-	7,6937	10,5923
6	-	8,2451	11,1368
7	-	8,7267	11,6751
8	-	9,1977	12,1568
9	-	9,6355	12,6370
10	-	-	13,1080
11	-	-	13,8965
12	-	-	13,9491
13	-	-	14,3136
14	-	-	14,6603

Tabela 2.1: Semelhança entre os ativos pertencentes ao índice e respetivos representados.

Nas subsecções que se seguem, apresenta-se uma análise da variação do valor ótimo da função objetivo tendo em conta os diferentes valores de n e q.

2.3.1 Variação do número de ativos em estudo – n

Analisando a Tabela 2.1 constata-se que à medida que se consideram mais títulos ao índice de mercado, o valor ótimo da função objetivo aumenta. Isto seria expectável porque podem ser incluídos ativos que estejam mais correlacionados de forma positiva com os restantes.

2.3.2 Variação do número de ativos a incluir no índice – q

Ao analisar a Tabela 2.1, verifica-se que, para um dado valor de n fixo, à medida que aumenta o número de ativos que pretendemos selecionar para o índice de fundos q, aumenta também o valor ótimo da função objetivo. De facto, isto era expectável uma vez que há uma maior possibilidades de obter uma maior correlação entre os constituintes do índice de fundos e os restantes títulos. Além disso, supondo que $\rho_{ij} < 1$, para todo $i \neq j$, se desassociarmos um dos ativos representados para se representar a ele próprio (aumentando o número de ativos no índice de fundos em uma unidade), o valor da função objetivo aumenta, como se ilustrará no seguinte exemplo.

Analisemos os casos em que consideramos que o índice de mercado é constituído pelos primeiros cinco ativos apresentados anteriormente: Altri, BCP, BPI, CTT e EDP. A matriz das correlações é dada por

$$\hat{P}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0,3929 & 0,3394 & 0,3532 & 0,4487 \\ 0,3929 & 1 & 0,4321 & 0,3524 & 0,3896 \\ 0,3394 & 0,4321 & 1 & 0,3025 & 0,2846 \\ 0,3532 & 0,3524 & 0,3025 & 1 & 0,5290 \\ 0,4487 & 0,3896 & 0,2846 & 0,5290 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

Para diferentes valores de q, apresenta-se a solução ótima para o problema na Tabela 2.2, usando a heurística 0.

Variáveis \ q	1	2	3	4
y^T	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
x	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Tabela 2.2: Soluções obtidas considerando que o índice de mercado é constituído por 5 ativos.

Comparando, por exemplo, a solução ótima dos problemas considerando $q = 2$ e $q = 3$, verificamos que a única alteração foi incluir o ativo 3 no índice de fundos. Consequentemente, este ativo passará a ser representado por ele próprio, o que significa que o ativo 3 deixará de ser representado pelo ativo 2. Ora, como $\rho_{32} < \rho_{33}$, trivialmente o valor ótimo da função objetivo será superior no segundo caso.

Analisando a Tabela 2.2 verifica-se ainda que, no caso em que se usa a heurística 0, o modelo tende a selecionar para o índice de fundos os ativos que têm maior correlação com o restantes títulos do conjunto inicial. Com o intuito de evitar que a heurística 1 tenha um desempenho semelhante ao da heurística 0, no caso de surgir um "empate" na escolha do novo título a incluir no índice, é escolhido, por exemplo, o ativo cuja coluna da matriz das correlações tem maior soma.

Note-se que, devido à simetria da matriz das correlações, outra solução ótima para o problema quando consideramos $n = 5$ e $q = 4$ seria incluir o ativo 5 no índice, em vez do ativo 4, e fazer os ativos 4 e 5 serem representado pelo ativo 5, isto é,

$$y^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta análise é análoga para os problemas em que consideramos que o índice que se pretende seguir é constituído pelos primeiros 10 ou 15 ativos.

Note-se que na resolução deste problema de construção de índices de fundos usando os dados históricos apresentados, o modelo necessitou no máximo de três iterações para determinar a solução ótima de cada problema, o que significa que, apesar de em alguns casos melhorar o valor de β^*, não foi possível reduzir o número de iterações utilizando a heurística 1. Desta forma, apresenta-se na Secção 2.4 um exemplo ilustrativo para analisar a eficiência desta heurística.

2.3.3 Desempenho das carteiras obtidas

A diferença entre o índice de fundos e o respetivo índice de referência é denominada por *tracking error*. O ideal seria obter um índice de fundos cujo valor deste parâmetro fosse igual a zero, o que significaria que o índice de fundos tinha exatamente o mesmo desempenho que o índice de mercado que pretende seguir. Um exemplo em que tal situação ocorre é quando o índice de fundos é constituído por todos os ativos do índice de mercado. Contudo, tal como foi referido anteriormente, isto é difícil de atingir, dado que poderá implicar custos elevados [5]. Desta forma, será expectável que quanto maior for o número de ativos que se pretende selecionar para o índice, menor será essa diferença.

O *tracking error* pode ser medido pelo desvio padrão da diferença entre os retornos do índice de fundos e os retornos do seu índice de referência [7], isto é,

$$TE = \sqrt{Var\,(R_{IF} - R_{IM})}, \tag{2.16}$$

em que R_{IF} representa os retornos do índice de fundos e R_{IM} representa os retornos do índice de mercado. Outras medidas para o cálculo deste parâmetro foram propostas por Kritzman (1987) [11], afirmando que este era dado pela diferença dos retornos, e por Clarke et al. (1994) [1], que definiram o *tracking error* como sendo a diferença absoluta entre os retornos.

Com o objetivo de comparar os índices de fundos obtidos anteriormente com o respetivo índice de referência, extraiu-se os dados históricos referentes aos mesmos ativos no período entre **01/09/2016** e **30/12/2016** e procedeu-se ao cálculo dos retornos diários dos índices de fundos atualizados diariamente

para determinar o respetivo *tracking error*. Note-se que este parâmetro é usualmente analisado em termos anuais. Dado que usaremos retornos diários para o seu cálculo, é necessário multiplicar o desvio padrão da diferença dos retornos diários por $\sqrt{250}$, em que 250 é a convenção utilizada para o número de dias por ano em que há cotação dos ativos. Desta forma, apresenta-se na Tabela 2.3 os valores deste parâmetro tendo em conta os diferentes valores de n e q.

q \ n	5	10	15
1	0,1897	0,1567	0,2033
2	0,1590	0,1476	0,2025
3	0,1593	0,1482	0,1715
4	0,0571	0,1158	0,1228
5	-	0,1110	0,1010
6	-	0,1018	0,0995
7	-	0,0562	0,0972
8	-	0,0343	0,0665
9	-	0,0195	0,0632
10	-	-	0,0547
11	-	-	0,0486
12	-	-	0,0476
13	-	-	0,0431
14	-	-	0,0373

Tabela 2.3: *Tracking error* entre os diferentes índices de fundos e respetivo índice de mercado.

Analisando a Tabela 2.3 constata-se que, regra geral, quanto mais ativos incluímos no índice de fundos menor é a dispersão entre os retornos, o que vai ao encontro do que foi referido anteriormente. De facto, quanto maior é o valor de q, mais elevada é correlação entre os constituintes do índice de fundos e os seus representados.

Quando o número de ativos que constituem o índice de mercado que se pretende seguir é muito reduzido, não faz muito sentido construir um índice de fundos, uma vez que é menos provável que as correlações entre os retornos dos títulos seja suficientemente elevada, resultando numa carteira com *tracking error* bastante elevado. No caso em que consideramos $n = 5$, os índices de fundos com 1, 2 ou 3 ativos têm valores de *tracking error* que variam entre 15 e 20%.

Na Tabela 2.3 verifica-se ainda que certos índices de fundos apresentam valores de *tracking error* muito semelhantes, como acontece por exemplo, para $n = 10$ e q a variar entre 4 e 6, em que este parâmetro toma valores entre 10 e 12%. Em termos práticos, se se estiver perante um valor aceitável, pode optar-se pelo índice de fundos que inclui menos ativos para evitar custos associados acrescidos (apesar de o erro ser ligeiramente maior).

2.4 Exemplo adicional

Com o objetivo de comparar o desempenho do algoritmo quando utiliza a heurística construída para este modelo, analisa-se o seu comportamento num exemplo onde os títulos não estejam todos

correlacionados positivamente, como no caso analisado na Secção 2.3. A título de exemplo, se a heurística fosse aplicada no problema descrito na Secção 2.2, o número de iterações reduziria para 3, em vez das 5 utilizadas. A heurística permite obter mais vantagens quanto mais "empates" surgirem nas escolhas dos novos ativos a incluir no índice. Deste modo, nesta secção estuda-se o problema (M) admitindo que a matriz de correlação é a matriz identidade, ou seja, assume-se que ativos diferentes não estão correlacionados de forma linear ($\rho_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$). Nesta situação, todas as soluções admissíveis para o problema (M) são ótimas (com valor q). Porém, a relaxação linear deste problema conduz, em geral, a uma distribuição de q uniformemente por todas as componentes de y, ou seja, $y_j = \frac{q}{n}$, para todo $j \in \{1, ..., n\}$, pelo que o algoritmo necessitará de um número de iterações superior para determinar uma solução com componentes binárias.

É expectável que a heurística 1 seja mais eficiente relativamente à heurística 0, pois a primeira melhorará o limite inferior para a função objetivo β^* na primeira iteração, enquanto que a segunda funcionará como se não se usasse nenhuma heurística para melhorar este limite. Como tal, para averiguar a eficácia da heurística 1, apresenta-se de seguida uma tabela com o número de iterações de cada problema tendo em conta os valores de n e q.

n \ q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Heurística
5	9	13	13	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
	3	3	3	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1
10	19	33	43	49	51	49	43	33	19	-	-	-	-	-	0
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	-	-	-	-	-	1
15	29	53	73	89	101	109	113	113	109	101	89	73	53	29	0
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1

Tabela 2.4: Número de iterações do algoritmo em função da heurística utilizada.

Note-se que no caso de não se obter uma solução com valores binários na relaxação inicial de (M), o algoritmo necessitará no mínimo três iterações para determinar a solução ótima. De facto, teremos de ramificar a árvore de pesquisa em dois ramos, o que significa que teremos pelo menos mais duas iterações. Atendendo a que a heurística 1 devolve sempre uma solução admissível para o problema e, uma vez que para este caso o valor da função objetivo de uma solução admissível é sempre q, o modelo determinará uma solução ótima no máximo em três iterações, como podemos constatar na Tabela 2.4.

Relativamente à heurística 0, verifica-se uma simetria do número de iterações relativamente ao seu elemento central. Isto deve-se ao facto de que o problema de incluir q ativos no índice de fundos pode ser convertível no problema de retirar $q' = n - q$ ativos do índice de mercado. Então, na primeira iteração, para o primeiro caso o problema irá atribuir a todas as componentes de y o valor $\frac{q}{n}$, enquanto que no segundo distribuirá $\frac{q'}{n} = 1 - \frac{q}{n}$ por estas, onde q e q' são elementos simétricos relativamente ao elemento central.

Quanto mais afastado o valor de q estiver de $\frac{n}{2}$, menos iterações o algoritmo irá necessitar, uma vez que $\frac{q}{n}$ estará mais próximo de 0 e $1 - \frac{q}{n}$ estará mais próximo de 1, ou vice-versa, sendo mais rápido transformar todas as componentes da solução em valores binários.

Capítulo 3

Otimização de portefólios com um nível mínimo de transação

O objetivo de qualquer agente económico que pretenda investir no mercado bolsista será aumentar o **retorno esperado** da sua carteira sem correr demasiado **risco**. Contudo, no processo de seleção de carteiras, as soluções obtidas pelos diversos modelos podem incluir investimentos reduzidos em determinados ativos financeiros que, na prática, não devem ser realizados, pois os custos associados podem ser superiores ao valor do retorno do ativo. Outra situação que pode inviabilizar a constituição da carteira é que o valor a investir num determinado ativo seja inferior ao seu custo unitário.

3.1 Enquadramento teórico

Considere-se que um determinado investidor pretende aplicar uma certa quantia monetária em n ativos financeiros diferentes, por exemplo, ações, obrigações, etc. Denotemos por x_i a proporção do investimento total no ativo i, $i \in \{1,...,n\}$. Sejam R_i, $i \in \{1,...,n\}$, as variáveis aleatórias que descrevem os retornos de cada ativo financeiro e denotemos por R a variável aleatória que representa o retorno da carteira, tal que $R = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$, onde se assume que o retorno R da carteira é linear nos retornos individuais.

Pode estimar-se o retorno médio de cada ativo μ_i e a sua variância σ_i^2, através de dados históricos e, consequentemente, obter estimativas para o retorno esperado e variância da carteira.

Propriedade 3.1. O **retorno esperado** da carteira é dado por

$$E(R) = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + ... + \mu_n x_n = \mu^T x, \tag{3.1}$$

onde $\mu = [\mu_1 \ \mu_2 \ ... \ \mu_n]^T$.

Por outro lado, a **variância** da carteira é dada por

$$Var(R) = x^T Q x, \tag{3.2}$$

onde $Q_{ij} = \sigma_{ij}$, com Q uma matriz simétrica e semidefinida positiva e σ_{ij} a covariância entre R_i e R_j.

Demonstração.

$$E(R) = E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i = \mu^T x$$

$$\begin{aligned}
Var(R) &= E\left((R - E(R))^2\right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i\right)\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i - \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i)\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i (R_i - E(R_i))\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i (R_i - \mu_i)\right)^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j (R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \, E\left[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \\
&= x^T Q x
\end{aligned}$$

■

Iremos considerar agora, sem perda de generalidade, que Q é uma matriz definida positiva, pois se a matriz for semidefinida positiva poderão haver ativos redundantes.

O risco da carteira pode ser medido pela variância dos retornos. Por isso, caso o agente económico pretenda minimizar o risco da sua carteira, para um determinado nível mínimo de retorno r, resolve-se o seguinte problema de programação quadrático OMV(r), também conhecido como modelo clássico de Markowitz [8].

$$\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & f(x) = x^T Q x \\
\text{sujeito a} \quad & \mu^T x \geq r && \text{(3.3a)} \\
& x \in X && \text{(3.3b)}
\end{aligned}$$

onde X representa o conjunto das carteiras admissíveis, isto é,

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \ldots + x_n = 1,\ x_i \geq 0,\ i \in \{1, \ldots, n\}\}. \tag{3.4}$$

Denote-se a região admissível do problema OMV(r) por S, em que

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu^T x \geq r,\ x \in X\}. \tag{3.5}$$

As restrições do problema anterior podem ter uma representação matricial do tipo $Ax = b$ e $Cx \geq d$, em que A denota o vetor linha de ordem n cujas componentes são todas iguais a 1, $b = 1$, $C = \mu^T$ e $d = r$. Note-se que outras restrições podem ser adicionadas ao modelo clássico, como por exemplo, caso um investidor pretenda realizar um investimento máximo de 30% no ativo i, então deveremos acrescentar a restrição $x_i \leq 0,3$.

O modelo clássico de Markowitz avalia o risco pela variância dos retornos e, por vezes, pode não ter em conta a diversificação da carteira, uma vez que poderá devolver uma solução com demasiado peso em ativos com baixo risco e, consequentemente, com baixo retorno. Contudo, um dos princípios geralmente aceites em matemática financeira é que a diversificação reduz o risco. Deste modo, pode ser necessário incluir restrições do tipo $x_i \leq s_i$, onde $s_i \in (0,1)$, $i \in \{1,...,n\}$, para obrigar a uma diversificação da carteira. No entanto, ao acrescentar restrições ao problema estamos a diminuir a sua região admissível, pelo que o valor da função objetivo pode piorar, ou seja, com este modelo o risco poderá aumentar com a diversificação [18].

Note-se que todas as restrições são lineares e que a função objetivo é quadrática, pelo que estamos perante um problema de programação quadrática. Além disso, como a matriz Q é simétrica e definida positiva, a função objetivo é também uniformemente convexa. Portanto, sendo a região admissível S um conjunto convexo, fechado e não vazio, existe uma única solução para o problema.

Por vezes, obtém-se soluções do problema original OMV(r) que, apesar de serem válidas matematicamente, podem não fazer sentido em termos financeiros. Tendo em conta a solução obtida, podemos estar a fazer investimentos reduzidos em determinados ativos e, portanto, os custos de transação poderão ser superiores ao retorno do ativo. Para contornar esta situação, pode adicionar-se uma nova restrição que impõe que se uma posição num ativo é positiva, então tem de ser maior ou igual a um determinado nível mínimo de transação l_i, $i \in \{1,...,n\}$, ou seja,

$$x_i > 0 \Rightarrow x_i \geq l_i, \text{ onde } l_i \in (0,1). \tag{3.6}$$

Atendendo a que $x_i \geq 0$, $i \in \{1,...,n\}$, esta restrição pode ser reescrita na seguinte forma:

$$x_i(x_i - l_i) \geq 0, \; i \in \{1,...,n\}. \tag{3.7}$$

Deste modo, a região admissível passa a ser o conjunto

$$\Pi = \{x \in S : x_i(x_i - l_i) \geq 0, \; i \in \{1,...,n\}\}. \tag{3.8}$$

No entanto, encontrar uma solução do problema OMV(r) adicionando esta restrição tornar-se-á complicado, uma vez que a região admissível deixa de ser convexa (e conexa). Nestas situações podemos utilizar o método *Branch-and-Bound*, referido no capítulo anterior, adaptado a este problema.

3.1.1 *Branch-and-Bound*

Para este caso, o algoritmo *Branch-and-Bound* consiste numa estratégia de divisão do modelo inicial constituído pelos conjuntos de restrições (3.3) e (3.6) em subproblemas, onde a restrição (3.6) pode ser substituída por restrições lineares, formando assim uma árvore binária, onde cada nó representa a região admissível de um programa quadrático.

Este processo é análogo ao algoritmo descrito na Subsecção 2.1.1. No entanto, estamos perante um problema que não envolve variáveis binárias, pelo que as restrições que vão sendo incluídas ao longo das diferentes iterações não são de natureza inteira. De cada vez que temos necessidade de proceder a ramificações da árvore de pesquisa, inclui-se as restrições $x_j = 0$ ou $x_j \geq l_j$, onde j denota o **último** índice do vetor solução x cuja respetiva componente não satisfaz a restrição (3.6). Sendo

um problema de minimização, à medida que estamos a adicionar este conjunto de restrições, estamos a aumentar um nível na árvore binária e o valor objetivo ótimo será igual ou maior ao do problema anterior.

Denote-se então por S_j^0 e S_j^l os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que satisfazem as restrições $x_j = 0$ e $x_j \geq l_j$, respetivamente, isto é,

$$S_j^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0\}, \tag{3.9a}$$
$$S_j^l = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geq l_j\}. \tag{3.9b}$$

Desta forma, a região admissível Π pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Pi = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \left(S_i^0 \cup S_i^l \right) \right) \cap S. \tag{3.10}$$

A árvore binária mencionada pode ser esquematizada no diagrama da Figura 3.1, em que cada nó representa a região admissível do subproblema em estudo.

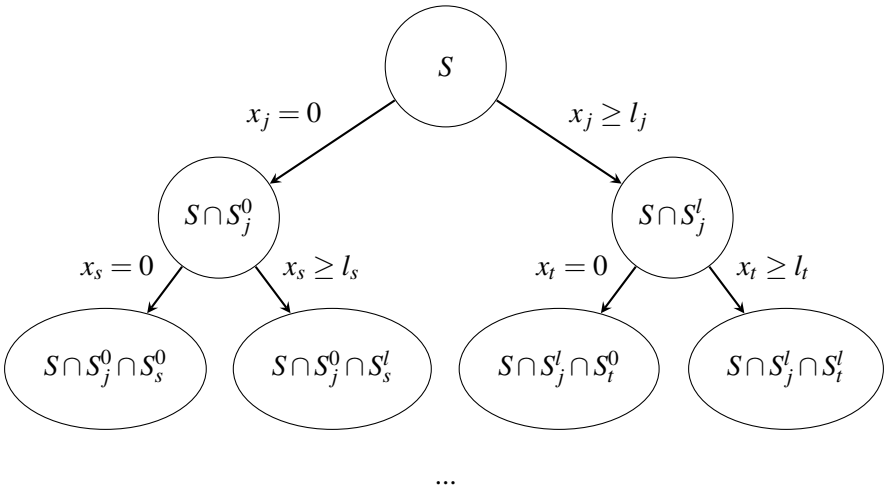
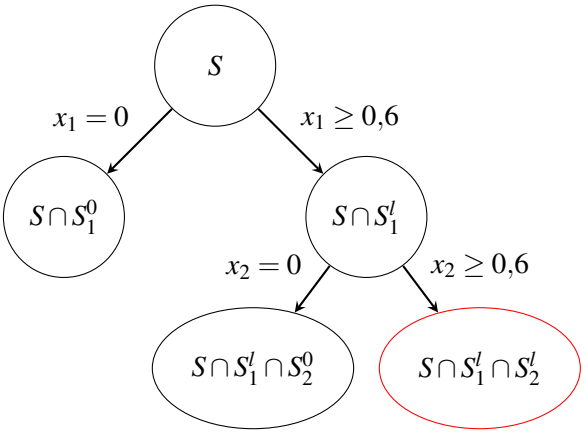


Figura 3.1: Esquema da árvore de pesquisa utilizada no método *Branch-and-Bound*, onde cada nó representa a região admissível de um problema quadrático.

A região admissível, num dos subproblemas resultantes, pode ainda ser um conjunto vazio e, portanto, não é possível determinar nenhuma solução para o problema. Neste caso, termina-se a pesquisa nesse ramo. Veja-se um exemplo em que um dos subproblemas fica com a região admissível vazia.

Exemplo 3.1. Suponha-se que se está a resolver um subproblema em que o nível mínimo de transação de todos os ativos envolventes é 60% e cuja região admissível está assinalada a vermelho na seguinte árvore binária.



Neste caso, a soma de todas as componentes de x seria pelo menos igual a 1,2, o que entra em conflito com a restrição (3.3b). Portanto, não é possível determinar uma solução admissível neste caso.

Como foi referido anteriormente, o valor da função objetivo mantém-se ou aumenta de cada vez que se desce um nível na árvore binária. Deste modo, podemos evitar explorar certos ramos da árvore desnecessários, utilizando um limite superior para a solução ótima do problema, que se denotará por β^*, o que permite fazer alguns cortes na árvore de pesquisa. Este valor será atualizado em cada iteração se $f(x) < \beta^*$ e se a solução obtida nesse nó pertencer ao conjunto Π. Nas condições descritas anteriormente, atualiza-se β^* com o valor de $f(x)$ e x^* com x.

Os passos descritos anteriormente podem ser implementado no Algoritmo 3.1, referente ao procedimento *Branch-and-Bound*, onde $PQ(\Omega)$ é uma função que devolve a solução de $\min\{f(x) : x \in \Omega\}$, em que Ω representa a região admissível de um determinado subproblema. A solução do problema é então obtida invocando $\text{BnB}(S, [\,], +\infty)$, onde $[\,]$ representa um vetor solução "vazio", que não será considerado no problema.

Algoritmo 3.1 BnB

Entrada: Ω, x^*, β^* ▷ *Ω representa a região admissível do subproblema a resolver, x^* denota a melhor solução admissível encontrada e β^* representa o melhor limite superior determinado para o valor da função objetivo.*

Saída: x^*, β^*

```
1  início
2      x ← PQ(Ω);          ▷ Resolve o problema quadrático tendo em conta a região admissível Ω.
3      se f(x) < β* então
4          se x ∈ Π então
5              β* ← f(x);
6              x* ← x;
7          senão
8              j ← último índice de x cuja respetiva componente não respeita (3.6);
9              [x*, β*] ← BnB(Ω ∩ S_j^0, x*, β*);
10             [x*, β*] ← BnB(Ω ∩ S_j^l, x*, β*);
11         fim
12     fim
13 fim
```

À semelhança do que acontecia anteriormente, pode melhorar-se o limite superior β^* com o objetivo de diminuir o número de iterações deste algoritmo calculando uma solução heurística.

Heurísticas

Uma heurística é um algoritmo que permite obter uma solução admissível, denotada por x^H, para um problema de forma rápida mas não necessariamente ótima. Se $f(x^H) < \beta^*$, então atualiza-se x^* e β^* com os valores da solução heurística.

No Algoritmo 3.2 é descrito um melhoramento do procedimento *Branch-and-Bound* descrito no Algoritmo 3.1, usando uma solução heurística.

Algoritmo 3.2 BnBH

Entrada: Ω, x^*, β^* ▷ *Ω representa o nó da árvore binária correspondente ao subproblema a resolver, x^* denota a melhor solução admissível encontrada e β^* representa o melhor limite superior determinado para o valor da função objetivo.*

Saída: x^*, β^*

```
1  início
2      x ← PQ(Ω);          ▷ Resolve o problema quadrático tendo em conta a região admissível Ω.
3      se f(x) < β* então
4          se x ∈ Π então
5              β* ← f(x);
6              x* ← x;
7          senão
8              [x^H, β] ← heurística(Ω, x);   ▷ β representa o valor da função objetivo referente à
   solução heurística x^H.
9              se β < β* então
10                 β* ← β;
11                 x* ← x^H;
12             fim
13             j ← último índice de x cuja respetiva componente não respeita (3.6);
14             [x*, β*] ← BnBH(Ω ∩ S_j^0, x*, β*);
15             [x*, β*] ← BnBH(Ω ∩ S_j^l, x*, β*);
16         fim
17     fim
18 fim
```

Seguidamente, apresentam-se as heurísticas desenvolvidas para aplicação no modelo *Branch-and--Bound*, como descrito anteriormente.

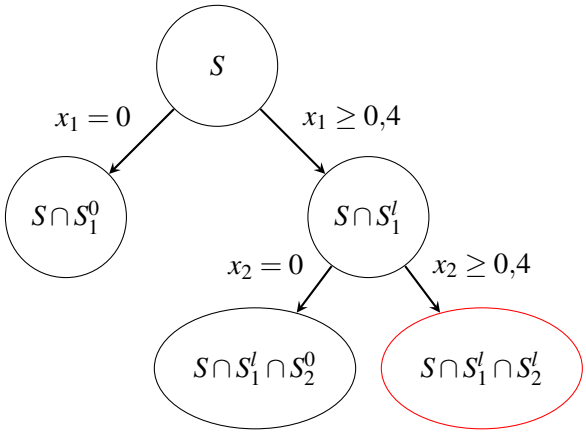
Heurística 0 À semelhança do que acontecia no capítulo anterior, esta heurística devolve um valor extremo para o valor de β por forma a validar qualquer solução admissível que venha a ser encontrada numa relaxação do problema. Deste modo, estando perante um problema de minimização, devolve-se o valor de $+\infty$ para β, visto que o valor da função objetivo é, numa solução admissível, inferior a $+\infty$.

Heurística 1 Consiste numa heurística que tenta encontrar uma solução admissível para o subproblema cuja região admissível é representada pelo nó da árvore de pesquisa em estudo.

Inicialmente, considera-se que todas as componentes da solução heurística x^H são iguais a zero. De seguida, analisa-se o nó da árvore binária correspondente à região admissível Ω do subproblema em estudo. Se $\Omega \subseteq S_i^l$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, então o valor de x_i^H é atualizado para l_i.

Denote-se a soma das componentes do vetor x^H por δ. Caso este valor seja inferior a 1, é necessário adicionar o remanescente $\gamma = 1-\delta$ à componente da solução heurística que não tenha de ser necessariamente igual a zero e que tem maior valor de μ, para que o vetor solução x^H satisfaça a restrição (3.3b). Denote-se então o índice da componente nestas condições por j e atualize-se o seu valor com $x_j^H + \gamma$. Ao proceder desta forma, pode ocorrer que x_j^H viole a restrição (3.6), como se exemplifica a seguir.

Exemplo 3.2. Seja $\mu = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix}^T$ o vetor dos retornos esperados dos ativos envolvidos no problema e cujo nível mínimo de transação é 40%. Suponha-se então que se está a resolver o subproblema respeitante à região admissível assinalada a vermelho na árvore binária que se segue.

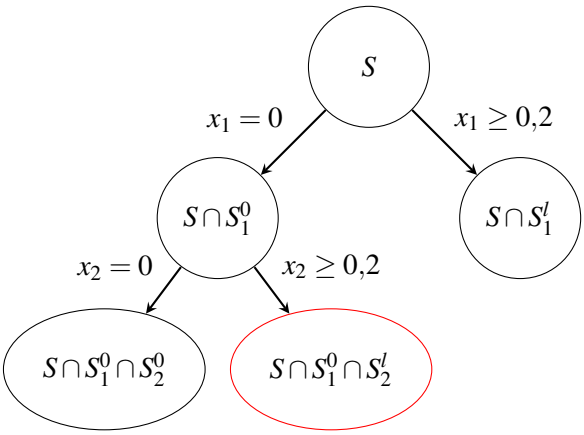


Tendo em conta as restrições da sub-região admissível, a solução heurística é inicializada com $x^H = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix}^T$. Neste caso, $j = 3$ seria o índice ideal do vetor x^H para colocar o remanescente $\gamma = 0{,}2$, dado que não é imposta a restrição $x_3 = 0$ e o ativo 3 tem o maior retorno esperado. Contudo, atualizar x_3^H para 0,2 torna esta solução inadmissível, uma vez que esta entrada iria violar a restrição (3.6). Como tal, coloca-se o remanescente em x_1^H, porque o ativo 1 tem maior retorno do que o ativo 2. Portanto, a solução heurística é dada por $x^H = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Neste caso, não é atualizado o valor de x_j^H e repete-se o processo até que se encontre uma componente da solução heurística válida para adicionar o remanescente γ.

No final deste processo, x^H satisfaz as restrições (3.3b) e (3.6). Contudo, pode não satisfazer ainda a restrição (3.3a), uma vez que a carteira correspondente a esta solução pode não atingir o retorno mínimo esperado r, como acontece no seguinte exemplo.

Exemplo 3.3. Seja $\mu = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix}^T$ e $r = 0{,}8$. Para um nível mínimo de transação igual a 20% para todos ativos, suponha-se que se pretende resolver o subproblema com região admissível correspondente ao nó da seguinte árvore binária assinalado a vermelho.



Usando a heurística 1, obteve-se a seguinte solução:

$$x^H = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}^T.$$

Ora, mas esta solução não satisfaz a restrição (3.3a), pois $\mu^T x^H = 0{,}68 < 0{,}8$, e não é possível obter uma solução com maior retorno esperado devido à restrição $x_2 \geq 0{,}2$ que obriga que o ativo 2, que tem retorno esperado negativo, tenha um peso de pelo menos 20% na carteira.

Se a solução heurística for admissível, isto é, se $x^H \in \Pi$, então $\beta = f(x^H)$. Caso contrário, o valor de β será atualizado para $+\infty$.

Os passos descritos anteriormente podem ser implementados no Algoritmo 3.3. Note-se que para calcular uma solução com base nesta heurística, não é necessária a solução x já obtida, pelo que este parâmetro não consta na lista de parâmetros de entrada no algoritmo referente à heurística 1.

Algoritmo 3.3 Heurística 1

Entrada: Ω ▷ *Ω representa o nó da árvore binária correspondente ao subproblema a resolver.*

Saída: x^H, β

início
- $I \leftarrow \{1, \ldots, n\}$;
- $I^0 \leftarrow \{i \in \{1, \ldots, n\} : \Omega \subseteq S_i^0\}$; ▷ *Índices que têm de satisfazer $x_i = 0$*
- $I^l \leftarrow \{i \in \{1, \ldots, n\} : \Omega \subseteq S_i^l\}$; ▷ *Índices que têm de satisfazer $x_i \geq l_i$*
- $x_i^H \leftarrow 0, \ \forall i \in I$;
- $x_i^H \leftarrow l_i, \ \forall i \in I^l$;
- $\delta \leftarrow \sum_{i=1}^n x_i^H$;
- $\gamma \leftarrow 1 - \delta$;
- $J \leftarrow I \backslash I^0$;
- **enquanto** $J \neq \emptyset$ **faz**
  - $j \leftarrow argmax\{\mu_i : i \in J\}$;
  - **se** $x_j^H + \gamma \geq l_j$ **então**
    - $x_j^H \leftarrow x_j^H + \gamma$;
    - $J \leftarrow \emptyset$;
  - **senão**
    - $J \leftarrow J \backslash \{j\}$;
  - **fim**
- **fim**
- **se** $x^H \in \Pi$ **então**

```
        β ← f(x^H);
    senão
        β ← +∞;
    fim
fim
```

Note-se que no caso em o valor de β é atualizado para $+\infty$, a solução heurística não vai ser considerada no problema.

Heurística 2 O objetivo principal desta heurística é rebalancear a solução obtida em $PQ(\Omega)$ por forma a que todas as suas componentes cumpram a restrição (3.6). Portanto, caso hajam ativos que violam esta restrição, o seu valor ou é atualizado para zero ou para o respetivo nível mínimo de transação. Desta forma, esta heurística é calculada com base na solução x obtida neste nó e no nível mínimo de transação l.

Inicialmente, considera-se que a solução heurística é dada por $x^H = x$. De seguida, verifica-se quais são os índices da solução x que satisfazem a restrição (3.6), calculando a soma dos respetivos valores (designe-se esta soma por δ). É também identificado o conjunto dos índices do vetor que não satisfazem esta restrição, isto é, $I^x = \{i \in \{1,...,n\} : 0 < x_i < l_j\}$. Procede-se então à análise destas componentes.

Por forma a tornar x^H admissível, teremos de proceder à alteração dos valores das componentes deste vetor que não satisfazem a restrição (3.6). Desta forma, seja x_i uma componente da solução ótima que não satisfaz esta restrição. Se este valor for inferior a metade do respetivo nível mínimo de transação l_i, então a i-ésima componente do vetor x^H será atualizada para zero. Caso contrário, será igual ao respetivo nível mínimo de transação desde que, após a atualização desse valor, a soma dos elementos do vetor não exceda 1. Caso a soma seja superior a 1, então x_i^H será igual a zero. Ou seja,

- se $x_i < \frac{l_i}{2}$, então $x_i^H = 0$;
- se $x_i \geq \frac{l_i}{2}$, então $x_i^H = l_i$ na condição de $\delta + l_i \leq 1$ e atualiza-se δ com $\delta + l_i$; caso contrário, $x_i^H = 0$.

Depois de analisar todos os elementos de x que não satisfazem a restrição (3.6), a soma dos elementos da solução heurística x^H poderá ser inferior a 1 (como foi referido anteriormente nunca poderá ser superior a 1). Por forma a que x^H satisfaça a restrição (3.3b), coloca-se o remanescente $\gamma = 1 - \delta$ na componente de x^H diferente de zero que tem maior valor de μ. Denote-se o índice da solução heurística nestas condições por j. Então, o valor de x_j^H é atualizado para $x_j^H + \gamma$. Desta forma, a soma dos elementos da heurística será igual a 1.

No final deste processo, x^H satisfaz as restrições (3.3b) e (3.6). Contudo, pode não satisfazer ainda a restrição (3.3a), uma vez que a carteira correspondente a esta solução pode não atingir o retorno mínimo esperado r. Neste caso, manipula-se a solução heurística, transferindo total ou parcialmente o valor de uma(s) componente(s) para x_j^H, por forma a tentar obter uma solução com maior retorno, de modo a satisfazer a restrição (3.3a). Para o efeito, procura-se, de entre todas as componentes de

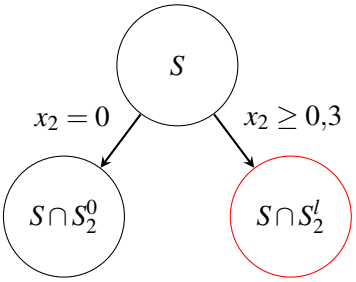
x^H diferentes de zero, qual é o respetivo índice que tem menor valor de μ que será denotado por i_{min}. Caso a solução tenha de pertencer ao conjunto $S^l_{i_{min}}$, então transferir-se-á apenas o suficiente de $x^H_{i_{min}}$ para x^H_j, para que $x^H_{i_{min}}$ continue a obedecer à restrição (3.6), isto é, $x^H_j = x^H_j + x^H_{i_{min}} - l_{i_{min}}$ e $x^H_{i_{min}} = l_{i_{min}}$. Se não, será transferido todo o valor da componente de índice i_{min} para x^H_j, ou seja, $x^H_j = x^H_j + x^H_{i_{min}}$ e $x^H_{i_{min}} = 0$. De seguida, verifica-se se esta solução x^H já é admissível. Se não for, este processo repete-se até que x^H seja admissível, desde que haja componentes para analisar.

No entanto, pode ainda obter-se uma solução heurística que não satisfaça a restrição do retorno mínimo esperado para a carteira, como acontece no exemplo seguinte. Nesse caso, devolve-se o valor de $+\infty$ para β.

Exemplo 3.4. Seja $\mu = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}1 & 1{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix}^T$ e $r = 0{,}35$. Para um nível mínimo de transação igual a 30% para todos ativos, pretende-se resolver o subproblema com região admissível correspondente ao nó da seguinte árvore binária assinalado a vermelho.

Ao resolver o problema quadrático respeitante à região admissível assinalada, obteve-se a solução $x = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}12 & 0{,}18 \end{bmatrix}^T$, cujo retorno esperado é 0,35.

Para determinar uma solução admissível para o problema com base na heurística 2, terá de se alterar as últimas duas entradas do vetor solução x tal como foi explicado anteriormente, dado que não satisfazem a restrição (3.6).



Desta forma, a solução heurística é dada por $x^H = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0 & 0{,}3 \end{bmatrix}^T$. Contudo, o retorno esperado desta carteira é inferior a 0,35, o que implica que se está perante uma solução inadmissível.

Como tal, desloca-se todo o peso do ativo 4 para o ativo 1, que, de entre as componentes da solução heurística diferentes de zero, é o que tem maior retorno esperado. Assim, a solução heurística será dada por $x^H = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Contudo, o retorno esperado continua a ser inferior a r e não é possível obter uma solução admissível devido à restrição $x_2 \geq l_2$ que impõe que o ativo 2 tenha uma participação de pelo menos 30% na carteira.

Relativamente ao exemplo anterior, note-se que se poderia colocar a questão de que, deslocando o peso do ativo 4 para o ativo 3, poderia obter-se uma solução admissível. Contudo, o modelo devolveu para o problema respeitante à sub-região admissível assinalada uma solução x com baixo peso no 3º título e, portanto, aumentar a sua participação na carteira poderia piorar o seu risco, pelo que esta solução não iria melhorar o valor de β^*.

Os passos referidos anteriormente são descritos no Algoritmo 3.5, referente à heurística 2, que tem como base a função corrigeRestrição6 esquematizada no Algoritmo 3.4.

Algoritmo 3.4 corrigeRestrição6

Entrada: Ω, x ▷ *Ω representa o nó da árvore binária correspondente ao subproblema a resolver e x representa o vetor solução encontrado no nó correspondente ao subproblema a ser analisado.*

Saída: x^H, I^0

1 **início**
2 $I \leftarrow \{1,...,n\}$;
3 $I^0 \leftarrow \{i \in I : \Omega \subseteq S_i^0\}$; ▷ *Índices que têm de satisfazer* $x_i = 0$
4 $I^x \leftarrow \{i \in I : 0 < x_i < l_i\}$; ▷ *Índices que não satisfazem a restrição (3.6)*
5 $\delta \leftarrow \sum_{i \notin I^x} x_i$;
6 **para** $i \in I^x$ **faz**
7 **se** $x_i < l_i/2$ **então**
8 $x_i^H \leftarrow 0$;
9 $I^0 \leftarrow I^0 \cup \{i\}$;
10 **senão**
11 **se** $\delta + l_i \leq 1$ **então**
12 $x_i^H \leftarrow l_i$;
13 $\delta \leftarrow \delta + l_i$;
14 **senão**
15 $x_i^H \leftarrow 0$;
16 $I^0 \leftarrow I^0 \cup \{i\}$;
17 **fim**
18 **fim**
19 **fim**
20 **se** $\delta < 1$ **então**
21 $\gamma \leftarrow 1 - \delta$;
22 $j \leftarrow argmax\{\mu_i : i \in I \backslash I^0\}$;
23 $x_j^H \leftarrow x_j^H + \gamma$;
24 **fim**
25 **fim**

Algoritmo 3.5 Heurística 2

Entrada: Ω, x ▷ *Ω representa a região admissível do subproblema a resolver e x representa o vetor solução encontrado no nó correspondente ao subproblema a ser analisado.*

Saída: x^H, β

1 **início** $I \leftarrow \{1,...,n\}$;
2 $I^l \leftarrow \left\{i \in I : \Omega \subseteq S_i^l\right\}$; ▷ *Índices que têm de satisfazer* $x_i \geq l_i$
3 $\left[x^H, I^0\right] \leftarrow$ corrigeRestrição6(Ω, x);
4 $J \leftarrow I \backslash I^0$;
5 $j \leftarrow argmax\{\mu_i : i \in J\}$;
6 **enquanto** $\mu^T x^H < r$ e $J \neq \emptyset$ **faz**
7 $i_{min} \leftarrow argmin\{\mu_i : i \in J\}$;
8 **se** $i_{min} \in I^l$ **então**
9 $x_j^H \leftarrow x_j^H + x_{i_{min}}^H - l_{i_{min}}$;

```
            x^H_{i_min} ← l_{i_min};
        senão
            x^H_j ← x^H_j + x^H_{i_min};
            x^H_{i_min} ← 0;
        fim
        J ← J\{i_min};
    fim
    se x^H ∈ Π então
        β ← f(x^H);
    senão
        β ← +∞;
    fim
fim
```

Note-se que no caso em que atualizamos o valor de β para $+\infty$, a solução heurística não vai ser considerada no problema.

3.1.2 Ajuste de matrizes de covariâncias

Como já foi referido anteriormente, e à semelhança do que acontecia com as matrizes de correlação, as matrizes de covariâncias Q são **simétricas** e **semidefinidas positivas**, isto é, satisfazem $Q = Q^T$ e $x^T Qx \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Contudo, quando são analisados dados reais, usam-se estimativas para estas matrizes, podendo afetar estas duas propriedades.

Como tal, terá de se ajustar ou corrigir a matriz estimada. Para isso, basta resolver o problema de otimização (2.7) mencionado na Subsecção 2.1.2, substituindo $\hat{P}$ por uma estimativa para a matriz das covariâncias $\hat{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e excluir a segunda restrição do problema, porque no caso das matrizes das covariâncias não se deverá impor que a sua diagonal principal seja constituída por uns.

3.2 Análise preliminar

Para explicitar de forma detalhada o algoritmo descrito anteriormente, resolve-se um problema de programação quadrático de ordem 4 em que Q é a matriz identidade, isto é, considera-se que os retornos dos ativos são independentes e que a variância dos retornos de cada ativo é igual a 1. Além disso, considera-se que os retornos individuais diários esperados de cada ativo são 0,2%, 0,5%, 1% e 0,1%, respetivamente, o retorno mínimo esperado da carteira é 0,7% e o nível mínimo de transação de todos os ativos é 20%, isto é, $\mu = \begin{bmatrix} 0{,}002 & 0{,}005 & 0{,}01 & 0{,}001 \end{bmatrix}^T$, $R = 0{,}007$ e $l = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix}^T$.

Apresenta-se uma tabela com as soluções encontradas na resolução do problema, onde x representa a solução da relaxação dos subproblemas obtida com $PQ(\Omega)$, em que Ω representa a região admissível, e x^H a solução heurística obtida com o Algoritmo 3.5. Assinalou-se a vermelho as componentes do vetor solução x que não satisfazem a restrição não linear (3.6). Os valores de β correspondem ao

valor da função objetivo da solução heurística correspondente à solução x da respetiva linha, enquanto que β^* corresponde ao melhor limite superior já obtido. As várias iterações do algoritmo estão esquematizadas do diagrama da Figura 3.2.

Iter.	x^T				$f(x)$	$(x^H)^T$				β	β^*
1	0,1224	0,2755	0,5306	0,0714	0,3776	0	0,2755	0,7245	0	0,6008	0,6008
2	0,1837	0,3061	0,5102	0	0,3878	0	0,3061	0,6939	0	0,5752	0,5752
3	0	0,5000	0,5000	0	0,5000		-			-	0,5000
4	0,2000	0,2800	0,5200	0	0,3888		-			-	0,3888
5	0,0122	0,2204	0,5673	0,2000	0,4106		-			-	0,3888

Tabela 3.1: Soluções obtidas nas diferentes iterações.

Na **1ª iteração** resolveu-se o problema quadrático respeitante à região admissível S e constatou-se que há duas entradas da solução ótima que não satisfazem a restrição (3.6): a primeira e a quarta. Portanto, como $f(x) < \beta^*$, procede-se à primeira ramificação da árvore de pesquisa, adicionando os ramos correspondentes às restrições $x_4 = 0$ e $x_4 \geq l_4$. Antes de se passar ao primeiro subproblema, determinou-se uma solução heurística obtida com a função Heuristica2, a qual coloca a componente x_4^H igual a zero (porque $x_4 < \frac{l_4}{2}$) e tenta colocar a componente x_1^H igual a l_1 (porque $x_1 \geq \frac{l_1}{2}$). Contudo, nesse caso, a soma das componentes de x^H será maior do que 1, pelo que a heurística atribui o valor zero a x_1^H e coloca o remanescente em x_3^H (dado que é a variável disponível com maior retorno esperado). O valor da função objetivo associado a esta solução é $\beta = 0{,}6008$. Trivialmente, como este valor é inferior a $+\infty$, atualiza-se o valor de β^* para 0,6008.

Na **2ª iteração**, ao resolver o problema quadrático com região admissível $S \cap S_4^0$, verificou-se que o valor da primeira entrada do vetor x é inferior a 0,2. Visto que $f(x) < \beta^*$, pode proceder-se à subdivisão da árvore a partir deste nó e resolver o primeiro subproblema, onde se acrescenta a restrição $x_1 = 0$ e cuja região admissível é dada por $S \cap S_4^0 \cap S_1^0$. Como $f(x) < \beta^*$ e a solução x não é admissível, calculou-se ainda a solução heurística correspondente a x, que tenta colocar x_1^H igual a l_1 (porque $x_1 \geq \frac{l_1}{2}$) mas não consegue. Deste modo, o valor de x_1^H toma o valor nulo e o remanescente é novamente adicionado em x_3^H. Esta solução permite atualizar β^* para 0,5752, como se pode constatar na Tabela 3.1.

Analisando a solução obtida na **3ª iteração** constata-se que todas as componentes do vetor ótimo satisfazem (3.6) e, como $f(x) < \beta^*$, atualiza-se x^* para x, pois corresponde à melhor solução até agora encontrada para o problema com região admissível Π. Atualiza-se ainda o valor de β^* para $f(x)$. Como se determinou uma solução admissível para o problema, não há necessidade de calcular uma solução heurística nem de continuar a pesquisa nesse ramo. Como tal, passa-se ao próximo nó da árvore binária, cuja região admissível é dada por $S \cap S_4^0 \cap S_1^l$.

Mais uma vez, na **4ª iteração**, obtive-se uma nova solução admissível para o problema pretendido e dado que $f(x) < \beta^*$, tem-se que $x^* = x$ e $\beta^* = f(x)$. À semelhança do que acontecia anteriormente, não há necessidade de construir uma solução heurística e, portanto, pode passar-se ao nó seguinte da árvore binária, correspondente ao subproblema com região admissível $S \cap S_4^l$.

Ao observar a solução obtida na **5ª iteração** verifica-se que a primeira entrada de x é inferior a 0,2. Contudo, tendo em conta que $f(x) > \beta^*$, não compensa prosseguir com a ramificação da árvore,

uma vez que, à medida que se acrescentam mais restrições, o valor da função objetivo mantém-se igual ou vai aumentando. Além disso, também não compensa determinar uma solução heurística nesta iteração pois o seu valor é, garantidamente, maior ou igual a $f(x)$.

Terminado o algoritmo, a melhor solução encontrada foi $x^* = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}28 & 0{,}52 & 0 \end{bmatrix}^T$, cujo valor ótimo é dado por $\beta^* = 0{,}3888$.

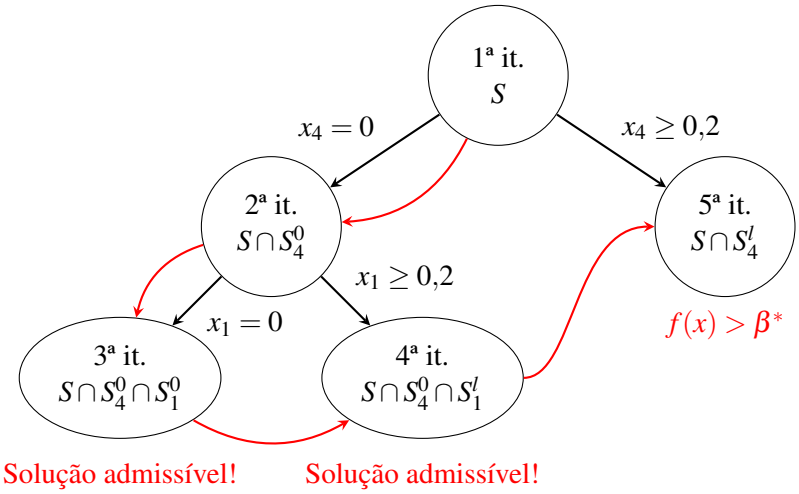


Figura 3.2: Árvore binária correspondente ao problema apresentado.

3.3 Análise de dados reais

Para analisar o algoritmo *Branch-and-Bound* desenvolvido neste capítulo, utilizou-se a mesma amostra apresentada na Secção 2.3. Note-se que os diferentes problemas quadráticos foram resolvidos através do *solver* `quadprog` do MATLAB.

Na Tabela 3.2 apresenta-se as estimativas para a média e desvio padrão dos retornos diários dos títulos presentes na amostra.

Para a constituição da carteira, foram escolhidos os ativos que minimizam o risco, independentemente do seu retorno. Relembra-se ainda que o risco é calculado como sendo a variância do retorno da carteira, $x^T Qx$, e não a soma ponderada das variâncias dos ativos, pelo que uma analise da Tabela 3.2 não será suficiente, sendo necessário recorrer à matriz das covariâncias.

3.3.1 Variação do número de ativos em estudo – *n*

A inclusão de mais ativos num determinado conjunto de títulos financeiros já existente, permite expandir a região admissível do problema inicial e, portanto, o valor ótimo da função objetivo irá manter-se ou melhorar. Desta forma, varia-se o número de ativos em estudo (5, 10 e 15 ativos) para avaliar o seu impacto no valor ótimo na função objetivo, para um retorno diário mínimo esperado r fixo e para um nível mínimo de transação de 15% para todos os ativos. As Tabelas 3.3 a 3.5 apresentam a constituição das carteiras ótimas, assim como o valor do risco e do seu retorno esperado, em função do retorno mínimo r considerado.

Ativos	$\hat{\mu}/10^{-4}$	$\hat{\sigma}$
Altri	7,1618	0,0250
BCP	-37,9665	0,0442
BPI	11,7836	0,0264
CTT	-11,7567	0,0188
EDP	0,9939	0,0179
EDP Renováveis	8,5321	0,0150
Galp	16,0069	0,0222
Jerónimo Martins	8,9497	0,0179
Mota-Engil	-3,4285	0,0323
NOS	-3,9008	0,0172
Pharol	2,8712	0,0526
Portucel	-0,1654	0,0201
REN	1,0932	0,0128
Semapa	-0,2068	0,0191
Sonae	-14,0228	0,0215

Tabela 3.2: Estimativas para a média e desvio padrão dos retornos diários de cada ativo no período 01/09/2015–31/08/2016.

Ativos \ $r/10^{-4}$	3	6	9	12	15
Altri	0,1665	0,2116	0,2521	-	-
BCP	0	0	0	-	-
BPI	0,2681	0,3430	0,5979	-	-
CTT	0,1500	0	0	-	-
EDP	0,4154	0,4454	0,1500	-	-
Risco ($/10^{-4}$)	$2,5137$	$2,8565$	$4,0375$	-	-
Retorno esperado ($/10^{-4}$)	$3,0000$	$6,0000$	$9,0000$	-	-

Tabela 3.3: Carteiras obtidas a partir de um conjunto constituído por 5 ativos, para vários níveis mínimos de retorno esperado, e respetivo nível de risco associado.

Note-se que, quando consideramos apenas os primeiros cinco ativos apresentados na Tabela 3.2 no problema, apenas é possível obter uma solução para $r \leq 11,7836 \times 10^{-4}$ (confrontar com a Tabela 3.3), porque todos os ativos têm um retorno esperado inferior ou igual a esse valor.

Examinando a Tabela 3.3, constata-se que as ações do BCP nunca são incluídas nas carteiras, porque, para além de apresentarem um retorno esperado muito negativo (o que pode inviabilizar a admissibilidade da solução), têm um risco bastante elevado. Ora, incluir as ações do BCP no portefólio ótimo (com uma participação mínima de 15%), obriga a que o resto do portefólio tenha um retorno esperado total de, pelo menos, $10,2294 \times 10^{-4}$. Por forma a satisfazer a restrição de retorno mínimo, isto implicaria um grande investimento nas ações do BPI, cujos retornos apresentam um risco elevado e um nível de covariância significativo com os retornos das ações no BCP (o que piora o valor da função objetivo). Repare-se ainda que para $r = 3 \times 10^{-4}$, se selecionou as ações dos CTT para o portefólio, apesar de o seu retorno esperado ser negativo. Contudo, analisando a matriz das correlações

Ativos \ $r/10^{-4}$	3	6	9	12	15
Altri	0	0	0	0	0
BCP	0	0	0	0	0
BPI	0,1500	0,1500	0,1500	0,1505	0,2384
CTT	0,1502	0	0	0	0
EDP	0	0	0	0	0
EDP Renováveis	0,3354	0,3860	0,5403	0,2579	0
Galp	0	0	0	0,3870	0,7616
Jerónimo Martins	0,1856	0,2267	0,3097	0,2046	0
Mota-Engil	0	0	0	0	0
NOS	0,1788	0,2373	0	0	0
Risco ($/10^{-4}$)	$1,7339$	$1,7658$	$1,8807$	$2,2675$	$3,9466$
Retorno esperado ($/10^{-4}$)	$3,8263$	$6,1643$	$9,1492$	$12,0000$	$15,0000$

Tabela 3.4: Carteiras obtidas a partir de um conjunto constituído por 10 ativos, para vários níveis mínimos de retorno esperado, e respetivo nível de risco associado.

Ativos \ $r/10^{-4}$	3	6	9	12	15
Altri	0	0	0	0	0
BCP	0	0	0	0	0
BPI	0	0	0,1501	0,1504	0,2384
CTT	0	0	0	0	0
EDP	0	0	0	0	0
EDP Renováveis	0,1915	0,1909	0,2672	0,2579	0
Galp	0	0,1500	0,1789	0,3871	0,7616
Jerónimo Martins	0,1573	0,1592	0,2095	0,2046	0
Mota-Engil	0	0	0	0	0
NOS	0,1502	0	0	0	0
Pharol	0	0	0	0	0
Portucel	0	0	0	0	0
REN	0,5010	0,4999	0,1942	0	0
Semapa	0	0	0	0	0
Sonae	0	0	0	0	0
Risco ($/10^{-4}$)	$1,3350$	$1,3755$	$1,6592$	$2,2675$	$3,9466$
Retorno esperado ($/10^{-4}$)	$3,0030$	$6,0006$	$9,0000$	$12,0000$	$15,0000$

Tabela 3.5: Carteiras obtidas a partir de um conjunto constituído por 15 ativos, para vários níveis mínimos de retorno esperado, e respetivo nível de risco associado.

(ver (2.15)), verificou-se que as ações dos CTT, comparadas às ações da EDP por exemplo (que têm maior retorno esperado e menor risco), estão menos correlacionadas com os restantes ativos. Como foi referido anteriormente, o modelo de Markowitz evita selecionar ativos para a carteira que estejam demasiado correlacionados positivamente e a questão do retorno negativo não será um problema uma vez que será compensado com o retorno dos restantes constituintes do portefólio (até um certo valor

de r). Além disso, com o aumento de r, a carteira tende a favorecer os ativos com maior retorno esperado para satisfazer a restrição $\mu^T x \geq r$. Este comportamento é análogo nas Tabelas 3.4 e 3.5.

Ao incluir mais ativos no problema (por exemplo, comparar a Tabela 3.3 com a Tabela 3.4), os constituintes do portefólio podem manter-se ou ser substituídos por outros. Isto acontece porque se pode estar a considerar novas ações com um menor risco e/ou com uma menor covariância entre os retornos dos ativos.

Analisando as Tabelas 3.3 a 3.5, observa-se que, quando o número de ativos é fixo, o risco aumenta com o nível mínimo de retorno esperado exigido. Além disso, a evolução dos resultados nessas tabelas, para cada valor de r fixo, permite observar que o risco se mantém igual ou diminui, o que vai ao encontro do que foi referido anteriormente.

No algoritmo desenvolvido, utilizou-se as três heurísticas descritas na Subsecção 3.1.1, por forma a analisar a eficiência das heurísticas 1 e 2 comparando o número de iterações.

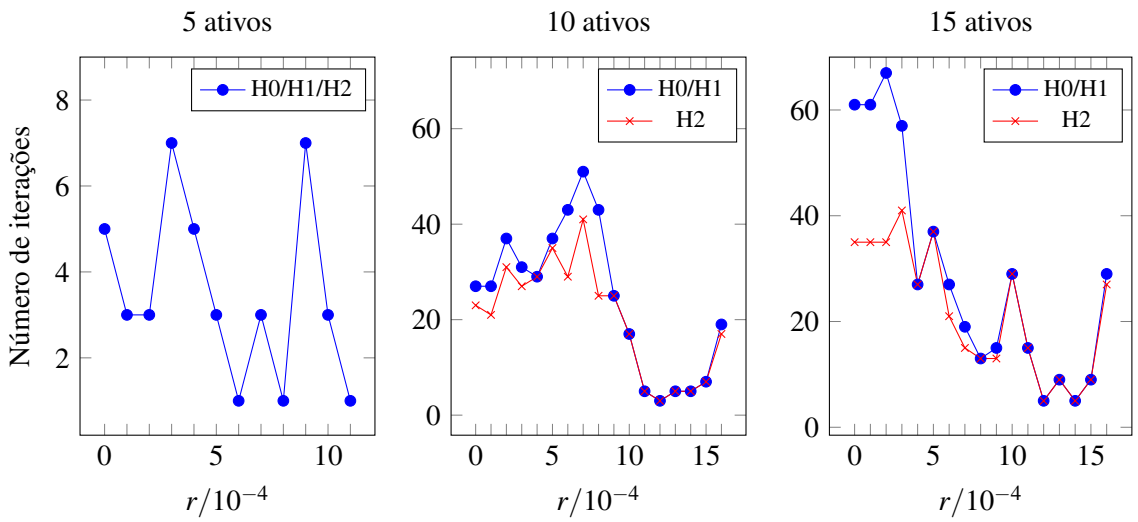


Figura 3.3: Número de iterações do algoritmo para cada heurística tendo em conta o número de ativos incluídos no problema.

Seria de esperar que tanto a heurística 1 como a heurística 2 se revelassem mais eficientes relativamente à heurística 0, uma vez que neste caso não estamos a tentar determinar uma solução admissível para os vários subproblemas em cada iteração através de uma heurística. Contudo, analisando os gráficos da Figura 3.3, verifica-se que usando as heurísticas 0 e 1 obteve-se sempre o mesmo número de iterações, o que significa que o valor da solução obtida com a heurística 1 teve, em geral, sempre valores piores do que a solução encontrada na relaxação do problema. Além disso, para $n = 5$, a relaxação do problema encontrou soluções admissíveis após poucas ramificações, fazendo com que o número de iterações fosse muito baixo. Nos casos em que são considerados 10 e 15 ativos no problema, a heurística 2 mostrou-se mais vantajosa para alguns valores de r, visto que o algoritmo necessitou de menos iterações para encontrar a solução ótima.

Geralmente, o número de iterações aumenta à medida que se consideram mais ativos, pois aumenta a dimensão do problema. Além disso, modelo de Markowitz tende a diversificar a carteira de investimento no sentido de minimizar o risco e, por isso, as soluções da relaxação do problema

tendem a falhar a restrição (3.6). Consequentemente, será necessário proceder a algumas ramificações da árvore correspondente, o que implica um maior número de iterações. Esta situação acentua-se com o aumento do número de ativos no problema, pois poderão existir mais ativos que podem fazer parte da solução. Deste modo, pode obter-se uma carteira mais diversificada, o que implica um maior número de variáveis que não satisfazem a restrição (3.6).

Note-se que a trajetória do número de iterações variando o número de ativos tem um comportamento semelhante. Para valores baixos de r, o algoritmo necessitou de um número de iterações elevado, uma vez que, dado o baixo nível de retorno mínimo exigido, o modelo se foca na minimização do risco. Isto conduz a uma maior diversificação da carteira e, consequentemente, a um maior número de iterações. Para valores de r próximos de 10×10^{-4} verificou-se um decréscimo do número de iterações, uma vez que as ações com retorno esperado reduzido deixam de poder ser incluídas, pois, caso contrário, obrigariam ao investimento em ativos com elevados retornos e, consequentemente, elevado risco. Por exemplo, a inclusão da EDP (com uma participação mínima de 15%) obriga a que o resto do portefólio tenha um retorno esperado de pelo menos $11,5893 \times 10^{-4}$, pelo que se consideraria principalmente as ações do BPI e Galp (ambas com elevado risco). Deste modo, grande parte dos títulos são "ignorados" e, portanto, o problema relaxado encontra soluções admissíveis mais rapidamente, conduzindo a uma diminuição significativa do número de iterações. Para valores mais elevados de r, verifica-se novamente um aumento do número de iterações. Ora, os portefólios passarão a incluir as ações da Galp. Contudo, a carteira ótima pode ainda incluir outros títulos com uma posição mais reduzida e, consequentemente, poderá não satisfazer a restrição (3.6), o que leva a uma aumento do número de iterações.

3.3.2 Variação do nível mínimo de transação – l

Nesta subsecção analisa-se a influência do nível mínimo de transação na solução ótima, admitindo que se consideram apenas os dez primeiros ativos disponíveis no problema. Para o efeito, considera-se que, caso tenham uma posição positiva na carteira, todos os ativos têm o mesmo nível mínimo de transação, isto é, todas as componentes de l são iguais. Como tal, para o retorno diário esperado da carteira r fixo, façamos variar este nível (10%, 20% e 30%) para avaliar a sua influência no risco da carteira. As Tabelas 3.6 a 3.8 apresentam a constituição da carteira ótima, assim como o valor do risco e do seu retorno, em função do retorno mínimo r considerado.

Analisando as Tabelas 3.6 a 3.8, constata-se que, mais uma vez, o modelo selecionou ativos com retorno esperado negativo para valores baixos de r: CTT e NOS. Como já foi referido anteriormente, isto deve-se ao facto de os retornos destes ativos terem um risco reduzido e baixa covariância com os retornos dos restantes títulos. Tal como acontecia no caso da variação do número de ativos na carteira, para valores mais elevados de r este modelo tende a selecionar para a carteira os ativos com maior retorno, pelo que os títulos com retornos esperados negativos tendem a deixar de fazer parte dos portefólios. Deste modo, verifica-se também que quanto maior for o nível de transação l, mais rapidamente deixam de fazer parte da solução ótima.

O risco aumenta com o aumento do valor de r e do nível mínimo de transação l, uma vez que, em ambos os casos, se restringe a região admissível.

Ativos \ $r/10^{-4}$	3	6	9	12	15
Altri	0	0	0	0	0
BCP	0	0	0	0	0
BPI	0,1000	0,1000	0,1019	0,1274	0,2384
CTT	0,1203	0,1000	0	0	0
EDP	0	0	0	0	0
EDP Renováveis	0,3190	0,3670	0,3925	0,2699	0
Galp	0,1000	0,1005	0,1724	0,3970	0,7616
Jerónimo Martins	0,1686	0,1988	0,2329	0,2056	0
Mota-Engil	0	0	0	0	0
NOS	0,1920	0,1337	0,1003	0	0
Risco ($/10^{-4}$)	$1,6980$	$1,7081$	$1,8080$	$2,2642$	$3,9466$
Retorno esperado ($/10^{-4}$)	$4,8458$	$6,0000$	$9,0014$	$12,0000$	$15,0000$

Tabela 3.6: Carteiras obtidas, com nível mínimo de transação de 10% para todos os ativos, e respetivo nível de risco associado.

Ativos \ $r/10^{-4}$	3	6	9	12	15
Altri	0	0	0	0	0
BCP	0	0	0	0	0
BPI	0	0,2000	0,2000	0,2000	0,2384
CTT	0,2000	0	0	0	0
EDP	0	0	0	0	0
EDP Renováveis	0,2000	0,3471	0,4991	0,2320	0
Galp	0,2000	0	0	0,3656	0,7616
Jerónimo Martins	0,2000	0,2191	0,3009	0,2024	0
Mota-Engil	0	0	0	0	0
NOS	0,2000	0,2338	0	0	0
Risco ($/10^{-4}$)	$1,7987$	$1,8128$	$1,9241$	$2,2966$	$3,9466$
Retorno esperado ($/10^{-4}$)	$3,5662$	$6,3675$	$9,3080$	$12,0000$	$15,0000$

Tabela 3.7: Carteiras obtidas, com nível mínimo de transação de 20% para todos os ativos, e respetivo nível de risco associado.

Note-se que para um dado valor de r fixo, quando varia o nível mínimo de transação, há carteiras que podem manter a sua constituição, como acontece, por exemplo, para $r = 15 \times 10^{-4}$ e variando o valor de l entre 10 e 20%. Isto deve-se ao facto de que, no primeiro caso, o modelo devolve uma solução cujas componentes são todas superiores a 20%.

À semelhança do estudo que foi feito na subsecção anterior, pretende-se examinar o número de iterações quando é utilizada cada uma das heurísticas, apresentando-se na Figura 3.4 as trajetórias do número de iterações do problema para os diferentes níveis mínimos de transação, fazendo variar o valor do retorno mínimo exigido r.

Ativos \ $r/10^{-4}$	3	6	9	12	15
Altri	0	0	0	0	0
BCP	0	0	0	0	0
BPI	0	0	0	0	0
CTT	0	0	0	0	0
EDP	0	0	0	0	0
EDP Renováveis	0,3998	0,6635	0,4000	0,5360	0
Galp	0	0	0,3000	0,4640	1
Jerónimo Martins	0,3001	0,3365	0,3000	0	0
Mota-Engil	0	0	0	0	0
NOS	0,3001	0	0	0	0
Risco ($/10^{-4}$)	$1,8333$	$1,9404$	$2,0607$	$2,4875$	$4,9287$
Retorno esperado ($/10^{-4}$)	$4,9260$	$8,6716$	$10,8998$	$12,0000$	$16,0069$

Tabela 3.8: Carteiras obtidas, com nível mínimo de transação de 30% para todos os ativos, e respetivo nível de risco associado.

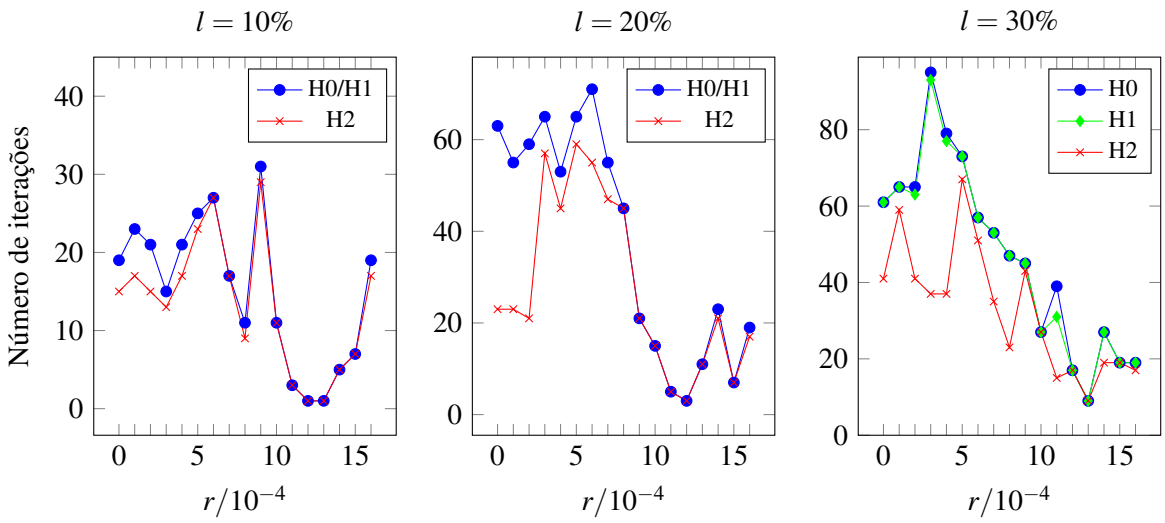


Figura 3.4: Número de iterações utilizando cada uma das heurística tendo em conta o nível mínimo de transação l.

Analisando a Figura 3.4, verifica-se que em certos casos, utilizando a heurística 2, o modelo determinou a solução ótima em menos iterações e, ao contrário do que acontecia na subsecção anterior, a heurística 1 revelou-se ligeiramente mais vantajosa do que a heurística 0 no caso em que fixámos o nível mínimo de transação em 30%. Contudo, a diferença de iterações não foi muito significativa, pois raramente conseguiu melhorar o valor de β^*.

Relembra-se que o modelo de Markowitz tende a diversificar a carteira no sentido de minimizar o risco e, por isso, as soluções tendem a falhar a restrição (3.6). Desta forma, será necessário fazer algumas ramificações da árvore de pesquisa, o que se traduz num maior número de iterações. Esta situação acentua-se com o aumento do nível mínimo de transação (dado que a região de

inadmissibilidade é maior) e, consequentemente, aumenta o número de variáveis que não satisfazem esta restrição.

À semelhança do que acontecia anteriormente, para valores baixos de r, o número de iterações é elevado porque, devido ao baixo valor do retorno mínimo exigido, o modelo foca-se na minimização do risco através da diversificação da carteira. Para valores próximos de 10×10^{-4}, verifica-se um decréscimo no número de iterações, uma vez que os ativos com retornos muito baixos deixam de ser considerados no problema. Para valores mais elevados de r, a carteira terá de ter na sua constituição obrigatoriamente ações da Galp. Contudo, a solução do problema relaxado poderá ainda incluir outros ativos, no sentido de minimizar o risco. Porém, esses títulos terão uma posição mais reduzida no portefólio que pode não satisfazer o nível mínimo de transação, o que leva a um aumento do número de iterações.

3.3.3 Desempenho das carteiras obtidas

Suponha-se que foram adquiridas as carteiras indicadas nas tabelas da Subsecção 3.3.1 no dia 01/09/2016. Com o objetivo de analisar o comportamento dos retornos relativos destes portefólios nos quatro meses posteriores à sua aquisição, extraíram-se os dados históricos das cotações diárias dos mesmos ativos no período entre **01/09/2016** e **30/12/2016**, correspondentes a 85 observações.

O cálculo dos retornos diários de um determinado portefólio P é efetuado de forma análoga ao cálculo dos retornos diários de cada ativo, correspondente à fórmula (2.12). Contudo, para este efeito, consideramos as cotações da carteira que serão denotadas por c_t^P e cuja expressão é dada por

$$c_t^P = \sum_{i=1}^{n} x_i c_{it}, \quad t \in \{0, 1, \ldots, T\}. \tag{3.11}$$

Apresenta-se nas Figuras 3.5 a 3.7 os gráficos que contêm a evolução das rentabilidades diárias das carteiras mencionadas nas Tabelas 3.3 a 3.5, respetivamente.

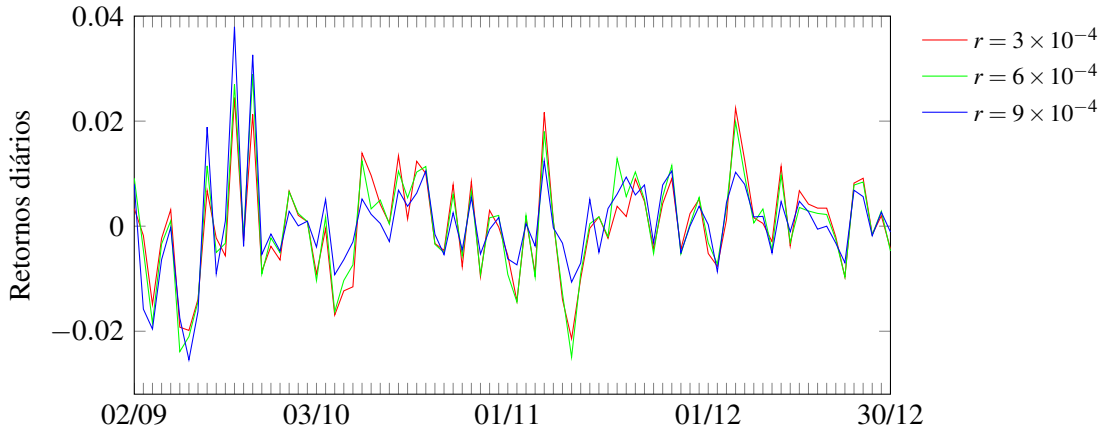


Figura 3.5: Retornos diários das carteiras especificadas na Tabela 3.3.

Tal como foi referido anteriormente, há determinados fatores externos que podem influenciar as cotações dos ativos e, consequentemente, podem reproduzir resultados que não estavam de acordo com

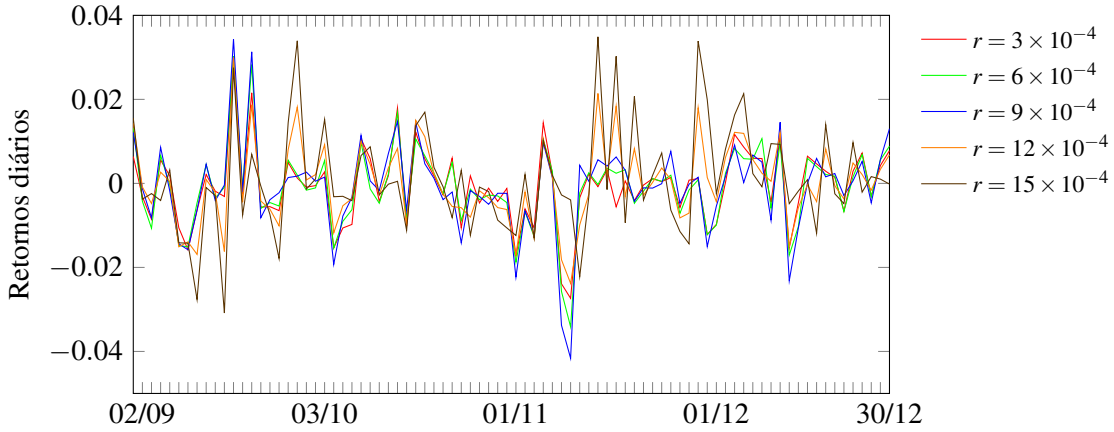


Figura 3.6: Retornos diários das carteiras especificadas na Tabela 3.4.

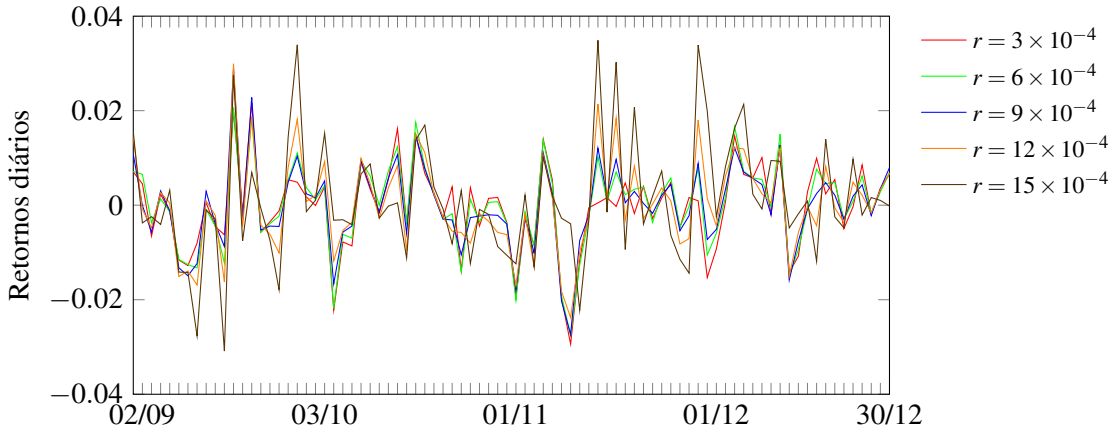


Figura 3.7: Retornos diários das carteiras especificadas na Tabela 3.5.

as expetativas dos investidores. Como tal, destaca-se os seguintes acontecimentos que condicionaram os preços dos ativos.

- **6 a 21 de setembro:** A reunião com os acionistas do BPI marcada para o dia 6 de setembro foi adiada para o dia 21 no mesmo mês. A alteração da assembleia-geral gerou uma grande instabilidade na cotação das ações até à nova data agendada porque esta já tinha sido adiada em julho, o que suscitou alguma incerteza relativamente ao futuro [15]. Esta instabilidade repercutiu-se nos desempenhos das várias carteiras devido ao peso deste ativo na constituição das mesmas, sobretudo no portefólio correspondente ao retorno mínimo esperado de 9×10^{-4} (assinalada a azul) da Figura 3.5, já que o seu peso é de aproximadamente 60%.

- **16 de setembro:** Um dos principais acionistas de referência da Galp, Américo Amorim, reduziu a sua posição, o que poderá estar na origem da queda da cotação destas ações [9]. Estas oscilações aliadas à instabilidade das ações do BPI refletiram-se no desempenho das carteiras associadas ao retorno mínimo esperado de 12×10^{-4} e 15×10^{-4} (cujas trajetórias dos retornos estão assinaladas a laranja e castanho, respetivamente) nas Figuras 3.6 e 3.7, tendo as suas cotações atingido uma queda de cerca de 2 e 3%, respetivamente.

- **8 de novembro:** A vitória de Donald Trump nas eleições presidenciais dos Estados Unidos da América poderá ter influenciado o preço das ações da EDP Renováveis, dado que este afirmou, durante a sua campanha, que pretendia dar prioridade aos combustíveis fósseis [4]. A exposição desta empresa ao mercado americano, com cerca de metade da sua capacidade de produção instalada neste país, justifica a grande queda da cotação destes títulos, principalmente, nos dois dias subsequentes a este acontecimento [10]. Por este motivo, a carteira correspondente ao retorno mínimo esperado de 9×10^{-4} (a azul), representada na Figura 3.6, apresentou uma queda entre o dia 8 e o dia 10 de novembro. Apesar de a EDP Renováveis fazer parte da constituição de outras carteiras, as perdas foram menos significativas porque este título tinha menos peso nos referidos portefólios.

- **14 de novembro:** O aumento significativo do preço do petróleo a partir de meados de novembro nos mercados internacionais [2] pode justificar a valorização das ações da Galp, dada a influência que exerce sobre a cotação deste ativo. Por esta razão, verificou-se uma subida nos retornos das carteiras com posição neste título, mais precisamente nos portefólios com retorno mínimo esperado de 12×10^{-4} e 15×10^{-4} (a laranja e castanho) nas Figuras 3.6 e 3.7.

De seguida, pretende-se analisar qual é o retorno relativo de cada carteira P no instante t relativamente à data da sua aquisição. Denote-se então por c_0^P a sua cotação em 01/09/2016. Deste modo, a valorização da carteira P no t-ésimo dia após a sua compra é dada por

$$v_t^P = \frac{c_t^P - c_0^P}{c_0^P}, \quad t \in \{1, ..., T\}. \tag{3.12}$$

Como tal, apresenta-se nas Figuras 3.8 a 3.10 os gráficos que contêm a valorização das carteiras mencionadas nas Tabelas 3.3 a 3.5, respetivamente, durante o período em estudo relativamente ao dia 01/09/2016.

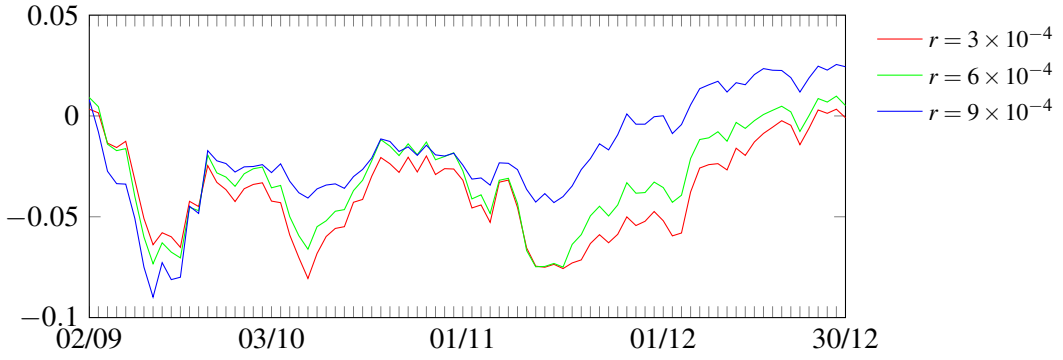


Figura 3.8: Valorização das carteiras da Tabela 3.3 relativamente ao dia 01/09/2016.

Analisando as Figuras 3.8 a 3.10 verificou-se um comportamento semelhante em todas as carteiras, isto é, inicialmente houve um prejuízo relativamente à data de aquisição das carteiras, tendo-se verificado uma recuperação a partir de meados de setembro. Mais tarde, devido aos resultados das eleições americanas, as carteiras voltaram a desvalorizar, tendo recuperado logo de seguida e mantendo uma tendência de subida até ao final de dezembro.

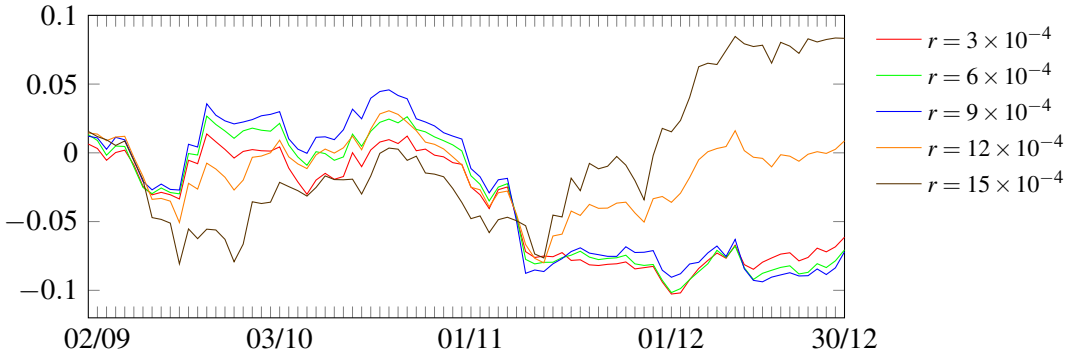


Figura 3.9: Valorização das carteiras da Tabela 3.4 relativamente ao dia 01/09/2016.

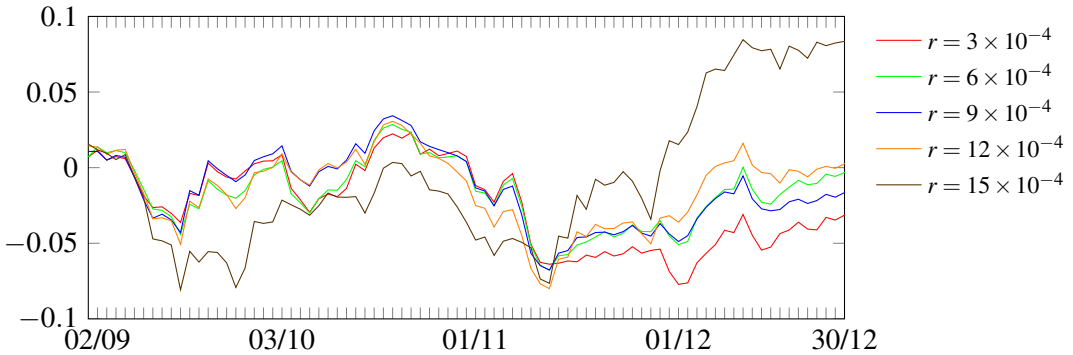


Figura 3.10: Valorização das carteiras da Tabela 3.5 relativamente ao dia 01/09/2016.

Nos períodos mencionados anteriormente, em que determinados acontecimentos influenciaram a cotação das ações, algumas carteiras chegaram a ter desvalorizações de cerca de 10%. Contudo, o facto de alguns ativos se terem mantido estáveis possibilitou que alguns portefólios atingissem valorizações de cerca de 9%. Note-se que as carteiras que possibilitaram mais ganhos foram as que se obtiveram tendo em conta um conjunto inicial de 15 ativos, o que seria expectável dado que se selecionou os ativos com melhor desempenho no passado e com uma correlação menor com os restantes constituintes dos portefólios.

Dado que se estudou sempre o mesmo conjunto de ativos, esta análise será análoga para as carteiras indicadas na Subsecção 3.3.2.

Capítulo 4

Conclusão

Neste trabalho foi analisado o problema da construção de um índice de fundos e a otimização de portefólios com um nível mínimo de transação. Estes problemas foram resolvidos utilizando o método *Branch-and-Bound*, o qual foi implementado em MATLAB. Para melhorar o desempenho deste algoritmo, foram desenvolvidas heurísticas que permitem eliminar parte da árvore de pesquisa. Além do estudo teórico de cada um dos problemas, foi feito um estudo computacional com dados reais e uma análise detalhada dos resultados obtidos.

Na literatura é frequentemente mencionado que na presença de dois ativos (ou portefólios) com o mesmo nível de retorno deve escolher-se aquele que tem menor risco. De modo análogo, tendo dois ativos (ou portefólios) com o mesmo risco, tem-se preferência pelo que apresentar um maior nível de retorno esperado. Por outro lado, espera-se que os ativos constituintes das carteiras estejam o menos correlacionados possível, de modo a evitar perdas maiores. De facto, os resultados empíricos apresentados nesta dissertação corroboram estas ideias, uma vez que os modelos tendem a colocar na constituição dos portefólios ativos pouco correlacionados e, no caso do problema de otimização de carteiras com um nível mínimo de transação (Capítulo 3), a solução ótima é constituída pelos ativos com melhor relação média-variância (de entre os menos correlacionados).

No problema da construção de um índice de fundos, uma vez que as variáveis envolvidas eram de natureza inteira, o algoritmo necessitou de um número reduzido de iterações para determinar uma solução ótima. Além disso, verificou-se que a semelhança entre os ativos no índice de fundos e seus representados é tanto maior quanto mais ativos forem incluídos no problema (n) e quanto mais ativos forem considerados no índice de fundos (q). Importa também realçar que no período pós-análise foi analisado o *tracking error* entre o índice de fundos e o respetivo índice de mercado, no qual se constatou que este valor melhora com o aumento de q.

Relativamente ao problema de seleção de carteiras com nível mínimo de transação, constatou-se que o risco dos portefólios aumenta com o retorno mínimo esperado exigido r e com o nível mínimo de transação l. Por outro lado, diminui com o aumento de n. Verificou-se ainda que uma das heurísticas desenvolvidas permitiu uma redução significativa do número de iterações realizadas pelo algoritmo. Além disso, na análise das carteiras ótimas no período pós-análise, foi possível observar que o retorno foi bastante inferior ao esperado devido ao impacto de fatores económicos nas cotações dos ativos.

Contudo, no último mês, em que não houve alterações significativas nos níveis de retorno diário, verificou-se uma recuperação da valorização das carteiras.

Os modelos desenvolvidos ao longo deste trabalho apresentam algumas limitações. De entre as quais destaca-se o facto de se ter considerado que os ativos são infinitamente divisíveis, ou seja, que se pode adquirir k_i unidades do ativo i com k_i não necessariamente inteiro. Como tal, para que seja possível que estes modelos sejam aplicados em termos práticos, teriam de ser adaptados no sentido em que deveriam produzir soluções que nos permitissem comprar apenas unidades inteiras de todos os constituintes da carteira. Este problema pode ser ultrapassado considerando novamente o algoritmo *Branch-and-Bound*.

Bibliografia

[1] Clarke, R. G., Krase, S., and Statman, M. (1994). Tracking errors, regret, and tactical asset allocation. *The Journal of Portfolio Management, volume 20, no. 3*, pages 16–24.

[2] EuroInvestor (2017). Brent oil. http://www.euroinvestor.com/exchanges/gtis-energy/brent-oil/2327059. Conferido em 28/02/2017.

[3] Euronext (2016). PSI20 – Market Information. http://www.bolsadelisboa.com.pt/products/indices/PTING0200002-XLIS/market-information. Conferido em 13/01/2017.

[4] Expresso (2016). EDP Renováveis perde 300 milhões em bolsa após vitória de Trump. http://expresso.sapo.pt/economia/2016-11-09-EDP-Renovaveis-perde-300-milhoes-em-bolsa-apos-vitoria-de-Trump. Conferido em 22/02/2017.

[5] Ferri, R. A. (2002). *All About Ined Funds: The Easy Way to Get Started*. McGraw-Hill.

[6] Fisher, I. (1906). *The Nature of Capital and Income*. Macmillan, New York.

[7] Frank J. Fabozzi, H. M. M. (2011). *The Theory and Practice of Investment Management*. John Wiley & Sons.

[8] G. Cornuejols, R. T. (2006). *Optimization Methods in Finance*. Cambridge University Press, Cambridge.

[9] JN (2016a). Galp afunda quase 5% após Amorim energia reduzir posição. http://www.jornaldenegocios.pt/mercados/bolsa/detalhe/galp_afunda_quase_5_apos_amorim_energia_reduzir_posicao. Conferido em 22/02/2017.

[10] JN (2016b). Vitória de Trump tira quase 500 milhões à EDP Renováveis. http://www.jornaldenegocios.pt/mercados/bolsa/detalhe/vitoria-de-trump-tira-quase-500-milhoes-a-edp-renovaveis. Conferido em 21/02/2017.

[11] Kritzman, M. P. (1987). Incentive fees: Some problems and some solutions. *Financial Analysts Journal*, pages 21–26.

[12] Markowitz, H. M. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Yale University Press, London.

[13] Marschak, J. (1938). *Money and the Theory of Assets*. Macmillan, New York.

[14] Michaud, R. O. and Michaud, R. O. (2008). *Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*. Oxford University Press.

[15] Observador (2016). Assembleia do BPI (novamente) suspensa. Há "intranquilidade" no banco. http://observador.pt/2016/09/06/cmvm-suspende-negociacao-de-acoes-do-bpi/. Conferido em 22/02/2017.

[16] R. Mansini, W. Ogryczak, M. G. S. (2015). Linear and Mixed Integer Programming for Portfolio Optimization.

[17] Toh, K.-C., Todd, M. J., and Tutuncu, R. H. (2010). On the implementation and usage of SDPT3 - a MATLAB software package for semidefinite-quadratic-linear programming, version 4.0.

[18] Vicente, L. N. (2015). *Introdução à Matemática Financeira*. Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.