



Ana Luísa Antunes Diogo

VIGAS MISTAS MADEIRA-BETÃO: MODELAÇÃO E ANÁLISE LINEAR

TIMBER-CONCRETE COMPOSITE BEAMS: MODELLING AND LINEAR ANALYSIS

Dissertação de Mestrado Integrado em Engenharia Civil, na área de Especialização em Estruturas,
orientada pelo Professor Doutor Anísio Alberto Martinho de Andrade e pelo Professor Doutor Paulo Manuel Mendes Pinheiro Providência e Costa

Coimbra, 8 de Setembro de 2017



UNIVERSIDADE DE COIMBRA



FCTUC DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Ana Luísa Antunes Diogo

Vigas mistas madeira-betão: Modelação e análise linear

Timber-concrete composite beams: Modelling and linear analysis

Dissertação de Mestrado Integrado em Engenharia Civil, na área de Especialização em Estruturas,
orientada pelo Professor Doutor Anísio Alberto Martinho de Andrade e pelo Professor Doutor Paulo Manuel Mendes Pinheiro Providência e Costa

Esta Dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor.
O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer
responsabilidade, legal ou outra, em relação a erros ou omissões
que possa conter.

Coimbra, 8 de Setembro de 2017

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Doutor Anísio Alberto Martinho de Andrade, pelo acompanhamento que me deu ao longo deste percurso e pela disponibilidade total.

Ao meu orientador Professor Doutor Paulo Manuel Mendes Pinheiro Providência e Costa, pela disponibilidade.

À minha mãe, por nos demonstrar que o amor incondicional move montanhas e, no fundo, por ser a melhor mãe do mundo.

Aos meus irmãos, por desempenharem tão bem o seu papel de amigos, companheiros e por vezes um pouco chatos, como todos os irmãos devem ser.

À minha cunhada, por se integrar tão bem em nós.

À Firma, os que Coimbra me deu e que levo para a vida.

Às minhas colegas de trabalho, por me apoiarem e tornarem tudo mais divertido.

À minha restante família e amigos.

RESUMO

As soluções estruturais com elementos mistos madeira-betão assumem particular relevo na reabilitação e reforço de pavimentos de madeira. Têm também encontrado aplicação na construção de tabuleiros de pontes, sendo particularmente competitivas para pequenos vãos.

A análise linear de vigas mistas madeira-betão é habitualmente realizada utilizando o chamado “método γ ”, descrito no Anexo B da Parte 1-1 do Eurocódigo 5. Este método baseia-se na quantificação do grau de interacção entre as componentes por intermédio de um parâmetro γ estabelecido para uma viga simplesmente apoiada submetida a uma carga transversal sinusoidal, situação dificilmente encontrada na prática.

Esta dissertação apresenta um modelo unidimensional consistente para o comportamento material e geometricamente linear de vigas mistas planas sob a acção de forças quase-estáticas. Considera-se que a ligação de corte entre as componentes de uma viga se distribui contínua e uniformemente ao longo do interface. Não se admite a possibilidade de separação vertical entre as componentes. Refira-se que o modelo apresentado é aplicável sempre que todos os materiais, incluindo a conexão, apresentem um comportamento elástico linear, não sendo, portanto, exclusivo das vigas mistas madeira-betão.

Efectua-se um estudo analítico detalhado de uma viga simplesmente apoiada submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída. Este estudo coloca em evidência a importância da rigidez da conexão de corte entre componentes e de uma eventual restrição ao escorregamento nas secções extremas.

Palavras-chave: Vigas mistas; modelo unidimensional; madeira; betão; conexão de corte

ABSTRACT

Structural solutions with mixed timber-concrete elements assume special importance on the rehabilitation and reinforcement of wooden flooring. These elements have found themselves applied not only on composite floors but also in the construction of bridge decks, especially cost in short span bridges.

The linear analysis of mixed timber-concrete beams is usually performed using the so called “ γ method” described in Annex B of Eurocode 5 - Part 1-1. This method is based on quantifying the interaction degree between components by means of a γ parameter, established on a simply supported beam subject to a sinusoidal transverse load, conditions rarely found in real scenarios.

This dissertation presents a unidimensional model consistent for the material behavior and geometrical linear of planar composite beams under the action of near static forces. The shear connection between the components of a beam is assumed to be continuous and uniform along the interface. The possibility of separation between components is not considered in this model. This model can be applied to other materials once all materials, including the connection, present a linear elastic behavior, making this model applicable to other materials other than timber-concrete composite beams.

A detailed analytical study of a simply supported beam subject to a uniformly distributed transverse load is presented in this work. This study highlights the importance of the shear connection rigidity between components and a possible slippage restriction on end sections.

Keywords: Composite beams; Unidimensional model; Timber; Concrete; Shear connection.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	ii
RESUMO	iii
ABSTRACT	iv
ÍNDICE.....	v
SIMBOLOGIA	vi
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Enquadramento	1
1.2 Objectivos	3
1.3 Estrutura do documento	5
2. MODELO UNIDIMENSIONAL	7
2.1 Hipóteses fundamentais	9
2.2 Cinemática	9
2.3 Relações constitutivas.....	12
2.4 Equilíbrio	13
2.5 O problema de valores na fronteira para os deslocamentos generalizados.....	17
3. EXEMPLO ILUSTRATIVO	21
3.1 Descrição do problema	21
3.2 Formulação matemática.....	22
3.3 Deslocamentos generalizados	27
3.4 Campos de momentos flectores M_E e M_T	32
3.5 Escorregamento relativo e fluxo de corte longitudinal no interface entre as duas componentes homogéneas da viga mista.....	37
4. CONCLUSÕES	41
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	43

SIMBOLOGIA

Letras maiúsculas latinas

- A_i - Área da componente i
- E_i - Módulo de elasticidade longitudinal do material da componente i
- G_i - Módulo de distorção do material da componente i
- I_i - Momento principal central de inércia da componente i
- L - Comprimento da viga
- M_E - Momento flector de Euler na componente i
- M_T - Momento flector de Timoshenko na componente i
- N_i - Esforço axial da componente i
- Q_i - Esforço transversal na componente i
- U_i - Deslocamento horizontal generalizado da componente i
- V_i - Deslocamento vertical generalizado da componente i

Letras minúsculas latinas

- f - Força de contacto transversal exercida por uma componente sobre a outra
- k - Módulo de escorregamento por unidade de comprimento de ligação
- m - Momento distribuído definido para a viga mista
- $p_{x,i}$ - Carga distribuída na direcção x na componente i
- $p_{y,i}$ - Carga distribuída na direcção y na componente i
- q - Força de corte por unidade de comprimento entre as duas componentes
- u_i - Componente cartesiana do campo de deslocamentos segundo x da componente i
- y_i - Cota da componente i
- $y_{s,i}$ - Cota da componente i à camada de corte

Letras minúsculas gregas

- γ - Curvatura generalizada provocada pelo escorregamento
- δ - Escorregamento longitudinal entre componentes
- ε_i - Extensão longitudinal na componente i
- v_i - Componente cartesiana do campo de deslocamentos segundo y da componente i
- ζ - Comprimento adimensionalizado

- $\sigma_{x,i}$ - Tensão normal longitudinal da componente i
- φ - Rotação da recta que une os baricentros das secções transversais das componentes
- χ_E - Deformação generalizada devido ao deslocamento vertical (apenas tem em conta modelo de viga de Euler-Bernoulli)
- χ_T - Deformação generalizada total – (tem em conta modelo de viga de Timoshenko)

1. INTRODUÇÃO

1.1 Enquadramento

Ampliando o âmbito da definição apresentada na Parte 1-1 do Eurocódigo 4 (NP EN 1994-1-1, 2011), um elemento estrutural diz-se misto se for constituído por componentes de dois (ou mais) materiais distintos, interligadas de modo a limitar o seu escorregamento longitudinal relativo e a sua separação. Para se garantir um funcionamento simbiótico das componentes interligadas, os materiais que as constituem devem possuir propriedades mecânicas complementares. É o que acontece nos elementos estruturais mistos aço-betão (armado), talvez os mais comuns, e madeira-betão (armado): o aço e a madeira possuem uma boa resistência à tracção, enquanto o betão apresenta um bom comportamento à compressão e confere rigidez aos elementos.

As soluções estruturais com elementos mistos madeira-betão têm particular interesse na reabilitação e reforço de pavimentos de madeira. Nestes casos, a intervenção a realizar consiste simplesmente em adicionar uma lajeta de betão armado ao pavimento original, ligando-a a este através de um sistema de conexão adequado (como, por exemplo, os indicados na Figura 1.1). Desta forma, é possível duplicar ou triplicar a capacidade de carga dos pavimentos, diminuir significativamente as suas deformações e vibrações, aumentar a resistência ao fogo e, pelo aumento de massa, reduzir a transmissão sonora (Dias *et al.*, 2009; Jorge, 2005). Numa construção de alvenaria tradicional, uma boa ligação da lajeta de betão às paredes de alvenaria permite ainda um melhor comportamento global da estrutura face às acções sísmicas, devido ao efeito de diafragma proporcionado pelos pavimentos mistos

(Ceccotti, 2002). As vantagens económicas são óbvias, já que se tira partido da estrutura existente, de forma minimamente intrusiva, e os novos materiais utilizados (betão e ligadores) têm um custo relativamente baixo (Dias *et al.*, 2009). Existem também algumas desvantagens, como o aumento das cargas actuantes na estrutura existente e os problemas (fendilhação, por exemplo) decorrentes da associação de materiais com comportamentos termo-higrométricos diferentes (Ceccotti, 2002).

Ligador	Figura	Rigidez	Resistência	Ductilidade
Pregos		baixa	baixa	elevada
Parafusos		baixa	média	elevada
Cavilhas		baixa	média	elevada
Parafusos inclinados		elevada	média	média
Cavilhas inclinadas coladas		elevada	média	média
Chapas denteadas		média	média	média
Entalhes		elevada	elevada	baixa
Malha colada		elevada	elevada	elevada

Figura 1.1 – Algumas soluções para ligações madeira-betão (Dias *et al.*, 2009)

As estruturas mistas madeira-betão têm também aplicação na construção de tabuleiros de pontes, sendo particularmente competitivas para pequenos vãos (Rodrigues, 2014). Estes tabuleiros mistos são constituídos por uma laje de betão armado disposta sobre um conjunto de vigas de madeira posicionadas longitudinalmente (Figura 1.2).

1.2 Objectivos

A análise linear de vigas mistas madeira-betão é habitualmente realizada utilizando o chamado “método γ ” (Yeoh, 2011), descrito no Anexo B da Parte 1-1 do Eurocódigo 5 (EN 1995-1-1, 2008). Este método baseia-se na quantificação do grau de interacção entre as componentes por intermédio de um parâmetro γ estabelecido para uma viga simplesmente apoiada submetida a uma carga transversal sinusoidal (Ceccotti, 2002). Ora, trata-se de uma situação dificilmente encontrada na prática.



Figura 1.2 – Pont de la Cheyta, Montbovon, Suíça (Fonte: Swiss Timber Bridges)

Assim, a presente dissertação de mestrado tem como objectivo fundamental a apresentação de um modelo unidimensional *consistente* para o comportamento material e geometricamente linear de vigas mistas planas sob a acção de forças aplicadas de forma quase-estática. Considera-se que a ligação de corte entre as componentes de uma viga se distribui contínua e uniformemente ao longo do interface. Não se admite a possibilidade de separação vertical entre as componentes. O modelo apresentado possui algumas características que são semelhantes às da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, em virtude de se estipular que cada componente, individualmente considerada, pode ser adequadamente descrita por esta teoria, e outras que são semelhantes às da teoria de Timoshenko, as quais resultam da deformação longitudinal de corte da conexão entre componentes. Recorde-se que a teoria de Euler-Bernoulli assenta na hipótese cinemática fundamental de que as secções transversais permanecem planas e normais ao eixo longitudinal durante a deformação, não permitindo a consideração das deformações associadas ao esforço transversal. Por seu lado, na teoria de Timoshenko admite-se que as secções transversais permanecem planas, mas não necessariamente normais ao eixo longitudinal (Figura 1.3), o que permite ter em conta, de uma forma média, as deformações por esforço transversal.

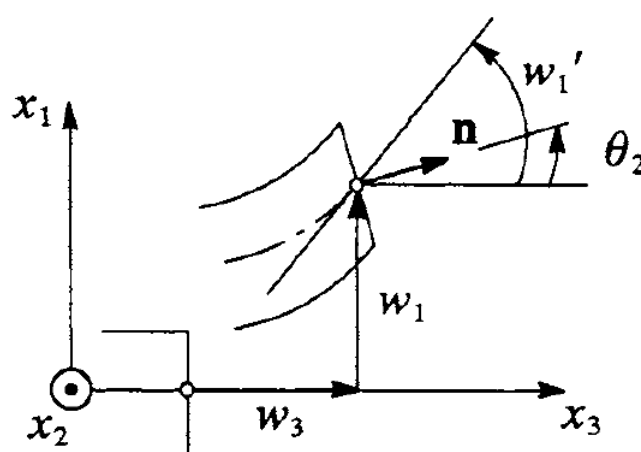


Figura 1.3 – Hipótese cinemática da teoria de vigas de Timoshenko (Hjelmstad, 2005) – A direcção do vector n , normal ao plano da secção, não coincide com a da tangente ao eixo

O modelo apresentado é aplicável sempre que as componentes e a conexão apresentem um comportamento elástico linear, não sendo exclusivo das vigas mistas madeira-betão. No entanto, a motivação para a realização deste trabalho, bem como para a gama de valores adoptada para alguns parâmetros no exemplo ilustrativo do capítulo 3, teve origem naquele tipo específico de vigas.

1.3 Estrutura do documento

O presente trabalho encontra-se dividido em 4 capítulos, dos quais o primeiro é a presente introdução.

No capítulo 2 é apresentado um modelo unidimensional para o comportamento material e geometricamente linear de vigas mistas planas sob a acção de forças quase-estáticas. A exposição é sistematicamente organizada em três níveis: de baixo para cima, temos (i) as fibras materiais, (ii) as componentes individualmente consideradas e a conexão de corte e, por fim, (iii) a viga mista, onde os elementos anteriores aparecem agregados. Paralelamente, procura-se estabelecer uma distinção clara entre esforços internos activos (que estão associados às deformações por intermédio de uma relação constitutiva) e reactivos (que não realizam trabalho em qualquer deformação admissível). Dá-se ainda uma especial atenção à apropriada especificação das condições de apoio.

No capítulo 3 é realizado um estudo paramétrico que tem por objecto uma viga simplesmente apoiada com uma carga aplicada uniformemente distribuída. No âmbito deste estudo, a rigidez da conexão de corte é feita variar desde zero (situação de interacção nula) até infinito (situação de interacção total ou, como também se diz, comportamento monolítico). De forma a ilustrar as potencialidades oferecidas pelo modelo, consideram-se apoios que (i) permitem o

livre escorregamento entre componentes ou que (ii) impedem esse escorregamento, analisando-se o impacto que estas diferentes condições têm no comportamento global da viga.

No capítulo 4 são apresentadas as principais conclusões retiradas do trabalho realizado e fazem-se algumas sugestões para trabalhos futuros.

2. MODELO UNIDIMENSIONAL

Considera-se uma viga mista plana, constituída por duas componentes prismáticas sobrepostas, identificadas pelos rótulos “1” e “2”, ligadas entre si por uma camada de corte longitudinal com espessura uniforme (Figura 2.1). Adopta-se um referencial Cartesiano fixo com as seguintes características:

- (1) O eixo x é paralelo ao eixo longitudinal da viga mista indeformada.
- (2) O plano xy é o plano da viga mista.

Na configuração indeformada, as componentes ocupam as regiões tridimensionais $[0, L] \times \Omega_i$, com comprimento L e secções transversais $\Omega_i \subset \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$. Os eixos baricêntricos das componentes são definidos pelas cotas $y = y_i$ (consequentemente, $\int_{\Omega_i} (y - y_i) dy dz = 0$), admitindo-se, sem perda de generalidade, que $y_1 < y_2$ (a componente 1 está “por cima” da componente 2). A área e o momento principal central de inércia da secção transversal da componente i são $A_i = \int_{\Omega_i} dy dz$ e $I_i = \int_{\Omega_i} (y - y_i)^2 dy dz$. A camada de corte longitudinal está situada entre os planos $y = y_{s,1}$ e $y = y_{s,2}$, com $y_{s,1} \leq y_{s,2}$.

O modelo matemático utilizado neste trabalho para descrever o comportamento mecânico quase-estático de uma viga mista com as características indicadas é, no essencial, o proposto por Gjelsvik (1991) e por Betti e Gjelsvik (1996). No entanto, a breve exposição que se faz de seguida tem dois aspectos distintivos que importa salientar:

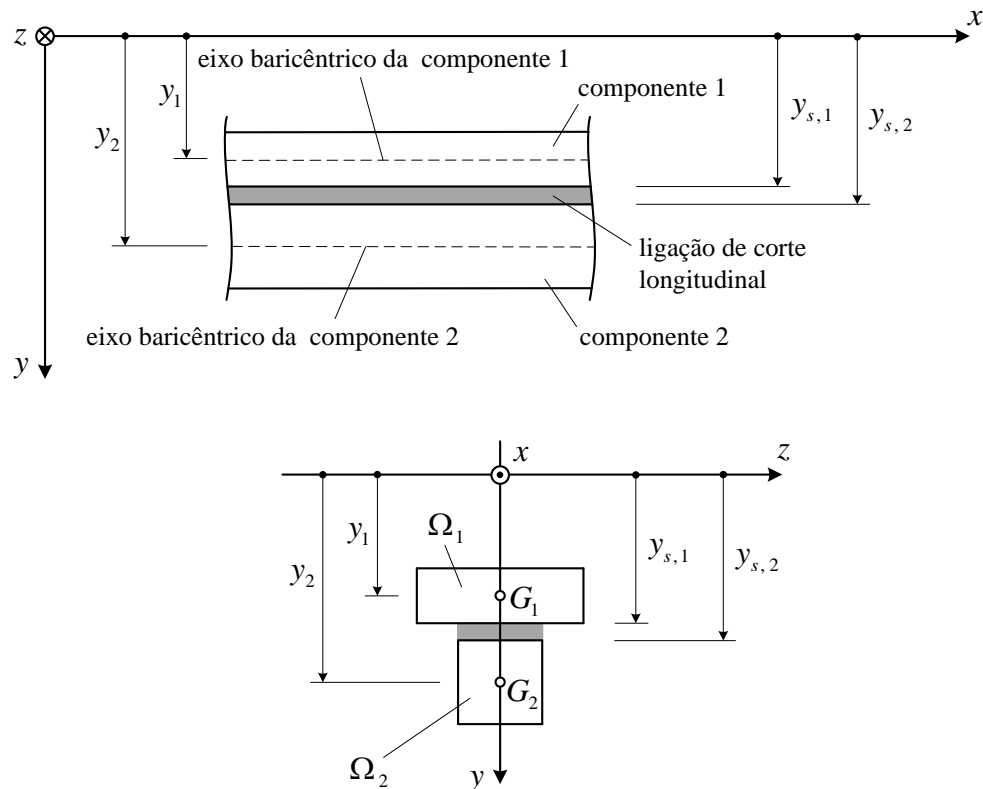


Figura 2.1 – Viga mista – Geometria e referencial Cartesiano adoptado

- (1) Quando se estabelecem as relações de compatibilidade (ou cinemáticas), constitutivas e de equilíbrio, procura-se manter uma distinção clara entre três níveis de uma hierarquia: de baixo para cima, temos (i) fibra material, (ii) componente / camada de corte e, por fim, (iii) a viga mista. Quando se passa do nível inferior para o nível intermédio, o número de variáveis independentes reduz-se três (x , y e z) para apenas um (x). No nível intermédio estão três elementos unidimensionais distintos, as duas componentes e a camada de corte, os quais são agregados numa única peça mista, também unidimensional, quando se passa ao nível superior da hierarquia.
- (2) Os esforços internos são separados em activos e reactivos, com os segundos a não realizarem trabalho em qualquer deformação admissível (Podio-Guidugli, 1989). Esta

separação conduz a uma descrição dual da cinemática e do equilíbrio da viga mista no nível superior da hierarquia definida no ponto anterior.

2.1 Hipóteses fundamentais

As hipóteses fundamentais utilizadas na construção do modelo matemático unidimensional utilizado neste trabalho são as seguintes:

(A1) Linearidade geométrica (Arantes e Oliveira, 1999)

(A2) Cada componente é homogénea e comporta-se individualmente como uma viga de Euler-Bernoulli plana e elástica linear.

(A3) A camada de corte entre componentes

(A3.1) é transversalmente rígida;

(A3.2) tem um comportamento elástico linear ao corte longitudinal, com rigidez uniforme por unidade de comprimento.

A hipótese (A2) permite efectuar a redução dimensional associada à passagem do nível inferior para o nível intermédio da hierarquia acima referida. As hipóteses (A3) são utilizadas no processo de agregação que é realizado quando se sobe do nível intermédio para o nível superior dessa hierarquia.

2.2 Cinemática

De acordo com a hipótese (A2), as componentes Cartesianas (segundo x e y) do campo de deslocamentos das duas componentes da viga mista têm a forma

$$u_i(x, y, z) = U_i(x) - (y - y_i) V_i'(x) \quad (2.1)$$

$$v_i(x, y, z) = V_i(x), \quad x \in [0, L], \quad (y, z) \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.2)$$

onde U_i e V_i representam as componentes Cartesianas do deslocamento do eixo baricêntrico de cada componente (Figura 2.2). Decorre então da hipótese (A3.1) que

$$V_1(x) = V_2(x) = V(x). \quad (2.3)$$

Definindo ainda

$$U(x) = \frac{1}{y_2 - y_1} (y_2 U_1(x) - y_1 U_2(x)) \quad (2.4)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{y_2 - y_1} (U_1(x) - U_2(x)), \quad (2.5)$$

de forma a que se tenha

$$U_i(x) = U(x) - y_i \varphi(x), \quad i = 1, 2, \quad (2.6)$$

pode escrever-se o campo de deslocamentos (2.1)-(2.2) na forma

$$u_i(x, y, z) = U(x) + y_i (V'(x) - \varphi(x)) - y V'(x) \quad (2.7)$$

$$v_i(x, y, z) = V(x). \quad (2.8)$$

As funções (de uma só variável x) U , V e φ são designadas por deslocamentos generalizados e pertencem ao nível superior da hierarquia referida no início deste capítulo. O seu significado geométrico está ilustrado na Figura 2.2.

Decorre imediatamente de (2.7) que as extensões longitudinais em cada componente e o escorregamento longitudinal (\Leftarrow) entre componentes são dados por

$$\varepsilon_{x,i}(x, y, z) = \frac{\partial u_i(x, y, z)}{\partial x} = U'(x) + y_i (V''(x) - \varphi'(x)) - y V''(x), \quad i = 1, 2 \quad (2.9)$$

$$\delta(x) = u_1(x, y_{s1}, z) - u_2(x, y_{s2}, z) = -(y_2 - y_1) (V'(x) - \varphi(x)) + (y_{s2} - y_{s1}) V'(x). \quad (2.10)$$

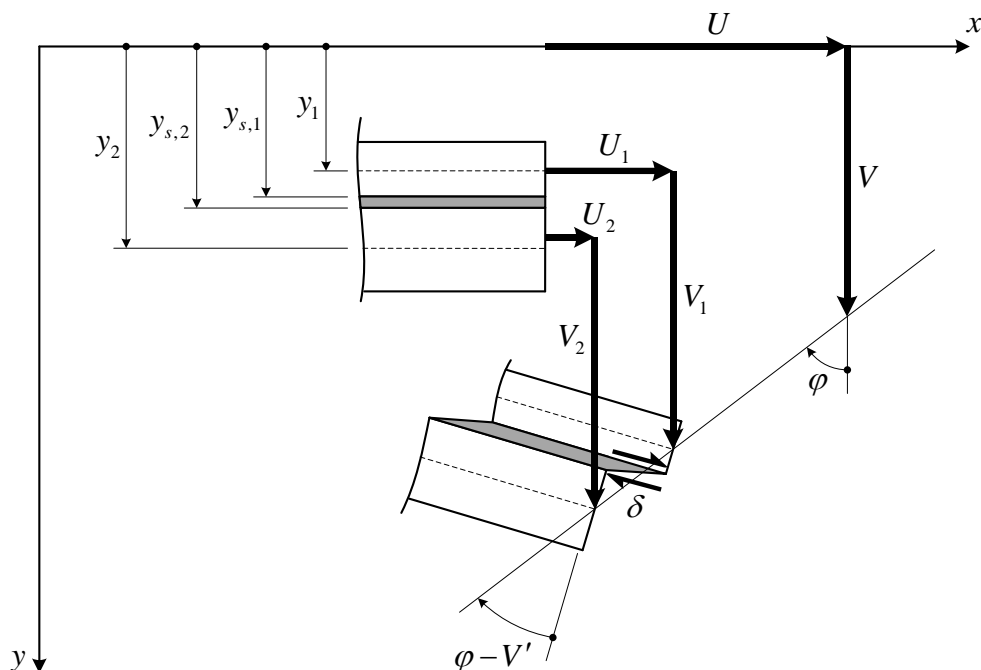


Figura 2.2 – Cinemática da viga mista

Daqui em diante, admite-se a seguinte hipótese adicional:

(A3.3) A espessura da camada de corte é desprezável (isto é, $y_{s,1} = y_{s,2} = y_s$).

Nestas condições, o escorregamento longitudinal δ reduz-se a

$$\delta(x) = -(y_2 - y_1)(V'(x) - \varphi(x)). \quad (2.11)$$

Por analogia com as teorias de vigas de Euler-Bernoulli (E) e de Timoshenko (T), as equações (2.9) e (2.11) sugerem a adopção de

$$\varepsilon(x) = U'(x) \quad (2.12)$$

$$\chi_E(x) = -V''(x) \quad (2.13)$$

$$\chi_T(x) = -\varphi'(x) \quad (2.14)$$

$$\gamma(x) = V'(x) - \varphi(x) \quad (2.15)$$

como deformações generalizadas. Com estas definições, as equações (2.9) e (2.11) assumem a forma

$$\varepsilon_{x,i}(x, y, z) = \varepsilon(x) + y_i \chi_T(x) + (y - y_i) \chi_E(x), \quad i = 1, 2 \quad (2.16)$$

$$\delta(x) = -(y_2 - y_1) \gamma(x). \quad (2.17)$$

2.3 Relações constitutivas

Designe-se por E_i o módulo de elasticidade longitudinal do material constituinte da componente (homogénea) i e por k o módulo de escorregamento por unidade de comprimento da ligação de corte longitudinal entre componentes, com $0 \leq k < +\infty$ (os limites $k = 0$ e $k = +\infty$ correspondem a interacção nula e comportamento monolítico, respectivamente). As tensões normais longitudinais e a força de corte por unidade de comprimento entre as duas componentes relacionam-se com as extensões (2.16) e com o escorregamento (2.17) através de

$$\sigma_{x,i}(x, y, z) = E_i \varepsilon_{x,i}(x, y, z) = E_i [\varepsilon(x) + y_i \chi_T(x) + (y - y_i) \chi_E(x)], \quad i = 1, 2 \quad (2.18)$$

$$q(x) = k \delta(x). \quad (2.19)$$

Assim, a energia de deformação elástica armazenada no elemento misto é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\int_{\Omega_1} \sigma_{x,1} \varepsilon_{x,1} dy dz + \int_{\Omega_2} \sigma_{x,2} \varepsilon_{x,2} dy dz + q \delta \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[(E_1 A_1 + E_2 A_2) \varepsilon^2 + 2(y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) \varepsilon \chi_T + \right. \\ &\quad \left. + (y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2) \chi_T^2 + (E_1 I_1 + E_2 I_2) \chi_E^2 + (y_2 - y_1)^2 k \gamma^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Os esforços internos activos, conjugados (ou duais) das deformações generalizadas, são então definidos pelas relações constitutivas unidimensionais

$$N(x) = (E_1 A_1 + E_2 A_2) \varepsilon(x) + (y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) \chi_T(x) \quad (2.21)$$

$$M_E(x) = (E_1 I_1 + E_2 I_2) \chi_E(x) \quad (2.22)$$

$$M_T(x) = (y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) \varepsilon(x) + (y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2) \chi_T(x) \quad (2.23)$$

$$Q_T(x) = (y_2 - y_1)^2 k \gamma(x), \quad (2.24)$$

de forma a que

$$\vartheta \mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^L (N \varepsilon + M_E \chi_E + M_T \chi_T + Q_T \gamma) dx. \quad (2.25)$$

Facilmente se verifica que, sendo

$$N_i(x) = \int_{\Omega_i} \sigma_{x,i} dydz = E_i A_i (\varepsilon(x) + y_i \chi_T(x)) \quad (2.26)$$

$$M_i(x) = \int_{\Omega_i} (y - y_i) \sigma_{x,i} dydz = E_i I_i \chi_E(x), \quad i = 1, 2 \quad (2.27)$$

o esforço axial e o momento flector na componente i , se tem

$$N(x) = N_1(x) + N_2(x) \quad (2.28)$$

$$M_E(x) = M_1(x) + M_2(x) \quad (2.29)$$

$$M_T(x) = y_1 N_1(x) + y_2 N_2(x). \quad (2.30)$$

2.4 Equilíbrio

Suponha-se que a cada componente tem aplicada, ao longo do seu eixo baricêntrico, forças distribuídas segundo as direcções axial e transversal, cujas densidades $p_{x,i}$ e $p_{y,i}$ são funções

contínuas de x no intervalo $[0, L]$. Nestas condições, cada componente, considerada individualmente, deve satisfazer as condições de equilíbrio (Figura 2.3)

$$N'_1(x) + p_{x,1}(x) - q(x) = 0 \quad (2.31)$$

$$Q'_1(x) + p_{y,1}(x) - f(x) = 0 \quad (2.32)$$

$$M'_1(x) - Q_1(x) - (y_s - y_1)q(x) = 0 \quad (2.33)$$

$$N'_2(x) + p_{x,2}(x) + q(x) = 0 \quad (2.34)$$

$$Q'_2(x) + p_{y,2}(x) + f(x) = 0 \quad (2.35)$$

$$M'_2(x) - Q_2(x) - (y_2 - y_s)q(x) = 0 \quad (2.36)$$

Nas equações anteriores, Q_i é o esforço transversal na componente i e f é a força de contacto transversal exercida por uma componente sobre a outra. Esta última força tem um carácter reactivo, em virtude da hipótese (A3.1). Por outro lado, as equações (2.33) e (2.36) mostram que os esforços transversos Q_i são parcialmente reactivos – parcela M'_i –, na medida em que estão associados à hipótese (A2), e parcialmente activos – parcela $(-1)^i(y_s - y_i)q$ –, na medida em que estão relacionadas com a força de corte longitudinal entre componentes. Utilizando (2.32) e (2.35), os esforços transversos Q_i podem ser eliminados das equações (2.33) e (2.36), obtendo-se

$$M''_1(x) + p_{y,1}(x) - f(x) - (y_s - y_1)q'(x) = 0 \quad (2.37)$$

$$M''_2(x) + p_{y,2}(x) + f(x) - (y_2 - y_s)q'(x) = 0 \quad (2.38)$$

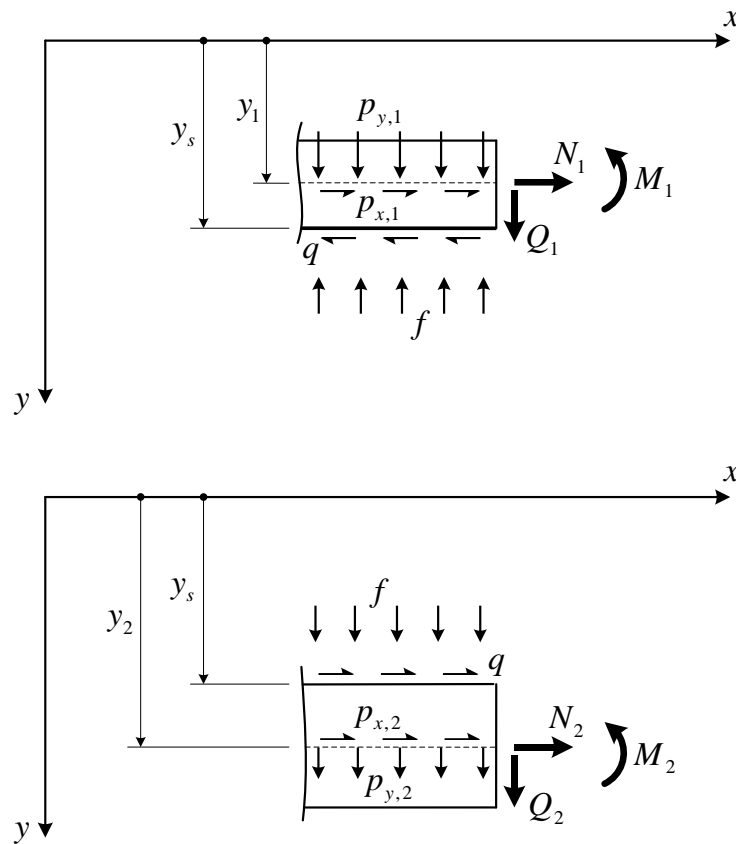


Figura 2.3 – Equilíbrio das componentes, individualmente consideradas

Tendo em atenção (2.28)-(2.30), as equações (2.31), (2.34), (2.37) e (2.38) podem ser combinadas de forma a obter-se (Figura 2.4)

$$N'(x) + p_x(x) = 0 \quad (2.39)$$

$$M_E''(x) + Q_T'(x) + p_y(x) = 0 \quad (2.40)$$

$$M_T'(x) - Q_T(x) - m(x) = 0, \quad (2.41)$$

onde

$$p_x(x) = p_{x,1}(x) + p_{x,2}(x) \quad (2.42)$$

$$p_y(x) = p_{y,1}(x) + p_{y,2}(x) \quad (2.43)$$

$$m(x) = -y_1 p_{x,1}(x) - y_2 p_{x,2}(x) \quad (2.44)$$

são as cargas distribuídas definidas para a viga mista como um todo. Estas cargas distribuídas são conjugadas (ou duais) dos deslocamentos generalizados U , V e φ , uma vez que

$$\int_0^L (p_{x,1} U_1 + p_{x,2} U_2 + p_{y,1} V_1 + p_{y,2} V_2) dx = \int_0^L (p_x U + p_y V + m \varphi) dx. \quad (2.45)$$

A equação (2.41) permite concluir que o esforço transversal total na viga mista,

$$Q(x) = Q_1(x) + Q_2(x) = M'_E(x) + Q_T(x), \quad (2.46)$$

é parcialmente reactivo (parcela M'_E) e parcialmente activo (parcela Q_T).

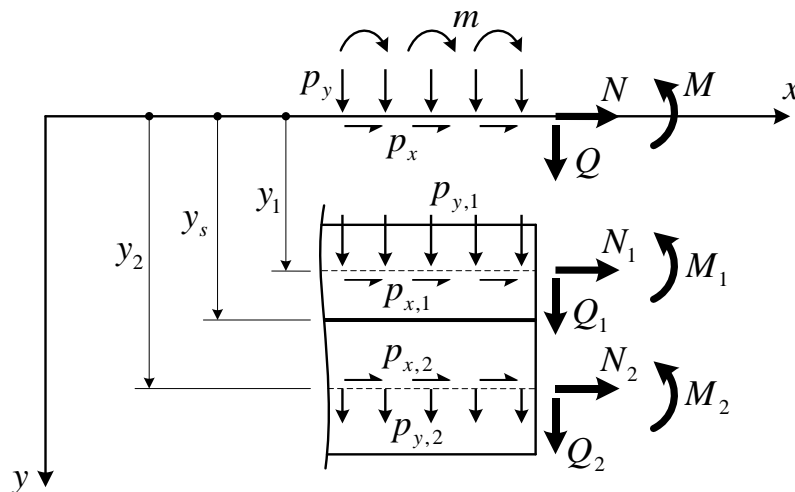


Figura 2.4 – Equilíbrio da viga mista

2.5 O problema de valores na fronteira para os deslocamentos generalizados

As equações governativas da viga mista em termos dos deslocamentos generalizados podem agora ser obtidas introduzindo, primeiro, as relações deformações-deslocamentos (2.12)-(2.15) nas relações constitutivas (2.21)-(2.24) e, em seguida, o resultado assim obtido nas condições de equilíbrio (2.39)-(2.41). Este procedimento, esquematizado na Figura 2.5, conduz a

$$(E_1 A_1 + E_2 A_2) U''(x) - (y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) \varphi''(x) + p_x(x) = 0 \quad (2.47)$$

$$-(E_1 I_1 + E_2 I_2) V^{(4)}(x) + k (y_2 - y_1)^2 (V''(x) - \varphi'(x)) + p_y(x) = 0 \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} (y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) U''(x) - (y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2) \varphi''(x) \\ - k (y_2 - y_1)^2 (V'(x) - \varphi(x)) - m(x) = 0, \quad 0 < x < L. \end{aligned} \quad (2.49)$$

É ainda necessário especificar quatro condições de fronteira em cada uma das extremidades da viga, mais uma do que nas teorias de Euler-Bernoulli ou Timoshenko (Hjelmstad, 2005).

Uma possibilidade consiste em fixar os valores de:

- (1) U ou $N = (E_1 A_1 + E_2 A_2) U' - (y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) \varphi'$;
- (2) V ou $Q = -(E_1 I_1 + E_2 I_2) V''' + k (y_2 - y_1)^2 (V' - \varphi)$;
- (3) V' ou $M_E = -(E_1 I_1 + E_2 I_2) V''$;
- (4) φ ou $M_T = (y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) U' - (y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2) \varphi'$.

Outra possibilidade consiste em manter (1) e (2) como acima indicado e substituir (3) e (4) pela atribuição de valores fixos a

- (3') $V' + \varphi$ ou $M_E + M_T = (y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) U' - (E_1 I_1 + E_2 I_2) V'' - (y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2) \varphi'$;
- (4') $V' - \varphi$ ou $M_E - M_T = -(y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) U' - (E_1 I_1 + E_2 I_2) V'' + (y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2) \varphi'$.

O Quadro 2.1 ilustra alguns apoios típicos e as condições de fronteira correspondentes.

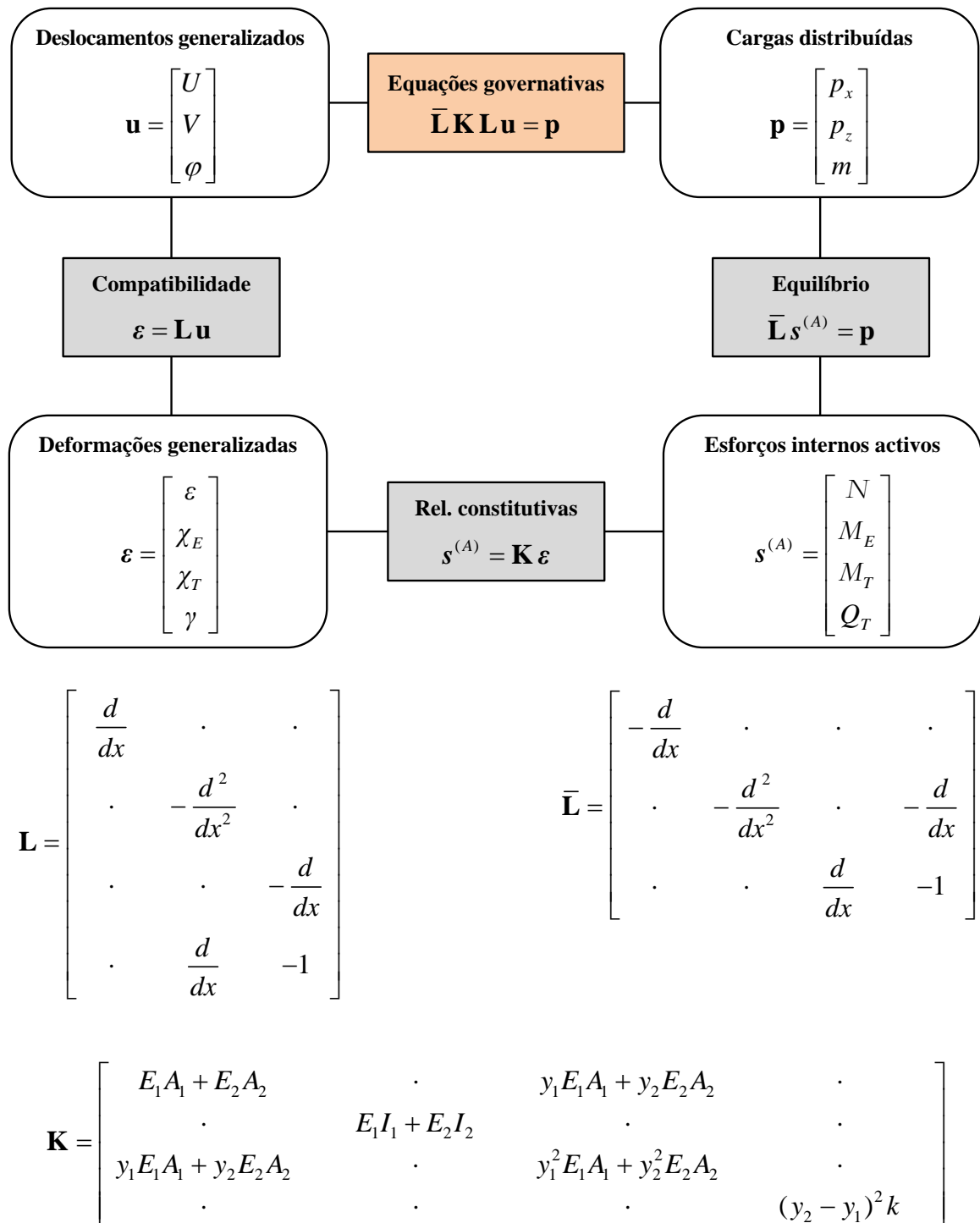
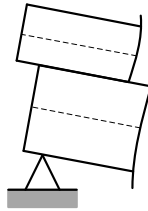


Figura 2.5 – Diagrama de Tonti para as relações estruturais da viga mista (TONTI, 1972a, 1972b). Observe-se que os operadores diferenciais \mathbf{L} e $\bar{\mathbf{L}}$ são formalmente auto-adjuntos (ou duais)

Quadro 2.1 – Condições de fronteira homogéneas para a viga mista – Casos particulares



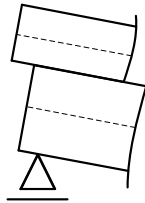
$$U = 0$$

$$V = 0$$

$$M_E = -(E_1 I_1 + E_2 I_2) V'' = 0$$

$$M_T = (y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) U' - (y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2) \varphi' = 0$$

$$N = (E_1 A_1 + E_2 A_2) U' - (y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) \varphi' = 0$$

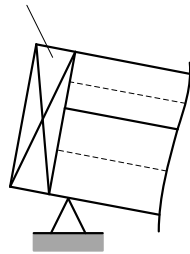


$$V = 0$$

$$M_E = -(E_1 I_1 + E_2 I_2) V'' = 0$$

$$M_T = (y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) U' - (y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2) \varphi' = 0$$

bloco rígido

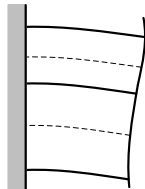


$$U = 0$$

$$V = 0$$

$$M_E + M_T = (y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) U' - (E_1 I_1 + E_2 I_2) V'' - (y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2) \varphi' = 0$$

$$V' - \varphi = 0$$



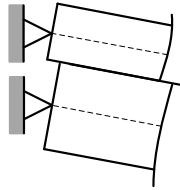
$$U = 0$$

$$V = 0$$

$$V' = 0$$

$$\varphi = 0$$

Quadro 2.1 (cont.) – Condições de fronteira homogéneas para a viga mista – Casos particulares

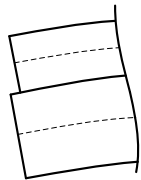


$$U = 0$$

$$V = 0$$

$$M_E = -(E_1 I_1 + E_2 I_2) V'' = 0$$

$$\varphi = 0$$



$$N = (E_1 A_1 + E_2 A_2) U' - (y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) \varphi' = 0$$

$$Q = -(E_1 I_1 + E_2 I_2) V''' + k (y_2 - y_1)^2 (V' - \varphi) = 0$$

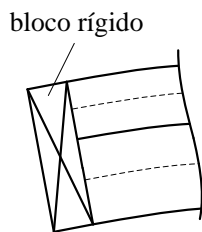
$$M_E = -(E_1 I_1 + E_2 I_2) V'' = 0$$

$$M_T = (y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) U' - (y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2) \varphi' = 0$$

$$N = (E_1 A_1 + E_2 A_2) U' - (y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) \varphi' = 0$$

$$Q = -(E_1 I_1 + E_2 I_2) V''' + k (y_2 - y_1)^2 (V' - \varphi) = 0$$

$$M_E + M_T = (y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2) U' - (E_1 I_1 + E_2 I_2) V'' - (y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2) \varphi' = 0$$



$$V' - \varphi = 0$$

Finalmente, observa-se que o problema de valores na fronteira fica consideravelmente simplificado quando o eixo x é escolhido de forma a que se tenha $y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2 = 0$, isto é, quando o eixo x coincide com o eixo baricêntrico ponderado pelos módulos de elasticidade dos materiais que constituem a peça mista (Dias da Silva, 2013). Em particular, o deslocamento generalizado U torna-se independente de V e φ .

3. EXEMPLO ILUSTRATIVO

3.1 Descrição do problema

Com o triplo objetivo de (i) aplicar o modelo matemático exposto no capítulo anterior, (ii) ilustrar as suas potencialidades e, por essa via, (iii) compreender melhor o comportamento mecânico quase-estático de vigas mistas, efetua-se agora um estudo analítico detalhado de um problema concreto. Considera-se uma viga mista com as características genéricas descritas no início do capítulo 2, submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída p_0 (Figura 3.1). São estudados os casos de interação nula ($k = 0$), parcial ($0 < k < +\infty$) e total ($k = +\infty$). As extremidades da viga estão simplesmente apoiadas, mas esta qualificação, por si só, não é suficiente para definir sem ambiguidades todas as condições de fronteira. De facto, já foi referido que o modelo utilizado neste trabalho exige uma condição de fronteira adicional em cada extremidade da viga, relativamente às que são necessárias nas teorias clássicas de Euler-Bernoulli ou Timoshenko. De forma a ilustrar as possibilidades oferecidas por esta condição adicional, assim como o seu impacto no comportamento global das vigas, consideram-se apoios que permitem o livre escorregamento entre componentes (Figura 3.1a) ou que impedem esse escorregamento (Figura 3.1b).

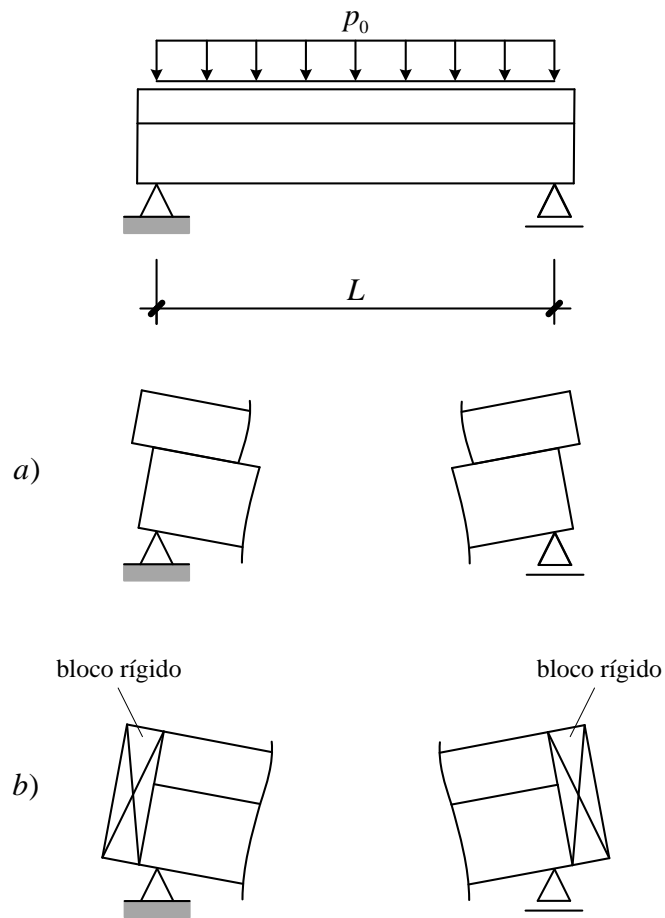


Figura 3.1 – Exemplo ilustrativo – Viga mista simplesmente apoiada com carga transversal uniformemente distribuída

a) Escoramento livre nas secções extremas

b) Escoamento impedido nas secções extremas

3.2 Formulação matemática

Para facilitar a análise, escolhe-se o eixo x coincidente com o eixo baricêntrico ponderado pelos módulos de elasticidade dos materiais que constituem as duas componentes da viga mista. Tem-se assim $y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2 = 0$ e, como já referido, o deslocamento generalizado U fica então desacoplado de V e φ .

Não existindo quaisquer cargas axiais aplicadas às vigas mistas do exemplo ilustrativo acima descrito, o deslocamento U será a solução do problema de valores na fronteira

$$U''(x) = 0, \quad 0 < x < L \quad (3.1)$$

$$U(0) = 0 \quad (3.2)$$

$$U'(L) = 0. \quad (3.3)$$

Facilmente se conclui que $U(x) = 0$, $0 \leq x \leq L$. Assim, daqui em diante concentrar-nos-emos exclusivamente na determinação dos deslocamentos generalizados V e φ , que em geral se encontram acoplados.

Para as vigas mistas com interacção parcial ($0 < k < +\infty$) ou nula ($k = 0$), temos que resolver as equações diferenciais ordinárias

$$-(E_1 I_1 + E_2 I_2) V^{(4)}(x) + k (y_2 - y_1)^2 (V''(x) - \varphi'(x)) + p_0 = 0 \quad (3.4)$$

$$(y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2) \varphi''(x) + k (y_2 - y_1)^2 (V'(x) - \varphi(x)) = 0, \quad 0 < x < L \quad (3.5)$$

sujeitas às condições de fronteira

$$V(0) = V(L) = 0 \quad (3.6)$$

$$V''(0) = V''(L) = 0 \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \varphi'(0) = \varphi'(L) = 0 & \text{se } 0 < k < +\infty \\ \varphi'(0) = 0 \text{ e } \varphi(\frac{L}{2}) = 0 & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

¹ Para $k = 0$, as condições de fronteira $\varphi'(0) = 0$ e $\varphi'(L) = 0$ são redundantes, pelo que não garantem a unicidade da solução. De facto, qualquer função constante satisfaz $\varphi''(x) = 0$, $0 < x < L$, com $\varphi'(0) = \varphi'(L) = 0$. Para que a solução seja única, substitui-se $\varphi'(L) = 0$ pela condição $\varphi(\frac{L}{2}) = 0$, que resulta de considerações de simetria.

quando o escorregamento entre componentes nas secções de extremidade está livre (Figura 3.1a), ou

$$V(0) = V(L) = 0 \quad (3.9)$$

$$V'(0) - \varphi(0) = V'(L) - \varphi(L) = 0 \quad (3.10)$$

$$V''(0) + \frac{y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \varphi'(0) = V''(L) + \frac{y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \varphi'(L) = 0, \quad (3.11)$$

quando aquele escorregamento está impedido (Figura 3.1b).

As vigas com comportamento monolítico ($k = +\infty$) exigem um tratamento diferenciado. Tratando-se, efectivamente, de vigas de Euler-Bernoulli não homogéneas, o único deslocamento generalizado independente é o deslocamento transversal V (Hjelmstad, 2005), o qual satisfaz

$$(E_1 I_1 + E_2 I_2 + y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2) V^{(4)}(x) = p_0, \quad 0 < x < L \quad (3.12)$$

$$V(0) = V(L) = 0 \quad (3.13)$$

$$V''(0) = V''(L) = 0. \quad (3.14)$$

Uma vez determinado o deslocamento transversal V , a rotação φ pode ser obtida simplesmente por derivação: $\varphi(x) = V'(x)$, $0 \leq x \leq L$. Observe-se que, neste caso ($k = +\infty$), as duas condições consideradas no que diz respeito ao escorregamento entre componentes nas secções extremas (livre ou impedido) não se distinguem uma da outra.

Antes de prosseguirmos, é conveniente adimensionalizar o enunciado destes problemas. Para isso, considera-se a mudança de variável independente

$$x \mapsto \xi = \frac{x}{L} \quad (3.15)$$

e introduzem-se as funções definidas no intervalo de referência $[0, 1]$ por

$$\tilde{V}(\xi) = \frac{1}{L} V(\xi L) \quad (3.16)$$

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \varphi(\xi L). \quad (3.17)$$

Pela regra de derivação da função composta, tem-se

$$\frac{d^n V(x)}{dx^n} = \frac{1}{L^{n-1}} \frac{d^n \tilde{V}(\xi)}{d\xi^n}, \quad n=1, \dots, 4 \quad (3.18)$$

$$\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = \frac{1}{L^n} \frac{d^n \tilde{\varphi}(\xi)}{d\xi^n}, \quad n=1, 2. \quad (3.19)$$

Definem-se ainda os parâmetros adimensionais

$$\alpha = \frac{E_1 I_1 + E_2 I_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2 + y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2} \quad (3.20)$$

$$\beta = \frac{(y_2 - y_1)^2 k L^2}{y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2} \quad (3.21)$$

$$\lambda = \frac{p_0 L^3}{E_1 I_1 + E_2 I_2 + y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2} \quad (3.22)$$

As equações diferenciais (3.4)-(3.5) podem, assim, ser transformadas em

$$-\alpha \tilde{V}^{(4)}(\xi) + \beta(1-\alpha) (\tilde{V}''(\xi) - \tilde{\varphi}'(\xi)) + \lambda = 0 \quad (3.23)$$

$$\tilde{\varphi}''(\xi) + \beta (\tilde{V}'(\xi) - \tilde{\varphi}(\xi)) = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad (3.24)$$

as quais são válidas para $0 \leq \beta < +\infty$. Por sua vez, as condições de fronteira (3.6)-(3.8) e (3.9)-(3.11) escrevem-se agora na forma

$$\tilde{V}(0) = \tilde{V}(1) = 0 \quad (3.25)$$

$$\tilde{V}''(0) = \tilde{V}''(1) = 0 \quad (3.26)$$

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}'(0) = \tilde{\varphi}'(1) = 0 & \text{se } 0 < \beta < +\infty \\ \tilde{\varphi}'(0) = 0 \text{ e } \tilde{\varphi}'(\frac{1}{2}) = 0 & \text{se } \beta = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

e

$$\tilde{V}(0) = \tilde{V}(1) = 0 \quad (3.28)$$

$$\tilde{V}'(0) - \tilde{\varphi}(0) = \tilde{V}'(1) - \tilde{\varphi}(1) = 0 \quad (3.29)$$

$$\alpha \tilde{V}''(0) + (1 - \alpha) \tilde{\varphi}'(0) = \alpha \tilde{V}''(1) + (1 - \alpha) \tilde{\varphi}'(1) = 0, \quad (3.30)$$

respectivamente.

Refira-se que o parâmetro α , que traduz a relação entre as rigidezes de flexão da secção transversal da viga mista nas situações de interacção nula e de interacção total, foi considerado por Girhammar e Pan (2007). Para vigas mistas madeira-betão, α tipicamente assume valores compreendidos entre 0,25 e 0,75 (Dias, 2017).

Para $\beta = +\infty$, o processo de adimensionalização acima descrito, aplicado agora a (3.12)-(3.14), conduz a

$$\tilde{V}^{(4)}(\xi) = \lambda, \quad 0 < \xi < 1 \quad (3.31)$$

$$\tilde{V}(0) = \tilde{V}(1) = 0 \quad (3.32)$$

$$\tilde{V}''(0) = \tilde{V}''(1) = 0, \quad (3.33)$$

tendo-se ainda $\tilde{\varphi}(\xi) = \tilde{V}'(\xi)$, $0 \leq \xi \leq 1$.

Constata-se que a adimensionalização efectuada resulta numa redução do número de parâmetros envolvidos no enunciado do(s) problema(s) de cinco (a saber, $E_1 I_1 + E_2 I_2$, $y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2$, k , L e p_0) para apenas três (α , β e λ).

3.3 Deslocamentos generalizados

Considere-se, em primeiro lugar, a situação de interacção parcial (isto é, $0 < \beta < +\infty$). Neste caso, a solução geral do sistema de equações diferenciais (3.23)-(3.24), obtida com o software de cálculo simbólico Mathematica (Wolfram Research, 2006), é

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} \left(C_1 e^{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \xi} - C_2 e^{-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \xi} \right) + C_3 + C_4 \xi + C_5 \xi^2 + \frac{\lambda}{6} \xi^3 \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\xi) = & \frac{\alpha}{\beta^2} (\alpha - 1) \left(C_1 e^{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \xi} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \xi} \right) + C_3 \xi + \frac{1}{2} C_4 \xi^2 + C_5 \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{2\xi}{\beta} \right) \\ & + C_6 + \frac{\lambda \xi^2}{24} \left(\xi^2 - \frac{12}{\beta} \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

As constantes C_1, \dots, C_6 são determinadas a partir das condições de fronteira. Quando o escorregamento entre componentes nas secções extremas está livre, as condições (3.25)-(3.27) fornecem

$$C_1 = -\frac{\lambda}{1 + e^{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}} \quad (3.36)$$

$$C_2 = \left(\frac{1}{1 + e^{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}} - 1 \right) \lambda \quad (3.37)$$

$$C_3 = \left(\frac{1}{24} - \frac{\alpha}{2\beta} \right) \lambda \quad (3.38)$$

$$C_4 = \frac{\alpha \lambda}{\beta} \quad (3.39)$$

$$C_5 = -\frac{\lambda}{4} \quad (3.40)$$

$$C_6 = \frac{\alpha(\alpha-1)\lambda}{\beta^2}. \quad (3.41)$$

Se o escorregamento está impedido nas extremidades, então as condições (3.28)-(3.30) permitem obter

$$C_1 = -\frac{\lambda}{2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \left(e^{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}} - 1 \right)} \quad (3.42)$$

$$C_2 = -\frac{\lambda e^{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}}{2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \left(e^{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}} - 1 \right)} \quad (3.43)$$

$$C_3 = \left(\frac{1}{24} - \frac{\alpha}{2\beta} \right) \lambda \quad (3.44)$$

$$C_4 = \frac{\alpha \lambda}{\beta} \quad (3.45)$$

$$C_5 = -\frac{\lambda}{4} \quad (3.46)$$

$$C_6 = \frac{\sqrt{\alpha} (\alpha - 1) \coth\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right) \lambda}{2\beta^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.47)$$

Para vigas com interacção nula ($\beta = 0$), os deslocamentos generalizados (adimensionalizados) são dados por

$$\tilde{V}(\xi) = \frac{\lambda}{24\alpha} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) \quad (3.48)$$

$$\tilde{\varphi}(\xi) = 0, \quad (3.49)$$

quando o escorregamento entre componentes nas secções extremas é livre, e por

$$\tilde{V}(\xi) = \frac{\lambda}{24\alpha} [\alpha\xi - (\alpha - 1)\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4] \quad (3.50)$$

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \frac{\lambda}{24} (1 - 2\xi), \quad (3.51)$$

quando o escorregamento está impedido.

Finalmente, quando a interacção é total ($\beta = +\infty$), obtém-se

$$\tilde{V}(\xi) = \frac{\lambda}{24} (\xi - 2\xi^2 + \xi^4) \quad (3.52)$$

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \frac{\lambda}{24} (1 - 6\xi^2 + 4\xi^3). \quad (3.53)$$

As Figuras 3.2-3.5 ilustram estes resultados. As duas primeiras representam as funções $\xi \mapsto \tilde{V}(\xi)$ e $\xi \mapsto \tilde{\varphi}(\xi)$ para $\alpha = \frac{1}{2}$ e valores seleccionados de β , normalizadas de forma a que o seu valor máximo quando $\beta = +\infty$ seja 1. As duas seguintes representam os valores daquelas funções a meio vão (\tilde{V}) ou na secção inicial ($\tilde{\varphi}$), igualmente normalizados, em

função de α (no intervalo $0,25 \leq \alpha \leq 0,75$) e para os mesmos valores de β anteriormente considerados. Destas figuras, salienta-se o considerável efeito rigidificador da restrição ao escorregamento nas secções extremas da viga. A título de exemplo, considere-se $\alpha = \frac{1}{2}$ e o caso extremo $\beta = 0$ (interacção nula); a meio vão ($\xi = \frac{1}{2}$), tem-se $\tilde{V} = 2 \times \frac{5\lambda}{384}$, se o escorregamento nas extremidades estiver livre, e $\tilde{V} = \frac{6}{5} \times \frac{5\lambda}{384} = \frac{3}{5} \times 2 \times \frac{5\lambda}{384}$ se o escorregamento estiver impedido. O impedimento do escorregamento nas extremidades torna também os deslocamentos generalizados menos dependentes dos parâmetros α e β ; em particular, observa-se que, nesse caso, se tem sempre $\tilde{\varphi}(0) = |\tilde{\varphi}(1)| = \frac{\lambda}{24}$, independentemente de α e β , razão pela qual o gráfico correspondente não é apresentado.

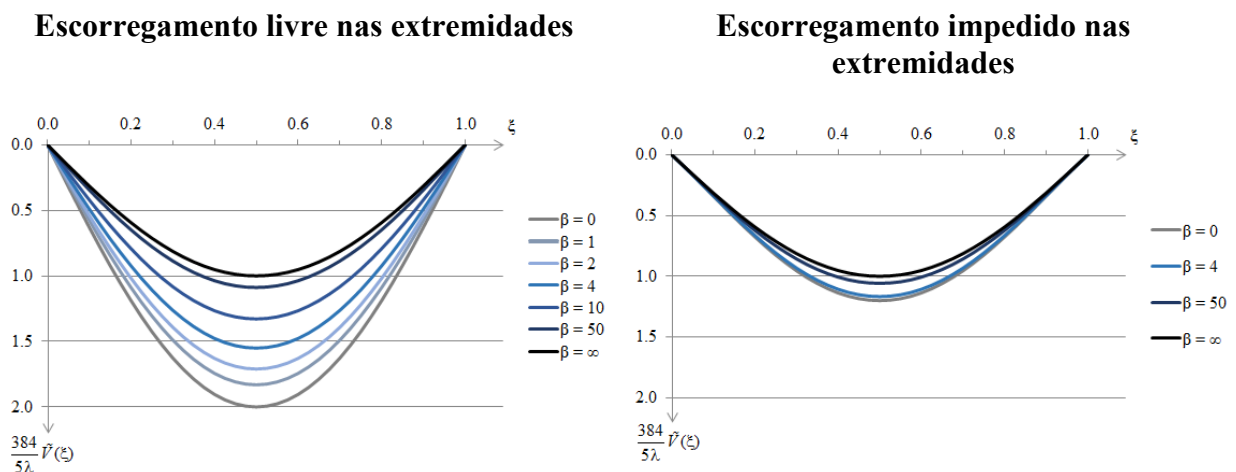


Figura 3.2 – Exemplo ilustrativo – Deslocamento transversal normalizado ($\alpha = \frac{1}{2}$ e $0 \leq \beta \leq +\infty$)

Escorregamento livre nas extremidades

Escorregamento impedido nas extremidades

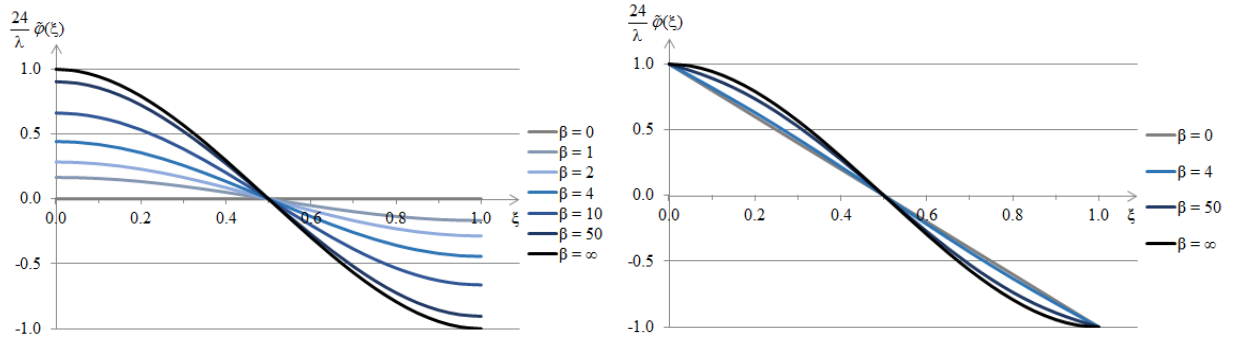


Figura 3.3 – Exemplo ilustrativo – Rotação normalizada da recta que une os baricentros das secções transversais das componentes ($\alpha = \frac{1}{2}$ e $0 \leq \beta \leq +\infty$)

Escorregamento livre nas extremidades

Escorregamento impedido nas extremidades

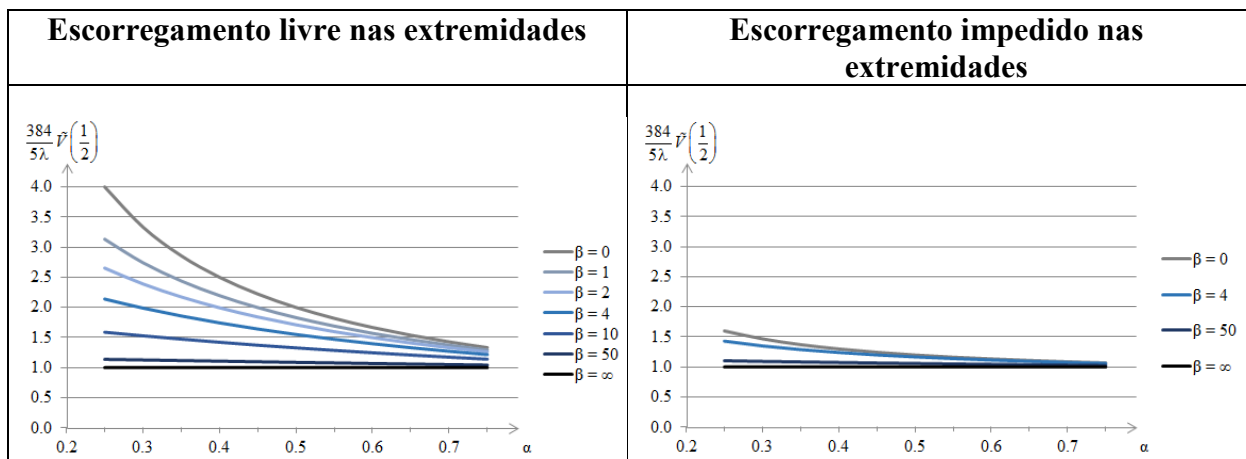


Figura 3.4 – Exemplo ilustrativo – Deslocamento transversal normalizado a meio vão ($\xi = \frac{1}{2}$) em função de α (com $0 \leq \beta \leq +\infty$)

Escorregamento livre nas extremidades

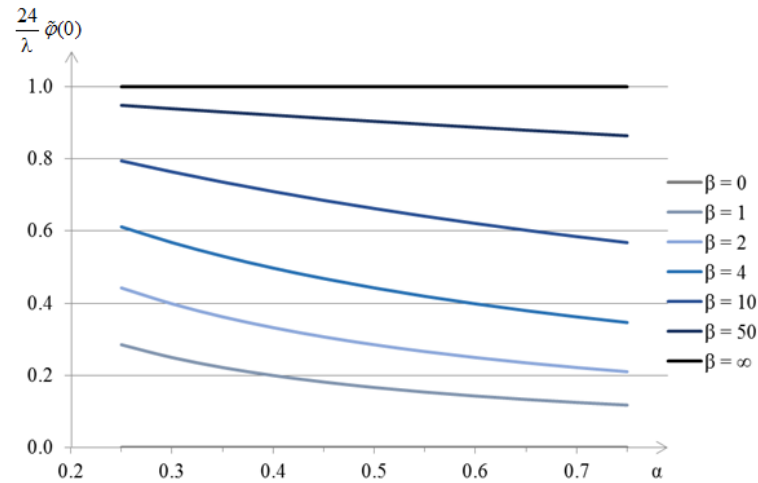


Figura 3.5 – Exemplo ilustrativo – Rotação normalizada da recta que une os baricentros das secções transversais das componentes na extremidade esquerda ($\xi = 0$) em função de α (com $0 \leq \beta \leq +\infty$)

3.4 Campos de momentos flectores M_E e M_T

Nas vigas mistas com interacção parcial ($0 < \beta < +\infty$), os campos de momentos flectores “de Euler-Bernoulli” e “de Timoshenko”, M_E e M_T , normalizados em relação a $\frac{1}{8} p_0 L^2$, são definidos por

$$\begin{aligned} \frac{M_E(\xi L)}{\frac{1}{8} p_0 L^2} &= -\frac{8\alpha}{\lambda} \tilde{V}''(\xi) \\ &= -\frac{8\alpha}{\lambda} \left[\frac{\alpha-1}{\beta} \left(C_1 e^{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \xi} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \xi} \right) + C_4 + 2C_5 \xi + \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{1}{\beta} \right) \lambda \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\frac{M_T(\xi L)}{\frac{1}{8} p_0 L^2} = -\frac{8(1-\alpha)}{\lambda} \tilde{\varphi}'(\xi) \quad (3.55)$$

$$= -\frac{8(1-\alpha)}{\lambda} \left[\frac{\alpha}{\beta} \left(C_1 e^{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \xi} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \xi} \right) + C_4 + 2C_5 \xi + \frac{\lambda}{2} \xi^2 \right].$$

As constantes são fornecidas pelas expressões (3.36)-(3.41) ou pelas expressões (3.42)-(3.47), consoante o escorregamento entre as componentes da viga mista está livre ou impedido nas secções de extremidade.

Em vigas com interacção total ($\beta = +\infty$), ou seja, com comportamento monolítico, os campos M_E e M_T dependem linearmente de α de acordo com

$$\frac{M_E(\xi L)}{\frac{1}{8} p_0 L^2} = -\frac{8\alpha}{\lambda} \tilde{V}''(\xi) = 4\alpha \xi(1-\xi) \quad (3.56)$$

$$\frac{M_T(\xi L)}{\frac{1}{8} p_0 L^2} = -\frac{8(1-\alpha)}{\lambda} \tilde{\varphi}'(\xi) = 4(1-\alpha) \xi(1-\xi). \quad (3.57)$$

No caso de interacção nula ($\beta = 0$), M_T é constante ao longo da viga (já que também são constantes os esforços axiais N_i em cada uma das componentes da viga mista), tendo-se $M_T = 0$ quando não existe impedimento ao escorregamento nas secções extremas e

$$\frac{M_T(\xi L)}{\frac{1}{8} p_0 L^2} = -\frac{8(1-\alpha)}{\lambda} \tilde{\varphi}'(\xi) = \frac{2}{3}(1-\alpha) \quad (3.58)$$

quando aquele escorregamento está impedido. Uma vez que $M_E + M_T$ é igual ao momento flector total actuante, conclui-se ainda que

$$\frac{M_E(\xi L)}{\frac{1}{8} p_0 L^2} = 4\xi(1-\xi) \quad (3.59)$$

no primeiro caso e

$$\frac{M_E(\xi L)}{\frac{1}{8} p_0 L^2} = 4\xi(1-\xi) - \frac{2}{3}(1-\alpha) \quad (3.60)$$

no segundo caso.

Salientam-se os seguintes aspectos qualitativos, ilustrados nas Figuras 3.6-3.9.

- (1) Quando o escorregamento nas secções de extremidade é livre, verifica-se que:
- (1a) Os momentos M_E e M_T são sempre nulos nessas secções e atingem um máximo na secção de meio vão, sendo funções côncavas (segunda derivada não positiva).
 - (1b) Numa qualquer secção de abcissa normalizada $\xi \neq 0, 1$ e mantendo α fixo, um aumento do parâmetro de rigidez da conexão, β , reflecte-se num aumento de $M_T(\xi L)$ (isto é, do momento associado aos esforços axiais em cada uma das componentes homogéneas, individualmente consideradas), normalizado por $\frac{1}{8} p_0 L^2$, e numa concomitante diminuição de $M_E(\xi L)$ (isto é, da soma dos momentos flectores em cada uma das componentes homogéneas, individualmente consideradas), também normalizado por $\frac{1}{8} p_0 L^2$.
 - (1c) Numa qualquer secção de abcissa normalizada $\xi \neq 0, 1$ e mantendo $\beta \neq 0$ fixo, o momento $M_E(\xi L)$, normalizado por $\frac{1}{8} p_0 L^2$, cresce com o parâmetro α , acontecendo o contrário com $M_T(\xi L)$, também normalizado por $\frac{1}{8} p_0 L^2$. Para $\beta = 0$, os momentos M_E e M_T normalizados são independentes de α .
- (2) Quando o escorregamento nas secções de extremidade está impedido (e supondo sempre β finito²), observa-se que:
- (2a) Geram-se momentos M_E negativos na vizinhança dos apoios, pelo que a condição de fronteira $M_E + M_T = 0$ impõe que os momentos M_T sejam sempre positivos nas secções de apoio (e, mantendo α fixo, tanto maiores quanto menor for β). A distribuição dos momentos M_T ao longo da viga deixa de ser côncava, apresentando dois pontos de inflexão localizados simetricamente em relação à

² Recorde-se que, para $\beta = +\infty$, as duas condições de apoio consideradas não se distinguem uma da outra.

secção de meio vão; exceptua-se o caso $\beta=0$, em que se tem $M_T = \text{constante positiva}$.

(2b) A meio vão, o momento M_E cresce com α e diminui com o aumento de β , acontecendo o contrário com M_T . Para β fixo, a variação de $M_E(\frac{L}{2})$ e $M_T(\frac{L}{2})$ com α é praticamente linear (sendo mesmo exactamente linear se $\beta=0$).

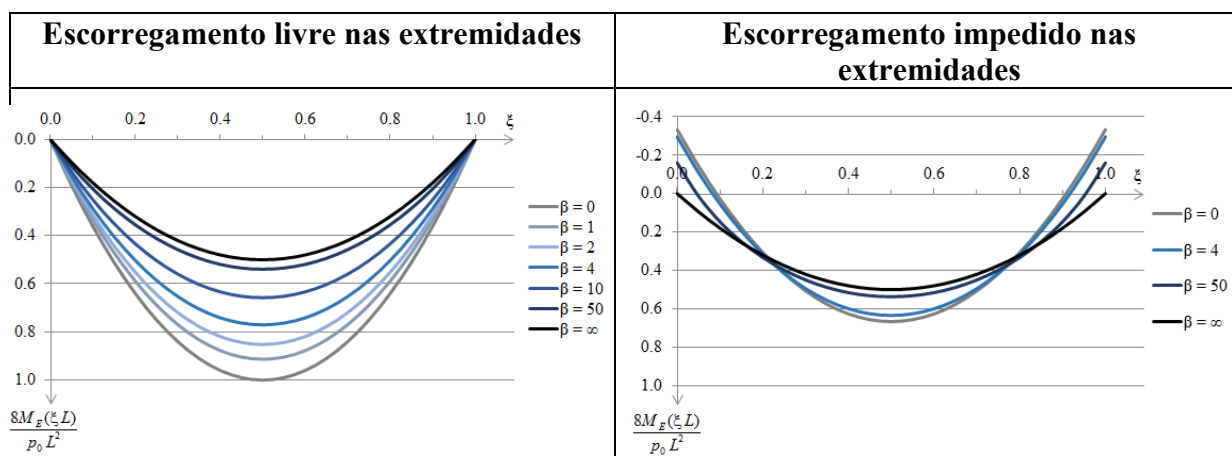


Figura 3.6 – Exemplo ilustrativo – Momentos flectores “de Euler-Bernoulli”, M_E , normalizados ($\alpha = \frac{1}{2}$ e $0 \leq \beta \leq +\infty$)

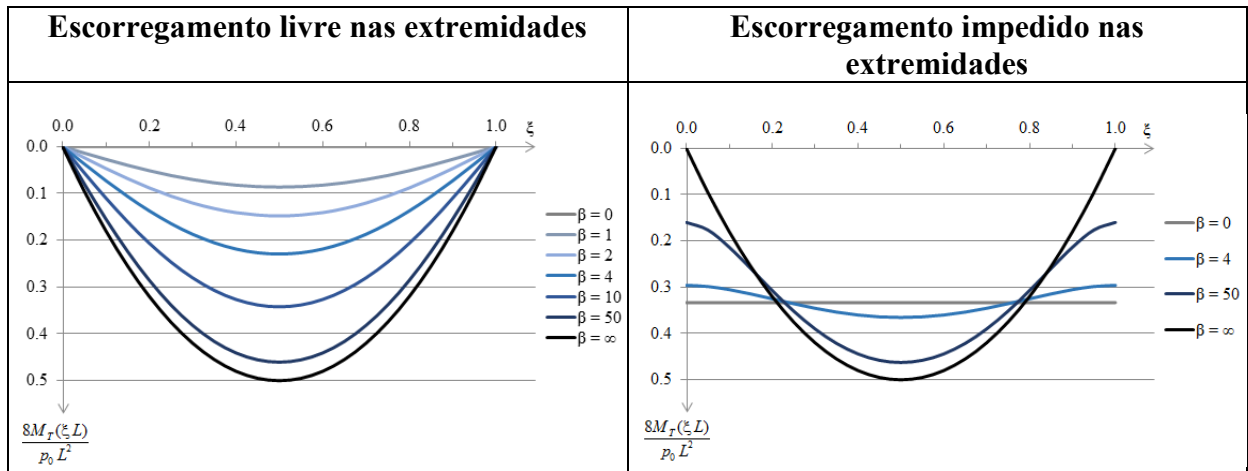


Figura 3.7 – Exemplo ilustrativo – Momentos flectores “de Timoshenko”, M_T , normalizados ($\alpha = \frac{1}{2}$ e $0 \leq \beta \leq +\infty$)

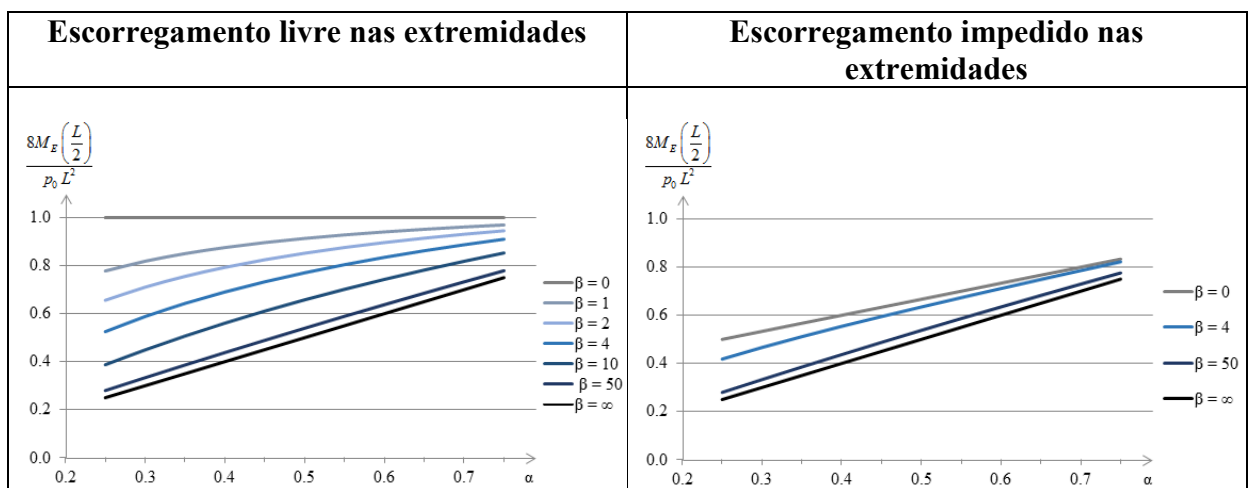


Figura 3.8 – Exemplo ilustrativo – Momento flector M_E normalizado a meio vão ($\xi = \frac{1}{2}$) em função de α (com $0 \leq \beta \leq +\infty$)

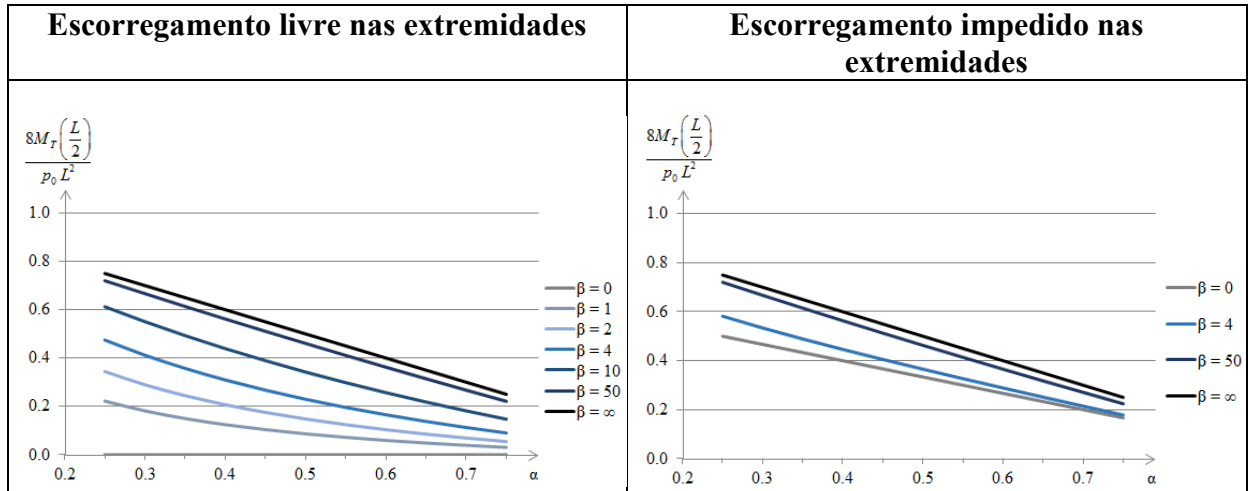


Figura 3.9 – Exemplo ilustrativo – Momento flector M_T normalizado a meio vão ($\xi = \frac{1}{2}$) em função de α (com $0 \leq \beta \leq +\infty$)

3.5 Escorregamento relativo e fluxo de corte longitudinal no interface entre as duas componentes homogéneas da viga mista

Para $0 < \beta < +\infty$, o escorregamento relativo no interface, normalizado pela distância $y_2 - y_1$ entre os baricentros das duas componentes homogéneas, é dado por (recordem-se as equações (2.11) e (3.24))

$$\frac{\delta(\xi L)}{y_2 - y_1} = \tilde{\varphi}(\xi) - \tilde{V}'(\xi) = \frac{1}{\beta} \tilde{\varphi}''(\xi) = \frac{1}{\beta} \left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \left(C_1 e^{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \xi} - C_2 e^{-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \xi} \right) + 2C_5 + \lambda \xi \right]. \quad (3.61)$$

Ainda para $0 < \beta < +\infty$, o fluxo de corte no interface entre as duas componentes, normalizado por $\frac{p_0 L}{y_2 - y_1}$, é dado por

$$\frac{q(\xi L)}{p_0 L} = \frac{k (y_2 - y_1)^2}{p_0 L} \frac{\delta(\xi L)}{y_2 - y_1} = \frac{(1 - \alpha) \beta}{\lambda} \frac{\delta(\xi L)}{y_2 - y_1} = \frac{1 - \alpha}{\lambda} \tilde{\varphi}''(\xi) \quad (3.62)$$

$$= \frac{1-\alpha}{\lambda} \left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \left(C_1 e^{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \xi} - C_2 e^{-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \xi} \right) + 2C_5 + \lambda \xi \right].$$

As constantes são fornecidas pelas expressões (3.36)-(3.41) ou pelas expressões (3.42)-(3.47), consoante o escorregamento longitudinal entre as componentes da viga mista está livre ou impedido nas secções de extremidade.

Quando $\beta = +\infty$, a viga mista tem um comportamento monolítico, ou seja, o escorregamento δ é identicamente nulo; por sua vez, o fluxo de corte no interface entre as duas componentes é dado por (Dias da Silva, 2013)

$$q(x) = \frac{y_1 E_1 A_1 Q(x)}{E_1 I_1 + E_2 I_2 + y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2}. \quad (3.63)$$

Sendo $Q(x) = p_0 L \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right)$ e tendo em atenção que $y_1 E_1 A_1 + y_2 E_2 A_2 = 0$, obtém-se da expressão anterior

$$\begin{aligned} \frac{q(\xi L)}{p_0 L} &= \frac{y_1 E_1 A_1 (y_2 - y_1) \left(\frac{1}{2} - \xi \right)}{E_1 I_1 + E_2 I_2 + y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2} \\ &= - \frac{y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2 + y_1^2 E_1 A_1 + y_2^2 E_2 A_2} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) = -(1-\alpha) \left(\frac{1}{2} - \xi \right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Finalmente, para $\beta = 0$, o fluxo de corte q entre componentes é nulo. Quando não existe impedimento ao escorregamento nas extremidades da viga, tem-se, em virtude de (3.48) e (3.49),

$$\frac{\delta(\xi L)}{y_2 - y_1} = \tilde{\varphi}(\xi) - \tilde{V}'(\xi) = -\tilde{V}'(\xi) = -\frac{\lambda}{24\alpha} (4\xi^3 - 6\xi^2 + 1). \quad (3.65)$$

Quando, pelo contrário, o escorregamento está impedido nas extremidades da viga – ou seja, quando se impõe $\delta(0) = \delta(L) = 0$ – resulta de (3.50) e (3.51) que

$$\frac{\delta(\xi L)}{y_2 - y_1} = \tilde{\varphi}(\xi) - \tilde{V}'(\xi) = -\frac{\lambda}{12\alpha} (2\xi^3 - 3\xi^2 + \xi). \quad (3.66)$$

Note-se que, em virtude da simetria do problema, se tem sempre $\delta(\frac{1}{2}L) = 0$ e $q(\frac{1}{2}L) = 0$.

A Figura 3.10 apresenta o fluxo de corte q entre componentes, normalizado por $\frac{p_0 L}{y_2 - y_1}$, para $\alpha = \frac{1}{2}$ e valores seleccionados de β , nas duas condições de apoio respeitantes ao escorregamento consideradas. Observa-se que:

- (1) Quando não existe impedimento ao escorregamento nos apoios e $\beta > 0$, o fluxo de corte normalizado, em valor absoluto, cresce monotonicamente da secção de meio vão, onde é nulo, para os apoios, onde atinge o seu valor máximo. Este máximo, por sua vez, cresce com o parâmetro de rigidez da conexão de corte, β . Para $0 < \beta < +\infty$, verifica-se ainda que $q'(0) = q'(L) = 0$.
- (2) Quando o escorregamento está impedido nas secções extremas e $0 < \beta < +\infty$, o fluxo de corte normalizado anula-se a meio vão e nas secções extremas, atingindo um máximo, em valor absoluto, em duas secções intermédias, simétricas em relação ao meio vão. À medida que β cresce, o valor absoluto máximo do fluxo normalizado também cresce e as duas secções onde ocorre aproximam-se gradualmente das extremidades da viga.
- (3) Numa qualquer secção de abcissa normalizada $\xi \neq \frac{1}{2}$, o valor absoluto do fluxo de corte normalizado é, para igual β (com $0 < \beta < +\infty$), significativamente inferior quando o escorregamento nas extremidades da viga está impedido.
- (4) Para $\beta = +\infty$ (viga de Euler-Bernoulli heterogénea), o fluxo de corte varia linearmente ao longo da viga, de acordo com o andamento do diagrama de esforço transversal Q (como, aliás, decorre da equação (3.63)).

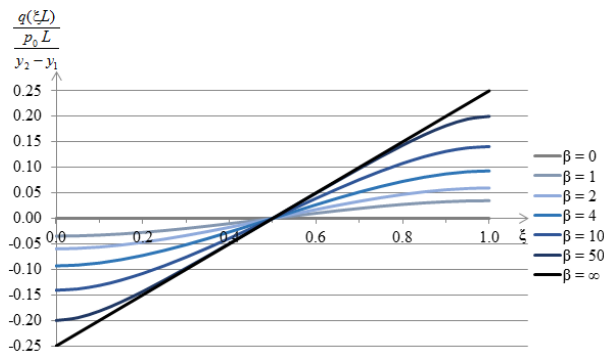
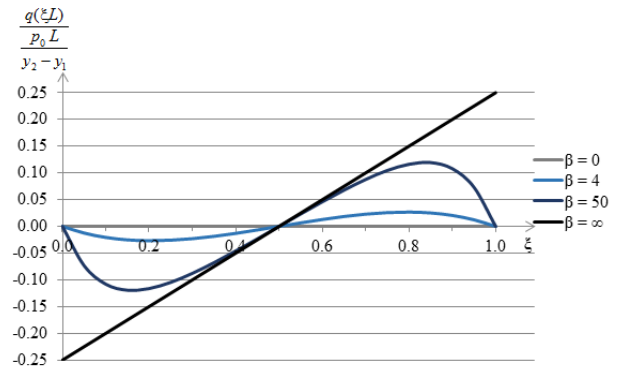
Escorregamento livre nas extremidades**Escorregamento impedido nas extremidades**

Figura 3.10 – Exemplo ilustrativo – Fluxo de corte entre componentes normalizado ($\alpha = \frac{1}{2}$ e $0 \leq \beta \leq +\infty$)

4. CONCLUSÕES

Nesta dissertação de mestrado apresentou-se de um modelo unidimensional consistente para o comportamento material e geometricamente linear de vigas mistas planas sob a acção de forças quase-estáticas. Considerou-se que a ligação de corte entre as componentes de uma viga se distribui contínua e uniformemente ao longo do interface e não se contemplou a possibilidade de separação vertical entre as componentes. Na exposição realizada, procurou manter-se uma distinção clara entre os três níveis da seguinte hierarquia: (i) fibra material, (ii) componente / camada de corte e, por fim, (iii) a viga mista. Conseguiu-se obter uma descrição dual da cinemática e do equilíbrio da viga mista (nível superior da hierarquia referida), em virtude da separação dos esforços internos em parcelas activas (que estão associadas a deformações por intermédio de uma relação constitutiva) e reactivas (que não realizam trabalho em qualquer deformação admissível). Em relação às teorias de Euler-Bernoulli ou de Timoshenko, o modelo apresentado requer a especificação de mais uma condição de fronteira, o que permite considerar eventuais restrições externas ao escorregamento entre componentes.

Com o triplo objectivo de (i) aplicar o modelo matemático exposto no capítulo anterior, (ii) ilustrar as suas potencialidades e, por essa via, (iii) compreender melhor o comportamento mecânico quase-estático de vigas mistas, efectuou-se um estudo analítico detalhado de uma viga mista submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída. Foram analisados os casos de interacção nula, parcial e total, tendo-se analisado em pormenor o efeito da variação do módulo de escorregamento no comportamento da viga. Considerou-se a viga como simplesmente apoiada, com o escorregamento entre componentes livre ou impedido. Verificou-se que esta condição de apoio adicional, relativa ao escorregamento, tem um

impacto considerável sobre o comportamento global da viga (em termos de rigidez e de distribuição longitudinal dos esforços em cada uma das componentes e do fluxo de corte entre componentes).

Refira-se que o modelo apresentado é aplicável sempre que todos os materiais, incluindo a conexão, apresentem um comportamento elástico linear, não sendo, portanto, exclusivo das vigas mistas madeira-betão. No entanto, a motivação para a realização deste trabalho residiu neste tipo de vigas específico de vigas, dadas as insuficiências do método de análise habitualmente utilizado (o “método γ ”), descrito no Eurocódigo 5. Da mesma forma, no exemplo de aplicação que foi analisado detalhadamente, adoptaram-se para o parâmetro designado por α , que traduz a relação entre as rigidezes de flexão da secção transversal da viga mista nas situações de interacção nula e de interacção total, valores característicos de vigas mistas madeira-betão.

Finalmente, sugerem-se os seguintes desenvolvimentos futuros:

- (1) Generalização do modelo apresentado de modo a incluir a possibilidade de variação longitudinal do módulo de escorregamento, de forma contínua ou por saltos, já que, na prática, é frequente variar o espaçamento entre ligadores.
- (2) Desenvolvimento de um elemento finito e sua implementação numa ferramenta numérica que permita automatizar a análise linear de vigas mistas planas.
- (3) Realização de um estudo paramétrico mais alargado, com outras condições de apoio e de carregamento, incluindo, por exemplo, vigas contínuas.
- (4) De forma mais ambiciosa, poder-se-á pensar na consideração de não linearidades materiais e efeitos diferidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arantes e Oliveira, E.R. (1999). “Elementos da Teoria da Elasticidade”. IST Press, Lisboa.
- Betti, R., Gjelsvik, A. (1996). “Elastic Composite Beams”. *Computers & Structures*, Vol. 59, Issue 3, pp. 437-451
- Branco, J. M. (2003). “Comportamento das ligações tipo cavilha em estruturas mistas madeira-betão”. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil da Universidade do Minho, Braga.
- Ceccotti A. (2002), “Composite concrete-timber structures”, *Progress in Structural Engineering and Materials*, 4(3), 264-275. doi: 10.1002/pse.126
- Dias, A., Cruz, H., Machado, J., Custódio, J., Palma, P. (2009). “Avaliação, Conservação e Reforço de Estruturas de Madeira” (1ª Edição). Lisboa.
- Dias, A. (2017). Comunicação particular.
- Dias da Silva, V. (2013). “Mecânica e Resistência dos Materiais” (4ª edição). Coimbra.
- Girhammar, U.A., Pan, D. (2007). “Exact Static Analysis of Partially Composite Beams and Beam-Columns”. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 49, Issue 2, pp. 239-255.
- Gjelsvik, A. (1991). “Analog-Beam Method for Determining Shear-Lag Effects”. *Journal of Engineering Mechanics – ASCE*, Vol. 117, Issue 7, pp. 1575-1594.
- Hjelmstad, K.D. (2005). “Fundamentals of Structural Mechanics” (2nd edition). Springer, New York.
- Jorge, L. F. (2005). “Estruturas mistas madeira-betão com utilização de betões de agregados leves”. Tese de Doutoramento, Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra, Coimbra.

- NP EN 1994-1-1 (2011). “Eurocódigo 4 – Projecto de Estruturas Mistas Aço-Betão. Parte 1-1: Regras Gerais e Regras para Edifícios”. Instituto Português da Qualidade, Caparica.
- Podio-Guidugli, P. (1989). “An Exact Derivation of the Thin Plate Equation”. *Journal of Elasticity*, Vol. 22, Issues 2-3, pp. 121-133.
- Rodrigues, J.N.A. (2014). “Pontes com Estrutura Mista Madeira-Betão e seu Potencial de Aplicação”. Tese de Doutoramento, Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Tonti, E. (1972a). “On the Mathematical Structure of a Large Class of Physical Theories”. *Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali – Accademia Nazionale dei Lincei*, Series 8, Vol. 52, Issue 1, pp. 48-56.
- Tonti, E. (1972b). “A Mathematical Model for Physical Theories”. *Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali – Accademia Nazionale dei Lincei*, Series 8, Vol. 52, Issues 2-3, pp. 176-181.
- Wolfram Research (2006). “Wolfram Mathematica 6.2”. Champaign, Illinois.
- Yeoh D., Fragiaco M., De Franceschi M. and Heng Boon K. (2011), State of the art on timber-concrete composite structures: Literature review, *Journal of Structural Engineering – ASCE*, **137**(10), 1085-1095. doi: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000353