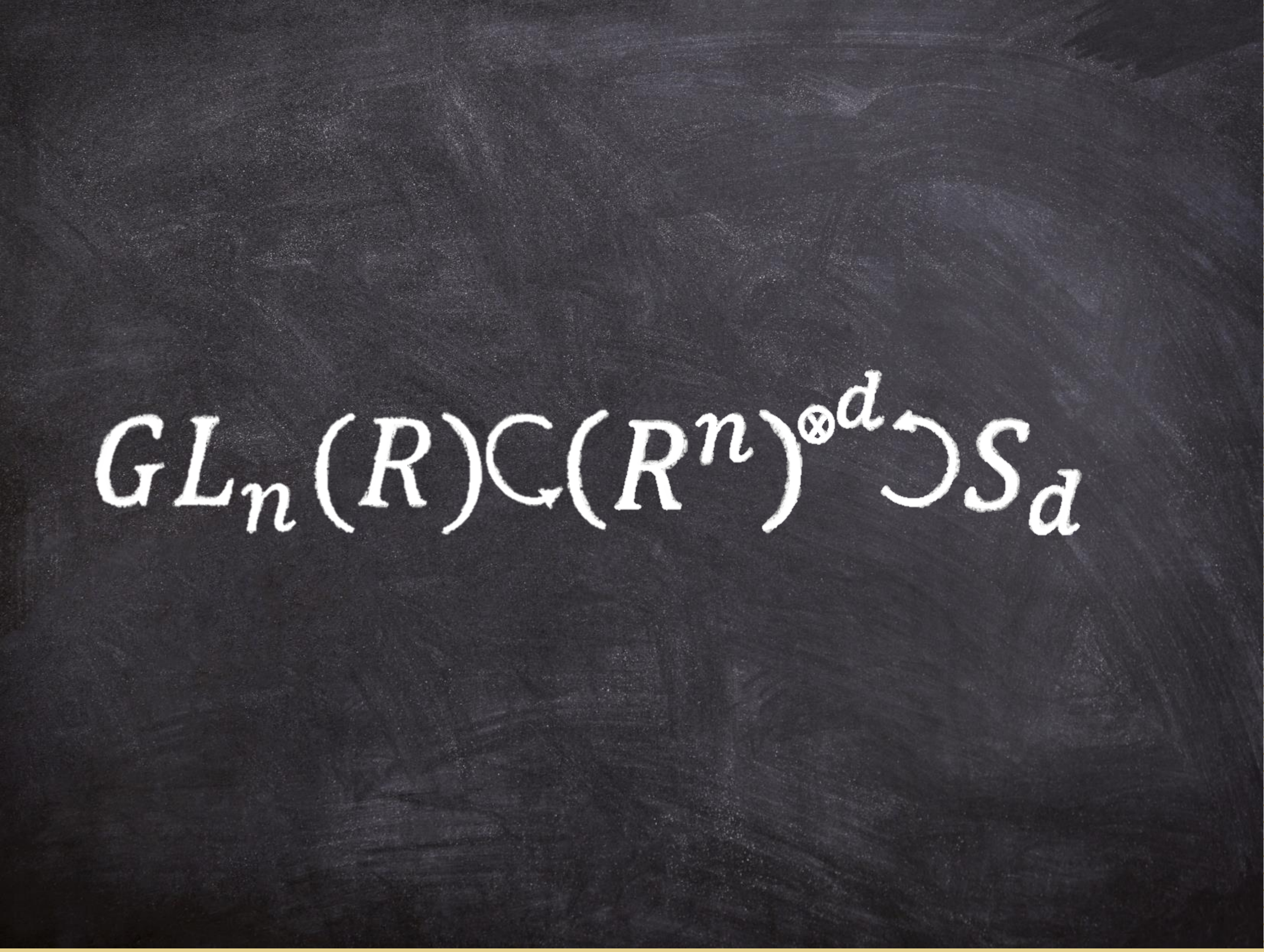


Tiago Miguel Santos Cruz

# Dualidade de Schur-Weyl

Dissertação de Mestrado em Matemática, Área de Especialização em Matemática Pura, co-orientada pela Professora Doutora Ana Paula Santana e pelo Professor Doutor Ivan Yudin e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Junho de 2017

· U C ·

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

# Dualidade de Schur-Weyl

**Tiago Cruz**

· U C ·

Universidade de Coimbra

Mestrado em Matemática

Master in Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Junho 2017

# Resumo

Nesta dissertação, as noções de representação polinomial e polinomial homogénea do grupo linear geral são apresentadas para corpos, estendendo depois a noção de representação polinomial homogénea para anéis comutativos.

A álgebra de Schur será abordada, estudando algumas das suas propriedades.

De modo a relacionar os conceitos anteriores, apresenta-se a dualidade de Schur-Weyl, e compara-se a teoria das representações polinomiais homogéneas do grupo linear geral com a teoria dos módulos sobre a álgebra de Schur. Esta comparação conduz-nos ao estudo de epimorfismos fortes no sentido de teoria de representações, sendo elaborados alguns resultados para este conceito.

Mostra-se que, caso a dualidade de Schur-Weyl se verifique, existe equivalência entre a categoria dos módulos sobre a álgebra de Schur com a categoria das representações polinomiais homogéneas. Prova-se que, sobre corpos, a dualidade de Schur-Weyl ocorre se e só se estas categorias forem equivalentes. Tal acontece para corpos infinitos e para corpos finitos suficientemente grandes. Para os restantes corpos finitos, mostra-se a existência de casos nos quais a dualidade de Schur-Weyl não se verifica.

Generalizando os resultados anteriores, neste trabalho, encontra-se uma condição suficiente para que a dualidade de Schur-Weyl ocorra sobre anéis comutativos quaisquer.

Por fim, estudam-se functores de Schur, que permitem conectar a teoria das representações polinomiais homogéneas do grupo linear geral com a teoria das representações do grupo simétrico, como aplicação da dualidade de Schur-Weyl.



***Palavras-chave.*** Álgebra de Schur; grupo linear geral; dualidade de Schur-Weyl; epimorfismo forte.

# Abstract

In this dissertation, polynomial representations of the general linear group are explored over an arbitrary field and homogeneous polynomial representations are also explored over commutative rings.

The Schur Algebra is studied. In particular, some results on its structure are given.

In order to relate these two concepts the notion of Schur-Weyl duality is introduced. Over fields, this duality is the bridge between the study of the homogeneous polynomial representations of the general linear group and the study of the modules over the Schur algebra. Over arbitrary rings, one can only conclude that when the Schur-Weyl duality holds then the category of homogeneous polynomial representations is equivalent to the category of modules over the Schur algebra. This relation is linked with the study of strong epimorphism in the sense of representation theory. So we study these maps and give some of their properties.

It is known that Schur-Weyl duality holds for infinite fields and for finite fields sufficiently large. We present here the proofs of these results. We also show the existence of cases when the Schur-Weyl duality does not hold.

We establish a sufficient condition that generalizes all the known cases of Schur-Weyl duality so far: for any commutative ring with enough units closed under addition, the Schur-Weyl duality holds.

In this work, we also briefly study Schur functors and apply the study of the Schur-Weyl duality to connect the homogeneous polynomial representation theory of the general linear group and the representation theory of the symmetric group.

***Keywords.*** Schur algebra; general linear group; Schur-Weyl duality; strong epimorphism.

# Conteúdo

# Capítulo 1

# Introdução

Seja $R$ um anel comutativo com identidade. Dado um grupo $G$, uma representação de $G$ é um homomorfismo de grupos $r\colon G \to GL(V)$, onde $V$ é um $R$-módulo e $GL(V)$ é o grupo dos $R$-automorfismos de $V$. Uma representação pode ser interpretada de várias perspectivas. Isto é, qualquer representação de $G$ está associada a uma representação da álgebra de grupo $RG$ e é equivalente a termos um $RG$-módulo [10].

Portanto, a teoria das representações de um grupo $G$ é equivalente ao estudo da estrutura da categoria dos $RG$-módulos.

Dado que o grupo linear geral de grau $n$, $GL_n(R)$, é um dos grupos mais relevantes em diversas áreas da Matemática, é do nosso interesse estudar a sua teoria de representações. No caso clássico, em que $R = \mathbb{C}$, é conhecido que as representações mais interessantes de $GL_n(\mathbb{C})$ são as racionais. Por exemplo, na perspectiva de geometria álgebrica, estas são exactamente as representações $r$ tais que $r\colon GL_n(\mathbb{C}) \to GL_N(\mathbb{C})$ é uma função regular entre variedades afins. Por outro lado, toda a representação racional pode ser escrita na forma $(det)^k \otimes r$ para alguma representação polinomial $r$ e algum inteiro $k$, onde $det$ denota a aplicação determinante. Assim, é importante estudar a teoria das representações polinomiais do grupo linear geral.

Issai Schur, na sua dissertação, determinou, para qualquer natural $n$, todas as representações polinomais de dimensão finita do grupo linear geral $GL_n(\mathbb{C})$. Schur mostrou que qualquer representação polinomial de dimensão finita de $GL_n(\mathbb{C})$ é equivalente a uma soma directa de homogéneas. Para resolver o problema anterior, Schur mostrou que as representações polinomiais homogéneas de grau $d$ de $GL_n(\mathbb{C})$ podiam ser identificadas com as representações de uma $\mathbb{C}$-álgebra de dimensão finita, hoje designada por álgebra de Schur.

Esta elegante conexão viria a ser conhecida por dualidade de Schur-Weyl, para o corpo dos números complexos.

Schur usou a álgebra de Schur para o estudo das representações complexas polinomiais homogéneas do grupo linear geral da mesma forma que a álgebra de grupo é usada para o estudo das representações de um grupo finito. Note-se que, no caso de $GL_n(\mathbb{C})$, a álgebra de grupo tem dimensão infinita, o que a torna pouco interessante, enquanto que a álgebra de Schur tem dimensão finita.

Além disso, para $n \geq d$, Schur estabeleceu uma correspondência entre as representações da álgebra de Schur e as representações do grupo simétrico $S_d$, via o functor de Schur. Combinando com o trabalho de Frobenius nos grupos simétricos, Schur conseguiu provar que as classes de isomorfismo das representações polinomias homogéneas simples de grau $d$ de $GL_n(\mathbb{C})$ podem ser parametrizadas pelas partições de $d$ em no máximo $n$ partes e que qualquer representação polinomial é semi-simples.

Com esta dissertação pretendem-se apresentar os principais desenvolvimentos da dualidade de Schur-Weyl para corpos, obtidos por De Concini, C. Procesi, J.A. Green, R.W. Carter, G. Lusztig, D. Benson, S. Doty e R.M. Bryant [2, 4, 5, 7, 9, 11].

Pode perguntar-se como podem estas noções ser generalizadas para anéis comutativos arbitrários. Para tal é necessário introduzir e estudar a noção de representação polinomial homogénea para estes anéis e relacionar estas representações com os módulos sobre a álgebra de Schur. Este trabalho é feito por H. Krause [14] e é aqui apresentado e explorado.

No capítulo 5, aborda-se a dualidade de Schur-Weyl para anéis comutativos arbitrários obtendo-se, tanto quanto sabemos resultados originais.

Para terminar a dissertação, aplica-se o trabalho de Morita às álgebras de Schur, conectando a teoria das representações do grupo linear geral com a teoria das representações do grupo simétrico, baseando-nos em [15, 17].

# Capítulo 2

# Representações polinomiais

## 2.1 Representações polinomiais sobre corpos

**Definição 2.1.1.** [12] Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $n \in \mathbb{N}$. Consideremos as funções $X_{ts}\colon GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ que enviam a matriz $g = (g_{ij}) \in GL_n(\mathbb{K})$ para a sua entrada $g_{ts}$, $1 \leq t, s \leq n$.

Uma representação de $GL_n(\mathbb{K})$, $r\colon GL_n(\mathbb{K}) \to GL(V)$, diz-se *polinomial* se existir uma base $(v_i)_{i \in I}$ de $V$, tal que as funções $r_{ij}$ definidas por

$$r(g)(v_j) = \sum_{i \in I} r_{ij}(g) v_i, \quad g \in GL_n(\mathbb{K}),\ j \in I,$$

possam ser expressas como polinómios, com coeficientes em $\mathbb{K}$, nas funções $X_{ts}$, $t, s = 1, \ldots, n$.

A representação $r$ diz-se *polinomial homogénea* de grau $d$ se as funções $r_{ij}$ forem homogéneas com grau $d$ .

O facto de uma representação ser polinomial é independente da base. De facto, se $r$ for uma representação polinomial de $GL_n(\mathbb{K})$ numa dada base de $V$, ao escolhermos outra base, as funções $r'_{i,j}$ obtidas na nova base são simplesmente a soma de um produto de constantes, que apenas dependem das bases envolvidas, com as funções $r_{i,j}$ da base anterior.

Este facto poderá também ser deduzido como consequência de um teorema que veremos mais adiante. Vejamos alguns exemplos clássicos de representações polinomiais homogéneas.

**Exemplo 2.1.2.** Seja $\mathbb{K}$ um corpo. A representação $\det\colon GL_n(\mathbb{K}) \to GL(\mathbb{K})$, que atribui a cada elemento de $GL_n(\mathbb{K})$ o seu determinante, é uma representação polinomial homogénea de grau $n$.

**Exemplo 2.1.3.** Seja $\mathbb{K}$ um corpo. A representação standard $r\colon GL_n(\mathbb{K}) \to GL(\mathbb{K}^n)$, que a cada elemento $g \in GL_n(\mathbb{K})$ atribui o isomorfismo $g\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definido pela multiplicação usual $g(x) = gx$, é uma representação polinomial homogénea de grau 1.

No entanto, nem todas as representações são polinomiais como podemos ver no próximo exemplo.

**Exemplo 2.1.4.** Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. A representação $r\colon GL_2(\mathbb{R}) \to GL_2(\mathbb{R})$, dada por

$$r(A) = \begin{bmatrix} 1 & \log(|\det(A)|) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ onde } A \in GL_2(\mathbb{R}),\ \text{não é polinomial.}$$

*Demonstração.* É imediato que $r$ é uma representação. Suponhamos que $r$ é polinomial. Então a função $f\colon B \to \mathbb{R}$, onde $B = \{x \in \mathbb{R}^4 | x_1x_4 - x_2x_3 > 0\}$, pode ser escrita como soma de polinónimos nas variáveis $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$. Assim, $\frac{\partial^n f}{\partial x_1^n}$ seria a função nula para certo $n \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo. $\square$

O próximo teorema afirma que, se o corpo for infinito, para estudar a teoria das representações polinomiais de dimensão finita é suficiente estudar as representações polinomiais homogéneas.

**Teorema 2.1.5.** *[16, 2.1] Seja $\mathbb{K}$ um corpo infinito. Qualquer representação polinomial de $GL_n(\mathbb{K})$ de dimensão finita pode ser escrita como soma directa de representações polinomiais homogéneas.*

*Demonstração.* Consideremos a representação polinomial $r\colon GL_n(\mathbb{K}) \to GL(V)$ e $(v_i)_{i=1,\ldots,N}$ uma base de $V$ com

$$r(g)(v_j) = \sum_{i=1}^{N} r_{ij}(g)v_i, \quad g \in GL_n(\mathbb{K}),\ j = 1,\ldots,N, \text{ tal que todos } r_{i,j}(g) \text{ são polinomiais.}$$

Para cada $k \geq 0$ e $A \in GL_n(\mathbb{K})$ definamos as matrizes $M_k(A) = [r_{ij}^{(k)}(A)]$, onde $r_{ij}^{(k)}(A)$ é a componente homogénea com grau $k$ de $r_{ij}(A)$.

Seja $x \in \mathbb{K}$ qualquer. Para todo o $A \in GL_n(\mathbb{K})$, obtemos

$$r(xA) = M_0(A) + xM_1(A) + \ldots + x^d M_d(A), \text{ para algum } d \geq 0. \tag{2.1}$$

Dado que $r$ é uma representação, temos $[r(xA)][r(yB)] = [r(xyAB)],\ \forall x,y \in \mathbb{K},\ A,B \in GL_n(\mathbb{K})$, ou seja,

$$\Big(M_0(A) + xM_1(A) + \cdots + x^d M_d(A)\Big)\Big(M_0(B) + yM_1(B) + \cdots + y^d M_d(B)\Big) =$$
$$= M_0(AB) + xyM_1(AB) + \cdots + x^d y^d M_d(AB).$$

Uma vez que $\mathbb{K}$ é um corpo infinito, comparando os coeficientes em ambos os membros da igualdade, sai que

$$M_0(A)M_0(B) = M_0(AB), M_1(A)M_1(B) = M_1(AB), \ldots, M_d(A)M_d(B) = M_d(AB) \tag{2.2}$$
$$M_i(A)M_j(B) = 0, \text{ para } 1 \leq i \neq j \leq n. \tag{2.3}$$

Para simplificar a notação escrevemos $E_i = M_i(I_n),\ i = 1,\ldots,d$.

Assim, $I_N = [r(I_n)] = E_0 + \ldots + E_d$.

Fixando $A = B = I_n$, obtemos $E_i^2 = E_i,\ E_jE_i = E_iE_j = 0,\ 1 \leq i \neq j \leq n$. Tomando $B = I$ ou $A = I$, vem $E_iM_i(A) = M_i(A) = E_iM_i(A)$. Observe-se ainda que $E_i \neq 0$ quando $M_i(A) \neq 0$, para algum $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Tem-se como factos conhecidos de Álgebra Linear que uma matriz idempotente tem como valores próprios 0 e 1 e é diagonalizável. Como $E_iE_j = E_jE_i$, elas são simultaneamente diagonalizáveis. Assim, podemos encontrar $P \in GL_N(\mathbb{K})$ tal que para cada $i$, $i = 1,\ldots,d$, $E_i' := P^{-1}E_iP$ é uma matriz que possui um certo número de 1's consecutivos ao longo da diagonal e 0's nas restantes entradas.

Escrevendo $M_i'(A) = P^{-1}M_i(A)P$, $i = 1,\dots,d$ obtemos as relações

$$E_i'M_i'(A) = M_i'(A)E_i' \tag{2.4}$$
$$E_j'M_i'(A) = M_i'(A)E_j' = 0, \quad j = 1,\dots,d,\ i \neq j \tag{2.5}$$
$$E_i'M_i'(A) = M_i'(A)E_i' = M_i'(A) \tag{2.6}$$

Assim, $M_i'(A)$ tem entradas nulas excepto nas linhas e colunas nas quais $E_i'$ tem 1. Concluímos que $P^{-1}[r_{ij}(A)]P$ é a soma diagonal de matrizes por blocos $M_i'(A)$. Finalmente $r$ é equivalente a uma soma directa de representações polinomiais homogéneas. □

Vejamos agora uma aplicação do teorema anterior.

**Exemplo 2.1.6.** Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. A representação polinomial $r\colon GL_2(\mathbb{R}) \to GL_3(\mathbb{R})$ definida por

$$r(g) = \begin{bmatrix} g_{1,1} - g_{2,1} & g_{1,1} - g_{2,1} + g_{1,2} - g_{2,2} & g_{1,1} - g_{2,1} + g_{1,2} - g_{2,2} \\ g_{2,1} & g_{2,1} + g_{2,2} & g_{2,1} + g_{2,2} - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g = (g_{ij}) \in GL_2(\mathbb{R}),$$

é equivalente a uma soma directa de representações polinomiais homogéneas.

*Demonstração.* Apliquemos o teorema anterior, usando a mesma notação. Então,

$$E_0(g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_1(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_i = 0,\ i \geq 2.$$

Como $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de $E_0$ associado ao valor próprio 1 e vector próprio de $E_1$ associado ao valor próprio 0 e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de $E_1$ associados ao valor próprio 1 e vectores próprios de $E_0$ associados ao valor próprio 0, podemos escolher $P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Assim $r$ é equivalente à representação $g \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_{2,2} & g_{2,1} \\ 0 & g_{1,2} & g_{1,1} \end{bmatrix}$, que é uma soma directa de representações polinomiais homogéneas. □

**Exemplo 2.1.7.** Seja $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$. A representação $r\colon GL_2(\mathbb{K}) \to GL_2(\mathbb{K})$ definida por

$$r(A) = \begin{bmatrix} 1 & f(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = (a_{ij}) \in GL_2(\mathbb{K}),$$

onde $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 1+x_1x_4(1-x_2)(1-x_3)+x_1x_2x_3(1-x_4)+x_2x_3x_4(1-x_1)$, $x_i \in \mathbb{K}$, $i = 1,\ldots,4$ é uma representação polinomial, mas não é uma soma directa de representações polinomiais homogéneas.

*Demonstração.* Comecemos por mostrar que $r$ é uma representação. Observemos que $S_3 \cong GL_2(\mathbb{K})$, onde $g\colon GL_2(\mathbb{K}) \to S_3$, definido por $g\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (123)$ e $g\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = (12)$, é o isomorfismo considerado entre estes dois grupos. Esta identificação induz a aplicação $r' = g \circ r \circ g^{-1}$. Portanto, $r'(e) = r'(132) = r'(123) = e$, e $r'(12) = r'(13) = r'(23) = (23)$. Temos que $r'$ é um homomorfismo entre grupos, logo $r$ é uma representação.

Pela definição de representação polinomial é imediato constatar que $r$ é uma representação polinomial que não é homogénea. Se $r$ fosse uma soma directa de representações polinomiais homogéneas então o $GL_2(\mathbb{K})$-módulo originado pela representação admitiria uma base com 2 elementos que seriam vectores próprios para a transformação linear definida pela multiplicação à esquerda de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ com os elementos de $V$, o que é falso. $\square$

Assim sendo, o Teorema 2.1.5 falha para corpos finitos. No entanto, esta falha acaba por não ser imprevísivel pois, usando técnicas de interpolação, vê-se que qualquer representação de $GL_n(\mathbb{K})$ é polinomial sobre corpos finitos e portanto seria soma directa de polinomiais homogéneas. Apesar de ser do nosso interesse estudar outros contextos para além de corpos infinitos, focaremos exclusivamente a nossa atenção em representações polinomiais homogéneas. Generalizemos de seguida o conceito para anéis comutativos.

## 2.2 Representações polinomiais homogéneas sobre anéis comutativos

**Definição 2.2.1.** [14] Seja $R$ um anel comutativo com identidade.

Considerem-se $R$-módulos $M$ e $N$ tais que $M$ é livre. A aplicação $f\colon M \to N$ diz-se *polinomial homogénea* de grau $d$ se existir uma base $(x_i)_{i\in I}$ de $M$ e uma família $(y_\upsilon)_{\upsilon\in\mathbb{N}^{(I)},|\upsilon|=d}$ de elementos em $N$ tais que

$$f\left(\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\right) = \sum_{\upsilon\in\mathbb{N}^{(I)},|\upsilon|=d} \lambda^\upsilon y_\upsilon,$$

para todos $\lambda_i \in R$, onde $|\upsilon| = \sum_{i\in I}\upsilon_i$, $\lambda^\upsilon = \prod_{i\in I}\lambda_i^{\upsilon_i}$ e $\mathbb{N}^{(I)} = \{\upsilon \mid \upsilon\colon I \to \mathbb{N}_0\}$.

Uma representação $r\colon GL_n(R) \to GL(V)$ diz-se *polinomial homogénea de grau $d$* se puder ser estendida para uma aplicação $r^*\colon End_R(R^n) \to End_R(V)$ polinomial homogénea de grau $d$.

É importante notar que uma extensão, $r^*$, de uma representação, $r$, de $GL_n(R)$ é uma aplicação $r^*$ tal que $r^* \circ i = r$, onde $i\colon GL_n(R) \to End_R(R^n)$ é a aplicação definida por

$$i(A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}, \quad A = [a_{ij}] \in GL_n(R), \tag{2.7}$$

onde $(b_{ij})$ é uma base qualquer fixa de $End_R(R^n)$. Desta forma, chamaremos extensão canónica quando a base utilizada for a base canónica de $End_R(R^n)$.

**Teorema 2.2.2.** *Se $\mathbb{K}$ for um corpo então as definições 2.1.1 e 2.2.1 são equivalentes.*

*Demonstração.* Sejam $r\colon GL_n(\mathbb{K}) \to GL(V)$ uma representação polinomial homogénea de grau $d$ segundo a definição 2.1.1 e $(v_i)_{i\in I}$ a base escolhida de $V$. Consideremos a base $(f_{k,l})_{k,l\in I}$ para $End_{\mathbb{K}}(V)$, dada por $f_{k,l}(v_j) = \delta_{l,j}v_k,\ j \in I$. Seja $(e_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ a base canónica para $End_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)$. Fixemos arbitrariamente $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Portanto $r(A) = \sum_{i,j\in I} r_{ij}(A)f_{ij}$. Pela definição, $r_{ij}(A)$ pode ser expresso como um polinómio homogéneo de grau $d$, isto é,

$$r_{ij}(A) = \sum_{\upsilon\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n, |\upsilon|=d} \lambda_{\upsilon,i,j} \prod_{k,l=1}^{n} a_{k,l}^{\upsilon_{k,l}}.$$

Assim, definindo $y_\upsilon = \sum_{i,j\in I} \lambda_{\upsilon,i,j} f_{ij}$, obtemos

$$r(A) = \sum_{i,j\in I}\sum_{\upsilon,|\upsilon|=d} \lambda_{\upsilon,i,j}\left(\prod_{k,l=1}^{n} a_{k,l}^{\upsilon_{k,l}}\right) f_{ij} = \sum_{\upsilon,|\upsilon|=d}\left(\prod_{k,l=1}^{n} a_{k,l}^{\upsilon_{k,l}}\right)\sum_{i,j\in I}\lambda_{\upsilon,i,j}f_{ij} = \sum_{\upsilon,|\upsilon|=d}\lambda^{\upsilon}y_\upsilon, \tag{2.8}$$

onde $\lambda^{\upsilon} = \left(\prod_{k,l=1}^{n} a_{k,l}^{\upsilon_{k,l}}\right)$.

Podemos definir a aplicação $r^*\colon End_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) \to End_{\mathbb{K}}(V)$ do seguinte modo: para $x \in End_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)$, $x = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}e_{ij}$, tem-se $r^*(x) = \sum_{\upsilon,|\upsilon|=d}\prod_{i,j=1}^{n} x_{i,j}^{\upsilon_{i,j}} y_\upsilon$. Desta forma, $r^*$ é uma aplicação polinomial homogénea e estende $r$. Por outras palavras $r$ é uma representação polinomial homogénea de grau $d$ no sentido da definição 2.2.1.

Suponhamos agora que $r\colon GL_n(\mathbb{K}) \to GL(V)$ é uma representação polinomial homogénea de $GL_n(\mathbb{K})$ de grau $d$ no sentido da definição 2.2.1. Assim existe $r^*\colon End_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) \to End_{\mathbb{K}}(V)$ tal que $r^*\left(\sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}b_{ij}\right) = \sum_{\upsilon,|\upsilon|=d}\prod_{i,j=1,\dots,n} a_{i,j}^{\upsilon_{i,j}} y_\upsilon$, em que $b_{ij}$ é uma base de $End_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)$. Deste modo, existem coeficientes $\gamma_{l,k}^{j,j}$ tais que $e_{ij} = \sum_{l,k=1}^{n}\gamma_{l,k}^{j,j}b_{l,k}$.

Fixamos $(v_i)_{i\in I}$ uma base qualquer de $V$ e definamos $(f_{k,l})$ como anteriormente. Dado que $y_\upsilon \in End_{\mathbb{K}}(V)$, então existem coeficientes $\alpha_{\upsilon,k,l} \in \mathbb{K}$ tais que $y_\upsilon = \sum_{k,l\in I}\alpha_{\upsilon,k,l}f_{k,l}$. Assim, para $A \in GL_n(\mathbb{K})$ temos

$$\begin{aligned}
r(A) = r^*\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}e_{i,j}\right) &= r^*\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\sum_{l,k=1}^{n}\gamma_{l,k}^{j,j}b_{l,k}\right) = r^*\left(\sum_{l,k=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\gamma_{l,k}^{j,j}\right)b_{l,k}\right)\\
&= \sum_{\upsilon,|\upsilon|=d}\left(\prod_{l,k=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{l,k}^{j,j}a_{ij}\right)^{\upsilon_{l,k}}\right)\sum_{s,t\in I}\alpha_{\upsilon,s,t}f_{s,t}\\
&= \sum_{s,t\in I}\left(\sum_{\upsilon,|\upsilon|=d}\alpha_{\upsilon,s,t}\prod_{l,k=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{l,k}^{j,j}a_{ij}\right)^{\upsilon_{l,k}}\right)f_{s,t}\\
&= \sum_{s,t\in I} r_{s,t}(A)f_{s,t},
\end{aligned}$$

onde $r_{s,t}(A)$, como se pode ver, é um polinómio homógeneo de grau $d$ com coeficientes em $\mathbb{K}$ nas entradas $a_{i,j}$, $i,j = 1,\dots,n$. Portanto,

$$r(A)(v_j) = \sum_{k,l\in I} r_{k,l}(A) f_{k,l}(v_j) = \sum_{k,l\in I} r_{k,l}(A)\delta_{l,j} v_k = \sum_{k\in I} r_{k,j}(A) v_k, \; j \in I. \tag{2.9}$$

O que significa que $r$ é uma representação polinomial homogénea de grau $d$ no sentido da definição 2.1.1. $\square$

Como resultado desta prova podemos ainda inferir o seguinte facto. As representações polinomiais homogéneas de $GL_n(\mathbb{K})$ de grau $d$ num espaço vectorial são independentes da escolha da base do espaço vectorial $V$, e da escolha da base de $End_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)$, uma vez que foram escolhidas bases arbitrárias na demonstração.

O facto de uma representação ser polinomial homogénea para anéis comutativos também não depende da base escolhida de $End_R(R^n)$, como podemos ver de seguida.

**Teorema 2.2.3.** *Seja $R$ um anel comutativo com identidade. Sejam $M$ e $N$ $R$-módulos tais que $M$ é livre.*

*Se uma aplicação $f: M \to N$ for polinomial homogénea de grau $d$ numa dada base de $M$, então também o é para qualquer base de $M$. Em particular, se uma representação $r$ de $GL_n(R)$, for polinomial homogénea de grau $d$ então qualquer extensão $r^*: End_R(R^n) \to End_R(V)$ é polinomial homogénea de grau $d$.*

*Demonstração.* Suponhamos que $f: M \to N$ é uma aplicação polinomial homogénea de grau $d$ para a base $(x_i)_{i\in I}$. Assim existem elementos $y_\upsilon \in N$ tais que

$$f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{\upsilon\in\mathbb{N}^{(I)}, |\upsilon|=d} \lambda^\upsilon y_\upsilon.$$

Seja $(w_i)$ outra base de $M$. Então existem coeficientes $\alpha_{j,i} \in R$ tais que $w_i = \sum_{j\in I} \alpha_{j,i} x_j$. Fixemos um elemento qualquer $\sum_{i\in I} \lambda_i w_i$ de $M$.

Assim,

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i\in I}\lambda_i w_i\right) &= f\left(\sum_{s=1}^{l}\lambda_{i_s} w_{i_s}\right) = f\left(\sum_{s=1}^{l}\lambda_{i_s}\left(\sum_{j\in I}\alpha_{j,i_s} x_j\right)\right) \\
&= \sum_{\upsilon,|\upsilon|=d}\left(\prod_{j\in I}\left(\sum_{s=1}^{l}\lambda_{i_s}\alpha_{j,i_s}\right)^{\upsilon_j}\right) y_\upsilon \\
&= \sum_{\upsilon,|\upsilon|=d}\left(\prod_{j\in I}\sum_{1\le s_1,\dots,s_{\upsilon_j}\le l}\lambda_{i_{s_1}}\cdots\lambda_{i_{s_{\upsilon_j}}}\alpha_{j,i_{s_1}}\cdots\alpha_{j,i_{s_{\upsilon_j}}}\right) y_\upsilon \\
&= \sum_{\upsilon,|\upsilon|=d}\left(\prod_{j\in I}\sum_{1\le s_1,\le,\dots\le s_{\upsilon_j}\le l}\lambda_{i_{s_1}}\cdots\lambda_{i_{s_{\upsilon_j}}}\alpha_{s_1,\dots,s_{\upsilon_j}}\right) y_\upsilon \\
&= \sum_{\upsilon,|\upsilon|=d}\left(\prod_{j\in I}\sum_{a,|a|=\upsilon_j}\prod_{i\in I}\lambda_i^{a_i}\alpha_a\right) y_\upsilon = \sum_{\upsilon,|\upsilon|=d}\left(\prod_{i\in I}\lambda_i^{\upsilon_i}\right) y^*_\upsilon,
\end{aligned}$$

para alguns coeficientes $y^*_\upsilon \in N$. Portanto $f$ é polinomial homogénea para a base $(w_i)$.

Seja $r\colon GL_n(R) \to GL(V)$ uma representação polinomial homogénea de grau $d$ de $GL_n(R)$. Então existe uma extensão de $r$, digamos $r^*$ por $e$, como definido em (2.7), isto é, $r^* \circ e = r$. Consideremos a inclusão canónica $i\colon GL_n(R) \to End_R(R^n)$, pela base canónica. Consideremos a mudança de base $s\colon End_R(R^n) \to End_R(R^n)$ definida por $s(e_{i,j}) = b_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Pelo raciocínio anterior temos que $r^* \circ s$ é uma aplicação polinomial homogénea para a base $(e_{i,j})$. Como $s \circ i = e$, concluímos que $r^* \circ s$ estende $r$. $\square$

# Capítulo 3

# Álgebras de Schur

## 3.1 Definição

Daqui em diante, salvo dito em contrário, $n, d$ representam números naturais fixos, e $R$ é um anel comutativo com identidade.

Tomemos $V = R^n$, o $R$-módulo livre de rank $n$. Denotemos por $V^{\otimes^d}$ o produto tensorial $\underbrace{V \otimes_R \cdots \otimes_R V}_{\text{d vezes}}$.

Podemos definir uma acção do grupo simétrico $S_d$ em $V^{\otimes^d}$ de tal forma que, para cada permutação $\sigma \in S_d$:

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(d)}, \quad \forall v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \in V^{\otimes^d}. \tag{3.1}$$

$V^{\otimes^d}$ torna-se assim um $RS_d$-módulo.

**Definição 3.1.1.** [1] A *álgebra de Schur* $S_R(n,d)$ é a subálgebra $End_{RS_d}\left(V^{\otimes^d}\right)$ de $End_R\left(V^{\otimes^d}\right)$.

*Observações.*

(a) De forma análoga a (3.1), para qualquer $R$-módulo $M$, podemos definir a acção de $S_d$ em $M^{\otimes^d}$, por troca de lugares. Em particular, podemos escolher $M = End_R(V)$.

(b) Considerando a acção de $S_d$ em $End_R\left(V^{\otimes^d}\right)$ definida por

$$\sigma \cdot \phi = \sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}, \quad \forall \sigma \in S_d,\ \forall \phi \in End_R\left(V^{\otimes^d}\right),$$

vemos que $S_R(n,d) = \left(End_R\left(V^{\otimes^d}\right)\right)^{S_d}$, o que justifica o interesse pela próxima identificação de $S_R(n,d)$.

**Teorema 3.1.2.** *Seja $R$ um anel comutativo com identidade. Então $S_R(n,d) \cong \left((End_R(V))^{\otimes^d}\right)^{S_d}$ como $R$-álgebras.*

*Demonstração.* É conhecido que $(End_R(V))^{\otimes^d} \cong End_R\left(V^{\otimes^d}\right)$ como $R$-álgebras , onde a multiplicação à esquerda é a composição de $R$-homomorfismos.

Para evitar a ambiguidade desta correspondência escrevamos $\pi(f_1 \otimes \cdots \otimes f_d)$ quando entendermos $f_1 \otimes \cdots \otimes f_d$ como elemento em $End_R\left(V^{\otimes^d}\right)$, para $f_1, \ldots, f_d \in End_R(V)$.

Notemos agora que para $\forall v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \in V^{\otimes^d}$, $\forall \sigma \in S_d$, $\forall f_1, \ldots, f_d \in End_R(V)$,

$$\begin{aligned}
\sigma \cdot \pi(f_1 \otimes \cdots \otimes f_d)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) &= \sigma \circ \pi(f_1 \otimes \cdots \otimes f_d) \circ \sigma^{-1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) \\
&= \sigma \circ \pi(f_1 \otimes \cdots \otimes f_d)(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)}) \\
&= \sigma(f_1(v_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes f_d(v_{\sigma(d)})) \\
&= f_{\sigma^{-1}(1)}(v_{\sigma(\sigma^{-1}(1))}) \otimes \cdots \otimes f_{\sigma^{-1}(d)}(v_{\sigma(\sigma^{-1}(d))}) \\
&= f_{\sigma^{-1}(1)}(v_1) \otimes \cdots \otimes f_{\sigma^{-1}(d)}(v_d) \\
&= \pi(f_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma^{-1}(d)})(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) \\
&= \pi(\sigma \cdot (f_1 \otimes \cdots \otimes f_d))(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d), \quad \forall v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \in V^{\otimes^d}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sigma \cdot \pi(f_1 \otimes \cdots \otimes f_d) = \pi(\sigma \cdot (f_1 \otimes \cdots \otimes f_d)), \quad \forall \sigma \in S_d, \quad \forall f_1, \ldots, f_d \in End_R(V). \tag{3.2}$$

Então $\pi$ é um isomorfismo de $RS_d$-módulos e assim induz um isomorfismo nos $S_d$ invariantes. Portanto, $\left((End_R(V))^{\otimes^d}\right)^{S_d} \cong \left(End_R\left(V^{\otimes^d}\right)\right)^{S_d}$. □

## 3.2 Propriedades

Com o intuito de exibir uma base para a álgebra de Schur e facilitar a nossa escrita precisamos de alguma notação. Denote-se por $I(n,d)$ o conjunto de todas as funções $i\colon \{1,\ldots,d\} \to \{1,\ldots,n\}$. Escreveremos $i(a) = i_a$, $a \in \{1,\ldots,d\}$, e $i = (i_1,\ldots,i_d)$. O grupo simétrico $S_d$ actua em $I(n,d)$ por troca de lugares, isto é, $\sigma(i_1,\ldots,i_d) = (i_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,i_{\sigma^{-1}(d)})$, $\forall \sigma \in S_d, 1 \leq i_1,\ldots,i_d \leq n$.

Escreveremos $i \sim j$ para significar que $i$ e $j$ estão na mesma órbita da acção de $S_d$ em $I(n,d)$. Assim,

$$i \sim j \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists \sigma \in S_d\colon\ j = \sigma(i). \tag{3.3}$$

**Teorema 3.2.1.** *Sejam $R$ um anel comutativo com identidade e $M$ um $R$-módulo livre de rank $n$, com $R$-base $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$. Então*

*(i) $\left(M^{\otimes^d}\right)^{S_d}$ admite uma $R$-base*

$$\left\{ \sum_{\substack{j \in I(n,d) \\ j \sim i}} e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_d}\colon\ 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_d \leq n \right\}. \tag{3.4}$$

*(ii) $rank\left(\left(M^{\otimes^d}\right)^{S_d}\right) = \binom{n+d-1}{d}$.*

*Demonstração.* $(i)$ Dado um módulo livre $M$ com base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ então $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d}\colon 1 \leq i_1,\ldots,i_d \leq n\}$ é uma $R$-base de $M^{\otimes^d}$.

Em cada órbita da acção de $S_d$ em $I(n,d)$ existe um único elemento $i$ satisfazendo $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_d \leq n$. Escolhemos esse elemento como representante da sua órbita.

Seja $\sum\limits_{1\leq i_1,\ldots,i_d\leq n} \alpha_{i_1,\ldots,i_d} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d}$ um elemento qualquer de $\left(M^{\otimes^d}\right)^{S_d}$. Temos que para toda a permutação $\sigma \in S_d$,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i_1,\ldots,i_d\leq n} \alpha_{i_1,\ldots,i_d} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d} &= \sigma\left(\sum_{1\leq i_1,\ldots,i_d\leq n} \alpha_{i_1,\ldots,i_d} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d}\right)\\ &= \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_d\leq n} \alpha_{i_1,\ldots,i_d} e_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}(d)}}\\ &= \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_d\leq n} \alpha_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(d)}} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d}.\end{aligned}$$

Como estamos perante uma base, deduzimos que

$$\alpha_{i_1,\ldots,i_d} = \alpha_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(d)}} \qquad \forall \sigma \in S_d. \tag{3.5}$$

Por outras palavras, os coeficientes $\alpha_i$ são constantes em cada órbita. Assim, o conjunto descrito em (3.4) gera $\left(M^{\otimes^d}\right)^{S_d}$. Novamente, tendo em conta a base descrita de $M^{\otimes^d}$, temos que o conjunto é um conjunto linearmente independente sobre $R$ e por consequência uma base de $\left(M^{\otimes^d}\right)^{S_d}$.

$(ii)$ Como os anéis comutativos têm a propriedade da dimensão invariante para os módulos livres é suficiente e faz sentido contar o número de elementos da base estabelecida em $(i)$ para termos o rank de $\left(M^{\otimes^d}\right)^{S_d}$.

Contar os elementos da base é equivalente a contar o número de órbitas em $I(n,d)$ com respeito à acção definida pelo grupo simétrico $S_d$. Para isso, façamos a correspondência entre os representantes de cada órbita e as palavras com $n+d-1$ letras no alfabeto $\{*, -\}$.

Escrevamos $n-1$ separadores $'-'$. Se interpretarmos os espaços vazios entre cada separador como caixas, então temos $n$ caixas. Cada uma destas caixas representará um número entre $1,\ldots,n$, por ordem crescente. Seja $(i_1,\ldots,i_d)$ um representante de uma órbita qualquer. Para cada $r = 1,\ldots,d$, colocamos um $*$ na caixa número $i_r$.

Desta forma obtemos, de forma biunívoca, uma palavra com $n-1$ $-$'s e $d$ $*$'s. Assim, o número possível de palavras é dado pela escolha das posições para os símbolos $*$ dentro das $n-1+d$ posições possíveis, isto é, o número de palavras possível é $\binom{n+d-1}{d}$. Concluímos assim o pretendido. □

De facto, estas palavras são na verdade pesos.

**Definição 3.2.2.** O peso de um elemento $i \in I(n,d)$ é a composição $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ de $d$ em $n$ partes, onde $\lambda_j = |\{1 \leq \mu \leq n \colon i_\mu = j\}|$, para cada $j = 1,\ldots,n$.

Associando a cada $i \in I(n,d)$ o seu peso vemos que as órbitas dos elementos de $I(n,d)$ estão em bijecção com as composições de $d$ em $n$ partes, pois todos os elementos numa mesma órbita têm o mesmo peso e elementos em órbitas diferentes, pesos diferentes.

**Corolário 3.2.3.** *Seja R um anel comutativo com identidade. Então*

$$rank_R\left(S_R(n,d)\right) = \binom{n^2+d-1}{d}.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.1.2, $S_R(n,d) \cong \left((End_R(V))^{\otimes^d}\right)^{S_d}$. Como $rank(End_R(V)) = n^2$ obtemos, pelo teorema anterior, que $rankS_R(n,d) = rank\left((End_R(V))^{\otimes^d}\right)^{S_d} = \binom{n^2+d-1}{d}$. □

Graças ao corolário anterior, ficámos a saber que qualquer álgebra de Schur sobre um anel comutativo qualquer tem rank finito.

Vejamos de seguida alguns exemplos simples de álgebras de Schur.

**Exemplo 3.3.**

(i) Para qualquer $n > 0$, $S_R(n,1) = End_R(V)$.

(ii) Para qualquer $d > 0$, $S_R(1,d) \cong R$.

(iii) Para $n = d = 2$, $S_R(2,2)$ é isomorfa à subálgebra de $M_4(R)$ gerada por $E_{1,1}, E_{1,4}$, $E_{4,1}$, $E_{4,4}$, $E_{1,2}+E_{1,3}$, $E_{2,1}+E_{3,1}, E_{4,2}+E_{4,3}, E_{2,4}+E_{3,4}, E_{2,2}+E_{3,3}, E_{2,3}+E_{3,2}$, com $(E_{i,j})_{k,l} = 1$ se e só se $(k,l) = (i,j)$.

*Demonstração.* $(i)$ Imediato.

$(ii)$ Para qualquer $d > 0$, pelo resultado anterior, $rankS_R(1,d) = 1$ portanto $S_R(1,d) \cong R$.

$(iii)$ Fixemos $n = d = 2$ e $R$ um anel comutativo qualquer. Considere-se a base canónica de $V^{\otimes^2}$, $v_1 := e_1 \otimes e_1,\ v_2 := e_1 \otimes e_2,\ v_3 := e_2 \otimes e_1,\ v_4 := e_2 \otimes e_2$. Então, $End_R\left(V^{\otimes^2}\right)$ tem base $(e_{i,j})$, onde $e_{i,j}(v_k) = \delta_{k,j} v_i$. Para $\sigma = \sigma^{-1} = (12)$, temos $\sigma(v_1) = v_1,\ \sigma(v_2) = v_3,\ \sigma(v_3) = v_2,\ \sigma(v_4) = v_4$. Assim, obtemos uma bijecção $\theta\colon \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ dada por $\theta(i) = i,\ i = 1,4,\ \theta(2) = 3$ e $\theta(3) = 2$, tal que $\theta = \theta^{-1}$. Temos,

$$\begin{aligned}\sigma \cdot e_{i,j}(v_k) = \sigma \circ e_{i,j} \circ \sigma^{-1}(v_k) = \sigma \circ e_{i,j}(v_{\theta(k)}) = \sigma(\delta_{j,\theta(k)} v_i) = \delta_{\theta(j),k}\sigma(v_i)\\ = \delta_{\theta(j),k} v_{\theta(i)} = e_{\theta(i),\theta(j)}(v_k),\ k = 1,\ldots,4.\end{aligned}$$

Portanto $\{e_{i,j}\colon\ i,j \in \{1,4\}\} \bigcup \{e_{i,j} + e_{\theta(i),\theta(j)}\colon\ i \in \{2,3\}$ ou $j \in \{2,3\}\}$ é uma base de $S_R(2,2)$. Fixando a base $(v_i)_{i=1,\ldots,4}$ obtemos o isomorfismo entre $End_R(V^{\otimes^2})$ e $M_4(R)$ onde a cada elemento $e_{\theta(i),\theta(j)}$ corresponde a matriz $E_{\theta(i),\theta(j)}$. Concluímos assim o pretendido. □

Como podemos observar, a notação actual para os elementos da base da álgebra de Schur não é a mais compacta nem elegante. Com o intuito de resolver esta questão definamos a acção do grupo simétrico $S_d$ sobre o conjunto $I(n,d) \times I(n,d)$ do seguinte modo:

$$\sigma(i,j) = (\sigma i, \sigma j), \quad \forall i,j \in I(n,d), \quad \forall \sigma \in S_d. \tag{3.6}$$

Escreve-se $(i,j) \sim (k,l)$ se $(i,j),(k,l) \in I(n,d)$ pertencem à mesma órbita.

Além disso introduzamos a ordem lexicográfica nos pares:

$$(i_1,j_1) \leq (i_2,j_2) \Leftrightarrow i_1 < i_2 \text{ ou } (i_1 = i_2 \text{ e } j_1 \leq j_2). \tag{3.7}$$

Note-se que cada órbita de $S_d$ em $I(n,d)\times I(n,d)$ contém um e um só elemento $(i,j)$ tal que $(i_1,j_1)\leq\cdots\leq(i_d,j_d)$. Escolhamos esse elemento como representante da sua órbita.

Podemos também considerar a base canónica de $End_R(V)$ totalmente ordenada: $(e_{1,1},\ldots,e_{1,n},e_{2,1}\ldots,e_{n,n})$. Agora aplicando o Teorema 3.2.1 vemos que $S_R(n,d)$ tem base

$$\left\{\xi_{i,j}:\ (i_1,j_1)\leq\ldots\leq(i_d,j_d),\ i,j\in I(n,d)\right\},\tag{3.8}$$

onde $\xi_{i,j}:=\pi\left(\sum_{\substack{(l,k)\in I(n,d)\times I(n,d)\\(l,k)\sim(i,j)}} e_{l_1,k_1}\otimes\cdots\otimes e_{l_d,k_d}\right).$

Portanto uma base de $S_R(n,d)$ é indexada por um transversal das órbitas da acção de $S_d$ em $I(n,d)\times I(n,d)$.

Podemos agora deduzir uma fórmula para a multiplicação em $S_R(n,d)$, isto é, determinar os coeficientes $\alpha(f,g,i,j,t,u)$ de $\xi_{f,g}\circ\xi_{i,j}$ na base $(\xi_{t,u})$.

Seja $e_{s_1}\otimes\cdots\otimes e_{s_d}\in V^{\otimes^d}$ um elemento qualquer da base. Temos,

$$\begin{aligned}\xi_{i,j}(e_{s_1}\otimes\cdots\otimes e_{s_d}) &= \sum_{(l,k):\ (l,k)\sim(i,j)} e_{l_1,k_1}(e_{s_1})\otimes\cdots\otimes e_{l_d,k_d}(e_{s_d}) = \sum_{(l,k):\ (l,k)\sim(i,j)} \delta_{k_1,s_1}e_{l_1}\otimes\cdots\otimes\delta_{k_d,s_d}e_{l_d}\\ &= \sum_{(l,k):\ (l,k)\sim(i,j)} \delta_{k_1,s_1}\cdots\delta_{k_d,s_d}e_{l_1}\otimes\cdots\otimes e_{l_d} = \sum_{l:\ (l,s)\sim(i,j)} e_{l_1}\otimes\cdots\otimes e_{l_d}.\end{aligned}$$

Então, ao escrevermos $\xi_{i,j}(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d})$ como combinação linear dos vectores da base $\{e_{k_1}\otimes\cdots\otimes e_{k_d}\}$, a coordenada relativa a $e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_d}$ é igual a 1.

Seja $u$ tal que $(t,u)$ indexa um elemento da base de $S_R(n,d)$ considerada. Então, temos que $\xi_{f,g}\circ\xi_{i,j}(e_{u_1}\otimes\cdots\otimes e_{u_d})$ tem o coeficiente de $e_{t_1}\otimes\cdots\otimes e_{t_d}$ igual a $\alpha(f,g,i,j,t,u)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\xi_{f,g}\circ\xi_{i,j}(e_{s_1}\otimes\cdots\otimes e_{s_d}) &= \xi_{f,g}\left(\sum_{l:\ (l,s)\sim(i,j)} e_{l_1}\otimes\cdots\otimes e_{l_d}\right) = \sum_{l:\ (l,s)\sim(i,j)} \xi_{f,g}(e_{l_1}\otimes\cdots\otimes e_{l_d})\\ &= \sum_{l:\ (l,s)\sim(i,j)}\ \sum_{a:\ (a,l)\sim(f,g)} e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_d} = \sum_{a\in I(n,d)}\ \sum_{\substack{l:\ (l,s)\sim(i,j)\\(a,l)\sim(f,g)}} e_{a_1}\otimes\cdots\otimes e_{a_d}\end{aligned}$$

Assim, tomando $s=u$, temos que $\xi_{f,g}\circ\xi_{i,j}(e_{u_1}\otimes\cdots\otimes e_{u_d})$ tem o coeficiente de $e_{t_1}\otimes\cdots\otimes e_{t_d}$ igual a $\sum_{\substack{l\in I(n,d)\\(l,u)\sim(i,j)\\(t,l)\sim(f,g)}} 1.$

Logo,

$$\alpha(f,g,i,j,t,u)=\left|\left\{l\in I(n,d):\ \begin{matrix}(l,u)\sim(i,j)\\(t,l)\sim(f,g)\end{matrix}\right\}\right|.$$

Concluímos que a multiplicação em $S_R(n,d)$ é dada pela fórmula:

$$\xi_{f,g} \circ \xi_{i,j} = \sum_{\substack{t,u \in I(n,d) \\ (t_1,u_1) \leq \ldots \leq (t_d,u_d)}} \alpha(f,g,i,j,t,u)\xi_{t,u} \tag{3.9}$$

Como consequência directa desta fórmula temos $\xi_{f,g} \circ \xi_{i,j} = 0$ se $g \nsim i$. Portanto $\xi_{i,i} \circ \xi_{j,j} = 0$ para $i \nsim j$. Assumindo $(i,i)$, $(t,u)$ representantes de órbitas, verificamos que $\alpha(i,i,i,i,t,u) = 0$ sempre que $t \nsim i$ ou $u \nsim i$. Tem-se também, $\alpha(i,i,i,i,i,i) = 1$. Logo, $\xi_{i,i}^2 = \xi_{i,i}$. Além disso, $\xi_{i,i}(e_{s_1} \otimes \cdots \otimes e_{s_d}) = e_{s_1} \otimes \cdots \otimes e_{s_d}$ supondo $s \sim i$, caso contrário $\xi_{i,i}(e_{s_1} \otimes \cdots \otimes e_{s_d}) = 0$, o que leva a que $\sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_d \leq n} \xi_{i,i} = 1_{S_R(n,d)}$.

Associando a cada $i$ o seu peso $\lambda$ podemos designar $\xi_{i,i}$ por $\xi_\lambda$.

Provámos que:

**Teorema 3.3.1.** *Existe uma base de $S_R(n,d)$ que contém elementos idempotentes ortogonais $\xi_\lambda$, onde $\lambda$ é uma composição de $d$ em no máximo $n$ partes. Além disso, $1_{S_R(n,d)} = \sum_\lambda \xi_\lambda$.*

Terminemos o capítulo, explorando condições para que a álgebra de Schur seja semi-simples.

**Teorema 3.3.2.** *Sejam $R$ um anel comutativo com identidade e $A$ uma $R$-álgebra. Se $V$ for um $A$-módulo com rank finito semi-simples então $End_A(V)$ é uma álgebra semi-simples.*

*Demonstração.* Dado que $V$ é semi-simples, por definição, temos $V \cong S_1^{k_1} \bigoplus \cdots \bigoplus S_r^{k_r}$, onde $S_i$ são $A$-módulos simples tais que $S_i \cong S_j$ se e só se $i = j$.

Temos $End_A(V) \cong Hom_A\left(S_1^{k_1} \bigoplus \cdots \bigoplus S_r^{k_r}, S_1^{k_1} \bigoplus \cdots \bigoplus S_r^{k_r}\right) \cong \bigoplus_{i,j} Hom_A\left(S_i^{k_i}, S_j^{k_j}\right)$. Usando o Lema de Schur, vemos que para $i \neq j$ se tem $Hom_A\left(S_i^{k_i}, S_j^{k_j}\right) = 0$.

Novamente $Hom_A\left(S^k, S^k\right) \cong \bigoplus_{s,t=1,\ldots,k} Hom_A(S,S) = \bigoplus_{s,t=1,\ldots,k} End_A(S)$. Porém, $S$ é um $A$-módulo simples, portanto $End_A(S)$ é um anel de divisão pelo Lema de Schur.

Logo, pelo Teorema de Wedderburn, $End_A(V)$ é uma álgebra semi-simples. $\square$

**Corolário 3.3.3.** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo com característica zero ou superior a $d$. Então a álgebra de Schur, $S_{\mathbb{K}}(n,d)$, é semi-simples.*

*Demonstração.* Temos que $char(\mathbb{K})$ não divide $|S_d| = d!$. Por isso a álgebra $\mathbb{K}S_d$ é semi-simples, pelo Teorema de Maschke. Assim o $\mathbb{K}S_d$-módulo $(\mathbb{K}^n)^{\otimes^d}$ é semi-simples.

Pelo teorema anterior, $S_{\mathbb{K}}(n,d) = End_{\mathbb{K}S_d}\left((\mathbb{K}^n)^{\otimes^d}\right)$ é uma álgebra semi-simples. $\square$

# Capítulo 4

# Dualidade de Schur-Weyl e epimorfismos fortes

## 4.1 Definição da dualidade de Schur-Weyl

Estudaremos agora a importância da álgebra de Schur $S_R(n,d)$ no estudo das representações polinomiais homogéneas de grau $d$ de $G := GL_n(R)$.

O grupo linear geral de grau $n$, $GL_n(R)$, actua sobre $V = R^n$ por multiplicação. Assim, $G$ actua sobre $V^{\otimes^d}$ por $\rho\colon G \to GL\left(V^{\otimes^d}\right)$, onde

$$\rho(g)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_d, \quad g \in G, \quad v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \in V^{\otimes^d}.$$

Além disso, como vimos, o grupo simétrico, $S_d$, também actua sobre $V^{\otimes^d}$.

Considerando a extensão para as álgebras de grupo destas duas acções obtemos os homomorfismos de álgebras $\rho\colon RG \to End_R\left(V^{\otimes^d}\right)$ e $\psi\colon RS_d \to End_R\left(V^{\otimes^d}\right)$.

Estas duas acções comutam. Mais precisamente, $\forall \sigma \in S_d,\ g \in G,\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \in V^{\otimes^d}$,

$$\begin{aligned}\sigma(g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)) &= \sigma(gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_d)\\ &= gv_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes gv_{\sigma^{-1}(d)} = g(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(d)}) = g(\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)).\end{aligned}$$

Portanto, obtemos os homomorfismos entre álgebras $\rho\colon RG \to End_{RS_d}\left(V^{\otimes^d}\right)$ e $\psi\colon RS_d \to End_{RG}\left(V^{\otimes^d}\right)$.

**Definição 4.1.1.** Se os homomorfismos de álgebras $\rho$ e $\psi$ forem sobrejectivos dizemos que se verifica a *dualidade de Schur-Weyl*.

*Observação.* Trata-se de uma dualidade no seguinte sentido:

(a) A imagem de $S_d$ em $End_R\left(V^{\otimes^d}\right)$ gera $End_{RG}\left(V^{\otimes^d}\right)$;

(b) A imagem de $G$ em $End_R\left(V^{\otimes^d}\right)$ gera $End_{RS_d}\left(V^{\otimes^d}\right)$.

Assim, nas condições da dualidade de Schur-Weyl a álgebra de Schur, $S_R(n,d)$, é gerada pela imagem de $G$ em $End_R\left(V^{\otimes^d}\right)$.

## 4.2 Restrição de escalares e epimorfismos fortes

Neste momento estudemos apenas o homomorfismo $\rho$. Para tal, necessitamos de introduzir algumas noções gerais.

Sejam $A,B$ anéis com identidade e $f\colon A \to B$ um homomorfismo de anéis preservando a identidade. Dado um qualquer $B$-módulo $M$, podemos também considerar $M$ como um $A$-módulo definindo $am := f(a)m,\ a \in A,\ m \in M$. Designemos este $A$-módulo por $FM$. Obviamente qualquer $B$-homomorfismo $f\colon M \to N$ é também um $A$-homomorfismo.

Designemos por $A$-*Mod* a categoria de todos os $A$-módulos à esquerda, isto é, a categoria cujos objectos são os $A$-módulos à esquerda e os morfismos são os $A$-homomorfismos, com a composição usual. Designemos por $A$-*mod* a subcategoria plena de $A$-*Mod* cujos objectos são todos os $A$-módulos finitamente gerados. Podemos assim definir o functor, por "restrição de escalares",

$$\begin{aligned} F\colon B\text{-}Mod &\to A\text{-}Mod \\ M &\mapsto FM \\ \left(M \xrightarrow{f} N\right) &\mapsto \left(FM \xrightarrow{f} FN\right) \end{aligned}.$$

No caso da álgebra de Schur, qualquer $S_R(n,d)$-módulo $M$ se torna num $RG$-módulo definindo $gm := \rho(g)(m),\ g \in G,\ m \in M$.

Podemos ver que, no caso geral de dois anéis $A$ e $B$, $F\colon B\text{-}Mod \to A\text{-}Mod$ tem um functor adjunto à esquerda. De facto, podemos definir um functor $G$, por "extensão de escalares", da seguinte maneira.

$B$ pode ser interpretado como um $A$-módulo à direita, com a acção $B \times A \to B$ definida por $b \times a := bf(a),\ b \in B,\ a \in A$. Facilmente se vê que $B$ é um $(B,A)$-bimódulo.

Seja $M$ um $A$-módulo qualquer. Definimos o $B$-módulo $GM := B \otimes_A M$. Dados $A$-módulos $M$ e $N$ e qualquer $A$-homomorfismo $u\colon M \to N$, define-se $G(u) = \mathrm{id}_B \otimes u$. Temos assim um functor $G\colon A\text{-}Mod \to B\text{-}Mod$.

**Teorema 4.2.1.** *$G$ é adjunto à esquerda do functor $F$, definido por restrição de escalares.*

*Demonstração.* Queremos provar que os functores $Hom_B(G-,-),\ Hom_A(-,F-)\colon (A\text{-}Mod)^{op} \times B\text{-}Mod \to Set$ são naturalmente isomorfos.

Sejam $M$ e $M'$ um $A$-módulo e um $B$-módulo, respectivamente.

Definamos a aplicação $\alpha_{M,M'}\colon Hom_B(GM,M') \to Hom_A(M,FM')$ por $\alpha_{M,M'}(u) = u \circ e$, onde $e\colon M \to B \otimes_A M$ é a aplicação definida por $e(m) = 1_B \otimes m$.

Definamos agora a aplicação $\alpha'_{M,M'}\colon Hom_A(M,FM') \to Hom_B(GM,M')$ por $\alpha'_{M,M'}(v) = \mu \circ (\mathrm{id}_B \otimes v)$, onde $\mu$ é o morfismo multiplicação de $B \otimes M'$ em $M'$. Então $\alpha_{M,M'}$ e $\alpha'_{M,M'}$ são inversos.

Provemos que $\alpha = (\alpha_{M,M'})$ e $\alpha' = (\alpha'_{M,M'})$ são transformações naturais.

Sejam $f\colon N \to M$ e $h\colon M' \to N'$ $A$-homomorfismo e $B$-homomorfismo, respectivamente.

Como $(\mathrm{id}_B \otimes f) \circ e = e \circ f$, então, para qualquer $g \in Hom_B(GM,M')$,

$$\begin{aligned} Hom_A(f^{op},Fh) \circ \alpha_{M,M'}(g) &= Hom_A(f^{op},Fh)(g \circ e) = Fh \circ (g \circ e) \circ f = Fh \circ g \circ (\mathrm{id}_B \otimes f) \circ e \\ &= h \circ g \circ Gf \circ e = \alpha_{N,N'}(h \circ g \circ Gf) = \alpha_{N,N'} \circ Hom_B(Gf^{op},h)(g). \end{aligned}$$

Logo, $\alpha$ é uma transformação natural.

Para quaisquer $w \in Hom_B(M, FM')$ e $b \otimes n \in B \otimes N$ temos,

$$\begin{aligned}
Hom_B(Gf^{op}, h) \circ \alpha'_{M,M'}(w)(b \otimes n) &= Hom_B(Gf^{op}, h)(\mu \circ (\mathrm{id}_B \otimes w))(b \otimes n) \\
= h \circ (\mu \circ (\mathrm{id}_B \otimes w)) \circ Gf(b \otimes n) &= h \circ \mu \circ (\mathrm{id}_B \otimes (w \circ f))(b \otimes n) = h(bw(f(n))) = bh(w(f(n))); \\
\alpha'_{N,N'} \circ Hom_A(f^{op}, Fh)(w)(b \otimes n) &= \alpha'_{N,N'}(Fh \circ w \circ f)(b \otimes n) = \mu \circ (\mathrm{id}_B \otimes (Fh \circ w \circ f))(b \otimes n) \\
&= \mu \circ (b \otimes h(w(f(n)))) = bh(w(f(n))).
\end{aligned}$$

Logo $\alpha'$ é uma transformação natural, portanto $\alpha$ é um isomorfismo natural. □

De seguida, iremos apresentar uma nova caracterização das representações polinomiais homogéneas de grau $d$, que envolve a acção do grupo simétrico $S_d$. Esta caracterização permitirá relacionar as noções de representação polinomial homogénea e de módulos para a álgebra de Schur, o que nos levará a concluir que o functor $F\colon S_R(n,d)\text{-}Mod \to RG\text{-}Mod$ está definido da categoria dos módulos sobre a álgebra de Schur para a categoria das representações polinomiais homogéneas de grau $d$ de $G$.

Para cada $R$-módulo livre $M$, definimos $\gamma_d\colon M \to \left(M^{\otimes^d}\right)^{S_d}$, por $\gamma_d(x) = x^{\otimes^d}$, $x \in M$. (4.1)

**Lema 4.2.2.** *[3, Capítulo 4, secção 5.9] Seja $R$ um anel comutativo. Sejam $M$ e $N$ $R$-módulos tais que $M$ é livre de rank $m$. Então a aplicação $f\colon M \to N$ é polinomial homogénea de grau $d$ se e só se existir uma aplicação $R$-linear $h\colon \left(M^{\otimes^d}\right)^{S_d} \to N$ satisfazendo $f = h \circ \gamma_d$ .*

*Demonstração.* Primeiro façamos alguns cálculos preliminares com a aplicação $\gamma_d$. Consideremos $(e_k)_{k=1,\dots,m}$ uma base de $M$. Verifiquemos que:

$$\begin{aligned}
\gamma_d\left(\sum_{k=1}^{d} \lambda_k e_k\right) &= \left(\sum_{i_1=1}^{m} \lambda_{i_1} e_{i_1}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{i_d=1}^{m} \lambda_{i_d} e_{i_d}\right) \\
&= \sum_{1 \le i_1,\dots,i_d \le m} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_d} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d} \\
&= \sum_{1 \le i_1 \le \dots \le i_d \le m} \; \sum_{(j_1,\dots,j_d)\colon j \sim i} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_d} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \\
&= \sum_{1 \le i_1 \le \dots \le i_d \le m} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_d} \sum_{(j_1,\dots,j_d)\colon j \sim i} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \\
&= \sum_{\upsilon \in \mathbb{N}^m, |\upsilon| = d} \lambda^{\upsilon} e_{\upsilon},
\end{aligned}$$

onde $e_\upsilon := \sum_{j\colon j \sim i} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d}$. Aqui $\upsilon = (\upsilon_1, \dots, \upsilon_m)$ é o peso de $(i_1, \dots, i_d)$ e $\lambda^\upsilon = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{\upsilon_i}$.

Suponhamos que $f$ é polinomial homogénea de grau $d$. Então existem $y_\upsilon \in N$ tais que $f\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k\right) = \sum_{\upsilon \in \mathbb{N}^m, |\upsilon| = d} \lambda^\upsilon y_\upsilon$. Pelo Teorema 3.2.1, sabemos que $(e_\upsilon)_{\upsilon \in \mathbb{N}^m, |\upsilon| = d}$ é uma base para $\left(M^{\otimes^d}\right)^{S_d}$. Definamos a aplicação $R$-linear $h\colon \left(M^{\otimes^d}\right)^{S_d} \to N$ por $h(e_\upsilon) = y_\upsilon$.

Portanto, para $x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k \in M$, tem-se

$$
\begin{aligned}
f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k\right) &= \sum_{\upsilon\in\mathbb{N}^m, |\upsilon|=d} \lambda^{\upsilon} y_{\upsilon} = \sum_{\upsilon\in\mathbb{N}^m, |\upsilon|=d} \lambda^{\upsilon} h(e_{\upsilon}) \\
&= h\left(\sum_{\upsilon\in\mathbb{N}^m, |\upsilon|=d} \lambda^{\upsilon} e_{\upsilon}\right) = h\left(\gamma_d\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k\right)\right) = h(\gamma_d(x)).
\end{aligned}
$$

Reciprocamente, supondo que existe $h$ nas condições do enunciado, definindo $y_{\upsilon} = h(e_{\upsilon})$, obtemos

$$
f\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k\right) = h\left(\gamma_d\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k\right)\right) = \sum_{\upsilon\in\mathbb{N}^m, |\upsilon|=d} \lambda^{\upsilon} h(e_{\upsilon}) = \sum_{\upsilon\in\mathbb{N}^m, |\upsilon|=d} \lambda^{\upsilon} y_{\upsilon}.
$$

Logo, $f$ é polinomial homogénea de grau $d$. □

Daqui em diante, salvo dito em contrário, $\gamma_d$ designa o homomorfismo $End_R(V) \to \left((End_R(V))^{\otimes^d}\right)^{S_d}$, $x \rightsquigarrow x^{\otimes^d}$, para qualquer $x \in End_R(V)$.

*Observação.* Consideremos $\pi\colon \left((End_R(V))^{\otimes^d}\right)^{S_d} \to S_R(n,d)$ o isomorfismo definido no Teorema 3.1.2 e $i\colon G \to End_R(V)$ a inclusão canónica definida em (2.7). Então $\pi \circ \gamma_d \circ i = \rho_{|_G}$.

De facto, para qualquer elemento $e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_d}$ da base de $V^{\otimes^d}$ temos,

$$
\begin{aligned}
\pi \circ \gamma_d \circ i(g)(e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_d}) &= \pi \circ \gamma_d \left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j} e_{i,j}\right)(e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_d}) \\
&= \left(\sum_{i_1,j_1=1}^{n} g_{i_1,j_1} e_{i_1,j_1}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{i_d,j_d=1}^{n} g_{i_d,j_d} e_{i_d,j_d}\right)(e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_d}) \\
&= \left(\sum_{i_1,j_1=1}^{n} g_{i_1,j_1} \delta_{k_1,j_1} e_{i_1}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{i_d,j_d=1}^{n} g_{i_d,j_d} \delta_{k_d,j_d} e_{i_d}\right) \\
&= g e_{k_1} \otimes \cdots \otimes g e_{k_1} = \rho(g)(e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_d}),\ \forall g \in G. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Designemos por $(RG)_d$-$Mod$ a subcategoria plena de $RG$-$Mod$ cujos objectos são os $RG$-módulos à esquerda cuja representação associada é uma representação polinomial homogénea de grau $d$. A estes módulos chamamos polinomiais homogéneos de grau $d$.

**Lema 4.2.3.** *O functor $F\colon S_R(n,d)$-$Mod \to RG$-$Mod$ está definido da categoria dos $S_R(n,d)$-módulos para a categoria dos RG-módulos polinomiais homogéneos de grau d, isto é, existe um functor $F_{n,d}\colon S_R(n,d)$-$Mod \to (RG)_d$-$Mod$, dado por $F_{n,d}(M) = F(M)$ e $F_{n,d}(f) = F(f)$, $f \in Hom_{S_R(n,d)}(M,M')$.*

*Demonstração.* Seja $M$ um $S_R(n,d)$-módulo, com $\alpha$ a representação de $S_R(n,d)$ associada.

Temos que $FM = M$ é um $RG$-módulo com representação associada $r\colon G \to GL(M)$, $r(g)(m) = \alpha(\rho(g))(m)$.

Provemos que $r$ é uma representação polinomial homogénea de grau $d$ de $G$. Considerando a notação habitual, definamos $h := \alpha \circ \pi$. Assim, para qualquer $g \in GL_n(R)$,

$$
h \circ \gamma_d \circ i(g) = \alpha \circ \pi \circ \gamma_d \circ i(g) \overset{(4.2)}{=} \alpha \circ \rho_{|_G}(g) = r(g).
$$

Portanto $h \circ \gamma_d$ estende a representação $r$, e pelo lema anterior, concluímos que $r$ é uma representação polinomial homogénea de grau $d$. $\square$

O nosso próximo objectivo será mostrar que este functor é uma equivalência de categorias. Com esse propósito, descrevamos quando o functor $F$ é pleno e fiel. É assim necessário recordar a noção de epimorfismo.

**Definição 4.2.4.** Um homomorfismo de $R$-álgebras $\phi\colon A \to B$ diz-se um *epimorfismo*, se para qualquer que seja o par $\phi_1, \phi_2\colon C \to A$ de homomorfismos de $R$-álgebras, $\phi \circ \phi_1 = \phi \circ \phi_2$ implicar $\phi_1 = \phi_2$.

Para a demonstração do próximo lema usaremos argumentos semelhantes aos usados em [19].

**Lema 4.2.5.** *Seja $\phi\colon A \to B$ um homomorfismo de $R$-álgebras. O functor $F$ induzido por $\phi$, por restrição de escalares, é pleno e fiel se e só se $\phi$ for um epimorfismo de álgebras.*

*Demonstração.* Seja $h\colon M \to N$ um $B$-homomorfismo de módulos. Como $F(h)(m) = h(m)$, $\forall m \in M$, sai que o functor $F$ é sempre fiel.

Suponhamos que $F$ é pleno. Mostremos que $\phi$ é um epimorfismo de álgebras. Suponhamos que existem $\psi_1, \psi_2\colon B \to C$ homomorfismos de álgebras tais que $\psi_1 \circ \phi = \psi_2 \circ \phi$.

Então, $C$ pode ser interpretado como $B$-módulo de duas formas distintas. De facto, temos o módulo $C_1 := C$ com multiplicação $b \times_1 c = \psi_1(b)c,\ b \in B,\ c \in C$, e temos o módulo $C_2 := C$ com multiplicação $b \times_2 c = \psi_2(b)c,\ b \in B,\ c \in C$.

Dado que $\psi_1 \circ \phi = \psi_2 \circ \phi$, vemos que

$$\phi(a) \times_1 c = \psi_1(\phi(a))c = \psi_2(\phi(a))c = \phi(a) \times_2 c, \quad a \in A,\ c \in C. \tag{4.3}$$

Portanto $FC_1 = FC_2$ como $A$-módulos. Logo, temos que a identidade $\mathrm{id}_C\colon FC_1 \to FC_2$ é um $A$-homomorfismo. Como $F$ é pleno existe um $B$-homomorfismo $u\colon C_1 \to C_2$ tal que $Fu = \mathrm{id}_C$, isto é, $u = \mathrm{id}_C$.

Assim, para qualquer $b \in B$,

$$\psi_2(b) = \psi_2(b)1_C = b \times_2 1_C = b \times_2 \mathrm{id}_C(1_C) = \mathrm{id}_C(b \times_1 1_C) = b \times_1 1_C = \psi_1(b).$$

Logo $\psi_2 = \psi_1$, o que implica que $\phi$ é um epimorfismo de álgebras.

Reciprocamente, suponhamos que $\phi$ é um epimorfismo de álgebras.

Suponhamos que $M$ e $N$ são $B$-módulos à esquerda. Suponhamos, por absurdo, que existe um $A$-homomorfismo de módulos $u\colon FM \to FN$ tal que $u\colon M \to N$ não é um $B$-homomorfismo.

Definamos o grupo abeliano $\tilde{M} = Hom_R(M,N)$. É fácil ver que $\tilde{M}$ é um $B$-bimódulo. Assim, por hipótese $au = ua$, $\forall a \in A$, mas $bu \neq ub$ para algum $b \in B$.

Consideremos a $R$-álgebra $B \bigoplus \tilde{M}$ com $(b_1, f_1)(b_2, f_2) = (b_1 b_2, b_1 f_2 + f_1 b_2)$ e $r(b, f) = (rb, rf)$. Vejamos apenas a compatibilidade entre a multiplicação escalar e a multiplicação no anel,

$$\begin{aligned}(r(b_1,f_1))(b_2,f_2) &= (rb_1, rf_1)(b_2,f_2) = ((rb_1)b_2, (rb_1)f_2 + (rf_1)b_2)\\ &= (r(b_1b_2), r(b_1f_2 + f_1b_2)) = r((b_1,f_1)(b_2,f_2)).\end{aligned}$$

Sendo análogo $(b_1,f_1)(r(b_2,f_2)) = r((b_1,f_1)(b_2,f_2))$.

Consideremos os $R$-homomorfismos de álgebras $\beta_1,\beta_2\colon B \to B\bigoplus\tilde{M},\ \beta_1(b) = (b,0),\ \beta_2(b) = (b, bu-ub)$.

Por hipótese, $\beta_1 \neq \beta_2$. Por outro lado,

$$\beta_2 \circ \phi(a) = (\phi(a), \phi(a)u - u\phi(a)) = (\phi(a), au - ua) = (\phi(a), 0) = \beta_1 \circ \phi(a), \quad \forall a \in A.$$

Mas $\phi$ é um epimorfismo, logo obtemos um absurdo. Portanto qualquer $A$-homomorfismo de módulos $u\colon FM \to FN$ é um $B$-homomorfismo de módulos, por outras palavras $F$ é um functor pleno. □

Para mostrar que o functor $F$ é uma equivalência de categorias falta-nos uma última peça, isto é, a noção de epimorfismo forte.

**Definição 4.2.6.** [14] Seja $\phi\colon A \to B$ um homomorfismo de $R$-álgebras. Dizemos que $\phi$ é um *epimorfismo forte* se

(i) $\phi$ for um epimorfismo de álgebras;

(ii) Um $A$-módulo $M$ for a restrição, por $\phi$, de um $B$-módulo, caso exista uma aplicação $R$-linear $h\colon B \to End_R(M)$ tal que a representação $r\colon A \to End_R(M)$ é igual à composição $h \circ \phi$.

**Exemplo 4.2.7.** Qualquer homomorfismo sobrejectivo é um epimorfismo forte.

*Demonstração.* Suponhamos que $\phi\colon A \to B$ é um homomorfismo sobrejectivo. Então,

$(i)$ É imediato.

$(ii)$ Seja $M$ um $A$-módulo. Denotemos por $r\colon A \to End_R(M)$ a representação associada a $M$. Suponhamos que existe uma aplicação $R$-linear $s\colon B \to End_R(M)$ tal que $s \circ \phi = r$. Provemos que $s$ é uma representação.

Sejam $b_1, b_2 \in B$ quaisquer. Então, existem $a_1, a_2 \in A$ tais que $b_1 = \phi(a_1)$ e $b_2 = \phi(a_2)$, logo

$$s(b_1)s(b_2) = s(\phi(a_1))s(\phi(a_2)) = r(a_1)r(a_2) = r(a_1a_2) = s(\phi(a_1a_2)) = s(b_1b_2).$$

Além disso, $s(1_B) = s(\phi(1_A)) = r(1_A) = \mathrm{id}_M$. Logo, $s$ é uma representação. Portanto, $M$ é um $B$-módulo, sendo o $A$-módulo $M$ a restrição, por $\phi$, do $B$-módulo $M$. □

**Teorema 4.2.8.** *[14] O functor $F_{n,d}\colon S_R(n,d)$-Mod $\to (RG)_d$-Mod é uma equivalência entre a categoria dos $S_R(n,d)$-módulos e a categoria das representações polinomiais homogéneas de grau $d$ de $G$ se e só se o $R$-homomorfismo de álgebras $\rho\colon RG \to S_R(n,d)$ for um epimorfismo forte.*

*Demonstração.* É conhecido que $F_{n,d}$ é uma equivalência de categorias se e só se $F_{n,d}$ é fiel e pleno, e cada $RG$-módulo polinomial homogéneo de grau $d$ for isomorfo a $F_{n,d}M$, para algum $S_R(n,d)$-módulo $M$.

Pelo Lema 4.2.5, $F_{n,d}$ é pleno e fiel se e só se $\rho$ for um epimorfismo de álgebras.

Suponhamos que $F_{n,d}$ é uma equivalência de categorias. Resta provar $(ii)$ na definição de epimorfismo forte.

Como $S_R(n,d) \cong \left((End_R(V))^{\otimes d}\right)^{S_d}$, pelo Teorema 3.1.2, e dado que, como podemos ver na próxima proposição, a composição de um isomorfismo com um epimorfismo forte permanece um epimorfismo forte, podemos, sem perda de generalidade, provar apenas que $\rho' := \pi^{-1}\circ\rho$ é um epimorfismo forte.

Fixemos um $RG$-módulo $M$ polinomial homogéneo de grau $d$, e seja $\phi_1\colon RG \to End_R(M)$, a representação originada por $M$. Suponhamos que $\phi_1$ é factorizada por $\rho'$ através da aplicação $R$-linear $\phi_2\colon \left((End_R(V))^{\otimes^d}\right)^{S_d} \to End_R(M)$, isto é, $\phi_2\circ\rho' = \phi_1$.

Seja $\gamma_d$ a função definida em (4.1). Tomando $\phi_1^* := \phi_2\circ\gamma_d$, vemos que $\phi_1^*$ é uma extensão da representação ${\phi_1}_{|_G}$ de $G$, pois

$$\phi_1^*\circ i = \phi_2\circ\gamma_d\circ i = \phi_2\circ\pi^{-1}\circ\pi\circ\gamma_d\circ i \overset{(4.2)}{=} \phi_2\circ\pi^{-1}\circ\rho_{|_G} = \phi_2\circ\rho'_{|_G} = {\phi_1}_{|_G}, \tag{4.4}$$

onde $i$ é o homomorfismo canónico $i\colon G\to End_R(V)$ definido em (2.7).

Pelo Lema 4.2.2, $\phi_1^*$ é uma aplicação polinomial homogénea de grau $d$. Assim, ${\phi_1}_{|_G}$ é uma representação polinomial homogénea de $G$ de grau $d$. Como $F$ é uma equivalência de categorias, temos que $M$ é a restrição de um $S_R(n,d)$-módulo, isto é, $\forall m\in M$, $g\in G$, $g\cdot m = \rho(g)m$.

Além disso, $M$ pode ser considerado um $\left((End_R(V))^{\otimes^d}\right)^{S_d}$-módulo usando a restrição de escalares induzida por $\pi$. Atendendo a que $\forall m\in M$, $g\in G$

$$g\cdot m = \rho(g)m = \pi\circ\pi^{-1}\circ\rho(g)m = \pi(\rho'(g))m = \rho'(g)\cdot m,$$

concluímos que $M$ é a restrição de um $\left((End_R(V))^{\otimes^d}\right)^{S_d}$-módulo, por $\rho'$.

Verifica-se então $(ii)$, e concluímos que $\rho'$ é um epimorfismo forte. Assim $\rho$ é um epimorfismo forte.

Suponhamos agora que $\rho$ é um epimorfismo forte. Seja $M$ um $RG$-módulo polinomial homogéneo de grau $d$ e $f\colon G\to GL(M)$ a representação associada a $M$. Por definição, existe uma extensão $f^*\colon End_R(V)\to End_R(M)$ polinomial homogénea de grau $d$. Pelo Teorema 2.2.3, podemos supor que a extensão é feita através do homomorfismo canónico $i\colon G\hookrightarrow End_R(V)$.

Pelo Lema 4.2.2, existe uma aplicação $R$-linear $h\colon \left((End_R(V))^{\otimes^d}\right)^{S_d} \to End_R(M)$ tal que $f^* = h\circ\gamma_d$.

Assim,

$$f(g) = f^*\circ i(g) = h\circ\gamma_d\circ i(g) = h\circ\pi^{-1}\circ\pi\circ\gamma_d\circ i(g) = h\circ\pi^{-1}\circ\rho_{|_G}(g),\ \forall g\in G. \tag{4.5}$$

Estendendo $f\colon G\to GL(M)$ para a álgebra de grupo $RG$, obtemos $\overline{f}\colon RG\to End_R(M)$ tal que $\overline{f} = h\circ\pi^{-1}\circ\rho$. Mas, $h\circ\pi^{-1}\colon S_R(n,d)\to End_R(M)$ é uma aplicação $R$-linear. Pela definição de epimorfismo forte, conclui-se que $M$ é a restrição de um $S_R(n,d)$-módulo, através de $\rho$. $\square$

Agora que sabemos que a equivalência entre as categorias ocorre quando $\rho$ for um epimorfismo forte, é extremamente relevante explorar esta noção. Portanto, vejamos, de seguida, algumas propriedades dos epimorfismos fortes.

**Proposição 4.2.9.** *Sejam $f\colon B\to C$ e $g\colon A\to B$ homomorfismos de $R$-álgebras.*

- *Se $g$ é um homomorfismo sobrejectivo e $f$ um epimorfismo forte então $f\circ g$ é um epimorfismo forte.*

- *Se $g$ é um epimorfismo forte e $f$ um isomorfismo então $f \circ g$ é um epimorfismo forte.*
- *Se $g$ é um epimorfismo e $f \circ g$ é um epimorfismo forte então $f$ é um epimorfismo forte.*

*Demonstração.* Suponhamos que $g$ é sobrejectivo e $f$ um epimorfismo forte. É imediato que $f \circ g$ é um epimorfismo. Seja $M$ um $A$-módulo. Suponhamos que existe uma aplicação $R$-linear $s\colon C \to End_R(M)$ tal que $s \circ f \circ g = r$, com $r$ a representação associada a $M$. Como $g$ é sobrejectivo, sai que $s \circ f$ é uma representação de $B$. Como $f$ é um epimorfismo forte, existe um homomorfismo de $R$-álgebras $h\colon C \to End_R(M)$ tal que $h \circ f = s \circ f$. Como $f$ é um epimorfismo temos $h = s$. Logo $M$ como $A$-módulo é a restrição, por $f \circ g$, de um $C$-módulo. Logo $f \circ g$ é um epimorfismo forte.

Suponhamos agora que $g$ é um epimorfismo forte e $f$ um isomorfismo. Novamente, $f \circ g$ é um epimorfismo. Seja $M$ um $A$-módulo e $s\colon C \to End_R(M)$ uma aplicação $R$-linear que satisfaz $s \circ f \circ g = r$, com $r$ a representação associada a $M$. Como $g$ é um epimorfismo forte, existe $\bar{r}\colon B \to End_R(M)$ que satisfaz $\bar{r} \circ g = r$. Assim, $\bar{r} \circ f^{-1} \circ f \circ g = r$. Logo, $M$ é um $C$-módulo com a representação associada $\bar{r} \circ f^{-1}$. Logo $f \circ g$ é um epimorfismo forte.

Suponhamos agora que $f \circ g$ é um epimorfismo forte e $g$ é um epimorfismo. Temos que $f$ é um epimorfismo.

De facto, se existirem homomorfismos de $R$-álgebras $\psi_1, \psi_2\colon C \to D$ que satisfazem $\psi_1 \circ f = \psi_2 \circ f$, então $\psi_1 \circ f \circ g = \psi_2 \circ f \circ g$. Como $f \circ g$ é um epimorfismo, temos que $\psi_1 = \psi_2$.

Seja $M'$ um $B$-módulo com $t\colon B \to End_R(M')$ a representação associada a $M'$. Suponhamos que existe uma aplicação $R$-linear $s'\colon C \to End_R(M')$, com $s' \circ f = t$. Então, $s' \circ f \circ g = t \circ g$. Como $f \circ g$ é um epimorfismo forte existe um homomorfismo de $R$-álgebras $p\colon C \to End_R(M')$ tal que $p \circ f \circ g = t \circ g$. Como $g$ é um epimorfismo, concluímos que $p \circ f = t$. Logo $M'$ como $B$-módulo é a restrição, por $f$, de um $C$-módulo. Portanto $f$ é um epimorfismo forte. □

**Lema 4.2.10.** *[14] Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Então o $\mathbb{K}$-homorfismo de álgebras $\phi\colon A \to B$ é um epimorfismo forte se e só se $\phi$ for sobrejectiva .*

*Demonstração.* Suponhamos que $\phi$ é um epimorfismo forte. Definamos $A' = \phi(A)$. $A'$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, portanto admite uma base. Dado um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, digamos $M$, todo o homomorfismo de álgebras $A' \to End_{\mathbb{K}}(M)$ é, em particular, uma transformação $\mathbb{K}$-linear. Considerando uma base de $B$ que contenha a base escolhida de $A'$, podemos estender essa transformação linear para $B \to End_{\mathbb{K}}(M)$. Denotemos por $\iota$ a inclusão $A' \to B$.

Temos que, $\iota \circ \phi$ é um epimorfismo forte e $\phi$ um epimorfismo, portanto $\iota$ é um epimorfismo forte.

Assim todos os $A'$-módulos, através de $\iota$, podem ser considerados $B$-módulos. Por outras palavras, o functor $F$ induzido por $\iota$ é uma equivalência entre a categoria dos $B$-módulos e a categoria dos $A'$-módulos.

Como $F$ é uma equivalência entre categorias então a unidade $\eta\colon 1_{A'-Mod} \to FH$ é um isomorfismo natural, onde $H$ é o functor adjunto esquerdo de $F$. Como functores adjuntos esquerdos ao mesmo functor são naturalmente isomorfos, podemos supor $HA' = B \otimes_{A'} A'$. Assim, $\eta_{A'}\colon A' \to B \otimes_{A'} A'$, $\eta_{A'}(a) = 1 \otimes a$, $a \in A'$, é um isomorfismo.

Seja $\alpha\colon B \otimes_{A'} A' \to B$ o isomorfismo definido por $\alpha(b \otimes a) = ba$, $b \in B$, $a \in A'$. Então, para qualquer $a \in A'$, $\alpha \circ \eta_{A'}(a) = \alpha(1 \otimes a) = \iota(a)$. Logo $\iota = \alpha \circ \eta$ é um isomorfismo, e $A' = B$. □

Se $R$ não for um corpo, perdermos a equivalência como foi observado em [14].

**Exemplo 4.2.11.** Seja $R = \mathbb{Z}$. A inclusão canónica $e\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ é um epimorfismo forte de $\mathbb{Z}$-álgebras mas não é sobrejectivo.

*Demonstração.* Sejam $f, h\colon \mathbb{Q} \to A$ homomorfismos de $\mathbb{Z}$-álgebras tais que $f \circ e = h \circ e$. Seja $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ qualquer. Então,

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = pf\left(q^{-1}\right) = p(f(q))^{-1} = p(h(q))^{-1} = h\left(\frac{p}{q}\right).$$

Logo $e$ é um epimorfismo.

Seja $M$ um $\mathbb{Z}$-módulo. Suponhamos que existe uma aplicação $\mathbb{Z}$-linear $h\colon Q \to End_{\mathbb{Z}}(M)$ tal que $h \circ e = r$, onde $r$ é a representação originada pelo módulo $M$.

Assim, podemos definir uma estrutura de $\mathbb{Q}$-módulo em $M$ que satisfaça $\frac{p}{q} \times m := h\left(\frac{p}{q}\right)(m)$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $m \in M$.

De facto, como $h$ é uma aplicação $\mathbb{Z}$-linear com imagem em $End_{\mathbb{Z}}(M)$ e $h(1_{\mathbb{Q}}) = r \circ e(1) = \mathrm{id}_M$ resta provar que $h$ preserva a multiplicação de $\mathbb{Q}$ para ser uma representação de $\mathbb{Q}$.

Observemos agora que: Se $q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, e $m \in M$ são tais que $qm = 0$ então $m = 0$. (4.6)

De facto,

$$m = \mathrm{id}_M(m) = h(1_{\mathbb{Q}})(m) = h\left(\frac{q}{q}\right)(m) \overset{(*)}{=} qh\left(\frac{1}{q}\right)(m) \overset{(**)}{=} h\left(\frac{1}{q}\right)(qm) = 0,$$

onde em $(*)$ usamos o facto de $h$ ser uma aplicação $\mathbb{Z}$-linear e em $(**)$ que $h\left(\frac{1}{q}\right) \in End_{\mathbb{Z}}(M)$. Vejamos agora que, para quaisquer $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$, se tem

$$q_1q_2h\left(\frac{1}{q_1q_2}\right) = \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_M \circ \mathrm{id}_M = q_1h\left(\frac{1}{q_1}\right) \circ q_2h\left(\frac{1}{q_2}\right) = q_1q_2h\left(\frac{1}{q_1}\right) \circ h\left(\frac{1}{q_2}\right).$$

Por (4.6), temos $h\left(\frac{1}{q_1q_2}\right) = h\left(\frac{1}{q_1}\right) \circ h\left(\frac{1}{q_2}\right)$. Multiplicando em ambos os membros por $p_1p_2$ e usando a linearidade de $h$, obtemos $h\left(\frac{p_1}{q_1}\right) \circ h\left(\frac{p_2}{q_2}\right) = h\left(\frac{p_1p_2}{q_1q_2}\right)$, para quaisquer racionais $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}$. Além disso, $pm = r(p)(m) = h \circ e(p)(m) = p \times m,\ p \in \mathbb{Z},\ m \in M$. Portanto $M$ como $\mathbb{Z}$-módulo é a restrição, por $e$, de um $\mathbb{Q}$-módulo. Logo $e$ é um epimorfismo forte, mas não é sobrejectivo. □

Podemos também, através do próximo exemplo, ver que nem todos os epimorfismos são epimorfismos fortes.

**Exemplo 4.2.12.** Seja $\mathbb{K}$ um corpo. O epimorfismo de álgebras $\phi\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}(\mathbb{Z},+)$ definido por $\phi(a_0 + \cdots + a_nX^n) = a_0v_0 + \ldots + a_nv_n$, $a_0 + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$, onde $v_i$ denota o elemento $i$ da base $\mathbb{Z}$ da álgebra de grupo $\mathbb{K}\mathbb{Z}$, não é um epimorfismo forte.

*Demonstração.* É imediato ver que $\phi$ é um homomorfismo entre $\mathbb{K}$-álgebras, pois $v_iv_j = v_{i+j}$ e $\phi(1) = 1v_0$. Temos que $\phi$ não é sobrejectiva pois o elemento $v_{-1}$ não pertence à imagem de $\phi$.

No entanto, temos que $v_{-n} = (v_n)^{-1}$, para $n \geq 0$, e como 1 gera $\mathbb{Z}$ sai que $v_n = v_{1+\ldots+1} = (v_1)^n$. Desta forma $v_1$ gera $\mathbb{K}\mathbb{Z}$.

Como $v_1 = \phi(X)$, temos que $\phi$ é um epimorfismo. Pelo lema anterior, $\phi$ não é um epimorfismo forte, mas é um epimorfismo. □

Assim, em geral, para $R$-álgebras

sobrejectividade$\Rightarrow$epimorfismo forte $\Rightarrow$ epimorfismo;

Se $R$ for um corpo então

sobrejectividade $\Leftrightarrow$ epimorfismo forte $\Rightarrow$ epimorfismo.

*Observação.* Seja $R$ um anel comutativo. Em teoria de categorias dizemos que $\phi : A \to B$ é um epimorfismo forte de $R$-álgebras, se para quaisquer homomorfismos de $R$-álgebras $h_1 : A \to C$, $h_2 : B \to D$ e qualquer monomorfismo $m\colon C \to D$ que satisfaçam $m \circ h_1 = h_2 \circ \phi$, existir um único homomorfismo $t\colon B \to C$ tal que $m \circ t = h_2$ e $t \circ \phi = h_1$.

Usando esta noção categórica de epimorfismo forte em $R$-álgebras, temos que as noções de sobrejectividade-epimorfismo forte coincidem. Assim, o conceito aqui usado de epimorfismo forte é uma noção mais fraca, neste sentido, que a usada em Teoria das Categorias.

Voltemos ao nosso problema. Usando a caracterização de epimorfismo forte sobre corpos, juntamente com o teorema anterior obtemos:

**Corolário 4.2.13.** *[14] Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(1) $\rho : \mathbb{K}G \to S_{\mathbb{K}}(n,d)$ é sobrejectivo.*

*(2) A categoria dos $S_{\mathbb{K}}(n,d)$-módulos é equivalente à categoria das representações polinomiais homogéneas de grau $d$ de $GL_n(\mathbb{K})$.*

Pelo exemplo 4.2.7 e pelo Teorema 4.2.8, já podíamos observar que, quando a dualidade de Schur-Weyl se verifica, sobre um anel comutativo qualquer, temos uma equivalência entre as categorias dos $S_R(n,d)$-módulos e das representações polinomiais homogéneas de grau $d$ de $GL_n(R)$. Portanto a dualidade de Schur-Weyl implica a conexão entre as álgebras de Schur e as representações polinomiais homogéneas. No entanto, no caso de corpos, este resultado levanta a questão de saber se o estudo para as condições da equivalência entre as categorias é o mesmo que o estudo para as condições da dualidade.

Para já, vejamos uma propriedade que obtemos para as representações polinomiais homogéneas quando a dualidade se verifica.

**Teorema 4.2.14.** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo com característica zero ou superior a $d$. Se a dualidade de Schur-Weyl for satisfeita, então qualquer representação polinomial homogénea de grau $d$ de $GL_n(R)$ é uma soma directa de representações simples.*

*Demonstração.* Seja $r\colon G \to GL(M)$ uma representação polinomial homogénea de grau $d$. Como a dualidade de Schur-Weyl se verifica, temos, pelo corolário anterior, que as categorias referidas são equivalentes. Assim $M$ é a restrição de um $S_{\mathbb{K}}(n,d)$-módulo, digamos $M'$, isto é, $F_{n,d}M' \cong M$. Pelo Corolário 3.3.3, $S_{\mathbb{K}}(n,d)$ é semi-simples, o que implica que $M'$ é um $S_{\mathbb{K}}(n,d)$-módulo semi-simples. Como a equivalência de categorias preserva módulos semi-simples temos que $M$ é um $RG$-módulo semi-simples. Assim $r$ é uma soma directa de representações simples. $\square$

# Capítulo 5

# Quando se verifica a dualidade de Schur-Weyl?

Neste capítulo, pretendemos estudar condições para que a dualidade de Schur-Weyl seja satisfeita. Comecemos por estudar a dualidade sobre corpos infinitos.

## 5.1 Dualidade de Schur-Weyl em corpos infinitos

Seja $\mathbb{K}$ um corpo infinito. É conhecido, ver [11, secções 2.4, 2.6], que $\rho$ é sobrejectivo. Para o provar, iremos calcular a dimensão do espaço vectorial $\rho(\mathbb{K}GL_n(\mathbb{K}))$. Para isto, é necessária alguma preparação. Em particular, apresentamos a noção de espaço dos coeficientes de uma representação.

Seja $G$ um grupo. Considere-se a álgebra $\mathscr{F}(G,\mathbb{K})$ de todas as funções de $G$ para $\mathbb{K}$ com as operações definidas elemento a elemento.

**Definição 5.1.1.** [8] Sejam $G$ um grupo e $\mathbb{K}$ um corpo. Considere-se uma representação $r\colon G \to GL(M)$. Então

$$r(g)(m_j) = \sum_{i\in I} r_{ij}(g)m_i, \quad g \in G,\ j \in I,$$

onde $(m_i)_{i\in I}$ é uma base de $M$. Ao subespaço vectorial de $\mathscr{F}(G,\mathbb{K})$ gerado pelas funções coeficiente $r_{ij}$ da representação $r$ chamamos *espaço dos coeficientes* da representação $r$. Este espaço será denotado por $C_r$.

*Observação.* O espaço dos coeficientes da representação é independente da escolha da base de $M$, isto é, quaisquer duas bases distintas de $M$ induzem o mesmo espaço vectorial, $C_r$.

**Lema 5.1.2.** *Sejam $r\colon GL_n(\mathbb{K}) \to GL(M)$ e $s\colon GL_n(\mathbb{K}) \to GL(N)$ duas representações de $GL_n(\mathbb{K})$ de dimensão finita. Então $C_{r\otimes s} = C_rC_s = \{fh\colon f \in C_r,\ h \in C_s\}$.*

*Demonstração.* Sejam $\{m_1,\dots,m_k\}$ e $\{n_1,\dots,n_l\}$ bases para $M$ e $N$, respectivamente.

Então, $\{m_i \otimes n_j\colon i = 1,\dots,k; j = 1,\dots,l\}$ é uma base para $M \otimes N$. Suponhamos que para todo o $g \in GL_n(\mathbb{K})$,

$$r(g)(m_j) = \sum_{i=1}^{k} r_{i,j}(g)m_i, \quad j = 1,\dots,k;$$

$$s(g)(n_j) = \sum_{i=1}^{l} s_{i,j}(g) n_i, \quad j = 1, \ldots, l;$$

$$(r \otimes s)(g)(m_i \otimes n_j) = \sum_{a=1}^{k} \sum_{b=1}^{l} (r \otimes s)_{a,b,i,j}(g) m_a \otimes n_b, \ i = 1, \ldots, k, \ j = 1, \ldots, l.$$

Então, para todo o $g \in GL_n(\mathbb{K})$,

$$(r \otimes s)(g)(m_i \otimes n_j) = r(g)(m_i) \otimes s(g)(n_j) = \left( \sum_{a=1}^{k} r_{a,i}(g) m_a \right) \otimes \left( \sum_{b=1}^{l} s_{b,j}(g) n_b \right)$$

$$= \sum_{a=1}^{k} \sum_{b=1}^{l} r_{a,i}(g) s_{b,j}(g) m_a \otimes n_b, \quad i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots l.$$

Assim, $(r \otimes s)_{a,b,i,j} = r_{a,i} s_{b,j}, \quad a, i = 1, \ldots, k; b, j = 1, \ldots, l$. Portanto, $C_{r \otimes s} = C_r C_s$. □

Daqui em diante, fixemos $G = GL_n(\mathbb{K})$, salvo dito em contrário.

**Lema 5.1.3.** *[8, Lema 1.2] Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $r \colon GL_n(\mathbb{K}) \to GL(M)$ uma representação de $GL_n(\mathbb{K})$. Então $\dim_{\mathbb{K}} C_r = \dim_{\mathbb{K}} \overline{r}(\mathbb{K}G)$, onde $\overline{r}$ é a representação da álgebra de grupo $\mathbb{K}G$ associada a $r$.*

*Demonstração.* Seja $(v_i)_{i \in I}$ uma base para $M$. Então $End_{\mathbb{K}}(M)$ tem base $(e_{i,j})_{i,j \in I}$, onde $e_{i,j}(v_k) = \delta_{k,j} v_i$, para todos $k, i, j \in I$. Assim,

$$r(g) = \sum_{i,j \in I} r_{ij}(g) e_{i,j}, \quad g \in GL_n(\mathbb{K}).$$

Estendendo $r$, por linearidade, para a álgebra de grupo obtemos

$$\overline{r}(a) = \sum_{i,j \in I} \overline{r_{ij}}(a) e_{i,j}, \quad a \in \mathbb{K}GL_n(\mathbb{K}).$$

Como $G$ é uma base de $\mathbb{K}G$, qualquer função de $G$ para $\mathbb{K}$ se estende de modo único a um elemento de $(\mathbb{K}G)^*$. Portanto, $\mathscr{F}(G, \mathbb{K}) \cong (\mathbb{K}G)^*$ como espaços vectoriais. Claramente $\overline{r_{i,j}}$ é a extensão de $r_{i,j}$ e $\overline{r_{i,j}}$ geram a imagem de $C_r$ em $(\mathbb{K}G)^*$ que denotaremos por $\overline{C_r}$.

Seja $e^*_{i,j}$ a base de $End_{\mathbb{K}}(M)^*$, dual da base $e_{i,j}$, isto é, $e^*_{i,j}(e_{k,l}) = \delta_{i,k} \delta_{j,l} 1_{\mathbb{K}}$, onde $i, j, k, l \in I$.

Então,

$$\overline{r}^*(e^*_{i,j})(a) = e^*_{i,j} \left( \sum_{k,l \in I} \overline{r_{k,l}}(a) e_{k,l} \right) = \sum_{k,l \in I} \overline{r_{k,l}}(a) e^*_{i,j}(e_{k,l}) = \overline{r_{i,j}}(a), \quad \forall a \in \mathbb{K}G.$$

Assim, temos o isomorfismo $\overline{r}^* \left( End_{\mathbb{K}}(M)^* \right) = \overline{C_r} \cong C_r$.

Por outro lado, temos a factorização

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}G \arrow[rr, "\overline{r}"] \arrow[dr, "sobrejectiva"'] & & End_{\mathbb{K}}(M) \\ & \overline{r}(\mathbb{K}G) \arrow[ur, "injectiva"'] & \end{tikzcd},$$

o que implica a factorização

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{K}G)^* & & (End_{\mathbb{K}}(M))^* \arrow[ll, "\overline{r}^*"'] \arrow[dl, "sobrejectiva"] \\ & (\overline{r}(\mathbb{K}G))^* \arrow[ul, "injectiva"] & \end{tikzcd}.$$

Logo, $\overline{r}^*\left((End_{\mathbb{K}}(M))^*\right) = (\overline{r}(\mathbb{K}G))^*$. Concluímos que

$$\dim_{\mathbb{K}} C_r = \dim_{\mathbb{K}} \overline{r}^*\left(End_{\mathbb{K}}(M)^*\right) = \dim_{\mathbb{K}} (\overline{r}(\mathbb{K}G))^* = \dim_{\mathbb{K}} \overline{r}(\mathbb{K}G). \qquad \square$$

**Teorema 5.1.4.** *[9, Lema 3] Seja $\mathbb{K}$ um corpo infinito. Consideremos o homomorfismo de álgebras $\rho\colon \mathbb{K}G \to S_{\mathbb{K}}(n,d)$. Então, $\dim_{\mathbb{K}} \rho(\mathbb{K}G) = \binom{n^2+d-1}{d}$ para quaisquer naturais $n,d$.*

*Demonstração.* Recordemos que uma função $f\colon G \to \mathbb{K}$ se diz polinomial se puder ser escrita como um polinómio com coeficientes em $\mathbb{K}$ nas funções $X_{t,s}$ introduzidas em 2.1.1. Como $\mathbb{K}$ é um corpo infinito, as funções $X_{i,j}$ $i,j = 1,\ldots,n$ são algebraicamente independentes. Denotando por $r$ a representação dada pela acção de $G$ em $V = \mathbb{K}^n$, é imediato verificar que $r_{i,j} = X_{i,j},\ i,j = 1,\ldots,n$. Assim, $C_r = \bigoplus_{i,j=1}^{n} \mathbb{K}X_{i,j}$.

Pelo Lema 5.1.2,

$$C_\rho = (C_r)^d = \left(\bigoplus_{i,j=1}^{n} \mathbb{K}X_{i,j}\right)^d.$$

Portanto, $C_\rho$ é o espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de todas as funções polinomiais homogéneas de grau $d$. Logo $\dim_{\mathbb{K}} C_\rho = \binom{n^2+d-1}{d}$. Pelo Lema 5.1.3, temos $\dim_{\mathbb{K}} \rho(\mathbb{K}G) = \binom{n^2+d-1}{d}$. $\square$

**Corolário 5.1.5.** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo infinito. Então o homomorfismo de álgebras $\rho\colon \mathbb{K}G \to S_{\mathbb{K}}(n,d)$ é sobrejectivo, para quaisquer naturais $n,d$.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 5.1.4 e pelo Corolário 3.2.3, temos $\dim_{\mathbb{K}} \rho(\mathbb{K}G) = \dim_{\mathbb{K}} S_{\mathbb{K}}(n,d)$. De $\rho(\mathbb{K}G) \subset S_{\mathbb{K}}(n,d)$, concluímos que $\rho(\mathbb{K}G) = S_{\mathbb{K}}(n,d)$. $\square$

Analisemos agora a sobrejectividade do homomorfismo $\psi$, definido na secção 4.1. Para isso, temos dois cenários: $n \geq d$ e $n < d$. Para já, consideremos o caso $n \geq d$.

**Teorema 5.1.6.** *[5, secção 3] Sejam $\mathbb{K}$ um corpo infinito, $n$ e $d$ naturais tais que $n \geq d$. Então o homomorfismo $\psi\colon KS_d \to End_{\mathbb{K}G}(V^{\otimes^d})$ é sobrejectivo .*

*Demonstração.* Seja $t \in End_{\mathbb{K}G}\left(V^{\otimes^d}\right)$. Seja $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ a base canónica de $V$.

Então, $V^{\otimes^d}$ tem base $\{e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \colon 1 \leq j_1,\ldots,j_d \leq n\}$. Assim, existem coeficientes $t_{i_1,\ldots,i_d}^{j_1,\ldots,j_d} \in \mathbb{K}$ tais que

$$t(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d}) = \sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^{n} t_{i_1,\ldots,i_d}^{j_1,\ldots,j_d} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d}, \quad 1 \leq j_1,\ldots,j_d \leq n.$$

Seja $g=[g_{i,j}]\in G$, então $ge_j=\sum_{i=1}^{n} g_{i,j}e_i$, $j=1,\dots,n$. Deste modo,

$$g(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d})=\sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{n} g_{i_1,j_1}\cdots g_{i_d,j_d}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_d},\quad \forall g\in GL_n(\mathbb{K}),\ 1\le j_1,\dots,j_d\le n.$$

Notemos que, para $1\le j_1,\dots,j_d\le n$,

$$\begin{aligned}
g(t(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d})) &= g\left(\sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{n} t_{i_1,\dots,i_d}^{j_1,\dots,j_d} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_d}\right)\\
&= \sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{n} t_{i_1,\dots,i_d}^{j_1,\dots,j_d} g(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_d})\\
&= \sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{n}\sum_{k_1,\dots,k_d=1}^{n} t_{i_1,\dots,i_d}^{j_1,\dots,j_d} g_{k_1,i_1}\cdots g_{k_d,i_d}e_{k_1}\otimes\cdots\otimes e_{k_d}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
t(g(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d})) &= t\left(\sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{n} g_{i_1,j_1}\cdots g_{i_d,j_d}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_d}\right)\\
&= \sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{n} g_{i_1,j_1}\cdots g_{i_d,j_d}t(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_d})\\
&= \sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{n}\sum_{k_1,\dots,k_d=1}^{n} g_{i_1,j_1}\cdots g_{i_d,j_d}t_{k_1,\dots,k_d}^{i_1,\dots,i_d}e_{k_1}\otimes\cdots\otimes e_{k_d}.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos que

$$\sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{n} t_{i_1,\dots,i_d}^{j_1,\dots,j_d} g_{k_1,i_1}\cdots g_{k_d,i_d}=\sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{n} g_{i_1,j_1}\cdots g_{i_d,j_d}t_{k_1,\dots,k_d}^{i_1,\dots,i_d},\quad 1\le k_1,\dots,k_d\le n. \tag{5.1}$$

Consideremos o polinómio, com $n^2\times n^2$ indeterminadas,

$$\sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{n}\left(t_{k_1,\dots,k_d}^{i_1,\dots,i_d}x_{i_1,j_1}\cdots x_{i_d,j_d}-t_{i_1,\dots,i_d}^{j_1,\dots,j_d}x_{k_1,i_1}\cdots x_{k_d,i_d}\right).$$

Por (5.1), este polinómio anula-se para quaisquer coeficientes $g_{i,j}$, $i,j=1,\dots,n$, em que $[g_{i,j}]$ é uma matriz invertível. Tendo em conta que o corpo é infinito e usando indução sobre o facto que o único polinómio de uma variável admitindo um número infinito de raízes é o polinómio nulo, pode ver-se que este polinómio tem de ser o nulo. Assim, obtemos a seguinte igualdade entre polinómios:

$$\sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{n} t_{k_1,\dots,k_d}^{i_1,\dots,i_d}x_{i_1,j_1}\cdots x_{i_d,j_d}=\sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{n} t_{i_1,\dots,i_d}^{j_1,\dots,j_d}x_{k_1,i_1}\cdots x_{k_d,i_d},\quad 1\le k_1,\dots,k_d\le n. \tag{5.2}$$

Fixemos $j=(j_1,\dots,j_d)$ e $i=(i_1,\dots,i_d)$ tais que $i\nsim j$, segundo a relação definida em (3.3). Então $t_{i_1,\dots,i_d}^{j_1,\dots,j_d}=0$. De facto, para qualquer $k$ observamos que o monómio $x_{k_1,i_1}\cdots x_{k_d,i_d}$ tem coeficiente $\sum_{l:\,(k,l)\sim(k,i)} t_{l_1,\dots,l_d}^{j_1,\dots,j_d}$ no segundo membro. Assim, fixando $k=(1,\dots,d)$, o que é possível dado que $n\ge d$, obtemos que $x_{1,i_1}\cdots x_{d,i_d}$ tem coeficiente $t_{i_1,\ldots,i_d}^{j_1,\ldots,j_d}$ no segundo membro. Por outro lado, o monómio $x_{1,i_1}\cdots x_{d,i_d}$ tem coeficiente zero no primeiro membro. Assim, $t_{i_1,\ldots,i_d}^{j_1,\ldots,j_d}=0$.

Como $n\geq d$, existem $e_1,\ldots,e_d$ elementos distintos da base de $V$. Como vimos, $t_{i_1,\ldots,i_d}^{1,\ldots,d}=0$ se $i\nsim(1,\ldots,d)$. Portanto,

$$t(e_1\otimes\cdots\otimes e_d)=\sum_{\sigma\in S_d}t^{1,\ldots,d}_{\sigma^{-1}(1),\ldots,\sigma^{-1}(d)}e_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes e_{\sigma^{-1}(d)}=\sum_{\sigma\in S_d}t_\sigma\sigma(e_1\otimes\cdots\otimes e_d),$$

onde $t_\sigma:=t^{1,\ldots,d}_{\sigma^{-1}(1),\ldots,\sigma^{-1}(d)}$.

Provemos agora por indução sobre $m=d-|\{j_1,\ldots,j_d\}|$ que
$t(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d})=\sum_{\sigma\in S_d}t_\sigma\sigma(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d})$.

Se $m=0$, então $j_1,\ldots,j_d$ são distintos. Basta escolher $g\in G$, tal que $ge_i=e_{j_i}$, $i=1,\ldots,d$, e obtemos

$$\begin{aligned}t(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d})&=t(g(e_1\otimes\cdots\otimes e_d))=g(t(e_1\otimes\cdots\otimes e_d))=g\left(\sum_{\sigma\in S_d}t_\sigma\sigma(e_1\otimes\cdots\otimes e_d)\right)\\&=\sum_{\sigma\in S_d}t_\sigma\sigma(g(e_1\otimes\cdots\otimes e_d))=\sum_{\sigma\in S_d}t_\sigma\sigma(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d}).\end{aligned}$$

Suponhamos o resultado verdadeiro para $d-|\{j_1,\ldots,j_d\}|=m-1\geq 0$. Provemos que o resultado é verdadeiro para $d-|\{j_1,\ldots,j_d\}|=m$. Suponhamos $(j_1,\ldots,j_d)$ nestas condições. Podemos supor, sem perda de generalidade, $j_{d-1}=j_d$. Fixemos $1\leq l\leq n$, $l\notin\{j_1,\ldots,j_d\}$ e escolhamos $g\in G$ tal que $\begin{cases}g(e_i)=e_i,\ i\neq l\\ g(e_l)=e_l+e_{j_d}\end{cases}$. Assim,

$$\begin{aligned}g(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_{d-1}}\otimes e_l)&=e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_{d-1}}\otimes(e_l+e_{j_d})\\&=(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_{d-1}}\otimes e_l)+(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d}).\end{aligned}\tag{5.3}$$

Observamos que $d-|\{j_1,\ldots,j_{d-1},l\}|=m-1$. Portanto,

$$\begin{aligned}t(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d})&=t(g(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_{d-1}}\otimes e_l))-t(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_l)\\&=g(t(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_{d-1}}\otimes e_l))-t(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_l)\\&\overset{\text{indução}}{=}g\left(\sum_{\sigma\in S_d}t_\sigma\sigma(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_{d-1}}\otimes e_l)\right)-\sum_{\sigma\in S_d}t_\sigma\sigma(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_l)\\&=\sum_{\sigma\in S_d}t_\sigma\sigma(g(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_{d-1}}\otimes e_l))-\sum_{\sigma\in S_d}t_\sigma\sigma(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_{d-1}}\otimes e_l)\\&\overset{(5.3)}{=}\sum_{\sigma\in S_d}t_\sigma\sigma(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d}).\end{aligned}$$

Concluímos que $t=\psi\left(\sum_{\sigma\in S_d}t_\sigma\sigma\right)$, logo $\psi$ é sobrejectivo. □

*Observação* 1. Como vimos, a hipótese $n\geq d$ é essencial para concretizarmos esta prova. Na verdade, o argumento usado para provar que $t(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d) = \sum_{\sigma \in S_d} t_\sigma \sigma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d)$ e $t \in End_{RG}\left(V^{\otimes^d}\right)$ implica que $t = \psi\left(\sum_{\sigma \in S_d} t_\sigma \sigma\right)$, é válido para qualquer anel comutativo com identidade $R$.

Para o caso $n < d$ usaremos o primeiro teorema fundamental da teoria invariante provado por De Concini e Procesi [7]:

**Teorema 5.1.7** (Primeiro Teorema Fundamental da Teoria Invariante)**.** *Sejam $R$ um anel comutativo com identidade, $x_1, \ldots, x_d$ $n$-vectores e $\eta_1, \ldots, \eta_d$ $n$-covectores:*

$$x_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}), \quad \eta_j = (\eta_{j,1}, \ldots, \eta_{j,n}).$$

*Considere-se a acção do grupo linear geral $GL_n(R)$ no anel de coordenadas $R[x_{i,j}, \eta_{s,l}]$ dada por*

$$g \cdot x_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} \left(g^{-1}\right)_{j,r} x_{i,r}, \quad g \cdot \eta_{s,l} = \sum_{r=1}^{n} \eta_{s,r} g_{r,l}.$$

*Então o anel $R[x_{i,j}, \eta_{s,l}]^G$ é gerado sobre $R$ pelos elementos $\langle x_i, \eta_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_{i,k}\eta_{j,k}$.*

Para conseguirem este resultado independentemente da característica do corpo, De Concini e Procesi abordaram $GL_n$ como um grupo algébrico do ponto de vista functorial. Na respectiva prova, assumem $n < d$. Estamos agora em condições para concluir a sobrejectividade de $\psi$, cuja prova foi dada pela primeira vez em [7].

**Teorema 5.1.8.** *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo infinito, $n$ e $d$ naturais tais que $n < d$. Então o homomorfismo $\psi\colon KS_d \to End_{\mathbb{K}G}(V^{\otimes^d})$ é sobrejectivo.*

*Demonstração.* Considerando a acção de $G$ em $End_{\mathbb{K}}(V^{\otimes^d})$ dada por $g.\phi = \rho(g)\phi\rho(g)^{-1}$, com $g \in G, \phi \in End_{\mathbb{K}}(V^{\otimes^d})$, obtemos que $End_{\mathbb{K}G}(V^{\otimes^d}) \cong End_{\mathbb{K}}(V^{\otimes^d})^G$.

Podemos definir a transformação linear

$$\begin{array}{ccc} End_{\mathbb{K}}(V^{\otimes^d}) & \xrightarrow{\quad f \quad} & \left(V^{\otimes^d} \otimes (V^*)^{\otimes^d}\right)^* \\ \phi & \longrightarrow & \left(\begin{array}{ccc} f(\phi)\colon V^{\otimes^d} \otimes (V^*)^{\otimes^d} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ w \otimes \eta & \longmapsto & \eta(\phi(w)) \end{array}\right). \end{array}$$

Mostremos que $f$ é um isomorfismo.

É imediato que $\dim_{\mathbb{K}}\left(End_{\mathbb{K}}(V^{\otimes^d})\right) = n^d n^d = \dim_{\mathbb{K}}\left(V^{\otimes^d} \otimes (V^*)^{\otimes^d}\right)^*$.

Seja $\phi \in End_{\mathbb{K}}(V^{\otimes^d})$ tal que $f(\phi) = 0$. Considerando a base canónica de $V^{\otimes^d}$, podemos escrever $\phi(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d}) = \sum \varphi_{i_1,\ldots,i_d,j_1,\ldots,j_d} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d}$. Deste modo,

$$\begin{aligned} 0 = f(\phi)(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \otimes e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_d}^*) &= e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_d}^* \left(\sum \varphi_{l_1,\ldots,l_d,j_1,\ldots,j_d} e_{l_1} \otimes \cdots \otimes e_{l_d}\right) \\ &= \varphi_{i_1,\ldots,i_d,j_1,\ldots,j_d}, \quad 1 \leq i_1, \ldots, i_d, j_1, \ldots, j_d \leq n. \end{aligned}$$

Logo $\phi = 0$. Assim $f$ estabelece um isomorfismo entre espaços vectoriais.

É importante agora realçar que quando temos uma acção num espaço vectorial $U$ esta induz uma acção em $U^*$ definida do seguinte modo: para cada $g \in G$ e $f \in U^*$ define-se $g \cdot f = f \circ g^{-1}$. Então temos uma acção de $G$ em $V^*$ e em $(V^*)^{\otimes^d}$.

Suponhamos que $\phi \in End_{\mathbb{K}}(V^{\otimes^d})$, $g \in G$, $v \otimes \zeta \in V^{\otimes^d} \otimes (V^*)^{\otimes^d}$. Então

$$\begin{aligned}[g \cdot f(\phi)]\,(v \otimes \zeta) &= f(\phi)(g^{-1}(v \otimes \zeta)) = f(\phi)(g^{-1} \cdot v \otimes g^{-1} \cdot \zeta) = f(\phi)(g^{-1}v \otimes \zeta g) \\ &= (\zeta g)(\phi(g^{-1}v)) = f(g \cdot \phi)(v \otimes \zeta).\end{aligned}$$

Assim, $g \cdot f(\phi) = f(g \cdot \phi)$. Em particular, se $\phi \in \left(End_{\mathbb{K}}\left(V^{\otimes^d}\right)\right)^G$, tem-se $g \cdot f(\phi) = f(\phi)$, $\forall g \in G$. Consideremos $r \in (V^{\otimes^d} \otimes (V^*)^{\otimes^d})^{*G}$. Através de $f$ existe um único homomorfismo $\phi$ tal que $r = f(\phi)$. Pelo cálculo anterior, $f(\phi) = g \cdot f(\phi) = f(g \cdot \phi)$, $\forall g \in G$.

Por $f$ ser um isomorfismo sai que $g \cdot \phi = \phi$, $\forall g \in G$, por isso $End_{\mathbb{K}G}(V^{\otimes^d}) \cong \left(V^{\otimes^d} \otimes (V^*)^{\otimes^d}\right)^{*G}$.

Portanto, queremos mostrar que $f \circ \psi \colon \mathbb{K}S_d \to \left(V^{\otimes^d} \otimes (V^*)^{\otimes^d}\right)^{*G}$ é sobrejectiva.

Seja $h\colon \left(V^{\otimes^d} \otimes (V^*)^{\otimes^d}\right)^* \to \mathbb{K}[x_{i,j}, \eta_{s,l}]$ definida por

$$h((e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \otimes e^*_{l_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{l_d})^*) = x_{1,j_1} \cdots x_{d,j_d} \eta_{1,l_1} \cdots \eta_{d,l_d},\ 1 \le j_i \le n,\ 1 \le l_i \le n, i = 1, \dots, d.$$

Como $\mathbb{K}$ é um corpo infinito, podemos identificar as funções polinomiais com os polinómios. Logo, é imediato que $\{x_{1,j_1} \cdots x_{d,j_d} \eta_{1,l_1} \cdots \eta_{d,l_d} \colon\ j, l \in I(n,d)\}$ é um conjunto linearmente independente. Assim, $h$ é um monomorfismo de espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$.

Provemos que $h$ é $G$-invariante.

Por um lado, temos que, para quaisquer $g \in G$, $(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \otimes e^*_{l_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{l_d})^* \in \left(V^{\otimes^d} \otimes (V^*)^{\otimes^d}\right)^*$,

$$g \cdot (e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \otimes e^*_{l_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{l_d})^* = \sum_{k,t \in I(n,d)} a_{j_1,k_1} \cdots a_{j_d,k_d} g_{t_1,l_1} \cdots g_{t_d,l_d} (e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_d} \otimes e^*_{t_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{t_d})^*,$$

onde $a_{j,k} = \left(g^{-1}\right)_{j,k}$. Logo,

$$h\left(g \cdot (e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \otimes e^*_{l_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{l_d})^*\right) = \sum_{t,d \in I(n,d)} a_{j_1,k_1} \cdots a_{j_d,k_d} g_{t_1,l_1} \cdots g_{t_d,l_d} x_{1,k_1} \cdots x_{d,k_d} \eta_{1,t_1} \cdots \eta_{d,t_d}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g \cdot h\left(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \otimes e^*_{l_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{l_d})^*\right) &= g(x_{1,j_1} \cdots x_{d,j_d} \eta_{1,l_1} \cdots \eta_{d,l_d}) \\ &= \sum_{t,d \in I(n,d)} a_{j_1,k_1} \cdots a_{j_d,k_d} g_{t_1,l_1} \cdots g_{t_d,l_d} x_{1,k_1} \cdots x_{d,k_d} \eta_{1,t_1} \cdots \eta_{d,t_d}.\end{aligned}$$

Assim $h$ é um $\mathbb{K}G$-homomorfismo. Agora, estudemos a imagem de $h$. Denotemos por $\varepsilon_i$ o elemento $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ com entrada 1 na posição $i$. Como $\mathbb{K}$ é um corpo infinito, podemos considerar a aplicação grau, $deg$, nos geradores de $\mathbb{K}[x_{i,j}, \eta_{s,l}]$, definida por $deg(x_{i,j}) = \varepsilon_i$ e $deg(\eta_{i,j}) = \varepsilon_{d+i}$. Deste modo, obtemos funções polinomiais homogéneas com respeito a $deg$. Além disso, podemos considerar que $deg$ satisfaz as seguintes propriedades $deg(fg) = deg(f) + deg(g)$, para quaisquer funções polinomiais homogéneas $f, g$, e que o produto de duas funções polinomiais homogéneas com respeito a $deg$ é ainda uma função polinomial homogénea.

Logo, $im(h)$ é o subespaço vectorial de $\mathbb{K}[x_{i,j},\eta_{s,l}]$ cujos elementos são funções polinomiais homogéneas de grau $\sum_{i=1}^{2d}\varepsilon_i$.

De facto, cada elemento de $im(h)$ é combinação linear de elementos escritos na forma $h\Big((e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d}\otimes e^*_{l_1}\otimes\cdots\otimes e^*_{l_d})^*\Big)=x_{1,j_1}\cdots x_{d,j_d}\eta_{1,l_1}\cdots\eta_{d,l_d}$, e $deg(x_{1,j_1}\cdots x_{d,j_d}\eta_{1,l_1}\cdots\eta_{d,j_d})=deg(x_{1,j_1})+\cdots+deg(\eta_{d,l_d})=\sum_{i=1}^{2d}\varepsilon_i$. Além disso, notemos que $\mathbb{K}[x_{i,j},\eta_{s,l}]$ tem uma base constituída por funções monomiais homogéneas, em relação a $deg$. Como as funções monomiais homogéneas anteriores são as únicas de grau $\sum_{i=1}^{2d}\varepsilon_i$ e todas as outras funções monomiais são homogéneas de outro grau concluímos que $im(h)=\mathbb{K}[x_{i,j},\eta_{s,l}]_{(1,\ldots,1)}$.

Assim, $\Big(V^{\otimes^d}\otimes(V^*)^{\otimes^d}\Big)^{*^G}\cong\mathbb{K}[x_{i,j},\eta_{s,l}]^G_{(1,\ldots,1)}\subset\mathbb{K}[x_{i,j},\eta_{s,l}]^G=\mathbb{K}[\langle x_i,\eta_s\rangle]$, pelo primeiro teorema fundamental da teoria invariante.

Logo, os elementos de $\mathbb{K}[x_{i,j},\eta_{s,l}]^G_{(1,\ldots,1)}$ são combinação linear de produtos da forma $\langle x_i,\eta_s\rangle$. Observamos que $\langle x_i,\eta_j\rangle$ é homogéneo de grau $\varepsilon_i+\varepsilon_{d+s}$. Assim, para qualquer $r\in\mathbb{N}$, $deg(\langle x_{i_1},\eta_{s_1}\rangle\cdots\langle x_{i_r},\eta_{s_r}\rangle)=\sum_{j=1}^{r}(\varepsilon_{i_j}+\varepsilon_{d+s_j})$. Por outro lado, se $\langle x_{i_1},\eta_{s_1}\rangle\cdots\langle x_{i_r},\eta_{s_r}\rangle\in\mathbb{K}[x_{i,j},\eta_{s,l}]_{(1,\ldots,1)}$ então tem grau $(1,\ldots,1)$. Logo $r=d$ e $\{i_1,\ldots,i_d\}=\{s_1,\ldots,s_d\}=\{1,\ldots,d\}$. Assim, cada elemento de $\mathbb{K}[x_{i,j},\eta_{s,l}]^G_{(1,\ldots,1)}$ é escrito como combinação linear dos elementos $\langle x_1,\eta_{\sigma(1)}\rangle\cdots\langle x_d,\eta_{\sigma(d)}\rangle$, $\sigma\in S_d$.

Vejamos agora que $h(f(\psi(\sigma)))=\langle x_1,\eta_{\sigma(1)}\rangle\cdots\langle x_d,\eta_{\sigma(d)}\rangle$, com $\sigma\in S_d$.

Como,

$$f(\psi(\sigma))(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d}\otimes e^*_{l_1}\otimes\cdots\otimes e^*_{l_d})=e^*_{l_1}\otimes\cdots\otimes e^*_{l_d}(e_{i_{\sigma^{-1}(1)}}\otimes\cdots\otimes e_{i_{\sigma^{-1}(d)}})=\delta_{l_1,i_{\sigma^{-1}(1)}}\cdots\delta_{l_d,i_{\sigma^{-1}(d)}},$$

então $f(\psi(\sigma))=\sum_{j,l\in I(n,d)}\delta_{l_1,i_{\sigma^{-1}(1)}}\cdots\delta_{l_d,i_{\sigma^{-1}(d)}}(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d}\otimes e^*_{l_1}\otimes\cdots\otimes e^*_{l_d})^*$. Portanto,

$$\begin{aligned}h(f(\psi(\sigma)))&=\sum_{j,l\in I(n,d)}\delta_{l_1,i_{\sigma^{-1}(1)}}\cdots\delta_{l_d,i_{\sigma^{-1}(d)}}x_{1,j_1}\cdots x_{d,j_d}\eta_{1,l_1}\cdots\eta_{d,l_d}\\&=\sum_{j\in I(n,d)}x_{1,j_1}\cdots x_{d,j_d}\eta_{1,j_{\sigma^{-1}(1)}}\cdots\eta_{d,j_{\sigma^{-1}(d)}}=\sum_{j\in I(n,d)}x_{1,j_1}\eta_{\sigma(1),j_1}\cdots x_{d,j_d}\eta_{\sigma(d),j_d}\\&=\langle x_1,\eta_{\sigma(1)}\rangle\cdots\langle x_d,\eta_{\sigma(d)}\rangle.\end{aligned}$$

Assim, cada elemento de $\Big(V^{\otimes^d}\otimes(V^*)^{\otimes^d}\Big)^{*^G}$ é combinação linear de elementos da forma $f(\psi(\sigma))$, $\sigma\in S_d$. Como $f$ é um $\mathbb{K}G$-isomorfismo, concluímos que $\psi$ é sobrejectiva. □

Assim, concluímos que a dualidade de Schur-Weyl se verifica para qualquer corpo infinito. Em particular, para qualquer corpo algebricamente fechado.

Portanto, podemos ainda inferir que a categoria dos $S_{\mathbb{K}}(n,d)$-módulos é equivalente à categoria das representações polinomiais homogéneas de grau $d$ de $GL_n(\mathbb{K})$, para $\mathbb{K}$ um corpo infinito qualquer. Em particular, o $\mathbb{K}G$-módulo $V^{\otimes^d}$ pode ser estudado como $S_{\mathbb{K}}(n,d)$-módulo, o que é extremamente vantajoso pois a dimensão de $\mathbb{K}G$ é infinita enquanto que a álgebra de Schur tem dimensão finita.

## 5.2 Interpretação da dualidade de Schur-Weyl em corpos arbitrários

Infelizmente, para corpos finitos temos um cenário completamente diferente, pois a dualidade de Schur-Weyl pode não ocorrer. De facto:

**Exemplo 5.2.1.** O homomorfismo $\rho\colon \mathbb{K}G \to S_{\mathbb{K}}(n,d)$ não é sobrejectivo quando $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, $n = d = 2$.

*Demonstração.* Temos nestas condições,

$$GL_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Assim, $|G| = 6$, o que implica $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}G) = 6$. Por outro lado, $\dim_{\mathbb{K}}(S_{\mathbb{K}}(2,2)) = \binom{4+2-1}{2} = 10$. Se $\rho$ fosse um homomorfismo sobrejectivo tinhamos que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}G) \geq \dim_{\mathbb{K}}(S_{\mathbb{K}}(2,2))$, o que é absurdo. $\square$

Observamos também que a conexão entre a categoria dos módulos sobre a álgebra de Schur, $S_{\mathbb{K}}(n,d)$, e a categoria das representações polinomiais homogéneas de grau $d$ de $GL_n(\mathbb{K})$ não é tão clara para corpos finitos como foi para corpos infinitos.

No entanto, sabendo que a dualidade ocorre para qualquer corpo infinito tentemos tirar mais conclusões para corpos finitos sobre a dualidade de Schur-Weyl.

**Teorema 5.2.2.** *[4, Lema 2.4] Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Então o homomorfismo de álgebras $\psi\colon \mathbb{K}S_d \to End_{S_{\mathbb{K}}(n,d)}\left(V^{\otimes^d}\right)$ está bem definido e é sobrejectivo .*

*Demonstração.* Podemos considerar $V^{\otimes^d}$ como um $S_{\mathbb{K}}(n,d)$-módulo, definindo a multiplicação $\alpha \times v = \alpha(v)$, $\alpha \in S_{\mathbb{K}}(n,d)$, $v \in V^{\otimes^d}$.

Sejam $\alpha \in S_{\mathbb{K}}(n,d)$ e $\sigma \in S_d$ quaisquer. Como $\sigma \circ \alpha(v) = \alpha \circ \sigma(v), \forall v \in V^{\otimes^d}$, vemos que $\psi(\mathbb{K}S_d) \subset End_{S_{\mathbb{K}}(n,d)}(V^{\otimes^d})$, logo $\psi\colon \mathbb{K}S_d \to End_{S_{\mathbb{K}}(n,d)}(V^{\otimes^d})$ está bem definido.

Seja $\overline{\mathbb{K}}$ o fecho algébrico do corpo $\mathbb{K}$. Denotemos por $V_{\overline{\mathbb{K}}}^{\otimes^d} := \overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} V^{\otimes^d}$ a extensão do $\mathbb{K}$-espaço vectorial $V^{\otimes^d}$ induzida pela extensão $\overline{\mathbb{K}} \supseteq \mathbb{K}$ [6, C.12B, C.29]. Seja $\psi_{\overline{\mathbb{K}}}\colon \overline{\mathbb{K}}S_d \to End_{\overline{\mathbb{K}}}\left(V_{\overline{\mathbb{K}}}^{\otimes^d}\right)$ o $\overline{\mathbb{K}}$-homomorfismo de álgebras correspondente ao $\mathbb{K}$-homomorfismo $\psi\colon \mathbb{K}S_d \to End_{\mathbb{K}}\left(V_{\mathbb{K}}^{\otimes^d}\right)$.

Identificando $\overline{\mathbb{K}}S_d$ com $\overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}S_d$ e $End_{\overline{\mathbb{K}}}\left(V_{\overline{\mathbb{K}}}^{\otimes^d}\right)$ com $\overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} End_{\mathbb{K}}\left(V^{\otimes^d}\right)$ obtemos $\psi_{\overline{\mathbb{K}}}(\overline{\mathbb{K}}S_d) = \overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \psi(\mathbb{K}S_d)$.

Como $\overline{\mathbb{K}}$ é um corpo infinito, verifica-se a dualidade de Schur-Weyl, logo

$$\psi_{\overline{\mathbb{K}}}(\overline{\mathbb{K}}S_d) = End_{\overline{\mathbb{K}}G}\left(V_{\overline{\mathbb{K}}}^{\otimes^d}\right) = End_{\rho(\overline{\mathbb{K}}G)}\left(V_{\overline{\mathbb{K}}}^{\otimes^d}\right) = End_{S_{\overline{\mathbb{K}}}(n,d)}\left(V_{\overline{\mathbb{K}}}^{\otimes^d}\right).$$

Por outro lado, como $S_{\overline{\mathbb{K}}}(n,d)$ pode ser identificado com $\overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} S_{\mathbb{K}}(n,d)$, temos

$$End_{S_{\overline{\mathbb{K}}}(n,d)}\left(V_{\overline{\mathbb{K}}}^{\otimes^d}\right) \cong \overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} End_{S_{\mathbb{K}}(n,d)}\left(V_{\overline{\mathbb{K}}}^{\otimes^d}\right).$$

Assim,

$$\overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} End_{S_{\mathbb{K}}(n,d)}\left(V_{\overline{\mathbb{K}}}^{\otimes^d}\right) \cong \overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \psi(\mathbb{K}S_d).$$

Logo,

$$\dim_{\mathbb{K}} \psi(\mathbb{K}S_d) = \dim_{\overline{\mathbb{K}}} \overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \psi(\mathbb{K}S_d) = \dim_{\overline{\mathbb{K}}} \overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} End_{S_{\mathbb{K}}(n,d)}\left(V_{\mathbb{K}}^{\otimes^d}\right) = \dim_{\mathbb{K}} End_{S_{\mathbb{K}}(n,d)}\left(V^{\otimes^d}\right),$$

o que implica que $\psi(\mathbb{K}S_d) = End_{S_{\mathbb{K}}(n,d)}\left(V^{\otimes^d}\right)$. □

**Corolário 5.2.3.** *[2, Corolário 4.4] Seja $\mathbb{K}$ um corpo qualquer. Então a dualidade de Schur-Weyl é satisfeita se e só se o homomorfismo $\rho : \mathbb{K}G \to S_{\mathbb{K}}(n,d)$ for sobrejectivo.*

*Demonstração.* Suponhamos que $\rho$ é sobrejectivo. Então,

$$\psi(\mathbb{K}S_d) \overset{5.2.2}{=} End_{S_{\mathbb{K}}(n,d)}\left(V^{\otimes^d}\right) = End_{\rho(\mathbb{K}G)}\left(V^{\otimes^d}\right) = End_{\mathbb{K}G}\left(V^{\otimes^d}\right).$$

Logo $\psi$ é sobrejectivo e verifica-se a dualidade de Schur-Weyl. A outra implicação é imediata. □

Portanto, podemos reformular o Corolário 4.2.13, culminando num dos resultados mais interessantes e elegantes deste trabalho.

**Corolário 5.2.4.** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(1) A dualidade de Schur-Weyl verifica-se.*

*(2) A categoria dos módulos sobre $S_{\mathbb{K}}(n,d)$ é equivalente à categoria das representações polinomiais homogéneas de grau $d$ de $GL_n(\mathbb{K})$.*

Assim, no contexto de corpos, a dualidade de Schur-Weyl é a conexão entre os módulos sobre a álgebra de Schur e as representações polinomiais homogéneas do grupo linear geral. Deste modo, estudar a dualidade sobre corpos é extremamente útil.

## 5.3 Mais alguns resultados sobre o homomorfismo $\psi \colon RS_d \to End_{RG}\left(V^{\otimes^d}\right)$

Uma das grandes diferenças entre corpos finitos e infinitos trata-se da identificação entre o anel dos polinómios e as funções polinomiais. Para tentar contornar este problema e tentar generalizar o Teorema 5.1.6, podemos evitar usar este argumento desde que admitamos mais um elemento na base de $V$, isto é, exigir $n \geq d+1$. Assim, usando a mesma abordagem que em [2, Teorema 2.1], conseguimos que o resultado prevaleça para um anel comutativo com identidade qualquer.

**Teorema 5.3.1.** *Seja $R$ um anel comutativo com identidade qualquer. Se $n \geq d+1$ então $\psi \colon RS_d \to End_{RG}(V^{\otimes^d})$ é sobrejectiva.*

*Demonstração.* Seja $(e_i)$, $i = 1,\dots,n$, a base canónica de $V$. Seja $t \in End_{RG}\left(V^{\otimes^d}\right)$. Assim, existem coeficientes $t_{i_1,\dots,i_d} \in R$ tais que

$$t(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d) = \sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{n} t_{i_1,\dots,i_d} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d}.$$

Como já vimos na demonstração do Teorema 5.1.6 e na observação 1, basta mostrarmos que $t(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d) = \sum_{\sigma \in S_d} t_\sigma \sigma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d)$, onde $t_\sigma = t_{\sigma^{-1}(1),\ldots,\sigma^{-1}(d)}$, para concluírmos a prova da sobrejectividade de $\psi$. Portanto, é suficiente provar que $t_{i_1,\ldots,i_d} = 0$ se $i = (i_1,\ldots,i_d) \nsim (1,\ldots,d)$.

Fixemos $i = (i_1,\ldots,i_d)$ qualquer e suponhamos que existe $j \in \{1,\ldots,d\}$ tal que $i_j > d$. Escolha-se $1 \leq l \leq d$, tal que $l \notin \{i_1,\ldots,i_d\}$. Consideremos $g \in G$ tal que $g(e_k) = \begin{cases} e_k, & \text{se } k \neq i_j \\ e_{i_j} + e_l, & \text{se } k = i_j \end{cases}$. De facto, $g$ tem determinante 1, logo é invertível.

Como $t$ comuta com $g$ sai que $g(t(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d)) = t(g(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d)) = t(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d)$.

Assim, comparando em ambos os membros os coeficientes do elemento $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_l \otimes \cdots \otimes e_{i_d}$ obtemos $t_{i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_d} + t_{i_1,\ldots,l,\ldots,i_d} = t_{i_1,\ldots,l,\ldots,i_d}$. Portanto, $t_{i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_d} = 0$.

Logo, podemos supor, para $j = 1,\ldots,d$, que $i_j \in \{1,\ldots,d\}$. Suponhamos que existem $j,k = 1,\ldots,d$ tais que $i_j = i_k$. Então $\{i_1,\ldots,i_d\} \subsetneqq \{1,\ldots,d\}$. Assim, podemos escolher $1 \leq l \leq d$ tal que $l \notin \{i_1,\ldots,i_d\}$. Consideremos $g \in G$ tal que $g(e_k) = \begin{cases} e_k, & \text{se } k \neq l \\ e_l - e_{d+1}, & \text{se } k = l \end{cases}$. Esta escolha é admissível pois, por hipótese, $n \geq d+1$ e $g$ tem determinante 1. Assim, o coeficiente associado ao elemento da base $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d}$ na soma $g(t(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d))$ é $t_{i_1,\ldots,i_d}$.

Por outro lado,

$$t(g(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d)) = t(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d) - t(e_1 \otimes \cdots \otimes e_{l-1} \otimes e_{d+1} \otimes e_{l+1} \otimes \cdots \otimes e_d). \tag{5.4}$$

Seja $h \in G$ tal que

$$h(e_k) = \begin{cases} e_{d+1}, & \text{se } k = l \\ e_l, & \text{se } k = d+1 \\ e_k, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

De facto, $\det h = -1$, logo $h \in G$. Assim,

$$\begin{aligned} t(e_1 \otimes \cdots \otimes e_{l-1} \otimes e_{d+1} \otimes e_{l+1} \otimes \cdots \otimes e_d) &= t(h(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d)) \\ &= h(t(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d)) = \sum_{k_1,\ldots,k_d=1}^{n} t_{k_1,\ldots,k_d} h(e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_d}). \end{aligned}$$

Logo, o coeficiente associado a $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d}$ em $t(e_1 \otimes \cdots \otimes e_{l-1} \otimes e_{d+1} \otimes e_{l+1} \otimes \cdots \otimes e_d)$ é $t_{i_1,\ldots,i_d}$. Além disso, o coeficiente associado ao elemento $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d}$ em $t(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d)$ é $t_{i_1,\ldots,i_d}$. Por (5.4), concluímos, que o coeficente associado ao elemento $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d}$ na soma $t(g(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d))$ é 0. Logo, $t_{i_1,\ldots,i_d} = 0$.

Assim $t_{i_1,\ldots,i_d} \neq 0$ implica $i \sim (1,\ldots,d)$ e sai que $t(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d) = \sum_{\sigma \in S_d} t_\sigma \sigma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d)$ para alguns coeficientes $t_\sigma \in R$. A conclusão da prova é idêntica à do Teorema 5.1.6. □

*Observação.* Notemos que se $n \geq d$, então $\psi$ é injectiva. De facto,

$$\psi\left(\sum_{\sigma \in S_d} r_\sigma \sigma\right) = 0 \Rightarrow \sum_{\sigma \in S_d} r_\sigma \sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = 0 \Rightarrow \sum_{\sigma \in S_d} r_\sigma v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(d)} = 0.$$

Mas, como $\{v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(d)} | \sigma \in S_d\}$ é um conjunto linearmente independente, temos que ter $r_\sigma = 0$, $\forall \sigma \in S_d$.

Assim, para $n \geq d$, a dualidade de Schur-Weyl implica a identificação da álgebra centralizadora $End_{\mathbb{K}G}\left(V^{\otimes^d}\right)$ com $\mathbb{K}S_d$. Quando $n < d$, podemos não ter esta identificação. Suponhamos que $n = 2$ e $d = 3$. Seja $\sum_{\sigma \in S_3} r_\sigma \sigma \in \mathbb{K}S_3$ tal que $\psi\left(\sum_{\sigma \in S_3} r_\sigma \sigma\right) = 0$. Então $\sum_{\sigma \in S_3} r_\sigma \sigma(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes v_{i_3}) = 0$ para qualquer $i_1, i_2, i_3 \in \{1,2\}$.

Considerando os casos $i = (1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)$, respectivamente, obtemos

$$\begin{cases} \sum_{\sigma \in S_3} r_\sigma = 0 \\ r_e + r_{(12)} = r_{(13)} + r_{(123)} = r_{(23)} + r_{(321)} = 0 \\ r_e + r_{(13)} = r_{(12)} + r_{(321)} = r_{(23)} + r_{(123)} = 0 \\ r_e + r_{(23)} = r_{(12)} + r_{(123)} = r_{(13)} + r_{(321)} = 0 \end{cases}.$$

Logo, $r_{(12)} = r_{(13)} = r_{(23)} = -r_e$, e $r_{(321)} = r_{(123)} = r_e$.

Denotemos $a := e + (123) + (321) - (12) - (13) - (23)$. É fácil ver que $\psi(a) = 0$. Assim, $\ker \psi =< a >$. Portanto, a álgebra centralizadora $End_{\mathbb{K}G}\left((\mathbb{K}^2)^{\otimes^3}\right)$ é identificada com $\mathbb{K}S_3/ < a >$, pela dualidade de Schur-Weyl.

Apesar de sabermos que, em corpos, para caracterizar a dualidade é suficiente estudar o homomorfismo $\rho$, o Teorema 5.3.1 é útil quando estamos interessados em procurar condições para contra-exemplos para a ocorrência da dualidade, pois o teorema restringiu os casos em que $\psi$ não é sobrejectiva.

## 5.4 Dualidade de Schur-Weyl em corpos finitos

Uma possível abordagem na caracterização da sobrejectividade de $\rho$, em corpos finitos, será usar uma ideia análoga à técnica da prova do Teorema 5.2.2.

De facto, temos:

**Teorema 5.4.1.** *Seja $f\colon M \to N$ um homomorfismo entre $\mathbb{Z}$-módulos, onde $N$ é um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado. Então $f$ é sobrejectiva se e só se, para qualquer corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{K}} \otimes f} \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} N$ for sobrejectiva.*

*Demonstração.* A implicação $\Rightarrow$ é imediata, pela exactidão à direita do produto tensorial.

Suponhamos que $\mathrm{id}_{\mathbb{K}} \otimes f$ é sobrejectiva para qualquer corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado.

Denotemos por $Q := N/im(f)$ o co-núcleo de $f$. Portanto temos que a sequência $M \xrightarrow{f} N \to Q \to 0$ é exacta à direita.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado arbitrário. Como o functor, induzido pelo produto tensorial,

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{Z}-Mod &\to \mathbb{K}-Mod \\ M &\mapsto \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} M \\ \left(M \xrightarrow{f} N\right) &\mapsto \left(\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{K}} \otimes f} \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} N\right) \end{aligned}$$

preserva sequências exactas à direita temos que

$$\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{K}} \otimes f} \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} N \to \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} Q \to 0$$

é uma sequência exacta à direita. Por hipótese, $\mathrm{id}_{\mathbb{K}} \otimes f$ é sobrejectiva. Logo $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} Q = 0$. Assim, $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} Q = 0$ para qualquer corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$.

Por outro lado, como $N$ é um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado temos que $Q$ é também um módulo finitamente gerado. Portanto existem $\alpha$, $\alpha_{p,l} \in \mathbb{N}_0$ tais que

$$Q \cong \mathbb{Z}^{\alpha} \bigoplus \left( \bigoplus_{p \text{ primo}} \bigoplus_{l \geq 1} \left( \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z} \right)^{\alpha_{p,l}} \right), \quad \sum \alpha_{p,l} < \infty.$$

Usando a lei distributiva para o produto tensorial obtemos,

$$\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} Q \cong (\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z})^{\alpha} \bigoplus \left( \bigoplus_{p \text{ primo}} \bigoplus_{l \geq 1} \left( \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z} \right)^{\alpha_{p,l}} \right), \quad \sum \alpha_{p,l} < \infty.$$

Consideremos $\mathbb{K}$ com característica zero. Assim $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z} \cong 0$, $\forall l \geq 1$. De facto,

$$\lambda \otimes (a + p^l\mathbb{Z}) = \frac{p^l \lambda}{p^l} \otimes (a + p^l\mathbb{Z}) = \frac{\lambda}{p^l} \otimes p^l(a + p^l\mathbb{Z}) = 0,$$

para quaisquer $\lambda \in \mathbb{K}, a + p^l\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$.

Além disso, temos que $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{K}$. Logo, $0 \cong \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} Q = \mathbb{K}^{\alpha}$. Desta forma, $\alpha = 0$. Portanto,

$$\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} Q \cong \left( \bigoplus_{p \text{ primo}} \bigoplus_{l \geq 1} \left( \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z} \right)^{\alpha_{p,l}} \right), \quad \sum \alpha_{p,l} < \infty.$$

Suponhamos agora que a característica do corpo $\mathbb{K}$ é $q$. Então $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z} \cong \begin{cases} 0 \text{ se } q \neq p \\ \mathbb{K} \text{ se } q = p \end{cases}$. De facto, suponhamos que $q \neq p$, então $m.d.c(q,p) = 1$. Assim $m.d.c(q,p^l) = 1$, $\forall l \in \mathbb{N}$. Logo existem $a,b \in \mathbb{Z}$ tais que $qa + p^l b = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \lambda \otimes (z + p^l\mathbb{Z}) &= \lambda \otimes (qa + p^l b)(z + p^l\mathbb{Z}) = q\lambda \otimes (az + p^l\mathbb{Z}) + \lambda \otimes (p^l bz + p^l\mathbb{Z}) \\ &\underset{char\mathbb{K}=q}{=} 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall z + p^l\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} /p^l\mathbb{Z} = 0$.

Para verificar que $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q^l\mathbb{Z} \cong \mathbb{K}$, note-se que $f\colon \mathbb{K} \times \mathbb{Z}/q^l\mathbb{Z} \to \mathbb{K}$, definida por $f(\lambda, z + q^l\mathbb{Z}) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{K}, z + q^l\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/q^l\mathbb{Z}$, está bem definida e é uma aplicação bilinear.

Vejamos apenas que está bem definida. Para $z_1, z_2$ quaisquer tais que $z_1 - z_2 \in q^l\mathbb{Z}$ temos que $z_1 - z_2 = q^l a$, para algum $a \in \mathbb{Z}$. Logo, $\lambda z_1 - \lambda z_2 = q^l a \lambda \underset{char\mathbb{K}=q}{=} 0$.

Assim, temos que $\overline{f}\colon \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q^l\mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ definida por $\overline{f}(\lambda \otimes z + q^l\mathbb{Z}) = \lambda z, \quad \lambda \otimes (z + q^l\mathbb{Z}) \in \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q^l\mathbb{Z}$, é um $\mathbb{Z}$-homomorfismo. O homomorfismo inverso é dado por $g\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q^l\mathbb{Z}$, definida por $g(\lambda) = \lambda \otimes (1 + q^l\mathbb{Z})$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Então, $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} Q \cong \bigoplus_{l \geq 1} \mathbb{K}^{\alpha_{q,l}}$, para qualquer corpo alebricamente fechado com característica $q$. Como $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} Q = 0$, para qualquer corpo algebricamente fechado tem-se $\alpha_{q,l} = 0, \forall l \geq 1$, e todo o número primo $q$.

Assim $Q \cong 0$, isto é $f$ é sobrejectiva. □

No entanto, não podemos aplicar o resultado directamente a $\rho\colon \mathbb{K}GL_n(\mathbb{K}) \to S_{\mathbb{K}}(n,d)$ pois, para um corpo finito $\mathbb{K}$, não temos a identificação $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}GL_n(\mathbb{Z})$ com $\mathbb{K}GL_n(\mathbb{K})$. De facto, escolhendo $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, $n = 1$ temos que $GL_n(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$ e portanto $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}GL_1(\mathbb{Z})$ tem dimensão 2 sobre $\mathbb{F}_2$. Enquanto que $\mathbb{F}_2GL_1(\mathbb{F}_2)$ tem dimensão 1.

Assim iremos fazer a caracterização da dualidade de Schur-Weyl por álgebras de Lie, trocando os corpos subjacentes, tal como Benson e Doty fizeram em [2], passando pela forma integral da álgebra de Schur.

Consideremos o grupo de Lie $GL_n(\mathbb{C})$ e a sua respectiva álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Seja $U$ a álgebra envolvente universal da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Portanto, $U$ é a $\mathbb{C}$-álgebra associativa com geradores $e_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ que satisfazem

$$e_{i,j}e_{a,b} - e_{a,b}e_{i,j} = \delta_{a,j}e_{i,b} - \delta_{i,b}e_{a,j}, \quad i,j,a,b = 1,\dots,n.$$

Seja $V$ um espaço vectorial complexo de dimensão $n$ com base $\{v_1,\dots,v_n\}$. Seja $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie com espaço vectorial subjacente $End_{\mathbb{C}}(V)$ e parêntesis de Lie $[f,g] := f \circ g - g \circ f$, $f,g \in End_{\mathbb{C}}(V)$.

**Definição 5.4.2.** Uma *representação* da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ é um homomorfismo de álgebras de Lie $r\colon \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$. Em particular, satisfaz $r([x,y]) = [r(x), r(y)]$, $x,y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

O *produto tensorial* de duas representações de álgebras de Lie $r_i\colon \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V_i)$, $i = 1,2$, é a representação $r_1 \otimes r_2\colon \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$ dada por

$$(r_1 \otimes r_2)(g)(v_1 \otimes v_2) = r_1(g)(v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes r_2(g)(v_2).$$

Podemos definir uma representação da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, $r\colon \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$, por $r(e_{i,j})(v_k) = \delta_{j,k}v_i$, $1 \leq i,j,k \leq n$.

Assim, temos a representação $r \otimes \cdots \otimes r\colon \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V^{\otimes^d})$, definida por

$$r(e_{i,j})(v_{k_1} \otimes \cdots \otimes v_{k_d}) = \delta_{j,k_1}v_i \otimes \cdots \otimes v_{k_d} + \cdots + \delta_{j,k_d}v_{k_1} \otimes \cdots \otimes v_i, \quad 1 \leq i,j,k_1,\dots,k_d \leq n.$$

Do estudo da teoria das álgebras de Lie é conhecido que as categorias $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) - Mod$ e $U - Mod$ são equivalentes [13], portanto obtemos $V^{\otimes^d}$ como $U$-módulo com

$$e_{i,j}(v_{k_1} \otimes \cdots \otimes v_{k_d}) = \delta_{j,k_1}v_i \otimes \cdots \otimes v_{k_d} + \cdots + \delta_{j,k_d}v_{k_1} \otimes \cdots \otimes v_i, \quad 1 \leq i,j,k_1,\dots,k_d \leq n.$$

Sejam $U'_{\mathbb{Z}}$ o subanel de $U$ gerado pelos elementos $\dfrac{e_{i,j}^m}{m!}$, $1 \leq i \neq j \leq n$, $m \geq 0$, e $U_{\mathbb{Z}}$ o subanel de $U$ gerado por $U'_{\mathbb{Z}}$ e pelos elementos $\binom{e_{i,i}}{m} := \dfrac{e_{i,i}(e_{i,i} - 1_U)\cdots(e_{i,i} - (m-1)1_U)}{m!}$, $1 \leq i \leq n$, e $m \geq 0$.

Para termos uma melhor compreensão destes elementos, introduzamos a noção de peso de um tensor.

**Definição 5.4.3.** [2] O *peso* de um tensor simples $v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}$, que denotaremos por $\omega(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d})$, é o peso de $(j_1, \ldots, j_d)$ .

**Lema 5.4.4.** *Sejam $1 \leq i \neq j \leq n$ e $v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}$ um elemento qualquer da base de $V^{\otimes^d}$. Consideremos $\lambda = \omega(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d})$ e designemos por $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ a base canónica de $\mathbb{Z}^n$.*

*Então, para qualquer $m \geq 0$, tem-se*

$$\frac{e_{i,j}^m}{m!}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}) = \begin{cases} \textit{soma de } \binom{\lambda_j}{m} \textit{ tensores simples distintos} \\ \textit{da forma } v_{k_1} \otimes \cdots \otimes v_{k_d},\ k_l \in \{j_l, i\}, \\ 1 \leq l \leq d,\ \textit{com peso } \lambda + m\varepsilon_i - m\varepsilon_j, & \textit{se } \lambda_j \geq m \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases} . \tag{5.5}$$

$$\binom{e_{i,i}}{m}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}) = \binom{\delta_{i,j_1} + \cdots + \delta_{i,j_d}}{m}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}) = \binom{\lambda_i}{m}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}). \tag{5.6}$$

*Demonstração.* Provemos as fórmulas por indução sobre $m$. Comecemos por $m = 1$. Se $\lambda_j = 0$ então $\delta_{j,j_1} = \ldots = \delta_{j,j_d} = 0$, logo $e_{i,j}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}) = 0$. Se $\lambda_j \geq 1$ então existem $\lambda_j$ índices $a$ tais que $\delta_{j,a} = 1$, isto é, $e_{i,j}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d})$ é a soma de $\lambda_j$ tensores simples $v_{k_1} \otimes \cdots \otimes v_{k_d}$, $k_l \in \{j_l, i\}$, $1 \leq l \leq d$, em que cada um destes tensores simples tem peso $\lambda + \varepsilon_i - \varepsilon_j$.

$$\begin{aligned}\binom{e_{i,i}}{1}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}) &= e_{i,i}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}) = \delta_{i,j_1} v_i \otimes \cdots \otimes v_{j_d} + \cdots + \delta_{i,j_d} v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_i \\ &= (\delta_{i,j_1} + \cdots + \delta_{i,j_d})(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}).\end{aligned}$$

Suponhamos agora $m > 1$ e que o resultado se verifica para $m - 1$. Se $\lambda_j < m - 1$ então $\frac{e_{i,j}^m}{m!}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}) = \frac{e_{i,j}}{m}(0) = 0$, por hipótese de indução. Se $\lambda_j \geq m - 1$ então

$$\begin{aligned}\frac{e_{i,j}^m}{m!}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}) &= \frac{e_{i,j}}{m}\left(\sum_{\substack{k_l \in \{j_l,\ i\},\ 1 \leq l \leq d \\ \omega(v_{k_1} \otimes \cdots \otimes v_{k_d}) = \lambda + (m-1)\varepsilon_i - (m-1)\varepsilon_j}} v_{k_1} \otimes \cdots \otimes v_{k_d}\right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\substack{k_l \in \{j_l,\ i\},\ 1 \leq l \leq d \\ \omega(v_{k_1} \otimes \cdots \otimes v_{k_d}) = \lambda + (m-1)\varepsilon_i - (m-1)\varepsilon_j}} e_{i,j}(v_{k_1} \otimes \cdots \otimes v_{k_d}).\end{aligned}$$

Se $\lambda_j = m - 1$ então $\delta_{k_l,j} = 0$, para todo o $l = 1, \ldots, d$, logo $\frac{e_{i,j}^m}{m!}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}) = 0$. Suponhamos agora $\lambda_j \geq m$. Temos que $\frac{e_{i,j}^m}{m!}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d})$ é a soma de $\binom{\lambda_j}{m-1}$ elementos da forma $e_{i,j}(v_{k_1} \otimes \cdots \otimes v_{k_d})$. Cada um destes origina uma soma de $\lambda_j - (m-1)$ tensores simples com peso $\lambda + m\varepsilon_i - m\varepsilon_j$. Logo $\frac{e_{i,j}^m}{(m-1)!}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d})$ é a soma de $\binom{\lambda_j}{m-1}(\lambda_j - (m-1))$ tensores simples com peso $\lambda + m\varepsilon_i - m\varepsilon_j$. No entanto, é fácil observar que nesta soma cada tensor simples surge repetido $m$ vezes. Logo

$\dfrac{e_{i,j}^m}{m!}(v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_d})$ é a soma de $\binom{\lambda_j}{m}$ tensores simples distintos com peso $\lambda+m\varepsilon_i-m\varepsilon_j$.

Falta mostrar o caso indutivo para $\binom{e_{i,i}}{m}$.

$$\begin{aligned}
\binom{e_{i,i}}{m}(v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_d}) &= \frac{e_{i,i}(e_{i,i}-1_U)\cdots(e_{i,i}+(-m+1)1_U)}{m!}(v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_d})\\
&= \frac{e_{i,i}(e_{i,i}-1_U)\cdots(e_{i,i}+(-m+2)1_U)}{(m-1)!m}(e_{i,i}+(-m+1)1_U)(v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_d})\\
&= \frac{1}{m}\binom{e_{i,i}}{m-1}\left(\delta_{i,j_1}+\cdots+\delta_{i,j_d}-(m-1)\right)(v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_d})\\
&= \frac{\delta_{i,j_1}+\cdots+\delta_{i,j_d}-(m-1)}{m}\binom{e_{i,i}}{m-1}(v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_d})\\
&= \frac{\delta_{i,j_1}+\cdots+\delta_{i,j_d}-(m-1)}{m}\binom{\delta_{i,j_1}+\cdots+\delta_{i,j_d}}{m-1}(v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_d})\\
&= \binom{\delta_{i,j_1}+\cdots+\delta_{i,j_d}}{m}(v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_d}).
\end{aligned}$$ □

Vejamos agora que a acção de $U$ em $V^{\otimes^d}$ comuta com qualquer elemento $\sigma\in S_d$. Mais precisamente, para $1\leq i,j,k_1,\ldots,k_d\leq n$, tem-se

$$\begin{aligned}
e_{i,j}(\sigma(v_{k_1}\otimes\cdots\otimes v_{k_d})) &= e_{i,j}(v_{k_{\sigma^{-1}(1)}}\otimes\cdots\otimes v_{k_{\sigma^{-1}(d)}})\\
&= \delta_{j,k_{\sigma^{-1}(1)}}v_i\otimes\cdots\otimes v_{k_{\sigma^{-1}(d)}}+\cdots+\delta_{j,k_{\sigma^{-1}(d)}}v_{k_{\sigma^{-1}(1)}}\otimes\cdots\otimes v_i;\\
\sigma(e_{i,j}(v_{k_1}\otimes\cdots\otimes v_{k_d})) &= \sigma\left(\delta_{j,k_1}v_i\otimes\cdots\otimes v_{k_d}+\cdots+\delta_{j,k_d}v_{k_1}\otimes\cdots\otimes v_i\right)\\
&= \sigma\left(\delta_{j,k_{\sigma^{-1}(\sigma(1))}}v_i\otimes\cdots\otimes v_{k_d}+\cdots+\delta_{j,k_{\sigma^{-1}(\sigma(d))}}v_{k_1}\otimes\cdots\otimes v_i\right)\\
&= \delta_{j,k_{\sigma^{-1}(1)}}v_i\otimes\cdots\otimes v_{k_{\sigma^{-1}(d)}}+\cdots+\delta_{j,k_{\sigma^{-1}(d)}}v_{k_{\sigma^{-1}(1)}}\otimes\cdots\otimes v_i.
\end{aligned}$$

Em particular, $\sigma\left(\dfrac{e_{i,j}^m}{m!}(v)\right)=\dfrac{e_{i,j}^m}{m!}(\sigma(v)),\ \sigma\left(\binom{e_{i,i}}{m}(v)\right)=\binom{e_{i,i}}{m}(\sigma(v)), \forall m\geq 0,\ \forall v\in V^{\otimes^d}.$ (5.7)

Estamos agora preparados para estabelecer o contexto a estudar.

Seja $V_{\mathbb{Z}}$ o $\mathbb{Z}$-módulo livre com base $\{v_1,\ldots,v_n\}$. Pelo Lema 5.4.4, $(V_{\mathbb{Z}})^{\otimes^d}$ é um $U_{\mathbb{Z}}$-módulo. Assim, para qualquer anel comutativo $R$ com identidade temos o $R\otimes_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Z}}$-módulo $R\otimes_{\mathbb{Z}}V_{\mathbb{Z}}^{\otimes^d}$. Escreve-se $U_R=R\otimes_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Z}}$, $U'_R=R\otimes_{\mathbb{Z}}U'_{\mathbb{Z}}$ e $V_R=R\otimes_{\mathbb{Z}}V_{\mathbb{Z}}$. Então, dado que

$$(R^n)^{\otimes^d}\cong\left(\bigoplus_{i=1}^n Rv_i\right)^{\otimes^d}\cong(R\otimes_{\mathbb{Z}}V_{\mathbb{Z}})^{\otimes^d}\cong V_R^{\otimes^d}\cong R\otimes_{\mathbb{Z}}V_{\mathbb{Z}}^{\otimes^d},\ \text{como } R\text{-módulos},$$

temos $R\otimes_{\mathbb{Z}}S_{\mathbb{Z}}(n,d)\cong End_{R\otimes\mathbb{Z}S_d}\left(V_R^{\otimes^d}\right)\cong End_{RS_d}\left((R^n)^{\otimes^d}\right)=S_R(n,d)$.

Diz-se nestas condições que a álgebra de Schur é definida sobre $\mathbb{Z}$.

Denotemos por $\alpha\colon R\otimes_{\mathbb{Z}}V_{\mathbb{Z}}^{\otimes^d}\to V_R^{\otimes^d}$ o $R$-isomorfismo natural

$$\alpha(1\otimes v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_d})=(1\otimes v_{i_1})\otimes\cdots\otimes(1\otimes v_{i_d}).$$

Consideremos a representação $\chi$ de $U_R$ em $V_R^{\otimes^d}$. Por (5.7), temos que $\chi$ comuta com qualquer elemento $\sigma \in S_d$.

Assim obtemos os homomorfismos $\chi_R \colon U_R \to End_{RS_d}\left(V_R^{\otimes^d}\right)$ e $\chi'_R \colon U'_R \to End_{RS_d}\left(V_R^{\otimes^d}\right)$, com $\chi'_R := (\chi_R)_{|_{U'_R}}$.

Podemos começar a ver semelhanças entre as representações $\rho$ e $\chi_R$. Na verdade, o nosso objectivo será comparar $\rho$ e $\chi_R$. Para isso, será necessário ver como obter $GL_n(R)$ neste contexto. Neste aspecto o próximo lema é fundamental.

**Lema 5.4.5.** *[2, Lema 4.1] Para qualquer $m > d$, temos $\chi_R\left(1 \otimes \dfrac{e_{i,j}^m}{m!}\right) = \chi_R(1 \otimes \binom{e_{i,i}}{m}) = 0$, $1 \leq i \neq j \leq n$.*

*Demonstração.* Seja $1 \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d} \in V_R^{\otimes^d}$ qualquer. Se $(\omega(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}))_j \geq m$ ter-se-ia $d \geq (\omega(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}))_j \geq m > d$, logo $(\omega(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}))_j < m$.

Pelo Lema 5.4.4, $\chi_R(1 \otimes \dfrac{e_{i,j}^m}{m!})(1 \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}) = 1 \otimes \dfrac{e_{i,j}^m}{m!}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}) = 0$. Além disso, $\chi_R(1 \otimes \binom{e_{i,i}}{m})(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}) = 1 \otimes \binom{e_{i,i}}{m}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}) = 1 \otimes \binom{\delta_{i,j_1} + \cdots + \delta_{i,j_d}}{m}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}) = 0$. $\square$

Seja $R = \mathbb{K}$ um corpo qualquer. Considere-se agora $d = 1$. Para todo $t \in \mathbb{K}$, $1 \leq i, j \leq n$, definimos os elementos $E_{i,j}(t) \in End_{\mathbb{K}}(V_{\mathbb{K}})$, $E_{i,j}(t) = \mathrm{id}_{V_{\mathbb{K}}} + t\chi_{\mathbb{K}}(1 \otimes e_{i,j})$.

Temos que para $i \neq j$,

$$\begin{aligned} E_{i,j}(s)E_{i,j}(t) &= (\mathrm{id}_{V_{\mathbb{K}}} + s\chi_{\mathbb{K}}(1 \otimes e_{i,j}))(\mathrm{id}_{V_{\mathbb{K}}} + t\chi_{\mathbb{K}}(1 \otimes e_{i,j})) \\ &= \mathrm{id}_{V_{\mathbb{K}}} + s\chi_{\mathbb{K}}(1 \otimes e_{i,j}) + t\chi_{\mathbb{K}}(1 \otimes e_{i,j}) + st\chi_{\mathbb{K}}(1 \otimes e_{i,j}^2) \overset{5.4.5}{=} \mathrm{id}_{V_{\mathbb{K}}} + (s+t)\chi_{\mathbb{K}}(1 \otimes e_{i,j}) \\ &= E_{i,j}(s+t), \quad s, t \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Portanto, $E_{i,j}(t)$ é invertível para $1 \leq i \neq j \leq n$, $t \in \mathbb{K}$, com inverso $E_{i,j}(-t)$. Escolhamos $1 \leq i \leq n$ e $t \in \mathbb{K}$. Vejamos que,

$$\begin{aligned} E_{i,i}(t)(1 \otimes v_k) &= (\mathrm{id}_{V_{\mathbb{K}}} + t\chi_{\mathbb{K}}(1 \otimes e_{i,i}))(1 \otimes v_k) = 1 \otimes v_k + t \otimes e_{i,i}(v_k) = 1 \otimes v_k + \delta_{i,k} t \otimes v_i \\ &= \begin{cases} 1 \otimes v_k, & \text{se } k \neq i \\ (1+t) \otimes v_i, & \text{se } k = i \end{cases}. \end{aligned}$$

Logo temos que exigir $t \neq -1$ para $E_{i,i}(t)$ ser invertível.

Como $\mathbb{K}$ é um corpo, $SL(V_{\mathbb{K}})$ é gerado pelos elementos $E_{i,j}(t)$, $1 \leq i \neq j \leq n, t \in \mathbb{K}$, e $GL(V_{\mathbb{K}})$ é gerado por $SL(V_{\mathbb{K}})$ e pelos elementos $E_{i,i}(t)$, $1 \leq i \leq n, -1 \neq t \in \mathbb{K}$.

Tal como já foi visto anteriormente $GL(V_{\mathbb{K}})$ actua de forma natural em $V_{\mathbb{K}}^{\otimes^d}$. Portanto, temos o homomorfismo de álgebras $\rho_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{K}GL(V_{\mathbb{K}}) \to End_{\mathbb{K}S_d}\left(V_{\mathbb{K}}^{\otimes^d}\right)$ definido da forma usual. Assim, $\rho_{\mathbb{K}}$ é sobrejectivo se e só se $\rho \colon \mathbb{K}GL_n(\mathbb{K}) \to S_{\mathbb{K}}(n,d)$ o for.

Por restrição de $\rho_{\mathbb{K}}$ a $SL(\mathbb{V}_{\mathbb{K}})$ obtemos o homomorfismo de álgebras $\rho'_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{K}SL(V_{\mathbb{K}}) \to End_{\mathbb{K}S_d}\left(V_{\mathbb{K}}^{\otimes^d}\right)$.

Os dois próximos lemas são fundamentais para os nossos propósitos e ainda justificam o motivo de termos recorrido a álgebras de Lie para estudar a sobrejectividade de $\rho_{\mathbb{K}}$. Como observado em [2]:

**Lema 5.4.6.** *Para $1 \leq i \neq j \leq n$, $t \in \mathbb{K}$ temos*

$$\rho'_{\mathbb{K}}(E_{i,j}(t)) = \rho_{\mathbb{K}}(E_{i,j}(t)) = \sum_{m=0}^{d} t^m \chi_{\mathbb{K}} \left(1 \otimes \frac{e_{i,j}^m}{m!}\right) \quad e \quad \rho_{\mathbb{K}}(E_{i,i}(t)) = \sum_{m=0}^{d} t^m \chi_{\mathbb{K}} \left(1 \otimes \binom{e_{i,i}}{m}\right).$$

*Para a segunda igualdade exigimos $t \neq -1$.*

*Demonstração.* Provemos a primeira igualdade por indução sobre $d$.

A igualdade verifica-se trivialmente para $d = 1$.

Suponhamos que $d > 1$, e que o resultado é verdadeiro para $d-1$. Seja $1 \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_d} \in V_{\mathbb{K}}^{\otimes d}$ um elemento da base qualquer. Então,

$$\rho_{\mathbb{K}}(E_{i,j}(t))(1 \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_d}) = \underbrace{(\mathrm{id}_{V_{\mathbb{K}}} + t\chi_{\mathbb{K}}(1 \otimes e_{i,j})) \otimes \cdots \otimes (\mathrm{id}_{V_{\mathbb{K}}} + t\chi_{\mathbb{K}}(1 \otimes e_{i,j}))}_{d \text{ vezes}}(1 \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_d}).$$

Notemos que, pelo Lema 5.4.4, se $\frac{e_{i,j}^m}{m!}(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_d}) \neq 0$ então $\frac{e_{i,j}^m}{m!}(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_d})$ é a soma de tensores simples para os quais $m$ dos $d$ vectores $v_j$ que constituem o tensor $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_d}$ foram substituídos por $v_i$. Desta forma,

$$\frac{e_{i,j}^m}{m!}(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_d}) = \frac{e_{i,j}^{m-1}}{(m-1)!}(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_{d-1}}) \otimes e_{i,j}(v_{i_d}) + \frac{e_{i,j}^m}{m!}(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_{d-1}}) \otimes v_{i_d}. \tag{5.8}$$

Assim, usando a hipótese de indução,

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id}_{V_{\mathbb{K}}} + t\chi_{\mathbb{K}}(1 \otimes e_{i,j})) \otimes \cdots \otimes (\mathrm{id}_{V_{\mathbb{K}}} + t\chi_{\mathbb{K}}(1 \otimes e_{i,j}))(1 \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_d}) \\
&= \sum_{m=0}^{d-1} t^m \chi_{\mathbb{K}} \left(1 \otimes \frac{e_{i,j}^m}{m!}\right)(1 \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_{d-1}}) \otimes (\mathrm{id}_{V_{\mathbb{K}}} + t\chi_{\mathbb{K}}(1 \otimes e_{i,j}))(1 \otimes v_{i_d}) \\
&= \sum_{m=0}^{d-1} t^m \chi_{\mathbb{K}} \left(1 \otimes \frac{e_{i,j}^m}{m!}\right)(1 \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_{d-1}}) \otimes (1 \otimes v_{i_d} + t \otimes e_{i,j}(v_{i_d})) \\
&= \sum_{m=0}^{d-1} \alpha \left(t^m \otimes \frac{e_{i,j}^m}{m!}(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_{d-1}}) \otimes v_{i_d}\right) + \sum_{m=1}^{d} \alpha \left(t^m \otimes \frac{e_{i,j}^{m-1}}{(m-1)!}(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_{d-1}}) \otimes e_{i,j}(v_{i_d})\right)
\end{aligned}$$

Por (5.8) obtemos,

$$= \sum_{m=0}^{d} \alpha \left(t^m \otimes \frac{e_{i,j}^m}{m!}(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_d})\right) = \sum_{m=0}^{d} t^m \chi_{\mathbb{K}} \left(1 \otimes \frac{e_{i,j}^m}{m!}\right)(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_d}).$$

Logo obtemos o primeiro resultado. Seja $1 \otimes v_{i_1} \otimes \cdots v_{i_d} \in V_{\mathbb{K}}^{\otimes d}$ qualquer. Então,

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathbb{K}}(E_{i,i}(t))(1 \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_d}) &= (1 + t\chi_{\mathbb{K}}(1 \otimes e_{i,i}))(1 \otimes v_{i_1}) \otimes \cdots \otimes (1 + t\chi_{\mathbb{K}}(1 \otimes e_{i,i}))(1 \otimes v_{i_d}) \\
&= (1 \otimes v_{i_1} + t\delta_{i,i_1} \otimes v_{i_1}) \otimes \cdots \otimes (1 \otimes v_{i_d} + t\delta_{i,i_d} \otimes v_{i_d}) \\
&= (1 + t\delta_{i,i_1})(1 \otimes v_{i_1}) \otimes \cdots \otimes (1 + \delta_{i,i_d} t)(1 \otimes v_{i_d}) \\
&= (1 + \delta_{i,i_1} t) \cdots (1 + \delta_{i,i_d} t)(1 \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_d})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1+t)^{\delta_{i,i_1}+\cdots+\delta_{i,i_d}}(1\otimes v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_d}) \\
&= \sum_{m=0}^{d}\binom{\delta_{i,i_1}+\cdots+\delta_{i,i_d}}{m}t^m(1\otimes v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_d}).
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 5.4.4, concluímos o pretendido. □

**Lema 5.4.7.** *[2, Lema 4.2] Seja $\mathbb{K}$ um corpo.*

*(i) Se a ordem do corpo for estritamente superior a $d$, então $\rho'_{\mathbb{K}}$ é sobrejectiva se e só se $\chi'_{\mathbb{K}}$ for sobrejectiva.*

*(ii) Se a ordem do corpo for estritamente superior a $d+1$, então $\rho_{\mathbb{K}}$ é sobrejectiva se e só se $\chi_{\mathbb{K}}$ for sobrejectiva .*

*Demonstração.* Pelo lema anterior, $im\rho'_{\mathbb{K}} \subset im\chi'_{\mathbb{K}}$ e $im\rho_{\mathbb{K}} \subset im\chi_{\mathbb{K}}$ para qualquer corpo $\mathbb{K}$. Suponhamos que $\mathbb{K}$ tem ordem estritamente superior a $d$. Fixemos $d+1$ elementos distintos, $t_0,\dots,t_d \in \mathbb{K}$. Como $\chi_{\mathbb{K}},\chi'_{\mathbb{K}}$ coincidem nos geradores da forma $E_{i,j}(t)$, $1\le i\ne j\le n$, $t\in\mathbb{K}$, usando o lema anterior, obtemos as equações

$$
\rho'_{\mathbb{K}}(E_{i,j}(t_k)) = \sum_{m=0}^{d} t_k^m \chi'_{\mathbb{K}}\left(1\otimes\frac{e_{i,j}^m}{m!}\right),\quad k=0,\dots,d.
$$

Assim, na forma matricial, obtemos

$$
\begin{bmatrix} 1 & t_0 & \cdots & t_0^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_d & \cdots & t_d^d \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mathrm{id}_{V_{\mathbb{K}}^{\otimes d}} \\ \chi'_{\mathbb{K}}(1\otimes e_{i,j}) \\ \vdots \\ \chi'_{\mathbb{K}}\left(1\otimes\frac{e_{i,j}^d}{d!}\right) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \rho'_{\mathbb{K}}(E_{i,j}(t_0)) \\ \vdots \\ \rho'_{\mathbb{K}}(E_{i,j}(t_d)) \end{bmatrix}.
$$

Temos que a matriz $[t_i^j]$ é uma matriz de Vandermonde portanto tem determinante $\prod_{0\le i<j\le d}(t_j-t_i)\neq 0$. Assim, admite inversa, por outras palavras, existem escalares $a_{m,l}\in\mathbb{K}$ tais que

$$
\chi'_{\mathbb{K}}\left(1\otimes\frac{e_{i,j}^m}{m!}\right) = \sum_{l=0}^{d} a_{m,l}\rho'_{\mathbb{K}}(E_{i,j}(t_l)),\quad m=0,\dots,d.
$$

Como $\left(1\otimes\frac{e_{i,j}^m}{m!}\right)_{m\ge 0}$ são geradores de $U'_{\mathbb{K}}$ e $\chi'_{\mathbb{K}}\left(1\otimes\frac{e_{i,j}^m}{m!}\right)=0$, para $m>d$ temos que $im\chi'_{\mathbb{K}}\subset im\rho'_{\mathbb{K}}$. Portanto mostrámos $(i)$.

Suponhamos agora que $\mathbb{K}$ tem ordem estritamente superior a $d+1$. Pela alínea $(i)$ temos $\chi_{\mathbb{K}}\left(1\otimes\frac{e_{i,j}^m}{m!}\right)\in im\rho_{\mathbb{K}}, m\ge 0, 1\le i\ne j\le n$.

Fixemos $d+1$ elementos distintos, $t_0,\dots,t_d\in\mathbb{K}\backslash\{-1\}$. Obtemos pelo lema anterior que para $i=1,\dots,n$,

$$
\rho_{\mathbb{K}}(E_{i,i}(t_k)) = \sum_{m=0}^{d} t_k^m\chi_{\mathbb{K}}\left(1\otimes\binom{e_{i,i}}{m}\right),\quad k=0,\dots,d.
$$

Escrevendo este sistema de equações na forma matricial obtemos uma vez mais no membro esquerdo uma matriz de Vandermonde, $(d+1)\times(d+1)$, logo $\chi_{\mathbb{K}}\left(1\otimes\binom{e_{i,i}}{m}\right)\in im\rho_{\mathbb{K}}$, para qualquer $1\leq i\leq n$, $m\geq 0$. Portanto, $im\chi_{\mathbb{K}}\subset im\rho_{\mathbb{K}}$. □

Finalmente, temos todas as condições para caracterizar a dualidade de Schur-Weyl em corpos finitos.

**Teorema 5.4.8.** *[2, Teorema 4.3] Seja $\mathbb{K}$ um corpo com ordem estritamente superior a $d$. Então o homomorfismo $\rho_{\mathbb{K}}\colon \mathbb{K}GL(V_{\mathbb{K}})\to End_{\mathbb{K}S_d}\left(V_{\mathbb{K}}^{\otimes d}\right)$ é sobrejectivo, isto é, a dualidade de Schur-Weyl verifica-se .*

*Demonstração.* Seja $\mathbb{L}$ um corpo algebricamente fechado qualquer.

Comecemos por observar que $GL_n(\mathbb{L})$ é gerado por $SL_n(\mathbb{L})$ e pelas matrizes diagonais da forma $cI_n$, $c\in\mathbb{L}$. De facto, dada uma matriz invertível $A\in GL_n(\mathbb{L})$, $\det(A)\neq 0$, logo existe $c\in\mathbb{L}\backslash\{0\}$ tal que $c^n=\det(A)$. Como $S:=\frac{1}{c}A$ tem determinante 1, temos que $S\in SL_n(\mathbb{L})$. Logo $A=cI_nS$. Da mesma forma, $GL(V_{\mathbb{L}})$ é gerado por $SL(V_{\mathbb{L}})$ e os operadores escalares $c\cdot \mathrm{id}_{V_{\mathbb{L}}}$, $c\in\mathbb{L}$. Logo $\rho_{\mathbb{L}}(\mathbb{L}GL(V_{\mathbb{L}}))$ é gerado por $\{c\rho'(S)\colon c\in\mathbb{L}, S\in SL(V_{\mathbb{L}})\}$, isto é, $\rho_{\mathbb{L}}(\mathbb{L}GL(V_{\mathbb{L}}))=\rho'_{\mathbb{L}}(\mathbb{L}SL(V_{\mathbb{L}}))$.

Como a dualidade de Schur-Weyl se verifica para qualquer corpo infinito obtemos que $\rho_{\mathbb{L}}\colon \mathbb{L}GL(V_{\mathbb{L}})\to End_{\mathbb{L}S_d}\left(V_{\mathbb{L}}^{\otimes d}\right)$ é um homomorfismo sobrejectivo.

Assim, $\rho'_{\mathbb{L}}\colon \mathbb{L}SL(V_{\mathbb{L}})\to End_{\mathbb{L}S_d}\left(V_{\mathbb{L}}^{\otimes d}\right)$ é um homomorfismo sobrejectivo. Pelo Lema 5.4.7, $\chi'_{\mathbb{L}}$ é sobrejectivo. Mas $\chi'_{\mathbb{L}}=\mathrm{id}_{\mathbb{L}}\otimes\chi'_{\mathbb{Z}}$, onde $\chi'_{\mathbb{Z}}\colon U'_{\mathbb{Z}}\to End_{\mathbb{Z}S_d}\left(V_{\mathbb{Z}}^{\otimes d}\right)$ e $S_{\mathbb{L}}(n,d)\cong\mathbb{L}\otimes S_{\mathbb{Z}}(n,d)$.

Notemos ainda que $End_{\mathbb{Z}S_d}\left(V_{\mathbb{Z}}^{\otimes d}\right)\cong S_{\mathbb{Z}}(n,d)$ tem rank finito como $\mathbb{Z}$-módulo.

Assim, pelo Teorema 5.4.1, como $\mathbb{L}$ é um corpo algebricamente fechado arbitrário, o homomorfismo $\chi'_{\mathbb{Z}}\colon U'_{\mathbb{Z}}\to End_{\mathbb{Z}S_d}\left(V_{\mathbb{Z}}^{\otimes d}\right)$ é sobrejectivo.

Como o produto tensorial preserva sequências exactas à direita, sai que $\chi'_R=\mathrm{id}_R\otimes\chi'_{\mathbb{Z}}$ é sobrejectivo para qualquer anel comutativo com identidade. Dado que $\chi'_R$ é a restrição de $\chi_R$ então $\chi_R\colon U_R\to End_{RS_d}\left(V_R^{\otimes d}\right)$ é um homomorfismo sobrejectivo para qualquer anel comutativo com identidade. Em particular, $\chi'_{\mathbb{K}}$ é sobrejectivo para qualquer corpo $\mathbb{K}$ com ordem estritamente superior a $d$.

Pela alínea $(i)$ do Lema 5.4.7, $\rho'_{\mathbb{K}}$ é um homomorfismo sobrejectivo para qualquer corpo $\mathbb{K}$ com ordem estritamente superior a $d$. Por $\rho'_{\mathbb{K}}$ ser restrição de $\rho_{\mathbb{K}}$, obtemos que $\rho_{\mathbb{K}}$ é um homomorfismo sobrejectivo para qualquer corpo com ordem estritamente superior a $d$. Pelo Corolário 5.2.3, conclui-se o pretendido. □

O teorema anterior diz-nos que a dualidade de Schur-Weyl se verifica para corpos finitos com mais de $d$ elementos. Assim, a conexão entre as categorias $S_{\mathbb{K}}(n,d)$-*Mod* e a categoria das representações polinomiais homogéneas de grau $d$ de $GL_n(\mathbb{K})$ mantém-se verdadeira se exigirmos que o corpo subjacente tenha mais que $d$ elementos. Como vimos no Exemplo 5.2.1, a dualidade de Schur-Weyl pode falhar no caso $|\mathbb{K}|=d$, logo não é possível obter uma condição melhor que $|\mathbb{K}|>d$, envolvendo apenas a ordem do corpo, para a dualidade de Schur-Weyl se verificar.

Generalizemos agora o Teorema 5.1 de [2] e vejamos que em corpos finitos, quando $d$ é suficientemente grande, a dualidade acaba sempre por falhar.

**Teorema 5.4.9.** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo finito e fixemos $n \in \mathbb{N}$. Para $d$ suficientemente grande a dualidade de Schur-Weyl falha.*

*Explicitamente, a dualidade falha para os $d$ que satisfaçam $\binom{n^2+d-1}{d} > \prod_{i=1}^{n} \left(|\mathbb{K}|^n - |\mathbb{K}|^{i-1}\right)$.*

*Demonstração.* Se $\rho$ for sobrejectivo então $\dim_{\mathbb{K}}(\rho(\mathbb{K}G)) \geq \dim_{\mathbb{K}}(S_{\mathbb{K}}(n,d)) = \binom{n^2+d-1}{d}$. Portanto, se tivermos $\binom{n^2+d-1}{d} > \dim_{\mathbb{K}} \rho(\mathbb{K}G)$, o homomorfismo $\rho$ não é sobrejectivo. Além disso, $\dim_{\mathbb{K}} \rho(\mathbb{K}G) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}G = |G|$. Determinemos, assim, a ordem do grupo linear geral sobre um corpo finito.

Temos que uma matriz $A \in GL_n(\mathbb{K})$ se e só se as suas colunas forem vectores linearmente independentes em $\mathbb{K}^n$.

Notemos ainda que um espaço vectorial de dimensão $n$ sobre um corpo finito $\mathbb{K}$ tem $|\mathbb{K}|^n$ elementos. Assim, $\mathbb{K}^n$ tem $|\mathbb{K}|^n$ elementos. Como qualquer vector não nulo é linearmente independente temos $|\mathbb{K}|^n - 1$ escolhas possíveis para a 1ª coluna. Queremos que a 2ª coluna não pertença ao espaço vectorial gerado pela coluna 1, que tem $|\mathbb{K}|$ elementos. Logo, temos $|\mathbb{K}|^n - |\mathbb{K}|$ possibilidade para a 2ª coluna. Assim, acontece para a escolha de todas as colunas. Isto é, a coluna $i$ não pode pertencer ao subespaço vectorial gerado pelas colunas $1, \ldots, i-1$, com $|\mathbb{K}|^{i-1}$ elementos. Logo existem $|\mathbb{K}|^n - |\mathbb{K}|^{i-1}$ maneiras de escolher a coluna $i$. Concluímos que $|GL_n(\mathbb{K})| = \prod_{i=1}^{n} \left(|\mathbb{K}|^n - |\mathbb{K}|^{i-1}\right)$.

Como $\binom{n^2+d-1}{d}$ é crescente em $d$ e $\prod_{i=1}^{n} \left(|\mathbb{K}|^n - |\mathbb{K}|^{i-1}\right)$ não depende de $d$, então para $d$ suficientemente grande a dualidade de Schur-Weyl falha. □

Portanto, sabemos que para um corpo $\mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$ a dualidade verifica-se para $d = 1, \ldots, |\mathbb{K}| - 1$, e falha para $d \geq d_0$, em que $d_0$ é o menor valor que satisfaz a condição $\binom{n^2+d_0-1}{n^2-1} > \prod_{i=1}^{n} \left(|\mathbb{K}|^n - |\mathbb{K}|^{i-1}\right)$. Assim resta saber o que acontece para valores de $d = |\mathbb{K}|, \ldots, d_0 - 1$, isto é, para cada escolha de $\mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$, existe no máximo um número finito de casos para os quais não se conhece se a dualidade de Schur-Weyl se verifica. Por exemplo, fixando $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ e $n = 2$ obtemos que a dualidade se verifica para $d = 1$ e falha para $d \geq 2$.

Vejamos ainda uma aplicação do Teorema 5.4.8.

**Corolário 5.4.10.** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo com característica zero ou superior a $d$. Então qualquer representação polinomial homogénea de grau $d$ é uma soma directa de representações simples.*

*Demonstração.* Um corpo com característica zero é sempre infinito, logo a dualidade de Schur-Weyl é satisfeita. Um corpo com característica superior a $d$ tem cardinalidade superior a $d$, pois $0, 1, \ldots, d1_{\mathbb{K}}$ são elementos distintos. Logo a dualidade de Schur-Weyl verifica-se para corpos com característica superior a $d$. Aplicando o Teorema 4.2.14, o resultado segue-se. □

Podemos ver que a hipótese do corpo ter característica zero ou superior a $d$ é essencial.

**Exemplo 5.4.11.** Seja $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}_2}$.

A representação polinomial homogénea de grau 2, $r \colon GL_2\left(\overline{\mathbb{F}_2}\right) \to GL\left(\overline{\mathbb{F}_2}^3\right)$, definida por

$$r\left(\begin{bmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} g_{1,1}^2 & 2g_{1,1}g_{1,2} & g_{1,2}^2 \\ g_{1,1}g_{2,1} & g_{1,1}g_{2,2} + g_{1,2}g_{2,1} & g_{1,2}g_{2,2} \\ g_{2,1}^2 & 2g_{2,1}g_{2,2} & g_{2,2}^2 \end{bmatrix}$$

não é simples, nem é uma soma directa de representações simples.

Como a dualidade de Schur-Weyl se verifica para $\overline{\mathbb{F}_2}$, temos que a álgebra de Schur $S_{\overline{\mathbb{F}_2}}(2,2)$ não é semi-simples.

## 5.5 Dualidade de Schur-Weyl em anéis comutativos

É relevante, neste momento, para os nossos propósitos observar que na prova do Teorema 5.4.8 obteve-se que $\chi_R\colon U_R \to S_R(n,d)$ é um homomorfismo sobrejectivo para qualquer anel comutativo com identidade e quaisquer $n,d \in \mathbb{N}$. Na verdade, temos uma dualidade de Schur-Weyl entre $U_R$ e $S_d$.

**Corolário 5.5.1.** *[2, Corolário 4.5] Seja R um anel comutativo com identidade. O homomorfismo $\psi_R\colon RS_d \to End_{U_R}\left(V_R^{\otimes^d}\right)$ é sobrejectivo para quaisquer $n,d \in \mathbb{N}$.*

*Demonstração.* Pela observação anterior temos

$$End_{U_R}\left(V_R^{\otimes^d}\right) = End_{\chi_R(U_R)}\left(V_R^{\otimes^d}\right) \cong End_{S_R(n,d)}\left(V_R^{\otimes^d}\right).$$

Pelo Teorema 5.2.2, $\psi_{\mathbb{K}}\colon \mathbb{K}S_d \to End_{S_{\mathbb{K}}(n,d)}\left(V_{\mathbb{K}}^{\otimes^d}\right)$ é sobrejectivo para qualquer corpo. Logo, $\psi_{\mathbb{K}}\colon \mathbb{K}S_d \to End_{U_{\mathbb{K}}}\left(V_{\mathbb{K}}^{\otimes^d}\right)$ é sobrejectivo para qualquer corpo.

Por outro lado, $\mathbb{Z}$ é um PID e $End_{\mathbb{Z}}\left(V_{\mathbb{Z}}^{\otimes^d}\right)$ é finitamente gerado. Então $End_{\mathbb{Z}}\left(V_{\mathbb{Z}}^{\otimes^d}\right)$ é noetheriano. Logo, $End_{U_{\mathbb{Z}}}\left(V_{\mathbb{Z}}^{\otimes^d}\right)$ é $\mathbb{Z}$-finitamente gerado.

Pelo Teorema 5.4.1, sai que $\psi_{\mathbb{Z}}\colon \mathbb{Z}S_d \to End_{U_{\mathbb{Z}}}\left(V_{\mathbb{Z}}^{\otimes^d}\right)$ é sobrejectivo. Como o produto tensorial preserva a sobrejectividade, obtemos o resultado pretendido. □

Esta nova dualidade permite-nos interpretar a álgebra de Schur por outra perspectiva. De facto, notemos que $U_{\mathbb{C}} \cong U$ e pela dualidade de Schur-Weyl entre $U_{\mathbb{Z}}$ e $S_d$, $\chi_{\mathbb{Z}}(U_{\mathbb{Z}}) = S_{\mathbb{Z}}(n,d)$. Logo $\chi_{\mathbb{C}}(U_{\mathbb{Z}}) = S_{\mathbb{Z}}(n,d)$. Assim, a forma integral da álgebra de Schur pode ser vista como a imagem de $U_{\mathbb{Z}}$ na representação $\chi_{\mathbb{C}}\colon U \to S_{\mathbb{C}}(n,d)$. Usando o produto tensorial $R \otimes_{\mathbb{Z}} S_{\mathbb{Z}}(n,d)$ obtemos a álgebra de Schur sobre qualquer anel comutativo.

Voltemos à noção de dualidade de Schur-Weyl usual. Usando o corolário anterior podemos ver que o Teorema 5.2.2 se verifica para qualquer anel comutativo com identidade.

**Corolário 5.5.2.** *Seja R um anel comutativo com identidade. Então o homomorfismo de álgebras $\psi\colon RS_d \to End_{S_R(n,d)}\left(V^{\otimes^d}\right)$ é sobrejectivo para quaisquer $n,d \in \mathbb{N}$.*

*Demonstração.* Basta aplicar o corolário anterior juntamente com o facto

$$End_{U_R}\left(V_R^{\otimes^d}\right) = End_{\chi_R(U_R)}\left(V_R^{\otimes^d}\right) \cong End_{S_R(n,d)}\left(V_R^{\otimes^d}\right).$$ □

Como fizemos no caso para corpos, também é verdade para anéis comutativos que é suficiente estudar o homomorfismo $\rho$ para estudar a dualidade de Schur-Weyl.

**Corolário 5.5.3.** *Seja R um anel comutativo com identidade. Então a dualidade de Schur-Weyl verifica-se se e só se o homomorfismo $\rho\colon RGL_n(R) \to S_R(n,d)$ for sobrejectivo.*

*Demonstração.* Usando o corolário anterior, a prova é análoga à do Corolário 5.2.3. □

Na secção 5.4 para podermos classificar a dualidade de Schur-Weyl usámos os geradores do grupo linear geral. Para anéis comutativos o cenário é diferente. Uma matriz $A \in GL_n(R)$ se $\det(A)$ for uma unidade. Assim, os elementos $E_{i,j}(t)$, $1 \leq i, j \leq n$, $t \in R$, são ainda invertíveis para qualquer anel comutativo. De facto, considerando a base $(1 \otimes v_k)$, a matriz associada a cada $E_{i,j}(t)$, com entradas $k,l$ iguais a 1, se $k = l$, $t$, se $l = j$ e $k = i$, e 0 em caso contrário, tem determinante 1.

Usando os resultados já provados para corpos, vamos ver que no caso dos anéis comutativos, basta usar estes homomorfismos $E_{i,j}(t)$, para estudarmos a dualidade de Schur-Weyl.

Usemos de novo a notação da secção 5.4. De modo análogo ao que aí foi feito, obtemos os homomorfismos de álgebras $\rho_R \colon RGL(V_R) \to End_{RS_d}\left(V_R^{\otimes^d}\right)$ e $\rho'_R \colon RSL(V_R) \to End_{RS_d}\left(V_R^{\otimes^d}\right)$.

Designemos por $R^*$ o conjunto de todas as unidades de $R$. Então tem-se o seguinte resultado.

**Teorema 5.5.4.** *Seja $R$ um anel comutativo com identidade contendo um subanel $S$ tal que $S \subset R^* \cup \{0\}$ e $|S| > d$.*

*Então $\rho_R \colon RGL(V_R) \to End_{RS_d}\left(V_R^{\otimes^d}\right)$ é sobrejectiva para qualquer $n \in \mathbb{N}$.*

*Demonstração.* Como vimos anteriormente $\chi'_R \colon U'_R \to End_{RS_d}\left(V_R^{\otimes^d}\right)$ é sobrejectiva.

Tal como na prova do Lema 5.4.6, $\rho'_R\left(E_{i,j}(t)\right) = \sum_{m=0}^{d} t^m \chi'_R\left(1 \otimes \frac{e_{i,j}^m}{m!}\right)$, $1 \leq i \neq j \leq n$, $t \in R$.

Por hipótese existem $t_0, \ldots, t_d \in R$ tais que $t_j - t_i \in U(R)$ para $0 \leq i < j \leq d$. Pela fórmula anterior,

$$\rho'_R\left(E_{i,j}(t_k)\right) = \sum_{m=0}^{d} t_k^m \chi_R\left(1 \otimes \frac{e_{i,j}^m}{m!}\right), 0 \leq k \leq d, 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Como referido, o determinante da matriz deste sistema é $\prod_{0 \leq i < j \leq d} (t_j - t_i)$, sendo por hipótese um produto de unidades, logo $[t_i^j]$ é invertível. Portanto $im\chi'_R \subset im\rho'_R$.

Assim, $End_{RS_d}\left(V_R^{\otimes^d}\right) \subset im\rho'_R \subset im\rho_R$. Concluímos que $\rho_R$ é sobrejectiva. □

Pelo Corolário 5.5.3, concluímos que para anéis comutativos, nas condições do teorema anterior, a dualidade de Schur-Weyl verifica-se.

Este último teorema generaliza 5.4.8 para anéis comutativos, pois para um corpo $\mathbb{K}$ podemos escolher $S = \mathbb{K}$.

Vejamos agora alguns exemplos de anéis comutativos para os quais a dualidade de Schur-Weyl se verifica para quaisquer $n, d \in \mathbb{N}$.

**Exemplo 5.5.5.** Seja $R = \mathbb{C}[x]$ o anel dos polinómios com coeficientes complexos. Então para quaisquer $n, d \in \mathbb{N}$ a dualidade de Schur-Weyl verifica-se.

*Demonstração.* Basta aplicar o teorema anterior anterior com $S := \mathbb{C}$. □

Ou ainda um caso mais geral.

**Exemplo 5.5.6.** Seja $\mathbb{K}$ um corpo com ordem superior a $d$. Consideremos $R = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_k]$.

Então $\rho \colon RGL_n(\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_k]) \to S_{\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_k]}(n,d)$ é sobrejectivo para qualquer $n$.

Terminemos o capítulo analisando a dualidade de Schur-Weyl sobre o anel dos inteiros.

**Exemplo 5.5.7.** Sejam $n$ e $a$ números naturais tais que $\binom{n^2+a-1}{n^2-1} > \prod_{i=1}^{n}\left(2^n - 2^{i-1}\right)$.

Se $d \geq a$, então o homomorfismo $\rho_{\mathbb{Z}}\colon \mathbb{Z}GL_n(\mathbb{Z}) \to S_{\mathbb{Z}}(n,d)$ não é sobrejectivo. Em particular, para $n = 2$, $\rho_{\mathbb{Z}}$ não é sobrejectivo para $d \geq 2$.

*Demonstração.* Suponhamos $n$ e $d$ nas condições anteriores. O anel $\mathbb{Z}$ é um domínio euclidiano, logo os elementos $E_{i,j}(t)$, $1 \leq i \neq j \leq n$, $t \in \mathbb{Z}$ e $E_{i,i}(t)$, $1 \leq i \leq n$, $t \in \{1,-1\}$ geram $GL_n(\mathbb{Z})$. Denotemos $\rho_{\mathbb{F}_2}$ o homomorfismo $\rho_{\mathbb{F}_2}\colon \mathbb{F}_2GL_n(\mathbb{F}_2) \to S_{\mathbb{F}_2}(n,d)$. Denotemos por $\alpha$ o isomorfismo $\alpha\colon R\otimes(\mathbb{Z}^n)^{\otimes^d} \to (R^n)^{\otimes^d}$ e por $\beta$ o isomorfismo canónico $\beta\colon R\otimes_{\mathbb{Z}} S_{\mathbb{Z}}(n,d) \to S_R(n,d)$, onde $R$ é um anel comutativo qualquer.

É imediato que $\beta\left((\mathrm{id}_{\mathbb{F}_2}\otimes_{\mathbb{Z}}\rho_{\mathbb{Z}})\left(1\otimes E_{i,i}(s)\right)\right) = \rho_{\mathbb{F}_2}(I_n)$, para $i = 1,\ldots,n$ e $s \in \{1,-1\}$.

Sejam $t \in \mathbb{Z}$ e $1 \leq i \neq j \leq n$ quaisquer. Então, para $1 \leq i_1,\ldots,i_d \leq n$,

$$\begin{aligned}
&\beta((\mathrm{id}_{\mathbb{F}_2}\otimes\rho_{\mathbb{Z}})(1\otimes E_{i,j}(t)))(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_d}) = \alpha\left((\mathrm{id}_{\mathbb{F}_2}\otimes\rho_{\mathbb{Z}})\left(1\otimes E_{i,j}(t)\right)(1\otimes e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_d}\right)\\
&\quad = \alpha\left(1\otimes E_{i,j}(t)(e_{i_1})\otimes\cdots\otimes E_{i,j}(t)(e_{i_d})\right) = (e_{i_1}+\delta_{j,i_1}te_i)\otimes\cdots\otimes(e_{i_d}+\delta_{j,i_d}te_i)\\
&\quad = \begin{cases} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_d}, & \text{se } t = 2k,\ k\in\mathbb{Z}\\ (e_{i_1}+\delta_{j,i_1}e_i)\otimes\cdots\otimes(e_{i_d}+\delta_{j,i_d}e_i), & \text{se } t = 2k+1,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}.
\end{aligned}$$

Logo, $\beta\left((\mathrm{id}_{\mathbb{F}_2}\otimes\rho_{\mathbb{Z}})\left(1\otimes E_{i,j}(t)\right)\right) = \rho_{\mathbb{F}_2}(I_n)$ ou $\beta\left((\mathrm{id}_{\mathbb{F}_2}\otimes\rho_{\mathbb{Z}})\left(1\otimes E_{i,j}(t)\right)\right) = \rho_{\mathbb{F}_2}(E_{i,j}(1))$.

Portanto,

$$\beta\left((\mathrm{id}_{\mathbb{F}_2}\otimes\rho_{\mathbb{Z}})\left(\mathbb{F}_2\otimes\mathbb{Z}GL_n(\mathbb{Z})\right)\right) \subset \rho_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2GL_n(\mathbb{F}_2)).$$

Assim, se $\rho_{\mathbb{Z}}$ for sobrejectivo, então $\mathrm{id}_{\mathbb{F}_2}\otimes\rho_{\mathbb{Z}}$ é sobrejectivo. Portanto, teríamos $S_{\mathbb{F}_2}(n,d) \subset \rho_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2GL_n(\mathbb{F}_2))$, isto é, $\rho_{\mathbb{F}_2}$ seria sobrejectivo, o que é um absurdo. □

Logo, a dualidade de Schur-Weyl falha sobre o anel dos inteiros para $d$ suficientemente grande.

*Observação.* Pelo Teorema 4.1 de [7], o homomorfismo $\psi\colon \mathbb{Z}S_d \to End_{\mathbb{Z}GL_n(\mathbb{Z})}\left((\mathbb{Z}^n)^{\otimes^d}\right)$ é sobrejectivo para qualquer $n,d \in \mathbb{N}$. Vimos assim um caso onde o homomorfismo $\psi$ é sobrejectivo e o homomorfismo $\rho$ não é. Assim a sobrejectividade de $\psi$ não implica a dualidade de Schur-Weyl, enquanto que a sobrejectividade de $\rho$ implica a sobrejectividade de $\psi$.

# Capítulo 6

# Functores de Schur

O nosso objectivo, neste último capítulo, será aplicar a dualidade de Schur-Weyl para conectar a teoria das representações do grupo linear geral $GL_n(R)$ com a teoria das representações do grupo simétrico $S_d$, quando $n \geq d$.

Iremos fazê-lo, por intermédio da álgebra de Schur, considerando o functor $Hom_{S_R(n,d)}(V^{\otimes^d}, -)\colon S_R(n,d)\text{-}Mod \to RS_d\text{-}Mod$. Nestas circunstâncias, o functor $Hom$ é conhecido por functor de Schur.

Para estudarmos este functor vejamos que este se encaixa num cenário mais abstracto.

## 6.1 Definição

Sejam $R$ um anel comutativo noetheriano, $A$ uma $R$-álgebra com rank finito e $P$ um $A$-módulo. Consideremos $B = (End_A(P))^{op}$ a álgebra oposta de $End_A(P)$.

Então $P$ é um $B$-módulo à direita com a acção $p \cdot b := b(p),\ p \in P,\ b \in B$.

De facto, $p \cdot (b_1 b_2) = p \cdot (b_2 \circ b_1) = b_2(b_1(p)) = b_1(p) \cdot b_2 = (p \cdot b_1)b_2,\ p \in P,\ b_1, b_2 \in B$. O cálculo para os restantes axiomas é também imediato. Além disso, para $a \in A,\ b \in B,\ p \in P$, $(ap) \cdot b = b(ap) = ab(p) = a(p \cdot b)$. Portanto, $P$ é um $(A,B)$-bimódulo.

**Lema 6.1.1.** *Seja $M$ um $A$-módulo à esquerda qualquer. Então $Hom_A(P,M)$ é um $B$-módulo, com $b \cdot \psi$ definida por $b \cdot \psi := \psi \circ b,\ b \in B,\ \psi \in Hom_A(P,M)$.*

*Demonstração.* Sejam $b, b_1, b_2 \in B,\ \psi, \psi_1, \psi_2 \in Hom_A(P,M)$ quaisquer. Então,

$$(b_1 + b_2) \cdot \psi = \psi \circ (b_1 + b_2) = \psi \circ b_1 + \psi \circ b_2 = b_1 \cdot \psi + b_2 \cdot \psi;$$
$$b \cdot (\psi_1 + \psi_2) = (\psi_1 + \psi_2) \circ b = \psi_1 \circ b + \psi_2 \circ b = b \cdot \psi_1 + b \cdot \psi_2;$$
$$b_1 \cdot (b_2 \cdot \psi) = b_1 \cdot (\psi \circ b_2) = (\psi \circ b_2) \circ b_1 = \psi \circ (b_2 \circ b_1) = (b_2 \circ b_1) \cdot \psi = (b_1 b_2) \cdot \psi;$$
$$1_B \cdot \psi = \mathrm{id}_P \cdot \psi = \psi \circ \mathrm{id}_P = \psi. \qquad \square$$

Seja $f\colon M_1 \to M_2$ um homomorfismo de $A$-módulos. Então $Hom_A(P,f)$ é um homomorfismo de $B$-módulos. De facto, para $g \in Hom_A(P,M_1)$ e $b \in B$, temos

$$Hom_A(P,f)(b \cdot g) = f \circ (b \cdot g) = f \circ (g \circ b) = (f \circ g) \circ b = b \cdot (f \circ g) = b \cdot Hom_A(P,f)(g).$$

**Definição 6.1.2.** Seja $P$ um $A$-módulo finitamente gerado e projectivo. Ao functor $Hom_A(P,-)\colon A\text{-}Mod \to B\text{-}Mod$ chamamos *functor de Schur*.

**Proposição 6.1.3.** *O functor de Schur é um functor exacto.*

*Demonstração.* O functor $Hom_A(P,-)$ preserva injectividade para qualquer módulo $P$. Seja $f\colon M_1 \to M_2$ um $A$-homomorfismo sobrejectivo. Seja $g\colon P \to M_2$ um $A$-homomorfismo qualquer. Como $P$ é projectivo existe um único $A$-homomorfismo $h\colon P \to M_1$ tal que $f \circ h = g$, isto é, $Hom_A(P,f)(h) = g$. Logo $Hom_A(P,f)$ é sobrejectivo. □

## 6.2 Progeradores e Teorema de Morita

Estamos interessados em que o functor de Schur seja uma equivalência. Assim, é necessário impor mais condições ao módulo $P$. Portanto, iremos introduzir mais uma noção categórica.

**Definição 6.2.1.** Um $A$-módulo, $P$, diz-se um *gerador* de $A$-$Mod$ se o functor $Hom_A(P,-)\colon A\text{-}Mod \to Set$ for fiel.

**Teorema 6.2.2.** *Um $A$-módulo $P$ é um gerador para $A$-$Mod$ se e só se para qualquer $A$-módulo $M$ existir um epimorfismo $\bigoplus_{i\in I} P \to M$, para algum conjunto $I$.*

*Demonstração.* Suponhamos que se verifica a segunda condição. Sejam $f,g\colon M \to M'$ $A$-homomorfismos distintos. Queremos encontrar um $A$-homomorfismo $h\colon P \to M$ tal que $f\circ h \neq g\circ h$. Por hipótese, existe um epimorfismo $\alpha\colon \bigoplus_{i\in I} P \to M$. Logo, $f\circ\alpha \neq g\circ\alpha$. Assim, existe alguma injecção canónica $k_i\colon P \to \bigoplus_{i\in I} P$ tal que $f\circ\alpha\circ k_i \neq g\circ\alpha\circ k_i$. Caso contrário teríamos $f\circ\alpha\circ k_i = g\circ\alpha\circ k_i, \forall i\in I$, o que implicaria, $\sum_{i\in I} f\circ\alpha\circ k_i\circ\pi_i = \sum_{i\in I} g\circ\alpha\circ k_i\circ\pi_i$, onde $\pi_i$ é a projecção canónica. Assim, tomando $h = \alpha\circ k_i$ concluímos que $Hom_A(P,-)$ é fiel.

Reciprocamente, suponhamos que $P$ é um gerador. Seja $M$ um $A$-módulo qualquer. Usando uma apresentação do $A$-módulo $M$, vemos que $M$ é a imagem epimórfica de um módulo livre. Assim, é suficiente mostrar que a condição se verifica para o $A$-módulo $A$. Vamos supor, por absurdo, que não existe um conjunto $I$ tal que $\bigoplus_{i\in I} P \to A$ seja um epimorfismo. Em particular para $I = Hom_A(P,A)$. Assim, $0 \neq coker\left(\bigoplus_{\alpha\in I} P \xrightarrow{\oplus\alpha} A\right) = A/\bigoplus_{\alpha\in I}\alpha(P)$, isto é, a projecção $\pi\colon A \to A/\bigoplus_{\alpha\in I}\alpha(P)$ é não nula. Como o functor $Hom_A(P,-)$ é fiel, então existe um morfismo $h\colon P \to A$ tal que $\pi\circ h \neq 0\circ h = 0$, o que é um absurdo pois $h(P) \subset \bigoplus_{\alpha\in I}\alpha(P)$.

Logo, existe um epimorfismo $\bigoplus_{i\in I} P \to A$ para algum conjunto $I$. □

Para álgebras semi-simples, determinar geradores é mais fácil.

**Teorema 6.2.3.** *Suponhamos que $A$ é uma $R$-álgebra semi-simples com rank finito. Sejam $(S_i)_{i=1,\dots,k}$ representantes das classes de isomorfismos de $A$-módulos simples. Então $S = \bigoplus_{i=1}^{k} S_i$ é um gerador para a categoria $A$-$Mod$.*

*Demonstração.* Para $i = 1,\dots,k$, a projecção $S \to S_i$ é um epimorfismo. Assim, para qualquer conjunto $I$, $\bigoplus_{j\in I} S \to \bigoplus_{j\in I} S_i$ é um epimorfismo.

Seja $M$ um $A$-módulo qualquer. Então $M$ pode ser escrito como soma directa de $A$-módulos simples. Pelo argumento anterior, existe um conjunto $I$ tal que $\bigoplus_{i\in I} S \to M$ é um epimorfismo. Pelo teorema anterior, $S$ é gerador. $\square$

*Observação.* Notemos que se $P$ for um gerador para $A$-*Mod* e se existir um epimorfismo $N \to P$, então, pelo Teorema 6.2.2, $N$ é ainda um gerador. Logo, para álgebras semi-simples, qualquer módulo que ao decompor-se como soma directa de módulos simples contenha representantes de todas as classes de isomorfismo de $A$-módulos simples é um gerador.

Mais observações sobre geradores podem ser consultadas em [15, secção 18B].

**Definição 6.2.4.** Um $A$-módulo diz-se um *progerador* para $A$-*Mod* se for um $A$-módulo finitamente gerado, projectivo e gerador.

A importância destes objectos para os nossos propósitos é explicada pelo Teorema de Morita, o qual apenas iremos enunciar. Para a sua prova, pode consultar-se [15, secções 18C-D] ou [18, secção 4.1], mas foi primeiro provado em [17].

**Teorema 6.2.5** (Morita)**.** *Os functores $Hom_A(P,-)\colon A\text{-}Mod \to B\text{-}Mod$ e $P\otimes_B - \colon B\text{-}Mod \to A\text{-}Mod$ são equivalências de categorias se e só se o $A$-módulo $P$ for um progerador na categoria $A$-Mod.*

## 6.3 Dualidade de Schur-Weyl e functores de Schur

Voltemos ao nosso problema. Estamos agora em condições de falar do functor de Schur para as álgebras de Schur. Fixemos $A = S_R(n,d)$. Suponhamos que $n \geq d$.

Então a álgebra de Schur admite um idempotente $\xi_\lambda$, onde $\lambda = (\underbrace{1,\dots,1}_{d},\underbrace{0,\dots,0}_{n-d})$.

**Teorema 6.3.1.** *Nestas condições, $S_R(n,d)\xi_\lambda \cong V^{\otimes^d}$ como $S_R(n,d)$-módulos.*

*Demonstração.* Notemos que $C := Hom_{RS_d}\left(\xi_\lambda V^{\otimes^d}, V^{\otimes^d}\right)$ é um $S_R(n,d)$-módulo considerando a acção $\alpha \cdot f = \alpha \circ f$, $\alpha \in S_R(n,d), f \in C$. É fácil ver que, temos o $S_R(n,d)$-isomorfismo $S_R(n,d)\xi_\lambda \to C$, definido por $\alpha \mapsto \alpha\xi|_{\xi_\lambda V^{\otimes^d}}$. Considerando a notação usada no capítulo 3, $\xi_\lambda = \xi_{i,i}$, com $i = (1,\dots,d)$.

Provemos que $\xi_\lambda V^{\otimes^d} \cong RS_d$ como $RS_d$-módulos. Seja $e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d} \in V^{\otimes^d}$ um elemento qualquer da base. Temos $\xi_\lambda(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d}) = \begin{cases} e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_d}, & \text{se } j\sim i \\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$. Assim, $\xi_\lambda V^{\otimes^d}$ tem base $\{\sigma(e_1\otimes\cdots\otimes e_d)\colon \sigma \in S_d\}$. Podemos, portanto definir um $R$-isomorfismo $\psi\colon \xi_\lambda V^{\otimes^d} \to RS_d$, $\psi(\sigma(e_1\otimes\cdots\otimes e_d)) = \sigma$. Além disso, para qualquer $\gamma \in S_d$ tem-se

$$\psi(\gamma\sigma(e_1\otimes\cdots\otimes e_d)) = \gamma\sigma = \gamma\psi((e_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes e_{\sigma^{-1}(d)})).$$

Obtemos assim um $RS_d$-isomorfismo $\xi_\lambda V^{\otimes^d} \cong RS_d$.

É imediato que $\varphi\colon Hom_{RS_d}\left(RS_d, V^{\otimes^d}\right) \to V^{\otimes^d}$, com $\varphi(f) = f(1)$, é um $R$-isomorfismo. Mas, para qualquer $a \in S_R(n,d)$, tem-se, $\varphi(a\circ f) = a\circ f(1) = a(f(1))$. Logo, $\varphi$ é um $S_R(n,d)$-isomorfismo. Concluímos que, $S_R(n,d)\xi_\lambda \cong Hom_{RS_d}\left(\xi_\lambda V^{\otimes^d}, V^{\otimes^d}\right) \cong Hom_{RS_d}\left(RS_d, V^{\otimes^d}\right) \cong V^{\otimes^d}$, como $S_R(n,d)$-módulos. $\square$

**Corolário 6.3.2.** *Para $n \geq d$, $V^{\otimes^d}$ é um $S_R(n,d)$-módulo finitamente gerado projectivo.*

*Demonstração.* Como $S_R(n,d)\xi_\lambda \cong V^{\otimes^d}$ então é imediato que $V^{\otimes^d}$ é finitamente gerado. Por outro lado, como $\xi_\lambda$ é um idempotente temos, $S_R(n,d) \cong V^{\otimes^d} \bigoplus S_R(n,d)(1-\xi_\lambda)$.

Logo, $V^{\otimes^d}$ é um $S_R(n,d)$-módulo projectivo. □

Notemos que, em geral, quando uma $R$-álgebra admite um idempotente $e$ então $(End_A(Ae))^{op} \cong eAe$. De facto, temos os isomorfismos de álgebras $eae \rightsquigarrow (a'e \mapsto a'eae)$ e $\tau \rightsquigarrow \tau(e)$ de $eAe \to (End_A(Ae))^{op}$ e $(End_A(Ae))^{op} \to eAe$, respectivamente.

Assim vem que $B = \left(End_{S_R(n,d)}\left(V^{\otimes^d}\right)\right)^{op} \cong \xi_\lambda S_R(n,d)\xi_\lambda$. Mas, $\xi_\lambda S_R(n,d)\xi_\lambda$ tem base $\{\xi_{i,\sigma(i)} \colon \sigma \in S_d\}$ e é fácil de ver, usando (3.9), que $\xi_{i,\sigma(i)} \circ \xi_{i,\pi(i)} = \xi_{i,\sigma\pi(i)}$, $\sigma, \pi \in S_d$. Logo $\xi_{i,\sigma(i)} \rightsquigarrow \sigma$ define um isomorfismo de $R$-álgebras entre $\xi_\lambda S_R(n,d)\xi_\lambda$ e $RS_d$. Portanto, o functor de Schur $Hom_{S_R(n,d)}(V^{\otimes^d}, -)$ é definido da categoria $S_R(n,d)$-*Mod* para a categoria $RS_d$-*Mod*.

Mais ainda, para qualquer $A$-módulo $M$ tem-se $Hom_A(Ae,M) \cong eM$ como $eAe$-módulos. De facto, a cada $f \in Hom_A(Ae,M)$ fazemos corresponder $f(e)$, e a cada $em \in eM$, o $A$-homomorfismo $ae \mapsto aem$.

*Observação.* Assim, para $n \geq d$, o functor de Schur é a multiplicação à esquerda pelo idempotente $\xi_\lambda$.

**Corolário 6.3.3.** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo com característica zero ou superior a $d$. Se $n \geq d$ então $V^{\otimes^d}$ é um progerador de $S_\mathbb{K}(n,d)$-Mod.*

*Demonstração.* Pelo corolário anterior, já sabemos que $V^{\otimes^d}$ é finitamente gerado e projectivo. Resta provar que $V^{\otimes^d}$ é um gerador de $S_\mathbb{K}(n,d)$-*Mod*. Temos que $S_\mathbb{K}(n,d)$ é semi-simples. Logo é suficiente verificar que numa decomposição de $V^{\otimes^d}$ como soma directa de módulos simples estão representadas todas as classes de isomorfismo de módulos simples sobre a álgebra de Schur.

Seja $V^{\otimes^d} \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ a sua decomposição em $S_\mathbb{K}(n,d)$-módulos simples. Suponhamos, por absurdo, que existe um módulo simples $S$ tal que $S \ncong V_i$, $i = 1,\ldots,k$. Pelo Lema de Schur, $Hom_{S_\mathbb{K}(n,d)}(S,V_i) = 0$, $i = 1,\ldots,k$, o que implica $Hom_{S_\mathbb{K}(n,d)}\left(S,V^{\otimes^d}\right) = 0$.

Por outro lado, $S$ é isomorfo a um submódulo simples de $S_\mathbb{K}(n,d)$, pois a álgebra de Schur é semi-simples. Por outras palavras, $0 \neq S \subset End_{\mathbb{K}S_d}\left(V^{\otimes^d}\right)$. Assim, podemos encontrar $a \in S$, e $v \in V^{\otimes^d}$ tais que $a(v) \neq 0$. Portanto o $\mathbb{K}$-homomorfismo $\alpha \colon S \to V^{\otimes^d}$ definido por $\alpha(s) = s(v)$, $s \in S$, é não-nulo. Além disso, $\alpha$ é um $S_\mathbb{K}(n,d)$-homomorfismo. De facto,

$$\alpha(\beta \cdot s) = \alpha(\beta \circ s) = \beta \circ s(v) = \beta(s(v)) = \beta\alpha(s),\ \beta \in S_\mathbb{K}(n,d),\ s \in S.$$

Logo $0 \neq \alpha \in End_{S_\mathbb{K}(n,d)}\left(S,V^{\otimes^d}\right)$. Assim, obtemos um absurdo. □

Pelo teorema de Morita, concluímos que se $n \geq d$ e $\mathbb{K}$ for um corpo com característica zero ou superior a $d$ então, as categorias $S_\mathbb{K}(n,d)$-*Mod* e $\mathbb{K}S_d$-*Mod* são equivalentes.

Nestas condições, já vimos no capítulo anterior que a dualidade de Schur-Weyl se verifica. Desta forma, aplicando a dualidade de Schur-Weyl e usando o functor de Schur concluímos que a teoria das representações polinomiais homogéneas de grau $d$ de $GL_n(\mathbb{K})$ e a teoria das representações de $S_d$ são equivalentes. Estabelecemos assim, que muitos dos resultados para estas álgebras $\mathbb{K}S_d$, $\mathbb{K}GL_n(\mathbb{K})$, $S_\mathbb{K}(n,d)$ podem ser obtidos explorando estas conexões.

# Bibliografia


[1] K. Akin and D. A. Buchsbaum. Characteristic-free representation theory of the general linear group II. Homological considerations. *Advances in Mathematics*, 72(2):171–210, 1988.

[2] D. Benson and S. Doty. Schur-Weyl duality over finite fields. *Archiv der Mathematik*, 93(5):425–435, 2009.

[3] N. Bourbaki. *Algèbre: Chapitre 4 à 7*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.

[4] R.M. Bryant. Lie powers of infinite-dimensional modules. *Contributions to Algebra and Geometry*, 50(1):179–193, 2009.

[5] R. W. Carter and G. Lusztig. On the modular representations of the general linear and symmetric groups. *Mathematische Zeitschrift*, 136(3):193–242, 1974.

[6] C. W. Curtis and I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras*, volume 11 of *Pure and applied mathematics*. Interscience Publishers, New York, 1962.

[7] C. De Concini and C. Procesi. A characteristic free approach to invariant theory. *Advances in Mathematics*, 21(3):330–354, 1976.

[8] R. Dipper and S. Doty. The rational Schur algebra. *Representation Theory of the American Mathematical Society*, 12(3):58–82, 2008.

[9] S. Doty. Schur-Weyl duality in positive characteristic. *Representation Theory. Contemp. Math*, 478:15–28, 2009.

[10] K. Erdmann. Algebras. Oxford, 2007.

[11] J.A. Green. *Polynomial Representations of $GL_n$*, volume 830 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1980.

[12] J.A. Green. Schur algebras and general linear groups. In *Groups St. Andrews*, volume 1, 1989.

[13] J.E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *Graduate texts in mathematics*. Springer New York, 5 edition, 1972.

[14] H. Krause. Polynomial representations of $\mathrm{GL}(n)$ and Schur-Weyl duality. *Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry*, 56(2):769–773, 2015.

[15] T. Y. Lam. *Lectures on modules and rings*, volume 189 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, New York, 1999.

[16] S. Martin. *Schur Algebras and Representation Theory*, volume 112 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[17] K. Morita. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A*, 6(150):83–142, 1958.

[18] L.H. Rowen. *Ring Theory*, volume 127 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Boston, 1988.

[19] L. Silver. Noncommutative localizations and applications. *Journal of Algebra*, 7(1):44–76, 1967.