

Dulce Inês dos Santos Silva

Esqueletos retilíneos de polígonos e poliedros

Dissertação de Mestrado em Matemática, Área de Especialização em Estatística, Otimização, e Matemática Financeira, orientada pela Professora Doutora Ercília Sousa e Professor Doutor João Gouveia apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

2017



UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Esqueletos retilíneos de polígonos e poliedros

Dulce Inês dos Santos Silva



UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Mestrado em Matemática

Master in Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Julho 2017

Agradecimentos

Aos meus orientadores, Professora Doutora Ercília Sousa e Professor Doutor João Gouveia, por toda a ajuda, disponibilidade e incentivo.

Aos meus pais e irmão, pela motivação constante e pelo apoio em todas as minhas decisões.

Aos meus amigos e colegas de curso, Carla, Carolina, Inês, Vânia, Daniel, David e Tiago, sempre presentes em todas as fases do meu percurso académico.

Aos restantes familiares e amigos cuja presença e carinho são imprescindíveis.

Este trabalho é cofinanciado pelo projecto PT2020-POCI-SII& DT 3414: additive.MILLING - Add Milling to Additive Manufacturing. FEDER (Fundo Europeu de Desenvolvimento Regional), in the scope of the Program Portugal 2020, through COMPETE 2020 (Programa Operacional Competitividade e Internacionalização)

Cofinanciado por:



UNIÃO EUROPEIA
Fundo Europeu
de Desenvolvimento Regional

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo dos esqueletos retilíneos de polígonos e poliedros. Os esqueletos retilíneos surgem por necessidade de criar estruturas que preservam a forma topológica dos objetos, usando um tamanho reduzido de informação. Começamos por abordar o conceito de esqueleto retilíneo de um polígono, estrutura unidimensional constituída por segmentos de reta, onde o processo de propagação de frente de onda vai permitir definir, de uma forma dinâmica, este conceito. Serão apresentadas propriedades relevantes acerca desta estrutura e ainda mencionadas aplicações dos esqueletos retilíneos, nomeadamente em telhados, ilhas e no problema da dobra e do corte. Em seguida passamos à construção de esqueletos retilíneos de poliedros que assenta também num processo dinâmico que permite encolher estes sólidos. A definição de esqueleto retilíneo para o caso tridimensional tem por base conceitos distintos dos que apresentamos no caso dos polígonos, tais como figura de vértice cónica, polígono esférico e esqueleto esférico. Em especial o conceito de esqueleto esférico será estudado detalhadamente e serão abordados os eventos relativos à construção desta estrutura. Também os eventos que ocorrem durante o processo de encolhimento de poliedros genéricos são apresentados. Terminamos com alguns resultados relacionados com a combinatória dos esqueletos retilíneos de poliedros.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
2 Esqueletos retilíneos de polígonos	5
2.1 Conceitos introdutórios	5
2.2 Processo de propagação de frente de onda	6
2.3 Eventos	7
2.3.1 Eventos de aresta	8
2.3.2 Eventos de divisão	8
2.3.3 Combinações de eventos	10
2.4 Definição de esqueleto retilíneo, exemplos e propriedades	10
2.5 Abordagem computacional	15
2.6 Aplicações dos esqueletos retilíneos	16
2.6.1 Telhados	16
2.6.2 Ilhas: reconstrução de terrenos	18
2.6.3 Origami: Problema da dobra e corte	19
3 Esqueletos retilíneos de poliedros	21
3.1 Conceitos introdutórios	21
3.2 Processo de encolhimento de poliedros	23
3.2.1 Figura de vértice, polígonos esféricos e grafos bissetores	24
3.2.2 Definição de esqueletos retilíneos de poliedros e sua ambiguidade	27
3.2.3 Esqueleto esférico	30
3.2.4 Propriedades dos constituintes do esqueleto retilíneo de um poliedro	33
3.3 Eventos	34
3.3.1 Eventos de aresta	35
3.3.2 Eventos de contacto	38
3.3.3 Eventos inversos	42
3.3.4 Combinatória dos esqueletos retilíneos	44
3.3.5 Comentário acerca das aplicações dos esqueletos retilíneos de poliedros	48

Bibliografia	49
Anexo A Figura destacável	51
Anexo B Eventos de paragem	53

Lista de Figuras

1.1	(a) Curva poligonal a preto. Eixo medial a azul. Curva <i>offset</i> a vermelho tracejado; (b) Curva poligonal a preto. Esqueleto reto a azul. Curva <i>mitered offset</i> a vermelho tracejado.	2
2.1	Polígono com buracos a cinzento. A curva poligonal do polígono está representada a preto.	6
2.2	A cinzento estão representadas $W_P(t)$ com t a variar. A bissetriz do ângulo interno ao polígono em v está assinalada a vermelho tracejado.	6
2.3	Curva poligonal a preto. Frentes de onda a cinzento. Face da aresta e , $f(e)$, a azul. Face da aresta e' , $f(e')$, a verde.	7
2.4	Evento de aresta simples.	8
2.5	Três eventos simultâneos de colapso de arestas adjacentes.	9
2.6	Colapso simultâneo de três segmentos de frente de onda todos adjacentes - colapso de um triângulo.	9
2.7	Evento de divisão simples.	10
2.8	Eventos de divisão múltipla (estão assinalados com as setas vermelhas).	10
2.9	Eventos de divisão múltipla e de aresta em simultâneo, resultando na colisão entre duas arestas paralelas.	11
2.10	A curva poligonal está representada a preto. As frentes de onda estão representadas a cinzento e o esqueleto retilíneo a azul.	11
2.11	Esqueleto retilíneo a azul. Curva poligonal a preto. Frentes de onda a cinzento. Os dois vértices reflexos assinalados são os envolvidos no evento de divisão múltipla. . .	13
2.12	Esqueleto retilíneo a azul. Curva poligonal a preto. Frentes de onda a cinzento. O nó interior, de grau quatro, assinalado é resultante do evento de vértice onde os dois vértices reflexos assinalados são intervenientes.	13
2.13	Esqueleto retilíneo a azul. Curva poligonal a preto. Frentes de onda a cinzento. . . .	13
2.14	À esquerda está representado, a azul, o esqueleto retilíneo do polígono. À direita estão as faces do telhado baseado no esqueleto retilíneo a cinzento e as suas arestas a azul.	17
2.15	Mapa à esquerda. Ao centro esqueleto retilíneo do mapa. À direita, reconstrução do terreno correspondente ao mapa.	18
2.16	Sequência de dobras e corte final que permitem obter uma estrela de cinco pontas. . .	19
2.17	Polígonos obtidos pelo processo <i>fold-and-cut</i>	19

3.1	Exemplos de sólidos que verificam a Definição 3.1.1 e portanto são poliedros.	22
3.2	Exemplos de sólidos que não verificam a Definição 3.1.1 e portanto não são poliedros.	22
3.3	Duas figuras de vértice cónicas: (a) $\mathcal{F}(v)$ com v não sendo vértice de contacto; (b) $\mathcal{F}(v)$ com v vértice de contacto.	24
3.4	Figura de vértice cónica e um <i>offset</i> seu à esquerda. À direita temos o respetivo polígono esférico assinalado a preto e o grafo associado ao <i>offset</i> assinalado a vermelho.	25
3.5	O poliedro encontra-se à esquerda e o respetivo esqueleto retilíneo encontra-se à direita.	28
3.6	Vértice que não é pontiagudo de um poliedro no qual incidem duas arestas reflexas e duas arestas convexas.	28
3.7	Dois grafos bissetores (a vermelho) para o polígono esférico (fronteira a preto) relativo ao vértice da Figura 3.6: (a) Grafo bissetor 1; (b) Grafo bissetor 2	29
3.8	Duas possíveis resoluções do processo de encolhimento na vizinhança do vértice da Figura 3.6: (a) Resolução 1: aresta interior convexa; (b) Resolução 2: aresta interior reflexa.	29
3.9	Fronteira do polígono esférico a preto. Fronteira de três polígonos esféricos encolhidos a cinzento.	30
3.10	Dois tipos de eventos que ocorrem no processo de encolhimento de um polígono esférico: (a) Colapso de uma região limitada por um arco; (b) Colapso de uma região limitada por dois arcos.	31
3.11	Vários <i>offsets</i> do polígono esférico cuja fronteira está assinalada a preto. Respetivo esqueleto esférico a vermelho.	33
3.12	O poliedro à esquerda antecede o colapso de uma aresta. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.	36
3.13	O poliedro à esquerda antecede o colapso de uma aresta. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico, associado a um vértice convexo, está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.	36
3.14	O poliedro à esquerda antecede o colapso de duas arestas. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.	36
3.15	O poliedro à esquerda antecede o colapso de três arestas. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.	37
3.16	O poliedro à esquerda antecede o colapso de quatro arestas. Os poliedros à direita sucedem o evento. A fronteira dos polígonos esféricos está assinalada a preto e os esqueletos esféricos a vermelho.	37
3.17	O poliedro à esquerda antecede o colapso de cinco arestas. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.	38
3.18	O poliedro à esquerda antecede o evento contacto vértice-aresta. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.	39

3.19	O poliedro à esquerda antecede o evento contacto vértice-aresta. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.	39
3.20	O poliedro à esquerda antecede o evento contacto vértice-aresta. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.	39
3.21	O poliedro à esquerda antecede o evento contacto vértice-vértice. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.	40
3.22	O poliedro à esquerda antecede o evento contacto vértice-vértice. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.	40
3.23	O poliedro à esquerda antecede o evento contacto vértice-vértice-aresta I. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira dos polígonos esféricos está assinalada a preto e os esqueletos esféricos a vermelho.	40
3.24	O poliedro à esquerda antecede o evento contacto vértice-vértice-aresta II. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.	41
3.25	O poliedro à esquerda antecede o evento contacto aresta-aresta. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.	41
3.26	O poliedro à esquerda antecede o evento contacto vértice-face. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.	42
3.27	A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho. O esqueleto esférico complementar, referente ao evento inverso, está assinalado a verde.	43
3.28	Deformação de um poliedro simples num ponto.	44
3.29	Deformação de um poliedro com um buraco simples numa superfície esférica.	45
3.30	Deformação de um poliedro com um túnel num círculo.	45
3.31	Poliedro com um túnel particionado em células simples.	46
A.1	Destacável com as dobras assinaladas.	51
B.1	Processo de encolhimento de um polígono esférico localizado. A preto temos dois dos segmentos que constituem a fronteira de \mathcal{P}_E . Parte do esqueleto esférico está assinalado a vermelho. A localização do evento de paragem está assinalada com um asterisco vermelho. A interseção dos planos <i>offset</i> com a superfície esférica está assinalada a cinzento. Os pontos a verde sinalizam a interseção da linha correspondente à interseção dos planos <i>offset</i> com a superfície esférica antes do evento, e os pontos a laranja depois do evento.	53

-
- B.2 Processo de encolhimento de um polígono esférico localizado. A preto temos dois dos segmentos que constituem a fronteira de \mathcal{P}_E . Parte do esqueleto esférico está assinalado a vermelho. A localização do evento de paragem está assinalada com um asterisco vermelho. A interseção dos planos *offset* com a superfície esférica está assinalada a cinzento. Os pontos a verde sinalizam a interseção da linha correspondente à interseção dos planos *offset* com a superfície esférica antes do evento, e os pontos a laranja depois do evento. 54

Lista de Tabelas

3.1	Eventos inversos	43
-----	----------------------------	----

Capítulo 1

Introdução

Os objetos do mundo real são muito complexos, tornando-se por isso, muitas das vezes, difíceis de modelar computacionalmente, devido a limitações de memória. Assim, surge a necessidade de recorrer a métodos que reduzam o tamanho da informação relacionada com os objetos, mas que ao mesmo tempo permitam que o conteúdo disponível seja suficiente para recuperar a forma do objeto e algumas das suas principais características. A representação dos objetos através dos seus esqueletos permite reduzir a informação que lhe está associada, sem que as suas características se percam, o que faz dos esqueletos um método eficiente para a representação dos objetos.

De um modo geral, um esqueleto de um polígono é uma estrutura unidimensional que preserva algumas das suas propriedades geométricas, enquanto que o esqueleto de um poliedro é uma estrutura bidimensional. Existem várias abordagens possíveis para a construção de uma estrutura deste tipo resultando em diferentes tipos de esqueletos.

Aichholzer et al. [2] introduziram pela primeira vez o conceito de esqueleto retilíneo (*straight skeleton*) de um polígono. Trata-se de um esqueleto constituído somente por segmentos de reta, que particionam, de modo único, o interior do polígono em tantas partes quanto o número de arestas que ele possui. Estas partes (faces) correspondem às regiões varridas pelas arestas durante o processo de encolhimento do polígono, que se designa por processo de propagação de frente de onda. A partição do polígono segundo o esqueleto retilíneo preserva a sua forma, permitindo a reconstrução do polígono a partir dele.

O estudo de esqueletos retilíneos de polígonos serviu, posteriormente, de base para o conceito de esqueletos retilíneos para poliedros [5]. Neste caso, o esqueleto consiste num conjunto de segmentos de reta e de faces lineares. Enquanto que o esqueleto retilíneo de um polígono é único, para poliedros, em geral, isto não se verifica. No entanto existem métodos que nos conduzem a um único esqueleto retilíneo para cada poliedro. Um deles é baseado no conceito de esqueleto esférico. De um modo geral, este método é uma adaptação do conceito de esqueleto retilíneo de polígonos a polígonos esféricos, contidos numa superfície esférica.

O facto do esqueleto retilíneo, tanto o de polígonos como o de poliedros, não conter segmentos curvilíneos torna-o preferível em relação a outros tipos de esqueleto, na medida em que certos *softwares* e outras aplicações apenas lidam com segmentos retos.

Os esqueletos retilíneos são uma ferramenta útil da geometria computacional com inúmeras aplicações na indústria e na ciência. Uma aplicação de grande importância no desenho assistido

por computador (CAD) é a determinação de *offsets* de polígonos e de poliedros. Este problema tem particular relevância no desenho industrial.

O esqueleto retilíneo de polígonos é utilizado no contexto de um tipo particular de *offsets* denominado curvas *mitered offset*. Dado um polígono P , a curva *offset* de P , com distância d , corresponde ao conjunto dos pontos, pertencente ao interior do polígono, cuja distância euclidiana à curva poligonal é precisamente d . Todos os segmentos de reta que constituem as curvas *offset* são paralelos às arestas do polígono. Contudo, e segundo esta definição, as curvas *offset* relativas a um polígono, que possui vértices reflexos, são formadas por segmentos curvilíneos, o que confere uma desvantagem à sua utilização. Assim surge o conceito de curvas *mitered offset*, que têm por base as curvas *offset* e as seguintes alterações: eliminação de cada segmento curvilíneo da curva *offset* e extensão dos segmentos retilíneos que lhe são adjacentes até ao ponto onde estes dois se intersectam. A Figura 1.1, retirada de [12], resume, de forma ilustrada, as diferenças entre as curvas *offset*, às quais estão associadas um outro tipo de esqueleto, denominado eixo medial, e as curvas *mitered offset* às quais se associa o esqueleto retilíneo.

Para poliedros, o conceito de curvas *offset* e curvas *mitered offset* é perfeitamente adaptável, basta considerar as faces do poliedro, para efeitos das medidas das distâncias, em vez das arestas.

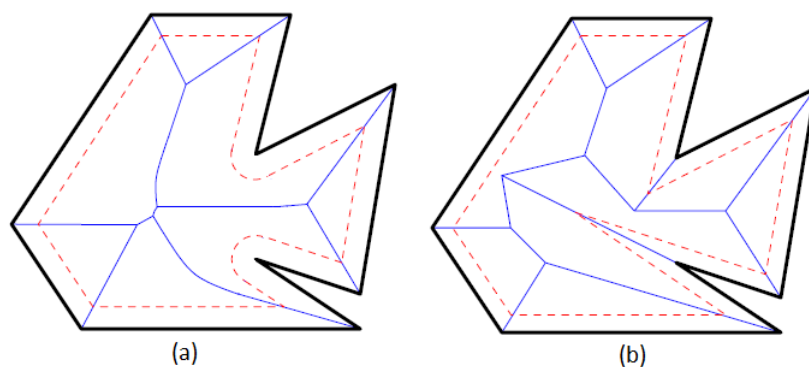


Fig. 1.1 (a) Curva poligonal a preto. Eixo medial a azul. Curva *offset* a vermelho tracejado; (b) Curva poligonal a preto. Esqueleto reto a azul. Curva *mitered offset* a vermelho tracejado.

No perfil da maquinaria é importante proteger a forma dos vértices dos objetos, que estão a ser elaborados, ou seja, é necessário garantir que estes não são erodidos. O estudo das curvas *mitered offset* dos objetos é uma tentativa de assegurar esta exigência. A estas curvas acresce a vantagem de se adequarem ao perfil da maquinaria, tendo por isso uma forte aplicabilidade na indústria.

Nesta dissertação, cujo conteúdo descrevemos de seguida, vamos estudar esqueletos retilíneos de polígonos e poliedros.

No Capítulo 2 abordamos o conceito de esqueleto retilíneo em duas dimensões, ou seja para polígonos. Começamos com a descrição do processo de propagação de frente de onda, que permite encolher progressivamente o polígono. É a partir dele que se consegue definir a estrutura de esqueleto retilíneo de um polígono. Após a introdução deste conceito apresentamos algumas das suas propriedades mais importantes. Depois, mencionamos algumas aplicações que surgem de uma interpretação espacial dos esqueletos retilíneos de polígonos, como por exemplo à aquitetura, mais

precisamente, à construção de telhados com inclinação fixa sobre um determinado conjunto de paredes. Também são úteis em sistemas de informação geográfica, onde são usados na reconstrução de terrenos a partir de um mapa que delimita costas e lagos. Por último, fazemos uma referência ao papel dos esqueletos retilíneos de polígonos no problema da dobra e do corte, proposto por Gardner em 1995 [14].

No Capítulo 3 fazemos uma abordagem a três dimensões, ou seja, estudamos o conceito de esqueleto retilíneo de poliedros. Começamos com a definição de poliedro e com a descrição do processo de encolhimento deste, onde concluímos que este é ambíguo. Introduzimos os conceitos de figura de vértice cônica e de polígono esférico, que são necessários para explicar o processo de encolhimento de poliedros local. De seguida introduzimos um outro conceito, o de esqueleto esférico, que surge como proposta de resolução da ambiguidade dos esqueletos retilíneos de poliedros [5]. Fazemos uma descrição detalhada de todos os eventos que ocorrem durante o processo de encolhimento de poliedros genéricos e terminamos com as propriedades mais relevantes dos esqueletos retilíneos destes sólidos.

Capítulo 2

Esqueletos retilíneos de polígonos

A ideia de esqueleto retilíneo foi introduzida por Aichholzer et al. [2] na tentativa de preservar a forma dos objetos. Antes da apresentação do conceito em si, e para que o possamos compreender melhor, começamos por introduzir algumas definições básicas como a de polígono simples e de polígono com buracos. Vamos ainda apresentar a teoria em volta do processo de propagação de frente de onda, que nos permite definir o conceito de esqueleto retilíneo de um polígono. Os eventos subjacentes a este processo são também estudados e exemplificados. Após termos reunido todos os elementos necessários à definição de esqueleto retilíneo apresentamos algumas das suas propriedades e terminamos com três aplicações destas estruturas: os telhados, as ilhas e o problema da dobra e do corte.

2.1 Conceitos introdutórios

Um **polígono simples** é uma região de \mathbb{R}^2 fechada e limitada por um número finito de segmentos de reta que formam uma curva fechada e que não se auto-intersecta. Esta curva designa-se **curva poligonal**. Os segmentos de reta que formam a curva poligonal designam-se **arestas** do polígono e aos pontos onde duas arestas são adjacentes denominamos **vértices** do polígono. Ao percorrermos as arestas no sentido direto, temos uma região que se encontra à esquerda destas que designamos por **interior do polígono**.

Um vértice diz-se **reflexo** se a amplitude do seu ângulo interno, formado pelas duas arestas que lhe são incidentes, for superior a π . Caso contrário diz-se **convexo**.

Um **polígono com buracos** é formado por um polígono simples P , extraindo deste o interior dos polígonos simples P_1, P_2, \dots, P_h designados os **buracos** do polígono, como ilustrado na Figura 2.1. A curva poligonal de qualquer um dos polígonos buraco e a curva poligonal do polígono simples não se intersectam. O mesmo acontece relativamente a quaisquer dois polígonos P_i e P_j , $i \neq j = 1, \dots, h$. Usaremos apenas o termo **polígono** quando não há necessidade de especificar se o polígono é simples ou se tem buracos.

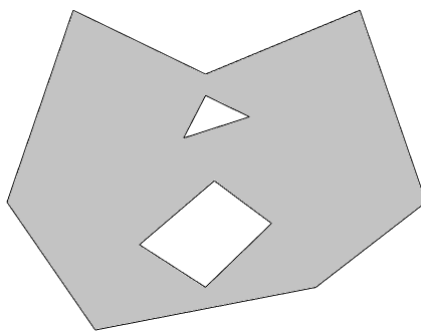


Fig. 2.1 Polígono com buracos a cinzento. A curva poligonal do polígono está representada a preto.

2.2 Processo de propagação de frente de onda

No que se segue iremos considerar um polígono P arbitrário e um processo, introduzido em [1], que permite encolher, progressivamente, a curva poligonal de P .

Cada aresta e de P gera um segmento de reta paralelo a ela, que se desloca com velocidade unitária para o interior do polígono. Este segmento de reta encontra-se, em cada instante t , à distância t (medida na perpendicular) da aresta de P que o gerou. Este processo, faz corresponder a cada instante t , $W_P(t)$, que consiste na união de todos estes segmentos de reta gerados por cada uma das arestas do polígono. É portanto necessário explicar, mais detalhadamente, como chegar a $W_P(t)$.

Queremos que $W_P(t)$ seja a união de um conjunto finito de curvas poligonais que se interseam, cada duas, no máximo num ponto. Dadas duas arestas de P adjacentes que se interseam num vértice v , os segmentos que elas geram vão, inicialmente, intersear-se num ponto, denominado vértice de $W_P(t)$ que se move ao longo da bissetriz do ângulo interno do polígono em v . A Figura 2.2 é uma ilustração do que acontece num vértice em particular. No instante inicial, quando $t = 0$, $W_P(0)$ coincide com a curva poligonal do polígono P .

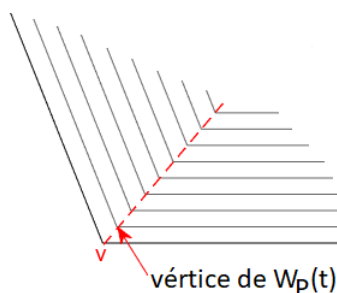


Fig. 2.2 A cinzento estão representadas $W_P(t)$ com t a variar. A bissetriz do ângulo interno ao polígono em v está assinalada a vermelho tracejado.

O que acabamos de descrever retrata o que acontece em cada um dos vértices do polígono nos instantes iniciais do processo de encolhimento da curva poligonal. Contudo, este processo conduz a auto-interseções de $W_P(t)$, pelo que o procedimento anterior é mantido até ocorrerem essas auto-interseções. Estas auto-interseções podem ocorrer devido a duas razões: colapso de arestas ou divisão

das curvas poligonais. Caso se tenha tratado de um colapso de arestas, esquecemos os elementos que colapsaram e continuamos o processo. Caso se tenha tratado da divisão de curvas poligonais, continua-se o processo de forma independente em cada uma delas.

Quando se diz que o processo continua, significa que estamos a considerar, daí em diante, segmentos de $W_P(t_i)$ em vez de arestas de P e vértices de $W_P(t_i)$ em vez de vértices de P , sendo t_i o instante da auto-interseção. Assim, dado um polígono P , existe um número finito de instantes t_0, t_1, \dots, t_N , tais que para $t \in [0, t_0[$, ou $t \in]t_0, t_1]$, ou $t \in]t_1, t_2]$, ..., ou $t \in]t_{N-1}, t_N]$, $W_P(t)$ não contém qualquer auto-interseção. Consequentemente, a forma topológica e combinatória de $W_P(t)$, com t pertencente a um destes intervalos, é a mesma.

Definição 2.2.1. Ao processo de encolhimento descrito anteriormente designamos processo de propagação de frente de onda. A $W_P(t)$ chamamos frente de onda do polígono P no instante t . Aos segmentos de reta que permitem definir $W_P(t)$ chamamos segmentos de frente de onda no instante t .

O processo de propagação de frente de onda termina quando todos os segmentos da frente de onda já tiverem colapsado. Ou seja, quando não restar nenhuma curva poligonal fechada.

A cada aresta e do polígono P corresponde uma face, conceito que definimos de seguida.

Definição 2.2.2. Dada uma aresta e , a face $f(e)$, consiste no conjunto de pontos atingidos pela frente de onda emitida por e .

Na Figura 2.3 pode ser visto um exemplo de um polígono, onde algumas das suas faces estão assinaladas.

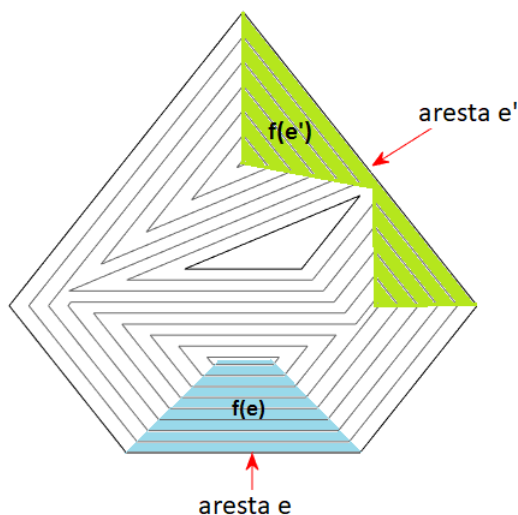


Fig. 2.3 Curva poligonal a preto. Frentes de onda a cinzento. Face da aresta e , $f(e)$, a azul. Face da aresta e' , $f(e')$, a verde.

2.3 Eventos

Como vimos anteriormente, há singularidades t_0, t_1, \dots, t_N , que alteram a forma de $W_P(t)$. Aos acontecimentos que causam tais alterações chamamos eventos e serão classificados em eventos de

aresta ou eventos de divisão, como veremos de seguida. O estudo destes eventos encontra-se disperso na literatura [1], [8], [15], e nesta secção apresentamos uma exposição unificada e estruturada de eventos.

2.3.1 Eventos de aresta

Os eventos de aresta ocorrem sempre que há o colapso de algum segmento da frente de onda. Estes podem ser divididos em eventos de aresta simples ou eventos de aresta múltiplos, sendo que dentro destes últimos se encontram os eventos triangulares. Estas sub-classificações prendem-se com o número de arestas envolvidas em cada evento.

Eventos de aresta simples

Um evento de aresta simples dá-se quando determinado segmento da frente de onda colapsa, ficando com comprimento nulo. Ou seja, os segmentos de frente de onda, emitidos pelas duas arestas adjacentes à aresta que gera o segmento que colapsa, colidem, tornando-se adjacentes. Este tipo de evento é dos mais frequentes e está ilustrado na Figura 2.4.

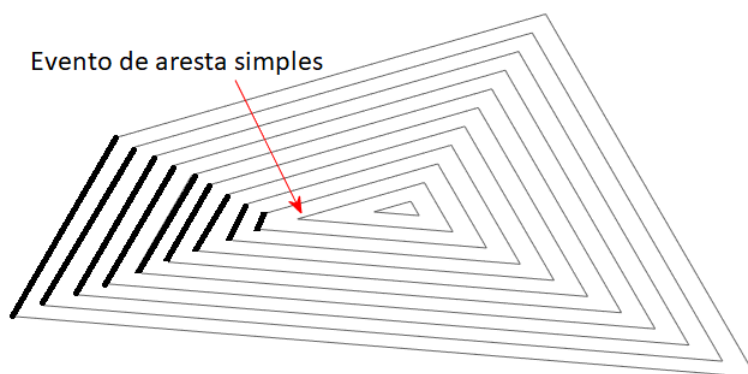


Fig. 2.4 Evento de aresta simples.

Eventos de aresta múltiplos

Eventos de aresta múltiplos ocorrem quando há o colapso simultâneo de vários segmentos de frente de onda gerados por arestas que são adjacentes. Um exemplo deste evento, que envolve três arestas do polígono, pode ser visto na Figura 2.5.

Um caso particular, mas bastante frequente, de evento de aresta múltiplo, dá-se quando três segmentos da frente de onda, todos adjacentes, colapsam em simultâneo. Mais explicitamente, trata-se do colapso de um triângulo, como ilustrado na Figura 2.6. Este evento toma a designação especial de **evento triangular**.

2.3.2 Eventos de divisão

Um evento de divisão ocorre sempre que há auto-interseções das frentes de onda, causando a sua divisão em partes. O processo de propagação de frente de onda continua de forma independente em



Fig. 2.5 Três eventos simultâneos de colapso de arestas adjacentes.



Fig. 2.6 Colapso simultâneo de três segmentos de frente de onda todos adjacentes - colapso de um triângulo.

cada uma das novas partes. Estes eventos podem ser simples ou múltiplos, dependendo do número de vértices reflexos envolvidos.

Eventos de divisão simples

Um evento de divisão simples ocorre quando um vértice reflexo da frente de onda colide com um segmento da frente de onda durante o processo de propagação, resultando desta colisão a divisão do segmento em duas partes. Cada uma das partes irá interferir na forma das frentes de onda que se sucedem, como exemplificado na Figura 2.7.

Eventos de divisão múltipla

Eventos de divisão múltipla ocorrem quando dois ou mais vértices reflexos colidem uns com os outros no mesmo instante, resultando na divisão da frente de onda em duas ou mais partes, consoante o número de vértices intervenientes no evento. A Figura 2.8 ilustra este tipo de eventos. Analisando a Figura 2.8, no caso (a), tem-se que os vértices da frente de onda, formados aquando da colisão dos dois vértices reflexos, são ambos convexos; no caso (b), um dos novos vértices da frente de onda tem ângulo interno de 180° , e por isso toma a designação de **vértice fantasma**; em (c), um dos novos vértices da frente de onda é reflexo tomando, o evento, a designação especial de **evento de vértice**.

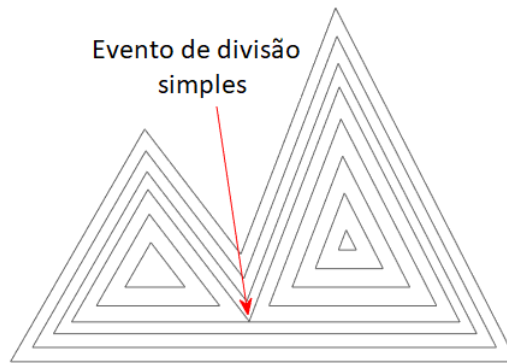


Fig. 2.7 Evento de divisão simples.

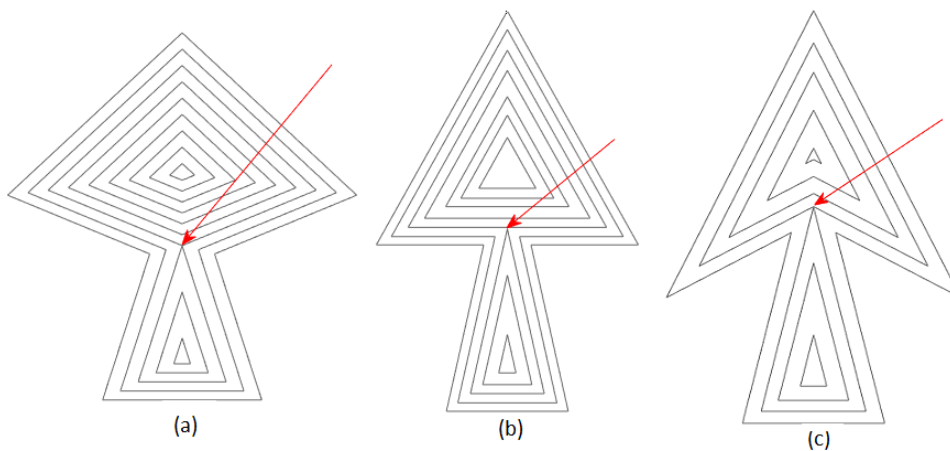


Fig. 2.8 Eventos de divisão múltipla (estão assinalados com as setas vermelhas).

2.3.3 Combinações de eventos

Existe a possibilidade de ocorrência de mais do que um evento, no mesmo instante. Por exemplo, quando estamos perante um polígono com duas arestas paralelas, que se deslocam em direções opostas, pode ocorrer a colisão entre estas duas arestas. Na Figura 2.9 podemos observar uma das combinações de eventos que leva a este fenómeno.

2.4 Definição de esqueleto retilíneo, exemplos e propriedades

Estamos agora em condições de introduzir o conceito, concebido por Aichholzer et al. [2], de esqueleto retilíneo de um polígono P , $S(P)$.

Definição 2.4.1. *O esqueleto retilíneo de um polígono corresponde à união das fronteiras das faces resultantes do processo de propagação de frente de onda, excluindo as arestas do polígono.*

O esqueleto retilíneo corresponde ao traçado que os vértices da frente de onda vão fazendo ao moverem-se durante o processo de propagação, com a adição dos segmentos de frente de onda paralelos colapsados. Ao esqueleto retilíneo está associado um grafo particular, como se pode ver

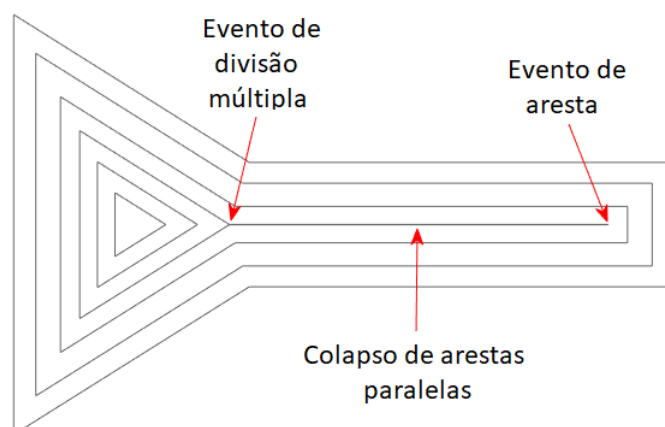


Fig. 2.9 Eventos de divisão múltipla e de aresta em simultâneo, resultando na colisão entre duas arestas paralelas.

na Figura 2.10. Às arestas desse grafo, representadas a azul, chamamos **arcos** do esqueleto retilíneo. Aos vértices assinalados a cor-de-laranja, denominamos **nós exteriores**. Aos restantes vértices do grafo, marcados a vermelho, designamos **nós interiores**. A cada nó interior do esqueleto retilíneo está associado um evento de aresta ou um evento de divisão. Uma designação especial é atribuída a um nó interior que resulta de um evento triangular - nó cume.

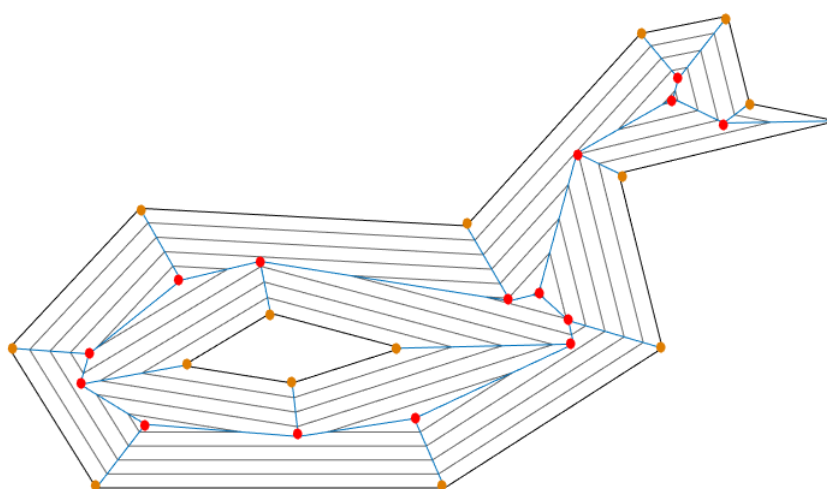


Fig. 2.10 A curva poligonal está representada a preto. As frentes de onda estão representadas a cinzento e o esqueleto retilíneo a azul.

Por abuso de notação vamos usar $S(P)$ quer para nos referirmos à estrutura de grafo quer para nos referirmos à sua realização geométrica.

No que se segue vamos introduzir a definição de polígono genérico.

Definição 2.4.2. *Um polígono genérico é um polígono no qual não existem arestas paralelas e dadas quaisquer quatro arestas, não existe nenhum ponto que esteja à mesma distância das retas que as contêm. Um polígono que não é genérico designa-se por polígono degenerado.*

Polígonos genéricos, tal como o nome indica, são os polígonos mais frequentes, isto porque os polígonos degenerados são casos muito particulares, sendo por isso invulgares. Note-se que qualquer pequena perturbação aleatória dos vértices de um polígono degenerado o transforma num polígono genérico.

O resultado seguinte aplica-se apenas a polígonos genéricos.

Proposição 2.4.1. *Seja P um polígono genérico. Durante o processo de propagação de frente de onda associado a P , apenas ocorrem eventos de aresta simples, eventos triangulares e eventos de divisão simples.*

Demonstração: A prova desta proposição passa por justificar a impossibilidade de ocorrência dos restantes tipos de eventos em polígonos genéricos.

Quando ocorre um evento de aresta múltiplo (estamos a desconsiderar eventos triangulares), dois ou mais segmentos de frente de onda, gerados por arestas adjacentes, colapsam no mesmo momento. Ou seja, pelo menos quatro faces incidem no nó interior formado. Assim, esse nó está à mesma distância de quatro ou mais arestas do polígono. Um evento de divisão múltipla ocorre quando dois ou mais vértices reflexos da frente de onda colidem todos num mesmo ponto. Portanto, esse tal ponto está à mesma distância de pelo menos quatro arestas do polígono. Falta apenas excluir os casos de colapso de arestas paralelas, que é evidente uma vez que polígonos genéricos não as têm. Provamos assim que apenas eventos de aresta simples, eventos triangulares e eventos de divisão simples podem ocorrer em polígonos genéricos. \square

De facto, eventos de aresta simples, eventos triangulares e eventos de divisão simples podem ocorrer em polígonos genéricos. Um exemplo disso é o polígono genérico exemplificado na Figura 2.10, e onde se pode observar a ocorrência destes três tipos de eventos.

Dado um esqueleto retilíneo e considerando um qualquer dos seus nós, definimos **grau** desse nó como sendo o número de arcos que lhe são incidentes. O seguinte corolário é uma consequência imediata do resultado anterior.

Corolário 2.4.1. *[1] Dado um polígono P genérico, os nós interiores do esqueleto retilíneo associado a P , $S(P)$, têm todos grau três.*

Os exemplos que veremos de seguida são de casos em que, o esqueleto retilíneo de polígonos degenerados, possui nós interiores de grau superior a três, resultado da ocorrência de eventos que ocorrem exclusivamente neste tipo de polígonos.

Exemplo 2.4.1. *Se $S(P)$ tiver nós interiores que resultaram de eventos de divisão múltipla, o grau destes nós será superior a três, como exemplificado nas Figuras 2.11 e 2.12.*

Exemplo 2.4.2. *Se P for um quadrado, durante o processo de propagação da frente de onda, ocorre o colapso das quatro arestas em simultâneo, pelo que o único nó de $S(P)$ terá grau quatro, como ilustrado na Figura 2.13. Estamos perante um evento de aresta múltiplo.*

A proposição que se segue é referente ao número de nós e de arcos de um esqueleto retilíneo, $S(P)$, sendo P um polígono simples.

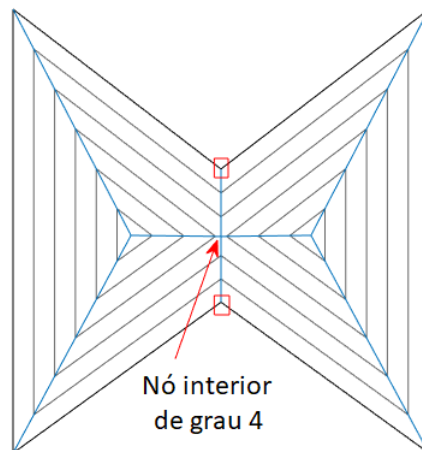


Fig. 2.11 Esqueleto retilíneo a azul. Curva poligonal a preto. Frentes de onda a cinzento. Os dois vértices reflexos assinalados são os envolvidos no evento de divisão múltipla.

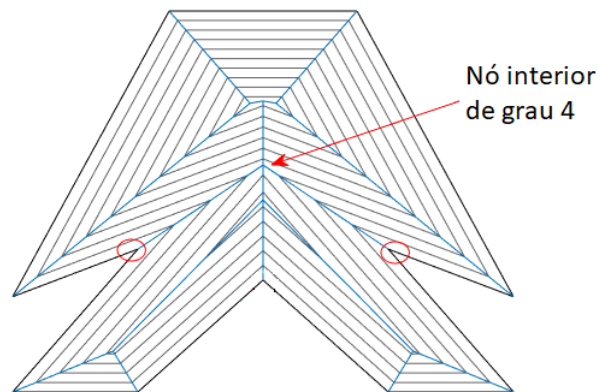


Fig. 2.12 Esqueleto retilíneo a azul. Curva poligonal a preto. Frentes de onda a cinzento. O nó interior, de grau quatro, assinalado é resultante do evento de vértice onde os dois vértices reflexos assinalados são intervenientes.

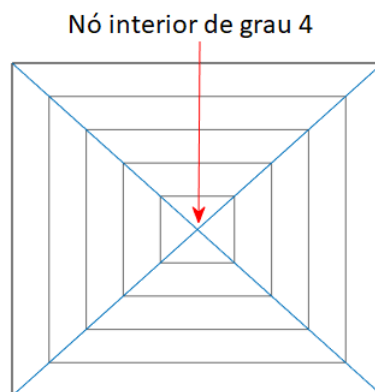


Fig. 2.13 Esqueleto retilíneo a azul. Curva poligonal a preto. Frentes de onda a cinzento.

Proposição 2.4.2. [1] *Seja P um polígono simples com n vértices. O grafo $S(P)$ é uma árvore com no máximo $n-2$ nós interiores e $2n-3$ arcos. Se P , polígono simples, for genérico, então o seu esqueleto retilíneo tem $n-2$ nós interiores e $2n-3$ arcos.*

Demonstração: Consideremos a face $f(e)$ da aresta e de P , resultante do processo de propagação de frente de onda. A face $f(e)$ não se divide, mesmo que um segmento de frente de onda gerado por e se divida. A construção desta face apenas fica concluída quando o segmento de frente de onda gerada pela aresta e se anula, pelo que $f(e)$ é uma face conexa. Se o grafo $S(P)$ fosse cíclico, significaria que a área do polígono interior a esse ciclo do grafo está, também ela, dividida em faces. Consequentemente existem arestas de P que pertencem ao interior desse ciclo do grafo, o que é impossível uma vez que o polígono é simples, não tem buracos. Portanto, $S(P)$ é acíclico. Ou seja, $S(P)$ é uma árvore com n folhas, que são os n vértices do polígono. Sendo $S(P)$ uma árvore com n folhas e m nós interiores, m_i , $i = 1, \dots, m$, então a árvore tem $n + m - 1$ arcos. Portanto, $n + 3m \leq n + \sum_{i=1}^m \text{grau}(m_i) = 2(n + m - 1)$, o que implica que $m \leq n - 2$ pois cada folha tem grau um e os nós interiores têm no mínimo grau três. Assim, $S(P)$ tem no máximo $n - 2$ nós interiores e no máximo $2n - 3$ arcos.

Se P for um polígono simples genérico, os nós interiores de $S(P)$ têm todos grau três, pelo que se tem a igualdade nas expressões anteriores. Consequentemente, $S(P)$ tem $n - 2$ nós interiores e $2n - 3$ arcos. \square

Para polígonos genéricos com buracos temos o seguinte resultado, que é baseado num outro presente em [8].

Proposição 2.4.3. *Seja P um polígono genérico com n vértices e h buracos. Então o esqueleto retilíneo de P , $S(P)$, tem $n + 2h - 2$ nós interiores e $2n + 3h - 3$ arcos.*

Demonstração: O esqueleto retilíneo $S(P)$ é um grafo planar com tantos ciclos quanto o número de buracos do polígono P . Assim, o número de faces do grafo será $1 + h$, ou seja, uma face por cada buraco e ainda a face não limitada. Seja a o número de arcos de $S(P)$ e m o número de nós interiores. Aplicando a $S(P)$ a fórmula de Euler para grafos planares, vem que $m + n - a + 1 + h = 2$ ou seja, $a = m + n + h - 1$. Sendo o polígono genérico, sabemos que cada nó interior tem grau três, assim $3n + m = 2a$, ou seja, $3n + m = 2(m + n + h - 1)$ e portanto o número de nós interiores de $S(P)$ é $n + 2h - 2$. Substituindo m na fórmula acima concluímos que o número de arcos de $S(P)$ é $2n + 3h - 3$. \square

No que se segue, iremos distinguir os tipos de arcos do esqueleto retilíneo de um polígono P arbitrário.

Aos arcos de $S(P)$ que resultam do colapso de segmentos da frente de onda paralelos designamos **arcos colapsados**. Excluindo este tipo de arcos, todos os outros arcos de $S(P)$ são bissetrizes de ângulos formados por dois segmentos de frente de onda. Seja a um arco de $S(P)$, cuja formação se iniciou a partir do vértice que s_1 e s_2 formam, e portanto está contido na bissetriz do ângulo definido pelos segmentos da frente de onda s_1 e s_2 . O arco a designa-se **arco convexo** se a pertencer ao interior do menor ângulo formado por s_1 e s_2 . Caso contrário designa-se **arco reflexo**. Assim, vértices convexos da frente de onda dão origem a arcos convexos de $S(P)$ e vértices reflexos da frente de onda originam arcos reflexos de $S(P)$.

Seguidamente vamos provar que, para polígonos genéricos, todos os arcos reflexos dos seus esqueletos retilíneos são incidentes em vértices reflexos de P .

Proposição 2.4.4. [1] *Todos os arcos reflexos que constituem um esqueleto retilíneo $S(P)$, com P um polígono genérico, são incidentes em vértices reflexos de P .*

Demonstração: Temos de provar que, todo o arco de $S(P)$ que estabelece a ligação entre dois nós interiores, é um arco convexo. Ora, em polígonos genéricos, os únicos eventos que dão origem a novos vértices da frente de onda são os eventos de aresta simples e os eventos de divisão simples.

Suponhamos que z é um nó interior resultante de um evento de aresta, onde a aresta xy desapareceu. Então, os arcos xz e yz intersejam-se no nó z . Após este evento, o processo de propagação de frente de onda continua, com z sendo um vértice convexo da frente de onda pelo que, o terceiro arco que irá incidir em z será um arco convexo.

Suponhamos agora que z é um nó interior resultante de um evento de divisão. A continuação do processo de propagação após este evento dá-se com z sendo um vértice convexo nas duas frentes de onda entretanto formadas. Assim, os arcos que irão incidir em z , resultantes desta continuação do processo de propagação, serão dois arcos convexos. \square

As principais propriedades relativas a esqueletos retilíneos de polígonos estão apresentadas. Na seção que se segue iremos apresentar os principais passos do algoritmo que permite o cálculo do esqueleto retilíneo de polígonos.

2.5 Abordagem computacional

Os exemplos que aqui têm sido apresentados são resultado da execução do código implementado na biblioteca CGAL, no pacote '*straight_skeletons_2*' [9], que permite traçar com eficácia as curvas *mitered offset* e o esqueleto retilíneo quer de polígonos simples, quer de polígonos com buracos. Apenas foi necessário fazer o interface com o MATLAB. O algoritmo implementado em CGAL é essencialmente o mesmo que Felkel publicou em [13] com a inserção dos eventos de divisão múltipla descritos em [12], onde são chamados de *vertex events*.

De forma esquemática, o algoritmo pode ser explicado da seguinte forma [9]:

1. Inicialização:

Cálculo dos instantes dos possíveis eventos e criação de uma fila de prioridades onde os eventos são ordenados pelos seus instantes de ocorrência.

- i. Determinar eventos de aresta: para cada aresta do polígono, calcular o instante de interseção das duas bissetrizes que lhe são adjacentes.
- ii. Determinar eventos de divisão simples: para todos os pares de vértices reflexos e de arestas do polígono, calcular o instante de interseção da bissetriz do ângulo interno do vértice reflexo com o segmento da frente de onda emitido pela aresta.
- iii. Determinar eventos de divisão múltipla: para cada par de vértices reflexos do polígono, calcular o instante de interseção das suas bissetrizes.

2. Propagação:

- i. Tratar o evento da frente da fila.
- ii. Atualizar a lista de eventos possíveis e a fila de prioridades.

Enquanto a fila de prioridades não estiver vazia, repetir os passos em 2, considerando o(s) novo(s) polígono(s) resultante(s) do passo 2.

2.6 Aplicações dos esqueletos retilíneos

Nesta secção descrevemos algumas aplicações dos esqueletos retilíneos, como é o caso da construção de telhados, da reconstrução de terrenos a partir de um mapa que delimite costas e lagos e dos origamis, mais precisamente o problema da dobra e do corte.

2.6.1 Telhados

Começamos por falar de uma aplicação dos esqueletos retilíneos que foi introduzida por Aichholzer et al. [2] e que envolve uma interpretação de esqueleto retilíneo a três dimensões. Estamos a falar do recurso a esqueletos retilíneos para a construção de telhados sobre estruturas poligonais. Numa linguagem corrente, podemos entender as arestas do polígono P como sendo paredes exteriores da estrutura que se pretende cobrir com um telhado.

No que se segue será feita uma definição de telhado de um polígono arbitrário P .

Definição 2.6.1. *Um telhado para P é um gráfico de uma função contínua e seccionalmente linear de domínio P , contido na união dos semi-planos definidos por cada uma das arestas do polígono. Tais semi-planos têm todos uma inclinação fixa θ , digamos $\theta = 45^\circ$, relativamente ao plano xOy . A interseção de um telhado com o plano xOy é precisamente a curva poligonal de P .*

Estamos interessados em telhados com a propriedade fundamental de serem estruturas sem mínimos locais. Esta propriedade está relacionada com a exigência de que estas estruturas permitam que a água da chuva escorra pelas suas faces. Consequentemente não poderão haver pontos onde a água se acumule.

A construção de um telhado para um polígono, com base no seu esqueleto retilíneo, leva o processo de propagação de frente de onda para um espaço de três dimensões, como de seguida veremos.

Definição 2.6.2. *Dado um polígono P arbitrário, o processo de propagação de frente de onda a três dimensões define, ao longo do tempo, um telhado de P , $T(P)$ tal que*

$$T(P) = \bigcup_{t \geq 0} W_P(t) \times \{t\}.$$

A $T(P)$ chamamos telhado baseado no esqueleto retilíneo.

Mais concretamente, dado um ponto $(x, y, t) \in T(P)$, a coordenada t corresponde ao primeiro instante em que a frente de onda atinge o ponto $(x, y) \in P$. Repare-se que, sendo a velocidade de propagação da frente de onda unitária, a inclinação das faces de $T(P)$ relativamente ao plano xOy

é de θ . Note-se ainda que, quando $t = 0$, $T(P)$ coincide com a curva poligonal do polígono P , e que qualquer reta perpendicular ao plano xOy , intersesta o telhado $T(P)$ no máximo uma vez. Ver ilustração na Figura 2.14.

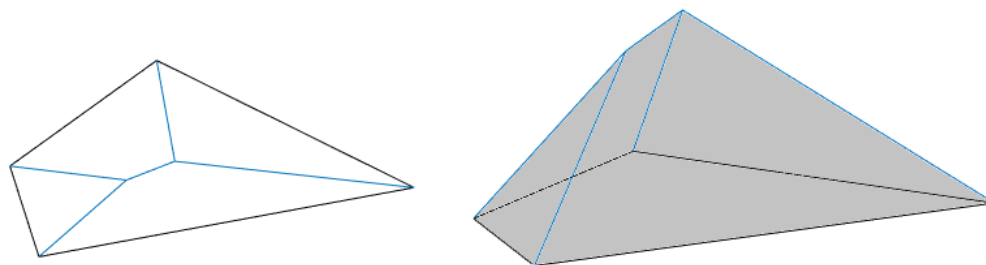


Fig. 2.14 À esquerda está representado, a azul, o esqueleto retilíneo do polígono. À direita estão as faces do telhado baseado no esqueleto retilíneo a cinzento e as suas arestas a azul.

Dado o telhado $T(P)$, é possível obter $S(P)$ através da projeção no plano xOy das arestas de $T(P)$. Note que $S(P)$ assim definido é único. De modo inverso, partindo de $S(P)$, esqueleto retilíneo de P , é possível obter $T(P)$, elevando os nós interiores de $S(P)$ a uma distância do plano xOy coincidente com o instante de ocorrência dos respetivos eventos que lhe estão associados. Há portanto uma correspondência unívoca entre $T(P)$ e $S(P)$.

Chamamos **vale de um telhado** às arestas do telhado a partir das quais sobem as duas faces nelas incidentes. Designamos **cumeeira de um telhado** às arestas do telhado a partir das quais descem as duas faces nelas incidentes. Atendendo a estas designações, convém notar que arcos convexos e arcos colapsados de $S(P)$ dão origem a cumeeiras de $T(P)$ e arcos reflexos dão origem a vales de $T(P)$.

O resultado seguinte diz-nos que, os telhados baseados no esqueleto retilíneo não têm mínimos locais, ou seja impedem a acumulação de águas da chuva.

Proposição 2.6.1. *Dado um polígono P arbitrário, o telhado baseado no seu esqueleto retilíneo, $T(P)$, não tem mínimos locais no seu interior.*

Demonstração: Suponhamos que $T(P)$ tem um nó interior que é mínimo local. Então isso implica que nesse nó incide pelo menos um arco reflexo não incidente em nenhum vértice de P . Todos os arcos reflexos de $T(P)$, que não incidem em nenhum vértice do polígono, resultam de eventos de vértice, o que implica que a aresta correspondente no telhado desça em direção a duas outras arestas reflexas também elas descendentes. Aplicando o raciocínio indutivamente vemos que de toda a aresta reflexa parte um caminho descendente até a um vértice de P , não podendo, por isso, haver mínimos locais no interior de $T(P)$. \square

Em [2] é provado, para polígonos genéricos, que todo o telhado diferente do telhado baseado no esqueleto retilíneo tem um vale que não é incidente em nenhum vértice do polígono. Considerando polígonos arbitrários, iremos provar algo mais fraco. Provaremos que o telhado baseado no esqueleto retilíneo é o único com a propriedade das suas faces terem como mínimo local uma aresta do polígono.

Proposição 2.6.2. *Seja P um polígono arbitrário. O telhado para P baseado no seu esqueleto retilíneo, $T(P)$, é o único em que cada uma das suas faces tem como mínimo local uma aresta de P .*

Demonstração: Cada uma das arestas de P dá origem a uma face de $T(P)$ e este telhado não tem mínimos locais no seu interior, tal como vimos na Proposição 2.6.1. Suponhamos, que existe um outro telhado para P , digamos $R(P)$, que é diferente de $T(P)$. Durante o processo de formação de $R(P)$, consideremos o primeiro evento que o torna diferente de $T(P)$, e seja c o vértice de $R(P)$ associado a esse acontecimento. A partir de c irá desenvolver-se uma face do telhado, para a qual c será mínimo local. Fica então provado que $T(P)$ é o único telhado para P que verifica esta propriedade. \square

A proposição que acabamos de demonstrar dá-nos uma definição alternativa de esqueleto retilíneo. Esta é uma definição estática que não necessita do processo dinâmico de propagação de frente de onda.

Por fim, vamos introduzir uma propriedade referida em [2] como a propriedade do gradiente.

Propriedade 2.6.1 (Propriedade do gradiente). *Seja $T(P)$ o telhado para um polígono P baseado no seu esqueleto retilíneo. Seja $g(x)$ um caminho com início em $x \in T(P)$ e que segue, em cada ponto, o gradiente de descida mais íngreme do telhado. Dizemos que uma face f de $T(P)$ verifica a propriedade do gradiente se, para todo o ponto x em f , $g(x)$ termina na aresta que define a face f .*

Considerando telhados para polígonos genéricos baseados no seu esqueleto retilíneo, todas as faces destes verificam a propriedade do gradiente. A prova deste resultado encontra-se em [2]. Para polígonos arbitrários, esta propriedade pode falhar, como é o caso do polígono apresentado na Figura 2.12.

2.6.2 Ilhas: reconstrução de terrenos

Uma outra aplicação dos esqueletos retilíneos a três dimensões, que muito se assemelha aos telhados discutidos anteriormente, é a reconstrução de terrenos [3]. Mais especificamente, dado um mapa, polígono P , onde a costa e os lagos estão delimitados através de curvas poligonais, há interesse em reconstruir um terreno para esta área. Uma abordagem, com vista a solucionar este problema, passa por interpretar o telhado baseado no esqueleto retilíneo como uma ilha, como ilustrado na Figura 2.15.

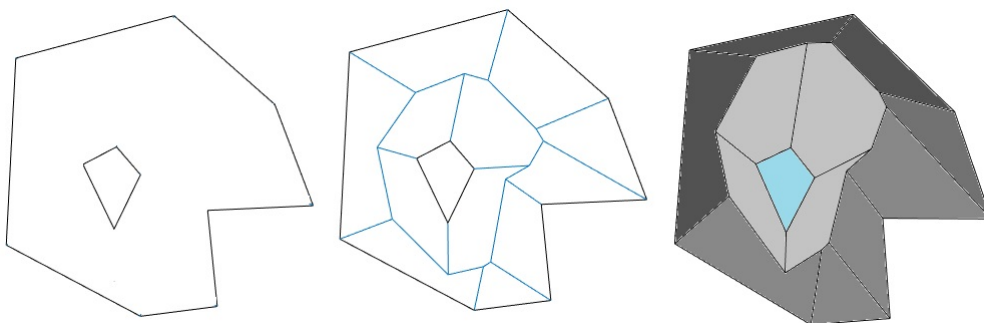


Fig. 2.15 Mapa à esquerda. Ao centro esqueleto retilíneo do mapa. À direita, reconstrução do terreno correspondente ao mapa.

2.6.3 Origami: Problema da dobra e corte

Uma outra aplicação do esqueleto retilíneo é o origami, mais precisamente o problema da dobra e do corte (*fold-and-cut*). Este problema foi proposto por Gardner em 1995 [14] e consiste no seguinte: dada uma folha de papel, tipicamente no formato de um quadrado, e sendo apenas permitido fazer uma sequência de dobras na folha, ao longo de linhas retas, e um único corte reto final com uma tesoura, decidir se é possível obter uma determinada imagem desejada, e em caso afirmativo mostrar como o fazer. A Figura 2.16, retirada de [11], ilustra como obter uma estrela de cinco pontas através de uma sequência de dobras e com um corte final.

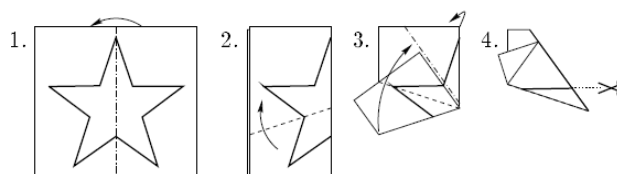


Fig. 2.16 Sequência de dobras e corte final que permitem obter uma estrela de cinco pontas.

O problema foi resolvido pela positiva e os resultados foram apresentados em [11].

Teorema 2.6.1. "Fold and one-cut" [11] *Qualquer desenho, numa folha de papel, composto por segmentos retos, pode ser dobrado de forma a que um corte reto com uma tesoura, corte apenas ao longo de todos os segmentos retos desenhados e nada mais.*

O esqueleto retilíneo desempenha um papel fundamental na determinação das dobras a efetuar e na demonstração do Teorema 2.6.1. Em particular, as linhas a dobrar coincidem com os arcos do esqueleto retilíneo do desenho. Contudo, estas dobras não são suficientes, pelo que outras dobras terão de ser incluídas. Assim, adicionamos algumas dobras perpendiculares aos segmentos de reta que constituem o desenho e que têm origem nos nós interiores do esqueleto retilíneo. Para uma leitura mais acessível deste tópico consultar [17]. A Figura 2.17, retirada de [10], exemplifica o processo de dobras descrito para polígonos simples.

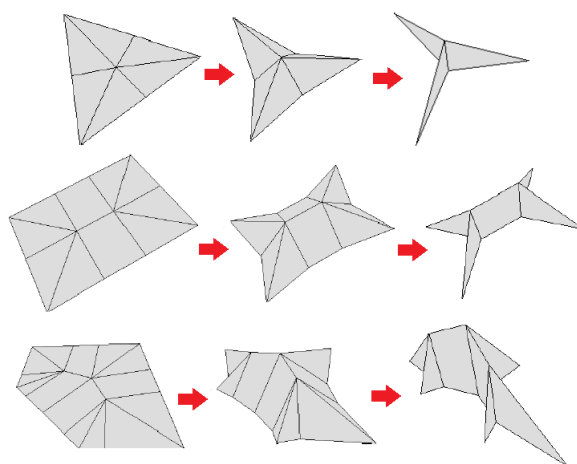


Fig. 2.17 Polígonos obtidos pelo processo *fold-and-cut*.

No Anexo A encontra-se uma figura que pode ser usada em jeito de experimentação do problema da dobra e do corte. Nessa figura, todas as possíveis dobras estão assinaladas, ou seja os arcos do esqueleto retilíneo e todas as perpendiculares, apesar de nem todas serem necessárias. Existindo várias formas de dobrar o papel de modo a obter o polígono da figura em anexo, apresentamos apenas uma delas, assinalando a cinzento as dobras que não são usadas, a vermelho as dobras para dentro e a azul as dobras para fora.

Capítulo 3

Esqueletos retilíneos de poliedros

Neste capítulo vamos discutir o conceito de esqueleto retilíneo no espaço, mais concretamente o conceito de esqueleto retilíneo de um poliedro. Começamos por introduzir o conceito de poliedro, uma vez que é importante ter uma definição rigorosa. Seguidamente introduzimos um processo análogo ao processo de propagação de frente de onda, definido no caso dos polígonos, que denominamos de processo de encolhimento de poliedros. Posteriormente apresentamos a definição de esqueleto retilíneo de poliedros e um exemplo que ilustra a ambiguidade desta. Vamos também descrever um método que permite obter, para cada poliedro, um esqueleto retilíneo de forma única. Os eventos associados à construção do esqueleto retilíneo de poliedros genéricos são categorizados e exemplificados. Terminamos com resultados provenientes do estudo da combinatória dos esqueletos retilíneos de poliedros.

3.1 Conceitos introdutórios

Começamos por introduzir a definição de poliedro, que pretende ser bastante abrangente.

Definição 3.1.1. *Um poliedro é um subconjunto de \mathbb{R}^3 limitado, que é o fecho do seu interior, sendo o interior conexo, e cuja fronteira é uma união finita de polígonos.*

Procedemos de seguida à descrição dos elementos que compõe um poliedro.

Uma **face** é um polígono maximal contido na fronteira do poliedro.

Os **vértices** do poliedro correspondem aos pontos de interseção de pelo menos três faces, cujos planos que as contêm não são paralelos a nenhuma reta comum.

Aos segmentos de reta onde duas faces, que delimitam um ângulo interno do poliedro, se interseccionam chamamos **arestas** do poliedro. Se duas faces, nas condições referidas, se interseccionarem em dois ou mais segmentos disjuntos, estes serão contabilizados como arestas distintas. Se existirem vértices do poliedro no interior relativo da interseção, consideramos que estes a dividem em arestas distintas.

Na Figura 3.1 apresentamos alguns exemplos de poliedros. O poliedro *A* tem duas arestas assinaladas com cores distintas, querendo com isto evidenciar que, mesmo sendo a interseção do mesmo par de faces, são consideradas arestas distintas. No poliedro *B*, os três segmentos assinalados com cores distintas são três arestas diferentes, sendo que a aresta a verde resulta da interseção de um par de faces diferente do das outras duas. No poliedro *C*, as duas arestas assinaladas, apesar de

resultarem da interseção do mesmo par de faces, são consideradas distintas, isto porque há um vértice a separá-las. Em *D* assinalamos uma das faces, pretendendo com isto chamar a atenção para a não separação da face em questão entre a parte de baixo do poliedro e a parte de cima. Em *E*, assinalamos quatro arestas incidentes num mesmo vértice. No poliedro *F*, a aresta assinalada resulta da interseção de dois pares de faces, no entanto é contabilizada como uma só aresta.

A Figura 3.2 tem presente quatro exemplos que não são poliedros, isto porque nos casos *A* e *B* o interior não é conexo e no caso *C* e *D* o fecho do interior não é a totalidade da estrutura.

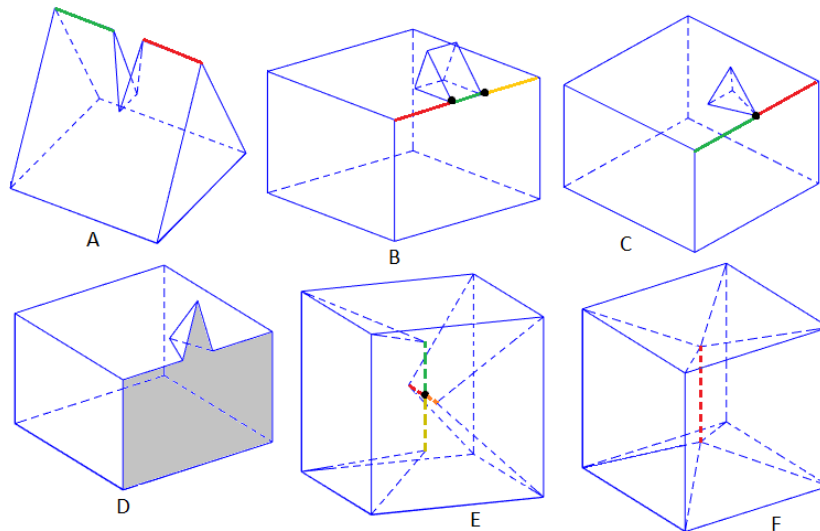


Fig. 3.1 Exemplos de sólidos que verificam a Definição 3.1.1 e portanto são poliedros.

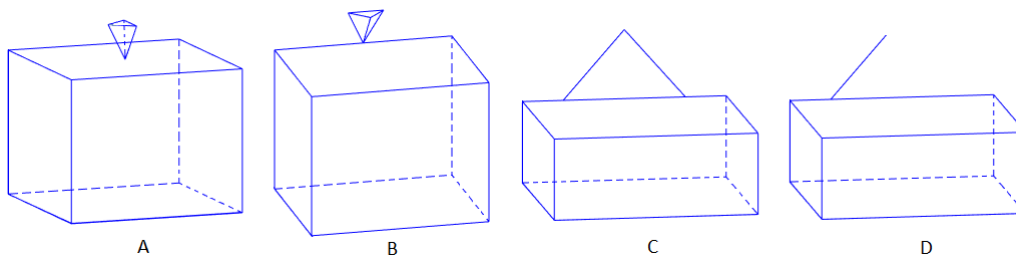


Fig. 3.2 Exemplos de sólidos que não verificam a Definição 3.1.1 e portanto não são poliedros.

Classificamos as arestas de um poliedro em arestas **convexas** e **reflexas**. Uma aresta diz-se convexa se o ângulo interno entre as duas faces que a definem for inferior a π . Se tal ângulo for superior a π , a aresta diz-se reflexa.

Os vértices podem ser classificados em **vértices de contacto**, **vértices pontiagudos**, **vértices convexos** e **vértices reflexos**, como definimos em seguida.

Definição 3.1.2. [6] *Um vértice diz-se de contacto se existe algum $\varepsilon > 0$ tal que todas as bolas de raio $r \leq \varepsilon$, centradas nesse vértice, intersectam a fronteira do poliedro num conjunto que é desconexo.*

Um vértice diz-se pontiagudo se existe alguma bola centrada nele cuja interseção com o poliedro está toda ela contida no mesmo hemisfério aberto da bola.

Um vértice diz-se convexo se nele incidirem apenas arestas convexas e não for de contacto.

Um vértice diz-se reflexo se nele incidirem apenas arestas reflexas e não for de contacto.

Notemos que um vértice convexo é um vértice pontiagudo mas um vértice reflexo não é um vértice pontiagudo.

Em seguida definimos poliedro genérico.

Definição 3.1.3. *Um poliedro diz-se genérico se, considerando os planos que definem as faces do poliedro, não existir nenhum ponto à mesma distância de cinco destes planos e não existir nenhuma reta paralela a três destes planos.*

Note-se que, na eventualidade de haver um plano que define duas ou mais faces do poliedro, este será contabilizado apenas uma vez.

Da definição de polígono genérico podemos retirar a seguinte observação: dados quaisquer três planos que contêm faces do poliedro, o espaço linear gerado pelos seus vetores normais é o espaço todo.

Um poliedro diz-se **convexo** se, dada qualquer uma das suas faces, o poliedro está todo contido no mesmo semi-espaço definido pelo plano que contém essa mesma face. Caso contrário estamos perante um **poliedro não convexo**.

No caso dos poliedros convexos, é fácil definir esqueletos retilíneos pois coincidem com os seus eixos mediais, [6]. No entanto, poliedros não convexos são casos bastante complexos relativamente ao cálculo do seu esqueleto retilíneo.

Vamos restringir o nosso estudo apenas a poliedros que são genéricos e cujos vértices têm apenas três arestas incidentes e, conseqüentemente, três faces.

3.2 Processo de encolhimento de poliedros

O primeiro método, para determinar o esqueleto retilíneo de um poliedro, foi introduzido por Barequet et al. [7]. Contudo este método apenas resolvia casos em que o poliedro era formado por cubos, designados pelo autor por *voxels* e casos em que todas as faces do poliedro são paralelas a dois eixos coordenados. Assim, houve necessidade de criar um outro método que permitisse determinar o esqueleto retilíneo de poliedros mais gerais. Aurenhammer e Walzl [5] apresentaram a ideia de aplicar em poliedros um processo semelhante ao processo de propagação de frente de onda usado na construção do esqueleto retilíneo de polígonos. A este processo definido para poliedros chamamos **processo de encolhimento**.

Neste processo de encolhimento, definido em poliedros, o que acontece é que cada face do poliedro gera uma outra paralela a si que se desloca com velocidade unitária para o interior do poliedro. Aos planos que contêm cada uma das faces deslocadas chamamos **planos offset**. Estas faces deslocadas definem, a cada instante, um outro poliedro, designado de **poliedro offset**. Notemos que quando um plano *offset* deixa de contribuir com faces no poliedro *offset*, os poliedros que se sucedem também não terão faces contidas no referido plano *offset*. Durante o processo de encolhimento, os vértices dos poliedros *offset* movem-se na respetiva **linha trissetora** definida pelas três faces que definem cada um deles. Mais precisamente, uma linha trissetora corresponde à interseção de três planos bissetores. Por sua vez, as arestas dos poliedros *offset* movem-se ao longo do respetivo **plano bissetor** determinado

pelas duas faces que definem cada uma das arestas. Durante o processo de encolhimento de um poliedro, há instantes em que se formam vértices dos poliedros *offset* pelos quais passam mais de três planos *offset*. A estes instantes designamos **eventos**, os quais iremos analisar com bastante pormenor mais adiante. No caso genérico, nos vértices que se formam no instante de ocorrência de cada evento passam exatamente quatro planos *offset*.

Quando estamos perante uma situação de ocorrência de um evento, onde temos quatro planos a definir um vértice, não sabemos qual o poliedro *offset* que resulta do movimento destes quatro planos, nas vizinhanças do vértice referido. Assim, torna-se necessário definir um método que indique qual o poliedro *offset* que sucede o evento. Com esse propósito, iremos recorrer a polígonos esféricos e seus grafos bissetores cujos conceitos iremos introduzir.

3.2.1 Figura de vértice, polígonos esféricos e grafos bissetores

O problema de resolução de eventos é um problema localmente associado a vértices. Assim, o interesse do nosso estudo vai focar-se na vizinhança do vértice do poliedro *offset* pelo qual passam quatro planos, e que localiza a ocorrência do evento. O restante não é alterado, ou seja, as direções de deslocamento dos restantes vértices e arestas são mantidas.

Consideremos um poliedro genérico e um dos vértices de um seu poliedro *offset* pelo qual passam quatro planos, que denotamos por v . Vamos fazer o estudo do poliedro, nas vizinhanças de v , através do estudo da **figura de vértice cónica** deste vértice, $\mathcal{F}(v)$. A figura de vértice cónica de v corresponde ao cone poliédrico obtido considerando o poliedro, tendo apenas em conta as faces e as arestas que incidem em v , prolongando-as, tornando-as infinitas. Apresentamos de seguida a definição da figura de vértice e na Figura 3.3 apresentamos uma ilustração.

Definição 3.2.1. Consideremos um vértice v de um poliedro Q . A figura de vértice cónica de v é $\mathcal{F}(v) = \{v + d : \exists \varepsilon \text{ tal que } \forall \delta < \varepsilon, v + \delta d \in Q\}$.

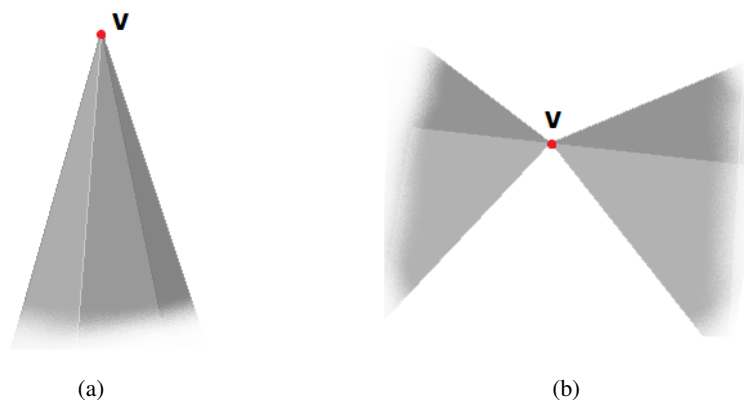


Fig. 3.3 Duas figuras de vértice cónicas: (a) $\mathcal{F}(v)$ com v não sendo vértice de contacto; (b) $\mathcal{F}(v)$ com v vértice de contacto.

A fronteira de $\mathcal{F}(v)$ é constituída por faces infinitas, tantas quantas as incidentes em v no momento do evento, que definimos por f_i , $i = 1, \dots, \text{grau}(v)$. Obviamente que cada face f_i de $\mathcal{F}(v)$ está contida num plano *offset* do poliedro, digamos H_i^Δ , sendo Δ o instante do evento.

Uma propriedade importante é que qualquer *offset* de $\mathcal{F}(v)$, definido no instante imediatamente após o evento e segundo o processo de encolhimento, dá origem a um grafo esférico. De facto, a projecção radial das arestas de qualquer *offset* de $\mathcal{F}(v)$ na superfície esférica E , de centro v e raio unitário define um grafo no interior de $\mathcal{F}(v) \cap E$. Notemos que a projecção radial de um ponto P sobre uma determinada superfície esférica de centro C corresponde ao ponto onde a semirreta $\overset{\bullet}{C}P$ intersesta essa superfície esférica.

À interseção da figura de vértice cónica com a superfície esférica E , de centro v e que estamos a admitir ter raio unitário, chamamos **polígono esférico** associado a v e denotamos por \mathcal{P}_v . Na verdade, da interseção de $\mathcal{F}(v)$ com E pode resultar mais do que um polígono esférico (vértice da Figura 3.3 (b)) e, nesse caso, estes podem intersestar-se entre si em um ou mais pontos. Contudo na tentativa de simplificar a linguagem e a notação iremos considerar que apenas um único polígono esférico \mathcal{P}_v é definido. Se existir mais do que um podemos tratar cada um deles separadamente.

No contexto em que nos encontramos os vértices do polígono esférico \mathcal{P}_v correspondem à interseção das arestas da figura de vértice cónica de v com a superfície esférica E . As arestas de \mathcal{P}_v correspondem à interseção das faces de $\mathcal{F}(v)$ com a superfície esférica.

Uma vez que é mais simples o estudo de grafos do que o estudo de *offsets* de poliedros ou de figuras de vértices, torna-se preferível a resolução de eventos por meio de grafos. Esta foi uma ideia sugerida por Aurenhammer et al. em [5] e que ilustramos na Figura 3.4.

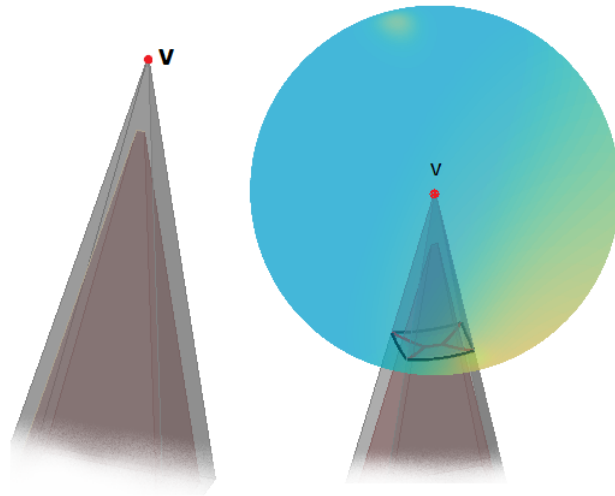


Fig. 3.4 Figura de vértice cónica e um *offset* seu à esquerda. À direita temos o respetivo polígono esférico assinalado a preto e o grafo associado ao *offset* assinalado a vermelho.

No que se segue iremos abordar as características destes grafos esféricos, obtidos por projecção radial dos *offsets* de $\mathcal{F}(v)$.

Uma vez que a figura de vértice é constituída por um número de faces igual a $grau(v)$, então temos $\binom{grau(v)}{2}$ planos bissetores definidos, e todos eles passam em v . Denotamos por B_{ij} o plano bissetor formado pelos planos H_i^Δ e H_j^Δ , com Δ o instante de ocorrência do evento, e por b_{ij} a interseção de B_{ij} com E , com $i \neq j \in \{1, \dots, grau(v)\}$, que corresponde a um arco máximo da superfície esférica E . Assim, as arestas que formam o tal grafo, definido no interior de \mathcal{P}_v , estão contidas, todas elas, em arcos máximos b_{ij} , pois a projecção radial, em E , de qualquer aresta que pertença ao plano B_{ij} está

contida em b_{ij} . Estes grafos não têm cruzamentos, mas podem ser desconexos e podem conter ciclos. Existem grafos esféricos que têm faces totalmente limitadas por outras faces, designadas **faces órfãs** [6]. Estes não são do nosso interesse, uma vez que isso daria origem a uma nova face no poliedro *offset*.

Adicionalmente, o grafo esférico definido por um *offset* da figura de vértice cônica, possui vértices interiores de grau igual ou superior a três, resultado da interseção entre três ou mais planos *offset* aquando do processo de encolhimento na figura de vértice cônica. Quanto aos vértices de grau um do grafo, estes coincidem com os vértices de \mathcal{P}_v , uma vez que estamos a considerar as arestas de $\mathcal{F}(v)$ infinitas.

Definição 3.2.2. *Dado um polígono genérico e um seu vértice v , um grafo bissetor de v é um grafo contido em \mathcal{P}_v obedecendo às seguintes restrições: cada aresta do grafo está contida num círculo máximo b_{ij} , onde b_{ij} é a interseção com a superfície esférica do plano bissetor aos planos que contêm as arestas i e j de \mathcal{P}_v ; cada b_{ij} contém no máximo uma aresta do grafo; o grafo não tem cruzamentos; o grafo tem vértices de grau um que coincidem com os vértices de \mathcal{P}_v , e vértices interiores de grau três; em cada vértice interior do grafo, as arestas nele incidentes são do tipo a_{ij} , a_{jk} , a_{ki} .*

Tendo em conta a definição anterior, resta acrescentar que os grafos definidos por qualquer *offset* da figura de vértice cônica, associados a um vértice v de um poliedro genérico pelo qual passam quatro planos, são grafos bissetores do polígono esférico definido por $\mathcal{F}(v)$, como provamos de seguida.

Proposição 3.2.1. *Consideremos um poliedro genérico e um vértice v de um seu poliedro *offset*, que localiza a ocorrência de um evento. Consideremos a figura de vértice cônica associada a v , $\mathcal{F}(v)$. Qualquer *offset* de $\mathcal{F}(v)$ define, por projeção radial, um grafo bissetor para \mathcal{P}_v .*

Demonstração: Todas as restrições da definição de grafo bissetor são triviais de provar, excepto que os vértices interiores do grafo definido por um *offset* de $\mathcal{F}(v)$ têm todos grau três.

Denotemos por H_i^Δ , $i = 1, \dots, 4$ os quatros planos que se intersejam no vértice v , com Δ o instante do evento. Não existem vértices de grau dois porque como foi dito, cada vértice interior do *offset* de $\mathcal{F}(v)$ resulta do encontro de três planos *offset*, no mínimo, e portanto da sua projeção radial não pode resultar um vértice de grau dois.

Suponhamos agora que existe um vértice do grafo definido pelo *offset* de $\mathcal{F}(v)$, com grau quatro, que denotamos por w . Isto implica que, no vértice correspondente do *offset* de $\mathcal{F}(v)$, se intersejam os planos $H_i^{\Delta+\varepsilon}$, $i = 1, \dots, 4$, com $\Delta + \varepsilon$ o instante em que o *offset* de $\mathcal{F}(v)$ é definido e Δ o instante do evento que o vértice v sinaliza. Consequentemente, todos os pontos da reta que w e v definem no espaço, e que denotamos por r , estão à mesma distância dos quatro planos, H_i^Δ , $i = 1, \dots, 4$. Tenhamos ainda em conta o poliedro *offset* que contém o vértice v e a face deste que a recta r interseta. Denotamos por H_5^Δ o plano que contém essa face e por u o ponto onde r a interseta.

Consideremos duas funções distância, contínuas, definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} d_1 : r &\longrightarrow \mathbb{R} & d_2 : r &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow d(x, H_i^\Delta), i = 1, \dots, 4 & x &\longrightarrow d(x, H_5^\Delta) \end{aligned}$$

Notemos que $d_1(v) = 0$ e $d_1(u) > 0$ e que $d_2(u) = 0$ e $d_2(v) > 0$. Pelo Teorema do valor médio, existe um ponto y pertencente ao segmento de reta $[vu]$ tal que $d_1(y) = d_2(y)$, ou seja, o ponto y está à mesma distância dos planos H_i^Δ , $i = 1, \dots, 5$. Isto contradiz a definição de poliedro genérico. \square

Fazendo um raciocínio inverso, ou seja, partindo de qualquer grafo bissetor definido no polígono esférico $\mathcal{P}(v)$, este corresponde a um único *offset* válido para $\mathcal{F}(v)$ [5]. A prova desta proposição será apresentada de seguida. Observemos que nos estamos a referir a conceitos associados a poliedros genéricos.

Proposição 3.2.2. [5] *Todo o grafo bissetor para o polígono esférico \mathcal{P}_v define um único offset para a figura de vértice cónica $\mathcal{F}(v)$.*

Demonstração: Consideremos um qualquer grafo bissetor definido em \mathcal{P}_v . Seja a_{ij} um arco do grafo que está contido em b_{ij} . Elevamos a_{ij} até à linha l_{ij} , por projeção central sendo o vértice v o centro da projeção, e onde l_{ij} correspondente à interseção entre os planos *offset* $H_i^{\Delta+\varepsilon}$ e $H_j^{\Delta+\varepsilon}$. Observemos que estamos a considerar o *offset* no instante $\Delta + \varepsilon$, sendo que Δ corresponde ao instante de ocorrência do evento. A projeção central de qualquer ponto P , contido no arco a_{ij} , na linha l_{ij} com v o centro da projeção, corresponde à interseção da reta Pv com a linha l_{ij} . Notemos que esta projeção central na linha l_{ij} pode ser feita porque a_{ij} , l_{ij} e o vértice v são coplanares, estão contidos no plano bissetor definido pelos planos H_i e H_j . Repetindo este procedimento para todos os arcos do grafo, obtemos as arestas que definem o *offset* da figura de vértice e que obviamente estão contidas nas linhas l_{ij} , com $i \neq j \in \{1, \dots, \text{grau}(v)\}$.

Cada face conexa do grafo, por projeção central dos arcos que a definem, resulta num polígono definido em \mathbb{R}^3 , pois as arestas que o definem estão todas contidas no mesmo plano *offset*. O grafo bissetor define uma única superfície linear por partes, cujas faces são definidas continuamente. Isto porque cada aresta a_{ij} do grafo é projetada em l_{ij} e portanto pertence a ambos os planos $H_i^{\Delta+\varepsilon}$ e $H_j^{\Delta+\varepsilon}$ e porque cada vértice do grafo resulta da interseção de b_{ij} , b_{jk} e b_{ki} sendo projetado na interseção l_{ij} , l_{jk} e l_{ki} . \square

Em algumas situações, para uma figura de vértice existe mais que um grafo bissetor para o polígono esférico correspondente, ou seja, é possível definir mais que um *offset* para $\mathcal{F}(v)$. Consequentemente, temos mais que um poliedro *offset* a suceder um evento. Isto permite-nos concluir que, nestas situações, o esqueleto retilíneo do poliedro não é único.

3.2.2 Definição de esqueletos retilíneos de poliedros e sua ambiguidade

Após os detalhes relativos ao processo de encolhimento de um poliedro, apresentados anteriormente, estamos em condições de definir os elementos que compõe o esqueleto retilíneo de um poliedro: os **arcos**, as **faces** e os **nós**.

Definição 3.2.3. *Os arcos do esqueleto retilíneo de um poliedro correspondem ao traçado que os vértices dos poliedros *offset* fazem ao deslocarem-se durante o processo de encolhimento. As faces do esqueleto retilíneo correspondem à região varrida pelas arestas dos poliedros *offset*. Os nós do esqueleto retilíneo são vértices que localizam a ocorrência de eventos.*

Note-se que os vértices e as arestas do poliedro fazem também parte do esqueleto retilíneo. A estes vértices chamamos **nós exteriores**. Estas arestas fazem parte da constituição das faces do esqueleto, mas não são contabilizadas como arcos.

A Figura 3.5 tem presente um exemplo do esqueleto retilíneo de um poliedro.

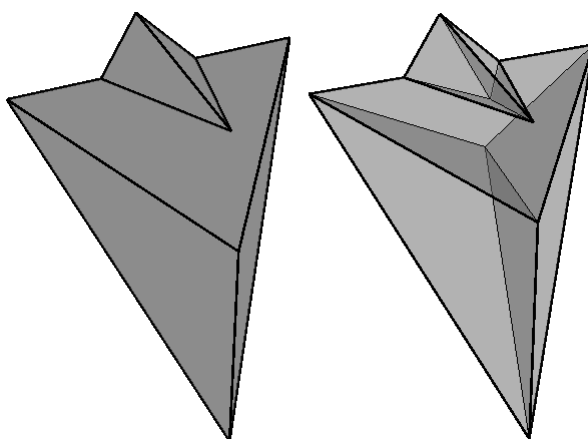


Fig. 3.5 O poliedro encontra-se à esquerda e o respetivo esqueleto retilíneo encontra-se à direita.

Como anteriormente referido, uma diferença relevante do processo de encolhimento de poliedros relativamente ao processo definido para polígonos é que este não é único quando estamos em três dimensões. Isto deve-se à existência de polígonos esféricos com mais que um grafo bissetor associado. Note-se que esta ambiguidade apenas existe em poliedros não convexos, pois o esqueleto retilíneo de poliedros convexos, como foi já dito, coincide com o eixo medial e portanto é único [6].

Mais concretamente, consideremos um vértice de um poliedro *offset* que seja de grau quatro, no qual incidem duas arestas convexas e duas reflexas e que não é pontiagudo, tal como exemplificado na Figura 3.6. Note-se que as arestas incidentes neste vértice geram o espaço \mathbb{R}^3 , ou seja, o cone convexo gerado por estas arestas é o espaço todo, considerando para o efeito as arestas orientadas a partir do vértice.

O polígono esférico definido nas vizinhanças do vértice da Figura 3.6 tem dois grafos bissetores associados, apresentados na Figura 3.7. Assim, o processo de encolhimento definido nas vizinhanças deste vértice é ambíguo, tal como podemos verificar na Figura 3.8, pois existem duas formas distintas de deslocar os quatro planos *offset*.

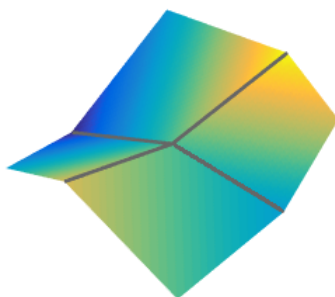


Fig. 3.6 Vértice que não é pontiagudo de um poliedro no qual incidem duas arestas reflexas e duas arestas convexas.

As quatro faces incidentes no vértice da Figura 3.6 estão contidas nos planos definidos pelas seguintes equações:

$$0.4x - \sqrt{0.59}y - 0.5z = 0,$$

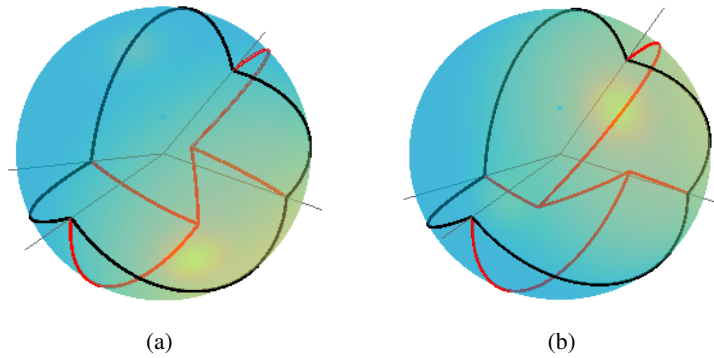


Fig. 3.7 Dois grafos bissetores (a vermelho) para o polígono esférico (fronteira a preto) relativo ao vértice da Figura 3.6: (a) Grafo bissetor 1; (b) Grafo bissetor 2

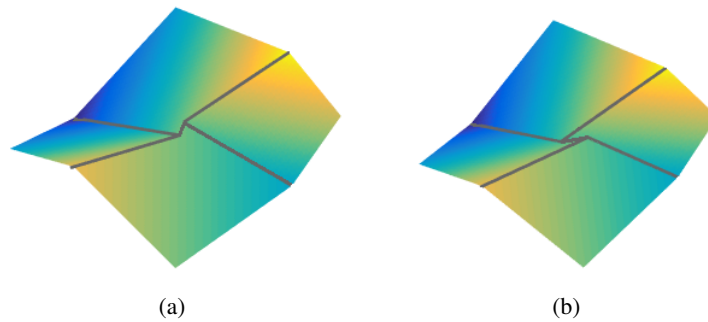


Fig. 3.8 Duas possíveis resoluções do processo de encolhimento na vizinhança do vértice da Figura 3.6: (a) Resolução 1: aresta interior convexa; (b) Resolução 2: aresta interior reflexa.

$$\begin{aligned}\sqrt{0.59}x + 0.5y - 0.4z &= 0, \\ -0.5x - \sqrt{0.59}y - 0.4z &= 0, \\ -0.4x + 0.4y - \sqrt{0.68}z &= 0.\end{aligned}$$

A Figura 3.8 (a) mostra o gráfico da função

$$Z = \min \left\{ \begin{aligned} &\max\{(0.4x - \sqrt{0.59}y - \varepsilon)/0.5, (-0.5x - \sqrt{0.59}y - \varepsilon)/0.4\}, \\ &\max\{(\sqrt{0.59}x + 0.5y - \varepsilon)/0.4, (-0.4x + 0.4y - \varepsilon)/\sqrt{0.68}\} \end{aligned} \right\}$$

para $\varepsilon > 0$. Note-se que a aresta interior é convexa.

A Figura 3.8 (b) mostra o gráfico da função

$$Z = \max \left\{ \begin{aligned} &\min\{(0.4x - \sqrt{0.59}y - \varepsilon)/0.5, (\sqrt{0.59}x + 0.5y - \varepsilon)/0.4\}, \\ &\min\{(-0.5x - \sqrt{0.59}y - \varepsilon)/0.4, (-0.4x + 0.4y - \varepsilon)/\sqrt{0.68}\} \end{aligned} \right\}$$

para $\varepsilon > 0$. Note-se que a aresta interior é reflexa.

De modo a evitar esta ambiguidade, subjacente aos grafos bissetores, iremos proceder sempre da mesma forma perante um vértice pelo qual passam quatro planos *offset* do poliedro, gerado aquando o processo de encolhimento. Mais concretamente, iremos escolher o grafo bissetor, associado ao polígono esférico em causa, sempre da mesma forma, tal como explicaremos de seguida.

3.2.3 Esqueleto esférico

Por forma a definir um método que determine um esqueleto retilíneo de um poliedro que seja único, vamos introduzir o conceito de **esqueleto esférico**, que está associado a cada um dos polígonos esféricos. Este conceito foi apresentado por Aurenhammer e Walzl [5].

O esqueleto esférico de um polígono esférico é um grafo bissetor específico cujas faces são, todas elas, adjacentes a uma aresta do polígono esférico. No que se segue, iremos explicar, detalhadamente, todas as etapas que permitem obter o esqueleto esférico e o correspondente *offset* da figura de vértice cônica $\mathcal{F}(v)$.

Consideremos um vértice v de um poliedro *offset*, de um poliedro genérico, pelo qual passam quatro planos. Qualquer que seja o *offset* de $\mathcal{F}(v)$ no instante imediatamente após o evento, longe de v todos os *offsets* são iguais. Isto acontece porque todas as arestas infinitas de qualquer *offset* são paralelas às arestas de $\mathcal{F}(v)$. Consideremos as sucessivas interseções de qualquer *offset* de $\mathcal{F}(v)$ com superfícies esféricas, centradas em v , cujo raio inicialmente é suficientemente grande de modo a interseccionar todas as arestas infinitas do *offset*, mas que vai diminuindo progressivamente. Por projeção radial na superfície esférica unitária E , de centro v , destas interseções, vamos obtendo os traços iniciais de um grafo bissetor definido em \mathcal{P}_v . Estes traços iniciais partem dos vértices de \mathcal{P}_v e estão contidos nas bissetrizes dos ângulos internos de cada vértice de \mathcal{P}_v , que são arcos máximos de E . Continuemos com este processo até atingir a primeira interseção de arestas dos *offset* de $\mathcal{F}(v)$, ou seja até atingir a primeira interseção de três planos *offset*, que ocorre no mesmo instante para todo o *offset* de $\mathcal{F}(v)$.

Este processo pode ser interpretado de uma outra forma, que o reduz a um problema de duas dimensões, ou seja, isto é equivalente ao processo de encolhimento do polígono esférico definido por $\mathcal{F}(v)$, que por sua vez é análogo ao processo de propagação de frente de onda aplicado ao caso planar e descrito no capítulo anterior. A Figura 3.9 ilustra este processo de encolhimento, para um polígono esférico em particular, nos instantes iniciais.

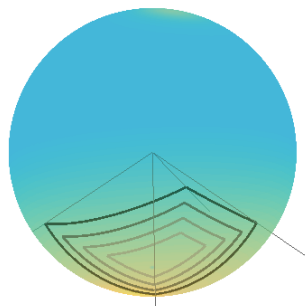


Fig. 3.9 Fronteira do polígono esférico a preto. Fronteira de três polígonos esféricos encolhidos a cinzento.

Consideremos os planos que contém as faces de $\mathcal{F}(v)$. As arestas que definem, a cada instante, o polígono esférico encolhido correspondem à interseção dos planos *offset* destes planos, definidos nesse mesmo instante, com a superfície esférica unitária.

À semelhança do que acontecia no processo de propagação de frente de onda definido em polígonos, também aqui eventos de aresta e de divisão ocorrem, sendo tratados de forma análoga.

Os **nós do esqueleto esférico**, e portanto vértices interiores do grafo bissetor que estamos a definir, assinalam a ocorrência destes eventos. Notemos que estamos a incluir nos eventos de aresta o colapso de um triângulo definido por três segmentos curvilíneos.

Observemos que a ocorrência destes eventos corresponde à interseção de três dos planos que definem um *offset* de $\mathcal{F}(v)$, e portanto aos instantes em que a superfície esférica atinge um vértice no *offset* da figura de vértice. Uma vez que sabemos resolver os eventos de aresta e de divisão no plano, e portanto sabemos qual o polígono esférico encolhido que sucede o evento, conseqüentemente sabemos também posicionar as novas arestas do *offset* de $\mathcal{F}(v)$ que estamos, progressivamente, a construir, bastando fazer uso da projeção central.

Podem ainda ocorrer outros tipos de eventos no processo de encolhimento do polígono esférico: o colapso de uma região limitada por um único arco e o colapso de uma região limitada por apenas dois arcos. Exemplos que ilustram estes dois eventos estão representados na Figura 3.10. Porém, estes eventos não originam nós do esqueleto esférico e não afetam a estrutura do grafo bissetor, logo não interferem no *offset* de $\mathcal{F}(v)$.

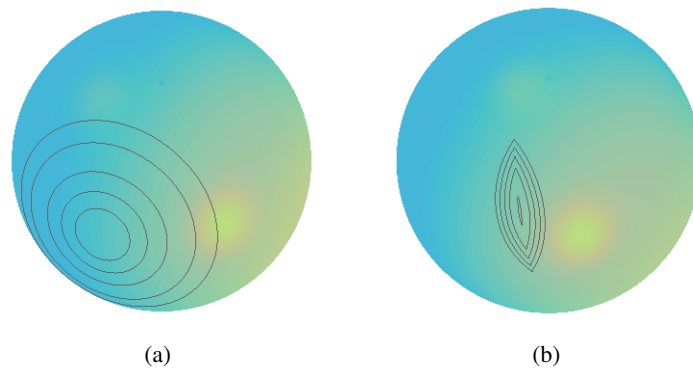


Fig. 3.10 Dois tipos de eventos que ocorrem no processo de encolhimento de um polígono esférico: (a) Colapso de uma região limitada por um arco; (b) Colapso de uma região limitada por dois arcos.

Continuamos a percorrer o *offset* de $\mathcal{F}(v)$ com superfícies esféricas de raio cada vez menor e, conforme o anteriormente explicado, vamos continuando a traçar os arcos do grafo bissetor, até que haja outro evento de aresta ou de divisão, ou seja, até que três planos *offset* dos que contêm as faces de $\mathcal{F}(v)$ se voltem a interseccionar num mesmo ponto. Nesse momento há que determinar a posição das novas arestas que incidem no vértice do *offset* de $\mathcal{F}(v)$ correspondente à interseção dos três planos, à semelhança do explicado anteriormente. Este processo decorre até que o raio da superfície esférica que estamos a usar para percorrer o *offset* de $\mathcal{F}(v)$ se anule.

Notemos que podem haver momentos em que a superfície esférica intersecciona uma aresta do *offset* de $\mathcal{F}(v)$ em dois pontos em simultâneo. Se esses pontos surgirem no seguimento dos restantes pontos resultantes das interseções anteriores, são ambos considerados. No caso de um dos pontos não surgir no seguimento de outros, ou seja, se é um ponto isolado, não é tido em conta.

Se o vértice v que estamos a resolver for pontiagudo, então o esqueleto esférico a ele associado fica concluído antes do raio da superfície esférica que percorre o *offset* de $\mathcal{F}(v)$ se anular, [5].

Se o vértice não for pontiagudo, então a complexidade do cálculo do esqueleto esférico pode ser acrescida. Neste caso, pode acontecer que quando o raio da superfície esférica, usada para percorrer

o *offset* de $\mathcal{F}(v)$, se anula, o esqueleto esférico ainda não esteja terminado. Isto significa que as sucessivas superfícies esféricas consideradas não atingiram todos os pontos do *offset* de $\mathcal{F}(v)$. Para corrigir tal situação, é necessário que se volte a percorrer o *offset*, desta vez com superfícies esféricas de raio inicialmente nulo mas crescente ao longo do tempo. Desta forma garantimos que os pontos não "varridos" anteriormente serão agora atingidos. O esqueleto esférico ficará completo.

Estabelecendo conexão com o processo de encolhimento do polígono esférico, quando v é um vértice não pontiagudo, pode ocorrer um outro evento. O que pode acontecer é que antes de termos o esqueleto completo, podem haver interseções de planos *offset* que já não intersejam a superfície esférica unitária, E . Em [5], é explicado como se processa este tipo de evento e como podemos completar a construção do esqueleto, que descrevemos brevemente.

Suponhamos que o arco a_{ij} do esqueleto esférico está a ser construído, com a_{ij} contido na interseção do plano bissetor dos planos H_i e H_j com E . E seja $1 - \Delta_{ij}$ o instante em que a linha correspondente à interseção dos dois planos *offset* $H_i^{1-\Delta_{ij}}$ e $H_j^{1-\Delta_{ij}}$ deixa de intersejar E . Denotemos por p_{ij} o ponto onde a construção do arco a_{ij} do esqueleto esférico foi interrompida. A uma interrupção deste tipo chamamos **evento de paragem**. Este é um evento que não se faz representar por um nó no esqueleto esférico e como tal, não há formação de novos vértices no *offset* de $\mathcal{F}(v)$. Em [5] sugere-se que a continuação da construção do arco que ficou interrompida seja retomada no instante $1 + \Delta_{ij}$ e no ponto p_{ij} , considerando-se de novo os planos H_i^δ e H_j^δ com δ a diminuir entre $1 - \Delta_{ij}$ e 0. Estes planos intersejam E em dois pontos, mas desta vez consideram-se os pontos de interseção que não foram considerados antes do evento ter ocorrido. Ou seja, iremos considerar o complementar de cada círculo tidos em conta antes do instante $1 - \Delta_{ij}$. No anexo B estão presentes duas situações de ocorrência de eventos de paragem e que ilustram esta ideia.

Perante a descrição dos eventos de paragem feita por Aurenhammer et al. [5], o conceito de *offset* de polígono esférico não fica totalmente esclarecido, pois não é perceptível como se lida com a interseção dos planos *offset* de H_i e H_j com a superfície esférica até que seja retomada a construção do arco a_{ij} que ficou interrompida. Neste trabalho lidámos por isso com cada evento de forma individual.

Definido o esqueleto esférico, associado a um determinado vértice do poliedro *offset*, que localiza a ocorrência de um evento, e o correspondente *offset* de $\mathcal{F}(v)$, conseguimos saber qual o poliedro *offset* que sucede o evento. Por abuso de linguagem dizemos que o vértice v se divide nos vértices do *offset* de $\mathcal{F}(v)$. Os restantes vértices do poliedro *offset* posicionam-se sobre as linhas trissetoras já definidas, pois não sofreram alterações. Desta forma temos o evento resolvido sem ambiguidades.

Retomando o contexto do vértice de um poliedro, representado na Figura 3.6, que não é pontiagudo, no qual incidem duas arestas convexas e duas arestas reflexas, cujo cone convexo gerado por elas é o espaço todo, o respetivo polígono esférico e correspondente esqueleto esférico são os representados na Figura 3.7 (a). Podemos confirmar esta afirmação com a Figura 3.11. Adicionalmente, podemos acrescentar que os eventos ocorridos durante o processo de encolhimento do polígono esférico associado foram apenas eventos de divisão e eventos como o ilustrado na Figura 3.10 (b). Concluímos assim que o processo de encolhimento nas vizinhanças de um vértice, cuja estrutura é igual à apresentada na Figura 3.6, e que tem em conta o processo acima descrito, é o da Figura 3.8 (a), ou seja, a nova aresta acrescentada ao poliedro *offset* será convexa.

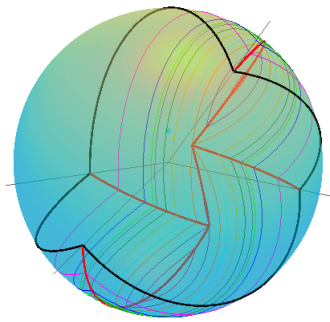


Fig. 3.11 Vários *offsets* do polígono esférico cuja fronteira está assinalada a preto. Respetivo esqueleto esférico a vermelho.

3.2.4 Propriedades dos constituintes do esqueleto retilíneo de um poliedro

No que vamos expor de seguida, continuaremos a referir-nos a poliedros genéricos, cujos esqueletos retilíneos foram construídos segundo o método do esqueleto esférico, para resolver cada um dos eventos que surge durante o processo de encolhimento do poliedro.

O esqueleto retilíneo de um poliedro deixa-o particionado em **células**, sendo que cada célula corresponde à região varrida por uma determinada face do poliedro. Assim, a cada face do poliedro corresponde uma célula, sendo esta adjacente à face do poliedro que a determinou. Portanto o poliedro fica dividido em tantas células quanto o número de faces que possui. Em cada arco do esqueleto retilíneo incidem três faces e três células do esqueleto, pois é o movimento de um determinado vértice, ao longo da linha trissetora a ele associada, que define cada arco. Em cada nó do esqueleto retilíneo de um poliedro incidem quatro células uma vez que em cada evento estão envolvidos quatro planos *offset*. Incidem quatro arcos, tal como discutimos mais adiante, aquando da enumeração dos eventos que podem ocorrer em poliedros do tipo que estamos a considerar. Incidem ainda seis faces do esqueleto, pois se considerarmos uma superfície esférica centrada num nó específico do esqueleto retilíneo de um poliedro, a partição desta superfície esférica segundo as células que incidem neste nó, deixa-a dividida em quatro polígonos esféricos. A única forma de obter esta partição implica a definição de seis planos em posição genérica, que corresponde a $\binom{4}{2}$ pois as quatro células que incidem em cada nó são todas adjacentes entre si.

O grafo de arestas, composto pelos arcos e nós do esqueleto retilíneo de um poliedro é uma floresta, havendo alguns poliedros para os quais esta estrutura é uma árvore. Isto não significa que o esqueleto retilíneo seja desconexo. De facto, é conexo pois sendo este formado por nós, arcos e faces, existe sempre um caminho entre quaisquer dois nós, contido nas faces do esqueleto.

O número de nós do esqueleto retilíneo de um poliedro com n faces é limitado superiormente por $\binom{n}{4}$, isto porque cada nó está associado a um evento, e para um evento ocorrer quatro planos *offset* têm de se encontrar no mesmo ponto.

O resultado que se segue é relativo ao grafo de arestas associado ao esqueleto retilíneo de um poliedro nas condições referidas.

Proposição 3.2.3. [6] *Todas as componentes conexas do grafo de arestas do esqueleto retilíneo de um poliedro são incidentes em algum vértice do poliedro.*

Demonstração: Por contradição, vamos supor que existe uma componente do grafo de arestas que não está conectada à fronteira do poliedro, digamos C . Este facto implica a existência de uma superfície fechada que separa a tal componente C da fronteira do poliedro. Tal superfície fechada não intersecta nenhum arco ou face do esqueleto retilíneo do poliedro. Assim, podemos concluir que esta superfície fechada define um buraco numa célula. Esse buraco está também particionado em células, definidas pelas arestas da componente C . Estas células não são limitadas pela fronteira do poliedro em parte nenhuma. Deste modo entramos em contradição com a definição de célula, pois cada uma delas é adjacente a uma face do poliedro. \square

A proposição que de seguida apresentamos refere que a partição de um poliedro, segundo o seu esqueleto retilíneo, deixa-o dividido em células monótonas. Antes apresentaremos a definição de célula monótona.

Definição 3.2.4. [6] *Uma célula diz-se monótona se a sua interseção com qualquer linha, perpendicular ao plano que contém a face do poliedro que define a célula, for conexa ou o vazio.*

Proposição 3.2.4. [19] *As células associadas à partição do poliedro segundo o seu esqueleto retilíneo são, todas elas, monótonas.*

Demonstração: Por contradição vamos supor que existe uma célula que não é monótona e consideremos uma linha L , perpendicular à face f do poliedro que gerou a referida célula, e que intersecte a célula em mais que um segmento de reta. Suponhamos que L deixa de intersectar a célula num determinado ponto x , voltando posteriormente a intersectá-la num outro ponto, digamos y . Entre os pontos x e y temos outras células c_i definidas por outras faces f_i do poliedro diferentes de f .

Seja $r(t) = p_0 + tu$ uma parametrização de L com u unitário e p_0 pertencente ao plano que contém a face f . Consideremos a função, definida por ramos, $g(t) = d_{f_i}(r(t))$ se $r(t) \in c_i$, onde $d_{f_i}(r(t))$ é a distância do ponto $r(t)$ ao plano que contém a face f_i . Esta função é contínua e seccionalmente afim, de facto, se $f_i = f$ então $d_f(r(t))$ é uma função linear de declive um e se $f_i \neq f$, $d_{f_i}(r(t))$ é uma função afim de declive menor que um.

Seja $x = r(t_0)$ e $y = r(t_1)$. Então $g(t_0) = t_0$ e $g(t_1) = t_1$. No entanto, entre t_0 e t_1 o declive de g é sempre inferior a um, pelo que terá de existir uma descontinuidade.

Deste modo, concluímos que todas as células são monótonas. \square

A monotonia das células implica a não existência de buracos nestas [6].

3.3 Eventos

Após termos apresentado um método que permite determinar, de forma única, o poliedro *offset* que sucede cada evento que surge durante o processo de encolhimento de um poliedro, iremos categorizar todos os acontecimentos que conduzem ao aparecimento destes eventos. A categorização de eventos que se segue tem em conta apenas poliedros genéricos e foi proposta por Aurenhammer e Walzl [19].

Um evento corresponde ao instante em que quatro ou mais planos *offset* se encontram num mesmo vértice. No caso genérico, que é o caso em que estamos interessados, um evento ocorre quando temos exatamente quatro planos *offset* a incidir num mesmo vértice de um poliedro *offset*. Os vértices dos

poliedros *offset*, que localizam a ocorrência de eventos, têm no máximo grau oito, como consequência do facto de cada plano *offset* conter, no máximo, duas arestas que incidem nesses vértices.

Vamos dividir os eventos em duas categorias, os **eventos de aresta** e os **eventos de contacto**. Fazendo a analogia ao caso bidimensional, podemos dizer que os eventos de contacto correspondem aos eventos de divisão que ocorrem em polígonos.

Dizemos que um evento gera **alterações topológicas** nos poliedros *offset* se buracos ou túneis surgem ou desaparecem. Apenas em eventos de contacto se registam alterações topológicas.

Os exemplos que apresentamos nas próximas secções, para ilustrar cada um dos eventos, são apenas esquemáticos, não sendo apresentados na escala real. As imagens foram obtidas através de código MATLAB elaborado especificamente para cada exemplo.

3.3.1 Eventos de aresta

Um evento de aresta ocorre quando temos arestas a colapsar, ou seja, arestas que ficam com o seu tamanho de tal forma reduzido que se anulam. Num poliedro genérico podemos ter casos de uma a seis arestas a colapsar em simultâneo, sendo que o colapso de seis arestas em simultâneo corresponde ao desaparecimento de um tetraedro.

Colapso de uma aresta

Este é o caso mais simples dos eventos de aresta, e ocorre quando dois vértices de uma determinada aresta colidem um com o outro, consequência do anulamento dessa aresta. Nesse preciso momento surge um vértice de grau quatro, no qual incidem os quatro planos que definem as duas arestas vizinhas da aresta colapsada. O vértice que surge, de grau quatro, pode ser um vértice de vários tipos: com estrutura análoga à apresentada na Figura 3.6; um vértice que não é de contato mas que é pontiagudo e no qual incidem duas arestas convexas e duas arestas reflexas; um vértice convexo ou um vértice reflexo.

No primeiro caso vimos já como proceder de modo a prosseguir com o processo de encolhimento, sendo o esqueleto esférico, nesta situação, o ilustrado na Figura 3.7 (a).

No segundo caso, os dois vértices que colidiram um com o outro mantêm a sua direção de deslocamento após o evento. A Figura 3.12 exemplifica a resolução de um vértice deste tipo. Com este evento, dois arcos do esqueleto retilíneo ficam concluídos e dois novos arcos serão gerados a partir do nó correspondente a este evento.

Por último, se o vértice for convexo ou reflexo, a forma de resolver o evento quer num caso quer no outro é análoga. A Figura 3.13 exemplifica a resolução de um vértice convexo. Neste caso, ambos os vértices envolvidos no evento ficam com a sua direção de deslocamento alterada. Neste evento, dois arcos do esqueleto retilíneo ficam concluídos e dois novos arcos são gerados a partir do nó correspondente a este evento.

Colapso de duas arestas

Nesta situação temos duas arestas, que são adjacentes, a anularem-se em simultâneo. A Figura 3.14 exemplifica um evento deste tipo. No caso ilustrado, no instante de ocorrência do evento surge um vértice de grau cinco, sendo que duas das arestas incidentes nesse vértice são definidas pelos mesmos

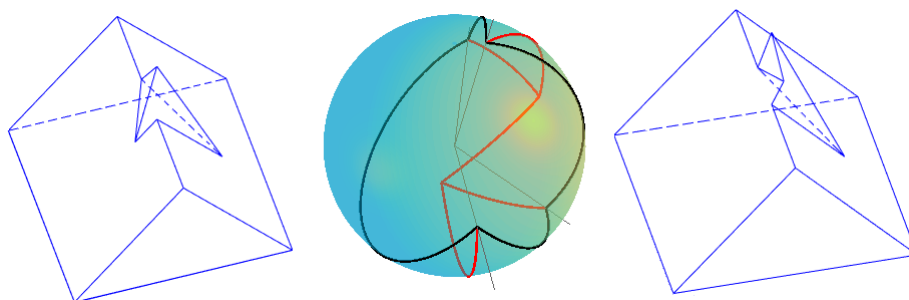


Fig. 3.12 O poliedro à esquerda antecede o colapso de uma aresta. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.

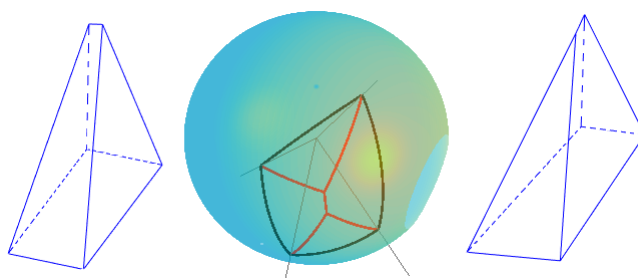


Fig. 3.13 O poliedro à esquerda antecede o colapso de uma aresta. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico, associado a um vértice convexo, está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.

planos. Por esse vértice passam exatamente quatro planos *offset*. O esqueleto esférico associado ao correspondente polígono esférico é desconexo. Com este evento, três arcos do esqueleto retilíneo ficam concluídos e um novo arco será gerado a partir do nó correspondente a este evento.

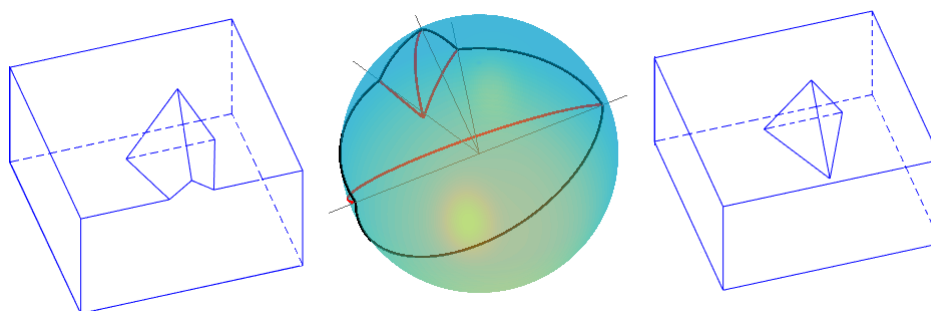


Fig. 3.14 O poliedro à esquerda antecede o colapso de duas arestas. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.

Colapso de três arestas

Este é um evento em que três arestas adjacentes do poliedro colapsam no mesmo instante, ilustrado na Figura 3.15. Nesta situação aquando do evento, é formado um vértice convexo de grau três. Contudo temos quatro planos *offset* que passam neste vértice: os três que definem o vértice que se formou e

ainda o plano que continha a face do poliedro *offset* que entretanto desapareceu. Com este evento, três arcos do esqueleto retilíneo ficam concluídos e um novo arco será gerado a partir do nó correspondente a este evento.

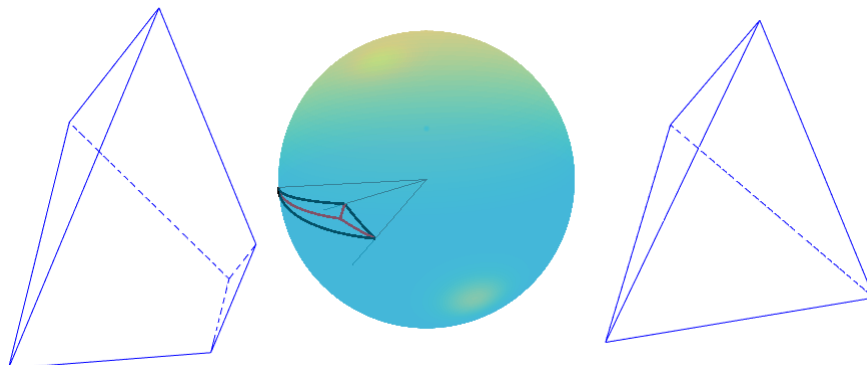


Fig. 3.15 O poliedro à esquerda antecede o colapso de três arestas. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.

Colapso de quatro arestas

Neste evento temos quatro arestas do poliedro, que são adjacentes, a colapsar no mesmo momento. A Figura 3.16 exemplifica um evento deste tipo, onde temos dois prismas a intersestarem-se. Nesta interseção estão envolvidas quatro arestas, que irão colapsar todas em simultâneo, resultando na divisão do poliedro *offset* e portanto na separação dos dois prismas. Aquando o evento, forma-se um vértice de grau quatro, definido pelas duas arestas, uma de cada prisma. Nesta situação em concreto, temos dois polígonos esféricos associados ao evento e portanto dois esqueletos esféricos. Com este evento, quatro arcos do esqueleto retilíneo ficam concluídos no nó associado a este evento.

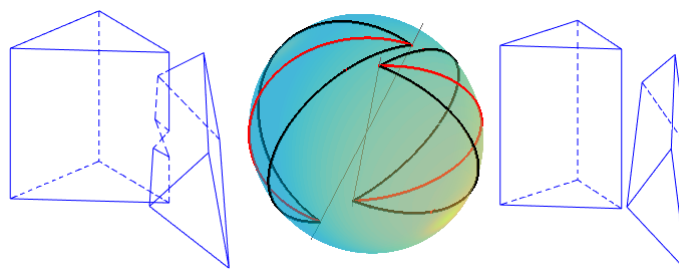


Fig. 3.16 O poliedro à esquerda antecede o colapso de quatro arestas. Os poliedros à direita sucedem o evento. A fronteira dos polígonos esféricos está assinalada a preto e os esqueletos esféricos a vermelho.

Colapso de cinco arestas

Este evento ocorre sempre que cinco arestas do poliedro, adjacentes, se anulam em simultâneo. Uma situação que conduz a um evento deste tipo é a seguinte. Consideremos dois tetraedros, de tamanhos distintos, e que são colados de forma a que duas faces se unam numa só. Naturalmente que

o tetraedro de menor tamanho irá colapsar primeiramente. A Figura 3.17 mostra o que acontece no instante de ocorrência do colapso do tetraedro de menor tamanho.

Com este evento, quatro arcos do esqueleto retilíneo ficam concluídos no nó associado a este evento. Contudo, apenas cinco faces que incidem no nó ficam concluídas, a sexta face é também incidente no nó correspondente ao colapso do tetraedro maior, ficando portanto aí concluída.

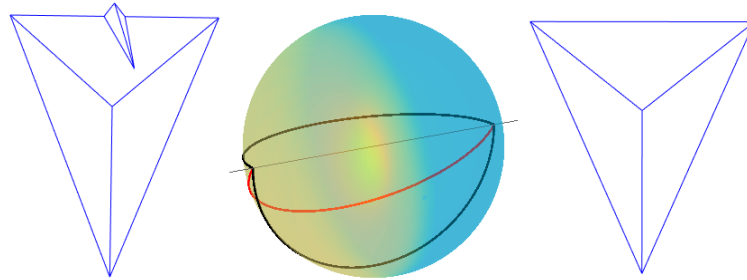


Fig. 3.17 O poliedro à esquerda antecede o colapso de cinco arestas. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.

Colapso de seis arestas

Este evento corresponde ao colapso das seis arestas de um tetraedro, o que acontece no ponto que está à mesma distância das quatro faces que constituem o tetraedro em questão. Em poliedros genéricos, o último evento que ocorre é precisamente o colapso de um tetraedro. Com este evento, quatro arcos do esqueleto retilíneo ficam concluídos no nó associado a este evento.

3.3.2 Eventos de contacto

Eventos de contacto ocorrem quando se dá o contacto entre elementos do poliedro que antes não eram adjacentes. Em poliedros genéricos, este contacto pode dar-se entre um vértice e uma aresta, entre dois vértices, entre dois vértices e uma aresta, entre duas arestas e entre um vértice e uma face.

Contacto vértice-aresta

Este tipo de evento ocorre quando um vértice colide com uma aresta não adjacente, sendo que o vértice e a aresta em causa partilham uma face em comum. Para ilustrar este evento apresentamos três exemplos. A situação ilustrada na Figura 3.18 é de um choque entre um vértice e uma aresta convexa. Na Figura 3.19 a aresta envolvida no evento é reflexa. O choque entre o vértice e a aresta representado na Figura 3.20 altera a topologia do poliedro *offset*, ao contrário das duas situações anteriores. Isto porque um túnel surge no poliedro *offset* que sucede o evento. Com este evento, um arco do esqueleto retilíneo fica concluído e três novos arcos serão gerados a partir do nó correspondente a este evento, isto em qualquer uma das três situações anteriormente relatadas.

Contacto vértice-vértice

Como o nome sugere, este evento caracteriza-se pelo choque entre dois vértices do poliedro, vértices estes que têm duas faces em comum. Podemos distinguir dois tipos de situações que ocorrem

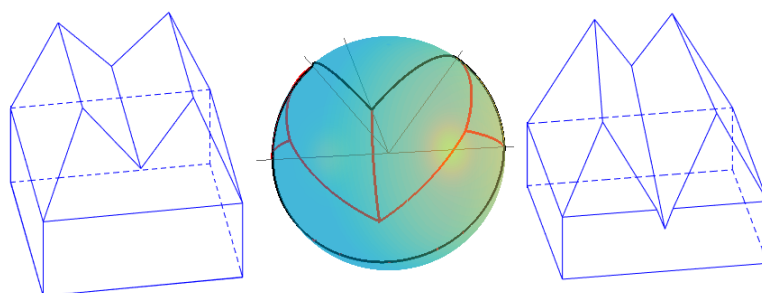


Fig. 3.18 O poliedro à esquerda antecede o evento contacto vértice-aresta. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.

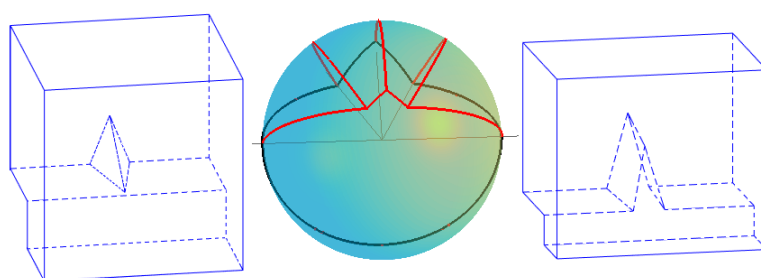


Fig. 3.19 O poliedro à esquerda antecede o evento contacto vértice-aresta. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.

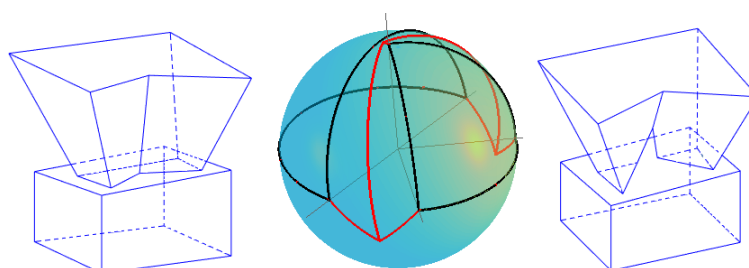


Fig. 3.20 O poliedro à esquerda antecede o evento contacto vértice-aresta. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.

em eventos deste tipo: ou os vértices mantêm a sua direção de deslocamento após o choque, ou esta é alterada. A Figura 3.21 exemplifica a primeira situação e a Figura 3.22 ilustra a segunda. Neste último exemplo, alterações topológicas ocorreram, nomeadamente a criação de um túnel. Com este evento, dois arcos do esqueleto retilíneo ficam concluídos e dois novos arcos serão gerados a partir do nó correspondente a este evento, isto em qualquer uma das duas situações referidas.

Contacto vértice-vértice-aresta I

Um evento do tipo contacto vértice-vértice-aresta I ocorre sempre que uma aresta reflexa do poliedro causa a sua divisão. Mais precisamente, quando a divisão de um poliedro é resultado do colapso de uma aresta reflexa, e conseqüente colisão dos dois vértices nos quais esta aresta incidia. Note-se que a divisão do poliedro poderá não ser total, ou seja, o poliedro pode manter-se conexo

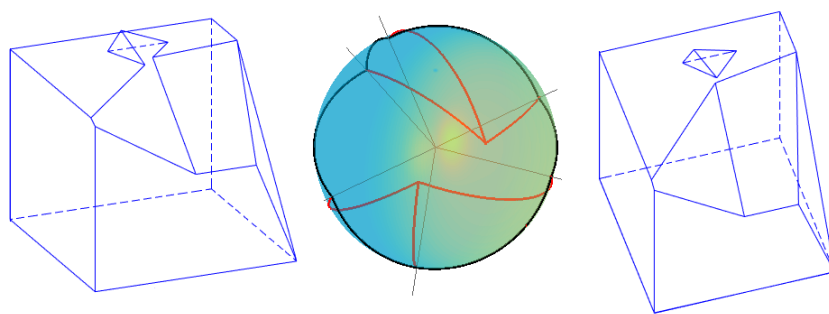


Fig. 3.21 O poliedro à esquerda antecede o evento contacto vértice-vértice. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.

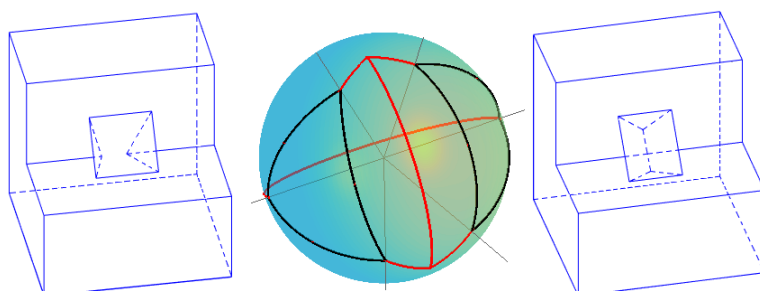


Fig. 3.22 O poliedro à esquerda antecede o evento contacto vértice-vértice. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.

após o evento. Na Figura 3.23 podemos ver um poliedro no qual ocorre um evento do tipo contacto vértice-vértice-aresta I onde o poliedro fica totalmente dividido em duas partes. Associado ao evento temos dois polígonos esféricos e portanto dois esqueletos esféricos. Com este evento, dois arcos do esqueleto retilíneo ficam concluídos e dois novos arcos serão gerados a partir do nó correspondente a este evento.

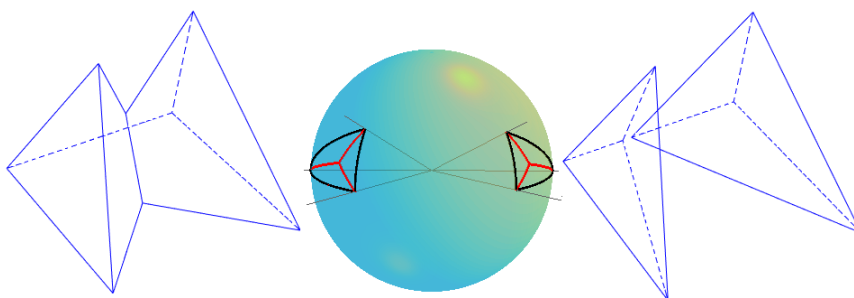


Fig. 3.23 O poliedro à esquerda antecede o evento contacto vértice-vértice-aresta I. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira dos polígonos esféricos está assinalada a preto e os esqueletos esféricos a vermelho.

Contacto vértice-vértice-aresta II

Enquanto que no evento descrito anteriormente, o choque entre os vértices se devia ao colapso de uma aresta reflexa, neste evento a colisão entre dois vértices provoca a divisão de uma aresta. Contudo

os vértices em questão não são aqueles em que a aresta que é dividida incide. No entanto, os vértices que chocam têm de ter duas faces em comum, de outra forma este evento não poderia ocorrer em poliedros genéricos. A Figura 3.24 é um exemplo desta situação. Podemos reparar que no instante de ocorrência do evento forma-se um vértice de grau oito, que é o grau máximo que um vértice pode ter aquando um evento. O esqueleto esférico presente no exemplo não é conexo. Com este evento, dois arcos do esqueleto retilíneo ficam concluídos e dois novos arcos serão gerados a partir do nó correspondente a este evento.

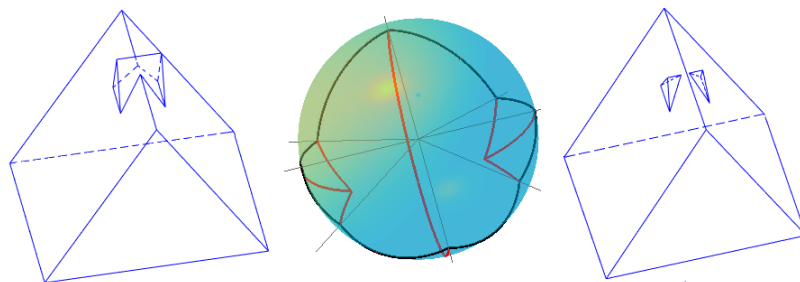


Fig. 3.24 O poliedro à esquerda antecede o evento contacto vértice-vértice-aresta II. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.

Contacto aresta-aresta

Um evento deste tipo dá-se sempre que duas arestas reflexas do poliedro colidem uma com a outra. Neste evento estão envolvidos os quatro planos que contém as faces que definem as duas arestas que chocam. Na Figura 3.25 podemos ver um exemplo de um poliedro onde este evento ocorre. Neste exemplo, surge um túnel no poliedro *offset*. Portanto podemos dizer que o poliedro sofre alterações topológicas. Note-se que o polígono esférico associado ao evento é apenas um, contudo este é limitado por uma curva que é desconexa. O respetivo esqueleto esférico é conexo e contém um ciclo. A partir do nó correspondente a este evento, quatro arcos do esqueleto retilíneo se irão desenvolver.

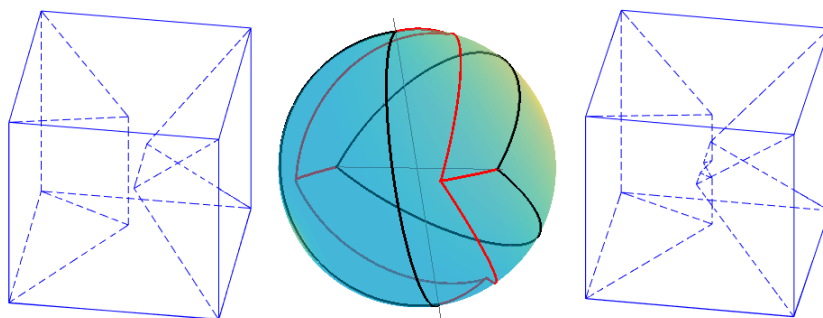


Fig. 3.25 O poliedro à esquerda antecede o evento contacto aresta-aresta. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.

Contacto vértice-face

Este evento ocorre sempre que um vértice reflexo colide com uma face oposta do poliedro. Após este evento, o poliedro que obtemos tem um buraco, consequência desta colisão. Este é mais um exemplo de um choque que causa alterações topológicas no poliedro. A situação presente na Figura 3.26 ilustra este acontecimento. Os planos envolvidos são os que definem o vértice e o plano que contém a face com a qual o vértice colide. O polígono esférico associado a este evento é apenas um, contudo a curva que o delimita é desconexa. O respetivo esqueleto esférico tem um ciclo. O vértice que chocou com a face em questão é dividido em três vértices. Com este evento, um arco do esqueleto retilíneo fica concluído e três novos arcos serão gerados a partir do nó correspondente a este evento.

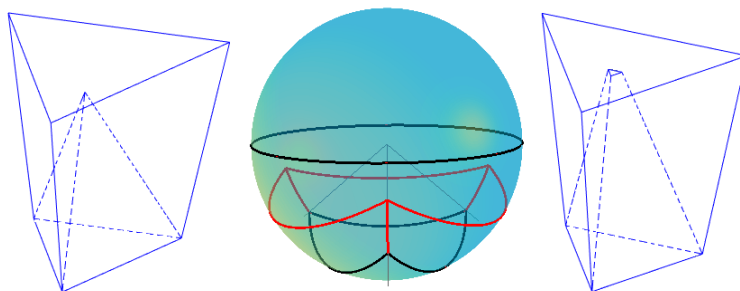


Fig. 3.26 O poliedro à esquerda antecede o evento contacto vértice-face. O poliedro à direita sucede o evento. A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho.

3.3.3 Eventos inversos

Concluimos a secção dos eventos com os eventos inversos. Estes eventos não acrescentam nada de novo à categorização anteriormente feita, isto porque um evento inverso ocorre sempre que o processo de encolhimento é invertido, considerando o movimento dos planos *offset* na direção oposta.

Sabemos já que, associados a qualquer evento, temos um polígono esférico e o esqueleto esférico correspondente, que nos indica como posicionar os novos vértices do poliedro encolhido. Então se queremos considerar o evento inverso, temos em conta o complementar do polígono esférico e calculamos, para ele, o seu esqueleto esférico. A tabela 3.1 apresenta os inversos de alguns eventos [19], isto porque nem todos têm a si associado um evento inverso. Por exemplo, quando ocorre o colapso de seis arestas, o poliedro fica reduzido a um ponto, pelo que não poderemos considerar movimentos inversos das faces, pois não as há. Assim, este evento não tem um evento inverso associado. O mesmo acontece, por exemplo, com o evento colapso de três arestas onde um dos planos é "perdido". Assim, não podemos dizer que o evento inverso deste é o evento de contacto vértice-face.

Para consolidar este conceito de evento inverso, vamos apresentar um exemplo do colapso de duas arestas, onde poderemos confirmar que o seu evento inverso é de facto o evento contacto vértice-aresta. A Figura 3.27 ilustra um evento onde ocorre o colapso de duas arestas. Para o polígono esférico, associado a este evento, traçamos também o esqueleto esférico complementar. Da análise à figura, podemos concluir que a estrutura do esqueleto esférico complementar é análoga à do esqueleto esférico referente ao evento contacto vértice-aresta (quando este não acarreta alterações topológicas no poliedro) presente nos exemplos das Figuras 3.18 e 3.19.

Tabela 3.1 Eventos inversos

Evento	Evento inverso
Colapso de uma aresta	Colapso de uma aresta
Colapso de duas arestas	Contacto vértice-aresta
Colapso de quatro arestas	Contacto aresta-aresta
Contacto vértice-aresta	Colapso de duas arestas
Contacto vértice-vértice (1ª situação)	Contacto vértice-vértice (1ª situação)
Contacto vértice-vértice (2ª situação)	Contacto vértice-vértice-aresta I
Contacto vértice-vértice-aresta I	Contacto vértice-vértice (2ª situação)
Contacto vértice-vértice-aresta II	Contacto vértice-vértice-aresta II
Contacto aresta-aresta	Colapso de quatro arestas

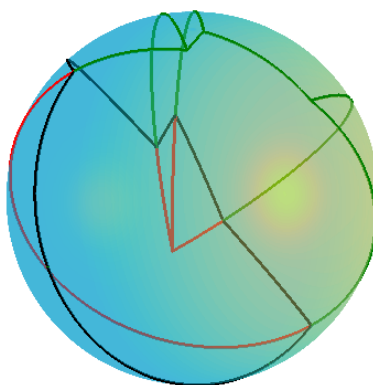


Fig. 3.27 A fronteira do polígono esférico está assinalada a preto e o esqueleto esférico a vermelho. O esqueleto esférico complementar, referente ao evento inverso, está assinalado a verde.

Comentários finais sobre a ambiguidade dos esqueletos retilíneos

De modo a concluir esta secção relativa aos eventos, referimos que há apenas um único evento que conduz a ambiguidades no esqueleto retilíneo de poliedros genéricos, quando não fazemos uso do critério de esqueleto esférico para a escolha dos grafos bissetores dos polígonos esféricos associados aos eventos. Isto claro, se não considerarmos os grafos bissetores que possuem faces totalmente limitadas por outras faces, referidas anteriormente como faces órfãs.

Mais concretamente, consideremos o evento colapso de uma aresta, cujo vértice associado a este evento possui uma estrutura análoga à presente na Figura 3.6. Este é o único evento que conduz a ambiguidades no esqueleto retilíneo, pois existem dois grafos bissetores para o polígono esférico associado a v que não apresentam faces totalmente limitadas por outras faces. Em todos os outros eventos, apenas existe um único grafo bissetor válido para cada polígono esférico associado ao evento, que coincide com o seu esqueleto esférico [6].

Uma vez que o método do esqueleto esférico, como critério de escolha dos grafos bissetores, é canónico, quando o usamos para resolver cada evento que surge aquando o processo de encolhimento de poliedros genéricos, somos conduzidos a um único esqueleto retilíneo para cada poliedro. Isto porque o posicionamento dos vértices do poliedro *offset*, após cada evento, é determinado pelo posicionamento dos nós interiores do esqueleto esférico associado a esse evento.

3.3.4 Combinatória dos esqueletos retilíneos

Na introdução deste trabalho, começámos por referir que os esqueletos surgiram por necessidade de simplificar a forma dos objetos. No entanto, será que estas estruturas preservam a sua geometria? Vamos discutir esta questão no que se segue.

Começamos com a definição de **retração por deformação** de um espaço topológico.

Definição 3.3.1. [4] *Uma retração por deformação de um espaço topológico X num subespaço $Y \in X$ é uma função*

$$\begin{aligned} f: X \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (x, t) &\longrightarrow f(x, t) := f_t(x) \end{aligned}$$

que verifica as seguintes propriedades: $f_0 \equiv id_X$, $f_1(X) = Y$ e f é contínua. Se, adicionalmente, $f_t|_Y \equiv id_Y$ então denominamos a função por **retração forte por deformação**. A Y chamamos **retrato** de X .

Intuitivamente a retração por deformação de X em Y significa que o espaço X pode ser continuamente encolhido no espaço Y . As retrações preservam muitas propriedades topológicas do espaço original, em particular a **caraterística de Euler** [4]. A caraterística de Euler é um número inteiro, χ , associado a um espaço topológico, e que é invariante a deformações contínuas, pelo que este conceito é denominado de **invariante topológico**. Em seguida apresentamos alguns exemplos de retrações.

Exemplo 3.3.1. *Dado um poliedro simples, a sua caraterística de Euler é um. De facto, todo o poliedro simples pode ser deformado num ponto, pelo que ambos têm a mesma caraterística de Euler, como ilustrado na Figura 3.28.*

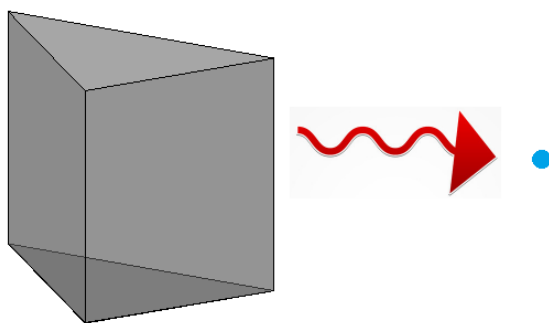


Fig. 3.28 Deformação de um poliedro simples num ponto.

Exemplo 3.3.2. *Dado um poliedro com H buracos simples, a sua caraterística de Euler é $1 + H$. Na Figura 3.29 ilustramos o caso em que o poliedro tem apenas um buraco simples, podendo este ser deformado numa superfície esférica.*

Exemplo 3.3.3. *Dado um poliedro com T túneis, a sua caraterística de Euler é $1 - T$. Na Figura 3.30 ilustramos o caso em que o poliedro tem apenas um túnel, podendo este ser deformado num círculo.*

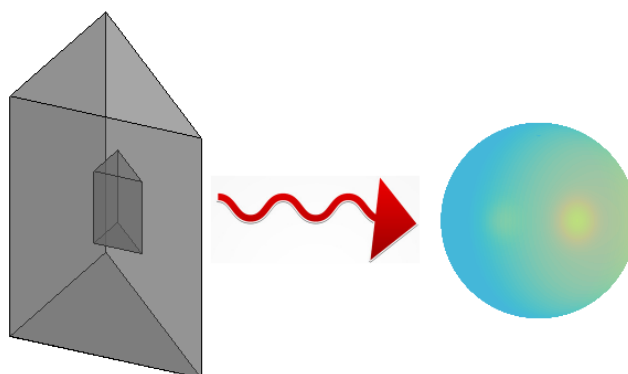


Fig. 3.29 Deformação de um poliedro com um buraco simples numa superfície esférica.

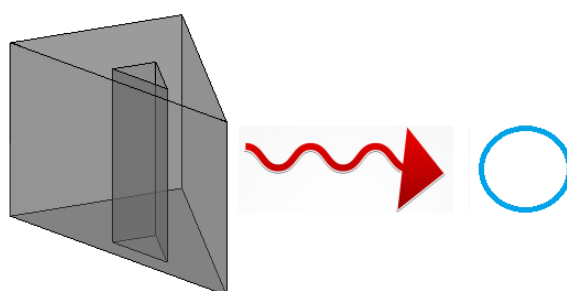


Fig. 3.30 Deformação de um poliedro com um túnel num círculo.

O nosso objetivo seria mostrar que o esqueleto retilíneo é uma retração por deformação forte do poliedro original. Isto resume-se a provar que cada célula se deforma nas faces que constituem a sua fronteira, com exceção da face que a gerou, ou seja, que é possível deformar cada célula nas faces do esqueleto retilíneo que lhe são adjacentes. Isto é verdade para esqueletos retilíneos planares e para uma variante de esqueletos retilíneos bidimensionais. A monotonia das células sugere que isso deve ser geralmente verdade, no entanto só conseguimos garanti-lo para células simples. Nestes casos, a fronteira de cada célula, excepto a face que a gerou, é conexa e simples e podemos deformar continuamente a célula nas faces do esqueleto retilíneo que lhe são adjacentes. Quando a partição de um determinado poliedro segundo o seu esqueleto retilíneo tem apenas células simples, tem-se o seguinte resultado.

Corolário 3.3.1. *A característica de Euler do esqueleto retilíneo de um determinado poliedro coincide com a do próprio poliedro (se todas as células forem simples).*

Notemos que poliedros que não são simples podem ser particionados, de acordo com o seu esqueleto retilíneo, em células que são, todas elas, simples. A Figura 3.31 apresenta um exemplo que ilustra esta situação.

O cálculo da característica de Euler torna-se mais acessível quando estamos perante complexos simpliciais, que definimos em seguida. Interessa-nos particularmente o estudo das características de complexos simpliciais que sejam bidimensionais.

Definição 3.3.2. [18] *Um complexo simplicial bidimensional é uma união finita de triângulos, sendo que a interseção entre quaisquer dois ou é o vazio, ou um vértice ou uma aresta comuns.*

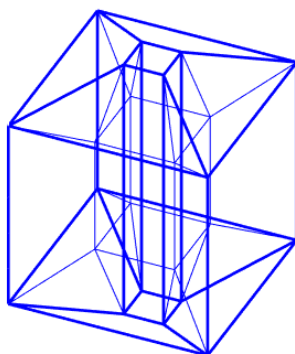


Fig. 3.31 Poliedro com um túnel particionado em células simples.

De acordo com [18], a característica de Euler de um complexo simplicial bidimensional K é dada por

$$\chi(K) = n_0 - n_1 + n_2, \quad (3.1)$$

onde n_0 é o número de vértices, n_1 o número de arestas e n_2 o número de faces de K .

No que se segue, denotamos o número de vértices, de arestas e de faces de um determinado poliedro Q por $v(Q)$, $a(Q)$ e $f(Q)$ respetivamente. Analogamente, $v(S(Q))$, $a(S(Q))$ e $f(S(Q))$ denotam o número de nós, de arcos e de faces do esqueleto retilíneo de Q , respetivamente. Note-se que, em $v(S(Q))$, não estamos a contabilizar os nós exteriores.

O resultado seguinte apresenta-nos uma fórmula para o cálculo da característica de Euler do esqueleto retilíneo de um determinado poliedro.

Proposição 3.3.1. *Dado um poliedro Q , a característica de Euler do seu esqueleto retilíneo, $S(Q)$, é dada por*

$$v(S(Q)) + v(Q) - a(S(Q)) - a(Q) + f(S(Q)).$$

Demonstração: Apesar do esqueleto retilíneo de um poliedro não ser um complexo simplicial, este pode ser transformado num, por meio da triangulação das suas faces. De facto, todo o polígono pode ser triangulado [16]. Tal triangulação pode ser feita sem adição de novos vértices. Mais, sempre que, aquando da triangulação, acrescentamos uma nova aresta estamos a acrescentar uma nova face.

Por (3.1), a característica de Euler do complexo simplicial K , resultante da triangulação, é

$$\chi(K) = v(K) - a(K) + f(K),$$

onde $v(K)$, $a(K)$ e $f(K)$ denotam os vértices, as arestas e as faces de K , respetivamente. Assim, denotando por N o número de arestas (e de faces) acrescentadas pela triangulação, temos que

$$\begin{aligned} \chi(K) &= v(S(Q)) + v(Q) - a(S(Q)) - a(Q) - N + f(S(Q)) + N \\ &= v(S(Q)) + v(Q) - a(S(Q)) - a(Q) + f(S(Q)) \end{aligned}$$

Como a característica de Euler do esqueleto retilíneo e do complexo simplicial K coincidem, pois estamos a referir-nos à mesma superfície, temos provada a proposição. \square

Vimos anteriormente que, no caso em que o esqueleto retilíneo de um poliedro o particiona em células simples, é possível definir uma deformação forte de cada uma das células nas faces do

esqueleto retilíneo que lhe são adjacentes. Podemos então combiná-las para criar uma retração forte do poliedro no seu esqueleto retilíneo. Isto significa que neste caso a característica de Euler do poliedro e do respetivo esqueleto retilíneo coincidem.

Corolário 3.3.2. *Se todas as células, resultantes da partição do poliedro Q segundo o seu esqueleto retilíneo, forem simples temos que*

$$\chi(Q) = v(S(Q)) + v(Q) - a(S(Q)) - a(Q) + f(S(Q)).$$

No que se segue iremos utilizar o Corolário 3.3.2 para estabelecer algumas relações entre o número de elementos de um poliedro genérico Q e o número de elementos do seu esqueleto retilíneo, $S(Q)$.

Tendo em conta que em cada nó de $S(Q)$ incidem quatro arcos do esqueleto e que em cada vértice de Q apenas incide um, temos que

$$v(Q) + 4v(S(Q)) = \sum_{a_i \text{ arco de } S(Q)} v(a_i) = 2a(S(Q)), \quad (3.2)$$

onde $v(a_i)$ denota o número de vértices onde o arco a_i incide.

Uma outra relação entre vértices e arestas é a seguinte

$$3v(Q) + 6v(S(Q)) = \sum_{f_i \text{ face de } S(Q)} v(f_i) = \sum_{f_i \text{ face de } S(Q)} a(f_i) = a(Q) + 3a(S(Q)), \quad (3.3)$$

onde $v(f_i)$ e $a(f_i)$ denotam o número de vértices e de arestas da face f_i , respetivamente. Isto é consequência do facto de que em cada vértice de Q incidem três faces, em cada nó de $S(Q)$ incidem seis, em cada aresta do poliedro incide uma face e em cada arco do esqueleto incidem três faces.

De (3.2) e (3.3) temos que

$$3v(Q) = 2a(Q). \quad (3.4)$$

Este resultado era previsível uma vez que em cada vértice do poliedro incidem três arestas.

Sabemos que a característica de Euler para o esqueleto retilíneo é calculada segundo a fórmula

$$\chi(S(Q)) = v(S(Q)) + v(Q) - a(S(Q)) - a(Q) + f(S(Q)) \quad (3.5)$$

Partindo da equação (3.5) e substituindo as parcelas $a(S(Q))$ e $a(Q)$ recorrendo a (3.2) e (3.4) obtemos

$$v(S(Q)) = f(S(Q)) - v(Q) - \chi(S(Q)). \quad (3.6)$$

Do raciocínio anterior temos a seguinte proposição.

Proposição 3.3.2. *Seja Q um poliedro genérico cuja partição determinada pelo seu esqueleto retilíneo retilíneo, $S(Q)$, o deixa dividido exclusivamente em células simples. Então tem-se que*

$$v(S(Q)) = f(S(Q)) - v(Q) - \chi(Q). \quad (3.7)$$

Este resultado diz-nos que o número de eventos, que ocorrem durante o processo de encolhimento de um poliedro nas condições referidas, é linear relativamente ao número de faces do respetivo esqueleto retilíneo.

Podemos ser levados a pensar que o número de vértices de $S(Q)$ é $\mathcal{O}(n^2)$, contudo isto não é verdade pois cada plano bissetor a dois quaisquer planos que contenham as faces de Q podem conter mais que uma face de $S(Q)$.

Como mencionado na Secção 3.2.4, o número de eventos que ocorrem durante o processo de encolhimento de um poliedro é trivialmente $\mathcal{O}(n^4)$. Em [6] Aurenhammer e Walzl obtiveram um resultado melhor e provaram que o número de eventos é $\mathcal{O}(n^3)$, usando técnicas muito elaboradas. Seria interessante conseguir o mesmo a partir de (3.7).

3.3.5 Comentário acerca das aplicações dos esqueletos retilíneos de poliedros

Ao contrário do que acontece com esqueletos retilíneos de polígonos, o estudo feito sobre esqueletos retilíneos de poliedros é bastante recente. Desta forma os algoritmos existentes ainda são rudimentares não estando ainda otimizados. A consequente aplicação destes algoritmos na indústria, mais precisamente, no cálculo de curvas *mitered offset* é algo que se encontra ainda em desenvolvimento.

Bibliografia

- [1] Aichholzer, O., Alberts, D., Aurenhammer, F., and Gärtner, B. (1995a). A novel type of skeleton for polygons. *Journal of Universal Computer Science*, 1(12):752 – 761.
- [2] Aichholzer, O., Alberts, D., Aurenhammer, F., and Gärtner, B. (1995b). Straight skeletons of simple polygons. *Proc. 4th Internat. Symp. of LIESMARS*, pages 114–124.
- [3] Aichholzer, O. and Aurenhammer, F. (1996). Straight skeletons for general polygonal figures in the plane. *International Computing and Combinatorics Conference, Springer Berlin Heidelberg*, pages 117–126.
- [4] Armstrong, M. A. (1983). *Basic Topology*. Springer-Verlag.
- [5] Aurenhammer, F. and Walzl, G. (2013). Structure and computation of straight skeletons in 3-space. *International Symposium on Algorithms and Computation, Springer Berlin Heidelberg*, pages 44–54.
- [6] Aurenhammer, F. and Walzl, G. (2016). Straight skeletons and mitered offsets of nonconvex polytopes. *Discrete and Computational Geometry*, 56(3):743–801.
- [7] Barequet, G., Eppstein, D., Goodrich, M., and Vaxman, A. (2008). Straight skeletons of three-dimensional polyhedra. *European Symposium on Algorithms. Springer Berlin Heidelberg*, pages 148–160.
- [8] Biedl, T., Held, M., Huber, S., Kaaser, D., and Palfrader, P. (2015). Weighted straight skeletons in the plane. *Computational Geometry*, 48(2):120–133.
- [9] Cacciola, F. (2004). A cgal implementation of the straight skeleton of a simple 2d polygon with holes. *2nd CGAL User Workshop*.
- [10] Demaine, E. and Demaine, M. (1997). Computing extreme origami bases. *Technical Report CS-97-22, Department of Computer Science, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada*, 14.
- [11] Demaine, E., Demaine, M., and Lubiw, A. (1999). Folding and one straight cut suffice. *Proceedings of the 10th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 891–892.
- [12] Eppstein, D. and Erickson, J. (1998). Raising roofs, crashing cycles, and playing pool: Applications of a data structure for finding pairwise interactions. *Discrete and Computational Geometry*, 4(12):569–592.
- [13] Felkel, P. and Obdrzalek, S. (1998). Straight skeleton implementation. *Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics*, pages 210–218.
- [14] Gardner, M. (1995). Paper cutting. *New Mathematical Diversions (Revised Edition). The Mathematical Association of America, Washington, D.C.*, pages 58–69.
- [15] Huber, S. (2011). *Computing straight skeletons and motorcycle graphs: theory and practice*. PhD thesis, University of Salzburg, Austria.

- [16] O'Rourke, J. (1987). *Art gallery theorems and algorithms*. Oxford University Press.
- [17] O'Rourke, J. (2011). *How to fold it: the mathematics of linkages, origami, and polyhedra*. Cambridge University Press.
- [18] Suarez, L. (2009). O que é a característica de euler? *Gazeta de Matemática*, 158:42–45.
- [19] Walzl, G. (2015). *Straight skeletons from plane to space*. PhD thesis, Graz University of Technology.

Anexo A

Figura destacável

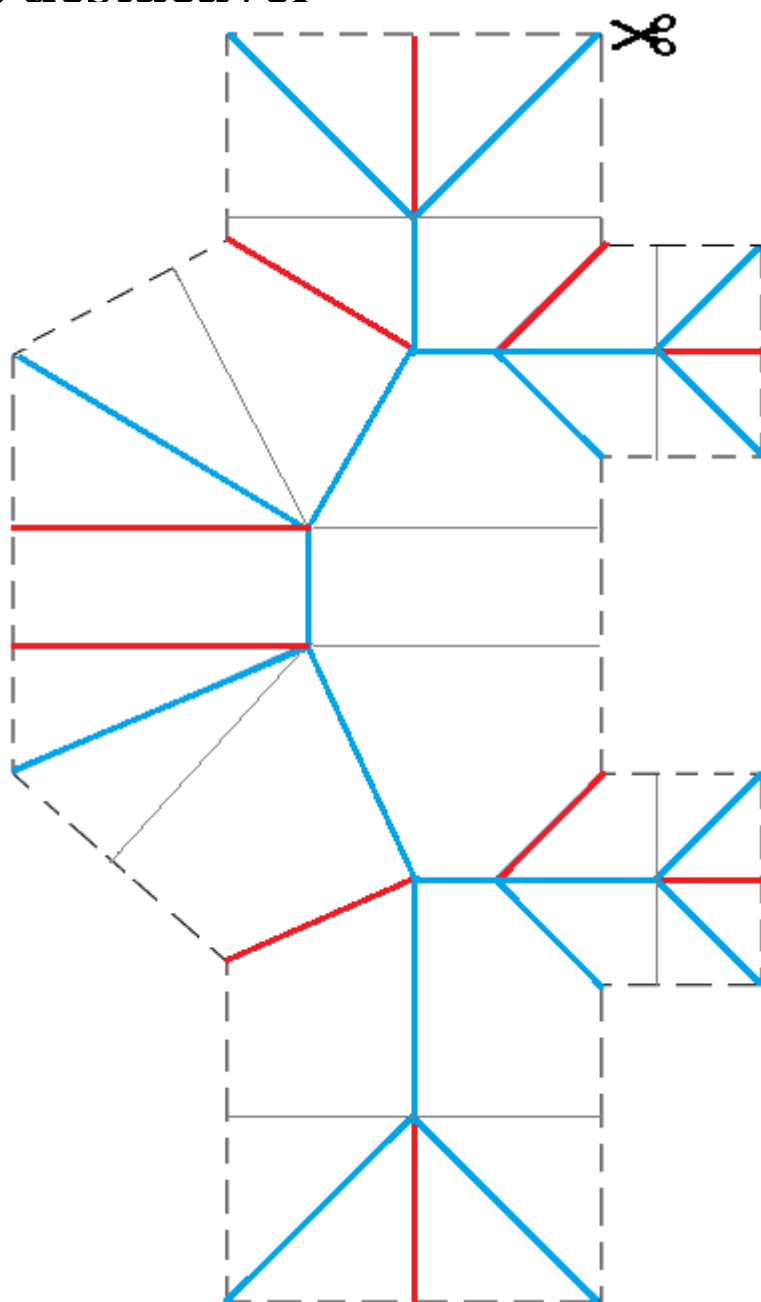


Fig. A.1 Destacável com as dobras assinaladas.

Anexo B

Eventos de paragem

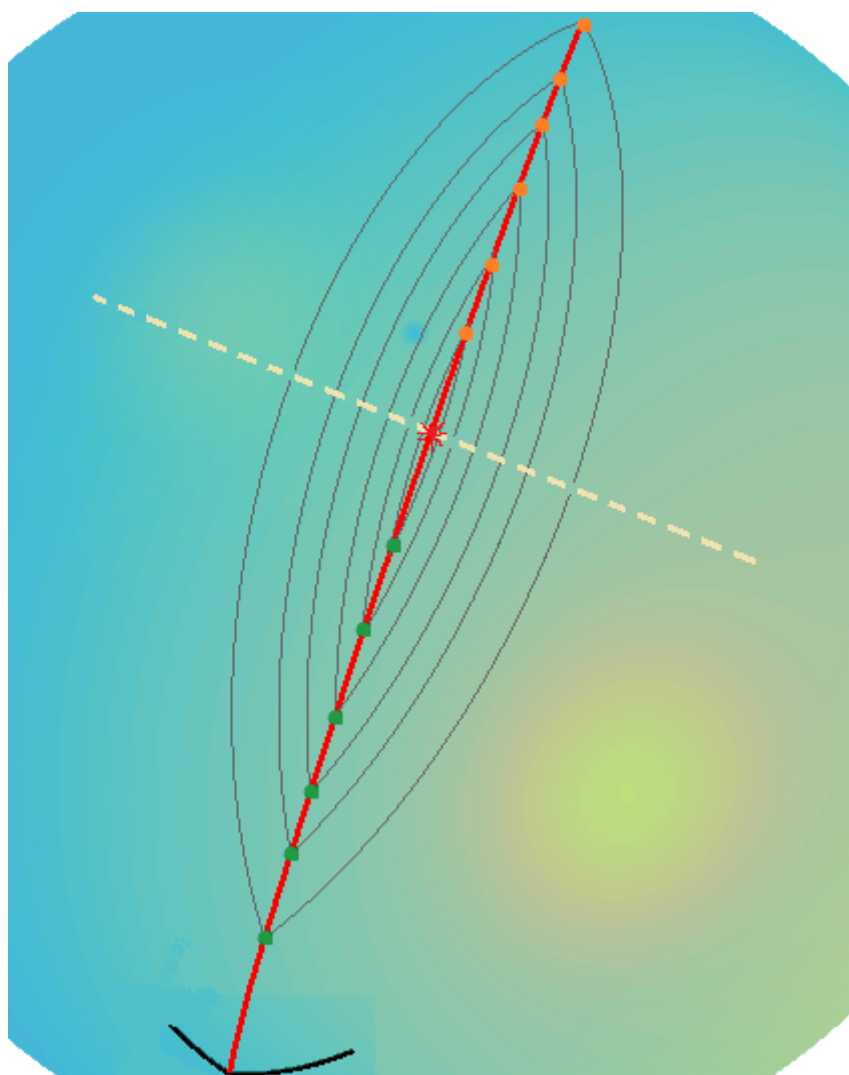


Fig. B.1 Processo de encolhimento de um polígono esférico localizado. A preto temos dois dos segmentos que constituem a fronteira de \mathcal{P}_E . Parte do esqueleto esférico está assinalado a vermelho. A localização do evento de paragem está assinalada com um asterisco vermelho. A interseção dos planos *offset* com a superfície esférica está assinalada a cinzento. Os pontos a verde sinalizam a interseção da linha correspondente à interseção dos planos *offset* com a superfície esférica antes do evento, e os pontos a laranja depois do evento.

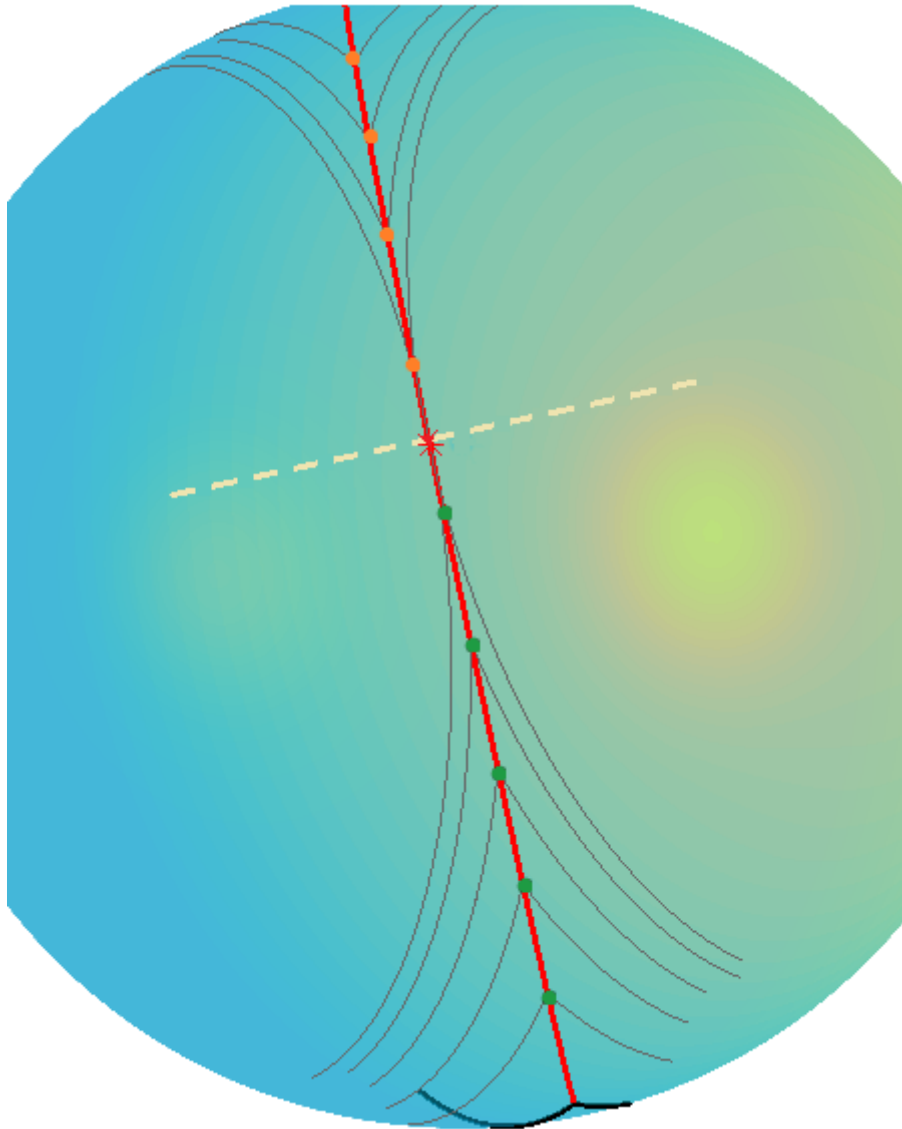


Fig. B.2 Processo de encolhimento de um polígono esférico localizado. A preto temos dois dos segmentos que constituem a fronteira de \mathcal{P}_E . Parte do esqueleto esférico está assinalado a vermelho. A localização do evento de paragem está assinalada com um asterisco vermelho. A interseção dos planos *offset* com a superfície esférica está assinalada a cinzento. Os pontos a verde sinalizam a interseção da linha correspondente à interseção dos planos *offset* com a superfície esférica antes do evento, e os pontos a laranja depois do evento.