



Tatiana Andreia Marinha Silva

VIBRAÇÃO DE VIGAS COM SECÇÃO ABERTA DE PAREDE FINA — EFEITO DAS TENSÕES INICIAIS

VIBRATION OF THIN-WALLED BEAMS WITH OPEN
SECTIONS — THE EFFECT OF INITIAL STRESSES

Dissertação de Mestrado Integrado em Engenharia Civil, na área de Especialização em Estruturas,
orientada pelo Professor Doutor Anísio Alberto Martinho de Andrade e pelo Professor Doutor Paulo Manuel Mendes
Pinheiro da Providência e Costa

Coimbra, 7 de Fevereiro de 2017



UNIVERSIDADE DE COIMBRA



FCTUC DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Tatiana Andreia Marinha Silva

VIBRAÇÃO DE VIGAS COM SECÇÃO ABERTA DE PAREDE FINA – EFEITO DAS TENSÕES INICIAIS

VIBRATION OF THIN-WALLED BEAMS WITH OPEN SECTIONS – THE EFFECT OF INITIAL STRESSES

Dissertação de Mestrado Integrado em Engenharia Civil, na área de Especialização em Estruturas,
orientada pelo Professor Doutor Anísio Alberto Martinho de Andrade e pelo Professor Doutor Paulo Manuel Mendes
Pinheiro da Providência e Costa

Esta Dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor.
O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer
responsabilidade, legal ou outra, em relação a erros ou omissões
que possa eqpvgt0

Coimbra, 7 de Fevereiro de 2017

AGRADECIMENTOS

Com a presente dissertação concretizo um sonho muito importante na minha vida, que me levou um longo período de tempo a atingir e ao longo do qual contei com importantes apoios e incentivos, sem os quais este sonho não se teria tornado numa realidade, e aos quais estarei eternamente grata. Assim, quero deixar um especial agradecimento:

Ao *Professor Doutor Anísio Andrade*, pela sua orientação, apoio, motivação, inteira disponibilidade, paciência, dedicação, pela partilha do saber e as valiosas contribuições para o trabalho, pelas opiniões e críticas, total colaboração no solucionar de dúvidas e problemas que foram surgindo ao longo da realização deste trabalho e por todas as palavras de incentivo ao longo de todo este trabalho. Foi uma pessoa imprescindível para o desenvolvimento desta dissertação.

Ao *Professor Doutor Paulo Providência* por toda a simpatia e boa disposição.

Ao *Meu Namorado Alexandre Marques*, pelo amor, amizade e carinho, pela presença assídua ao longo de todo o curso, pelo incentivo, compreensão e encorajamento durante todo este período.

Aos *Meus Amigos* que estiveram ao meu lado durante esta fase, em especial à *Carolina Pereira*, à *Cátia Freitas* e à *Sara Alves*, pela amizade, companheirismo, força e apoio nos momentos mais difíceis e por poder contar sempre convosco.

Aos *Meus Colegas*, pela ajuda e disponibilidade demonstrada.

Por último, mas não menos importante, dirijo um agradecimento muito especial aos *Meus Pais*, *Maria Adelaide Silva e Vítor Silva*, e à *Minha Irmã, Diana Silva*, pelo seu amor e apoio incondicional, pela atenção, incentivo, amizade e paciência demonstrados, por estarem sempre presentes, não só durante este período da minha vida mas em cada momento, e por me transmitirem a confiança necessária para realizar os meus sonhos. A eles dedico este trabalho.

RESUMO

As rigidezes de flexão no plano principal de menor inércia e de torção dos perfis de secção aberta de parede fina são reduzidas, o que faz com que apresentem baixas frequências próprias de vibração nos modos de flexão lateral e torção. Estas rigidezes podem ainda ser degradadas pela presença de esforços (tensões generalizadas) iniciais, conduzindo a frequências próprias ainda mais baixas.

Nesta dissertação, é apresentado um modelo matemático unidimensional para avaliar a influência dos esforços iniciais na vibração por flexão lateral e torção de vigas com secção em I de parede fina, de banzos iguais (secção duplamente simétrica) ou desiguais (secção monossimétrica). O modelo tem por base as hipóteses clássicas de Vlasov e inclui os efeitos da inércia associada à rotação das secções transversais em torno do seu eixo fraco e da inércia associada ao empenamento por torção. As equações do movimento são estabelecidas através de uma abordagem variacional, por aplicação do princípio de Hamilton. A técnica de separação das variáveis permite finalmente estabelecer o problema de valores e funções próprios que fornece as frequências próprias e os modos de vibração.

Para efeitos de verificação e ilustração, considerou-se uma família de vigas com condições de apoio “padrão”. De forma analítica, determinaram-se as frequências próprias e os modos de vibração nos seguintes casos: (i) secção duplamente simétrica sem momentos fletores iniciais, (ii) secção monossimétrica sem momentos fletores iniciais e (iii) secção duplamente simétrica com uma distribuição inicial uniforme de momentos fletores. Em cada um destes casos, os efeitos da inércia de rotação das secções em torno do seu eixo fraco e da inércia associada ao empenamento de torção foram primeiro incluídos na análise e depois desprezados, para que a sua importância pudesse ser avaliada. Verificou-se uma excelente concordância com os resultados disponíveis na literatura, sempre que uma tal comparação foi possível. A condição de anulamento das frequências próprias de vibração permitiu obter exatamente os mesmos momentos de bifurcação por encurvadura lateral que uma análise linear de estabilidade, baseada apenas em considerações de equilíbrio estático.

Palavras-chave: Vibrações, Tensões iniciais, Flexão lateral e torção, Vigas de secção em I de parede fina, Inércias de rotação e empenamento

ABSTRACT

Thin-walled open section members typically possess low minor-axis bending and torsional rigidities, which causes them to exhibit low natural vibration frequencies in the lateral bending and torsion modes. These rigidities can still be degraded by the presence of initial stresses, leading to even lower frequencies.

In this dissertation, a one-dimensional mathematical model is presented to assess the influence of the initial stresses on the lateral flexural and torsional vibrations of I-section thin-walled beams, with equal or unequal flanges. The model is based on the classical Vlasov assumptions and includes the effects of the inertia associated with the rotation of the cross sections about the weak axis and the inertia associated with torsion warping. The equations of motion are established through a variational approach, by applying Hamilton's principle. Separation of variables then leads to an eigenproblem for the natural frequencies and vibration modes.

For verification and illustration purposes, a family of beams with "standard" support conditions was considered. The natural frequencies and vibration modes were determined in the following cases: (i) doubly symmetric section without initial bending moments, (ii) singly symmetric section without initial bending moments and (iii) doubly symmetric section with an uniform bending moment distribution. In each of these cases, the effects of the rotational inertia of the sections about the minor axis and the inertia associated with torsion warping were first included in the analysis and then neglected, so that their importance could be assessed. There was excellent agreement with the results available in the literature, whenever such a comparison was possible. The vanishing of the natural frequencies provided exactly the same lateral-torsional buckling moments as a linear stability analysis, based only on considerations of static equilibrium.

Keywords: Vibrations, Initial stresses, Minor-axis bending and torsion, Thin-walled I-beams, Rotational and warping inertias

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	Enquadramento geral	1
1.2	Objetivo e âmbito da dissertação	1
1.3	Organização da dissertação.....	2
2	DESCRIÇÃO E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA 1D DO PROBLEMA	4
2.1	Descrição do problema	4
2.2	Campo de deslocamentos.....	6
2.3	Energia cinética.....	8
2.4	Energia potencial total	9
2.5	Equações de Lagrange do movimento. Condições de fronteira e condições iniciais...	11
2.6	Problema de valores próprios – Frequências próprias e modos de vibração	19
3	EXEMPLO DE VERIFICAÇÃO E ILUSTRAÇÃO	23
3.1	Caso particular 1 – Viga de secção em Γ duplamente simétrica (banzos iguais), com apoios “padrão” e sem tensões iniciais.....	24
3.2	Caso particular 2 – Viga de secção em Γ monossimétrica (banzos desiguais), com apoios “padrão” e sem tensões iniciais.....	30
3.3	Caso particular 3 – Viga de secção em Γ duplamente simétrica, com apoios “padrão” e momentos $M_y = M = \text{cte.}$	34
4	CONCLUSÃO.....	40
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	42

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 – Geometria da viga (configuração indeformada) e referencial Cartesiano adotado...	5
Figura 2.2 – Sistema inicial de forças generalizadas conservativas (independentes do tempo), aplicado de forma quase-estática.....	5
Figura 2.3 – Deslocamentos generalizados.....	7
Figura 2.4 – Função de empenamento ω na linha média de uma secção em I monossimétrica com banzos de igual espessura.....	7
Figura 2.5 – Posição do centro de corte de uma secção em I monossimétrica com banzos de igual espessura.....	8
Figura 2.6 – Efeito da assimetria da secção transversal (adaptado de Trahair, 1993).....	10
Figura 2.7 – Efeito da posição do ponto de aplicação das forças quase-estáticas iniciais.....	11
Figura 2.8 – Interpretação física da parcela $\rho I_z \ddot{v}_c''(x, t)$ na equação diferencial (44) e das parcelas $\rho I_z \ddot{v}_c'(L, t)$ e $\rho I_z \ddot{v}_c'(0, t)$ nas condições de fronteira naturais (46)-(47).....	17
Figura 2.9 – Interpretação física das parcelas $\rho I_w \ddot{\phi}''(x, t)$ na equação diferencial (45) e das parcelas $\rho I_w \ddot{\phi}'(L, t)$ e $\rho I_w \ddot{\phi}'(0, t)$ nas condições de fronteira (50)-(51).....	18
Figura 3.1 – Exemplo de verificação e ilustração.....	23
Figura 3.2 – Influência da inércia de rotação da secção transversal em torno do seu eixo central de menor inércia nas frequências próprias dos três primeiros modos de vibração por flexão lateral.....	27
Figura 3.3 – Influência da inércia de empenamento das secções transversais nas frequências próprias dos três primeiros modos de vibração por torção.....	30
Figura 3.4 – Exemplo numérico ilustrativo – Características geométricas da secção transversal (monossimétrica).....	33
Figura 3.5 – Exemplo numérico ilustrativo – Características geométricas da secção transversal (duplamente simétrica).....	37
Figura 3.6 – Exemplo numérico ilustrativo – Menor frequência própria angular em função do momento aplicado.....	38

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 3.1 – Exemplo numérico ilustrativo – Parâmetros adimensionais.....	33
Quadro 3.2 – Exemplo numérico ilustrativo – Frequências próprias angulares.....	33
Quadro 3.3 – Exemplo numérico ilustrativo – Frequências próprias angulares quando se despreza a inércia associada à rotação das secções em torno do eixo z e ao empenamento de torção das secções.....	34
Quadro 3.4 – Exemplo numérico ilustrativo – Parâmetros adimensionais.....	37
Quadro 3.5 – Exemplo numérico ilustrativo – Menor frequência própria angular em função do momento aplicado.....	38

SIMBOLOGIA

Letras latinas minúsculas

a, b – Coeficientes

b_1 – Largura do banzo inferior

b_2 – Largura do banzo superior

c_w, m – Parâmetros adimensionais

d_c – Coordenada do centro de corte

$\dot{f}(t)$ – Derivada total em ordem a t

$f'(x)$ – Derivada total em ordem a x

$\dot{f}(x, t)$ – Derivada parcial em ordem a t

$f'(x, t)$ – Derivada parcial em ordem a x

$f^*(x, y, z, t)$ – Deslocamentos adicionais

h – Altura do perfil de secção, medida entre as linhas médias dos banzos

k – Frequência própria angular

k_0 – Frequência própria angular desprezando a inércia associada à rotação das secções em torno do eixo fraco e/ou a inércia de associada ao empenamento por torção

n – Número de semi-ondas do modo de vibração

q – Força transversal distribuída com a direção e sentido do eixo z

t – Variável tempo

t_0 – Instante final do intervalo de tempo considerado

t_f – Espessura do banzo da secção

t_w – Espessura da alma da secção

$u(x, y, z, t)$ – Campo de deslocamentos da superfície média da viga segundo o eixo x

$v(x, y, z, t)$ – Campo de deslocamentos da superfície média da viga segundo o eixo y

$v_c(x, t)$ – Deslocamento segundo o eixo y do centro de corte da secção de abscissa x no instante t

$w(x, y, z, t)$ – Campo de deslocamentos da superfície média da viga segundo o eixo z

x – Eixo longitudinal da viga

y – Eixo de maior inércia (horizontal) da secção transversal

z – Eixo de menor inércia (vertical) da secção transversal

z_c – Cota do centro de corte

z_q – Cota de aplicação da carga q

z_{Q_0} – Cota de aplicação da carga Q_0

z_{Q_L} – Cota de aplicação da carga Q_L

Letras latinas maiúsculas

A – Área da secção transversal

C – Centro de corte da secção transversal

C_i – Constante

E – Módulo de elasticidade

$F(t)$ – Função que representa a dependência do tempo num movimento síncrono

G – Módulo de distorção; Centro de gravidade da secção transversal

I_c – Momento polar de inércia da secção transversal em relação ao centro de corte

I_y – Momento de inércia da secção transversal em relação ao eixo principal central de maior inércia y

I_{yz} – Produto de inércia

$I_{y\omega}$ – Produto de inércia setorial em relação ao eixo y

I_z – Momento de inércia da secção transversal em relação ao eixo principal central de menor inércia z

$I_{z\omega}$ – Produto de inércia setorial em relação ao eixo z

I_w – Constante de empenamento

J – Constante de Saint-Venant

L – Comprimento da viga

\mathcal{L} – Função lagrangiana do sistema

M_0 – Momento concentrado aplicado na secção de abcissa 0

M_L – Momento concentrado aplicado na secção de abcissa L

M_y – Momento fletor em relação ao eixo y

Q_0 – Força concentrada aplicada na secção de abcissa 0, com a direção e sentido do eixo z

Q_L – Força concentrada aplicada na secção de abcissa L , com a direção e sentido do eixo z

S – Ação

S_y – Momento estático em relação ao eixo y

S_z – Momento estático em relação ao eixo z

S_ω – Momento estático setorial

T – Energia cinética

U – Energia potencial total

U_{el} – Energia potencial elástica

U_g – Parcela geométrica da energia potencial total

V – Volume da viga

$V_c(x)$ – Deslocamento segundo o eixo y do centro de corte, dependente apenas da abscissa x da secção transversal

$\tilde{V}_c(\xi)$ – Deslocamento $V_c(x)$ adimensionalizado

V_y, V_z – Esforços transversos

W_e – Trabalho realizado pelas forças exteriores

Letras gregas minúsculas

$\alpha_z, \alpha_c, \alpha_w, \chi$ – Parâmetros adimensionais

β_y – Propriedade geométrica da secção associada à monossimetria

δ – Símbolo de variação

λ – Constante de separação

μ_z, μ_w – Valores próprios adimensionais

ξ – Coordenada de posição relativa

ρ – Massa volúmica do material

$\phi(x, t)$ – Rotação da secção de abscissa x em torno do eixo dos xx no instante t

$\omega(y, z)$ – Função de empenamento

Letras gregas maiúsculas

$\Phi(x)$ – Rotação de torção (em torno do eixo dos xx), dependente apenas da abscissa x da secção transversal

$\tilde{\Phi}(\xi)$ – Rotação $\Phi(x)$ definida em função da coordenada adimensional ξ

1 INTRODUÇÃO

1.1 Enquadramento geral

Os perfis de secção aberta de parede fina são largamente utilizados em engenharia estrutural em virtude da sua elevada eficiência quando solicitados à flexão no plano principal de maior inércia. Em contrapartida, as suas rigidezes de flexão no plano principal de menor inércia e de torção são reduzidas, o que, por um lado, os torna suscetíveis a fenómenos de instabilidade lateral e, por outro lado, faz com que apresentem baixas frequências próprias de vibração nos modos de flexão lateral e torção. Refira-se, a propósito do segundo aspeto, que o Eurocódigo 0 estabelece que “a frequência própria das vibrações da estrutura ou do elemento estrutural deverá ser mantida acima de valores apropriados, que dependem da função do edifício e da origem da vibração”, de forma a garantir a segurança em relação aos estados limites de utilização (NP EN 1990, 2009). As frequências próprias da estrutura ou do elemento estrutural são também determinantes na sua resposta à ação sísmica e, portanto, na verificação da segurança aos estados limites últimos e aos estados de limitação de danos definidos no Eurocódigo 8 (NP EN 1998-1, 2010), matéria especialmente relevante num país com elevada sismicidade como Portugal.

Sabe-se da dinâmica linear de estruturas que as frequências próprias e os modos de vibração de um sistema não amortecido dependem das suas características de rigidez e de massa (Clough e Penzien, 1993). Por outro lado, sabe-se da análise de fenómenos de instabilidade que a rigidez das estruturas esbeltas, suscetíveis à não linearidade geométrica, é afetada pelos esforços internos por via da chamada rigidez geométrica (Dias da Silva, 2013, Reis e Camotim, 2001). Compreende-se, assim, que a influência dos esforços internos (tensões iniciais) nas frequências próprias e modos de vibração de estruturas esbeltas, categoria na qual estão geralmente incluídas as estruturas reticuladas compostas por barras de parede fina, seja uma questão relevante na conceção, dimensionamento e verificação da segurança destas estruturas (Virgin, 2007).

1.2 Objetivo e âmbito da dissertação

O objetivo central desta dissertação consiste em apresentar um modelo matemático unidimensional (1D) para avaliar a influência dos esforços (tensões generalizadas) iniciais na

vibração por flexão lateral e torção de vigas com secção em I de parede fina, de banzos iguais (secção duplamente simétrica) ou desiguais (secção monossimétrica)¹. O modelo tem por base as hipóteses clássicas de Vlasov (1961) para a torção não uniforme. Inclui o efeito da inércia associada à rotação das secções transversais em torno do seu eixo fraco e da inércia associada ao empenamento por torção. Decorre das hipóteses de Vlasov que o empenamento associado ao esforço transversal é desprezado. As equações do movimento são estabelecidas através de uma abordagem variacional, por aplicação do princípio de Hamilton. Como refere Fung (1965), uma tal abordagem, para além da sua elegância formal, apresenta as seguintes vantagens:

- (1) Considera o sistema mecânico na sua globalidade, e não as partes individuais que o compõem.
- (2) Permite obter, de uma forma consistente, as equações de campo e as condições de fronteira que regem o problema.

A técnica de separação das variáveis permite finalmente estabelecer o problema de valores e funções próprios que fornece as frequências próprias e os modos de vibração.

Este assunto foi objeto de alguns estudos anteriores. Merece destaque o trabalho de Roberts (1987), de âmbito semelhante ao da presente dissertação, mas que despreza *ab initio* o efeito da inércia associada à rotação das secções transversais em torno do seu eixo fraco e da inércia associada ao empenamento por torção. Já os artigos de Prokić (2005) e Prokić e Lukić (2012) incidem especialmente sobre barras de parede fina cuja secção transversal, aberta, não apresenta qualquer simetria. Refira-se que este tema foi também abordado por Bebiano *et al.* (2008) no âmbito da teoria generalizada de vigas (vulgarmente designada pelo acrónimo GBT).

1.3 Organização da dissertação

A dissertação encontra-se dividida em quatro capítulos, o primeiro dos quais é a presente Introdução.

No segundo capítulo é feita a descrição, em termos precisos, do problema em estudo e é desenvolvida a sua formulação matemática 1D. São estabelecidas as equações de Lagrange e as condições de fronteira para o movimento de vibração lateral-torsional de uma viga em torno de uma configuração de equilíbrio estável inicial. Obtém-se ainda o problema de valores e funções próprios que permite determinar as correspondentes frequências próprias e modos de vibração.

¹ Por modelo unidimensional, entende-se a caracterização do comportamento mecânico de uma classe de barras esbeltas por intermédio de um número finito de equações nas quais está presente uma única variável independente espacial; as restantes variáveis devem ter uma interpretação física relativamente simples (Antman, 2005).

No terceiro capítulo é apresentado um exemplo de verificação e ilustração. No âmbito deste exemplo, estudam-se sucessivamente, de forma puramente analítica, (i) vigas de secção duplamente simétrica sem momentos fletores iniciais, (ii) vigas de secção monossimétrica sem momentos fletores iniciais e (iii) vigas de secção duplamente simétrica com uma distribuição inicial uniforme de momentos fletores. Avalia-se ainda o efeito da inércia associada à rotação das secções transversais em torno do seu eixo fraco e da inércia associada ao empenamento por torção. Sempre que possível, os resultados obtidos com o modelo desenvolvido são comparados com os disponíveis na literatura.

No quarto e último capítulo da dissertação são apresentadas as principais conclusões retiradas deste trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 DESCRIÇÃO E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA 1D DO PROBLEMA

2.1 Descrição do problema

Na presente dissertação, consideram-se vigas prismáticas com secção de parede fina em I, com banzos iguais (secção duplamente simétrica) ou desiguais (secção monossimétrica), sem quaisquer imperfeições (Figura 2.1). Adota-se um referencial Cartesiano ortonormado xyz tal que, na configuração indeformada:

- (1) O eixo x contém o lugar geométrico dos centros geométricos das secções transversais da viga (eixo longitudinal). As secções extremas têm abcissas $x = 0$ e $x = L$, onde L designa o comprimento da viga.
- (2) O eixo y coincide com o eixo principal central de maior inércia da secção $x = 0$ (é, portanto, paralelo aos banzos).
- (3) O eixo z coincide com o eixo principal central de menor inércia da secção $x = 0$ e está orientado “para baixo”.

Este referencial está também representado na Figura 2.1. Observe-se que o plano coordenado xz é um plano de simetria da configuração indeformada da viga.

O material é homogéneo, isotrópico e linearmente elástico, sendo caracterizado pelo módulo de elasticidade E , pelo módulo de distorção G e pela massa volúmica ρ .

Considera-se a atuação, de forma quase-estática, do sistema inicial de forças generalizadas conservativas (independentes do tempo) representado na Figura 2.2, constituído por:

- (1) Uma força transversal distribuída q , com a direção e sentido do eixo z , que inicialmente atua no plano de simetria xz , a uma cota z_q .
- (2) Duas forças concentradas Q_0 e Q_L , aplicadas nas secções de abcissa $x = 0$ e $x = L$, respetivamente, igualmente com a direção e sentido do eixo z e atuando inicialmente no plano de simetria xz , às cotas z_{Q_0} e z_{Q_L} .
- (3) Dois momentos concentrados nas extremidades da barra, M_0 e M_L . Com intuito de contornar algumas questões delicadas relacionadas com a definição de momentos conservativos (Simitse e Hodges, 2006), apenas é considerada a atuação destes momentos quando a rotação de torção da seção em que estão aplicados se encontrar impedida.

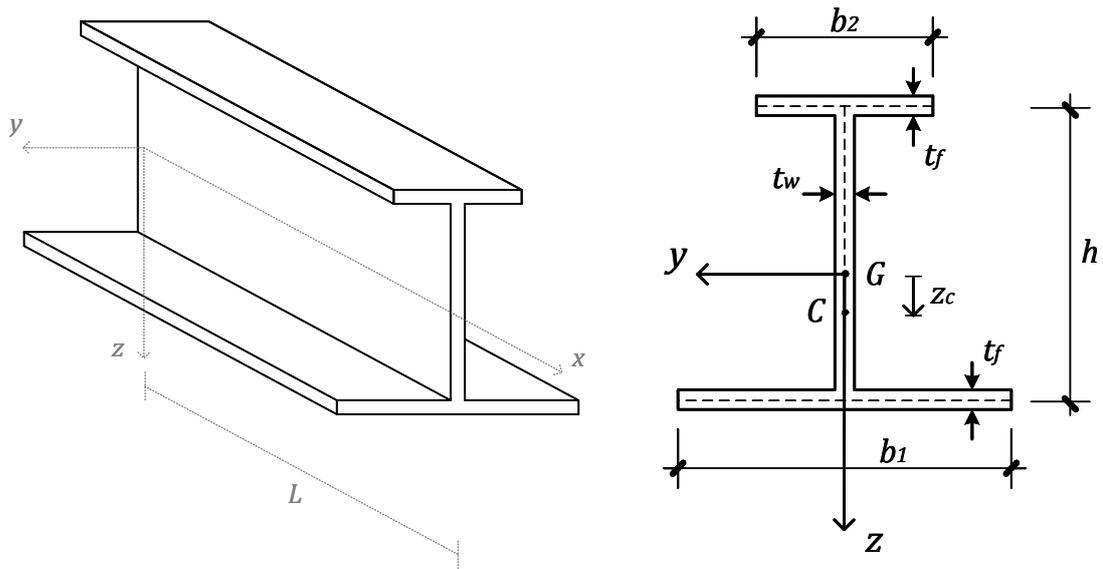


Figura 2.1 – Geometria da viga (configuração indeformada) e referencial Cartesiano adotado.

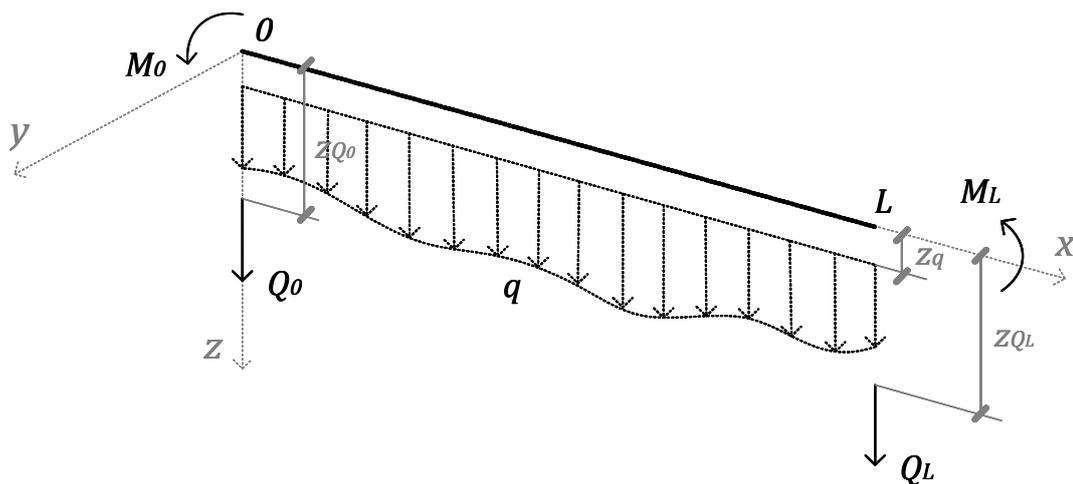


Figura 2.2 – Sistema inicial de forças generalizadas conservativas (independentes do tempo), aplicado de forma quase-estática.

Supõe-se que este sistema de forças inicial é insuficiente para provocar a instabilidade lateral da viga por flexão-torção (bambeamento). Conduz, assim, a um estado de equilíbrio estável, dito inicial, a que corresponde uma distribuição de momentos fletores M_y e de esforços transversos V_z (tensões generalizadas), assim como uma deformação de flexão no plano xz .

A viga executa agora um movimento de vibração por flexão lateral e torção, de pequena amplitude, em torno da configuração de equilíbrio estável inicial. Desprezando o (inevitável) amortecimento, pretende-se desenvolver um modelo 1D que permita a determinação das correspondentes frequências próprias e modos de vibração. Como hipótese simplificativa, admite-se que a configuração inicial (correspondente ao equilíbrio estável sob a ação do sistema

de forças indicado na Figura 2.2) pode ser confundida com a configuração indeformada (antes da aplicação daquele sistema de forças). Por outras palavras, admite-se que a viga permanece reta até executar o movimento de vibração. Refira-se que uma hipótese semelhante é frequentemente admitida na análise linear de estabilidade de vigas (Trahair, 1993).

2.2 Campo de deslocamentos

O campo de deslocamentos da viga quando executa um movimento de vibração por flexão lateral e torção em torno da configuração de equilíbrio estável inicial, adotada como configuração de referência, é definido com base nas hipóteses clássicas de Vlasov (1961):

- (1) As secções transversais não se deformam no seu plano².
- (2) Na superfície média da barra, as distorções γ_{xs} (que traduzem a variação do ângulo, inicialmente reto, entre as geratrizes da superfície média e as linhas médias das secções transversais) são desprezáveis.

Estas hipóteses permitem efetuar a requerida redução dimensional. Com efeito, permitem escrever as componentes do campo de deslocamentos da viga no instante t segundo os eixos Cartesianos na forma (Vlasov, 1961)

$$u^*(x, y, z, t) = -y v_c'(x, t) - \omega(y, z) \phi'(x, t). \quad (1)$$

$$v^*(x, y, z, t) = v_c(x, t) - (z - z_c) \phi(x, t), \quad (2)$$

$$w^*(x, y, z, t) = y \phi(x, t). \quad (3)$$

A plica exprime diferenciação em ordem a x . Seguindo a convenção simbólica de Gérardin e Rixen (2015), utiliza-se um asterisco para indicar que estes deslocamentos são medidos a partir da configuração de equilíbrio estável inicial (configuração de referência) e não a partir da configuração indeformada. Recorde-se, no entanto, que se admite que estas duas configurações podem ser identificadas uma com a outra, pelo que, neste caso, a distinção é, de facto, irrelevante.

A v_c e ϕ , que são apenas funções de x e t , dá-se o nome deslocamentos generalizados. São peças fundamentais do modelo unidimensional. Representam, respetivamente, o deslocamento segundo y do centro de corte e a rotação em torno do eixo longitudinal da secção transversal x no instante t (Figura 2.3). A função ω , independente de x e t , descreve a forma como as secções

² Esta hipótese permite considerar cada secção transversal como um disco rígido, para efeitos de descrição do movimento no seu plano. Para que a hipótese seja legítima, pode ser necessário prever reforços transversais (“stiffeners”) nas secções de apoio e aplicação de forças concentradas.

transversais empenam (isto é, deixam de permanecer planas) devido à torção. Por esta razão, é designada por função de empenamento (é também frequentemente designada por coordenada setorial). No caso de secções em I, é dada por (Vlasov, 1961)

$$\omega(y, z) = -y(z - z_c) \tag{4}$$

e encontra-se representada esquematicamente na Figura 2.4.

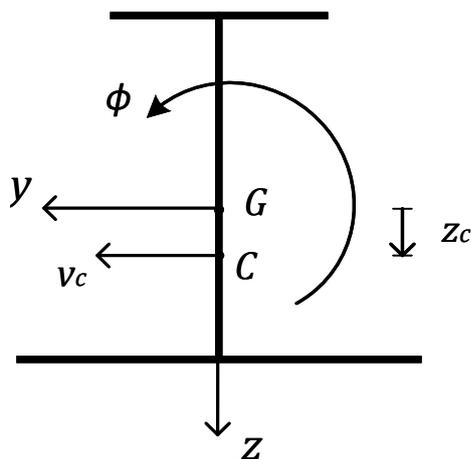


Figura 2.3 – Deslocamentos generalizados.

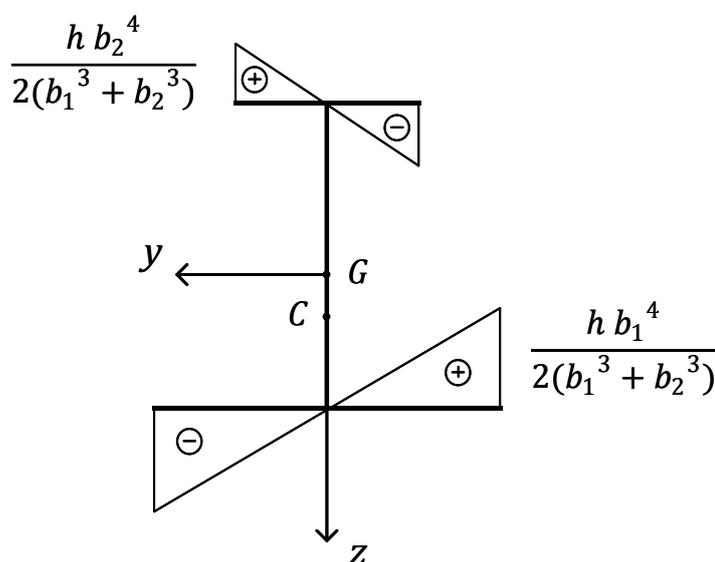


Figura 2.4 – Função de empenamento ω na linha média de uma secção em I monossimétrica com banzos de igual espessura.

Finalmente, refira-se que, no caso da secção representada na Figura 2.5, o centro de corte encontra-se a uma distância

$$d_c = h \frac{b_2^3}{b_1^3 + b_2^3}. \quad (5)$$

da linha média do banzo inferior (Reis e Camotim, 2001).

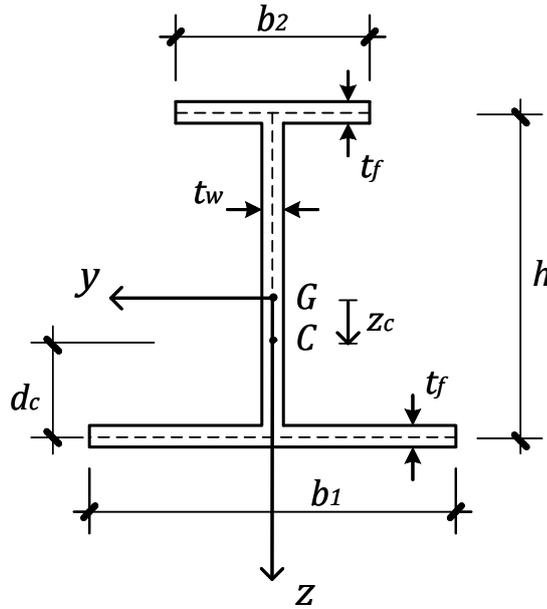


Figura 2.5 – Posição do centro de corte de uma secção em I monossimétrica com banzos de igual espessura.

2.3 Energia cinética

A energia cinética da viga quando executa um movimento de vibração por flexão lateral e torção em torno da configuração de equilíbrio estático inicial é dada por

$$T = \frac{\rho}{2} \int_V (\dot{u}^{*2} + \dot{v}^{*2} + \dot{w}^{*2}) dV = \frac{\rho}{2} \int_0^L \int_A (\dot{u}^{*2} + \dot{v}^{*2} + \dot{w}^{*2}) dA dx, \quad (6)$$

em que V é o volume ocupado pela viga na configuração inicial e A representa a área da sua secção transversal. Um ponto sobreposto ao símbolo de uma função exprime diferenciação em ordem a t . Com a expressão geral do campo de deslocamentos estabelecida anteriormente, obtém-se

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^L \int_A ((-y \dot{v}_c' - \omega \dot{\phi}')^2 + (\dot{v}_c - (z - z_c)\dot{\phi})^2 + (y \dot{\phi})^2) dA dx. \quad (7)$$

Efetuada a integração sobre a área da secção transversal e introduzindo as propriedades geométricas (Vlasov, 1961)

$$S_y = \int_A z dA = 0 \quad (\text{momento estático em relação ao eixo } y) \quad (8)$$

$$S_z = \int_A y dA = 0 \quad (\text{momento estático em relação ao eixo } z) \quad (9)$$

$$S_\omega = \int_A \omega dA = 0 \quad (\text{momento estático setorial}) \quad (10)$$

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad (\text{momento de inércia em relação ao eixo } y) \quad (11)$$

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (\text{momento de inércia em torno do eixo } z) \quad (12)$$

$$I_c = I_y + I_z + z_c^2 A \quad (\text{momento polar de inércia em relação ao centro de corte}) \quad (13)$$

$$I_w = \int_A \omega^2 dA \quad (\text{constante de empenamento}) \quad (14)$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA = 0 \quad (\text{produto de inércia}) \quad (15)$$

$$I_{y\omega} = \int_A z\omega dA = 0 \quad (\text{produto de inércia setorial em relação ao eixo } y) \quad (16)$$

$$I_{z\omega} = \int_A y\omega dA = 0 \quad (\text{produto de inércia setorial em relação ao eixo } z), \quad (17)$$

resulta finalmente

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^L \left(A \dot{v}_c^2 + I_z \dot{v}_c'^2 + I_w \dot{\phi}'^2 + I_c \dot{\phi}^2 + 2 z_c A \dot{v}_c \dot{\phi} \right) dx. \quad (18)$$

2.4 Energia potencial total

De acordo com Gérardin e Rixen (2015), a energia potencial total a considerar é composta por três parcelas:

$$U = U_{el} + U_g - W_e. \quad (19)$$

A primeira parcela representa a energia de deformação elástica da teoria linear correspondente ao campo de deslocamentos (u^*, v^*, w^*) atrás definido. No problema em estudo, é dada por (Trahair, 1993)

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int_0^L (EI_z v_c''^2 + EI_w \phi''^2 + GJ \phi'^2) dx. \quad (20)$$

A segunda parcela, dita geométrica, é independente das propriedades elásticas da viga e resulta da integração do produto das tensões iniciais pela componente de segunda ordem das extensões correspondentes ao campo de deslocamentos (u^*, v^*, w^*) . No problema em estudo, é dada por (Trahair, 1993)

$$U_g = \frac{1}{2} \int_0^L M_y (2 v_c'' \phi + \beta_y \phi'^2) dx . \quad (21)$$

Nesta expressão,

$$\beta_y = \frac{1}{I_y} \int_A z (y^2 + z^2) dA - 2 z_c \quad (22)$$

é uma propriedade geométrica da secção transversal associada à sua assimetria em relação ao eixo y (para uma secção duplamente simétrica, ter-se-á $\beta_y = 0$). Para uma melhor compreensão do efeito (de segunda ordem) desta assimetria, observe-se a Figura 2.6, adaptada de Trahair (1993). A força de compressão, F_c , no banzo superior (banzo menor) é aproximadamente igual à força de tração, F_t , no banzo inferior (banzo maior), já que o esforço axial é nulo. Visto que o banzo inferior se encontra mais próximo do eixo de torção, que passa pelo centro de corte C , a sua rotação de empenamento durante a torção é menor (em valor absoluto) do que a rotação de empenamento do banzo superior. Assim, a componente transversal instabilizadora (associada à força de compressão) é maior, e tem um braço maior, do que a componente transversal estabilizadora (associada à força de tração). Desta forma, a rigidez de torção é efetivamente reduzida. Verifica-se a situação inversa quando o banzo comprimido é o de maiores dimensões.

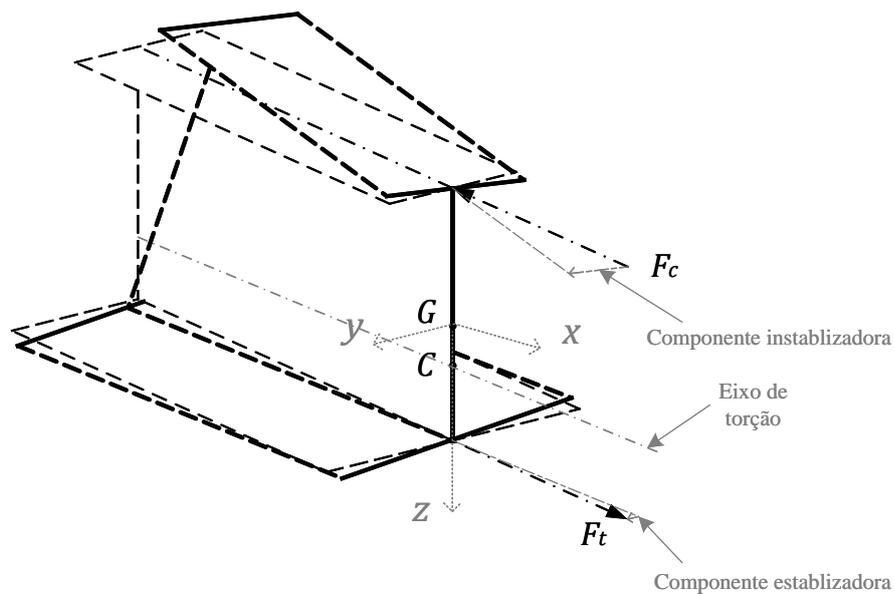


Figura 2.6 – Efeito da assimetria da secção transversal (adaptado de Trahair, 1993).

Finalmente, W_e representa o trabalho das forças exteriores correspondente ao campo de deslocamentos (u^*, v^*, w^*) , definido por (1)-(3). Aproximando $\cos \phi$ pelo seu polinómio de Maclaurin de segundo grau, tem-se (ver Figura 2.7)

$$W_e = -\frac{1}{2} \int_0^L q (z_q - z_c) \phi^2 dx - \frac{1}{2} Q_0 (z_{Q_0} - z_c) \phi(0, t)^2 - \frac{1}{2} Q_L (z_{Q_L} - z_c) \phi(L, t)^2 . \quad (23)$$

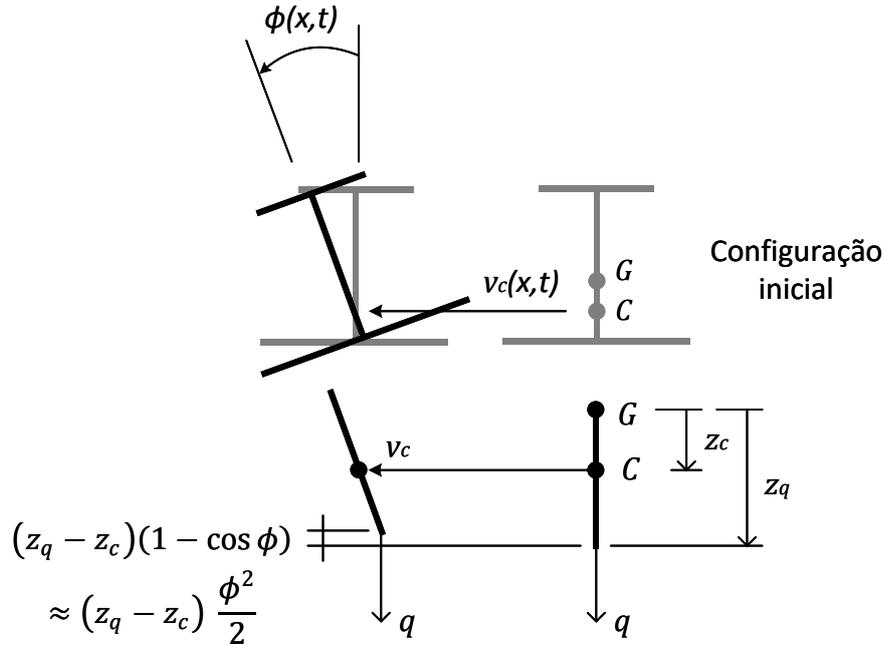


Figura 2.7 – Efeito da posição do ponto de aplicação das forças quase-estáticas iniciais.

Em síntese, a energia potencial total do sistema viga-carregamento considerado tem por expressão geral

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EI_z v_c''^2 + GJ \phi'^2 + EI_w \phi''^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^L q (z_q - z_c) \phi^2 dx + \frac{1}{2} Q_0 (z_{Q_0} - z_c) \phi(0, t)^2 + \frac{1}{2} Q_L (z_{Q_L} - z_c) \phi(L, t)^2 + \frac{1}{2} \int_0^L M_y (2 v_c'' \phi + \beta_y \phi'^2) dx . \quad (24)$$

2.5 Equações de Lagrange do movimento. Condições de fronteira e condições iniciais

Para obter as equações do movimento da viga, assim como as respetivas condições de fronteira, recorre-se ao princípio de Hamilton, assim chamado em homenagem ao matemático, físico e

astrónomo Irlandês do século XIX William Rowan Hamilton. Este princípio é aplicável tanto a sistemas discretos como a sistemas contínuos (Brun, 2007; Maia, 2000).

A Lagrangiana \mathcal{L} do sistema em estudo é dada pela diferença entre as energias cinética e potencial anteriormente estabelecidas:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{\rho}{2} \int_0^L \left(A \dot{v}_c^2 + I_c \dot{\phi}^2 + 2 z_c A \dot{v}_c \dot{\phi} + I_z \dot{v}_c'^2 + I_w \dot{\phi}'^2 \right) dx - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^L \left(EI_z v_c''^2 + EI_w \phi''^2 + GJ \phi'^2 \right) dx - \frac{1}{2} \int_0^L M_y \left(2 v_c'' \phi + \beta_y \phi'^2 \right) dx - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^L q (z_q - z_c) \phi^2 dx - \frac{1}{2} Q_0 (z_{Q_0} - z_c) \phi(0, t)^2 - \frac{1}{2} Q_L (z_{Q_L} - z_c) \phi(L, t)^2. \quad (25) \end{aligned}$$

Para um dado movimento da viga – isto é, para deslocamentos generalizados v_c e ϕ especificados –, a Lagrangiana \mathcal{L} , a energia cinética T e a energia potencial U são funções apenas do tempo t . No entanto, podemos considerá-las também como sendo funcionais dependentes dos deslocamentos generalizados e do tempo t . Será este segundo ponto de vista o adotado daqui em diante.

Sejam δv_c e $\delta \phi$ variações cinematicamente admissíveis dos deslocamentos generalizados. A correspondente variação $\delta \mathcal{L}$ da Lagrangiana é dada por

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \rho \int_0^L \left(A \dot{v}_c \delta \dot{v}_c + I_c \dot{\phi} \delta \dot{\phi} + z_c A \dot{\phi} \delta \dot{v}_c + z_c A \dot{v}_c \delta \dot{\phi} + I_z \dot{v}_c' \delta \dot{v}_c' + I_w \dot{\phi}' \delta \dot{\phi}' \right) dx - \\ & - \int_0^L \left(EI_z v_c'' \delta v_c'' + EI_w \phi'' \delta \phi'' + GJ \phi' \delta \phi' \right) dx - \\ & - \int_0^L M_y \left(\phi \delta v_c'' + v_c'' \delta \phi + \beta_y \phi' \delta \phi' \right) dx - \int_0^L q (z_q - z_c) \phi \delta \phi dx - \\ & - Q_0 (z_{Q_0} - z_c) \phi(0, t) \delta \phi(0, t) - Q_L (z_{Q_L} - z_c) \phi(L, t) \delta \phi(L, t). \quad (26) \end{aligned}$$

O princípio de Hamilton estabelece que os deslocamentos generalizados v_c e ϕ descrevem o movimento real da viga no intervalo de tempo $[0, t_0]$ (com $t_0 > 0$) se e só se tornarem estacionária a ação

$$S = \int_0^{t_0} \mathcal{L} dt, \quad (27)$$

isto é, se e só se satisfizerem a equação variacional

$$\delta S = \int_0^{t_0} \delta \mathcal{L} dt = 0 \quad (28)$$

para quaisquer variações δv_c e $\delta \phi$ cinematicamente admissíveis tais que $\delta v_c(x, 0) = \delta v_c(x, t_0) = 0$ e $\delta \phi(x, 0) = \delta \phi(x, t_0) = 0$.

Interessa agora integrar por partes, uma ou duas vezes, as parcelas de δS onde figurem primeiras ou segundas derivadas das variações δv_c e $\delta \phi$ (Campos Ferreira, 1987)³. Por exemplo, temos

$$\begin{aligned} \rho A \int_0^{t_0} \int_0^L \dot{v}_c \delta \dot{v}_c dx dt &= \rho A \int_0^L \int_0^{t_0} \dot{v}_c \delta \dot{v}_c dt dx \\ &= \rho A \int_0^L \left([\dot{v}_c \delta v_c]_0^{t_0} - \int_0^{t_0} \ddot{v}_c \delta v_c dt \right) dx. \end{aligned} \quad (29)$$

Uma vez que $\delta v_c(x, 0) = \delta v_c(x, t_0) = 0$, o último membro da expressão (29) fica apenas

$$-\rho A \int_0^{t_0} \int_0^L \ddot{v}_c \delta v_c dx dt. \quad (30)$$

De modo análogo, para as restantes parcelas que compõem δS , obtém-se

$$\rho I_c \int_0^{t_0} \int_0^L \dot{\phi} \delta \dot{\phi} dx dt = -\rho I_c \int_0^{t_0} \int_0^L \ddot{\phi} \delta \phi dx dt \quad (31)$$

$$\rho z_c A \int_0^{t_0} \int_0^L \dot{\phi} \delta \dot{v}_c dx dt = -\rho z_c A \int_0^{t_0} \int_0^L \ddot{\phi} \delta v_c dx dt \quad (32)$$

$$\rho z_c A \int_0^{t_0} \int_0^L \dot{v}_c \delta \dot{\phi} dx dt = -\rho z_c A \int_0^{t_0} \int_0^L \ddot{v}_c \delta \phi dx dt \quad (33)$$

$$\rho I_z \int_0^{t_0} \int_0^L \dot{v}_c' \delta \dot{v}_c' dx dt = -\rho I_z \int_0^{t_0} \left([\dot{v}_c' \delta v_c']_0^L - \int_0^L \ddot{v}_c'' \delta v_c dx \right) dt \quad (34)$$

$$\rho I_w \int_0^{t_0} \int_0^L \dot{\phi}' \delta \dot{\phi}' dx dt = -\rho I_w \int_0^{t_0} \left([\dot{\phi}' \delta \phi']_0^L - \int_0^L \ddot{\phi}'' \delta \phi dx \right) dt \quad (35)$$

$$\begin{aligned} -EI_z \int_0^{t_0} \int_0^L v_c'' \delta v_c'' dx dt &= -EI_z \int_0^{t_0} ([v_c'' \delta v_c']_0^L - [v_c'''] \delta v_c]_0^L + \\ &\quad + \int_0^L v_c^{(4)} \delta v_c dx) dt \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} -EI_w \int_0^{t_0} \int_0^L \phi'' \delta \phi'' dx dt &= -EI_w \int_0^{t_0} ([\phi'' \delta \phi']_0^L - [\phi'''] \delta \phi]_0^L + \\ &\quad + \int_0^L \phi^{(4)} \delta \phi dx) dt \end{aligned} \quad (37)$$

$$-GJ \int_0^{t_0} \int_0^L \phi' \delta \phi' dx dt = -GJ \int_0^{t_0} \left([\phi' \delta \phi]_0^L - \int_0^L \phi'' \delta \phi dx \right) dt \quad (38)$$

³ Para além da regra de integração por partes, é necessário recorrer à regra de Leibniz para derivar sob o sinal de integral e permutar a ordem de integração (Bartle, 1976).

$$\begin{aligned}
-\int_0^{t_0} \int_0^L M_y \phi \delta v_c'' dx dt &= -\int_0^{t_0} \left([M_y \phi \delta v_c']_0^L - [(M_y \phi)'] \delta v_c \right)_0^L + \\
&+ \int_0^L (M_y \phi)'' \delta v_c dx dt \quad (39)
\end{aligned}$$

$$-\beta_y \int_0^{t_0} \int_0^L M_y \phi' \delta \phi' dx dt = -\beta_y \int_0^{t_0} \left([M_y \phi' \delta \phi]_0^L - \int_0^L (M_y \phi')' \delta \phi dx \right) dt . \quad (40)$$

Tendo em atenção que apenas se considera a atuação de momentos M_y nas secções extremas da viga (de abcissas $x = 0$ e $x = L$) quando a respetiva rotação de torção está impedida, as expressões (39) e (40) podem ainda ser simplificadas

$$-\int_0^{t_0} \int_0^L M_y \phi \delta v_c'' dx dt = -\int_0^{t_0} \left(-[(M_y \phi)'] \delta v_c \right)_0^L + \int_0^L (M_y \phi)'' \delta v_c dx dt \quad (41)$$

$$-\beta_y \int_0^{t_0} \int_0^L M_y \phi' \delta \phi' dx dt = \beta_y \int_0^{t_0} \int_0^L (M_y \phi')' \delta \phi dx dt . \quad (42)$$

Utilizando estes resultados e agrupando as parcelas associadas à mesma variação de deslocamento, a equação variacional (28) fica

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_0} \int_0^L \left(-\rho A \ddot{v}_c - \rho z_c A \ddot{\phi} + \rho I_z \ddot{v}_c'' - EI_z v_c^{(4)} - (M_y \phi)'' \right) \delta v_c dx dt + \\
&+ \int_0^{t_0} \int_0^L \left(-\rho I_c \ddot{\phi} - \rho z_c A \ddot{v}_c + \rho I_w \ddot{\phi}'' - EI_w \phi^{(4)} + GJ \phi'' - \right. \\
&\quad \left. -M_y v_c'' + \beta_y (M_y \phi')' - q (z_q - z_c) \phi \right) \delta \phi dx dt + \\
&+ \int_0^{t_0} \left(-\rho I_z \ddot{v}_c'(L, t) + EI_z v_c'''(L, t) + (M_y \phi)'(L, t) \right) \delta v_c(L, t) dt - \\
&- \int_0^{t_0} \left(-\rho I_z \ddot{v}_c'(0, t) + EI_z v_c'''(0, t) + (M_y \phi)'(0, t) \right) \delta v_c(0, t) dt - \\
&- \int_0^{t_0} EI_z v_c''(L, t) \delta v_c'(L, t) dt + \int_0^{t_0} EI_z v_c''(0, t) \delta v_c'(0, t) dt \\
&+ \int_0^{t_0} \left(-\rho I_w \ddot{\phi}'(L, t) + EI_w \phi'''(L, t) - GJ \phi'(L, t) - \right. \\
&\quad \left. -Q_L (z_{Q_L} - z_c) \phi(L, t) \right) \delta \phi(L, t) dt - \\
&- \int_0^{t_0} \left(-\rho I_w \ddot{\phi}'(0, t) + EI_w \phi'''(0, t) - GJ \phi'(0, t) - \right. \\
&\quad \left. + Q_0 (z_{Q_0} - z_c) \phi(0, t) \right) \delta \phi(0, t) dt - \\
&- \int_0^{t_0} EI_w \phi''(L, t) \delta \phi'(L, t) dt + \int_0^{t_0} EI_w \phi''(0, t) \delta \phi'(0, t) dt = 0 . \quad (43)
\end{aligned}$$

O lema fundamental do cálculo das variações (Fung, 1965) conduz agora às equações diferenciais parciais

$$-\rho A \ddot{v}_c + \rho I_z \ddot{v}_c'' - \rho z_c A \ddot{\phi} - EI_z v_c^{(4)} - (M_y \phi)'' = 0 \quad (44)$$

$$\begin{aligned} -\rho I_c \ddot{\phi} + \rho I_w \ddot{\phi}'' - \rho z_c A \ddot{v}_c - EI_w \phi^{(4)} + GJ \phi'' - M_y v_c'' + \\ + \beta_y (M_y \phi')' - q(z_q - z_c)\phi = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

em $(0, L) \times (0, t_0)$ e às condições de fronteira

$$v_c(L, t) = 0 \quad \vee \quad -\rho I_z \ddot{v}_c'(L, t) + EI_z v_c'''(L, t) + (M_y \phi)'(L, t) = 0 \quad (46)$$

$$v_c(0, t) = 0 \quad \vee \quad -\rho I_z \ddot{v}_c'(0, t) + EI_z v_c'''(0, t) + (M_y \phi)'(0, t) = 0 \quad (47)$$

$$v_c'(L, t) = 0 \quad \vee \quad EI_z v_c''(L, t) = 0 \quad (48)$$

$$v_c'(0, t) = 0 \quad \vee \quad EI_z v_c''(0, t) = 0 \quad (49)$$

$$\phi(L, t) = 0 \quad \vee \quad -\rho I_w \ddot{\phi}'(L, t) + EI_w \phi'''(L, t) - GJ \phi'(L, t) - Q_L(z_{Q_L} - z_c)\phi(L, t) = 0 \quad (50)$$

$$\phi(0, t) = 0 \quad \vee \quad -\rho I_w \ddot{\phi}'(0, t) + EI_w \phi'''(0, t) - GJ \phi'(0, t) + Q_0(z_{Q_0} - z_c)\phi(0, t) = 0 \quad (51)$$

$$\phi'(L, t) = 0 \quad \vee \quad EI_w \phi''(L, t) = 0 \quad (52)$$

$$\phi'(0, t) = 0 \quad \vee \quad EI_w \phi''(0, t) = 0, \quad (53)$$

com $0 \leq t \leq t_0$.

Como se pode verificar, temos oito pares de condições de fronteira possíveis. A primeira condição de cada par exprime o anulamento de um deslocamento generalizado ou da sua primeira derivada numa extremidade da viga e é designada por essencial ou cinemática. A segunda condição do par exprime o anulamento de um esforço (esforço transversal V_y , momento flector M_z , momento torsor ou bimomento) numa extremidade da viga e é designada por natural (Fung, 1965, Reis e Camotim, 2001)⁴. Em cada problema concreto, de cada um dos oito pares deve seleccionar-se uma e uma só condição de fronteira.

⁴ Em rigor, as condições de fronteira essenciais que decorrem do princípio variacional atribuem um valor prescrito aos deslocamentos generalizados e suas primeiras derivadas. Optou-se por considerar um valor prescrito igual a zero, por ser essa a situação mais comum.

É importante referir ainda o significado físico de duas parcelas que figuram nas equações diferenciais (44) e (45). Na primeira destas equações, a parcela $\rho I_z \ddot{v}_c''$ representa as forças de inércia transversais (segundo y), definidas por unidade de comprimento da viga, resultantes da rotação das secções transversais na flexão lateral (rotação em torno do eixo z). A parcela $\rho I_w \ddot{\phi}''$ na equação (45) representa o momento torsor de inércia (em torno do eixo dos centros de corte), definido por unidade de comprimento da viga, devido ao empenamento de torção das secções transversais. Esta interpretação justifica também as parcelas $\rho I_z \dot{v}_c'(L, t)$ e $\rho I_z \dot{v}_c'(0, t)$ nas condições de fronteira naturais (46)-(47) e as parcelas $\rho I_w \dot{\phi}'(L, t)$ e $\rho I_w \dot{\phi}'(0, t)$ nas condições de fronteira naturais (50)-(51), como se ilustra esquematicamente nas Figuras 2.8 e 2.9. Todas estas parcelas são muitas vezes desprezadas (*e.g.*, Gere, 1954, Roberts, 1987, ou Virgin, 2007).

As equações do movimento e as condições de fronteira devem ainda ser complementadas com condições iniciais, as quais podem ser escritas na forma

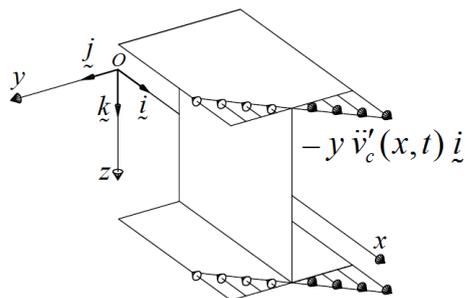
$$v_c(x, 0) = v_{c_0}(x) \quad (54)$$

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad (55)$$

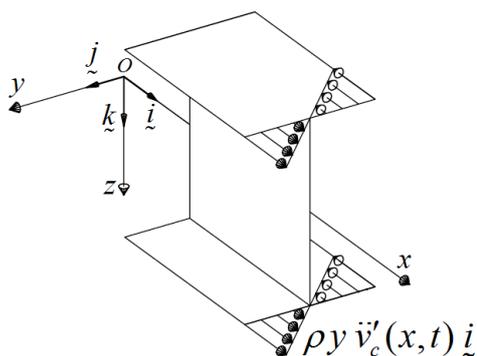
$$\dot{v}_c(x, 0) = \dot{v}_{c_0}(x) \quad (56)$$

$$\dot{\phi}(x, 0) = \dot{\phi}_0(x), \quad (57)$$

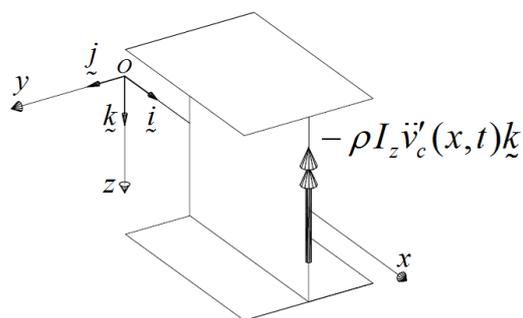
onde v_{c_0} , ϕ_0 , \dot{v}_{c_0} e $\dot{\phi}_0$ são funções dadas, definidas no intervalo $[0, L]$.



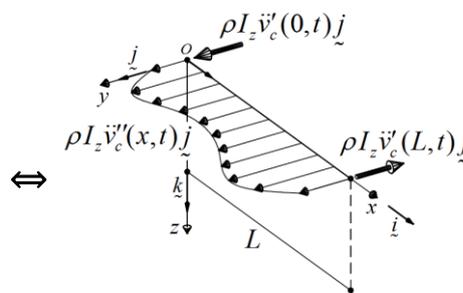
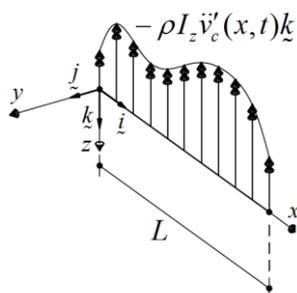
Acelerações associadas à rotação v'_c das secções transversais em torno do eixo z.



Forças de inércia correspondentes.

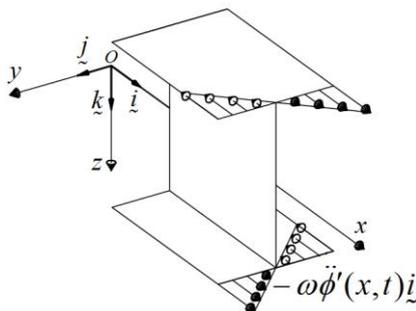


Resultante seccional das forças de inércia.

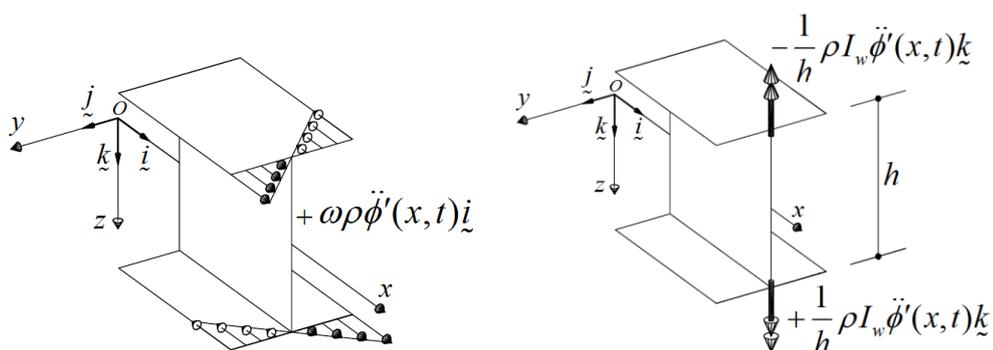


Equivalência estática.

Figura 2.8 – Interpretação física da parcela $\rho I_z v''_c(x, t)$ na equação diferencial (44) e das parcelas $\rho I_z v'_c(L, t)$ e $\rho I_z v'_c(0, t)$ nas condições de fronteira naturais (46)-(47).

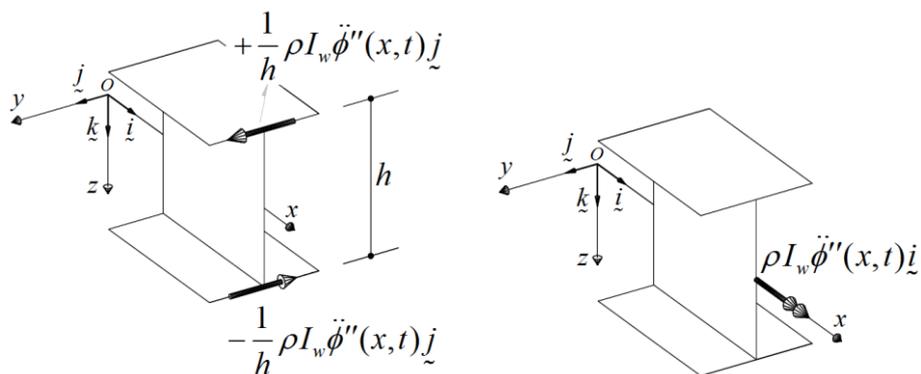


Acelerações associadas ao empenamento de torção $-\omega\ddot{\phi}'$ das secções transversais.



Forças de inércia correspondentes.

Momentos fletores resultantes nos banzos.



Esforços transversos nos banzos (em equilíbrio com os momentos fletores).

Momento torsor estaticamente equivalente.

Figura 2.9 – Interpretação física das parcelas $\rho I_w \ddot{\phi}'''(x, t)$ na equação diferencial (45) e das parcelas $\rho I_w \ddot{\phi}'(L, t)$ e $\rho I_w \ddot{\phi}'(0, t)$ nas condições de fronteira (50)-(51).

2.6 Problema de valores próprios – Frequências próprias e modos de vibração

Vamos agora admitir que cada um dos deslocamentos generalizados, v_c e ϕ , pode ser escrito como o produto de uma função apenas de x por uma função apenas de t , ou seja,

$$\begin{cases} v_c(x, t) = V_c(x) F(t) \\ \phi(x, t) = \Phi(x) F(t) . \end{cases} \quad (58)$$

Por outras palavras, admite-se que v_c e ϕ são separáveis no tempo e no espaço (Strauss, 1992). De um ponto de vista físico, isto significa que a viga executa um movimento síncrono: a razão entre deslocamentos em duas secções transversais de abcissas x_1 e x_2 é independente do tempo (Meirovitch, 1980).

Introduzindo as equações (58) nas equações de movimento (44) e (45), obtém-se

$$\begin{cases} [-EI_z V_c^{(4)} - (M_y \Phi)'] F = -[\rho I_z V_c'' - \rho z_c A \Phi - \rho A V_c] \ddot{F} \\ [-EI_w \Phi^{(4)} + GJ \Phi'' - M_y V_c'' + \beta_y (M_y \Phi')' - q (z_q - z_c) \Phi] F = \\ = -[\rho I_w \Phi'' - \rho I_c \Phi - \rho z_c A V_c] \ddot{F} . \end{cases} \quad (59)$$

Observe-se que, nestas equações, deixam de figurar derivadas parciais e aparecem apenas derivadas totais.

Da divisão de ambos os membros da primeira das equações (59) por $F[\rho I_z V_c'' - \rho z_c A \Phi - \rho A V_c]$ e da segunda por $F[\rho I_w \Phi'' - \rho I_c \Phi - \rho z_c A V_c]$ resulta agora

$$\begin{cases} \frac{-EI_z V_c^{(4)} - (M_y \Phi)'}{\rho I_z V_c'' - \rho z_c A \Phi - \rho A V_c} = -\frac{\ddot{F}}{F} \\ \frac{-EI_w \Phi^{(4)} + GJ \Phi'' - M_y V_c'' + \beta_y (M_y \Phi')' - q (z_q - z_c) \Phi}{\rho I_w \Phi'' - \rho I_c \Phi - \rho z_c A V_c} = -\frac{\ddot{F}}{F} . \end{cases} \quad (60)$$

Os segundos membros destas equações são iguais e dependem apenas de t , ao passo que os primeiros membros dependem apenas de x . Assim, primeiro e segundo membros de cada equação terão ambos de ser iguais a uma constante real, chamada de constante de separação, que irá ser designanda por λ . Podemos então escrever

$$\begin{cases} -EI_z V_c^{(4)} - (M_y \Phi)'' = \lambda [\rho I_z V_c'' - \rho z_c A \Phi - \rho A V_c] \\ -EI_w \Phi^{(4)} + GJ \Phi'' - M_y V_c'' + \beta_y (M_y \Phi')' - q (z_q - z_c) \Phi = \\ = \lambda [\rho I_w \Phi'' - \rho I_c \Phi - \rho z_c A V_c] \end{cases} \quad (61)$$

$$\ddot{F} + \lambda F = 0 . \quad (62)$$

Em termos de condições de fronteira essenciais, a separação de variáveis (58) conduz a

$$V_c(L) F(t) = 0 \quad (63)$$

$$V_c(0) F(t) = 0 \quad (64)$$

$$V_c'(L) F(t) = 0 \quad (65)$$

$$V_c'(0) F(t) = 0 \quad (66)$$

$$\Phi(L) F(t) = 0 \quad (67)$$

$$\Phi(0) F(t) = 0 \quad (68)$$

$$\Phi'(L) F(t) = 0 \quad (69)$$

$$\Phi'(0) F(t) = 0 . \quad (70)$$

Por sua vez, as condições de fronteira naturais assumem a forma

$$\left[EI_z V_c'''(L) + (M_y \Phi)'(L) \right] F(t) - \rho I_z V_c'(L) \ddot{F}(t) = 0 \quad (71)$$

$$\left[EI_z V_c'''(0) + (M_y \Phi)'(0) \right] F(t) - \rho I_z V_c'(0) \ddot{F}(t) = 0 \quad (72)$$

$$EI_z V_c''(L) F(t) = 0 \quad (73)$$

$$EI_z V_c''(0) F(t) = 0 \quad (74)$$

$$\left[EI_w \Phi'''(L) - GJ \Phi'(L) - Q_L (z_{Q_L} - z_c) \Phi(L) \right] F(t) - \rho I_w \Phi'(L) \ddot{F}(t) = 0 \quad (75)$$

$$\left[EI_w \Phi'''(0) - GJ \Phi'(0) + Q_0 (z_{Q_0} - z_c) \Phi(0) \right] F(t) - \rho I_w \Phi'(0) \ddot{F}(t) = 0 \quad (76)$$

$$EI_w \Phi''(L) F(t) = 0 \quad (77)$$

$$EI_w \Phi''(0) F(t) = 0 . \quad (78)$$

Tendo em atenção a equação (62), podemos ainda reescrever as condições (71), (72) e (75), (76) como

$$\left[EI_z V_c'''(L) + (M_y \Phi)'(L) + \lambda \rho I_z V_c'(L) \right] F(t) = 0 \quad (79)$$

$$\left[EI_z V_c'''(0) + (M_y \Phi)'(0) + \lambda \rho I_z V_c'(0) \right] F(t) = 0 \quad (80)$$

$$\left[EI_w \Phi'''(L) - GJ \Phi'(L) - Q_L (z_{Q_L} - z_c) \Phi(L) + \lambda \rho I_w \Phi'(L) \right] F(t) = 0 \quad (81)$$

$$[EI_w \Phi'''(0) - GJ \Phi'(0) + Q_0 (z_{Q_0} - z_c) \Phi(0) + \lambda \rho I_w \Phi'(0)]F(t) = 0. \quad (82)$$

Uma vez que estamos interessados em soluções com $F \neq 0$ (caso contrário, não existiria movimento), as condições de fronteira essenciais reduzem-se a

$$V_c(L) = 0 \quad (83)$$

$$V_c(0) = 0 \quad (84)$$

$$V_c'(L) = 0 \quad (85)$$

$$V_c'(0) = 0 \quad (86)$$

$$\Phi(L) = 0 \quad (87)$$

$$\Phi(0) = 0 \quad (88)$$

$$\Phi'(L) = 0 \quad (89)$$

$$\Phi'(0) = 0 \quad (90)$$

e as condições de fronteira naturais reduzem-se a

$$EI_z V_c'''(L) + (M_y \Phi)'(L) + \lambda \rho I_z V_c'(L) = 0 \quad (91)$$

$$EI_z V_c'''(0) + (M_y \Phi)'(0) + \lambda \rho I_z V_c'(0) = 0 \quad (92)$$

$$EI_z V_c''(L) = 0 \quad (93)$$

$$EI_z V_c''(0) = 0 \quad (94)$$

$$EI_w \Phi'''(L) - GJ \Phi'(L) - Q_L (z_{Q_L} - z_c) \Phi(L) + \lambda \rho I_w \Phi'(L) = 0 \quad (95)$$

$$EI_w \Phi'''(0) - GJ \Phi'(0) + Q_0 (z_{Q_0} - z_c) \Phi(0) + \lambda \rho I_w \Phi'(0) = 0 \quad (96)$$

$$EI_w \Phi''(L) = 0 \quad (97)$$

$$EI_w \Phi''(0) = 0. \quad (98)$$

A equação diferencial linear (62), homogénea e de coeficientes constantes, pode ser facilmente resolvida para qualquer valor de λ (Andrade, 2013):

(1) Se $\lambda = 0$, a sua solução geral tem a seguinte forma:

$$F(t) = C_1 + C_2 t, \text{ com } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (99)$$

(2) Se $\lambda < 0$, a solução geral é

$$F(t) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} t} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} t}, \text{ com } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (100)$$

(3) Finalmente, se $\lambda > 0$, define-se $\lambda = k^2$ e a solução geral de (62) assume a forma

$$F(t) = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt), \text{ com } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (101)$$

Apenas a terceira possibilidade, que corresponde a uma oscilação harmónica com frequência angular k , é consistente com vibração em torno de uma configuração de equilíbrio estável. Nos restantes casos, estaríamos perante ausência de movimento – caso (1) com $C_2 = 0$ – ou movimento ilimitado – caso (1) com $C_2 \neq 0$ e caso (2). Conclui-se que, se o movimento síncrono for possível, então a dependência do tempo é harmónica.

O problema pode então ser enunciado nos seguintes termos: pretende-se determinar os valores de $\lambda = k^2 > 0$ para os quais existem funções reais V_c e Φ , definidas no intervalo $[0, L]$ e não simultaneamente nulas, que satisfazem as equações diferenciais (61) e um conjunto apropriado de oito condições de fronteira (quatro condições em cada extremidade, $x = 0$ e $x = L$), a seleccionar, em cada caso concreto, de entre (83)-(98). Trata-se de um problema de valores próprios (os quadrados das frequências angulares) e de funções próprias (as correspondentes funções V_c e Φ , designadas por modos de vibração). Observe-se que tanto a assimetria da secção transversal (através de $z_c \neq 0$) como a distribuição inicial de momentos flectores M_y introduzem um acoplamento entre V_c e Φ .

3 EXEMPLO DE VERIFICAÇÃO E ILUSTRAÇÃO

Com o duplo objetivo de (i) verificar o modelo matemático desenvolvido no capítulo anterior e (ii) ilustrar as suas potencialidades, efetua-se agora um estudo analítico detalhado de alguns casos concretos. Para o efeito, considera-se uma viga de secção em I, com banzos iguais ou desiguais, simplesmente apoiada no plano de simetria xz e apresentando, para a flexão lateral e para a torção, as condições de apoio ditas “padrão” (Figura 3.1) – nas duas extremidades, o deslocamento segundo y e a rotação em torno de x estão impedidos (condições de fronteira essenciais), enquanto a rotação em torno de z e o empenamento são livres, sendo portanto nulos, nas extremidades, o momento $M_z = -EI_z V_c''$ e o bimomento⁵ $B = -EI_w \Phi''$ (condições de fronteira naturais). A viga é submetida a uma distribuição inicial uniforme de momentos fletores $M_y = M = cte$. (com referência à Figura 2.2, temos, portanto $M_L = -M_0 = M$, $q = 0$ e $Q_0 = Q_L = 0$).

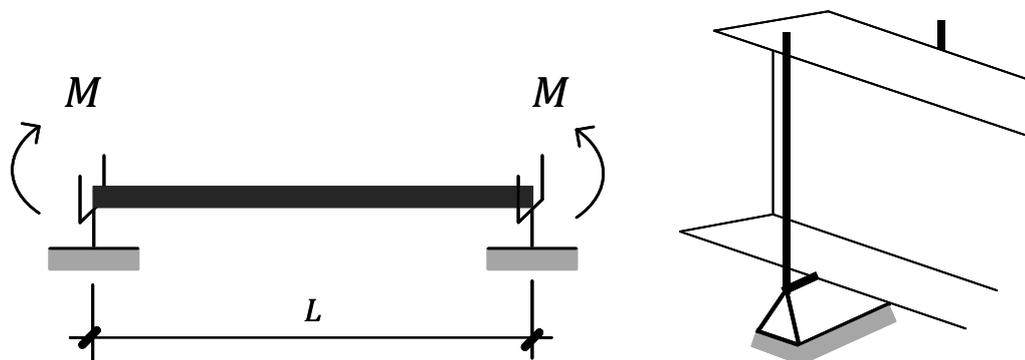


Figura 3.1 – Exemplo de verificação e ilustração.

Por ordem crescente de dificuldade, estudam-se sucessivamente (i) vigas de secção duplamente simétrica sem momento inicial, (ii) vigas de secção monossimétrica sem momento inicial e (iii) vigas de secção duplamente simétrica com momento inicial uniforme. Em todos os casos, avalia-se a influência da inércia de rotação das secções transversais em torno do eixo z e da inércia associada ao empenamento. Sempre que possível, os resultados obtidos são comparados com os disponíveis na literatura.

⁵ O bimomento pode ser intuitivamente visualizado como um par de momentos M_z nos banzos, iguais em valor absoluto mas com sentidos contrários, multiplicado pela altura da secção transversal medida entre linhas médias dos banzos (Vlasov, 1961).

3.1 Caso particular 1 – Viga de secção em I duplamente simétrica (banzos iguais), com apoios “padrão” e sem tensões iniciais

Neste caso, tem-se $z_c = 0$ (os centros de gravidade e de corte da secção transversal coincidem) e $M_y = 0$. Verifica-se que as equações diferenciais e condições de fronteira relativas à vibração por flexão lateral e por torção ficam desacopladas, pelo que podem ser estudadas separadamente.

Flexão lateral

Somos confrontados com o problema de valores próprios definido por

$$EI_z V_c^{(4)}(x) + k^2 \rho [I_z V_c''(x) - A V_c(x)] = 0, \quad 0 < x < L \quad (102)$$

$$V_c(0) = 0 \quad (103)$$

$$V_c(L) = 0 \quad (104)$$

$$-EI_z V_c''(0) = 0 \Rightarrow V_c''(0) = 0 \quad (105)$$

$$-EI_z V_c''(L) = 0 \Rightarrow V_c''(L) = 0. \quad (106)$$

Começamos por adimensionalizar este problema. Para tal, introduz-se uma nova variável independente,

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad (107)$$

e uma nova variável dependente,

$$\tilde{V}_c(\xi) = \frac{1}{L} V_c(\xi L). \quad (108)$$

Definem-se ainda os quocientes adimensionais

$$\mu_z = k L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI_z}} \quad (109)$$

$$\alpha_z = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{I_z}{A}}. \quad (110)$$

O problema original (102)-(106) adquire então a seguinte forma:

$$\frac{1}{\mu_z^2} \tilde{V}_c^{(4)}(\xi) + \alpha_z^2 \tilde{V}_c''(\xi) - \tilde{V}_c(\xi) = 0, \quad 0 < \xi < 1 \quad (111)$$

$$\tilde{V}_c(0) = 0 \quad (112)$$

$$\tilde{V}_c(1) = 0 \quad (113)$$

$$\tilde{V}_c''(0) = 0 \quad (114)$$

$$\tilde{V}_c''(1) = 0. \quad (115)$$

A solução geral da equação diferencial homogénea (111) é dada por (Caldeira, 2004)

$$\tilde{V}_c(\xi) = C_1 \cosh(a\mu_z \xi) + C_2 \sinh(a\mu_z \xi) + C_3 \cos(b\mu_z \xi) + C_4 \sin(b\mu_z \xi), \quad (116)$$

com $C_1, \dots, C_4 \in \mathbb{R}$ e

$$a = \sqrt{\frac{-\alpha_z^2 + \sqrt{\alpha_z^4 + \frac{4}{\mu_z^2}}}{2}} \quad (117)$$

$$b = \sqrt{\frac{\alpha_z^2 + \sqrt{\alpha_z^4 + \frac{4}{\mu_z^2}}}{2}}. \quad (118)$$

As condições de fronteira na extremidade $\xi = 0$, $\tilde{V}_c(0) = 0$ e $\tilde{V}_c''(0) = 0$, implicam que $C_1 = C_3 = 0$ (uma vez que $\sinh(0) = 0$ e $\sin(0) = 0$). Por sua vez, as condições de fronteira na extremidade $\xi = 1$, $\tilde{V}_c(1) = 0$ e $\tilde{V}_c''(1) = 0$, implicam agora que

$$\begin{cases} C_2 \sinh(a\mu_z) + C_4 \sin(b\mu_z) = 0 \\ C_2 a^2 \mu_z^2 \sinh(a\mu_z) - C_4 b^2 \mu_z^2 \sin(b\mu_z) = 0. \end{cases} \quad (119)$$

Para que os coeficientes C_2 e C_4 não sejam simultaneamente nulos, é necessário e suficiente que (Santana e Queiró, 2010)

$$\det \begin{bmatrix} \sinh(a\mu_z) & \sin(b\mu_z) \\ a^2 \mu_z^2 \sinh(a\mu_z) & -b^2 \mu_z^2 \sin(b\mu_z) \end{bmatrix} = 0, \quad (120)$$

ou seja,

$$(a^2 + b^2) \mu_z^2 \sinh(a\mu_z) \sin(b\mu_z) = 0. \quad (121)$$

As soluções μ_z positivas desta equação transcendente correspondem às raízes positivas de $\sin(b\mu_z)$, dadas por $b\mu_z = n\pi$, em que n é um inteiro positivo⁶. Obtém-se assim

⁶ Repare-se que $\mu_z^2 \sinh(a\mu_z) = 0$ se e só se $\mu_z = 0$.

$$\mu_z = \frac{(n\pi)^2}{\sqrt{1+(n\pi\alpha_z)^2}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (122)$$

pelo que os quadrados das frequências próprias angulares são

$$k^2 = \frac{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 EI_z}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \rho I_z + \rho A}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (123)$$

Este resultado coincide com o obtido por Vlasov (1961).

Introduzindo $b\mu_z = n\pi$ no sistema (119), conclui-se que $C_2 = 0$ e que C_4 é arbitrário. Os modos de vibração por flexão lateral, normalizados de forma a que $|\tilde{V}_c|_{max} = 1$, são então

$$\tilde{V}_c(\xi) = \sin(n\pi\xi), \quad n = 1, 2, \dots \quad (124)$$

O inteiro positivo n representa assim o número de semi-ondas do modo de vibração.

Quando se despreza a inércia de rotação da secção transversal em torno do seu eixo central de menor inércia (eixo z) – isto é, quando se despreza a parcela $k^2\rho I_z V_c''(x)$ na equação diferencial (102) –, obtém-se

$$k_0^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{EI_z}{\rho A}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (125)$$

Nesta expressão, idêntica à apresentada por Timoshenko (1937), o índice “0” na frequência própria angular pretende indicar a omissão da parcela referida. A relação $\frac{k}{k_0}$ vs. α_z está representada graficamente na Figura 3.2 para os três primeiros modos de vibração por flexão lateral. Constata-se que a consideração da inércia de rotação conduz a valores mais reduzidos da frequência própria angular⁷; a redução é tanto mais significativa quanto maior for o parâmetro α_z e o número n de semi-ondas do modo de vibração.

⁷ Este resultado é inteiramente lógico. Num oscilador linear com um grau de liberdade, o quadrado da frequência própria angular é dado pelo quociente da rigidez pela massa do oscilador. Se aumentarmos a massa, mantendo fixo o valor da rigidez, a frequência própria angular do oscilador obviamente decresce.

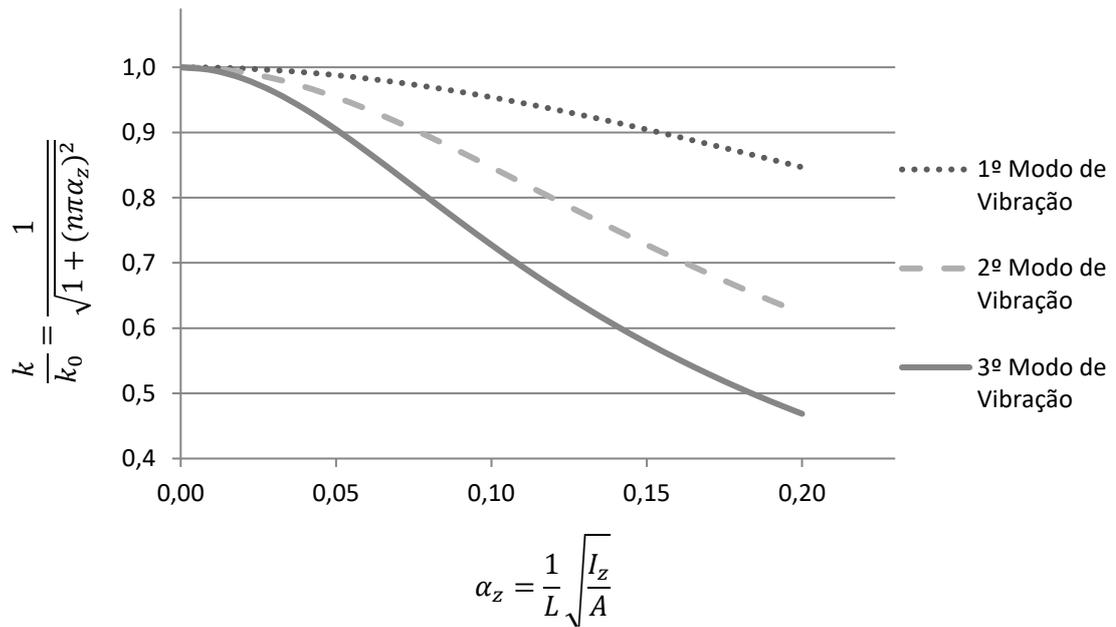


Figura 3.2 – Influência da inércia de rotação da secção transversal em torno do seu eixo central de menor inércia nas frequências próprias dos três primeiros modos de vibração por flexão lateral.

Torção

O problema de valores próprios a resolver é agora constituído pela equação diferencial homogénea

$$EI_w \Phi^{(4)}(x) - GJ \Phi''(x) + k^2 \rho [I_w \Phi''(x) - I_c \Phi(x)] = 0, \quad 0 < x < L \quad (126)$$

e pelas condições de fronteira

$$\Phi(0) = 0 \quad (127)$$

$$\Phi(L) = 0 \quad (128)$$

$$-EI_w \Phi''(0) = 0 \Rightarrow \Phi''(0) = 0 \quad (129)$$

$$-EI_w \Phi''(L) = 0 \Rightarrow \Phi''(L) = 0. \quad (130)$$

Observe-se que, em virtude da dupla simetria da secção transversal, $I_c = I_y + I_z$.

Fazendo a mudança de variável independente definida por (107) e escrevendo

$$\tilde{\Phi}(\xi) = \Phi(\xi L) \quad (131)$$

$$\mu_w = k L^2 \sqrt{\frac{\rho I_c}{EI_w}} \quad (132)$$

$$\alpha_w = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{I_w}{I_c}} \quad (133)$$

$$c_w = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{EI_w}{GJ}}, \quad (134)$$

o problema pode ser colocado no formato adimensional

$$\frac{1}{\mu_w^2} \tilde{\Phi}^{(4)}(\xi) + \left(\alpha_w^2 - \frac{1}{c_w^2 \mu_w^2} \right) \tilde{\Phi}''(\xi) - \tilde{\Phi}(\xi) = 0, \quad 0 < \xi < 1 \quad (135)$$

$$\tilde{\Phi}(0) = 0 \quad (136)$$

$$\tilde{\Phi}(1) = 0, \quad (137)$$

$$\tilde{\Phi}''(0) = 0 \quad (138)$$

$$\tilde{\Phi}''(1) = 0. \quad (139)$$

A equação diferencial (135) tem como solução geral (Caldeira, 2004)

$$\tilde{\Phi}(\xi) = C_1 \cosh(a\mu_w \xi) + C_2 \sinh(a\mu_w \xi) + C_3 \cos(b\mu_w \xi) + C_4 \sin(b\mu_w \xi), \quad (140)$$

com $C_1, \dots, C_4 \in \mathbb{R}$ e

$$a = \sqrt{\frac{-\left(\alpha_w^2 - \frac{1}{c_w^2 \mu_w^2}\right) + \sqrt{\left(\alpha_w^2 - \frac{1}{c_w^2 \mu_w^2}\right)^2 + \frac{4}{\mu_w^2}}}{2}} \quad (141)$$

$$b = \sqrt{\frac{\left(\alpha_w^2 - \frac{1}{c_w^2 \mu_w^2}\right) + \sqrt{\left(\alpha_w^2 - \frac{1}{c_w^2 \mu_w^2}\right)^2 + \frac{4}{\mu_w^2}}}{2}}. \quad (142)$$

Tal como no caso da flexão lateral, as condições de fronteira na extremidade $\xi = 0$, $\tilde{\Phi}(0) = 0$ e $\tilde{\Phi}''(0) = 0$, implicam que $C_1 = C_3 = 0$. As condições de fronteira na extremidade $\xi = 1$, $\tilde{\Phi}(1) = 0$ e $\tilde{\Phi}''(1) = 0$, conduzem agora a

$$\begin{cases} C_2 \sinh(a\mu_w) + C_4 \sin(b\mu_w) = 0 \\ C_2 a^2 \mu_w^2 \sinh(a\mu_w) - C_4 b^2 \mu_w^2 \sin(b\mu_w) = 0. \end{cases} \quad (143)$$

Para que os coeficientes C_2 e C_4 não sejam simultaneamente nulos, é condição necessária e suficiente que

$$\det \begin{bmatrix} \sinh(a\mu_w) & \sin(b\mu_w) \\ a^2 \mu_w^2 \sinh(a\mu_w) & b^2 \mu_w^2 \sin(b\mu_w) \end{bmatrix} = 0, \quad (144)$$

o que é equivalente a

$$(a^2 + b^2) \mu_w^2 \sinh(a\mu_w) \sin(b\mu_w) = 0. \quad (145)$$

Tal como já explicado a propósito da flexão lateral, as soluções μ_w positivas desta equação transcendente correspondem às raízes positivas de $\sin(b\mu_w)$, ou seja, $b\mu_w = n\pi$, em que n é um inteiro positivo. Obtém-se assim

$$\mu_w = \frac{\sqrt{(n\pi)^4 + \left(\frac{n\pi}{c_w}\right)^2}}{\sqrt{1 + (n\pi\alpha_w)^2}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (146)$$

pelo que os quadrados das frequências próprias angulares são

$$k^2 = \frac{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 EI_w + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 GJ}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \rho I_w + \rho I_0}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (147)$$

Uma vez mais, este resultado coincide com o obtido por Vlasov (1961).

Introduzindo $b\mu_w = n\pi$ no sistema (143), conclui-se que $C_2 = 0$ e que C_4 é arbitrário. Os modos de vibração por torção, normalizados de forma a que $|\tilde{\Phi}|_{max} = 1$, são então

$$\tilde{\Phi}(\xi) = \sin(n\pi\xi), \quad n = 1, 2, \dots \quad (148)$$

Quando se despreza a inércia associada ao empenamento de torção das secções transversais – isto é, quando se despreza a parcela $k^2 \rho I_w \Phi''(x)$ na equação diferencial (126) – obtém-se simplesmente

$$k_0^2 = \frac{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 EI_w + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 GJ}{\rho I_0}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (149)$$

Expressão esta que é idêntica à apresentada por Timoshenko (1937). A relação $\frac{k}{k_0}$ vs. α_w está representada graficamente na Figura 3.3 para os três primeiros modos de vibração por torção. É inteiramente análoga à relação $\frac{k}{k_0}$ vs. α_z obtida anteriormente no caso da flexão lateral (Figura 3.2).

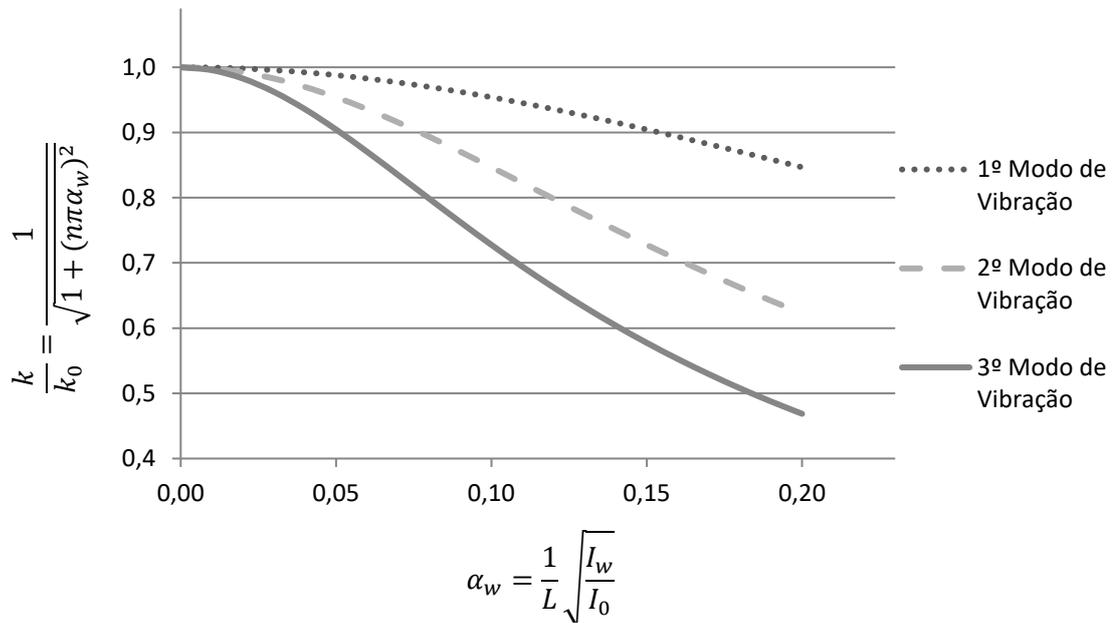


Figura 3.3 – Influência da inércia de empenamento das secções transversais nas frequências próprias dos três primeiros modos de vibração por torção.

3.2 Caso particular 2 – Viga de secção em I monossimétrica (banzos desiguais), com apoios “padrão” e sem tensões iniciais

A assimetria da secção transversal em relação ao eixo y , que faz com que seja $z_c \neq 0$, introduz um acoplamento entre a flexão lateral e a torção

$$\begin{cases} EI_z V_c^{(4)}(x) + k^2 \rho [I_z V_c''(x) - A V_c(x) - z_c A \Phi(x)] = 0 \\ EI_w \Phi^{(4)}(x) - GJ \Phi''(x) + k^2 \rho [I_w \Phi''(x) - I_c \Phi(x) - z_c A V_c(x)] = 0 \end{cases}, 0 < x < L. \quad (150)$$

Como condições de fronteira, temos novamente as condições (103)-(106) e (127)-(130).

Um processo de adimensionalização idêntico ao levado a cabo no primeiro caso particular conduz à seguinte formulação do problema de valores próprios:

$$\begin{cases} \left(\frac{\alpha_z}{\alpha_w \alpha_c \mu_w} \right)^2 \tilde{V}_c^{(4)}(\xi) + \left(\frac{\alpha_z}{\alpha_c} \right)^2 \tilde{V}_c''(\xi) - \frac{1}{\alpha_c^2} \tilde{V}_c(\xi) - \frac{\chi}{\alpha_c^2} \tilde{\Phi}(\xi) = 0 \\ \frac{1}{\mu_w^2} \tilde{\Phi}^{(4)}(\xi) + \left(\alpha_w^2 - \frac{1}{c_w^2 \mu_w^2} \right) \tilde{\Phi}''(\xi) - \tilde{\Phi}(\xi) - \frac{\chi}{\alpha_c^2} \tilde{V}_c(\xi) = 0 \end{cases}, 0 < \xi < 1 \quad (151)$$

$$\tilde{V}_c(0) = 0 \quad (152)$$

$$\tilde{V}_c(1) = 0 \quad (153)$$

$$\tilde{V}_c''(0) = 0 \quad (154)$$

$$\tilde{V}_c''(1) = 0 \quad (155)$$

$$\tilde{\Phi}(0) = 0 \quad (156)$$

$$\tilde{\Phi}(1) = 0 \quad (157)$$

$$\tilde{\Phi}''(0) = 0 \quad (158)$$

$$\tilde{\Phi}''(1) = 0 . \quad (159)$$

Nas equações (151) figuram dois novos parâmetros adimensionais, a saber

$$\alpha_c = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{I_c}{A}} \quad (160)$$

$$\chi = \frac{z_c}{L} . \quad (161)$$

Os restantes símbolos têm o significado anteriormente atribuído – recordem-se as definições (107), (108), (110) e (131)-(134).

Como (i) as equações diferenciais (151) têm coeficientes constantes (isto é, independentes de ξ) e contêm as variáveis dependentes, \tilde{V}_c e $\tilde{\Phi}$, assim como as suas derivadas de ordem par e (ii) as condições de fronteira impõem o anulamento das variáveis dependentes e suas segundas derivadas nas extremidades do intervalo $[0,1]$, tem-se necessariamente (Vlasov, 1961)

$$\begin{cases} \tilde{V}_c(\xi) = C_1 \sin(n\pi\xi) \\ \tilde{\Phi}(\xi) = C_2 \sin(n\pi\xi) , \end{cases} \quad (162)$$

em que n é um inteiro positivo e C_1, C_2 são constantes reais⁸.

Introduzindo as expressões (162) nas equações diferenciais (151) e colocando em evidência o fator comum $\sin(n\pi\xi)$, obtém-se

$$\begin{cases} \left\{ \left[\left(\frac{\alpha_z}{\alpha_w \alpha_c \mu_w} \right)^2 (n\pi)^4 - \left(\frac{\alpha_z}{\alpha_c} \right)^2 (n\pi)^2 - \frac{1}{\alpha_c^2} \right] C_1 - \frac{\chi}{\alpha_c^2} C_2 \right\} \sin(n\pi\xi) = 0 \\ \left\{ -\frac{\chi}{\alpha_c^2} C_1 + \left[\frac{(n\pi)^4}{\mu_w^2} - \left(\alpha_w^2 - \frac{1}{c_w^2 \mu_w^2} \right) (n\pi)^2 - 1 \right] C_2 \right\} \sin(n\pi\xi) = 0 \end{cases} , 0 < \xi < 1 . \quad (163)$$

⁸ Foi o que se constatou, aliás, no primeiro caso particular.

Para que estas igualdades se verifiquem para qualquer $\xi \in (0,1)$, as constantes C_1 e C_2 terão que satisfazer o sistema homogéneo

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{\alpha_z}{\alpha_w \alpha_c \mu_w} \right)^2 (n\pi)^4 - \left(\frac{\alpha_z}{\alpha_c} \right)^2 (n\pi)^2 - \frac{1}{\alpha_c^2} \right] C_1 - \frac{\chi}{\alpha_c^2} C_2 = 0 \\ -\frac{\chi}{\alpha_c^2} C_1 + \left[\frac{(n\pi)^4}{\mu_w^2} - \left(\alpha_w^2 - \frac{1}{c_w^2 \mu_w^2} \right) (n\pi)^2 - 1 \right] C_2 = 0, \end{cases} \quad (164)$$

o qual tem soluções não triviais se e só se

$$\det \begin{bmatrix} \left(\frac{\alpha_z}{\alpha_w \alpha_c \mu_w} \right)^2 (n\pi)^4 - \left(\frac{\alpha_z}{\alpha_c} \right)^2 (n\pi)^2 - \frac{1}{\alpha_c^2} & -\frac{\chi}{\alpha_c^2} \\ -\frac{\chi}{\alpha_c^2} & \frac{(n\pi)^4}{\mu_w^2} - \left(\alpha_w^2 - \frac{1}{c_w^2 \mu_w^2} \right) (n\pi)^2 - 1 \end{bmatrix} = 0. \quad (165)$$

Expandindo o determinante, a equação anterior é equivalente a

$$a \mu_w^4 + b \mu_w^2 + c = 0, \quad (166)$$

com

$$a = c_w^2 \alpha_w^2 [\alpha_c^2 (1 + (n\pi)^2 \alpha_w^2) (1 + (n\pi)^2 \alpha_z^2) - \chi^2] \quad (167)$$

$$b = -(n\pi)^2 \alpha_c^2 [\alpha_w^2 (1 + (n\pi)^2 \alpha_z^2) (1 + (n\pi)^2 c_w^2) + (n\pi)^2 \alpha_z^2 c_w^2 (1 + (n\pi)^2 \alpha_w^2)] \quad (168)$$

$$c = (n\pi)^6 \alpha_c^2 \alpha_z^2 (1 + (n\pi)^2 c_w^2). \quad (169)$$

Trata-se de uma equação de segundo grau em μ_w^2 . Com efeito, o coeficiente a é positivo, já que $\alpha_c^2 - \chi^2 = \frac{I_y + I_z}{A L^2} > 0$. Verifica-se que o binómio discriminante $b^2 - 4ac$ é também positivo, pelo que a equação (166) tem duas raízes reais e distintas, $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Ambas as raízes são positivas porque $-b > 0$ e $ac > 0$. Assim, para cada número natural n (número de semi-ondas de \tilde{V}_c e $\tilde{\Phi}$), obtemos duas frequências próprias.

É de salientar que, fazendo $\chi = 0$ (ou seja, $z_c = 0$), recuperamos os resultados obtidos no caso particular anterior. Com efeito, a partir da equação (165) teremos

$$\begin{cases} \left(\frac{\alpha_z}{\alpha_w \alpha_c \mu_w} \right)^2 (n\pi)^4 - \left(\frac{\alpha_z}{\alpha_c} \right)^2 (n\pi)^2 - \frac{1}{\alpha_c^2} = 0 \\ \vee \frac{(n\pi)^4}{\mu_w^2} - \left(\alpha_w^2 - \frac{1}{c_w^2 \mu_w^2} \right) (n\pi)^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad (170)$$

de onde resulta (recordem-se as equações (122) e (146))

$$\mu_z^2 = \left(\frac{\alpha_w}{\alpha_z} \mu_w \right)^2 = \frac{(n\pi)^4}{1+(n\pi)^2 \alpha_z^2} \vee \mu_w^2 = \frac{(n\pi)^4 + \frac{(n\pi)^2}{c_w^2}}{1+(n\pi)^2 \alpha_w^2}. \quad (171)$$

A título ilustrativo, considere-se uma viga em aço ($E = 210 \text{ GPa}$, $G = 80,77 \text{ GPa}$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$), com 10 m de vão e a secção transversal representada na Figura 3.4 (retirada de Camotim *et al.*, 2012). As propriedades geométricas indicadas foram obtidas com o *software* “LTBeam” (CTICM, 2010). Os parâmetros adimensionais correspondentes são dados no Quadro 3.1. Para $n = 1$ e $n = 2$, indicam-se no Quadro 3.2 os coeficientes (167)-(169), as raízes da equação (166), assim como as frequência próprias angulares correspondentes.

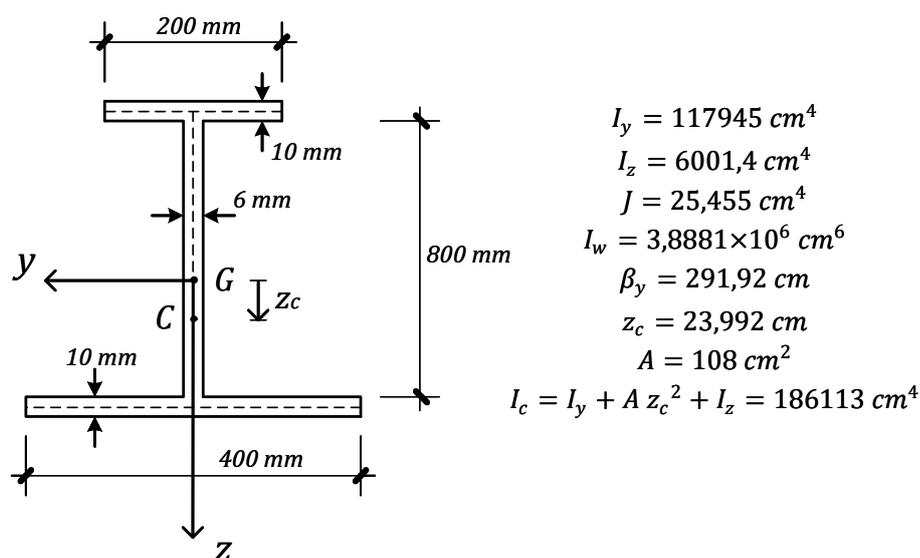


Figura 3.4 – Exemplo numérico ilustrativo – Características geométricas da secção transversal (monossimétrica).

Quadro 3.1 – Exemplo numérico ilustrativo – Parâmetros adimensionais.

α_z	α_w	α_c	c_w	χ
$7,4544 \times 10^{-3}$	$4,5707 \times 10^{-3}$	$4,1512 \times 10^{-2}$	$6,3019 \times 10^{-1}$	$2,3992 \times 10^{-2}$

Quadro 3.2 – Exemplo numérico ilustrativo – Frequências próprias angulares.

n	a	b	c	μ_w^2	$k \text{ (rad/s)}$
1	$9,5324 \times 10^{-9}$	$-5,4541 \times 10^{-6}$	$4,5291 \times 10^{-4}$	100,8 471,4	23,73 51,33
2	$9,5648 \times 10^{-9}$	$-8,3076 \times 10^{-5}$	$9,8268 \times 10^{-2}$	1412,6 7273,0	88,85 201,6

Quando se despreza (i) a inércia associada à rotação das secções em torno do eixo z e (ii) a inércia associada ao empenamento de torção das secções – isto é, quando se desprezam as

parcelas $k^2 \rho I_z V_c''(x)$ e $k^2 \rho I_w \Phi''(x)$ nas equações diferenciais (150) – os coeficientes a e b em (166) reduzem-se a

$$a = c_w^2 \alpha_w^2 (\alpha_c^2 - \chi^2) \quad (172)$$

$$b = -(n\pi)^2 \alpha_c^2 [\alpha_w^2 (1 + (n\pi)^2 c_w^2) + (n\pi)^2 \alpha_z^2 c_w^2]. \quad (173)$$

O coeficiente c mantém-se inalterado. Para o exemplo numérico ilustrativo atrás considerado, as quatro primeiras frequências próprias angulares ($n = 1$ e $n = 2$) para esta situação simplificada estão indicadas no Quadro 3.3. São superiores às do Quadro 3.2, mas as diferenças são diminutas (em virtude do muito reduzido valor dos parâmetros α_z e α_w). O resultado obtido para a menor frequência própria angular coincide com o fornecido pela expressão apresentada por Roberts (1987).

Quadro 3.3 – Exemplo numérico ilustrativo – Frequências próprias angulares quando se despreza a inércia associada à rotação das secções em torno do eixo z e ao empenamento de torção das secções.

n	a	b	c	μ_w^2	k_0 (rad/s)
1	$9,5216 \times 10^{-9}$	$-5,4524 \times 10^{-6}$	$4,5291 \times 10^{-4}$	100,8	471,8
2		$-8,2975 \times 10^{-5}$	$9,8268 \times 10^{-2}$	1413,6	7300,8

3.3 Caso particular 3 – Viga de secção em I duplamente simétrica, com apoios “padrão” e momentos $M_y = M = cte$.

Neste caso, as equações diferenciais que regem o problema são

$$\begin{cases} EI_z V_c^{(4)}(x) + M\Phi''(x) + k^2 \rho [I_z V_c''(x) - A V_c(x)] = 0 \\ EI_w \Phi^{(4)}(x) - GJ \Phi''(x) + M V_c''(x) + \\ + k^2 \rho [I_w \Phi''(x) - I_c \Phi(x)] = 0 \end{cases}, \quad 0 < x < L. \quad (174)$$

Apesar da dupla simetria da secção transversal (que implica $z_c = 0$), a presença de momentos fletores iniciais introduz um acoplamento entre a flexão lateral (V_c) e a torção (Φ). Sendo a distribuição inicial de momentos uniforme, estas equações diferenciais retêm a importante característica de apresentarem coeficientes constantes. Como condições de fronteira, temos mais uma vez as condições (103)-(106) e (127)-(130).

O já familiar processo de adimensionalização leva a que o problema de valores próprios seja escrito na seguinte forma:

$$\begin{cases} \left(\frac{\alpha_z}{\alpha_w \mu_w}\right)^2 \tilde{V}_c^{(4)}(\xi) + \alpha_z^2 \tilde{V}_c''(\xi) - \tilde{V}_c(\xi) + \left(\frac{\alpha_c}{\mu_w}\right)^2 m \tilde{\Phi}''(\xi) = 0 \\ \frac{1}{\mu_w^2} \tilde{\Phi}^{(4)}(\xi) + \left(\alpha_w^2 - \frac{1}{c_w^2 \mu_w^2}\right) \tilde{\Phi}''(\xi) - \tilde{\Phi}(\xi) + \frac{m}{\mu_w^2} \tilde{V}_c''(\xi) = 0 \end{cases}, 0 < \xi < 1, \quad (175)$$

$$\tilde{V}_c(0) = 0 \quad (176)$$

$$\tilde{V}_c(1) = 0 \quad (177)$$

$$\tilde{V}_c''(0) = 0 \quad (178)$$

$$\tilde{V}_c''(1) = 0 \quad (179)$$

$$\tilde{\Phi}(0) = 0 \quad (180)$$

$$\tilde{\Phi}(1) = 0 \quad (181)$$

$$\tilde{\Phi}''(0) = 0 \quad (182)$$

$$\tilde{\Phi}''(1) = 0. \quad (183)$$

Nas equações (175) figura um novo parâmetro adimensional, a saber

$$m = \frac{M L^3}{E I_w}. \quad (184)$$

Todos os restantes símbolos têm o significado anteriormente atribuído.

Como referido a propósito do caso particular 2 (e constatado no caso particular 1), as funções próprias (modos de vibração) são necessariamente da forma

$$\begin{cases} \tilde{V}_c(\xi) = C_1 \sin(n\pi\xi) \\ \tilde{\Phi}(\xi) = C_2 \sin(n\pi\xi) \end{cases}, \quad (185)$$

em que n é um inteiro positivo e C_1, C_2 são constantes reais.

Introduzindo as expressões (185) nas equações diferenciais (175) e colocando em evidência o fator comum $\sin(n\pi\xi)$, obtém-se

$$\begin{cases} \left\{ \left[(n\pi)^4 \left(\frac{\alpha_z}{\alpha_w \mu_w}\right)^2 - (n\pi)^2 \alpha_z^2 - 1 \right] C_1 - (n\pi)^2 \left(\frac{\alpha_c}{\mu_w}\right)^2 m C_2 \right\} \\ \quad \times \sin(n\pi\xi) = 0 \\ \left\{ -(n\pi)^2 \frac{m}{\mu_w^2} C_1 + \left[\frac{(n\pi)^4}{\mu_w^2} - (n\pi)^2 \left(\alpha_w^2 - \frac{1}{c_w^2 \mu_w^2}\right) - 1 \right] C_2 \right\} \times \\ \quad \times \sin(n\pi\xi) = 0 \end{cases}, 0 < \xi < 1. \quad (186)$$

Para que estas igualdades se verifiquem para qualquer $\xi \in (0,1)$, as constantes C_1 e C_2 terão que satisfazer o sistema homogéneo

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{\alpha_z}{\alpha_w \mu_w} \right)^2 (n \pi)^4 - \alpha_z^2 (n \pi)^2 - 1 \right] C_1 - \left(\frac{\alpha_c}{\mu_w} \right)^2 m (n \pi)^2 C_2 = 0 \\ - \frac{m}{\mu_w^2} (n \pi)^2 C_1 + \left[\frac{(n \pi)^4}{\mu_w^2} - \left(\alpha_w^2 - \frac{1}{c_w^2 \mu_w^2} \right) (n \pi)^2 - 1 \right] C_2 = 0 \end{cases}, \quad (187)$$

o qual tem soluções não triviais se e só se

$$\det \begin{bmatrix} \left(\frac{\alpha_z}{\alpha_w \mu_w} \right)^2 (n \pi)^4 - \alpha_z^2 (n \pi)^2 - 1 & - \left(\frac{\alpha_c}{\mu_w} \right)^2 m (n \pi)^2 \\ - \frac{m}{\mu_w^2} (n \pi)^2 & \frac{(n \pi)^4}{\mu_w^2} - \left(\alpha_w^2 - \frac{1}{c_w^2 \mu_w^2} \right) (n \pi)^2 - 1 \end{bmatrix} = 0. \quad (188)$$

Expandido o determinante, obtém-se a equação do segundo grau em que a equação anterior é equivalente a

$$a \mu_w^4 + b \mu_w^2 + c = 0, \quad (189)$$

com

$$a = c_w^2 \alpha_w^2 (1 + (n \pi)^2 \alpha_w^2) (1 + (n \pi)^2 \alpha_z^2) \quad (190)$$

$$b = -(n \pi)^2 \alpha_w^2 (1 + (n \pi)^2 c_w^2) - (n \pi)^4 \alpha_z^2 (\alpha_w^2 + c_w^2 (1 + 2(n \pi)^2 \alpha_w^2)) \quad (191)$$

$$c = (n \pi)^6 \alpha_z^2 (1 + (n \pi)^2 c_w^2) - (n \pi)^4 \alpha_c^2 \alpha_w^2 c_w^2 m^2. \quad (192)$$

Para determinados valores do parâmetro m , o coeficiente c torna-se nulo, passando a equação (189) a apresentar a solução $\mu_w^2 = 0$, ou seja, passando a viga a apresentar uma frequência própria nula. Esta condição – anulamento da frequência própria – permite definir os momentos de bifurcação por encurvadura lateral da viga. Com efeito, fazendo

$$c = 0, \quad (193)$$

obtém-se

$$m_b^{(n)} = \pm \frac{n \pi \alpha_z}{c_w \alpha_w \alpha_c} \sqrt{1 + (n \pi)^2 c_w^2} \quad (194)$$

ou, equivalentemente,

$$M_b^{(n)} = \pm \frac{n \pi}{L} \sqrt{GJ EI_z \left(1 + \left(\frac{n \pi}{L} \right)^2 \frac{EI_w}{GJ} \right)}. \quad (195)$$

Esta expressão fornece o n -ésimo momento de bifurcação elástico da viga, positivo e negativo⁹ (Trahair, 1993). Em particular, para $n = 1$, obtém-se o momento crítico

$$M_{cr} = \pm \frac{\pi}{L} \sqrt{GJ EI_z \left(1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GJ} \right)}. \quad (196)$$

A título ilustrativo, considere-se uma viga em aço ($E = 210 \text{ GPa}$, $G = 80,77 \text{ GPa}$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$), novamente com 10 m de vão, e a secção transversal duplamente simétrica representada na Figura 3.5. As propriedades geométricas indicadas foram obtidas com o software “LTBeam” (CTICM, 2010). Os parâmetros adimensionais correspondentes são dados no Quadro 3.4. Para diferentes valores de momento aplicado, compreendidos entre 0 e $M_{cr} = 129,4 \text{ kNm}$, o Quadro 3.5 e o gráfico da Figura 3.6 fornecem a menor frequência própria angular obtida. Verifica-se que esta frequência diminui à medida que o valor do momento aplicado aumenta, refletindo a degradação da rigidez da viga. A diminuição da frequência é particularmente acentuada na vizinhança de M_{cr} .

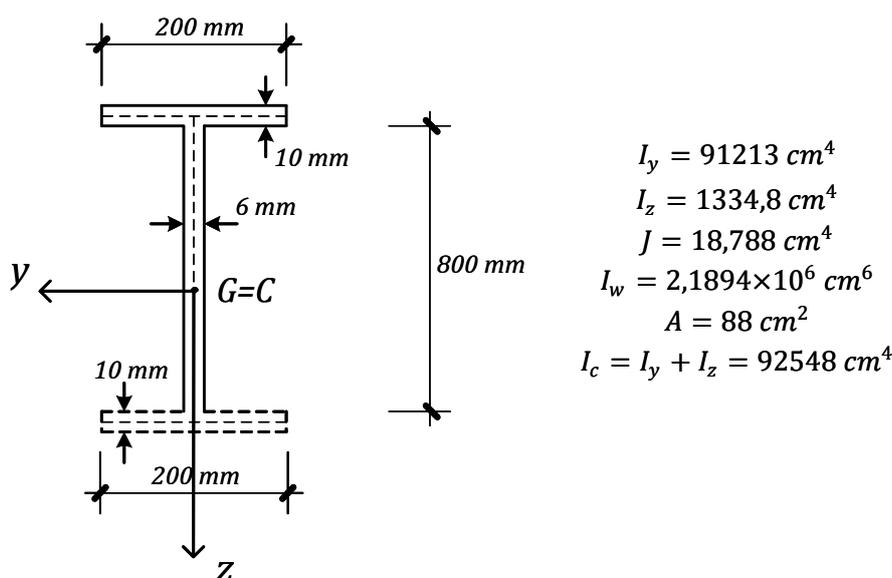


Figura 3.5 – Exemplo numérico ilustrativo – Características geométricas da secção transversal (duplamente simétrica).

Quadro 3.4 – Exemplo numérico ilustrativo – Parâmetros adimensionais.

α_z	α_w	α_c	c_w
$3,8946 \times 10^{-3}$	$4,8638 \times 10^{-3}$	$3,2430 \times 10^{-2}$	$5,5044 \times 10^{-1}$

⁹ Recorde-se que a secção transversal considerada neste caso particular é duplamente simétrica.

Quadro 3.5 – Exemplo numérico ilustrativo – Menor frequência própria angular em função do momento aplicado.

M (kNm)	m	a	b	c	μ_w^2	k (rad/s)
0	0			$5,8189 \times 10^{-2}$	62,45	19,88
25	54,37			$5,6018 \times 10^{-2}$	58,23	19,20
50	108,75			$4,9505 \times 10^{-2}$	47,72	17,38
75	163,12	$7,1704 \times 10^{-6}$	$-1,3796 \times 10^{-4}$	$3,8650 \times 10^{-2}$	34,04	14,68
100	217,50			$2,3454 \times 10^{-2}$	18,85	10,92
125	271,87			$3,9150 \times 10^{-3}$	2,881	4,270
129,4	281,5			0	0	0

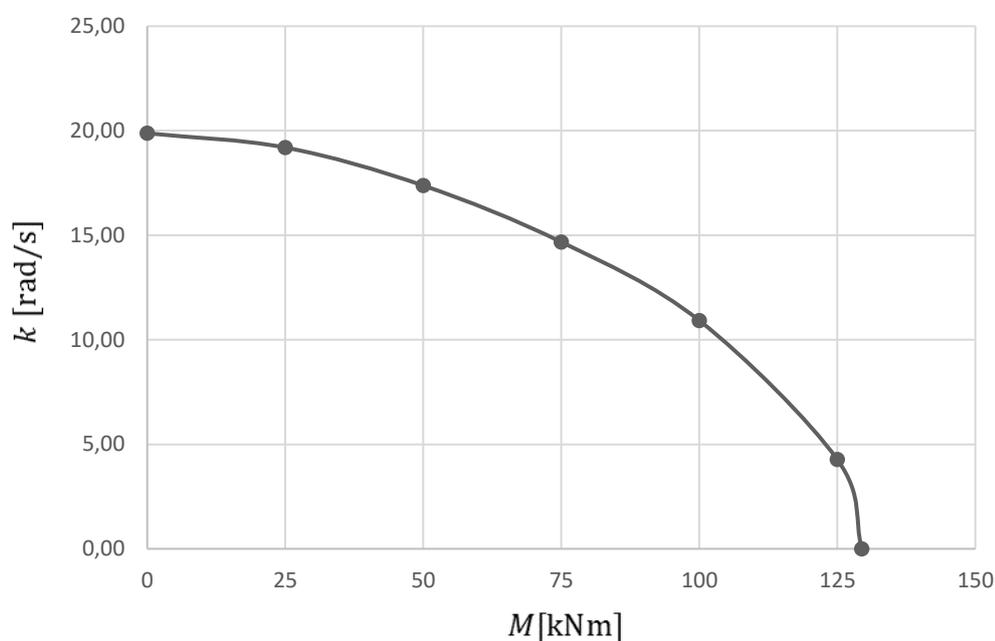


Figura 3.6 – Exemplo numérico ilustrativo – Menor frequência própria angular em função do momento aplicado.

Quando se despreza (i) a inércia associada à rotação das secções em torno do eixo z e (ii) a inércia associada ao empenamento de torção das secções – isto é, quando se desprezam as parcelas $k^2 \rho I_z V_c''(x)$ e $k^2 \rho I_w \Phi''(x)$ nas equações diferenciais (174) –, os coeficientes a e b em (189) reduzem-se a

$$a = c_w^2 \alpha_w^2 \quad (197)$$

$$b = -(n\pi)^2 [\alpha_w^2 (1 + (n\pi)^2 c_w^2) + (n\pi)^2 \alpha_z^2 c_w^2]. \quad (198)$$

O coeficiente c mantém-se inalterado e, portanto, mantém-se também inalterada a equação (195) com os momentos de bifurcação. Para o exemplo numérico ilustrativo considerado, as frequências obtidas com esta simplificação são sempre superiores às do Quadro 3.5 (exceto para $M = M_{cr}$, caso em que são obviamente iguais), mas, em virtude do muito reduzido valor dos parâmetros α_z e α_w , as diferenças relativas são, uma vez mais, diminutas (não ultrapassam 0,01%).

4 CONCLUSÃO

Apresentou-se um modelo matemático unidimensional para avaliar a influência dos esforços iniciais (tensões generalizadas) na vibração por flexão lateral e torção de vigas com secção em I de parede fina, de banzos iguais (secção duplamente simétrica) ou desiguais (secção monossimétrica). Este modelo teve por base as hipóteses clássicas de Vlasov (1961) para a torção não uniforme. Assim, as distorções por esforço transversal foram desprezadas. Já os efeitos da inércia associada à rotação das secções transversais em torno do seu eixo fraco e da inércia associada ao empenamento por torção foram incorporados de forma inteiramente consistente. As equações do movimento (equações diferenciais parciais) e as condições de fronteira foram estabelecidas através do princípio variacional de Hamilton. A técnica da separação de variáveis – ou, de um ponto de vista físico, a hipótese de movimento síncrono – permitiu definir um problema de valores e funções próprios (com equações diferenciais ordinárias), que fornece as frequências próprias e os modos de vibração. Constatou-se que tanto a assimetria da secção transversal como a distribuição inicial de momentos fletores introduzem um acoplamento entre a flexão lateral e a torção. Estes dois modos ficam desacoplados apenas se a secção for duplamente simétrica e, simultaneamente, não existirem momentos fletores iniciais.

Para efeitos de verificação e ilustração, considerou-se uma família de vigas com condições de apoio “padrão”. De forma analítica, determinaram-se as frequências próprias e os modos de vibração nos seguintes casos: (i) secção duplamente simétrica sem momentos fletores iniciais, (ii) secção monossimétrica sem momentos fletores iniciais e (iii) secção duplamente simétrica com uma distribuição inicial uniforme de momentos fletores. Em cada um destes casos, os efeitos da inércia de rotação das secções em torno do seu eixo fraco e da inércia associada ao empenamento de torção foram primeiro incluídos na análise e depois desprezados, para que a sua importância pudesse ser avaliada. Verificou-se uma excelente concordância com os resultados disponíveis na literatura, sempre que uma tal comparação foi possível.

Os casos estudados permitiram constatar o seguinte:

- (1) A importância da inércia de rotação das secções em torno do seu eixo fraco e da inércia associada ao empenamento de torção – isto é, a diminuição do valor das frequências próprias que a sua inclusão na análise acarreta – depende dos parâmetros adimensionais

$$\alpha_z = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{I_z}{A}} \text{ e } \alpha_w = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{I_w}{I_c}} \text{ e do número } n \text{ de semi-ondas do modo de vibração. Para valores}$$

baixos destes parâmetros, a redução observada em exemplos numéricos concretos foi diminuta.

- (2) A condição de anulamento das frequências próprias de vibração permite obter exatamente os mesmos momentos de bifurcação por encurvadura lateral que uma análise linear de estabilidade, baseada apenas em considerações de equilíbrio estático. Esta conclusão é independente da consideração ou não das inércias referidas no ponto anterior.
- (3) Verificou-se, num exemplo numérico concreto, que a menor das frequências próprias de vibração diminui à medida que o valor do momento aplicado aumenta, refletindo a degradação da rigidez da viga (por via da rigidez geométrica). A diminuição é particularmente acentuada na vizinhança do momento crítico da viga, M_{cr} .

Como base na experiência adquirida durante a realização deste trabalho, sugerem-se os seguintes desenvolvimentos futuros:

- (1) Desenvolvimento de uma ferramenta computacional – com base no método dos elementos finitos, por exemplo – que permita o cálculo automático de frequências e modos de vibração. Em face das complexidades analíticas encontradas no exemplo “simples” tratado nesta dissertação, julga-se que um tal desenvolvimento é fundamental para que posteriormente possam ser analisados outros casos – com outras condições de apoio e outros carregamentos iniciais aplicados – porventura com maior interesse prático.
- (2) Consideração da situação de vibrações forçadas, com a aplicação de forças exteriores dependentes do tempo e/ou com movimentos impostos nos apoios.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andrade, A. (2013). “One-Dimensional Models for the Spatial Behaviour of Tapered Thin-Walled Bars with Open Cross-Sections: Static, Dynamic and Buckling Analyses”. Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra.
- Antman, S.S. (2005). “Nonlinear Problems of Elasticity” (2ª edição). Springer, Nova York.
- Bartle, R.G. (1976). “The Elements of Real Analysis” (2ª edição). Wiley, Nova Iorque.
- Bebiano, R., Silvestre, N., Camotim, D. (2008). “Local and Global Vibration of Thin-Walled Members Subjected to Compression and Non-Uniform Bending”. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 315, Issue 3, pp. 509–535.
- Brun, J.L. (2007). “Hamilton’s Principle for Beginners”. *European Journal of Physics*, Vol. 28, Issue 3, pp. 487-491.
- Caldeira, C. (2004). “Análise Matemática III – Textos de Apoio”. Universidade de Coimbra.
- Camotim, D., Andrade, A., Basaglia, C. (2012). “Some Thoughts on a Surprising Result Concerning the Lateral-Torsional Buckling of Monosymmetric I-Section Beams”. *Thin-Walled Structures*, Vol. 60, pp. 216-221.
- Campos Ferreira, J. (1987). “Introdução à Análise Matemática”. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Clough, R.W., Penzien, J. (1993). “Dynamics of Structures” (2ª edição). McGraw-Hill, Singapura.
- CTICM (2010). “LTBeam version 1.0.11”. Centre Technique Industriel de la Construction Métallique, Paris.
- Dias da Silva, V. (2013). “Mecânica e Resistência dos Materiais” (4ª edição). Coimbra.
- Fung, Y.C. (1965). “Foundations of Solid Mechanics”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nova Jersey.
- Gérardin, M., Rixen, D.J. (2015). “Mechanical Vibrations – Theory and Application to Structural Dynamics” (3ª edição). John Wiley & Sons, Nova Iorque.
- Gere, J.M. (1954). “Torsional Vibration of Beams of Thin-Walled Open Sections”. *Journal of Applied Mechanics – Transactions of the ASME*, Vol. 21, pp. 381-387.

- Maia, N.M.M. (2000). “Introdução à Dinâmica Analítica”. IST Press, Lisboa.
- Meirovitch, L. (1980). “Computational Methods in Structural Dynamics”. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Países Baixos.
- NP EN 1990 (2009). “Eurocódigo – Bases para o Projecto de Estruturas”. Instituto Português da Qualidade.
- NP EN 1998-1 (2010). “Eurocódigo 8 – Projecto de Estruturas para a Resistência aos Sismos. Parte 1: Regras Gerais, Acções Sísmicas e Regras para Edifícios”. Instituto Português da Qualidade.
- Prokić, A. (2005). “On Triply Coupled Vibrations of Thin-Walled Beams with Arbitrary Cross-Section”. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 279, Issues 3-5, pp. 723-737.
- Prokić, A., Lukić, D. (2012). “Flexural-Torsional Vibration Analysis of Axially Loaded Thin-Walled Beam”. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol.34, Issue 3, pp. 262-268.
- Reis, A., Camotim, D. (2001). “Estabilidade Estrutural”. McGraw-Hill, Lisboa.
- Roberts, T.M. (1987). “Natural Frequencies of Thin-Walled Bars of Open Cross Section”. *Journal of Engineering Mechanics – ASCE*, Vol. 113, Issue 10, pp. 1584-1593.
- Santana, A.P., Queiró, J.F. (2010). “Introdução à Álgebra Linear”. Gradiva, Lisboa.
- Simitses, G.J., Hodges, D.H. (2006). “Fundamentals of Structural Stability”. Elsevier, Amesterdão.
- Strauss, W.A. (1992). “Partial Differential Equations – An Introduction”. Wiley, Nova Iorque.
- Timoshenko, S.P. (1937). “Vibration Problems in Engineering” (2ª edição). D. Van Nostrand Company, Nova Iorque.
- Trahair, N.S. (1993). “Flexural-Torsional Buckling of Structures”. E&FN Spon, Londres.
- Virgin, L.N. (2007). “Vibration of Axially Loaded Structures”. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido.
- Vlasov, V.Z. (1961). “Thin-Walled Elastic Beams”. Tradução inglesa da 2ª edição russa de 1959. Israel Program for Scientific Translation, Jerusalém.