Universidade Federal do Rio de Janeiro

Equações Diferenciais Ordinárias e Equações do Transporte com Regularidade Sobolev: A Teoria de DiPerna-Lions e Aplicações

Roberto Machado Velho

Rio de Janeiro

Agosto de 2011

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Equações Diferenciais Ordinárias e Equações do Transporte com Regularidade Sobolev: A Teoria de DiPerna-Lions e Aplicações

Roberto Machado Velho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Fábio Ramos.

Rio de Janeiro
Agosto de 2011

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Equações Diferenciais Ordinárias e Equações do Transporte com Regularidade Sobolev:

A Teoria de DiPerna-Lions e Aplicações

Roberto Machado Velho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.
Aprovada por:

____

Presidente, Prof. Fábio Ramos - DMA - IM - UFRJ

____

Prof. César Niche - DMA - IM - UFRJ

____

Prof. Emanuel Carneiro - IMPA

____

Dra. Anne Caroline Bronzi - IM - UFRJ

Rio de Janeiro
Agosto de 2011

Intencionalmente em Branco.

V432e Velho, Roberto Machado.
Equações diferenciais ordinárias e equações do transporte com regularidade sobolev: a teoria de diperna-lions e aplicações / Roberto Machado Velho. – Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2011.
xiv, 94 f.; 31 cm.

Orientador: Fábio Ramos
Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, 2011.
Referências: f.91-94

1. Equações diferenciais ordinárias – Tese. I. Ramos, Fábio. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada. III. Equações diferenciais ordinárias e equações do transporte com regularidade sobolev: a teoria de diperna-lions e aplicações.

CDD
515.352

À Minha Mãe, Cátia, Por Tudo.

Intencionalmente em Branco.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer:
- A todos os professores e colegas do Departamento de Matemática Aplicada da UFRJ, ao longo dos últimos anos juntos, pelo apoio nas atividades e pela transmissão do conhecimento. Senti-me muitas vezes como em uma grande família.

- Ao Fábio Ramos, por aceitar minha proposta em ser seu primeiro aluno de mestrado. Pelo apoio em inúmeros momentos. Fábio foi muito mais que um orientador, foi um grande mentor e mais um líder do que um chefe. E tive a chance de com ele aprender muito mais do que o conteúdo desta dissertação.

- Aos membros da banca de mestrado, Emanuel Carneiro, César Niche e Anne Bronzi. E pelos seus comentários na tentativa de aprimorar esta dissertação; à Anne Bronzi em especial por passar as últimos dias pré-defesa trabalhando arduamente na discussão de tópicos desta dissertação.

- À infraestrutura do IMPA, que permite construção do conhecimento e interação entre as pessoas.

- Aos organizadores de inúmeros eventos acadêmicos de que participei e onde pude ganhar e trocar conhecimento, em particular a Edith Padrón (Tenerife), Tudor Ratiu (Lausanne), Helena Nussenzveig (Unicamp), Jorge Zubelli (IMPA).

- Ao Professor Felipe Acker, pela sua iniciativa e liderança em iniciar o curso de Graduação em Matemática Aplicada e coordená-lo ao longo de pelo menos 7 anos.

- Ao Professor Cassio Neri, primeiro professor do Departamento de Matemática Aplicada com quem tive um curso e depois muitos outros. E pela sua imensa capacidade de cativar-nos a aprender ainda mais e com muito entusiasmo.

- Ao Professor Milan Merkle (Universidade de Belgrado), por ter me apresentado ao Mundo Estocástico através de seu curso no IMPA e por estar prontamente aberto a discussões sobre este assunto até os dias de hoje.

- Ao Professor Henrique Bursztyn (IMPA), pelos cursos, conversas, discussões e ajuda.

- Ao Professor Diogo Gomes (IST-Lisboa), por prontamente disponibilizar algumas notas de aulas que permitiram a melhor compreensão e a melhoria do texto desta dissertação.

- Aos meus amigos, Sílvio Domingos, Edson Real, Mari Landeira, Eduardo Bittencourt, Grasiele Santos, Thiago Hartz, Iracema Bonomini, Braulio Garcia, Felipe Chaves.

- Aos amigos e colegas do DMA, entre eles, Victor Cortez, Yuri Saporito, Pedro Maia, Enio Hayashi, Rodrigo Targino, Rafael Castaneda, Diogo Duarte, Nicolau Sarquis, Cecília Mondaini, Lucas Stolerman, Cláudio Verdun, Hugo Carvalho e Danilo Barros.

- Aos meus amigos do IMPA, em especial, Alan Prata, Vinicius Albani, Luca Mertens, Aline Cerqueira e Carlos Matheus.

- Aos amigos no exterior, em especial Victor Perez, Júlio Louzada, Rogério Fernandez, Aleš Patak, Gorica Nikolic, Daniel Valesin e Noah Kieserman.

- Aos matemáticos em geral, pelo espírito colaborativo e a persistência no trabalho.

- Ao CNPq, pela bolsa de mestrado.

- A Cátia Regina, José Roberto, Judit Nédli, aos meus irmãos e todos os amigos que nos diferentes momentos estão ao nosso lado.

Roberto Machado Velho
Agosto de 2011

Resumo

Equações Diferenciais Ordinárias e Equações do Transporte com Regularidade Sobolev:

A Teoria de DiPerna-Lions e Aplicações

Roberto Machado Velho

Resumo: Esta dissertação tem como objetivo expor a Teoria de DiPerna-Lions sobre soluções renormalizadas para a equação do transporte linear. Apresentamos também aplicações desta teoria que possibilitam o estudo de equações ordinárias de baixa regularidade, sua dependência em relação às condições iniciais e o estudo de soluções para a equação de Euler em duas dimensões.

Palavras–chave. Teoria de DiPerna-Lions, EDO - Equações Diferenciais Ordinárias, EDP - Equações a Derivadas Parciais, Equação do Transporte.

Rio de Janeiro
Agosto de 2011

Abstract

Equações Diferenciais Ordinárias e Equações do Transporte com Regularidade Sobolev:

A Teoria de DiPerna-Lions e Aplicações

Roberto Machado Velho

Abstract: The present work intents to expose the theory of DiPerna-Lions concerning renomalized solutions to the linear transport equation. We also present several applications of such theory including the ones to solve ordinary differential equations of low regularity, its dependance upon initial conditions and solutions to Euler equation in two dimensions.

Keywords. DiPerna-Lions Theory, ODE - Ordinary Differential Equation, PDE - Partial Differential Equation, Transport Equation.

Rio de Janeiro
Agosto de 2011

Sumário

1 Introdução - Teoria Clássica de Equações Diferenciais Ordinárias 1
1.1 Introdução 1
1.2 Teoremas de Existência e Unicidade 4
1.3 O Fluxo Clássico de um Campo Vetorial 10
1.4 Conexão entre EDO e Equação do Transporte 13
1.5 Caso Não-regular 14

2 Equação do Transporte Linear - Caso não Suave 17
2.1 Existência de Solução e Regularização 17
2.2 Unicidade de Solução 25
2.3 Existência de Soluções Renormalizadas e Estabilidade 30
2.4 Estabilidade e Compacidade Temporal 42

3 Equações Diferenciais Ordinárias - Caso não Suave 45
3.1 Introdução 45
3.2 Caso Autônomo e com Divergente Nulo 45
3.3 Caso Autônomo e com Divergente em L^∞ 55
3.4 Caso Dependente do Tempo 59

4 Equação do Transporte com Campo $b \in W^{1,1}$ Parcial 63
4.1 Introdução 63
4.2 Resultado Principal: Existência e Unicidade de Solução 65
4.3 Soluções Renormalizadas 73

5 Aplicação 1: Estudo da Dependência às Condições Iniciais da Solução de EDOs 75
5.1 Introdução 75
5.2 Resultado Principal 79

6 Aplicação 2: Soluções Fracas da Equação de Euler 2D Incompressível 85

6.1 Introdução 85

6.2 Resultado Principal 89

Bibliografia 91

Capítulo 1

Introdução - Teoria Clássica de Equações Diferenciais Ordinárias

1.1 Introdução

O tópico principal desta dissertação é o estudo das propriedades de regularidade, existência e unicidade de solução da EDO

$$\begin{cases} \dot{X} = b(t, X(t)), \\ X(0) = x, \end{cases} \tag{1.1}$$

com $X : [0,T] \to \mathbb{R}^N$, sob diferentes hipóteses de regularidade para o campo vetorial

$$b(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N.$$

No caso em que b possui regularidade Lipschitz com respeito à variável espacial, uniformemente com respeito à variável temporal, a teoria é bem estabelecida e dita **Teoria de Cauchy-Lipschitz**. Nesse caso, pode-se identificar um único fluxo do campo vetorial b, ou seja, a aplicação

$$X(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

que reúne todas as trajetórias, no sentido que resolve

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t}(t,x) = b(t, X(t,x)), \\ X(0,x) = x. \end{cases} \tag{1.2}$$

Além disso, o fluxo possui a propriedade de grupo, i.e.,

$$X(t+s, .) = X(t, X(s, .)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R},$$

e podemos obter uma estimativa da continuidade da solução em relação às condições iniciais da forma

$$|X(t,x_1) - X(t,x_2)| \leq e^{C_0|t|}\ |x_1 - x_2|, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$$

com C_0 sendo a constante de Lipschitz de b.
Esses resultados serão provados mais a frente neste capítulo. Considere agora o seguinte exemplo.

Exemplo 1. *Considere em $\mathbb{R}$ o campo vetorial $b(t,x) = \sqrt{|x|}$, que é contínuo mas não Lipschitz. A equação diferencial ordinária*

$$\dot{X}(t) = \sqrt{|X(t)|}, \quad X(0) = 0,$$

tem como solução

$$X^c(t) = \begin{cases} 0, & t \leq c \\ \frac{1}{4}(t-c)^2, & t \geq c \end{cases} \tag{1.3}$$

para todo valor do parâmetro $c \in [0, +\infty]$.

Claramente não há unicidade de solução, já que para pontos da forma $(t_0, 0)$ passam infinitas soluções. A solução pode "ficar parada" na origem por tempo arbitrário.
Este tipo de solução não nos permite nem ao menos construir uma teoria q.t.p. uma vez que se tomarmos um conjunto de condições iniciais (a_1, a_2) com $a_1 \leq a_2 \leq 0$, temos que a imagem de (a_1, a_2) pelo fluxo pode ser levada a um conjunto de medida nula se c for suficientemente grande.

Perceba também que o campo de velocidades do exemplo acima possui derivada arbitrariamente grande na vizinhança de zero. Um dos resultados principais apresentados nesta dissertação é de que, se o campo vetorial b possui regularidade $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e o divergente de b está limitado em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $N > 1$, tem-se uma solução única para a equação ordinária $\dot{X} = b(X)$ em um sentido apropriado.

Perceba que para $N = 1$, a hipótese do divergente do campo ser limitado em L^∞ nos dá que o campo possui regularidade Lipschitz e então teremos unicidade de solução. Isso mostra que, apesar de em dimensão um o divergente e a derivada serem o mesmo ente, em dimensão maior pode-se controlar o divergente de um campo mesmo que sua derivada exploda.

Outro fato que concluímos do exemplo é de que a continuidade do campo vetorial b não é suficiente para a obtenção de unicidade de solução da EDO. Veremos a seguir que se impusermos a condição do campo b ser Lipschitz em relação à variável espacial, uniformemente em relação ao tempo, obteremos a unicidade. Antes disso precisamos de um lema.

Lema 1.1 (Ponto Fixo de Banach)**.** *Sejam* $(V, ||\cdot||)$ *um espaço de Banach,* $A \subset V$ *um subconjunto fechado e* $f : A \to V$ *uma função com* $f(A) \subset A$ *que satisfaz a desigualdade*

$$||f(v) - f(w)|| \leq \theta ||v - w|| \quad \forall\ v, w \in A, \quad \theta \textit{ fixo e } 0 \leq \theta < 1.$$

Então f *possui um único ponto fixo em* A*, ou seja, existe um único* $u_0 \in A$ *tal que* $f(u_0) = u_0$*.*

Demonstração: Veja, por exemplo, o Livro de Jürgen Jost, [Jos05].

Estudemos agora a equação (1.1) em uma dimensão:

$$f'(x) = \phi(x, f(x)), \quad x \in I \subset \mathbb{R} \text{ um intervalo,} \tag{1.4}$$

com $f : I \to \mathbb{R}$ e assumindo $\phi : I \times J \to \mathbb{R}$ contínua para $x \in I$ e para $y \in J \subset \mathbb{R}$ também um intervalo.
Uma função f contínua definida em I é uma solução de (1.4) em I se $f(x) \in J\ \forall x \in I$ e

$$f(u_2) - f(u_1) = \int_{u_1}^{u_2} \phi(u, f(u))\, \mathrm{d}u, \quad \forall\ u_1, u_2 \in I. \tag{1.5}$$

Como f é contínua, $\varphi(x) := \phi(x, f(x))$ é uma função contínua de x e portanto a integral acima está bem definida.
Queremos na verdade estudar o P.V.I. (Problema de Valor Inicial) para a EDO

$$f'(x) = \phi(x, f(x)), \quad x \in I \subset \mathbb{R} \text{ intervalo.} \tag{1.6}$$

Ou seja, dados $x_0 \in I,\ y_0 \in J$, queremos achar uma solução de

$$\begin{cases} f'(x) = \phi(x, f(x)), \\ f(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Vamos estudar como resolver esse problema na seção a seguir.

1.2 Teoremas de Existência e Unicidade

Teorema 1.2 (Cauchy-Lipschitz, Picard-Lindelöf). *Suponha que $\phi(x,y)$ é contínua para $|x-x_0| \leq \rho,\ |y-y_0| \leq \eta$, com*

$$|\phi(x,y)| \leq M$$

para todo x,y da forma acima. Suponha também que $\phi(x,y)$ é Lipschitz contínua em y, i.e., existe $L < \infty$ tal que

$$|\phi(x,y_1) - \phi(x,y_2)| \leq L\ |y_1 - y_2| \tag{1.8}$$

sempre que $|x-x_0| \leq \rho,\ |y_1-y_0| \leq \eta$ e $|y_2-y_0| \leq \eta$.

Então existe $h > 0$ tal que (1.7) possui uma única solução em $[x_0-h, x_0+h] \cap I$.

Demonstração:
Fazendo $u_2 = x$ e $u_1 = x_0$ em (1.5) vemos que precisamos resolver a equação integral

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(u, f(u))\, \mathrm{d}u \quad \text{em } I' := [x_0-h, x_0+h] \cap I. \tag{1.9}$$

Vamos fazer isso utilizando o Lema do Ponto Fixo de Banach para

$$A := \left\{ f \in C^0(I') \ : \ ||f - y_0||_{C^0(I')} \leq \eta \right\},$$

com C^0 denotando o espaço das funções contínuas.
Temos que escolher $h > 0$ pequeno de forma a ter

$$h\ M \leq \eta \quad \text{e} \quad \theta := h\ L < 1. \tag{1.10}$$

Tomando $H(f)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(u, f(u))\, \mathrm{d}u$, temos de verificar que tal escolha de h, A e H satisfaz as hipóteses do Lema do Ponto Fixo de Banach. De fato, H leva o subconjunto A do espaço de Banach $C^0(I')$ nele mesmo, uma vez que, se $f \in A$,

$$\begin{aligned} ||Hf - y_0||_{C^0(I')} &= \max_{x \in I'} \left| \int_{x_0}^{x} \phi(u, f(u))\, \mathrm{d}u \right| \\ &\leq h \max_{\substack{u \in I' \\ |y-y_0| \leq \eta}} |\phi(u,y)| \end{aligned}$$

uma vez que $|f(u) - y_0| \leq \eta$ para $f \in A$ e $u \in I'$ e então

$$\begin{aligned} ||Hf - y_0||_{C^0(I')} &\leq h\ M \\ &\leq \eta \end{aligned}$$

por (1.10).

E também temos para $f, g \in A$ que H satisfaz a contração

$$\begin{aligned} ||Hf - Hg||_{C^0(I')} &= \max_{x \in I'} \left| \int_{x_0}^{x} \phi(u, f(u)) - \phi(u, g(u)) \, \mathrm{d}u \right| \\ &\leq h \; L \max_{u \in I'} |f(u) - g(u)| \\ &= \theta \; ||f - g||_{C^0(I')} \end{aligned}$$

com $\theta < 1$, por construção. Portanto, pelo lema do ponto fixo de Banach,

$$H : A \to A$$

possui um único ponto fixo f, e esse ponto fixo nos dá a solução de (1.9).

□

Repare que o PVI e a demonstração do Teorema de Cauchy-Lipschitz são facilmente estendidos ao caso $\mathbb{R}^N$.
Observe que abandonando a hipótese de continuidade Lipschitz, perde-se a unicidade de solução, como visto no exemplo 1, mas ainda temos o resultado de existência, devido ao seguinte teorema:

Teorema 1.3 (Peano). *Seja b um campo vetorial limitado e contínuo definido sobre um conjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ contendo o retângulo*

$$D = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \; : \; |t - t_0| \leq \alpha, \; |x - x_0| \leq \beta \right\}.$$

Então existe uma solução local para o sistema

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = b(t, \gamma(t)), \\ \gamma(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Demonstração: Seja M tal que $|b(t, x)| \leq M$ em D. Tome $r < min\{\alpha, \beta/M\}$, $I_r = [t_0 - r, t_0 + r]$ e considere o operador T e o espaço X assim definidos:

$$T[\gamma](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s, \gamma(s)) \, \mathrm{d}s,$$

$$X = \{\gamma \in C^0(I_r; \mathbb{R}^N) \; : \; \gamma(t_0) = x_0 \; \text{ e } |\gamma(t) - x_0| \leq \beta, \; \forall t \in I_r\}.$$

X é um subconjunto fechado não-vazio convexo e limitado de $C^0(I_r;\mathbb{R}^N)$ se munido da norma da convergência uniforme e $T : X \to X$ é um operador contínuo (pela continuidade uniforme de b). Tem-se também a estimativa

$$|T[\gamma](t) - T[\gamma](t')| = \left|\int_{t'}^{t} |b(s,\gamma(s))|\,\mathrm{d}s\right| \leq M|t-t'|, \quad \text{para todo } \gamma \in X.$$

Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, T é um operador compacto. A existência do ponto fixo segue então do Teorema do Ponto Fixo de Caccioppoli-Schauder, veja [GT01].

□

Ao longo desta dissertação faremos uso por diversas vezes do Lema de Gronwall, cujo enunciado apresentamos a seguir.

Lema 1.4 (Gronwall). *Seja $\eta : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ uma função não-negativa e absolutamente contínua que satisfaz a desigualdade*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\ \eta(t)\ +\ \psi(t), \quad q.t.p.\ em\ t$$

com $\phi(t)$ e $\psi(t)$ funções somáveis não-negativas definidas em $[0,T]$.
Então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)\,\mathrm{d}s}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\right], \quad \forall\ 0 \leq t \leq T.$$

Em particular, se $\eta' \leq \phi\ \eta$ em $[0,T]$ e $\eta(0) = 0$, então

$$\eta \equiv 0 \quad em\ [0,T].$$

O lema também possui uma versão integral: Seja $\nu(t)$ uma função somável não-negativa definida em $[0,T]$ que satisfaz a desigualdade

$$\nu(t) \leq C_1 \int_0^t \nu(s)\,\mathrm{d}s + C_2$$

para constantes $C_1, C_2 \geq 0$. Então

$$\nu(t) \leq C_2(1 + C_1 t\ e^{C_1 t}), \quad q.t.p.\ em\ 0 \leq t \leq T.$$

Em particular, se $\nu(t) \leq C_1 \int_0^t \nu(s)\,\mathrm{d}s$ q.t.p. em $0 \leq t \leq T$, então

$$\nu(t) = 0 \quad q.t.p.$$

Demonstração: Veja por exemplo o livro de Evans, [Eva98].

$\square$

Existem outras condições mais gerais do que a continuidade Lipschitz, necessária no Teorema de Cauchy-Lipschitz, mas que ainda garantem a unicidade de solução, são elas:

Teorema 1.5 (Condição Lipschitz unilateral). *Substituindo a condição de continuidade Lipschitz no Teorema de Cauchy-Lipschitz pela condição*

$$(b(t,x)-b(t,y))\cdot(x-y)\leq K|x-y|^2, \quad \forall (t,x),\ (t,y)\in D,$$

tem-se unicidade apenas para tempos futuros para o problema

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t)=b(t,\gamma(t)), \\ \gamma(t_0)=x_0, \end{cases}$$

no seguinte sentido: duas soluções γ_1 e γ_2 para o problema acima, que por definição satisfazem $\gamma_1(t_0)=\gamma_2(t_0)=x_0$, coincidem para $t>t_0$.

Demonstração: Considere a função $r(t):=|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)|^2$ e note que $r(t_0)=0$. Usando a hipótese do teorema podemos estimar $\dot{r}(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= 2\,(\gamma_1(t)-\gamma_2(t))\cdot(b(t,\gamma_1(t))-b(t,\gamma_2(t))) \\ &\leq K\,|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)|^2 \\ &= K\,r(t). \end{aligned}$$

E isso implica em

$$\frac{d}{dt}\left[r(t)e^{-Kt}\right]\leq 0,$$

que nos leva a

$$r(t)e^{-Kt}\leq r(t_0)e^{-Kt_0}=0, \quad \forall t\geq t_0$$

o que implica termos

$$r(t)=0 \ \Rightarrow\ \gamma_1(t)=\gamma_2(t), \quad \forall t\geq t_0. \qquad \square$$

Teorema 1.6 (Condição de Osgood - adaptado de [Cri07]). *Se substituirmos a condição de continuidade Lipschitz no Teorema de Cauchy-Lipschitz e usarmos a condição de Osgood, i.e.,*

$$|b(t,x)-b(t,y)|\leq\omega(|x-y|) \quad \forall (t,x),\ (t,y)\in D,$$

tem-se unicidade para o problema

$$\dot{\gamma}(t)=b(t,\gamma(t)), \quad \gamma(t_0)=x_0,$$

onde $\omega:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ é uma função crescente satisfazendo $\omega(0)=0$, $\omega(z)>0\ \forall z>0$ e

$$\int_0^1 \frac{1}{\omega(z)}\,\mathrm{d}z=+\infty.$$

Demonstração: Defina $r(t) := |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|^2$. Tem-se $r(t_0) = 0$. Vamos assumir por contradição que $r(t) > 0$ para $t \in]t_0, t_0 + r[$ para algum $r > 0$. Essa unicidade local para tempos futuros implica em unicidade global para tempos futuros. A unicidade global para tempos passados prova-se da mesma maneira.
Calculando $\dot{r}(t)$ temos

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= 2(\gamma_1(t) - \gamma_2(t)) \cdot (\dot{\gamma_1}(t) - \dot{\gamma_2}(t)) \\ &= 2(\gamma_1(t) - \gamma_2(t)) \cdot (b(t, \gamma_1(t)) - b(t, \gamma_2(t))). \end{aligned}$$

Usando então a condição de Osgood e integrando no tempo tem-se

$$r(t) \leq 2 \int_{t_0}^{t} \sqrt{r(s)}\ \omega(\sqrt{r(s)})\,\mathrm{d}s. \tag{1.12}$$

Note que $\sqrt{r(s)} = |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \in L^1([t_0, t_0 + r])$ pois $\gamma(1)$ e $\gamma(2)$ são contínuas e defina

$$R(t) = 2 \int_{t_0}^{t} \sqrt{r(s)}\ \omega(\sqrt{r(s)})\,\mathrm{d}s.$$

Vamos aplicar uma extensão do Lema de Gronwall da seguinte forma, como assumimos $r(t) > 0$ para $t \in]t_0, t_0 + r[$, deduzimos que $R(t) > 0$ para $t \in]t_0, t_0 + r[$. Aplicando (1.12) tem-se

$$\dot{R}(t) = 2\sqrt{r(t)}\ \omega(\sqrt{r(t)}) \leq 2\sqrt{r(t)}\ \omega(\sqrt{R(t)})$$

onde usamos o fato de ω ser uma função crescente e $r(t) \leq R(t)$. Disso tudo deduzimos que

$$\frac{\dot{R}(t)}{\omega(\sqrt{R(t)})} \leq 2\sqrt{r(t)}, \quad t > t_0. \tag{1.13}$$

Tomando

$$\Omega(z) = \int_{z}^{1} \frac{1}{\omega(\sqrt{r})}\,\mathrm{d}r,$$

vemos que $\Omega(z)$ está bem definida para todo $z > 0$, satisfaz $\Omega'(z) = -1/\omega(z)$ e $\Omega(z) \uparrow +\infty$ quando $z \downarrow 0$, pela condição de Osgood. Integrando então a equação (1.13), deduzimos que para todo $t_0 < s < t$ tem-se

$$\begin{aligned} 2\int_{s}^{t} \sqrt{r(z)}\,\mathrm{d}z \geq \int_{s}^{t} \frac{\dot{R}(\tau)}{\omega(\sqrt{R(\tau)})}\,\mathrm{d}\tau &= \int_{R(s)}^{R(t)} \frac{1}{\omega(\sqrt{r})}\,\mathrm{d}r = \\ &= \int_{R(s)}^{1} \frac{1}{\omega(\sqrt{r})}\,\mathrm{d}r \ + \int_{1}^{R(t)} \frac{1}{\omega(\sqrt{r})}\,\mathrm{d}r = \\ &= -\int_{R(t)}^{1} \frac{1}{\omega(\sqrt{r})}\,\mathrm{d}r \ + \int_{R(s)}^{1} \frac{1}{\omega(\sqrt{r})}\,\mathrm{d}r = -\Omega(R(t)) + \Omega(R(s)), \end{aligned}$$

o que não pode acontecer para s muito próximo de t_0. De fato, como $R(s) \downarrow 0$ quando $s \downarrow t_0$, teríamos $\Omega(R(s)) \uparrow +\infty$ quando $s \downarrow t_0$ (pela definição de Ω), mas a integral do lado esquerdo da desigualdade acima permanece finita.

□

Finalizaremos esta seção com uma discussão sobre o intervalo máximo de existência de solução da equação (1.11). A solução construída nos teoremas anteriores é de fato apenas local no tempo. No entanto, se

$$b : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

é contínuo e limitado, então toda solução $\gamma : (t_1, t_2) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ de (1.11) pode ser estendida ao intervalo fechado $[t_1, t_2]$. De fato, para todo $t_1 < t < t' < t_2$ temos

$$|\gamma(t') - \gamma(t)| \leq \int_t^{t'} |b(s, \gamma(s))| \, \mathrm{d}s \leq M|t' - t|,$$

com M sendo a cota superior de $|b|$ em D. Portanto γ é Lipschitz e admite uma única extensão ao fecho do seu domínio de definição.
Note que se $(t_1, \gamma(t_1))$ ou $(t_2, \gamma(t_2))$ não está na fronteira de D, podemos aplicar novamente o resultado de existência local (Teorema de Picard-Lindelöf ou o Teorema de Peano). Isso nos dá o resultado seguinte.

Teorema 1.7. *Seja $b : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ um campo vetorial limitado e contínuo. Assuma que b possui continuidade Lipschitz com respeito à variável espacial, uniformemente com respeito ao tempo, em todo retângulo limitado contido em D. Fixe $(t_0, x_0) \in D$, a condição inicial.*
Então existe uma única solução para (1.11) e ela pode ser estendida até que seu gráfico encontre a fronteira de D. Isso identifica o intervalo máximo de existência para a solução da EDO (1.11).

Se b está definido globalmente e é limitado, temos o seguinte corolário.

Corolário 1.8. *Seja $b : I \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ um campo vetorial contínuo e limitado, com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Assuma que b possui continuidade Lipschitz com respeito à variável espacial, uniformemente com respeito ao tempo.*
Então, para todo $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^N$ existe uma única solução para (1.11) que está definida para $t \in I$.

1.3 O Fluxo Clássico de um Campo Vetorial

Iniciemos por comparar duas soluções γ_1 e γ_2 da EDO com condição inicial no tempo t_0 respectivamente x_1 e x_2. Temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t)-\gamma_2(t) &= x_1-x_2+\int_{t_0}^{t} b(s,\gamma_1(s))\,\mathrm{d}s-\int_{t_0}^{t} b(s,\gamma_2(s))\,\mathrm{d}s\\ &= x_1-x_2+\int_{t_0}^{t}[b(s,\gamma_1(s))-b(s,\gamma_2(s))]\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

o que nos dá

$$|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)|\leq|x_1-x_2|+\ \mathrm{Lip}(b)\ \int_{t_0}^{t}|\gamma_1(s)-\gamma_2(s)|\,\mathrm{d}s$$

com $\mathrm{Lip}(b)$ denotando a constante de Lipschitz associada ao campo b. Usando agora o Lema de Gronwall 1.4, temos

$$|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)|\leq|x_1-x_2|\ \exp(K|t-t_0|). \tag{1.14}$$

Isso mostra que a solução depende dos dados iniciais de forma continuamente Lipschitz. Um argumento similar pode ser feito para dois campos vetoriais b_1 e b_2 com o mesmo dado inicial x_0. Teremos então a estimativa

$$|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)|\leq|t-t_0|\ ||b_1-b_2||_\infty. \tag{1.15}$$

Olhando para a solução da EDO (1.11) como uma função não só do tempo mas também do ponto inicial x_0 somos levados a fazer a seguinte definição:

Definição 1.9 (Fluxo Clássico de um Campo Vetorial)**.** *Considere um campo vetorial $b: I\times\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}^N$ contínuo e limitado, com $I\subset\mathbb{R}$ um intervalo e tome $t_0\in I$. O* **Fluxo** *(clássico) de um campo vetorial b iniciando no tempo t_0 é uma aplicação*

$$X(t,x): I\times\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}^N$$

que satisfaz

$$\begin{cases}\dfrac{\partial X}{\partial t}(t,x)=b(t,X(t,x))\\ \\ X(t_0,x)=x.\end{cases} \tag{1.16}$$

Se o campo vetorial b é limitado e possui regularidade Lipschitz com respeito à variável espacial, deduzimos imediatamente a existência e unicidade do fluxo via o Corolário 1.8. Além disso, a estimativa (1.14) mostra a regularidade Lipschitz do fluxo.

Corolário 1.10. *Seja $b : I \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ um campo vetorial contínuo e limitado, com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Assuma que b é localmente Lipschitz contínuo com respeito à variável espacial, uniformemente com respeito ao tempo. Então, para todo $t_0 \in I$ existe um único fluxo clássico de b iniciando no tempo t_0. Além disso, o fluxo possui continuidade Lipschitz com respeito a t e x.*

Queremos mostrar agora que aumentando a regularidade de b teremos aumento na regularidade do fluxo com respeito à variável espacial. Assuma que b é C^1 com respeito à variável espacial, uniformemente com respeito ao tempo. Vamos discutir a diferenciabilidade em uma direção dada por um vetor unitário $e \in \mathbb{S}^{N-1}$. Para todo $h \in \mathbb{R}$ pequeno, precisamos comparar $X(t,x)$ e $X(t, x+he)$. Repare que diferenciando formalmente (1.16) com respeito à variável x na direção e obtemos a seguinte EDO para $D_x X(t,x)e$:

$$\frac{\partial}{\partial t} D_x X(t,x)e = (D_x b)(t, X(t,x))\; D_x X(t,x)e.$$

Motivado por essa expressão vamos definir $\omega_e(t,x)$ como a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega_e}{\partial t}(t,x) = (D_x b)(t, X(t,x))\; \omega_e(t,x) \\ \omega_e(t_0, x) = e. \end{cases} \tag{1.17}$$

Esse sistema é uma equação diferencial ordinária linear que depende do parâmetro $x \in \mathbb{R}^N$. É fácil ver que para todo $x \in \mathbb{R}^N$ existe uma única solução $\omega_e(t,x)$ definida para $t \in I$ e que $\omega_e(t,x)$ depende continuamente do parâmetro $x \in \mathbb{R}^N$.
Vamos mostrar mais a frente que

$$\frac{X(t, x+he) - X(t,x)}{h} \overset{h \to 0}{\longrightarrow} \omega_e(t,x). \tag{1.18}$$

Isso vai nos dar que $D_x X(t,x)e = \omega_e(t,x)$ e, uma vez que $\omega_e(t,x)$ é contínua em x, teremos que o fluxo $X(t,x)$ é diferenciável com respeito a x com diferencial contínua. Se retornarmos a (1.17) também deduzimos que, se b é C^k com respeito à variável espacial, então o fluxo X é C^k com respeito a x.
Provemos então (1.18). Defina

$$z_{e,h}(t,x) = \frac{X(t, x+he) - X(t,x)}{h}.$$

Note que $z_{e,h}(t_0, x) = e$ e computemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_{e,h}}{\partial t}(t,x) &= \frac{1}{h}\left[\frac{\partial X}{\partial t}(t,x+he) - \frac{\partial X}{\partial t}(t,x)\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[b(t,X(t,x+he)) - b(t,X(t,x))\right] \\
&= \left(\int_0^1 (D_x b)\left(t, sX(t,x+he) + (1-s)X(t,x)\right) \mathrm{d}s\right)\ z_{e,h}(t,x) \\
&= (D_x b)(t,X(t,x))\ z_{e,h}(t,x) + \Psi_{e,h}(t,x)\ z_{e,h}(t,x),
\end{aligned}$$

com $\Psi_{e,h}(t,x) = \left(\int_0^1 (D_x b)\left(t, sX(t,x+he) + (1-s)X(t,x)\right) - (D_x b)(t,X(t,x))\right) \mathrm{d}s$.

Já que assumimos b possuindo regularidade C^1 com respeito à variável espacial deduzimos

$$\Psi_{e,h}(t,x) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad uniformemente\ em\ t\ e\ x.$$

Defina $\rho_{e,h}(t,x) = z_{e,h}(t,x) - \omega_e(t,x)$ e perceba que $\rho_{e,h}$ satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_{e,h}}{\partial t}(t,x) = (D_x b)(t,X(t,x))\rho_{e,h}(t,x) + \Psi_{e,h}(t,x)\ z_{e,h}(t,x) \\ \rho_{e,h}(0,x) = 0. \end{cases}$$

Retomando a estimativa (1.15) e usando o fato que $|\Psi_{e,h}(t,x)| = o(1)$ e $|z_{e,h}(t,x)| = O(1)$, deduzimos que $|\rho_{e,h}| = o(1)$. Voltando às definições de $\rho_{e,h}$ e de $z_{e,h}$, vemos que isso nos dá exatamente a expressão (1.18). Provado isso, podemos escrever o seguinte teorema (que melhora o resultado já provado no corolário 1.10):

Teorema 1.11. *Seja $b : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ um campo vetorial suave e limitado, com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo.*
Então, para todo $t_0 \in I$ existe um único fluxo clássico de b iniciando no tempo t_0, que é suave com respeito a t e x.

Perceba também que, para todo $t \in I$, a aplicação

$$X(t,\cdot) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

é um difeomorfismo suave. O Jacobiano $J(t,x) = det\ (D_x X(t,x))$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial J}{\partial t}(t,x) = (div\ b)(t,X(t,x))\ J(t,x) \tag{1.19}$$

e observe que $J(0,x) = 1$, o que implica $J(t,x) > 0$ para todo $t \in I$. Isso também nos diz que podemos controlar a taxa de expansão/contração de uma determinada região do espaço evoluindo pelo fluxo do campo através do divergente de b, i.e.

$$e^{(-t\ ||div\ b||_\infty)}\ \lambda\ \leq\ \lambda \circ X(t)\ \leq\ e^{(t\ ||div\ b||_\infty)}\ \lambda,\quad \textit{para todo } t \geq 0, \tag{1.20}$$

com $\lambda \circ X(t)$ denotando a medida da imagem de λ pela aplicação $X(t)$, i.e.,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \phi\ \ \mathrm{d}(\lambda \circ X(t)) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \phi(X(t,x))\ \ \mathrm{d}x,\ \forall\ \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N),$$

e λ a medida de Lebesgue.

Além disso, usando a notação $X(t,s,x)$ para o fluxo de b iniciando no tempo $s \in I$, a seguinte propriedade de semigrupo vale, como uma consequência da unicidade do fluxo

$$X(t_3,t_1,x) = X(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x))\ \ \textit{para todo } t_1,t_2,t_3 \in I. \tag{1.21}$$

1.4 Conexão entre EDO e Equação do Transporte

Ainda no caso clássico, há uma forte ligação da EDO com uma Equação do Transporte, uma equação a derivadas parcias de evolução que tem a forma

$$\partial_t u(t,x) + b(t,x) \cdot \nabla_x u(t,x) = 0,\ \text{com } u : [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}. \tag{1.22}$$

Considere agora a equação (1.22) com a condição inicial $u(0,x) = \bar{u}(x)$. Quando $\gamma(t)$ é a curva característica do campo vetorial $b(t,x)$ e u uma solução suave de (1.22), a quantidade $c(t) := u(t,\gamma(t))$ é constante em relação ao tempo, uma vez que

$$\begin{aligned}
\dot{c}(t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t,\gamma(t)) + \nabla_x u(t,\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(t,\gamma(t)) + b(t,\gamma(t)) \cdot \nabla_x u(t,\gamma(t)) \\
&= 0,\ \ \text{pois u é solução da equação do transporte.}
\end{aligned}$$

Isso significa que a solução u é constante ao longo das linhas características de b. Como temos $c(t) = c(0) = u(0,\gamma(0)) = u(0,x) = \bar{u}(x)$, esperamos que

$$u(t,x) = \bar{u}\left(X(t,\cdot)^{-1}(x)\right) = \bar{u}\left(X(0,t,x)\right)$$

seja uma solução do problema de Cauchy. Podemos verificar isso observando que o fluxo $X(t,s,x)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial X}{\partial s}(t,s,x) + (b(s,x)\cdot D_x)\, X(t,s,x) = 0. \tag{1.23}$$

Essa é a única solução com condição inicial $\bar{u}$, uma vez que já sabemos que toda solução deve ser constante ao longo das características. Podemos então enunciar a seguinte proposição:

Proposição 1.12. *Se o campo vetorial b e a condição inicial $\bar{u}$ são C^1, então a equação do transporte (1.22) com a condição inicial $u(0,x) = \bar{u}(x)$ possui uma única solução*

$$u(t,x) = \bar{u}\left(X(t,\cdot\,)^{-1}(x)\right).$$

Analogamente, no caso de uma equação do transporte com termo $f \in C^1$ no lado direito da equação

$$\partial u(t,x) + b(t,x)\cdot \nabla u(t,x) = f(t,x),$$

temos uma expressão explícita da solução

$$u(t,x) = \bar{u}\,(X(0,t,x)) \;+\; \int_0^t f(s, X(s,t,x))\,\mathrm{d}s. \tag{1.24}$$

1.5 Caso Não-regular

Os resultados que acabamos de mostrar a respeito do fluxo e suas propriedades formam o que se chama no caso clássico (regular) de **Teoria de Cauchy-Lipschitz**.

Estender essa teoria básica a campos vetoriais com menos regularidade é uma questão natural do ponto de vista teórico e pertinente em aplicações da Mecânica dos Fluidos e da Teoria de Controle.

Uma extensão de grande generalidade foi a apresentada por Ronald DiPerna e Pierre-Louis Lions em 1989 no artigo [DPL89], com as hipóteses do campo vetorial b possuir divergência limitada e alguma regularidade do tipo Sobolev. Suas motivações eram a compreensão do comportamento de sistemas físicos ligados à Teoria Cinética e à Mecânica dos Fluidos em que só regularidade do tipo Sobolev parecia disponível.

O propósito principal desta dissertação é apresentar essa teoria e aplicações dela originadas. Mostraremos que se $b \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $div\ b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ com

$$\begin{cases} b = b_1 + b_2, \\ b_1 \in L^p(\mathbb{R}^N), \quad \text{para algum } 1 \leq p \leq \infty, \\ b_2(1+|\cdot|)^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

então existe um único fluxo $X \in C(\mathbb{R};\ L^p_{loc}(\mathbb{R}^N))$ resolvendo (1.16) e satisfazendo (1.20) e (1.21) quase todo ponto.
Além disso, $X \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N;\ C([-T,T]))$ para todo $T \in (0,\infty)$. Mostraremos também resultados de estabilidade para perturbações de b e a versão dependente do tempo, assumindo dependência temporal L^1.

A metodologia para resolver o problema da EDO (formulação Lagrangeana) é o estudo da seguinte Equação do Transporte associada (formulação Euleriana)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b \cdot \nabla u = 0 \text{ em } (0,\infty) \times \mathbb{R}^N. \tag{1.25}$$

Resultados sobre existência, unicidade e estabilidade para a EDP serão obtidos via soluções renormalizadas e servirão de base para a solução da EDO. Esses resultados sobre a EDO não-regular serão apresentados no capítulo 3.

Os pontos principais da Teoria de DiPerna-Lions são três:

- O conceito de **Solução Renormalizada** da Equação do Transporte;
- Lemas de Regularização, que por sua vez baseiam-se na existência de **Comutadores**;
- Transferência dos resultados da Visão Euleriana (Equação do Transporte) para a Visão Lagrangeana (EDO relacionada).

De uma maneira simplificada, tais ingredientes atuam da seguinte forma: Primeiro deve-se estudar a boa-colocação da Equação do Transporte. Para isso, precisamos definir o que é uma solução renormalizada da Equação do Transporte. Diremos que uma solução no sentido das distribuições limitada u da Equação do Transporte

$$\partial_t u + b \cdot \nabla u = 0 \tag{1.26}$$

é uma **solução renormalizada** se, para toda função $\beta \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, vale a seguinte identidade no sentido das distribuições:

$$\partial_t(\beta(u)) + b \cdot \nabla(\beta(u)) = 0.$$

Observe que essa equação já é satisfeita no caso de soluções suaves. Já no caso não-suave, não podemos esperar tal identidade para todas soluções apenas no sentido das distribuições.

Ao final do capítulo 3 apresentamos dois contra-exemplos para o Teorema de existência e unicidade de soluções para EDOs com regularidade Sobolev.

O primeiro mostra que se não tivermos a limitação do divergente em L^∞, é possível construir campos vetoriais que ainda satisfazem a hipótese de regularidade do teorema de existência e unicidade mas que admitem infinitas soluções contínuas para a EDO e que ainda verificam a propriedade de grupo.

O segundo contra-exemplo é de um campo em $W^{s,1}_{loc}$ com $s \in [0, 1)$ que admite dois fluxos para a mesma EDO preservando medida e verificando a propriedade de grupo; mostrando assim a importância da regularidade do campo.

Uma extensão da teoria de DiPerna-Lions aparece em 2004 devido a Pierre-Louis Lions e Claude Le Bris, agora para o caso de Sobolev parcial(que veremos no capítulo 4). As demonstrações envolvidas no artigo [LBL04] são baseadas fortemente no artigo de DiPerna e Lions de 1989. Veremos essa extensão no capítulo 4 e sua aplicação no capítulo 5, com resultados sobre estudo da dependência em relação às condições iniciais para equações diferenciais ordinárias.

Uma segunda extensão do caso clássico, agora para o caso de campos vetoriais do tipo BV (variação limitada), foi publicada também em 2004 por Luigi Ambrosio em [Amb04]. A apresentação dessa extensão é, assim como o será a da Teoria de DiPerna-Lions, longa e julgamos por não apresentá-la nesta dissertação.

Outra extensão/aplicação da teoria de DiPerna-Lions aparece nos trabalhos [LBL04] e [LBL08], de 2004 e 2008 respectivamente, onde C. Le Bris e P.-L. Lions apresentam resultados na direção da extensão para o caso não mais de uma EDO mas de uma Equação Diferencial Estocástica (EDE). Apenas os citamos e não os apresentaremos nesta dissertação .

Finalmente, como última aplicação, temos no capítulo 6 o estudo sobre a conservação de energia para soluções da equação de Euler para fluidos em duas dimensões. Uma vez que essa EDP pode ser reescrita como uma equação do transporte, via a conhecida formulação de vorticidade, verificamos que sob certas condições podemos utilizar a Teoria de DiPerna-Lions para a equação do transporte desenvolvida no capítulo 2.

Capítulo 2

Equação do Transporte Linear - Caso não Suave

Iniciamos aqui o estudo da resolução da seguinte equação do transporte

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - b \cdot \nabla_x u = 0 \;\; em \; (0,T) \times \mathbb{R}^N, \\ u|_{t=0} = u^0 \;\; em \; \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.1}$$

Vamos estabelecer nas próximas seções resultados sobre existência, unicidade, estabilidade e introduzir o conceito de solução renormalizada.

2.1 Existência de Solução e Regularização

Começamos apresentando um resultado sobre existência de solução para a equação do transporte linear e introduzimos o sentido em que as soluções devem ser entendidas. Dada a equação do transporte

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b \cdot \nabla_x u = 0 \;\; em \; (0,T) \times \mathbb{R}^N \tag{2.2}$$

com $T > 0$ dado, vamos assumir que a regularidade do campo vetorial seja pelo menos

$$b \in L^1\left(0,T; \left(L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^N\right). \tag{2.3}$$

Nosso intuito é construir uma solução para a equação do transporte acima em $L^\infty\left(0,T; L^p\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ com uma condição inicial u^0 em $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$, para algum $p \in [1,\infty]$. A solução deve ser entendida no sentido das distribuições,

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u \, \frac{\partial \phi}{\partial t} \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}^N} u^0 \; \phi(0,x) \, \mathrm{d}x + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u \; div(b\phi) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t = 0 \tag{2.4}$$

para toda função teste $\phi \in C^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R}^N\right)$ com suporte compacto em $[0,T)\times\mathbb{R}^N$ (esse espaço será denotado por $\mathscr{D}\left([0,T)\times\mathbb{R}^N\right)$.

A equação acima faz sentido se tivermos as seguintes hipóteses sobre b e seu divergente:

$$\begin{cases} div\ b\ \in L^1\left(0,T;L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)\right); \\ b\in L^1\left(0,T;\left(L^q_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^N\right), \end{cases} \tag{2.5}$$

com p,q tais que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{2.6}$$

Enunciemos agora um primeiro resultado sobre existência de soluções para a equação (2.1).

Proposição 2.1 (Existência de Solução)**.** *Sejam $p\in[1,\infty]$, $u^0\in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ e assuma (2.3) e (2.5).*
Então existe uma solução u para a equação do transporte (2.1) em $L^\infty\left(0,T;L^p\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ correspondendo à condição inicial u^0.

Demonstração da Proposição:
A demonstração desta proposição passa por justificar por aproximação e regularização as estimativas formais seguintes.
Para o caso $p=\infty$, temos via o princípio do máximo que

$$||u(t)||_\infty \le ||u^0||_\infty \ \ q.t.p.\ em\ (0,T). \tag{2.7}$$

Para o caso $p<\infty$, ao multiplicarmos a equação por $|u|^{p-1}$, temos formalmente que

$$\frac{\partial}{\partial t}|u|^p - b\cdot\nabla_x|u|^p = 0,$$

e então deduzimos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\,\mathrm{d}x \le \left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\,\mathrm{d}x\right)\ ||div\ b||_\infty.$$

Usando então (2.5) chegamos via o Lema de Gronwall a

$$||u(t)||_p \le C_0\ ||u^0||_p \ \ q.t.p.\ em\ (0,T), \tag{2.8}$$

com C_0 dependendo apenas da norma de $div\ b$ em $L^1\left(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^N)\right)$. (Note que dessa forma não tratamos o caso $p=1$, mas esse segue por argumento de aproximação da função $x\mapsto|x|$.)

Agora, para provar a existência, vamos regularizar b e u^0 por convolução em x, i.e., vamos considerar

$$\begin{cases} b_\varepsilon = b * \rho_\varepsilon \\ u^0_\varepsilon = u^0 * \rho_\varepsilon \end{cases}$$

com ρ_ε da seguinte forma

$$\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^N}\ \rho\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right), \quad \rho \in \mathscr{D}_+\left(\mathbb{R}^N\right), \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho \ \mathrm{d}x = 1. \tag{2.9}$$

Note que se a condição (2.3) fosse global no espaço, teríamos que $b_\varepsilon \in L^1\left(0, T; C^1_b\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$, a regularidade obtida no caso clássico. Mas como temos apenas a regularidade local, precisamos de um argumento de truncamento. Sob essa regularidade para b_ε, retornamos ao caso clássico e então a equação

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - b_\varepsilon \cdot \nabla_x\ u_\varepsilon = 0 \quad em\ (0,T) \times \mathbb{R}^N, \\ u_\varepsilon|_{t=0} = u^0_\varepsilon \quad em\ \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

possui solução $u_\varepsilon \in C\left([0,T]; C^1_b\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$.

Usando as estimativas formais (2.7) e (2.8), que agora podem ser provadas rigorosamente, u_ε é limitado em $L^\infty\left(0,T; L^p\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$, uniformemente em ε. Extraindo subsequências se necessário, usando o teorema de Banach-Alaoglu, podemos assumir que u_ε converge fraco estrela para algum u em $L^\infty\left(0,T; L^p\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$, para $p > 1$.
Observe também que em $L^1\left(0,T; L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)\right)$,

$$div\ b_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} div\ b,$$
$$b_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} b.$$

E então a equação é satisfeita no sentido das distribuições (2.4).

Agora para o caso $p = 1$, o mesmo argumento se aplica mas devemos ainda mostrar que u_ε é fracamente pré-compacto em $L^\infty\left(0,T; L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$. Para isso, consideramos aproximações da solução inicial u^0 por funções u^0_n de suporte compacto,

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^N) \ni u^0_n \longrightarrow u^0 \quad em\ L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

e denotamos por $u_{n,\varepsilon}$ as soluções aproximadas correspondentes, como acima.
Usando (2.5) obtemos as estimativas

$$||u_{n,\varepsilon}||_{L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^N))} \leq C(n,p) \quad \forall\ p > 1$$

e

$$||u_\varepsilon - u_{n,\varepsilon}||_{L^\infty(0,T;L^1(\mathbb{R}^N))} \leq C_0\ ||u^0_\varepsilon - u^0_{n,\varepsilon}||_1 \leq C_0 ||u^0 - u^0_n||_1.$$

E obtemos a compacidade fraca estrela desejada.

□

Vamos nos voltar agora para um resultado de regularização. Ele mostrará que sob hipóteses apropriadas sobre o campo vetorial b, soluções fracas da equação do transporte (2.1) podem ser aproximadas por soluções suaves (em x) da mesma equação com termos de erro pequenos. A convergência a zero desse termo de erro será apresentada no Lema 2.3. O resultado desse teorema desempenha um papel fundamental na teoria que apresentamos nesta dissertação.

Teorema 2.2 (Regularização para a Equação do Transporte)**.** *Seja* $1 \leq p \leq \infty$ *e seja* $u \in L^\infty\left(0,T;L^p\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ *uma solução para a equação do transporte (2.1) e assuma*

$$b \in L^1\left(0,T;W^{1,\alpha}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \quad \text{para algum } \alpha \geq q. \tag{2.10}$$

Então, se denotarmos $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$ *(o mesmo* ρ_ε *de (2.9), com* $\varepsilon > 0$*),* u_ε *satisfaz a equação*

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - b \cdot \nabla u_\varepsilon = r_\varepsilon \tag{2.11}$$

com

$$r_\varepsilon \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{em } L^1\left(0,T;L^\beta_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \tag{2.12}$$

e α*,* β*,* p *obedecendo a*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{p}, & \text{se } \alpha \text{ ou } p < \infty \\ \beta < \infty \text{ arbitrário}, & \text{se } \alpha = p = \infty. \end{cases} \tag{2.13}$$

Note que tomando a equação do transporte (2.1) e efetuando a molificação contra ρ_ε temos

$$\begin{aligned}
&(\partial_t u - b \cdot \nabla u = 0) \quad * \rho_\varepsilon \\
&\partial_t u_\varepsilon - (b \cdot \nabla u) * \rho_\varepsilon = 0 \\
&\partial_t u_\varepsilon = (b \cdot \nabla u) * \rho_\varepsilon \\
&\partial_t u_\varepsilon - b \cdot \nabla u_\varepsilon = (b \cdot \nabla u) * \rho_\varepsilon - b \cdot \nabla u_\varepsilon = r_\varepsilon.
\end{aligned}$$

E para provarmos o teorema temos então que mostrar a convergência a zero do termo r_ε e limitar uniformemente o comutador. É o que faremos no lema a seguir.

Lema 2.3 (Convergência do Comutador).

(I) *Se b e w satisfazem*

$$\begin{cases} b \in \left(W^{1,\alpha}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^N \\ \\ w \in L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right) \end{cases} \quad 1 \le p \le \infty, \ \alpha \ge q,$$

então temos que

$$r_\varepsilon := (b \cdot \nabla w) * \rho_\varepsilon - b \cdot \nabla\left(w * \rho_\varepsilon\right) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0 \ \ em \ L^\beta_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right),$$

com α, β, p e q segundo (2.6) e (2.13).

(II) *(Versão Temporal) Se b e w satisfazem*

$$\begin{cases} b \in L^1\left(0, T; \left(W^{1,\alpha}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)^N\right) \\ \\ w \in L^\infty\left(0, T; L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \end{cases} \quad 1 \le p \le \infty, \ \alpha \ge q,$$

então temos que

$$r_\varepsilon := (b \cdot \nabla w) * \rho_\varepsilon - b \cdot \nabla\left(w * \rho_\varepsilon\right) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0 \ \ em \ L^1\left(0, T; L^\beta_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right).$$

Demonstração do Lema:
Observe que

$$\begin{aligned} r_\varepsilon(x) &:= (b \cdot \nabla w) * \rho_\varepsilon - b \cdot \nabla\left(w * \rho_\varepsilon\right) \\ &= -\int w(y)\left\{div_y \ \left[b(y) \ \rho_\varepsilon(x-y)\right] + b(x) \cdot \nabla\rho_\varepsilon(x-y)\right\} \mathrm{d}y \\ &= \int w(y)\left\{\left[b(y) - b(x)\right] \ \cdot \nabla\rho_\varepsilon(x-y)\right\} \mathrm{d}y - (w \ div \ b) * \rho_\varepsilon. \end{aligned}$$

Uma vez que para o segundo termo do lado direito da equação acima temos

$$(w \ div \ b) * \rho_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} w \ div \ b \ \ em \ L^\beta_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right),$$

resta-nos mostrar que o primeiro termo converge para $w(x) \ div \ b$, e então teremos a convergência de r_ε para zero.

Primeiro, vamos dominar o termo acima uniformemente em ε[1].

$$\left\| \int w(y) \left[(b(y) - b(x)) \cdot \nabla \rho_\varepsilon (x-y) \right] \, \mathrm{d}y \right\|_{L^\beta(B_R)}$$

$$\leq \; C_1 \, ||w||_{L^p(B_{R+1})} \, \left\{ \int_{B_{R+1}} \mathrm{d}x \int_{|x-y| \leq C\varepsilon} \left[\frac{|b(y) - b(x)|}{\varepsilon} \right]^\alpha \mathrm{d}y \right\}^{1/\alpha},$$

com B_M denotando a bola de raio M, R fixo, e C_1 denotando várias constantes independentes de ε, R, w e b.
Além disso,

$$\left\{ \int_{B_{R+1}} \mathrm{d}x \int_{|x-y| \leq C\varepsilon} \left[\frac{|b(y) - b(x)|}{\varepsilon} \right]^\alpha \mathrm{d}y \right\}^{1/\alpha}$$

$$\leq \left\{ \int_{B_{R+1}} \mathrm{d}x \int_{|z| \leq C} \mathrm{d}z \left[\int_0^1 \mathrm{d}t |\nabla b(x + t\varepsilon z)| \right]^\alpha \right\}^{1/\alpha}$$

$$\leq C_2 \, ||\nabla b||_{L^\alpha(B_{R+1+C})}.$$

E portanto

$$\left\| \int w(y) \left[(b(y) - b(x)) \cdot \nabla \rho_\varepsilon (x-y) \right] \, \mathrm{d}y \right\|_{L^\beta(B_R)}$$

$$\leq C \, ||w||_{L^p(B_{R+1})} \, ||\nabla b||_{L^\alpha(B_{R+1+C})}.$$

Agora, para b e w suaves, fazendo a mudança de variáveis $y = x - \varepsilon y'$, teremos que

$$\begin{aligned} s_\varepsilon &:= \int w(y) \left\{ [b(y) - b(x)] \; \cdot \nabla \left(\rho_\varepsilon (x-y) \right) \right\} \mathrm{d}y \\ &= \int w(x - \varepsilon y') \left(\frac{b(x - \varepsilon y') - b(x)}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \rho(y') \, \mathrm{d}y'. \end{aligned}$$

Tomando agora $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ teremos

[1]A demonstração aqui apresentada da dominação segue o artigo original de DiPerna e Lions. Decidimos apresentá-la dessa maneira para reproduzir a prova original deste importante lema. Uma versão mais aprimorada da dominação será apresentada numa segunda demonstração do lema, dessa vez adaptada do livro de Pierre-Louis Lions, [Lio96].

$$\int_{\mathbb{R}^N_x} s_\varepsilon\ \psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N_x}\int_{\mathbb{R}^N_{y'}} w(x-\varepsilon y')\left(\frac{b(x-\varepsilon y')-b(x)}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla\rho(y')\,\mathrm{d}y'\ \psi(x)\ \mathrm{d}x.$$

Como w e b são suaves, tomando ε a zero temos

$$w(x-\varepsilon y') \xrightarrow{\varepsilon\to 0} w(x) \quad \text{em } L^p_{loc},$$

$$\frac{b(x-\varepsilon y')-b(x)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -\nabla b(x)\cdot y' \quad \text{em } L^q_{loc},$$

e teremos portanto (após renomear a variável muda y' para y)

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N_x} s_\varepsilon\ \psi(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_{\mathbb{R}^N_x}\int_{\mathbb{R}^N_y} w(x)\ \nabla b(x)\cdot y\ \nabla\rho(y)\ \psi(x)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x\\
&= -\int_{\mathbb{R}^N_x}\psi(x)\ w(x)\ \left(\int_{\mathbb{R}^N_y}\nabla b(x)\cdot y\ \ \nabla\rho(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&= -\int_{\mathbb{R}^N_x}\psi(x)\ w(x)\ \sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial b_i(x)}{\partial x_j}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^N_y} y_j\frac{\partial\rho(y)}{\partial y_i}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{R}^N_x}\psi(x)\ w(x)\ div\ b\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Para b e w não suaves, o argumento acima se estende por densidade. A demonstração do lema termina ao usarmos a limitação e o teorema da convergência dominada.
A versão temporal segue de forma análoga.

□

Lema 2.4 (Convergência do Comutador - Adaptado de [Lio96]). *Seja $v \in W^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^\beta(\mathbb{R}^N)$ com $1 \le \alpha, \beta \le \infty$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \le 1$. Então*

$$||div\ (vg)*\omega_\varepsilon - div\ (v(g*\omega_\varepsilon))||_{L^\gamma(\mathbb{R}^N)} \le\ ||v||_{W^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)}\ ||g||_{L^\beta(\mathbb{R}^N)} \tag{2.14}$$

para algum $C \ge 0$ independente de ε, v e g e com γ determinado por $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$. Além disso,

$$div\ (vg)*\omega_\varepsilon - div\ (v(g*\omega_\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \quad \text{em } L^\gamma(\mathbb{R}^N),\ \text{se } \gamma < \infty.$$

Note que para $\gamma = 1$, temos o resultado para $v \in W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, com a convergência do comutador indo para zero em L^1, em particular, usaremos inúmeras outras vezes nesta dissertação o caso $\gamma = 1$, $q = 1$, e portanto $p = \infty$. De forma mais explícita, teremos então o seguinte resultado:

$$||R_\varepsilon||_{L^1(\mathbb{R}^N)} := ||(v\cdot\nabla g)*\omega_\varepsilon - v\cdot\nabla(g*\omega_\varepsilon)||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \le C||v||_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)}||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \tag{2.15}$$

e então

$$R_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad em\ L^1(\mathbb{R}^N). \tag{2.16}$$

Demonstração do Lema:

Uma vez que (2.14) esteja provado, a convergência para zero em L^γ segue usando a densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em $W^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ (se $\alpha < \infty$) ou da densidade em $L^\beta(\mathbb{R}^N)$ (se $\beta < \infty$). A seguir, de maneira a provar (2.14), definamos

$$C_\varepsilon = div\ (vg) * \omega_\varepsilon - div\ (v(g * \omega_\varepsilon)).$$

Note que podemos escrever C_ε como $C_\varepsilon = r_\varepsilon - (div\ v)(g * \omega_\varepsilon)$ com

$$r_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\varepsilon}(v(y) - v(x))\cdot \nabla\omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\varepsilon^N}\ g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Temos também que

$$|(div\ v)(g * \omega_\varepsilon)| \le \sqrt{N}|Dv|\ |g * \omega_\varepsilon|.$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Hölder,

$$|r_\varepsilon| \le C\left[\fint_{B(x,\varepsilon)}\left(\frac{1}{\varepsilon}|v(y) - v(x)|\right)^s\right]^{1/s} \cdot \left[\fint_{B(x,\varepsilon}|g|^t\right]^{1/t}$$

com $1 \le s, t \le \infty,\ \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1,\ 1 \le t \le \beta,\ 1 \le s \le \alpha$ e $C \ge 0$ independente de ε, v e g.
Escrevendo então

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\varepsilon}(v(y) - v(x))\right|^s &= \left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \nabla v(x + \lambda(y-x))\cdot (y-x)\,\mathrm{d}\lambda\right|^s \\ &\le \int_0^1 |\nabla v(x + \lambda(y-x))|^s\ \left|\frac{y-x}{\varepsilon}\right|^s\,\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}\fint_{B(x,\varepsilon)}\left|\frac{1}{\varepsilon}(v(y) - v(x))\right|^s\,\mathrm{d}s &\le \int_0^1\int_{B_1}|\nabla v(x + \lambda\varepsilon\omega)|^s|\omega|^s\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\lambda \\ &\le \int_0^1\int_{B_1}|\nabla v(x + \lambda\varepsilon\omega)|^s\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \left(|\nabla v|^s * \bar{\chi_\varepsilon}\right)(x)\end{aligned}$$

com

$$\bar{\chi_\varepsilon}(z) = \int_0^1 \frac{1}{(\varepsilon\lambda)^N}\ 1_{B_{\varepsilon\lambda}}(z)\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{N-1}\left(\left(\frac{\varepsilon}{|z|}\right)^{N-1} - 1\right)1_{B_\varepsilon}\ \varepsilon^{-N}$$

e $\int_{\mathbb{R}^N}\bar{\chi_\varepsilon} = medida\ (B_1)$.
Então, definindo $\chi_\varepsilon = \frac{1_{B_\varepsilon}}{medida(B_\varepsilon)}$, obtemos

$$|C_\varepsilon| \le C \left\{ |Dv| \; |g * \omega_\varepsilon| \; + \; (|Dv|^s * \bar{\chi}_\varepsilon)^{1/s} \left(|g|^t * \chi_\varepsilon\right)^{1/t} \right\} \quad q.t.p. \; em \; \mathbb{R}^N, \tag{2.17}$$

e concluiremos a prova, uma vez que, pelas propriedades de convolução, para todo $\varepsilon \ge 0$

$$||g * \omega_\varepsilon||_{L^\beta} \le ||g||_{L^\beta},$$
$$|| \left(|Dv|^s * \bar{\chi}_\varepsilon\right)^{1/s} ||_{L^\alpha} \le ||Dv||_{L^\alpha} ||\bar{\chi}_\varepsilon||_{L^1}^{1/s},$$
$$|| \left(|g|^t * \chi_\varepsilon\right)^{1/t} ||_{L^\beta} \le ||g||_{L^\beta},$$

e $||\bar{\chi}_\varepsilon||_{L^1} = \; medida\,(B_1)$.
E as manipulações levando a (2.17) podem ser justificadas via densidade.

$\square$

2.2 Unicidade de Solução

Teorema 2.5 (Unicidade). *Seja $1 \le p \le \infty$ e $u \in L^\infty\left(0,T; L^p(\mathbb{R}^N)\right)$ solução da equação do transporte (2.1) para a condição inicial $u^0 \equiv 0$ (i.e., u satisfaz (2.4) com $u^0 \equiv 0$). Assuma também*

$$\begin{cases} div \; b \; \in \; L^1\left(0,T; L^\infty(\mathbb{R}^N)\right), \\ b \in L^1\left(0,T; W^{1,q}_{loc}(\mathbb{R}^N)\right), \end{cases} \tag{2.18}$$

e a condição

$$\frac{b}{1+|x|} \in L^1\left(0,T; L^1(\mathbb{R}^N)\right) + L^1(0,T; L^\infty(\mathbb{R}^N)). \tag{2.19}$$

Então $u \equiv 0$.

Demonstração do Teorema:
(Caso $p < \infty$): Usando o Teorema 2.2 e em particular o Lema 2.3 para o caso $\beta = 1$, i.e., $L^\beta_{loc} = L^1_{loc}$, deduzimos que

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - b \cdot \nabla u_\varepsilon = r_\varepsilon \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \;\; em \; L^1\left(0,T; L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right).$$

Tomando $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ com β' limitada em $\mathbb{R}$ (evitando que $\beta(x)$ vá a infinito se x vai a infinito) e multiplicando a equação acima por $\beta'(u_\varepsilon)$ temos (no sentido das distribuições) que

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \; \beta'(u_\varepsilon) - b \cdot \nabla u_\varepsilon \; \beta'(u_\varepsilon) = r_\varepsilon \; \beta'(u_\varepsilon),$$

o que nos dá

$$\frac{\partial \beta(u_\varepsilon)}{\partial t} - b \cdot \nabla \beta(u_\varepsilon) = r_\varepsilon \ \beta'(u_\varepsilon),$$

e então, tomando ε indo a zero

$$\frac{\partial \beta(u)}{\partial t} - b \cdot \nabla \beta(u) = 0 \ \ em \ (0,T) \times \mathbb{R}^N. \tag{2.20}$$

A tarefa agora passa por escolher β apropriada e concluir a unicidade para u. Tomemos então a função cut-off ϕ_R tal que

$$\phi_R = \phi\left(\frac{\cdot}{R}\right), \quad R \geq 1, \ com \ \phi \in \mathscr{D}_+(\mathbb{R}^N),$$

com $\phi \equiv 1$ *em* B_1 *e supp* $\phi \subset B_2$, e multipliquemos (2.20) por ϕ_R, obtendo assim

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \beta(u)\ \phi_R \,\mathrm{d}x + \int div\ b\ \beta(u)\ \phi_R \,\mathrm{d}x = -\int \beta(u) b \cdot \nabla \phi_R \,\mathrm{d}x. \tag{2.21}$$

Seja $M \in (0,\infty)$ e tome $\beta(t) = (|t| \wedge M)^p$ (onde $A \wedge B$ denota o mínimo entre A e B)(aproximando assim $|\cdot|^p$ quando M vai a infinito) que é Lipschitz em $\mathbb{R}$ mas não é C^1. Por aproximação vamos obter que (tomando módulo e usando desigualdade triangular)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int (|u| \wedge M)^p \ \ \phi_R \ \ \mathrm{d}x \leq C(t) \int (|u| \wedge M)^p \,\phi_R \,\mathrm{d}x + \int (|u| \wedge M)^p \,|b| \ \left|(\nabla\phi)(\frac{x}{R})\ \frac{1}{R}\right| \,\mathrm{d}x,$$

uma vez que $||div \ b(t,\cdot)||_{L^\infty} \leq \infty$ e portanto $||div \ b||_\infty \leq C$. Observe que $\nabla \phi_R$ possui suporte em B_{2R} e é identicamente nula em B_{1R}. Chegamos então a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int (|u| \wedge M)^p \ \ \phi_R \ \ \mathrm{d}x \leq C(t) \int (|u| \wedge M)^p \,\phi_R \,\mathrm{d}x \ + \ \frac{C}{R} \int\limits_{R \leq |x| \leq 2R} (|u| \wedge M)^p \,|b| \,\mathrm{d}x.$$

Observe também que $(|u| \wedge M)^p \in L^\infty(0,T; L^1 \cap L^\infty)$ e que para $|x| \leq 2R$, como $R \geq 1$, temos $1 + |x| \leq 3R$ e então

$$\frac{|b(t,x)|}{R} \ 1_{R \leq |x| \leq 2R} \ \leq \ 3 \frac{|b(t,x)|}{1+|x|} \ 1_{R \leq |x|}.$$

Agora, usando a hipótese (2.19), da forma $b = b_1 + b_2$ com

$$\frac{b_1}{1+|x|} \in L^1\left(0,T; L^1(\mathbb{R}^N)\right)$$

e

$$\frac{b_2}{1+|x|} \in L^1(0,T; L^\infty(\mathbb{R}^N)),$$

teremos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int (|u|\wedge M)^p\ \phi_R\ \mathrm{d}x\ \leq C\ &\int (|u|\wedge M)^p\,\phi_R\,\mathrm{d}x\ +\\ &+\ C\left\|\frac{b_2}{1+|x|}\right\|_\infty \int\limits_{|x|\geq R} (|u|\wedge M)^p\ \mathrm{d}x\ +\\ &+\ C\left(\int\limits_{|x|\geq R}\frac{b_1(t,x)}{1+|x|}\,\mathrm{d}x\right)M^p\end{aligned}$$

notando também que $(|u|\wedge M)^p\leq M^p$ e temos uma cota em L^∞ e que $(|u|\wedge M)^p\leq |u|^p$, com uma cota em L^1 para as integrais acima.
Como os termos da equação contendo os termos de b_1 e b_2 estão bem definidos e suas integrais são finitas, tomando R indo a infinito concluímos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int (|u|\wedge M)^p\ \leq C\int (|u|\wedge M)^p\,.$$

Agora usando o Lema de Gronwall, o fato que $u^0\equiv 0$ e passando M a infinito, teremos

$$|u|\equiv 0$$

e portanto $u\equiv 0$, concluindo a demonstração para o caso $p\leq\infty$.

(Caso $p=\infty$): Repare que se $u\in L^\infty\left(0,T;L^1\cap L^\infty\right)$, a demonstração acima se aplica e temos portanto a unicidade.
No caso geral usaremos um argumento de dualidade. Seja $\phi\in\mathscr{D}\left((0,T)\times\mathbb{R}^N\right)$. Então é suficiente mostrar que

$$\int_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^N} u\ \phi\ \mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}t=0.$$

Para isso, consideremos o problema

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}-b\cdot\nabla\psi-div\ b\ \psi=\phi\ \ em\ (0,T)\times\mathbb{R}^N\\ \qquad\qquad\qquad\psi|_{t=T}=0\ \ em\ \mathbb{R}^N.\end{cases}$$

Pela proposição 2.1, ψ existe e é de fato única (pela prova acima). Além disso,
$\psi\in L^\infty\left(0,T;L^1\cap L^\infty\right)$. Agora, usando o teorema de regularização 2.2 deduzimos que

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}-b\cdot\nabla u_\varepsilon=r_\varepsilon\ \ em\ (0,T)\times\mathbb{R}^N\\ \qquad\qquad u_\varepsilon|_{t=0}=0\ \ em\ \mathbb{R}^N\end{cases}\tag{2.22}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial t} - b \cdot \nabla \psi_\varepsilon - div\ b\ \psi_\varepsilon = \phi + s_\varepsilon \quad em\ (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ \psi_\varepsilon|_{t=T} = 0 \quad em\ \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.23}$$

com r_ε e s_ε convergindo a zero em $L^1\left(0,T;L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)\right)$.
Multiplicando (2.22) por $\psi_\varepsilon\ \phi_R$ e integrando por partes teremos (no sentido das distribuições)

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\ \psi_\varepsilon\ \phi_R - b \cdot \nabla u_\varepsilon\ \psi_\varepsilon\ \phi_R = r_\varepsilon\ \psi_\varepsilon\ \phi_R$$

$$-u_\varepsilon\ \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial t}\phi_R - u_\varepsilon \psi_\varepsilon \frac{\partial \phi_R}{\partial t} + u_\varepsilon\ div\ b\ \psi_\varepsilon\ \phi_R + u_\varepsilon\ \psi_\varepsilon\ b \cdot \nabla \phi_R + u_\varepsilon\ b \cdot \nabla \psi_\varepsilon\ \phi_R = r_\varepsilon\ \psi_\varepsilon\ \phi_R.$$

Agrupando o primeiro, terceiro e quinto termos do lado esquerdo da última equação, reparando que ϕ_R é uma função apenas espacial e então utilizando (2.23) temos

$$-\left\{(u_\varepsilon\ \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial t}\phi_R - u_\varepsilon\ div\ b\ \psi_\varepsilon\ \phi_R - u_\varepsilon\ b \cdot \nabla \psi_\varepsilon\ \phi_R\right\} + u_\varepsilon\ \psi_\varepsilon\ b \cdot \nabla \phi_R = r_\varepsilon\ \psi_\varepsilon\ \phi_R,$$

$$-\left\{\phi + s_\varepsilon\right\}\ u_\varepsilon\ \phi_R + u_\varepsilon\ \psi_\varepsilon\ b \cdot \nabla \phi_R = r_\varepsilon\ \psi_\varepsilon\ \phi_R,$$

e então, tomando ε indo a zero, deduzimos que

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\ \phi\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u|\ |\psi| \frac{|b(t,x)|}{1+|x|}\ 1_{R \leq |x| \leq 2R}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t.$$

Como

$$\frac{b}{1+|x|} \in L^1\left(0,T;L^1(\mathbb{R}^N)\right) + L^1(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^N))$$

e

$$|u|\ |\psi| \in L^\infty\left(0,T;L^1 \cap L^\infty\right),$$

tomando-se R indo a infinito, conclui-se o caso $p = \infty$.

$\square$

Combinando a Proposição 2.1 e o Teorema 2.5, obtemos imediatamente o seguinte corolário:

Corolário 2.6. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $u^0 \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$. Assuma (2.18) e (2.19).*
Então existe uma única solução u da equação do transporte (2.1) em $L^\infty\left(0,T;L^p\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ correspondendo à condição inicial u^0.

Corolário 2.7. *Sob as mesmas hipóteses do Corolário 2.6, temos que u satisfaz*

$$u \in C\left([0,T]; L^p(\mathbb{R}^N)\right) \quad se\ p < \infty \tag{2.24}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta(u) - b \cdot \nabla\beta(u) = 0 \quad em\ (0,T) \times \mathbb{R}^N, \tag{2.25}$$

para toda função $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$|\beta'(t)| \leq C\left(1 + |t|^r\right), \tag{2.26}$$

com r da forma

$$\begin{cases} r = p - 1, & se\ q > N \\ r < p - 1, & se\ q = N \\ r = \dfrac{p}{N}, & se\ q < N. \end{cases}$$

Repare que a equação (2.25) nos diz que soluções de (2.1) no sentido das distribuições são soluções renormalizadas de (2.1) quando $b \in L^1\left(0,T; W^{1,q}_{loc}\right)$.

Demonstração do Corolário 2.7:

- **Caso $p > 1$:**

  Observe que $\beta(u) \in L^\infty\left(0,T; L^{\frac{p}{r+1}}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$. Usando (2.26) e desigualdades de Sobolev deduzimos que

  $$b \cdot \beta(u) \in L^1\left(0,T; L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right).$$

  E então a conclusão (2.25) do corolário segue de (2.20).

  A seguir, repare que a demonstração do Teorema 2.5 nos dá que

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} div\ b\ |u|^p \,\mathrm{d}x = 0 \quad q.t.p.\ em\ (0,T). \tag{2.27}$$

  Portanto $||u(t)||_p \in C\left([0,T]\right)$ e segue que $u \in C\left([0,T]; L^p\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$.

- **Caso $p = 1$:**

  Tome $u^0_n \in L^1 \cap L^p$ $(p > 1)$ aproximando u^0 e use (2.27) para deduzir que a solução u_n da equação do transporte (2.1) converge a u em $L^1(\mathbb{R}^N)$, uniformemente em $[0,T]$. Temos portanto

  $$u \in C\left([0,T]; L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$$

e

$$\underset{t\in[0,T]}{sup\ ess} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|\ 1_{|u(t)|\geq M}\ \mathrm{d}x \overset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.28}$$

Considere agora ϕ tal que

$$\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N),\ 0 \leq \phi \leq 1,\ \phi \equiv 0 \ em\ B_{1/2}\ e\ \phi \equiv 1\ para\ |x| \geq 1,$$

e defina $\phi_R = \phi(Rx)$ para $R \geq 1$.

Então, da mesma forma que fizemos no teorema de unicidade 2.5, para todo $M \geq 0$ tem-se

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u| \wedge M\phi_R \,\mathrm{d}x \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u| \wedge M\phi_R \,\mathrm{d}x + C \int\limits_{R/2\leq|x|\leq R} |u| \wedge M \frac{|b|}{1+|x|}\,\mathrm{d}x.$$

Isso nos dá que

$$\underset{t\in[0,T]}{sup\ ess} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u| \wedge M\phi_R \,\mathrm{d}x \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall M > 0. \tag{2.29}$$

E concluímos o corolário notando que $u \in C\left([0,T]; L^1_{loc}\right)$, e as convergências acima (2.28) e (2.29).

□

2.3 Existência de Soluções Renormalizadas e Estabilidade

O objetivo desta seção é mostrar como os resultados anteriores sobre existência e unicidade podem ser estendidos a condições de integrabilidade menos exigentes sobre as derivadas de b e sobre as condições iniciais. Provaremos também um resultado sobre estabilidade.

As hipóteses que utilizaremos serão as seguintes:

$$\begin{cases} b \in L^1(0,T; W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)), \\ \\ div\ b \in L^1(0,T; L^\infty(\mathbb{R}^N)), \end{cases} \tag{2.30}$$

$$\frac{|b(t,x)|}{1+|x|} \in L^1(0,T; L^1(\mathbb{R}^N)) + L^1(0,T; L^\infty(\mathbb{R}^N)). \tag{2.31}$$

Precisamos também introduzir um conjunto de funções que aparecerá de forma recorrente e que denotaremos por L^0 . O conjunto L^0 é formado por todas funções mensuráveis u definidas em $\mathbb{R}^N$ e que tomam valores em $\bar{\mathbb{R}}$ tal que

$$\textit{medida}\ \{|u| > \lambda\} < \infty, \quad \textit{para todo}\ \lambda > 0.$$

Repare que se $\beta \in C(\mathbb{R})$ é limitada e anula-se próximo a zero, então

$$\beta(u) \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Diremos que

$$u^n \xrightarrow{n} u \quad \textit{em}\ L^0 \tag{2.32}$$

se

$$\beta(u^n) \xrightarrow{n} \beta(u) \quad \textit{em}\ L^1 \quad \textit{para toda}\ \beta\ \textit{dessa forma}$$

e que u^n é limitado em L^0 se $\beta(u^n)$ é limitado em L^1, para toda β dessa forma.
Dessa maneira, ficam bem definidos os conjuntos $L^\infty(0,T;L^0)$ e $C([0,T];L^0)$. Além disso, denotaremos por L^0_{loc} a versão local de L^0.

Definição 2.8 (Solução Renormalizada da Equação do Transporte)**.** *Diremos que $u \in L^\infty(0,T;L^0)$ é uma* **solução renormalizada** *da equação do transporte (2.1), i.e.,*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b \cdot \nabla_x u = 0 \quad \textit{em}\ (0,T) \times \mathbb{R}^N, \tag{2.33}$$

se é válido que

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta(u) - b \cdot \nabla\beta(u) = 0 \quad \textit{em}\ (0,T) \times \mathbb{R}^N \tag{2.34}$$

para toda β tal que

$$\begin{cases} \beta \in C^1(\mathbb{R}), \\ \beta \quad e \quad \dfrac{\beta'}{1+|t|} \quad \textit{são limitadas em}\ \mathbb{R}, \\ \beta\ \textit{se anula próximo a zero.} \end{cases}$$

As funções β com essas propriedades serão chamadas **funções admissíveis** *(para a equação do transporte). Repare que essas condições implicam em*

$$\beta(u),\ u\,\beta'(u) \ \in L^\infty\left(0,T;L^1(\mathbb{R}^N)\right).$$

Dessa maneira, $u \in L^\infty(0,T;L^0)$ será uma solução renormalizada da equação (2.1) correspondendo à condição inicial $u^0 \in L^0$ (dada), se $\beta(u)$ resolve a equação renormalizada (2.34) com $\beta(u^0)$ como condição inicial, para toda β da forma acima. Com isso, podemos enunciar os teoremas sobre a consistência da solução, existência e unicidade da solução renormalizada e estabilidade.

Teorema 2.9 (Consistência, Existência e Unicidade de Soluções Renormalizadas). *Assumindo as hipóteses para b nesta seção, i.e., (2.30) e (2.31), teremos:*

- **Consistência:** *Seja $u \in L^\infty\left(0,T;L^p(\mathbb{R}^N)\right)$ e seja $b \in L^1\left(0,T;L^p(\mathbb{R}^N)\right)$ com $1 \leq p \leq \infty$.*

  Se u é uma solução renormalizada de (2.1), então u é uma solução de (2.1).

  Se u é uma solução de (2.1) e $b \in L^1\left(0,T;W^{1,q}_{loc}(\mathbb{R}^N)\right)$, então u é uma solução renormalizada.

- **Existência e Unicidade:** *Seja $u^0 \in L^0(\mathbb{R}^N)$. Então existe uma única solução renormalizada u de (2.1) em $L^\infty\left(0,T;L^0(\mathbb{R}^N)\right)$ correspondendo à condição inicial u^0.*

  Além disso,

  $$\begin{aligned}
  &u \in C\left([0,T];L^0(\mathbb{R}^N)\right);\\
  &u \in C\left([0,T];L^p(\mathbb{R}^N)\right),\ \textit{se } u^0 \in L^p(\mathbb{R}^N) \textit{ para algum } 1 \leq p \leq \infty;\\
  &u \in L^\infty\left(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^N)\right) \cap\ C\left([0,T];L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)\right),\ \forall p < \infty,\ \textit{se } u^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N).
  \end{aligned}$$

  E também vale que

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^N} \beta(u)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} div\ b\ \beta(u)\,\mathrm{d}x = 0,\ \textit{q.t.p. em } (0,T), \tag{2.35}$$

  para toda $\beta \in C(\mathbb{R})$ limitada e que se anula próximo a zero.

Teorema 2.10 (Estabilidade). *Seja $b_n \in L^1(0,T;L^1_{loc})$ tal que*

$$\begin{cases}
div\ b_n \in L^1\left(0,T;L^1_{loc}\right);\\
b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} b;\\
div\ b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} div\ b;
\end{cases}$$

com tais convergências ocorrendo em $L^1(0,T,L^1_{loc})$ e b satisfazendo (2.30) e (2.31).

Seja u_n uma sequência limitada em $L^\infty(0,T;L^0)$ tal que u_n é uma solução renormalizada de (2.1) com b substituido por b_n, correspondendo à condição inicial $u_n^0 \in L^0$. Assuma que

$$u_n^0 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u^0 \in L^0 \text{ em } L^0_{loc}.$$

Temos então os seguintes resultados:

- **Convergência Local:**

$$u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{em } C\left([0,T];L^0_{loc}\right),$$

com u sendo a solução renormalizada de (2.1) correspondendo à condição inicial u^0.

Além disso, assuma que

$$\begin{cases} u_n^0 \longrightarrow u^0 \text{ em } L^p_{loc}, \text{ para algum } p \in [1,\infty); \\ u_n \ \text{ limitada em } L^\infty\left(0,T;L^p_{loc}\right); \\ b_n,\ div\ b_n \ \text{ são limitadas em } L^1\left(0,T;L^\infty_{loc}\right), \text{ ou que} \\ \qquad\qquad \left\{\dfrac{|u_n(t)|^p}{t} \in [0,T],\ n \geq 1\right\} \quad \text{é fracamente pré-compacto em } L^1_{loc}. \end{cases}$$

Então,

$$u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{em } C\left([0,T];L^p_{loc}\right).$$

- **Convergência Global:** *Assuma que*

$$\begin{cases} div\ b_n = \beta_n^1 + \beta_n^2,\ \text{tal que } \beta_n^1 \text{ converge em } L^1\left(0,T;L^1\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{e } \beta_n^2 \text{ é limitada em } L^1\left(0,T;L^\infty\right); \\ u_n^0 \longrightarrow u^0 \quad \text{em } L^0; \\ u_n \ satisfaz \text{ (2.35) com } b \text{ substitudo por } b_n. \end{cases}$$

Então

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em } C\left([0,T];L^0\right).$$

Além disso, assuma que

$$\begin{cases} u_n^0 \longrightarrow u^0 \text{ em } L^p, \text{ para algum } p \in [1,\infty); \\ u_n \ \text{ limitada em } L^\infty\left(0,T;L^p\right) \\ div\ b_n \ \text{ é limitada em } L^1\left(0,T;L^\infty\right) \text{ ou que} \\ \qquad\qquad \left\{\dfrac{|u_n(t)|^p}{t} \in [0,T],\ n \geq 1\right\} \quad \text{é relativamente fracamente compacto em } L^1. \end{cases}$$

Então,

$$u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \quad em\ C\left([0,T];L^p\right).$$

Comentário 2.11. *Note que não assumimos no resultado de estabilidade que*

$$b_n \overset{n}{\longrightarrow} b \quad em\ L^1\left(0,T;W^{1,1}_{loc}\right).$$

Demonstração dos Teoremas 2.9 e 2.10:

- **Passo 1 - Consistência:** Utilizando o corolário 2.7 já sabemos que soluções no sentido das distribuições de (2.1) são soluções renormalizadas de (2.1) quando $b \in L^1\left(0,T;W^{1,q}_{loc}\right)$.

  Agora, assuma que u é uma solução renormalizada de (2.1) e $u \in L^\infty\left(0,T;L^p\right)$. Escolhendo uma sequência de funções admissíveis β_n tal que

  $$|\beta_n(t)| \leq |t| \quad e \quad \beta_n(t) \overset{n}{\longrightarrow} t \quad uniformemente\ sobre\ conjuntos\ compactos\ de\ \mathbb{R}$$

  temos que (2.1) segue de (2.35) via argumento de convergência dominada. Portanto u é uma solução de (2.1).

- **Passo 2 - Unicidade:** A asserção sobre a unicidade segue do teorema de unicidade 2.5 uma vez que $\beta(u)$ é então uma solução de (2.1) em $L^\infty\left(0,T;L^1\cap L^\infty\right)$. Logo $\beta(u)$ é única e já que isso vale para toda função admissível β, tomando funções β adequadas e supondo u_1 e u_2 duas soluções renormalizadas temos

  $$\begin{cases} u_1\ 1_{0<|u_1|<\infty} = u_2\ 1_{0<|u_2|<\infty} & q.t.p.,\\ 1_{u_1=0} = 1_{u_2=0} & q.t.p.,\\ 1_{u_1=\pm\infty} = 1_{u_2=\pm\infty} & q.t.p., \end{cases}$$

  ou seja,

  $$u_1 \equiv u_2 \quad q.t.p..$$

  E as asserções sobre a continuidade temporal seguem dos corolários 2.6 e 2.7.

- **Passo 3 - Estabilidade Pontual:**

  Nosso intuito agora é mostrar que

  $$u_n \longrightarrow u \quad q.t.p.\ em\ (0,T)\times\mathbb{R}^N$$

ou de forma equivalente (uma vez que já temos o resultado de consistência)

$$\beta(u_n) \longrightarrow \beta(u) \;\; q.t.p. \; em \; (0,T) \times \mathbb{R}^N$$

para qualquer função admissível β.

Fixemos β e defina $v_n := \beta(u_n)$. Note que v_n resolve

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_n}{\partial t} - b_n \cdot \nabla_x v_n = 0 \quad \in (0,T) \times \mathbb{R}^N, \\ v_n|_{t=0} = v_n^0 = \beta(u_n^0). \end{cases} \tag{2.36}$$

Perceba também que se β é uma função admissível, β^2 também o é. Podemos então definir $w_n := v_n^2$ e teremos que $w_n \in L^\infty(0,T; L^1 \cap L^\infty)$ e w_n resolve

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_n}{\partial t} - b_n \cdot \nabla_x w_n = 0 \quad \in (0,T) \times \mathbb{R}^N, \\ w_n|_{t=0} = (v_n^0)^2. \end{cases} \tag{2.37}$$

Usando as hipóteses sobre a convergência de b_n e $div\ b_n$ podemos supor, sem perda de generalidade, que temos a convergência fraca-estrela de v_n e w_n para v e w, soluções da equação do transporte (2.1) (no sentido das distribuições)

$$v_n,\ w_n \longrightarrow v,\ w \quad \in L^\infty\left(0,T; L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)\right). \tag{2.38}$$

convergindo fraco em $L^\infty\big((0,T) \times \mathbb{R}^N\big)$.

E em relação às condições iniciais, uma vez que

$$u_n^0 \longrightarrow u^0 \;\; em \; L^0_{loc},$$

teremos

$$v^0 = \beta(u^0) \;\; e \;\; w^0 = [\beta(u^0)]^2.$$

Como já provamos a asserção sobre a consistência de soluções podemos dizer que v é uma solução renormalizada de (2.1) e portanto v^2 é uma solução de (2.1) correspondendo à condição inicial $(v^0)^2 = [\beta(u^0)]^2$.

Temos então que v^2 e w resolvem a mesma equação, com as mesmas condições iniciais. Logo, pelo teorema de unicidade 2.5, $v^2 \equiv w$. E em vista de (2.38), isso nos dá que

$$v_n^2 \longrightarrow v^2 \quad fraca-estrela \; em \; L^\infty\left((0,T) \times \mathbb{R}^N\right),$$

e então

$$v_n^2 \longrightarrow v^2 \quad em\ L^2\left(0,T;L^2_{loc}\right),$$

e portanto

$$v_n^2 \longrightarrow v^2 \quad em\ medida.$$

Gostaríamos de ter a convergência em medida não somente de v_n^2 a v mas a de u_n a u. Mas como $v_n = \beta(u_n)$ e β é uma função admissível arbitrária, podemos escolher funções admissíveis que nos dêem a convergência desejada.

Variando β na coleção enumerável de funções admissíveis β_k definidas da forma

$$\begin{cases} \beta_k(t) = 0, & se\ |t| \leq \dfrac{1}{k} \\ \beta_k'(t) > 0, & se\ |t| > \dfrac{1}{k} \\ & \\ \beta_k,\ \dfrac{\beta_k'(t)}{1+|t|} \quad \text{são limitadas em } \mathbb{R} & \end{cases}$$

teremos que u_n converge em medida a u. E então $\beta(u_n) = v_n \longrightarrow \beta(u)$. Como por construção $v_n \longrightarrow v$, concluímos que $v = \beta(u)$ e portanto u é uma solução renormalizada de (2.1) correspondendo à condição inicial u^0. Segue então do teorema de unicidade que u é única.

- **Passo 4 - Outros detalhes sobre a convergência:**

  A demonstração de convergência uniforme no tempo seguirá do teorema de Arzelà-Ascoli. Iniciamos por fixar uma função admissível β e definindo $\gamma := \beta^2$. Sabemos pelo passo 3 desta demonstração que

$$\beta(u_n),\ \gamma(u_n) \longrightarrow \beta(u),\ \gamma(u) \quad em\ L^p\left(0,T;L^p_{loc}\right),\ \forall 1 \leq p < \infty.$$

  Tomando ϕ_R como na prova do teorema 2.5 teremos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(u_n)\ \phi_R\ \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} [div\ b_n\ \gamma(u_n)\ \phi_R + \gamma(u_n)\ b_n \cdot \nabla\phi_R]\ \mathrm{d}x = 0,$$

  e então

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(u_n)\ \phi_R\ \mathrm{d}x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\int_{\mathbb{R}^N} [div\ b\ \phi_R + b \cdot \nabla\phi_R]\ \gamma(u)\ \mathrm{d}x \quad em\ L^1(0,T).$$

Como u é uma solução renormalizada de (2.1)

$$\int_{\mathbb{R}^N} \beta(u_n)^2\ \phi_R\,\mathrm{d}x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} \beta(u)^2\ \phi_R\,\mathrm{d}x, \quad uniformemente\ em\ [0,T]$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \beta(u_n(t_n))^2\ \phi_R\,\mathrm{d}x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} \beta(u(t))^2\ \phi_R\,\mathrm{d}x, \quad se\ \ t_n \overset{n}{\longrightarrow} t\ \ em\ [0,T]. \tag{2.39}$$

Por outro lado, para toda bola limitada B_R, usando (2.34) podemos verificar que $\beta(u_n)$ é relativamente compacto em $C\left([0,T]; H^{-s}\left(B_R\right)\right)$ para $s > 0$ (independente de n).

Portanto, se $t_n \overset{n}{\to} t$ em $[0,T]$,

$$\beta(u_n(t_n)) \overset{n}{\to} \beta(u(t))\ \ em\ H^{-s}\left(B_R\right)\ \forall R < \infty,$$

e então fracamente em $L^2\left(B_R\right)$.

Agora, por (2.39),

$$\beta(u_n(t_n)) \overset{n}{\to} \beta(u(t))\ \ em\ L^2\left(B_R\right).$$

Como $\beta(u) \in C\left([0,T]; L^p\right)$ para todo $1 \le p < \infty$, isso implica que

$$\beta(u_n) \overset{n}{\to} \beta(u)\ \ em\ C\left([0,T]; L^2_{loc}\right).$$

Substituindo $\beta(u_n)^2$ por $|u_n|^p \wedge M$ e usando (2.35) podemos, para $p > 1$, deduzir que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^N} \left[(|u_n| - \lambda)^+ \wedge M\right]^p\ \mathrm{d}x \le C\int_{\mathbb{R}^N} \left[(|u_n| - \lambda)^+ \wedge M\right]^p\ \mathrm{d}x,$$

e tomando λ para zero e M para infinito, obtemos uma limitação em $L^\infty\left(0,T;L^p\right)$.

Falta ainda tratar o caso $p = 1$. Primeiro observe que se u_n é solução renormalizada, u_n^+ e u_n^- também o são. Então podemos sem perda de generalidade assumir que u_n e u são não-negativas. Teremos então, via a limitação que acabamos de mostrar, que

$$(u_n - \lambda)^+ \wedge M \overset{n}{\longrightarrow} (u - \lambda)^+ \wedge M\ \ em\ C\left([0,T]; L^1_{loc}\right),\ \forall\ \lambda > 0, M < \infty. \tag{2.40}$$

Com o uso da hipótese de compacidade fraca em L^1_{loc} temos que

$$\sup_{t,n} \int_{B_R} |u_n|\ 1_{|u_n|\ge M}\ \mathrm{d}x \overset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall\ R < \infty. \tag{2.41}$$

Usando (2.40) e (2.40) deduzimos a convergência em $C\left([0,T];L^1_{loc}\right)$.

No caso global queremos mostrar que, para toda sequência $t_n \in [0,T]$ convergindo a t, $u_n(t_n)$ converge a $u(t)$ em L^1. Mostrar isso é suficiente para demonstrarmos o que nos resta sobre a estabilidade, uma vez que $u \in C\left([0,T];L^1\right)$. Como

$$u_n \longrightarrow u \;\; em \; C\left([0,T];L^0\right),$$

já podemos concluir que

$$u_n(t_n) \longrightarrow u(t) \;\; em \; medida$$

ou q.t.p. se for necessário extrair uma subsequência.

Por outro lado, usando (2.35), escolhendo $a(t) \in W^{1,1}(0,T)$ tal que $a(0) = 0$ e $a'(t) + div\ b_n \geq 0$ q.t.p. em $(0,T)\times\mathbb{R}^N$, temos:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-a(t_n)}\; u_n(t_n)\;\,\mathrm{d}x + \int_0^{t_n}\int\limits_{\mathbb{R}^N}[div\ b_n + a'(s)]\; e^{-a(s)}\; u_n\,\mathrm{d}s\;\,\mathrm{d}x = 0, \tag{2.42}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-a(t)}\; u(t)\;\,\mathrm{d}x + \int_0^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}[div\ b + a']\; e^{-a(t)}\; u\,\mathrm{d}t\;\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.43}$$

Usando mais uma vez a hipótese de generelidade sobre u_n e u serem não-negativas e fazendo uso do Lema de Fatou deduzimos que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_n(t_n)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n} \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(t)\,\mathrm{d}x. \tag{2.44}$$

Lembre-se agora que tomando a decomposição de uma função em suas partes positiva e negativa temos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u_n(t_n)-u(t)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_n(t_n)-u(t)\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_{\mathbb{R}^N}[u_n(t_n)-u(t)]^-\;\,\mathrm{d}x,$$

e usando a convergência (2.44) e o Lema de Lebesgue concluímos

$$[u_n(t_n)-u(t)]^- \xrightarrow{n} 0 \;\; em \; L^1.$$

- **Passo 5 - Existência:**

Iniciamos por aproximar b por $b_\varepsilon := b * \rho_\varepsilon$, com ρ_ε da mesma forma que no teorema 2.2. Escrevendo explicitamente a convolução em b_ε temos

$$b_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} b(t,y)\ \rho_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y$$

e usando as hipóteses (2.30) e (2.31) a respeito de b chegamos a

$$\frac{b_\varepsilon}{(1+|x|^2)^{1/2}} \in L^1\left(0,T; W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)\right) \quad \forall k \geq 1.$$

Consideremos agora as funções β_k definidas no passo 3 desta demonstração. E defina $\beta_{k'} := \gamma_{k',k} \circ \beta_k$ para alguma $\gamma_{k',k} \in C^1(\mathbb{R})$, para todo $k' \geq k \geq 1$. Defina também

$$u_k^0 := \beta_k(u^0)$$
$$u_{k,\delta}^0 := \beta_k(u^0) * \rho_\delta,\ \textit{para}\ \delta > 0\ \textit{e}\ \rho_0 = \delta_0 \text{ por convenção .}$$

Temos então que existe uma única solução $u_{k,\varepsilon}^\delta \in L^\infty\left(0,T; L^\infty(\mathbb{R}^N)\right)$ do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{k,\varepsilon}^\delta}{\partial t} - b_\varepsilon \cdot \nabla u_{k,\varepsilon}^\delta = 0 \ \ em\ (0,T)\times\mathbb{R}^N, \\ u_{k,\varepsilon}^\delta|_{t=0} = u_{k,\delta}^0 \ \ em\ \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.45}$$

Além disso, $u_{k,\varepsilon}^\delta \in W^{1,\infty}\left((0,T)\times B_R\right)$ $(\forall R < \infty)$ para $\delta > 0$ e

$$u_{k,\varepsilon}^\delta \longrightarrow u_{k,\varepsilon}^0 \ \ em\ C\left([0,T]; L^1_{loc}\right)$$

e denotamos $u_{k,\varepsilon} = u_{k,\varepsilon}^0$.

Claramente $u_{k',\varepsilon}^{-\delta} = \gamma_{k',k}(u_{k,\varepsilon}^\delta)$ resolve o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{k',\varepsilon}^{-\delta}}{\partial t} - b_\varepsilon \cdot \nabla u_{k',\varepsilon}^{-\delta} = 0 \ \ em\ (0,T)\times\mathbb{R}^N, \\ u_{k',\varepsilon}^{-\delta}|_{t=0} = \gamma_{k',k} u_{k,\delta}^0 \ \ em\ \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.46}$$

para $k' \leq k$ e $\delta > 0$. Tomando então δ indo a 0^+ e comparando com (2.45) vemos que

$$u_{k',\varepsilon} = \gamma_{k',k}(u_{k,\varepsilon}) \ \ em\ (0,T)\times\mathbb{R}^N,\ \forall\ k' \geq k \geq 1.$$

Uma vez que $||div\ b_\varepsilon||_\infty \leq ||div\ b||_\infty$ verificamos que $u_{k',\varepsilon}$ é uniformemente (em k') limitada em $L^\infty(0,T; L^0)$ e como $\beta_k'(u^0)$ aproximando a identidade converge a u^0

em L^0, podemos usar o resultado de estabilidade, fazendo k' indo a infinito e obter $u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^0)$ solução renormalizada de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - b_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon = 0 \;\; em \; (0, T) \times \mathbb{R}^N, \\ u_\varepsilon|_{t=0} = u_0 \;\; em \; \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.47}$$

Verificando que u_ε é limitada em $L^\infty(0, T; L^0)$ (de forma análoga ao argumento acima) podemos usar o resultado de estabilidade (tomando ε a zero) e concluir a prova da existência de solução.

□

Teorema 2.12 (Um segundo resultado de estabilidade)**.** *Seja* $b_n \in L^1([0, T], L^1_{loc})$ *tal que*

$$\begin{cases} div \; b_n \; \textit{é limitado em} \; L^1(0, T; L^\infty); \\ \\ b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b \; em \; L^1\left([0, T], L^1_{loc}\right), \end{cases}$$

com b *satisfazendo (2.30), (2.31).*

Seja u_n *uma sequência limitada em* $L^\infty(0, T; L^0)$ *tal que* u_n *é uma solução renormalizada de (2.1) satisfazendo (2.34) com* b *substituído por* b_n*, correspondendo a uma condição inicial* $u_n^0 \in L^0$*.*

Assuma que

$$u_n^0 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u^0 \; em \; L^0 \; (resp. \; em \; L^p \; para \; algum \; 1 \le p < \infty).$$

Então

$$u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \; em \; C\left([0, T]; L^0\right) \;\; (resp. \; em \; C([0, T]; L^p)),$$

com u *sendo a solução renormalizada de (2.1) correspondendo à condição inicial* u^0*.*

Demonstração do Teorema 2.12:

Uma vez que grande parte da demonstração é análoga ao primeiro resultado de estabilidade, consideraremos somente o caso com condição inicial u_n^0 limitada em $L^1 \cap L^\infty$ e convergindo em L^1. Logo, u_n é limitada em $L^\infty(0, T; L^1 \cap L^\infty)$. Usando as hipóteses sobre b, (2.30) e (2.31), e seguindo a notação até aqui usada, deduzimos a existência de u^R_ε ($u^\varepsilon_R = u_\varepsilon \phi_R$ e u_ε obtido a partir do Teorema de regularização) solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon_R}{\partial t} - b \cdot \nabla u^\varepsilon_R = s^\varepsilon_R \quad em\ (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ u^\varepsilon_R|_{t=0} = \phi_R u^0_\varepsilon \end{cases}$$

com $s^\varepsilon_R \longrightarrow 0$ em L^1, pela convergência no lema de comutadores e $u^\varepsilon_R \longrightarrow u$ se tomarmos R indo a mais infinito e então ε a zero.
Vamos escrever

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_n - u^\varepsilon_R) - b_n \cdot \nabla(u_n - u^\varepsilon_R) = (b - b_n)\nabla u^\varepsilon_R + s^\varepsilon_R$$

e usar o fato de que u_n é uma solução renormalizada satisfazendo (2.35) e então deduzir

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u^\varepsilon_R| \,\mathrm{d}x \le & \int_{\mathbb{R}^N} |b - b_n| \; |\nabla u^\varepsilon_R| \,\mathrm{d}x \\ & + ||div\ b_n(t)||_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u^\varepsilon_R| \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |s^\varepsilon_R| \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tomando $A_n(t) = \int_0^t ||div\ b_n(s)||_{L^\infty}\ \mathrm{d}s$, teremos que

$$\sup_{[0,T]} \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u^\varepsilon_R|(t) \,\mathrm{d}x \right) e^{-A_n(t)} \right\} \le \int_{\mathbb{R}^N} |u^0_n - u^0_\varepsilon \phi_R| \,\mathrm{d}x + \int_0^T e^{-A_n(t)} \,\mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}^N} |b - b_n| \; |\nabla u^\varepsilon_R| + |s^\varepsilon_R| \,\mathrm{d}x$$

ou, considerando a cotas para ($div\ b_n$), que

$$\sup_{[0,T]} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u^\varepsilon_R|(t) \,\mathrm{d}x \right)(t) \le C_0 \int_{\mathbb{R}^N} |u^0_n - u^0_\varepsilon \phi_R| \,\mathrm{d}x + C_0 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} [|b - b_n| \; |\nabla u^\varepsilon_R| + |s^\varepsilon_R|] \,\mathrm{d}x \ \mathrm{d}t$$

com C_0 independente de n, ε, R.

Se somarmos e subtrairmos u^ε_R e usarmos o lema de Fatou teremos

$$\limsup_{n} \sup_{[0,T]} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u| \,\mathrm{d}x \right)(t) \le C_0 \sup_{[0,T]} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u - u^\varepsilon_R| \,\mathrm{d}x \right)(t) + C_0 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |s^\varepsilon_R| \,\mathrm{d}x \ \mathrm{d}t$$

e concluímos tomando primeiro R indo a infinito e então ε a zero.

$\square$

2.4 Estabilidade e Compacidade Temporal

Teorema 2.13 (Estabilidade para o caso dependente do tempo)**.** *O teorema 2.10 ainda é válido se substituirmos a convergência*

$$\begin{cases} b_n \longrightarrow b \\ \\ div\ b_n \longrightarrow div\ b \end{cases} \quad em\ L^1([0,T], L^1_{loc}) \tag{2.48}$$

por sua versão **fraca** *e adicionarmos as hipóteses*

$$\begin{cases} b_n(t, x+h) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} b_n(t,x) \\ \\ div\ b_n(t, x+h) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} div\ b_n(t,x). \end{cases} \quad em\ L^1([0,T], L^1_{loc}), \quad uniformemente\ em\ n. \tag{2.49}$$

Comentário 2.14. *No caso de b_n, $div\ b_n$ não dependerem de t, a convergência fraca da hipótese e a convergência (2.49) implicam na convergência forte. E então retornamos ao resultado do Teorema 2.10.*

Demonstração do Teorema 2.13:
Considere v^n limitada em $L^\infty_{t,x}$ solução da equação da continuidade

$$\frac{\partial v^n}{\partial t} - div_x\,(b_n v^n) = 0 \ \ em\ \mathscr{D}'\left((0,T)\times\mathbb{R}^N\right).$$

Podemos assumir $v^n \rightharpoonup v$ em $L^\infty_{t,x}$ e queremos então provar que

$$\frac{\partial v}{\partial t} - div_x(bv) = 0 \ \ em\ \mathscr{D}'\left((0,T)\times\mathbb{R}^N\right),$$

i.e., que

$$b_n v^n \rightharpoonup bv \ \ em\ \mathscr{D}'\ ou\ L^1.$$

Tomemos ρ_ε um núcleo regularizante, como fizemos no teorema 2.2, e observe que a hipótese (2.49) nos dá que

$$b_n(v^n * \rho_\varepsilon) - (b_n v^n) * \rho_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \ \ em\ L^1\left((0,T); L^1_{loc}\right), \ \ uniformemente\ em\ n. \tag{2.50}$$

Como $\frac{\partial}{\partial t}(v^n * \rho_\varepsilon) = (div_x(b_n v^n)) * \rho_\varepsilon$ é uniformemente (em n) limitado em $L^1\left((0,T); L^1_{loc}\right)$, via teoremas de imersão compacta de Sobolev deduzimos que, para cada $\varepsilon > 0$

$$v^n * \rho_\varepsilon \overset{n}{\longrightarrow} v * \rho_\varepsilon \ \ q.t.p.\ em\ (0,T)\times\mathbb{R}^N,$$

extraindo uma subsequência se necessário.
Usando a convergência q.t.p. acima, a limitação uniforme de $v^n * \rho_\varepsilon$ e a hipótese de convergência fraca de b_n em $L^1\left((0,T); L^1_{loc}\right)$ obtemos

$$b_n(v^n * \rho_\varepsilon) \xrightarrow{n} b(v * \rho_\varepsilon) \;\; fracamente\ em\ L^1\left(0,T; L^1_{loc}\right),\ \forall \varepsilon > 0.$$

Mas para o termo do lado direito da convergência acima temos que

$$b(v * \rho_\varepsilon) \overset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} bv \;\; em\ L^1\left((0,T); L^1_{loc}\right).$$

Portanto

$$b_n(v^n * \rho_\varepsilon) \longrightarrow bv,$$

e então comparando com (2.50) chegamos a

$$b_n v^n \xrightarrow{n} bv \;\; fracamente\ em\ L^1\left((0,T); L^1_{loc}\right),$$

como desejado.

$\square$

Capítulo 3

Equações Diferenciais Ordinárias - Caso não Suave

3.1 Introdução

O interesse deste capítulo é o estudo do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{X} = b\,(X)\,, \quad t \in \mathbb{R}; \\ X(0) = x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.1}$$

com b campo vetorial com regularidade tipicamente Sobolev. Vamos utilizar a teoria desenvolvida no capítulo 2 para a Equação do Transporte e estudar questões como existência, unicidade e regularidade para a EDO acima.

Estudaremos primeiro o caso autônomo com $b \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $div\ b = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e depois passaremos ao caso $div\ b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Mais tarde apresentaremos o caso para campos vetoriais dependentes do tempo, $b = b(t,x)$.

3.2 Caso Autônomo e com Divergente Nulo

Nesta seção vamos considerar b variando apenas espacialmente e satisfazendo

$$\begin{cases} b \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N); \\ div\ b = 0, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.2}$$

e

$$\frac{b}{1+|x|} \in L^1 + L^\infty. \tag{3.3}$$

Em algumas estimativas usaremos também que

$$b \in L^p + (1+|x|)L^\infty, \text{ para algum } p \in [1,\infty]. \tag{3.4}$$

O teorema a seguir mostrará a existência e unicidade de soluções para a equação (3.1). A formulação fraca da EDO (3.1) é tecnicamente complicada porque se assumirmos somente (3.3) não é possível mostrar que a solução $X(t,x)$ está em L^1_{loc}(para um tempo fixo), de maneira que temos que definir soluções para (3.1) de maneira similar às soluções renormalizadas. O teorema mostrará que $X(t) \in C(\mathbb{R}; L)^N$, com L sendo o conjunto das funções mensuráveis ϕ de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$ e com $|\phi| < \infty$ *q.t.p.*, com a distância dada por

$$d(\phi,\psi) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} ||\ |\phi-\psi| \wedge 1\ ||_{L^1(B_n)},$$

que corresponde à convergência em medida sobre bolas arbitrárias.

Além disso, por causa de (3.2), X vai preservar a medida, i.e.,

$$\lambda \circ X(t) = \lambda, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

com $\lambda \circ X(t)$ entendida no seguinte sentido:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi \ \ \mathrm{d}\left(\lambda \circ X(t)\right) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi\left(X(t)\right)\, \mathrm{d}x.$$

Dado que temos a conservação da medida, $\phi \circ X(t)$ faz sentido em L para toda $\phi \in L$.

Definição 3.1 (Solução Renormalizada para a EDO (3.1))**.** *Diremos que X é solução renormalizada da equação (3.1) se para toda $\beta \in C^1\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N\right)$ tal que*

$$\beta(z),\ |D\beta(z)|\,(1+|z|) \textit{ são limitadas em } \mathbb{R}^N \tag{3.6}$$

temos

$$\beta(X) \in L^\infty\left(\mathbb{R}; L^1_{loc}\right) \tag{3.7}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\beta(X) = D\beta(X)\cdot b(X) & \textit{em } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N; \\ \beta(X)|_{t=0} = \beta(x) & \textit{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.8}$$

com a equação acima valendo no sentido das distribuições.

Chamaremos de **funções admissíveis** às funções β que possuam as propriedades citadas acima.
Repare que assumindo (3.3) e (3.5) temos

$$\frac{b\,(X)}{1+|X|} \in L^{\infty}\left(\mathbb{R}; L^1 + L^{\infty}\right).$$

Por último, a propriedade de grupo valerá no seguinte sentido:

$$X(t+s,\cdot\,) = X(t, X(s,\cdot\,)) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \text{ para todo } t,s \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Uma vez estabelecidos os espaços em que vamos trabalhar e feitas as devidas definições, podemos passar ao teorema.

Teorema 3.2 (Existência e Unicidade de Soluções da EDO (3.1))**.** *Suponha que o campo vetorial b possua as seguintes propriedades (3.2) e (3.3), i.e.,*

$$b \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad div\ b = 0 \quad q.t.p.\ em\ \mathbb{R}^N,$$

$$\frac{b}{1+|x|} \in L^1 + L^{\infty}.$$

Então existe um único $X \in C(\mathbb{R}; L)^N$ satisfazendo (3.5), i.e.,

$$\lambda \circ X(t) = \lambda, \quad para\ todo\ t \in \mathbb{R}, \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\beta(X) = D\beta(X)\cdot b(X) \quad em\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N; \\ \beta(X)|_{t=0} = \beta(x) \quad em\ \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.11}$$

entendida no sentido das distribuições, e à propriedade de grupo

$$X(t+s,\cdot\,) = X(t, X(s,\cdot\,)) \quad q.t.p.\ em\ \mathbb{R}^N,\ para\ todo\ t,s \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

Além disso, X satisfaz

$$\beta(X(t,x)) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N; C(\mathbb{R})), \quad para\ toda\ função\ admissível\ \beta \tag{3.13}$$

e

$$\begin{cases} X(t,x) \in C^1(\mathbb{R}); \\ b(X(x,t)) \in C(\mathbb{R}); \\ \dfrac{\partial X(x,t)}{\partial t} = b(X(t,x))\ em\ \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.14}$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$.
Se adicionarmos a hipótese de que $u_0 \in L^0$, então

$$u(t,x) = u_0(X(t,x))$$

é a única solução renormalizada em $C(\mathbb{R}; L^0)$ de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b \cdot \nabla_x u = 0 \quad em\ (0,T) \times \mathbb{R}^N, \quad (T > 0)$$

para a condição inicial u_0 (para todo T).

Finalmente, se b satisfaz (3.4), i.e.,

$$b \in L^p + (1+|x|)L^\infty, \ \ para\ algum\ p \in [1,\infty],$$

então

$$X \in L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^N; C(\mathbb{R})\right).$$

Demonstração do Teorema 3.2:
Passo 1 - Existência:
Iniciamos por regularizar b da forma usual, tomando $b_\varepsilon = b * \rho_\varepsilon$, com ρ_ε sendo molificação padrão. Como b_ε é suave, pelo Teorema de Cauchy-Lipschitz, existe um único fluxo suave definido em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ satisfazendo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X_\varepsilon(t,x)}{\partial t} = b_\varepsilon(X_\varepsilon(t,x)) \ \ \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N; \\ X_\varepsilon|_{t=0} = x \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{3.15}$$

Além disso, valem (3.5) e (3.9), ou seja, a conservação de medida pelo fluxo e a propriedade de grupo, **agora em todo ponto**, para X_ε.
Como X_ε é um fluxo clássico, para cada $u^0 \in L^0$ (ou em $\overline{L}$), $u^0(X_\varepsilon)$ é a única solução (renormalizada) de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon(t,x)}{\partial t} = b_\varepsilon\left(X_\varepsilon(t,x)\right) \ \cdot \nabla u_\varepsilon(t,x) \ \ \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N; \\ u_\varepsilon|_{t=0} = u^0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.16}$$

e $u_\varepsilon(t,x) = u^0\left(X_\varepsilon(t,x)\right)$.

Veja que podemos escrever o sistema (3.15) em coordenadas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X_\varepsilon^i(t,x)}{\partial t} = b_\varepsilon^i(X_\varepsilon(t,x)); \\ X_\varepsilon^i|_{t=0} = x^i, \end{cases} \tag{3.17}$$

com i variando de 1 a N.
Agora, tomando u^0 aproximando a função de projeção de um vetor na sua i-ésima coordenada, (3.16) vai nos dar que

$$\frac{\partial}{\partial t} X_\varepsilon^i = b_\varepsilon\left(X_\varepsilon(t,x)\right) \cdot \nabla X_\varepsilon^i(t,x). \tag{3.18}$$

Comparando (3.17) e (3.18) chegamos a

$$b_\varepsilon^i\left(X_\varepsilon(t,x)\right) = b_\varepsilon\left(X_\varepsilon(t,x)\right) \cdot \nabla X_\varepsilon^i(t,x). \tag{3.19}$$

Denote por β^i a i-ésima coordenada de β. Então para X_ε suave teremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\beta^i\left(X_\varepsilon(t,x)\right) &= \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j}\ \beta^i\left(X_\varepsilon(t,x)\right)\ \partial_t X_\varepsilon^j(t,x) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j}\ \beta^i\left(X_\varepsilon(t,x)\right)\ b_\varepsilon^j\left(X_\varepsilon(t,x)\right) \\ &= \nabla\beta^i\left(X_\varepsilon(t,x)\right)\ \cdot\ b_\varepsilon\left(X_\varepsilon(t,x)\right). \end{aligned}$$

E portanto

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta\left(X_\varepsilon(t,x)\right) = \nabla\beta\left(X_\varepsilon(t,x)\right) \cdot b_\varepsilon\left(X_\varepsilon(t,x)\right). \tag{3.20}$$

Repare que poderíamos ter feito uma derivação similar para $\frac{\partial}{\partial t}\beta\left(u_0\left(X_\varepsilon(t,x)\right)\right)$.

No que segue deveríamos utilizar $u_\varepsilon = u^0\left(X_\varepsilon(t,x)\right)$ ao invés do fluxo suave X_ε mas fizemos essa escolha de maneira a manter a demonstração com uma notação mais simples.

Agora, uma vez que X_ε satisfaz (3.20), temos que X_ε é uma solução renormalizada da mesma equação. Logo, pelo teorema de estabilidade 2.10 (perceba que temos suas hipóteses sendo verificadas), teremos que X é solução renormalizada da equação

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta\left(X\right) = b\left(X\right) \cdot \nabla\beta\left(X\right). \tag{3.21}$$

Além disso, usando a nomenclatura sobre a convergência de soluções renormalizadas (veja página 31), ainda como conclusão do teorema de estabilidade, temos que

$$X_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} X \quad em\ C\left([-T,T];L\right)^N \quad (\forall T\in(0,\infty)). \tag{3.22}$$

Note que o teorema de estabilidade nos dá a convergência em $C\left([-T,T];L^0\right)$. Então, de maneira a deduzir a convergência de X_ε a X temos de fazer uso do teorema coordenada por coordenada.

Note também que a equação (3.21) (que já sabemos ser satisfeita para X) é exatamente a condição (3.8) da definição 3.1. Falta ainda mostrar a condição (3.7), ou seja, que

$$\beta(X)\in L^\infty(\mathbb{R};L^1_{loc}).$$

Repare que para β função admissível, por (3.6), concluímos

$$|\nabla\beta(z)\cdot b(z)|\le\ C\ \frac{|b(z)|}{1+|z|} \tag{3.23}$$

e usando (3.20), (3.3) e (3.9) chegamos a

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\beta(X_\varepsilon)\right| = \left|\nabla\beta\left(X_\varepsilon(t,x)\right)\cdot b_\varepsilon\left(X_\varepsilon(t,x)\right)\right| \le\ C\ \frac{|b(X_\varepsilon)|}{1+|X_\varepsilon|}\in L^1+L^\infty \tag{3.24}$$

Portanto $\frac{\partial}{\partial t}\beta(X_\varepsilon)$ é limitado em $L^\infty(\mathbb{R};L^1+L^\infty)$. Isso nos diz pelo menos duas coisas. A primeira é, ao usar o teorema fundamental do cálculo, que $\beta(X_\varepsilon)$ é limitado em $L^\infty(\mathbb{R};L^1_{loc})$ (usando que $L^1+L^\infty\subset L^1_{loc}$). A segunda é, via o teorema de Banach-Alaoglu, que $\frac{\partial}{\partial t}\beta(X_\varepsilon)$ pertence a um conjunto relativamente compacto de $L^\infty(-T,T;L^1(B_R))$ $(\forall R,\ T<\infty)$.

Portanto $\beta(X_\varepsilon)$ é limitado em $L^\infty(\mathbb{R},L^1_{loc})$ uniformemente em ε e chamemos de M essa limitação (no módulo). Usando então que já temos a convergência de $\beta(X_\varepsilon)$ a $\beta(X)$, o lema de Fatou e denotando por K o conjunto compacto onde $\beta(X_\varepsilon)$ está contido, concluímos que

$$\int_K |\beta(X(t,x))|\,\mathrm{d}x = \int_K \underset{\varepsilon\to 0}{lim\ inf}\ |\beta(X_\varepsilon(t,x))|\,\mathrm{d}x\ \le\ \underset{\varepsilon\to 0}{lim\ inf}\int_K |\beta(X_\varepsilon(t,x))|\,\mathrm{d}x\le M,$$

o que nos diz $\beta(X)\in L^\infty\left(\mathbb{R},L^1_{loc}\right)$, ou seja, a condição necessária que restava mostrar para podermos dizer que X é solução renormalizada da EDO (3.1).

O resultado de estabilidade também nos diz que, tomando $u^0\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ e então aproximando em L^0, vamos ter que para todo $u^0\in L^0$, $u^0(X)$ é a única solução renormalizada da equação do transporte (2.1) com condição inicial u^0. Em particular, para todo $u^0\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^0(X(t,x))\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} u^0(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall t\in\mathbb{R},$$

e portanto vale (3.5) (repare que até então a propriedade só era válida para X_ε). E o resultado de unicidade de soluções renormalizadas vai implicar na validade da propriedade de grupo (3.9) para X.
Usando (3.5), teremos por (3.8) que

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta\left(X\right) \in L^\infty\left(\mathbb{R}; L^1 + L^\infty\right). \tag{3.25}$$

Mas como $L^\infty\left(\mathbb{R}; L^1 + L^\infty\right) \hookrightarrow L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N; L^1_{loc}(\mathbb{R})\right)$, veja [Bre83], deduzimos que

$$\beta\left(X\right) \in L^1_{loc}\left(W^{1,1}_{loc}\left(\mathbb{R}; L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)\right)\right) \hookrightarrow C\left(\left(\mathbb{R}; L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)\right)\right.$$

Escolha agora β_0 da forma

$$\beta_0(z) = \frac{z}{(1+|z|^2)^{1/2}}\ Log(1+|z|^2), \quad z \in \mathbb{R}^N.$$

Repare que β_0 não é uma função admissível, mas se substituíssemos β por β_0 em (3.20), teríamos conclusões idênticas àquelas que tivemos para β. Logo β_0 satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta_0\left(X\right) \in L^\infty\left(\mathbb{R}; L^1 + L^\infty\right)$$

e da mesma maneira que argumentamos acima para $\beta\left(X\right)$, teremos que

$$\beta_0\left(X\right) \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N; C(\mathbb{R})\right).$$

Em particular, para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$ fixo, $\beta_0\left(X(t,x)\right) \in C(\mathbb{R})$ e como a aplicação

$$t \to \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ Log\ (1+t^2)$$

representando o comportamento da função de renormalização β_0 é estritamente crescente no intervalo $[0,\infty)$, deduzimos que $X \in C(\mathbb{R})$.

A tarefa seguinte é provar a segunda parte do teorema, ou seja, aquela referente à continuidade temporal de $b\left(X\right)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Vamos então tomar $\psi \in C^1\left(\mathbb{R}\right)$ tal que

$$\begin{cases} \psi > 0,\ em\ \mathbb{R}; \\ \psi \text{ é par }; \end{cases}$$

e de maneira que tenhamos

$$\left|\psi'\left(|z|\right)\right|\ |b_\varepsilon|\ Log\ \left(1+|b_\varepsilon|^2\right) \le \beta_1(z) \in L^1_+\left(\mathbb{R}^N\right),\ para\ todo\ \varepsilon \in [0,1]; \tag{3.26}$$

e

$$\psi\left(|z|\right)\ \left|Db_\varepsilon\left(z\right)\right| \leq \beta_2\left(z\right) \in L^1_+\left(\mathbb{R}^N\right),\ \textit{para todo}\ \varepsilon \in [0,1]. \tag{3.27}$$

A existência de tal ψ segue do fato que $b \in W^{1,1}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ e portanto $Db \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Usando teorema de imersão de Sobolev teremos que $|b| \in L^{\frac{N}{N-1}}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ e portanto $|b|\ Log\left(1+|b|\right) \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Calculemos a derivada em relação ao tempo do termo $\left[\psi\left(X_\varepsilon\right)\ \beta_0\left(b_\varepsilon\left(X_\varepsilon\right)\right)\right]$ (veja a semelhança com (3.20) e perceba que o termo que nos interessa provar a continuidade aparece composto com a função de renormalização):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left\{\psi\left(X_\varepsilon\right)\ \beta_0\left(b_\varepsilon\left(X_\varepsilon\right)\right)\right\} &= \frac{\partial}{\partial t}X_\varepsilon \cdot \nabla\psi\left(X_\varepsilon\right)\ \beta_0\left(b_\varepsilon\left(X_\varepsilon\right)\right) \\
&\quad + \psi\left(X_\varepsilon\right)\ \nabla\beta_0\left(b_\varepsilon\left(X_\varepsilon\right)\right)\ Db_\varepsilon\left(X_\varepsilon\right)\ \frac{\partial}{\partial t}X_\varepsilon \\
&= b_\varepsilon\left(X_\varepsilon\right) \cdot \nabla\psi\left(X_\varepsilon\right)\ \beta_0\left(b_\varepsilon\left(X_\varepsilon\right)\right) \\
&\quad + \psi\left(X_\varepsilon\right)\ \nabla\beta_0\left(b_\varepsilon\left(X_\varepsilon\right)\right)\ Db_\varepsilon\left(X_\varepsilon\right)\ b_\varepsilon\left(X_\varepsilon\right).
\end{aligned}$$

Usando agora (3.26) e (3.27) teremos:

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left\{\psi\left(X_\varepsilon\right)\ \beta_0\left(b_\varepsilon\left(X_\varepsilon\right)\right)\right\}\right| \leq \beta\left(X_\varepsilon\right) := \beta_1\left(X_\varepsilon\right) + \beta_2\left(X_\varepsilon\right) \in L^1_+\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Como também temos que X_ε preserva medida, obtemos que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left\{\psi\left(X_\varepsilon\right)\ \beta_0\left(b_\varepsilon\left(X_\varepsilon\right)\right)\right\}\ \text{é limitado em}\ L^\infty\left(\mathbb{R}; L^1 + L^\infty\right)\ e \\ \text{pertence a um conjunto relativamente compacto de}\ L^1\left(-T,T; L^1\left(B_R\right)\right)\ \left(\forall R,\ T<\infty\right). \end{cases} \tag{3.28}$$

Teremos então, ao tomar ε indo a zero que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\psi\left(X\right)\ \beta_0\left(b\left(X\right)\right)\right\} \in L^\infty\left(\mathbb{R}; L^1\left(\mathbb{R}^N\right)\right), \tag{3.29}$$

de forma análoga ao que fizemos na primeira parte da demonstração do teorema. Deduzimos portanto que, para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, $\psi\left(X\right)\ \beta_0\left(b\left(X\right)\right)$ é contínua em $\mathbb{R}$ e então, da mesma forma que fizemos anteriormente, agora usando as propriedades de ψ (o fato de ser par e positiva), nos dá que $b\left(X\right)$ é contínua em $\mathbb{R}$. Falta mostrar que a EDO $\dfrac{\partial X}{\partial t} = b\left(X\right)$ vale q.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$. Para isso, podemos tomar a forma integral da EDO renormalizada, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta\left(X\right) = D\beta\left(X\right)\ \cdot\ b\left(X\right),$$

e fazer β se aproximar da função identidade, e então usar q.t.p. em x a continuidade temporal e deduzir a forma integral da EDO.

Para concluir a terceira parte da demonstração , i.e., de que se b satisfaz a condição de crescimento (3.4), então $X \in L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^N; C(\mathbb{R})\right)$, iniciamos por tomar b da seguinte forma:

$$\begin{cases} b = b^1 + b^2; \\ b^1 \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right); \\ \dfrac{b^2}{1+|x|} \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right). \end{cases}$$

Então, para $p < \infty$ (no caso $p = \infty$ não teremos b^1_ε e o resultado segue via o Lema de Gronwall), tomando a molificação padrão, chegamos a

$$\frac{\partial X_\varepsilon}{\partial t} = b^1_\varepsilon\left(X_\varepsilon\right) + b^2_\varepsilon\left(X_\varepsilon\right),$$

que nos leva à seguinte cota

$$\left|\frac{\partial\left|X_\varepsilon\right|}{\partial t}\right| \leq C\left(1 + \left|X_\varepsilon\right|\right) + \left|b^1_\varepsilon\left(X_\varepsilon\right)\right|.$$

Se fizermos a mudança de variáveis $Y_\varepsilon = e^{-Ct}\left|X_\varepsilon\right|$ teremos então

$$\left|\frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial t}\right| \leq C\ e^{-Ct} + e^{-Ct}\ \left|b^1_\varepsilon\left(X_\varepsilon\right)\right|.$$

Tomando ε indo para zero teremos $b^1_\varepsilon \to b^1$ e concluiremos que

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-Ct}\left|X\right|\right)\right| \leq C\ e^{-Ct} + e^{-Ct}\ \left|b^1\left(X\right)\right|.$$

Em particular, $e^{-Ct}\left|X\right| \in L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^N; W^{1,p}_{loc}\left(\mathbb{R}\right)\right) \hookrightarrow L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^N; C\left(\mathbb{R}\right)\right)$ e terminamos a prova. Observe que mostramos também o seguinte:

$$X \in L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^N; W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R})\right). \tag{3.30}$$

Passo 2 - Unicidade:
Para provar a unicidade, devemos provar que se X satisfaz as condições enunciadas sobre a unicidade e se $u_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, então $u_0\left(X(t,x)\right)$ é a solução da equação do transporte

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b\cdot\ \nabla_x u = 0 \tag{3.31}$$

correspondendo à condição inicial u_0. Uma vez que u_0 é arbitrário, isso provará a unicidade.

Vamos então tomar $u(t,x) = u_0\left(X(t,x)\right)$ e gostaríamos de provar que u satisfaz (3.31) no sentido das distribuições . Repare que $u \in C\left(\mathbb{R}; L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ para todo $1 \leq p < \infty$ e também $u \in L^\infty\left(\mathbb{R}; L^p\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Sejam $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, $h > 0$ e $t \in \mathbb{R}$. Vamos escrever a aproximação discreta da derivada $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, ou seja, o primeiro termo da equação do transporte, e mostrar que esse termo converge, quando passamos ao contínuo, ao segundo termo da equação do transporte. Definamos portanto

$$\Delta_h(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{h}\left[u(t+h,x) - u(t,x)\right]\ \psi(x)\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{h}\left[u_0\left(X(t+h,x)\right) - u_0\left(X(t,x)\right)\right]\ \psi(x)\ \mathrm{d}x,$$

pois $u(t,x) = u_0\left(X(t,x)\right)$.
Agora, via a propriedade de grupo (que estabelecemos na parte de existência deste teorema), vamos obter que

$$\Delta_h(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{h}\left[u_0\left(X\left(t, X\left(h,x\right)\right)\right) - u_0\left(X(t,x)\right)\right]\ \psi(x)\ \mathrm{d}x. \tag{3.32}$$

Fazendo a mudança de variável $z = X(h,x)$ (e portanto com Jacobiano unitário, uma vez que temos a preservação da medida pelo fluxo) [note que no caso em que temos apenas $div\ b \in L^\infty$, que abordaremos na seção a seguir, não poderemos utilizar esse argumento], teremos

$$\Delta_h(t) = \frac{1}{h}\left[\int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(X\left(t,z\right)\right)\ \psi\left(X(-h,z)\right)\mathrm{d}z - \int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(X(t,x)\right)\ \psi(x)\ \mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_{\mathbb{R}^N} u(t,z)\ \psi\left(X(-h,z)\right)\mathrm{d}z - \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\ \psi(x)\ \mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_{\mathbb{R}^N} u(t,z)\ \psi\left(X(-h,z)\right)\mathrm{d}z - \int_{\mathbb{R}^N} u(t,z)\ \psi(z)\ \mathrm{d}z\right]$$

$$= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^N} u(t,z)\ \psi\left(X(-h,z)\right) - u(t,z)\ \psi(z)\ \mathrm{d}z$$

e então,

$$\Delta_h(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{h}\ u(t,z)\ \left[\psi\left(X(-h,z)\right) - \psi(z)\right]\mathrm{d}z. \tag{3.33}$$

De maneira a obtermos uma expressão para o último termo do integrando, calculemos a derivada parcial em relação ao tempo de $\frac{\partial}{\partial t}\psi(X)$. Como sabemos que

$$b(X)\cdot\nabla\psi(X)\in\ L^{\infty}\left(\mathbb{R};L^{1}\right)$$

e para as funções admissíveis β temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(\beta(X))=\nabla\psi(\beta(X))\cdot D\beta(X)\cdot b(X),\quad em\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{N},$$

tomando mais uma vez β convergindo para a aplicação identidade chegamos a

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(X)=b(X)\cdot\nabla\psi(X),\quad em\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{N}.$$

Em particular, como $X(0,z)=z$,

$$\psi(X(-h,z))-\psi(z)=\psi(X(-h,z))-\psi(X(0,z))=-\int_{0}^{h}b(X(-\sigma,z))\cdot\nabla\psi(X(-\sigma,z))\,\mathrm{d}\sigma. \tag{3.34}$$

Se usarmos essa expressão em (3.33) e mais uma vez usando a propriedade de grupo e a invariância da medida de $X(\sigma)$, além do Teorema de Fubini, obtemos que

$$\Delta_{h}(t)=-\int_{\mathbb{R}^{N}}\left[b(x)\cdot\nabla\psi(x)\right]\left[\frac{1}{h}\int_{0}^{h}u(t+\sigma,x)\,\mathrm{d}\sigma\right]\mathrm{d}x.$$

Uma vez que $b\cdot\nabla\psi\in L^{1}$, u é limitado em $L^{\infty}\left(\mathbb{R};L^{\infty}(\mathbb{R}^{N})\right)$ e $u\in C\left(\mathbb{R};L^{p}_{loc}\right)$ $(1\ \leq\ p\ <\ \infty)$, deduzimos que

$$\Delta_{h}(t)\overset{h\to 0}{\longrightarrow}-\int_{\mathbb{R}^{N}}b(x)\cdot\nabla\psi(x)\ u(t,x)\,\mathrm{d}x,\quad uniformemente\ para\ t\ limitado.$$

Como, pela construção de Δ_{h}, temos obviamente que

$$\Delta_{h}(t)\overset{h\to 0}{\longrightarrow}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^{N}}u(t,x)\ \psi(x)\,\mathrm{d}x,\quad em\ \mathscr{D}'(\mathbb{R}),$$

obtemos a equação do transporte (3.31) no sentido das distribuições, como queríamos.

□

3.3 Caso Autônomo e com Divergente em L^{∞}

Nesta seção , a única hipótese que mudamos em relação ao campo b é de que agora o seu divergente está apenas em L^{∞}, ou seja, teremos como hipóteses para b que

$$\begin{cases} b\in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^{N}); \\ div\ b\in L^{\infty}\left(\mathbb{R}^{N}\right). \end{cases} \tag{3.35}$$

Claramente não mais teremos a propriedade (3.5) sobre a invariância da medida pelo fluxo $X(t)$, mas ainda temos a cota:

$$e^{-C_0|t|}\,\lambda \leq \lambda \circ X(t) \leq e^{C_0|t|}\,\lambda, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \textit{para algum } C_0 \in [0,\infty), \tag{3.36}$$

ou, dito no sentido das distribuições, para todo $\phi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$, $\phi \geq 0$ e para todo $t \in \mathbb{R}$ temos

$$e^{-C_0|t|} \int_{\mathbb{R}^N} \phi \,\mathrm{d}x \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^N} \phi\left(X(t,x)\right)\mathrm{d}x \;\leq\; e^{C_0|t|} \int_{\mathbb{R}^N} \phi \,\mathrm{d}x.$$

Comentário 3.3. *Pelas considerações feitas no capítulo 1, sabemos que* $C_0 \leq \|div\ b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$.

Teremos então teoremas análogos aos da seção 3.2 sobre existência/unicidade e estabilidade de solução também para o caso $div\ b \in L^\infty$.

Teorema 3.4 (Existência e Unicidade)**.** *Assuma (3.35) e (3.3), ou seja, as condições assumidas sobre o campo nesta seção e*

$$\frac{b}{1+|x|} \in L^1 + L^\infty, \tag{3.37}$$

respectivamente.
Assuma também a cota (3.36) no lugar de (3.5).

Então teremos as mesmas conclusões do teorema 3.2, sobre existência e unicidade de soluções .

Demonstração do Teorema 3.4: O passo referente à existência de solução é o mesmo daquele apresentado no Teorema 3.2, sem mudanças. O passo referente à unicidade sofrerá mudanças e as apresentaremos a seguir.
Usando a cota para a expansão da medida dada pelo fluxo $X(t)$, (3.36), ao invés de (3.5), obteremos para todo $t \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $\psi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$, usando (3.32) e (3.34), que

$$\left|\Delta_h(t) - \left\{-\int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\cdot \left[\frac{1}{h}\int_0^h b\left(X(-\sigma,x)\right)\cdot \nabla\psi\left(X(-\sigma,x)\right)\mathrm{d}\sigma\right]\mathrm{d}x\right\}\right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{h} \left[u_0 \left(X \left(t, X \left(h, x \right) \right) \right) - u_0 \left(X(t,x) \right) \right] \ \psi(x) \ \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{h} \ u(t,x) \ \left[\psi \left(X(-h,x) \right) - \psi(x) \right] \mathrm{d}x \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{h} \left[u \left(t, X \left(h, x \right) \right) - u(t,x) \right] \ \psi(x) \ \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{h} \ u(t,x) \ \left[\psi \left(X(-h,x) \right) - \psi(x) \right] \mathrm{d}x \right|$$

$$= \frac{1}{h} \ \left| \int_{\mathbb{R}^N} u \left(t, X \left(h, x \right) \right) \ \psi(x) \ \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x) \ \psi \left(X(-h,x) \right) \mathrm{d}x \ \right|$$

$$\leq \frac{C}{h} \left(e^{C_0 h} - 1 \right) \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

e então, tomando h indo a zero, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - div \ (bu) \ \in L^\infty \left(\mathbb{R}; L^\infty \left(\mathbb{R}^N \right) \right).$$

Agora, observe que

$$\frac{1}{h} \int_0^h b \left(X(-\sigma, z) \right) \cdot \nabla \psi \left(X(-\sigma, z) \right) \mathrm{d}\sigma$$

é limitado em L^1, uniformemente integrável e converge a $b(z) \cdot \nabla \psi(z)$ em L^1_{loc}.

Definamos

$$F := \frac{\partial u}{\partial t} - b \cdot \nabla u.$$

Já sabemos que $F \in L^\infty \left(\mathbb{R}; L^\infty \left(\mathbb{R}^N \right) \right)$ e nossa intenção é mostrar que $F = 0$. Para isso, vamos voltar ao resultado de regularização para a equação do transporte, Teorema 2.2, página 20, e deduzir que

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - b \cdot \nabla u_\varepsilon \ = \ \frac{\partial u}{\partial t} - b \cdot \nabla u + r_\varepsilon \ = \ F + r_\varepsilon \ \ em \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

com $r_\varepsilon \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \ em \ L^1_{loc} \left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \right)$.

E da mesma forma que usamos a função ϕ_R na demonstração do Teorema 2.5, isso nos dará que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u_\varepsilon \phi_R \right) - b \cdot \nabla \left(u_\varepsilon \phi_R \right) = \phi_R \left(F + r_\varepsilon \right) - u_\varepsilon \ b \cdot \nabla \phi_R \ \ em \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

Usando a regularidade de u_ε e a forma renormalizada da EDO, (3.11), podemos integrar a equação *ao longo das características de* X e obter

$$\left(\phi_R \ u_\varepsilon \right) \left(t, X(-t,x) \right) \ - \ \left(\phi_R \ u_\varepsilon \right) (x, 0) = \int_0^t \left[\phi_R \left(F + r_\varepsilon \right) - u_\varepsilon b \cdot \nabla \phi_R \right] \left(\sigma, X(-\sigma, x) \right) \mathrm{d}\sigma,$$

q.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.
Tomando então ε indo a zero e usando (3.36) para limitar os termos do integrando e podermos usar o teorema da convergência dominada de Lebesgue, vamos obter que

$$(\phi_R\; u)\,(t, X(-t,x)) \;-\; (\phi_R\; u)\,(x,0) = \int_0^t \left[\phi_R\; F - u\; b \cdot \nabla\phi_R\right](\sigma, X(-\sigma,x))\;\mathrm{d}\sigma.$$

E então tomando R indo a infinito, usando (3.36) mais uma vez (novamente para limitar os termos do integrando) e (3.3), chegamos a

$$u\,(t, X(-t,x)) \;-\; u(x,0) = \int_0^t F\,(\sigma, X(-\sigma,x))\;\mathrm{d}\sigma, \quad q.t.p.\; x \in \mathbb{R}^N,\; \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Como tudo isso se passa no sentido das distribuições e o lado esquerdo da equação acima se anula, teremos que o integrando se anula e que portanto

$$F\,(t, X(-t,x)) = 0, \quad q.t.p.\; x \in \mathbb{R}^N,\; \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Então usando (3.36) de novo, obtemos que F se anula q.t.p. em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, uma vez que temos o controle (3.36) (por cima e em especial por baixo) da expansão da medida e então concluímos a prova.

□

Usando agora o teorema 2.10 sobre estabilidade de soluções podemos deduzir o seguinte corolário:

Corolário 3.5. *Seja* $b_n \in L^1_{loc}$ *tal que*

$$\begin{cases} div\; b_n \in L^1_{loc}; \\ b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b; \\ div\; b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} div\; b, \end{cases}$$

com a convergência em L^1_{loc} *e também a cota (3.35) e a condição de crescimento (3.3). Assuma também que existe* $X_n \in C\,(\mathbb{R}; L)^N$ *tal que, para todo* $u_0 \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$, $u_0\,(X_n(t,x))$ *é uma solução renormalizada da equação*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial t} - b_n \cdot \nabla u_n = 0, \quad em\; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N; \\ u_n|_{t=0} = u_0, \quad em\; \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{3.38}$$

Então, para todo $T \in (0, \infty)$,

$$X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X \in C\left(\mathbb{R}, L\right)^N$$

com a convergência se dando em $C\left([-T,T];L\right)^N$, *e* X *satisfaz a cota para a medida (3.36), a EDO Renormalizada (3.8) e a propriedade de grupo (3.9).*

Além disso, X_n *converge a* X *uniformemente para* t *limitado, em medida para* $x \in \mathbb{R}^N$ *limitado.*

Comentário 3.6. *De maneira análoga à mudança de hipóteses do Teorema 2.10 para o Teorema 2.12, podemos reescrever o corolário acima assumindo que div* b_n *é limitado em* L^∞ *ao invés de assumir sua convergência em* L^1_{loc}.

3.4 Caso Dependente do Tempo

Consideraremos agora campos vetoriais dependentes do tempo, $b = b(t,x)$, que satisfazem (2.30) e (2.31) para todo $T < \infty$. Queremos resolver a seguinte EDO

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial s} = b\left(s, X\right) \quad para\ s \geq t; \\ X|_{s=t} = x. \end{cases} \tag{3.39}$$

E portanto teremos $X = X(s,t,x)$. A aplicação X pertencerá a $C\left(D;L\right)^N$, com $D = [0,\infty) \times [0,\infty)$.
E a cota para a expansão da medida pelo fluxo, por causa de (2.30), será

$$exp\ \left(-|A(t)-A(s)|\right)\ \lambda\ \leq\ \lambda \circ X\ \leq\ exp\ \left(-|A(t)-A(s)|\right)\ \lambda,\ \ para\, todo\, t,s \geq 0 \tag{3.40}$$

com

$$\begin{cases} A(t) \in W^{1,1}(0,R) \ \ \forall R < \infty; \\ A(0) = 0; \\ A'(t) \geq 0 \ \ para\ t \geq 0. \end{cases}$$

A solução que obteremos vai na verdade satisfazer (3.40) com

$$A(t) = \int_0^t \|div_x\ b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\ \mathrm{d}s. \tag{3.41}$$

A propriedade de grupo, agora no caso não-autônomo, fica

$$X(t_3,t_1,x) = X\left(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x)\right),\quad q.t.p.\ x \in \mathbb{R}^N,\ \forall\ t_1,t_2,t_3 > 0. \tag{3.42}$$

Usando a cota (3.40) e (2.31), obteremos que

$$\frac{b\left(s,X\right)}{1+|X|}\in L^{1}\left(0,T;L^{1}+L^{\infty}\right),\ \forall\, T<\infty$$

e então definiremos soluções para a EDO (3.39) de maneira similar às seções anteriores, i.e., precisaremos que

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial s}\beta\left(X\right)=D\beta\left(X\right)\cdot b\left(s,X\right) & em\ (0,\infty)\times\mathbb{R}^{N};\\ \beta\left(X\right)|_{s=t}=\beta(x) & em\ \mathbb{R}^{N}\end{cases}\tag{3.43}$$

valha no sentido das distribuições, para todas funções admissíveis e para todo $t>0$.

Podemos agora enunciar um resultado sobre existência e unicidade de soluções para (3.39). Um resultado sobre estabilidade seguiria de forma análoga aos resultados já apresentados nas duas últimas seções.

Teorema 3.7. *Assuma que b satisfaz (2.30) e (2.31). Então existe um único $X\in C\left(D;L\right)^{N}$ satisfazendo a cota para expansão da medida (3.40), a propriedade de grupo (3.42) e a EDO renormalizada (3.43).*
Além disso, se $u_0\in L^0$ (ou $\bar{L}$), então para todo $s\geq 0$

$$u(s,t,x)=u_0\left(X(s,t,x)\right)$$

é a única solução renormalizada em $C\left([0,\infty);L^0\right)$ da equação do transporte

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+b\cdot\nabla_x u=0 & em\ (0,\infty)\times\mathbb{R}^{N};\\ u|_{t=s}=u_0 & em\ \mathbb{R}^{N}.\end{cases}\tag{3.44}$$

A demonstração do teorema segue a forma feita nas duas últimas seções, mas simplesmente levando em consideração a dependência temporal ao usar o resultado de estabilidade da seção 2.4.

Como últimas considerações deste capítulo vamos comentar sobre a existência de contra-exemplos que mostram a importância das hipóteses de regularidade sobre o campo vetorial e seu divergente.

O primeiro deles mostra a importância da hipótese do divergente do campo vetorial ser limitado em L^{∞}. Apresentado em [DPL89], o contra-exemplo mostra que podemos criar campos vetoriais autonomos em dimensão 2, pertencendo a $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^2) \cap BUC(\mathbb{R}^2)$ para $p \leq \infty$ arbitrário, que possuem infinitas soluções para a EDO

$$\begin{cases} \dot{X} = b(X), \\ X|_{t=0} = x. \end{cases}$$

As soluções X criadas satisfazem a propriedade de grupo e são contínuas. A construção desse contra-exemplo é baseada no artigo de A. Beck, [Bec73].

O segundo contra-exemplo mostra a importância da regularidade sobre o campo vetorial. Também apresentado em [DPL89], o contra-exemplo nos mostra que podemos criar um campo vetorial autônomo definido em $\mathbb{R}^2$ com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} &div\ b = 0 \ \ em\ \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2), \\ &b \in W^{s,1}_{loc}(\mathbb{R}^2) \ \text{ para todo } s \in [0,1), \\ &b \in L^p(\mathbb{R}^2) + L^\infty(\mathbb{R}^2) \ \text{ para todo } p \in [1,2), \end{aligned}$$

de maneira que existam dois fluxos que preservam medida resolvendo a EDO associada e verifiquem a propriedade de grupo.

Capítulo 4

Equação do Transporte com Campo $b \in W^{1,1}$ Parcial

4.1 Introdução

Nesse capítulo estudaremos a seguinte equação do transporte:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + b(x)\cdot \nabla u(t,x) = 0 \text{ em } (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \tag{4.1}$$

com as seguintes hipóteses:

$$x = (x_1, x_2) \text{ com } x_1 \in \mathbb{R}^{N_1},\ x_2 \in \mathbb{R}^{N_2} \text{ e } N = N_1 + N_2.$$

O campo vetorial b será escrito como

$$b = (b_1, b_2), \quad \text{com } b_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N_i}$$

e os operadores diferenciais da forma

$$\nabla = (\nabla_{x_1}, \nabla_{x_2}),\ div_x = div_{x_1} + div_{x_2}.$$

Essa maneira de escrever a equação do transporte é uma extensão da versão de DiPerna-Lions, apresentada no capítulo 2, e é motivada pelo estudo que faremos no capítulo 5, a saber, o estudo da dependência em relação às condições iniciais para soluções de EDOs com regularidade Sobolev. A referência principal para este capítulo, bem como para o que desenvolveremos ao longo do próximo capítulo, é o artigo de Claude Le Bris e Pierre-Louis Lions, [LBL04].

Assumiremos as seguintes hipóteses sobre o campo vetorial:

$$(H1) \quad b_1 = b_1(x_1) \in W^{1,1}_{x_1,loc}(\mathbb{R}^{N_1}) \text{ - Não depende de } x_2,$$

$$(H2) \quad \frac{b_1}{1+|x_1|} \in L^1_{x_1}(\mathbb{R}^{N_1}) + L^\infty_{x_1}(\mathbb{R}^{N_1}),$$

$$(H3) \quad div_{x_1}\ b_1 = 0,$$

$$(H4) \quad b_2 = b_2(x_1,x_2) \in L^1_{x_1,loc}\left(\mathbb{R}^{N_1}, W^{1,1}_{x_2,loc}(\mathbb{R}^{N_2})\right),$$

$$(H5) \quad \frac{b_2}{1+|x_2|} \in L^1_{x_1,loc}\left(\mathbb{R}^{N_1}, L^1_{x_2}(\mathbb{R}^{N_2}) + L^\infty_{x_2}(\mathbb{R}^{N_2})\right),$$

$$(H6) \quad div_{x_2}\ b_2 = 0.$$

Podemos então reescrever a equação do transporte (4.1) da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b_1(x_1)\cdot \nabla_{x_1} u + b_2(x_1,x_2)\cdot \nabla_{x_2} u = 0 \text{ em } (0,\infty)\times\mathbb{R}^{N_1}\times\mathbb{R}^{N_2}. \tag{4.2}$$

Comentário 4.1. *Como já vimos no capítulo 2, podemos tomar o caso em que o campo vetorial b depende do tempo, $b = b(t,x)$, com uma dependência L^1 em relação ao tempo. Também podemos considerar o caso em que não temos divergente do campo igual a zero, mas sim um controle na norma L^∞. Outra alternativa é tomar esses dois casos e teríamos então as seguintes condições:*

$$(H1') \quad b_1 = b_1(t,x_1) \in L^1\left([0,T],\ W^{1,1}_{x_1,loc}(\mathbb{R}^{N_1})\right),$$

$$(H2') \quad \frac{b_1}{1+|x_1|} \in L^1\left([0,T],\ L^1_{x_1}(\mathbb{R}^{N_1}) + L^\infty_{x_1}(\mathbb{R}^{N_1})\right),$$

$$(H3') \quad div_{x_1}\ b_1 \in L^1\left([0,T],\ L^\infty_{x_1}(\mathbb{R}^{N_1})\right),$$

$$(H4') \quad b_2 = b_2(x_1,x_2) \in L^1\left([0,T],\ L^1_{x_1,loc}\left(\mathbb{R}^{N_1}, W^{1,1}_{x_2,loc}(\mathbb{R}^{N_2})\right)\right),$$

$$(H5') \quad \frac{b_2}{1+|x_2|} \in L^1\left([0,T],\ L^1_{x_1,loc}\left(\mathbb{R}^{N_1}, L^1_{x_2}(\mathbb{R}^{N_2}) + L^\infty_{x_2}(\mathbb{R}^{N_2})\right)\right),$$

$$(H6') \quad div_{x_2}\ b_2 \in L^1\left([0,T],\ L^\infty_{x}(\mathbb{R}^{N})\right).$$

Por simplicidade de apresentação e pela facilidade de generalização, restringimo-nos ao caso autônomo e com divergente igual a zero para cada uma das componentes do campo b. Repare que é preciso controlar o divergente de ambas as componentes e não somente sua soma, $div_x b$.

Com essas hipóteses já somos capazes de responder a questão sobre existência e unicidade de solução para a equação (4.2).

4.2 Resultado Principal: Existência e Unicidade de Solução

Teorema 4.2. *Assumindo* $(H1)$ *até* $(H6)$ *e que*

$$u_0 \in \left(L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)\right) \cap L^\infty_{x_1}\left(\mathbb{R}^{N_1}, L^1_{x_2}(\mathbb{R}^{N_2})\right), \tag{4.3}$$

então existe uma e somente uma solução

$$u(t,x) \in L^\infty\left([0,T], L^1_x \cap L^\infty_x(\mathbb{R}^N)\right) \cap L^\infty\left([0,T], L^\infty_{x_1}\left(\mathbb{R}^{N_1}, L^1_{x_2}(\mathbb{R}^{N_2})\right)\right), \tag{4.4}$$

para a equação do transporte (4.2) com condição inicial $u(t=0,\cdot\,) = u_0$.

A demonstração do teorema passa pela utilização de um lema de regularização (que por sua vez utiliza o fato da existência dos comutadores já estudados no artigo de DiPerna e Lions), e por um lema de unicidade propriamente dito. Depois disso, mostra-se a existência da solução.

Lema 4.3 (Regularização)**.** *Assuma* $(H1)$ *até* $(H4)$ *e sejam* $f \in L^\infty\left([0,T], L^1_x \cap L^\infty_x(\mathbb{R}^N)\right)$ *solução da equação do transporte (4.2) e* ρ_{α_1}, ρ_{α_2} *dois núcleos regularizantes, respectivamente nas variáveis* x_1 *e* x_2*, com*

$$\rho_{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_i^{N_i}}\rho_i\left(\frac{\cdot}{\alpha_i}\right), \quad \rho_i \in \mathscr{D}_+(\mathbb{R}^{N_i}), \quad \int_{\mathbb{R}^{N_i}} \rho_i = 1, \text{ para } i = 1,2.$$

Então $f_{\alpha_1,\alpha_2} = (f * \rho_{\alpha_1}) * \rho_{\alpha_2}$ *é uma solução suave (em* x*) de*

$$\frac{\partial f_{\alpha_1,\alpha_2}}{\partial t} + b\cdot\nabla f_{\alpha_1,\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2}, \tag{4.5}$$

com

$$\lim_{\alpha_2\to 0}\lim_{\alpha_1\to 0}\varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2} = 0 \quad \text{em } L^\infty\left([0,T], L^1_{x,loc} \cap L^\infty_{x,loc}(\mathbb{R}^N)\right). \tag{4.6}$$

Lema 4.4 (Unicidade)**.** *Assuma agora* $(H1)$ *até* $(H6)$ *e seja*

$$f(t,x) \in L^\infty\left([0,T], L^1_x \cap L^\infty_x(\mathbb{R}^N)\right) \cap L^\infty\left([0,T], L^\infty_{x_1}\left(\mathbb{R}^{N_1}, L^1_{x_2}(\mathbb{R}^{N_2})\right)\right)$$

uma solução não-negativa da equação do transporte (4.2) com valor inicial $f_0 = 0$. *Então*

$$f = 0, \quad \text{para todos os tempos.}$$

Demonstração do Lema 4.3: Assumindo as hipóteses $(H1)$ até $(H4)$, no caso autônomo, primeiro regularizamos na variável x_2 através da convolução da equação (4.2) com ρ_{α_2},

$$\frac{\partial(f * \rho_{\alpha_2})}{\partial t} + b_1 \cdot \nabla_{x_1}(f * \rho_{\alpha_2}) + (b_2 \cdot \nabla_{x_2} f) * \rho_{\alpha_2} = 0$$

utilizando que b_1 não depende de x_2. Denotando agora por

$$[b_2 \cdot \nabla_{x_2}, \rho_{\alpha_2}](f) := b_2 \cdot \nabla_{x_2}(f * \rho_{\alpha_2}) - \rho_{\alpha_2} * (b_2 \cdot \nabla_{x_2} f), \tag{4.7}$$

obtemos a equação

$$\frac{\partial(f * \rho_{\alpha_2})}{\partial t} + b_1 \cdot \nabla_{x_1}(f * \rho_{\alpha_2}) + b_2 \cdot \nabla_{x_2}(f * \rho_{\alpha_2}) = [b_2 \cdot \nabla_{x_2}, \rho_{\alpha_2}](f).$$

Agora, pelo lema 2.3, que trata da convergência de comutadores, temos que

$$\varepsilon_{\alpha_2} := [b_2 \cdot \nabla_{x_2}, \rho_{\alpha_2}](f) \overset{\alpha_2 \to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ em } L^1_x. \tag{4.8}$$

De fato, é claro para b_2 e f suaves, mas, como no artigo de DiPerna e Lions, o caso geral segue por densidade através da estimativa

$$||[b_2 \cdot \nabla_{x_2}, \rho_{\alpha_2}](f)||_{L^1_{x_2}} \leq C \; ||b_2||_{W^{1,1}_{x_2}} ||f||^{\infty}_{L_{x_2}}, \tag{4.9}$$

que integrando em relação a x_1 nos fornece

$$||[b_2 \cdot \nabla_{x_2}, \rho_{\alpha_2}](f)||_{L^1_x} \leq C \; ||b_2||_{L^1_{x_1}(W^{1,1}_{x_2})} ||f||^{\infty}_{L_{x_1,x_2}}, \tag{4.10}$$

onde se mostra a razão para tomarmos $(H4)$ como hipótese.
Obtivemos então para $f_{\alpha_2} = f * \rho_{\alpha_2}$ que

$$\frac{\partial f_{\alpha_2}}{\partial t} + b_1 \cdot \nabla_{x_1} f_{\alpha_2} + b_2 \cdot \nabla_{x_2} f_{\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_2}, \tag{4.11}$$

com

$$\varepsilon_{\alpha_2} \overset{\alpha_2 \to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ em } L^1_x.$$

A seguir, faz-se a regularização, agora na variável x_1, através da convolução de (4.11) com ρ_{α_1}

$$\frac{\partial(f_{\alpha_2} * \rho_{\alpha_1})}{\partial t} \; + \; b_1 \cdot \nabla_{x_1}(f_{\alpha_2} * \rho_{\alpha_1}) \; + \; b_2 \cdot \nabla_{x_2}(f_{\alpha_2} * \rho_{\alpha_1})$$

$$= [b_1 \cdot \nabla_{x_1}, \rho_{\alpha_1}] \, (f_{\alpha_2}) \; + \; [b_2 \cdot \nabla_{x_2}, \rho_{\alpha_1}](f_{\alpha_2}) \; + \; \varepsilon_{\alpha_2} * \rho_{\alpha_1}$$

o que nos dá exatamente a equação (4.5) se tomarmos

$$\varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2} = [b_1 \cdot \nabla_{x_1}, \rho_{\alpha_1}](f_{\alpha_2}) + [b_2 \cdot \nabla_{x_2}, \rho_{\alpha_1}](f_{\alpha_2}) + ([b_2 \cdot \nabla_{x_2}, \rho_{\alpha_2}](f)) * \rho_{\alpha_1}.$$

Estudemos então cada uma das parcelas de $\varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2}$ de maneira a demonstrar a convergência em (4.6).
A primeira parcela é o termo de erro padrão que aparece no comutador para a regularização na variavel x_1 da função $f_{\alpha_2} \in L^\infty_{x_1,x_2}$. Temos portanto

$$|| \left[b_1 \cdot \nabla_{x_1}, \rho_{\alpha_1}\right] (f_{\alpha_2}) ||_{L^1_{x_1}} \leq C ||b_1||_{W^{1,1}_{x_1}} \; ||f_{\alpha_2}||_{L^\infty_{x_1}} \quad q.t.p. \; x_2,$$

e como $b_1 = b_1(x_1)$

$$|| \left[b_1 \cdot \nabla_{x_1}, \rho_{\alpha_1}\right] (f_{\alpha_2}) ||_{L^\infty_{x_2}(L^1_{x_1})} \leq C ||b_1||_{W^{1,1}_{x_1}} \; ||f_{\alpha_2}||_{L^\infty_{x_1,x_2}},$$

que na verdade pode ser substituído por

$$|| \left[b_1 \cdot \nabla_{x_1}, \rho_{\alpha_1}\right] (f_{\alpha_2}) ||_{L^\infty_{x_2}(L^1_{x_1})} \leq C ||b_1||_{W^{1,1}_{x_1}} \; ||f||_{L^\infty_{x_1,x_2}},$$

já que assumimos $f \in L^\infty_{x_1,x_2}$.
Então aproximando b_1 e f_{α_2} por densidade, obtemos que

$$\lim_{\alpha_1 \to 0} [b_1 \cdot \nabla_{x_1}, \rho_{\alpha_1}](f_{\alpha_2}) = 0 \;\; \text{em } L^1_{x_1,x_2}, \text{ com } \alpha_2 \text{ fixo.} \tag{4.12}$$

Estudemos agora o segundo termo:

$$\begin{aligned} [b_2 \cdot \nabla_{x_2}, \rho_{\alpha_1}](f_{\alpha_2}) &= b_2 \cdot \nabla_{x_2} (\rho_{\alpha_1} * f_{\alpha_2}) - \rho_{\alpha_1} * (b_2 \cdot \nabla_{x_2} f_{\alpha_2}) \\ &= b_2 \cdot ((\nabla_{x_2} f_{\alpha_2}) * \rho_{\alpha_1}) - \rho_{\alpha_1} * (b_2 \cdot \nabla_{x_2} f_{\alpha_2}) \\ &= [b_2, \rho_{\alpha_1}](\nabla_{x_2} f_{\alpha_2}) \end{aligned} \tag{4.13}$$

Controlamos então esse segundo termo da seguinte forma:

$$||[b_2, \rho_{\alpha_1}] (\nabla_{x_2} f_{\alpha_2}) ||_{L^1_{x_1,x_2}} \leq C \; ||b_2||_{L^1_{x_1,x_2}} ||\nabla_{x_2} f_{\alpha_2}||_{L^\infty_{x_1,x_2}}.$$

Veja que não precisamos da norma de qualquer derivada de b_2 com respeito a x_1 e que a última norma depende de α_2. Argumentando novamente por densidade, teremos

$$\lim_{\alpha_1 \to 0} [b_2 \cdot \nabla_{x_2}, \rho_{\alpha_1}](f_{\alpha_2}) = 0 \;\; \text{em } L^1_{x_1,x_2}, \;\; \text{com } \alpha_2 \text{ fixo.} \tag{4.14}$$

Falta então estudar o terceiro termo. Tomando α_2 fixo temos que

$$\lim_{\alpha_1 \to 0} \varepsilon_{\alpha_2} * \rho_{\alpha_1} = \varepsilon_{\alpha_2} = [b_2 \cdot \nabla_{x_2}, \rho_{\alpha_2}](f) \;\; \text{em } L^1 \tag{4.15}$$

Juntando agora os resultados de (4.12) e (4.14), com α_2 fixo, temos que

$$\lim_{\alpha_1 \to 0} \varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_2} \;\; \text{em } L^1$$

já que os dois primeiros termos de $\varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2}$ vão a zero em $L^1_{x_1,x_2}$ quando $\alpha_1 \to 0$. Agora podemos tomar o limite quando α_2 vai a zero e usando (4.8) obtemos a convergencia desejada para o lema.

Demonstração do Lema 4.4: Seja f uma solução não-negativa como enunciada no lema. Vamos definir duas funções cut-off

$$\varphi_m(x_1) = \varphi\left(\frac{x_1}{m}\right) \text{ e } \psi_n(x_2) = \psi\left(\frac{x_2}{n}\right), \quad \text{com } m, n \in \mathbb{N}$$

com φ com as seguintes características

$$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{N_1}),\ 0 \leq \varphi \leq 1,\ \varphi \equiv 1 \text{ para } |x_1| \leq 1 \text{ e } \varphi \equiv 0 \text{ para } |x_1| \geq 2.$$

A função ψ é análoga à função φ mas na variável x_2.
O roteiro para provar o lema é o seguinte: Primeiro multiplicamos a equação (4.2) por ψ_n e integramos na variável x_2, a seguir multiplicamos por φ_m e integramos em x_1. Agora surge então a necessidade de usar as hipóteses $(H2)$ e $(H5)$ cujos termos aparecem automaticamente nos cálculos e com o auxílio do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue mostra-se a convergência de algumas parcelas a zero. Vamos então obter que

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^N} f = 0,$$

quando tomarmos m e n indo para infinito.
Com isso, já que temos por hipótese do lema $f_0 = 0$ e $f \geq 0$, concluimos que $f = 0$ para todo tempo, concluindo a demostração .
Passemos então ao truncamento. Tomando a equação do transporte

$$\frac{\partial f}{\partial t} + b_1 \cdot \nabla_{x_1} f + b_2 \cdot \nabla_{x_2} f = 0$$

e multiplicando por ψ_n e integrando em x_2 obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\psi_n \,\mathrm{d}x_2 + b_1 \cdot \nabla_{x_1}\int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\psi_n \,\mathrm{d}x_2 + \int_{\mathbb{R}^{N_2}} (b_2 \cdot \nabla_{x_2} f)\psi_n \,\mathrm{d}x_2 = 0. \tag{4.16}$$

Estudando o último termo do lado esquerdo da equação acima temos:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{N_2}} (b_2 \cdot \nabla_{x_2} f)\psi_n \,\mathrm{d}x_2 &= -\int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\ (div_{x_2}\ b_2)\ \psi_n(x_2)\,\mathrm{d}x_2 - \int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\ b_2 \cdot \nabla_{x_2}\psi_n(x_2)\,\mathrm{d}x_2 \\ &= 0 - \int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\ \frac{1+|x_2|}{n}\ \frac{b_2}{1+|x_2|} \cdot (\nabla_{x_2}\psi)\left(\frac{x_2}{n}\right)\,\mathrm{d}x_2,\end{aligned}$$

com o primeiro termo igual a zero pois $div_{x_2} b_2 = 0$, hipótese $(H6)$; e no segundo termo usamos a regra da cadeia $\nabla_{x_2}\psi_n(x_2) = \nabla_{x_2}\left(\psi\left(\frac{x_2}{n}\right)\right) = (\nabla_{x_2}\psi)\left(\frac{x_2}{n}\right)\ \frac{1}{n}$.

Multiplicando então (4.16) por φ_m e integrando em x_1 teremos

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^N} f\ \psi_n\ \varphi_m \,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 + \int_{\mathbb{R}^{N_1}} \varphi_m\ b_1\cdot \nabla_{x_1}\int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\ \psi_n\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1$$
$$-\int_{\mathbb{R}^{N_1}}\varphi_m\int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\ \frac{1+|x_2|}{n}\ \frac{b_2}{1+|x_2|}\cdot(\nabla_{x_2}\psi)\left(\frac{x_2}{n}\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = 0.$$

O segundo termo do lado esquerdo da igualdade acima fica então, após integração por partes

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{N_1}}\varphi_m\ b_1\cdot\nabla_{x_1}\left(\int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\ \psi_n\,\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1 \quad &= \quad -\int_{\mathbb{R}^{N_1}}(b_1\cdot\nabla_{x_1}\varphi_m)\int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\ \psi_n\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1\\ &\quad -\int_{\mathbb{R}^{N_1}}(div_{x_1}b_1)\ \varphi_m\int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\ \psi_n\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1\end{aligned}$$

e nos livramos do segundo termo do lado direito da última igualdade uma vez que $div_{x_1}b_1 = 0$, hipótese $(H3)$.

Voltando ao nosso cálculo teremos então

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^N} f\ \psi_n\ \varphi_m\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 - \int_{\mathbb{R}^{N_1}}(b_1\cdot\nabla_{x_1}\varphi_m)\int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\ \psi_n\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1$$
$$-\int_{\mathbb{R}^{N_1}}\varphi_m\int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\ \frac{1+|x_2|}{n}\ \frac{b_2}{1+|x_2|}\cdot(\nabla_{x_2}\psi)\left(\frac{x_2}{n}\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = 0. \quad (4.17)$$

Vamos agora mostrar que os dois termos mais à direita do lado esquerdo da igualdade acima convergem a zero quando tomamos m e n indo a infinito. De fato, pela hipótese $(H2)$ temos que

$$\frac{|b_1|}{1+|x_1|} = c_1 + c_\infty, \quad \text{com } c_1 \in L^1_{x_1} \text{ e } c_\infty \in L^\infty_{x_1}$$

e então o segundo termo de (4.17) fica

$$\int_{\mathbb{R}^{N_1}}|b_1\cdot\nabla_{x_1}\varphi_m|\int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\ \psi_n\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 \le$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^{N_1}}\frac{1+|x_1|}{m}\ \frac{|b_1|}{1+|x_1|}\ \left|(\nabla_{x_1}\varphi)\left(\frac{x_1}{m}\right)\right|\int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\ \psi_n\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^{N_1}}\left|\frac{1+|x_1|}{m}\right|\ |c_1|\ \left|\nabla_{x_1}\varphi\left(\frac{x_1}{m}\right)\right|\ \left|\int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\ \psi_n\,\mathrm{d}x_2\right|\mathrm{d}x_1 +$$
$$+\int_{\mathbb{R}^{N_1}}\left|\frac{1+|x_1|}{m}\right|\ |c_\infty|\ \left|\nabla_{x_1}\varphi\left(\frac{x_1}{m}\right)\right|\ \left|\int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\ \psi_n\,\mathrm{d}x_2\right|\mathrm{d}x_1$$
$$\le C\ ||\nabla\varphi||_{L^\infty_{x_1}}\int_{m\le|x_1|\le 2m}|c_1(x_1)|\,\mathrm{d}x_1\ \left|\left|\int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\,\mathrm{d}x_2\right|\right|_{L^\infty_{x_1}}$$

$$+ \, C \, \, ||\nabla\varphi||_{L^\infty_{x_1}} \, \, ||c_\infty||_{L^\infty_{x_1}} \int_{m\leq|x_1|\leq 2m} \left| \int_{\mathbb{R}^{N_2}} f \, \psi_n \, \mathrm{d}x_2 \right| \mathrm{d}x_1$$

usando que $0 \leq \psi \leq 1$, o fato de que $\nabla\varphi \in L^\infty$ e seu suporte está em $\{1 \leq |x_1| \leq 2\}$.

Repare que para o último termo temos:

$$\begin{aligned}
\int_{m\leq|x_1|\leq 2m} \left| \int_{\mathbb{R}^{N_2}} f \, \psi_n \, \mathrm{d}x_2 \right| \mathrm{d}x_1 \quad &\leq \int_{m\leq|x_1|\leq 2m} \int_{\mathbb{R}^{N_2}} |f \, \psi_n| \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \leq \\
\leq \int_{m\leq|x_1|\leq 2m} \int_{\mathbb{R}^{N_2}} |f| \, |\psi_n| \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \quad &\leq \int_{m\leq|x_1|\leq 2m} \int_{\mathbb{R}^{N_2}} f \, \psi_n \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 = \\
= \int_{m\leq|x_1|\leq 2m \, \times \, \mathbb{R}^{N_2}} f \, \psi_n \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \quad &\leq \int_{m\leq|x_1|\leq 2m \, \times \, \mathbb{R}^{N_2}} f \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1
\end{aligned}$$

usando que f e ψ_n são ambas positivas, o Teorema de Fubini e que ψ_n é menor ou igual a 1.

Chegamos então à desigualdade

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{N_1}} |b_1 \cdot \nabla_{x_1}\varphi_m| \int_{\mathbb{R}^{N_2}} f \, \psi_n \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \leq \; & C \, ||\nabla\varphi||_{L^\infty_{x_1}} \int_{m\leq|x_1|\leq 2m} |c_1(x_1)| \, \mathrm{d}x_1 \, \left|\left| \int_{\mathbb{R}^{N_2}} f \, \mathrm{d}x_2 \right|\right|_{L^\infty_{x_1}} + \\
& + C \, \, ||\nabla\varphi||_{L^\infty_{x_1}} \, \, ||c_\infty||_{L^\infty_{x_1}} \int_{m\leq|x_1|\leq 2m \, \times \, \mathbb{R}^{N_2}} f \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1.
\end{aligned}$$

Veja que usamos o fato de que $f \in L^1_{x_1}(\mathbb{R}^{N_1}, L^1_{x_2}(\mathbb{R}^{N_2})) \cap L^\infty_{x_1}(\mathbb{R}^{N_1}, (L^1_{x_2}(\mathbb{R}^{N_2}))$. Veja que $f \in L^1_{x_1}(\mathbb{R}^{N_1}, L^1_{x_2}(\mathbb{R}^{N_2}))$ uma vez que temos $f \in L^1_x(\mathbb{R}^N)$ como hipótese do lema.
Podemos concluir então que uniformemente em n, tomando m indo para infinito, o segundo termo de (4.17) vai a zero.

Estudando o terceiro termo de (4.17), para m fixo e tomando n indo para infinito, teremos a convergência para zero, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. De fato, pela hipótese $(H5)$ temos que

$$\frac{b_2}{1+|x_2|} = d_1 + d_\infty \quad \text{com} \qquad \begin{aligned} & d_1 \in L^1_{x_1,loc}(\mathbb{R}^{N_1}, L^1_{x_2}(\mathbb{R}^{N_2})) \quad \text{e} \\ & d_\infty \in L^1_{x_1,loc}\left(\mathbb{R}^{N_1}, (L^\infty_{x_2})(\mathbb{R}^{N_2})\right), \end{aligned}$$

além de que $\nabla\psi \in L^\infty$ e possui suporte em $\{1 \leq |x_1| \leq 2\}$.

Temos então q.t.p. em $x_1 \in \mathbb{R}^{N_1}$ que

$$|\varphi_m(x_1)| \int_{\mathbb{R}^{N_2}} f \, \frac{1+|x_2|}{n} \, \frac{|b_2|}{1+|x_2|} \, |\nabla_{x_2}\psi| \left(\frac{x_2}{n}\right) \mathrm{d}x_2$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\,|\varphi_m(x_1)|\ \ ||f(x_1,\cdot)||_{L^\infty_{x_2}} \int_{n\leq|x_2|\leq 2n} |d_1(x_1,\cdot)|\,\mathrm{d}x_2 \\
&+ C\ \ |\varphi_m(x_1)|\ \ ||d_\infty(x_1,\cdot)||_{L^\infty_{x_2}} \int_{n\leq|x_2|\leq 2n} f\,\mathrm{d}x_2 \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ 0.
\end{aligned}
$$

Veja que mostramos a convergência para zero quando tomamos n para infinito, com m fixo. Para usarmos o teorema da convergência dominada falta então mostrar a dominação em L^1, o que faremos agora.

$$
\begin{aligned}
|\varphi_m(x_1)| \int_{\mathbb{R}^{N_2}} f\ \frac{1+|x_2|}{n}\ \frac{|b_2|}{1+|x_2|}\ |\nabla_{x_2}\psi|\left(\frac{x_2}{n}\right)\mathrm{d}x_2& \\
\leq C\,|\varphi_m(x_1)|\ \ ||f(x_1,\cdot)||_{L^\infty_{x_2}}\ \ ||d_1(x_1,\cdot)||_{L^1_{x_2}}& \\
+ C\ \ |\varphi_m(x_1)|\ \ ||d_\infty(x_1,\cdot)||_{L^\infty_{x_2}}\ \ ||f||_{L^1_{x_2}}.&
\end{aligned}
$$

Como $f \in L^\infty_{x_1}(\mathbb{R}^{N_1}, L^1_{x_2} \cap L^\infty_{x_2}(\mathbb{R}^{N_2}))$ e com as hipóteses sobre d_1, d_∞ e $\varphi_m \in L^\infty_{x_1}$, temos que o lado direito da desigualdade acima está em $L^1_{x_1}$. Veja que usamos a desigualdade de Hölder para garantir que os termos com produto de f por d_1 e f por d_∞ estão em $L^1_{x_1}$. Podemos então usar o teorema da convergência dominada e temos que, para n indo a infinito, com m fixo, o termo estudado converge a zero.
Tomando m e n indo para infinito e pelo que vimos do comportamento dos dois termos estudados de (4.17), temos que

$$
\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^N} f = 0;
$$

e como já argumentamos no começo da demonstração do lema, isso implica $f = 0$ para todo tempo.

Comentário 4.5. *Repare que no segundo termo de (4.17), tomamos m para infinito, com n fixo (mas temos convergência uniforme). Já no terceiro termo de (4.17), tomamos m fixo primeiro e n indo para infinito. Para concluir o teorema então, levando em conta a convergência a zero de ambos os termos, é importante que tomemos primeiro n para infinito e só a seguir m para infinito.*

Comentário 4.6. *Outro detalhe relativo ao fato de tomarmos m fixo, é que não precisamos da integrabilidade em x_1 global, mas apenas local, como parte da hipótese de $(H5)$.*

Demonstração do Teorema 4.2
Assuma momentaneamente que existam duas soluções u_1 e u_2 para a equação do transporte (4.2) satisfazendo a regularidade enunciada no teorema e possuindo o mesmo valor inicial.

Tomando $f = u_1 - u_2$, o Lema 4.3 nos dá que

$$\frac{\partial f_{\alpha_1,\alpha_2}}{\partial t} + b\cdot \nabla f_{\alpha_1,\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2}.$$

Assim como no artigo de DiPerna e Lions, vamos multiplicar esta equação por $\beta'(f_{\alpha_1,\alpha_2})$, sendo β uma função renormalizadora, i.e., $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ e β' limitada. Obtemos assim

$$\frac{\partial \beta(f_{\alpha_1,\alpha_2})}{\partial t} + b\cdot \nabla \beta(f_{\alpha_1,\alpha_2}) = \varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2}\ \beta'(f_{\alpha_1,\alpha_2}).$$

Tomando α_2 e a seguir α_1 indo para zero, teremos

$$\frac{\partial \beta(f)}{\partial t} + b\cdot \nabla \beta(f) = 0$$

para essa classe de funções β. Se tomarmos então β aproximando a função módulo, vamos obter

$$\frac{\partial |f|}{\partial t} + b\cdot \nabla |f| = 0.$$

Portanto temos uma solução não-negativa, $|f|$, para a equação (4.2), que se anula no tempo inicial e pertence ao espaço funcional adequado. Aplicando o Lema 4.4, temos que $u_1 = u_2$. Falta ainda provar a existência da solução .

Para provar a existência no espaço $L^\infty\left([0,T], L^1_x \cap L^\infty_x(\mathbb{R}^N)\right)$, usamos a Proposição 2.1. Já a existência no espaço $L^\infty\left([0,T]; L^\infty_{x_1}\left(\mathbb{R}^{N_1}, L^1_{x_2}(\mathbb{R}^{N_2})\right)\right)$ é consequência da forma específica da equação do transporte que estudamos e da regularização já estudada para ela. De fato, formalmente, se tomarmos a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b_1\cdot \nabla_{x_1} u + b_2\cdot \nabla_{x_2} u = 0$$

e integrarmos em x_2, teremos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^{N_2}} u \,\mathrm{d}x_2 + b_1\cdot \nabla_{x_1}\int_{\mathbb{R}^{N_2}} u \,\mathrm{d}x_2 + \int_{\mathbb{R}^{N_2}} b_2\cdot \nabla_{x_2} u \,\mathrm{d}x_2 = 0,$$

e como $div_{x_2}\ b_2 = 0$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^{N_2}} u \,\mathrm{d}x_2 + b_1\cdot \nabla_{x_1}\int_{\mathbb{R}^{N_2}} u \,\mathrm{d}x_2 = 0.$$

O que vai nos dar, ainda formalmente,

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left|\left|\int_{\mathbb{R}^{N_2}} u \,\mathrm{d}x_2\right|\right|_{L^\infty_{x_1}} = 0$$

4.3 Soluções Renormalizadas

O intuito desta seção é a extensão dos resultados para dados iniciais menos regulares que os já tratados. Como no artigo de DiPerna e Lions, [DPL89], introduzimos o conjunto L^0 de funções u mensuráveis de $\mathbb{R}^N$ em $\bar{\mathbb{R}}$ tal que

$$\textit{medida } \{|u| > \lambda\} < \infty, \ \forall \lambda > 0.$$

Mostraremos que as funções de renormalização β que iremos escolher nos dão que $\beta(u) \in L^1 \cap L^\infty$. Com isso podemos introduzir a noção de solução renormalizada da equação do transporte e então enunciar um teorema sobre estabilidade de soluções . É esse teorema que nos permite apresentar resultados no nível de EDOs. Passemos então à construção . Para toda $\beta \in C(\mathbb{R})$, limitada e anulando-se próximo a zero teremos

$$\beta(u) \in L^1 \cap L^\infty \quad \forall u \in L^0.$$

Definição 4.7. *Uma sequência u_n é limitada (respectivamente, converge) em L^0 sempre que $\beta(u_n)$ é limitada (respectivamente, converge) em L^1, para toda β.*

Neste capítulo, ou seja, com as hipóteses que aqui chamamos $W^{1,1}$ parcial, precisamos de hipóteses adicionais a respeito dos dados iniciais. Consideraremos então o conjunto L^{00}, subconjunto de L^0, consistindo das funções u tal que

$$\forall \delta > 0, \ \textit{medida}\{x_2 : \ |u(x_1, x_2)| > \delta\} < C_\delta(x_1) \in L^\infty_{x_1}(\mathbb{R}^{N_1})$$

Tomemos então esse conjunto com a topologia induzida pela de L^0. Teremos então que para toda $u \in L^{00}$, $\beta(u) \in L^\infty_{x_1}\left(\mathbb{R}^{N_1}, L^1_{x_2}(\mathbb{R}^{N_2})\right)$. De fato, tomando δ suficientemente pequeno de maneira que β se anule em $[0, \delta]$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N_2}} |\beta(u(x_1, x_2))| \, \mathrm{d}x_2 &= \int_{\{x_2 \ : \ |u(x_1,x_2)|>\delta\}} |\beta(u(x_1, x_2))| \, \mathrm{d}x_2 \\ &\quad + \int_{\{x_2 \ : \ |u(x_1,x_2)|<\delta\}} |\beta(u(x_1, x_2))| \, \mathrm{d}x_2 \\ &\leq \ ||\beta||_{L^\infty} \ C_\delta(x_1) + 0 \end{aligned}$$

Segue então que se tomarmos $u_0 \in L^{00}$, então $\beta(u_0)$ é uma condição inicial conveniente para a equação do transporte que estamos considerando.
Diremos então que u é uma solução renormalizada de (4.2) com a condição inicial $u_0 \in L^{00}$ sempre que $\beta(u)$ é uma solução de (4.2) no sentido que apresentamos na seção anterior tomada a condição inicial $\beta(u_0)$.

O artigo de DiPerna-Lions faz uma aplicação da teoria de EDP (equação do Transporte) no estudo da solução da EDO associada. Faremos isso também no capítulo 5, e da mesma forma feita por DiPerna e Lions, precisaremos de um resultado de estabilidade de solução para a EDP. Esse resultado é uma simples modificação do teorema 2.10 já apresentado no capítulo 2.

Teorema 4.8 (Teorema de Estabilidade)**.** *Considere a sequência* $b_n = (b_{1,n}(x_1), b_{2,n}(x_1, x_2))$ *de campos vetoriais satisfazendo as hipóteses* $(H1)$ *a* $(H6)$*. Assuma também que*

$$b_{1,n} \to b_1 \quad em\ L^1_{x_1,loc}$$

$$b_{2,n} \to b_2 \quad em\ L^1_{x_1,x_2,loc}.$$

E que $b = (b_1(x_1), b_2(x_1, x_2))$ *satisfaz* $(H1)$ *a* $(H6)$*.*
Seja u_n *uma sequência limitada em* $L^\infty([0,T], L^{00})$ *de soluções renormalizadas de (4.2) com campo vetorial* b_n *e condição inicial* $u_{n,0} \in L^{00}$*. Assuma que*

$$u_{n,0} \to u_0 \in L^{00} \quad em\ L^{00}_{loc}.$$

Então u_n *converge em* $C([0,T], L^{00}_{loc})$ *para a solução renormalizada de (4.2) associada à condição inicial* u_0*.*

Comentário 4.9 (Extensão para o caso dependente do tempo)**.** *Para estendermos o teorema acima ao caso dependente do tempo podemos tomar a convergência de* b_n *a* b *(definidos no teorema acima) de duas maneiras. A primeira, considerando a topologia forte de* $L^1\left([0,T], L^1_{x_1,loc} \times L^1_{x_1,x_2,loc}\right)$*. A segunda, considerando a topologia fraca no mesmo espaço funcional mas com a hipótese adicional*

$$\sup_n \; ||b_n(t, x+h) - b_n(t,x)||_{L^1\left([0,T], L^1_{x_1,loc} \times L^1_{x_1,x_2,loc}\right)} \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

Essa extensão segue do Teorema de Estabilidade 2.13 apresentado no capítulo 2, já presente no artigo de DiPerna e Lions.

Capítulo 5

Aplicação 1: Estudo da Dependência às Condições Iniciais da Solução de EDOs

5.1 Introdução

A primeira aplicação que apresentamos é relativa a EDOs e pretendemos estudar a dependência em relação às condições iniciais de soluções de EDOs. Estabeleçamos então o nosso problema. Seja c um campo vetorial, independente do tempo por enquanto, e considere a EDO

$$\begin{cases} \dot{Y}(t,y) &= c\,(Y(t,y)) \\ Y(t=0,y) &= y. \end{cases} \tag{5.1}$$

Assuma também que c possui as seguintes propriedades:

$$\begin{array}{ll} (P1) & c \in W^{1,1}_{y,loc}, \\ (P2) & \dfrac{c}{1+|y|} \in \left(L^1 + L^\infty\right)(\mathbb{R}^N), \\ (P3) & div\ c = 0 \end{array} \tag{5.2}$$

que são as hipóteses padrão para definir um fluxo q.t.p. para a EDO acima como visto no capítulo 3. Da mesma maneira que vimos no capítulo 3, é possível que utilizemos uma forma mais forte da hipótese $(P2)$, a saber,

$$(Q2)\quad c \in L^p + (1+|y|)L^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \text{para algum } p \in [1,\infty]$$

Comentário 5.1 (Campo Vetorial dependente do tempo)**.** *De maneira similar ao caso estudado no capítulo 3, podemos tomar o caso em que o campo vetorial c depende do tempo se mudarmos as propriedades $(P1)$ e $(P2)$ e considerarmos*

$$(P1')\qquad c = c(t,y) \in L^1\left([0,T], W^{1,1}_{y,loc}\right),$$

$$(P2') \quad \frac{c}{1+|y|} \in L^1\left([0,T], L^1 + L^\infty(\mathbb{R}^N)\right). \tag{5.3}$$

Comentário 5.2. *Da mesma forma podemos tratar o caso em que div c não é zero mas controlado em L^∞_y; ou juntando com o caso dependente do tempo, se fizermos o controle em $L^1_t(L^\infty_y)$.*

Como o objetivo deste capítulo é diferenciar o fluxo Y em relação à condição inicial y, tomemos, formalmente por enquanto, a derivada de Y em relação a y na direção r. Obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(r \cdot \nabla_y Y\right)(t,y) = \nabla_y\, c\left(Y(t,y)\right)\left(r \cdot \nabla_y Y\right)(t,y).$$

Denotando R por $R(t,y,r) = \left(r \cdot \nabla_y Y\right)(t,y)$, podemos então escrever o sistema

$$\begin{cases} \dot{Y}(t,y) &= c\left(Y(t,y)\right), \\ \dot{R}(t,y,r) &= \nabla_y\, c\left(Y(t,y)\right)\; R(t,y,r), \\ Y(t=0,y) &= y, \\ R(t=0,y,r) &= r. \end{cases} \tag{5.4}$$

Queremos dar um sentido ao sistema acima. Para isso, pensemos o sistema (5.1) perturbado em sua condição inicial. Esperamos então que o sistema (5.4) seja o limite em algum sentido do sistema perturbado que consideramos, i.e., se tomarmos ε pequeno e considerarmos

$$\begin{cases} \dot{Y}(t,y+\varepsilon r) &= c\left(Y(t,y+\varepsilon r)\right), \\ Y(t=0,y+\varepsilon r) &= y+\varepsilon r, \end{cases} \tag{5.5}$$

comparando com (5.1) obtemos

$$\begin{cases} \dot{Y}(t,y) &= c\left(Y(t,y)\right), \\ \dfrac{\dot{Y}(t,y+\varepsilon r) - \dot{Y}(t,y)}{\varepsilon} &= \dfrac{c\left(Y(t,y+\varepsilon r)\right) - c\left(Y(t,y)\right)}{\varepsilon}, \\ Y(t=0,y) &= y, \\ \dfrac{Y(t=0,y+\varepsilon r) - Y(t=0,y)}{\varepsilon} &= r \end{cases} \tag{5.6}$$

Veremos que o processo limite quando ε vai a zero nos dá que o sistema (5.6) vai para o sistema (5.4).

Veja que ambos os sistemas (5.4) e (5.6) podem ser escritos da seguinte forma:

$$
\begin{cases}
\dot{X}_1(t,x) &= b_1\left(X_1(t,x)\right), \\
\dot{X}_2(t,x) &= b_2\left(X_1(t,x), X_2(t,x)\right), \\
X_1(t=0,x_1) &= x_1, \\
X_2(t=0,x_2) &= x_2,
\end{cases}
\tag{5.7}
$$

com $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$.
Para o sistema (5.4) basta tomarmos

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y, \\
x_2 &= r, \\
N_1 = N_2 &= N, \\
X_1 &= Y, \\
X_2 &= \frac{\partial Y}{\partial y}, \\
b_1 &= c, \\
b_2 &= \nabla_y c(y) r, \quad \text{i.e., } (b_2)_i = \sum_j (\partial_j c_i) r_j.
\end{aligned}
$$

Já para o sistema (5.6) tomamos

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y, \\
x_2 &= r, \\
N_1 = N_2 &= N, \\
X_1 &= Y, \\
X_{2_\varepsilon} &= \frac{Y(t, y+\varepsilon r) - Y(t,y)}{\varepsilon}, \\
b_1 &= c, \\
b_{2_\varepsilon} &= \frac{c(y+\varepsilon r) - c(y)}{\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Para mostrar a convergência entre esses sistemas devemos primeiro lembrar da equivalência entre sistemas de EDOs e Equações do transporte lineares. Depois, verificar que ambos os sistemas satisfazem as hipóteses $(H1)$ até $(H6)$. Teremos então que esse problema se reduz ao caso $W^{1,1}$ parcial, já estudado no capítulo 4 e então o teorema 4.2 nos dá a existência e unicidade de solução para a equação do transporte associada, e portanto nos permite obter a existência e unicidade do fluxo q.t.p. para ambos sistemas. Após esses passos, usando o teorema de estabilidade 4.8, temos que a solução da equação do transporte associada a (5.6) converge, quando ε vai a zero, para a solução da equação do transporte associada a (5.4). Obtém-se assim a convergência dos fluxos.
Repare que o sistema (5.7) pode ser escrito da forma

$$
\begin{cases}
\dot{X}(t,x) &= b\left(X(t,x)\right), \\
X(t=0,x) &= x.
\end{cases}
\tag{5.8}
$$

Apresentamos a seguir a definição de fluxo q.t.p., de grupo renormalizado e uma proposição sobre a relação entre eles. Faremos menção à EDO

$$\begin{cases} \dot{X} = b(X) & t \in \mathbb{R}, \\ X|_{t=0} = x \in \pi^N, \end{cases} \tag{5.9}$$

e à equação do transporte

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = div(bf) & em\ \mathbb{R} \times \pi^N, \\ f|_{t=0} = f_0 & sobre\ \pi^N, \end{cases} \tag{5.10}$$

com $f_0 \in L^\infty(\pi^N)$.

Definição 5.3 (Fluxo q.t.p. - Adaptado de [Lio98]). *Um fluxo q.t.p. X de (5.9) é uma aplicação $X : \mathbb{R} \times \pi^N \to \pi^N$ que verifica*

1. $X \in C(\mathbb{R}; L^1)$;
2. $\int \phi\,(X(t,x))\,\mathrm{d}x = \int \phi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall\ \phi \in C^\infty,\ \forall\ t \in \mathbb{R}$;
3. $X(t+s,x) = X(t, X(s,x))$ *q.t.p.* x, $\forall s,t \in \mathbb{R}$;
4. *A equação (5.9) vale no sentido das distribuições, ou de modo equivalente,*

$$X(t,x) = x + \int_0^t b(X(s,x))\ \mathrm{d}s, \quad q.t.p.\ x,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definição 5.4 (Grupo Renormalizado - Adaptado de [Lio98]). *Diremos que S é um grupo renormalizado solução da equação (5.10) se $S = S(t)\ f_0$ é uma aplicação de $\mathbb{R} \times L^\infty$ em L^∞ que verifica*

- $S(t)\ f_0 \in C\left(\mathbb{R}; L^1\right), \quad \forall\ f_0 \in L^\infty$;
- $S(t)\ \beta(f_0) = \beta(S(t)\ f_0), \quad \forall \beta \in C$ *(ou C_0^∞)*, $\forall f_0 \in L^\infty,\ \forall t \in \mathbb{R}$;
- $S(t)$ *é linear*, $\forall t \in \mathbb{R}$;
- $S(t+s) = S(t) \circ S(s),\ \forall t,s \in \mathbb{R}$;
- $f(t,x) = (S(t)\ f_0)(x)$ *é solução de (5.10)*, $\forall f_0 \in L^\infty$.

Proposição 5.5 (Adaptado de [Lio98]). *Seja X um fluxo q.t.p. solução de (5.9). Então $[S(t)\ f_0](x) = f_0\,(X(t,x))$ define um grupo renormalizado solução de (5.10). Reciprocamente, se S é um grupo renormalizado solução de (5.10), então*

$$X_i(t,x) = [S(t)\ x_i](x) \quad (1 \le i \le N)$$

define um fluxo q.t.p. solução de (5.9).

Voltando agora ao nosso problema temos que, como $b \in L^1_{loc}$ (ambos os b_i estão, em particular, em $L^1_{x_1,x_2,loc}$), uma consequência da proposição 5.5 é que temos uma equivalência entre a EDO (5.8) e a equação do transporte (4.2). Pela proposição 5.5 temos que se X é um fluxo q.t.p. solução de (5.8),
então $[S(t)u_0](x) = u_0\left(X(t,x)\right)$ é um grupo de solução renormalizada de (4.2).
Reciprocamente, definimos um fluxo q.t.p. $X(t,x)$ para a EDO (5.1), a partir de um grupo renormalizado $S(t)$ que é solução de (4.2), tomando

$$\left(X(t,x)\right)_i = \left(S(t)x_i\right)(x), \quad 1 \leq i \leq N$$

Comentário 5.6. *A equivalência citada acima vale (como enunciado na proposição) quando a equação está definida num toro. Uma condição necessária e suficiente para a validade em todo o espaço é incluir uma condição de crescimento no infinito para o campo b. A hipótese* $(P2)$ *vai então nos garantir isso.*

Definição 5.7 (Solução da EDO)**.** *Definimos então a noção de solução da equação (5.8) da seguinte forma. X é uma solução de (5.8) se, para todo* $\beta \in C_0^\infty$, *tem-se*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\beta(X) = D\beta\left(X(t,y)\right)\cdot b\left(X(t,y)\right), \\ \\ \beta(X)(t=0,y) = \beta(y), \end{cases} \tag{5.11}$$

no sentido das distribuições .

5.2 Resultado Principal

Teorema 5.8. *Assuma* $(P1)$ *a* $(P3)$*. Então existe um único fluxo q.t.p.* (Y,R) *tal que*

- Y *é contínuo em* $[0,T]$ *com valores em* $L_{y,loc}$*;*
- R *é contínuo de* $[0,T]$ *no conjunto de funções de* (y,r) *que, q.t.p. em* y *são* $L^1_{r,loc}$ *e, q.t.p. em* r *são* $L_{y,loc}$*;*
- $X = (Y,R)$ *satisfaz a propriedade 2 da definição 5.3, sobre a conservação da medida de Lebesgue em* (y,r)*, e a propriedade 3 da definição 5.3, aquela referente ao semigrupo, também em* (y,r)*;*
- (Y,R) *satisfaz (5.4) no sentido de (5.11).*

Além disso, q.t.p. em (y,r)*,* $X = (Y,R)$ *satisfaz (5.4) no sentido das distribuições no tempo.*

Demonstração do Teorema 5.8: Primeiro verifiquemos que ambos os sistemas (5.4) e (5.6) atendem às hipóteses $(H1)$ a $(H6)$, o que então nos permite usar a teoria descrita no capítulo 4. Para ambos os sistemas, as hipóteses $(H1)$ a $(H3)$ sobre b_1 são exatamente as mesmas que $(P1)$ a $(P3)$ sobre c.
Para o sistema (5.4), como $b_2 = (\nabla_{x_1} c(x_1))\, x_2$, temos

$$b_2 \in L^1_{x_1,x_2,loc}.$$

Logo,

$$\nabla_{x_2} b_2 = \nabla_{x_1} c(x_1) \in L^1_{x_1,x_2,loc}.$$

E portanto temos que a hipótese $(H4)$ é satisfeita.
A hipótese $(H5)$ também é satisfeita, já que

$$\frac{|b_2|}{1+|x_2|} = |\nabla_{x_1} c(x_1)| \in L^1_{x_1,loc}(L^\infty_{x_1}).$$

E finalmente, também temos $(H6)$ pois

$$div_{x_2}\ b_2(x_1,x_2) = div_x\ c(x) \ \text{ e a propriedade } (P3), \text{ i.e., } \ div\ c = 0.$$

Agora, para o sistema (5.6), a hipótese $(H4)$ segue de

$$b_{2_\varepsilon} \in L^\infty_{x_1,loc}\left(W^{1,1}_{x_2,loc}\right).$$

Para verificarmos $(H5)$ veja que

$$\frac{c(x_1+\varepsilon x_2)}{1+|x_2|} \in L^\infty_{x_1,loc}\left(L^1_{x_2} + L^\infty_{x_2}\right)$$

pois temos a hipótese $(P2)$, i.e.,

$$\frac{c}{1+|y|} \ \in L^1 + L^\infty(\mathbb{R}^N),$$

e

$$\frac{c(x_1)}{1+|x_2|} \in L^1_{x_1,loc}\left(L^\infty_{x_2}\right)$$

uma vez que $c \in L^1_{x_1,loc}$.
E a propriedade $(H6)$ segue facilmente das hipóteses.

Uma vez que verificamos as hipóteses $(H1)$ a $(H6)$ para ambos os sistemas (5.4) e (5.6), podemos usar os resultados para a equação do transporte associada a cada um dos sistemas, ambas possuindo a forma da equação (4.2). Então pelo teorema 4.2, ambas equações possuem soluções únicas. Usando então a equivalência entre equações do transporte e suas respectivas EDOs, como feito em [DPL89], existe o fluxo para ambos os sistemas. Esses fluxos são exatamente as soluções (no sentido da definição 5.11) de (5.4) e (5.6), respectivamente.

Se agora usarmos o resultado de estabilidade do teorema 4.8, teremos que a única solução renormalizada da equação do transporte associada a (5.6) converge, quando ε vai a zero, para a única solução renormalizada da equação do transporte associada a (5.4). Isso implica na convergência dos fluxos, q.t.p. em x.
As propriedades de mensurabilidade e integrabilidade de Y e R no enunciado do Teorema 5.8 são consequências diretas dos argumentos do artigo original de DiPerna e Lions, [DPL89]. Em particular, a integrabilidade L^1_{loc} de R com relação à variável r segue do fato de que o fluxo associado, $\nabla_y c(y) r$, é da forma

$$\nabla_y c(y) r \;\in\; |r|\; L^\infty(\mathbb{R}^N) \;\subset L^1 + (1+|r|)\, L^\infty(\mathbb{R}^N),$$

que é uma condição do tipo (Q2) na variável r. Com isso, provamos o teorema.

$\square$

Comentário 5.9 (Derivadas de ordem superior)**.** *Questionar sobre se aquilo que acabamos de desenvolver para derivadas de primeira ordem é extensível para ordens superiores é uma pergunta natural. De fato, se assumirmos $c \in W^{m,1}$ como a regularidade de c em relação a y, é possível diferenciarmos m vezes. Apresentamos o caso $m = 2$ abaixo.*
Dado o sistema

$$\begin{cases} \dot{Y}(t,y) &= c\left(Y(t,y)\right), \\ \dot{R}(t,y,r) &= \nabla_y c\left(Y(t,y)\right)\; R(t,y,r), \\ Y(t=0,y) &= y, \\ R(t=0,y,r) &= r, \end{cases}$$

fixemos $(y',r') \in \mathbb{R}^{2N}$ e diferenciemos Y e R em relação a (y,r) na direção (y',r'), ou seja, buscamos para quais equações as funções

$$Y' = (y',r')\cdot \nabla_{y,r} Y \tag{5.12}$$

e

$$R' = (y',r')\cdot \nabla_{y,r} R \tag{5.13}$$

são soluções.

É fácil mostrar que elas são soluções do sistema

$$\begin{cases} \dot{Y}'(t,y,y') & = & \nabla_y c\,(Y(t,y))\;\; Y'(t,y,y'), \\ \dot{R}'(t,y,r,y',r') & = & \nabla_y c\,(Y(t,y))\;\; R'(t,y,r,y',r') + \\ & & +\; \nabla^2_{yy} c\,(Y(t,y)) \cdot (R(t,y,r), Y'(t,y,y'))\,, \\ Y'(t=0,y,y') & = & y', \\ R'(t=0,y,r,y',r') & = & r', \end{cases} \tag{5.14}$$

(repare que as equações devem ser entendidas no sentido componente por componente e que usa-se a convenção de soma sobre índices repetidos) que juntando com o sistema (5.4) nos dá

$$\begin{cases} \dot{Y}(t,y) & = & c\,(Y(t,y))\,, \\ \dot{R}(t,y,r) & = & \nabla_y c\,(Y(t,y))\;\; R(t,y,r), \\ \dot{Y}'(t,y,y') & = & \nabla_y c\,(Y(t,y))\;\; Y'(t,y,y'), \\ \dot{R}'(t,y,r,y',r') & = & \nabla_y c\,(Y(t,y))\;\; R'(t,y,r,y',r') + \\ & & +\; \nabla^2_{yy} c\,(Y(t,y)) \cdot (R(t,y,r), Y'(t,y,y'))\,, \\ Y(t=0,y) & = & y, \\ R(t=0,y,r) & = & r, \\ Y'(t=0,y,y') & = & y', \\ R'(t=0,y,r,y',r') & = & r', \end{cases} \tag{5.15}$$

cuja equação do transporte associada é, para $u = u(t,y,r,y',r')$:

$$\frac{\partial}{\partial t}u - c(y)\cdot \nabla_y u - \nabla_y c(y) r \nabla_r u - \nabla_y c(y) y' \nabla_{y'} u - \left(\nabla_y c(y) r' - \nabla^2_{yy} c(y)\cdot (r,y')\right) \nabla_{r'} u = 0 \tag{5.16}$$

Provar que um fluxo q.t.p. para o sistema (5.15) existe (no sentido do Teorema 5.8) passa por mostrar a existência e unicidade de soluções renormalizadas da equação do transporte (5.16).
Para o campo vetorial b tal que

$$b(y, r, y', r') = -\left(c(y), \nabla_y c(y) r, \nabla_y c(y) y', \nabla_y c(y) r', \nabla^2_{yy} c(y) \cdot (r, y')\right), \tag{5.17}$$

as propriedades $(H1)$ *a* $(H6)$ *são satisfeitas. De fato, a regularidade* $W^{2,1}$ *nos dá* $(H1)$ *e* $(H4)$. *E a hipótese mais difícil de se verificar,* $(H5)$ *é satisfeita pois*

$$\frac{\nabla_y c(y) r' + \nabla^2_{yy} c(y) \cdot (r, y')}{1 + |r'|} \in L^1_{y,r,y',loc}\left(L^1_{r'} + L^\infty_{r'}\right).$$

Capítulo 6

Aplicação 2: Soluções Fracas da Equação de Euler 2D Incompressível

6.1 Introdução

O propósito deste capítulo é discutir a relação entre soluções fracas da Equação de Euler 2D incompressível e soluções renormalizadas (no sentido de DiPerna-Lions) de equações do transporte lineares.

O que nos permite isso é a possibilidade de reformular a equação de Euler 2D como uma equação do transporte via uma transformação integral, obtendo a chamada *Formulação de Vorticidade* para a Equação de Euler. As fontes e referências principais deste capítulo são o capítulo 2 do livro de Majda e Bertozzi, [MB02], e o artigo de Lopes, Mazzucato e Nussenzveig, [LMN06].

As equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível ($div\ u = 0$) em dimensão N são dadas pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{Du}{Dt} = -\nabla p + \nu\ \Delta u & \\ div\ u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,\infty) \\ u|_{t=0} = u_0 & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $u(x,t) = (u^1, u^2, \dots, u^N)^t$ denota a velocidade do fluido, $p(x,t)$ denota a pressão e $\frac{D}{Dt}$ denota a derivada material (também chamada derivada convectiva), i.e., a derivada ao longo da trajetória das partículas do fluido, dada por:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} u^j \ \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

O outro parâmetro, ν, denota a viscosidade cinética do fluido. Quando $\nu = 0$ no sistema acima, designamos o sistema como Equações de Euler para um fluido incompressível.

Será para o caso em que $\nu = 0$ e $N = 2$ que discutiremos um resultado neste capítulo.

Dado u, campo de velocidades de um fluido, ω dado por $\omega = \nabla \times u$ é dita a *Vorticidade do Campo.*
Dada a equação de Navier-Stokes, podemos tomar formalmente o operador rotacional, aqui denotado por $\nabla\times$ e obteremos

$$\frac{D\omega}{Dt} = -\nabla \times (\nabla p) + \nabla \times (\nu \ \nabla u) = 0 + \nu \ \Delta\omega,$$

pois como u está em 2D, $u = (u^1, u^2, 0)^t$ e então $\omega = \nabla \times u = (0, 0, u^2_{x_1} - u^1_{x_2})^t$. Isso nos dá que ω é ortogonal a u e $\omega\cdot \nabla u \equiv 0$.
A equação vetorial se reduz então a uma equação escalar que se denotarmos $u = (u^1, u^2)^t$ e $\omega = u^2_{x_1} - u^1_{x_2}$ é da forma

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \ \Delta\omega. \tag{6.1}$$

Mostraremos agora que para fluxos 2D suaves pode-se eliminar a velocidade do termo de vorticidade na equação (6.1). Repare que o termo de velocidade ainda aparece na expressão da derivada material.
De fato, como *div* $u = 0$, pela hipótese de incompressibilidade, via o Teorema de Hodge, existe $\psi(x, t)$ único a menos de uma constante aditiva tal que

$$u = (-\psi_{x_2}, \psi_{x_1})^t \equiv \nabla^{\perp}\psi. \tag{6.2}$$

Tomando o operador rotacional teremos

$$\nabla \times u = \nabla \times \nabla^{\perp}\psi,$$

ou seja,

$$\omega = \Delta\psi,$$

que é a conhecida Equação de Poisson, cuja solução em 2D é

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln|x - y| \ \omega(y, t) \, \mathrm{d}y \ + \ H.$$

Podemos calcular $\nabla\psi$ através da diferenciação sob a integral e então u pode ser obtido de ψ pelo operador $\nabla^{\perp}$ na equação (6.2) como

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{K}(x-y)\,\omega(u,t)\,\mathrm{d}y = \mathcal{K} * \omega, \tag{6.3}$$

onde $\mathcal{K}$ é o *Núcleo de Biot-Savart*, dado por

$$\mathcal{K}(x) \equiv \frac{x^{\perp}}{2\pi|x|^2}, \quad \text{com a notação } x = (x_1,x_2), \quad x^{\perp} = (x_1,x_2)^{\perp} = (-x_2,x_1) \tag{6.4}$$

e a convolução é feita apenas na variável espacial. Em particular, $u = \mathcal{K} * \omega$ implica $div\ u = 0$.

Veja que para a equação de Euler, $\nu = 0$, e (6.1) se reduz a

$$\partial_t\omega + u \cdot \nabla\omega = 0, \tag{6.5}$$

ou seja, uma equação do transporte para a vorticidade, ω.

O problema torna-se então resolver o sistema

$$\begin{cases} \partial_t\omega + u \cdot \nabla\omega = 0 \\ u = \mathcal{K} * \omega. \end{cases} \tag{6.6}$$

Se u for suficientemente suave, de maneira que ω seja uma solução suave da Equação do Transporte acima, a vorticidade ou qualquer função dela é transportada ao longo do fluxo induzido por u.

Em particular, é fácil ver que a função **densidade de enstrofia**, dada por

$$\vartheta(x,t) := \frac{|\omega(x,t)|^2}{2}$$

é conservada ao longo das trajetórias das partículas e então, como $div\ u = 0$, temos que a **enstrofia**, definida por

$$\Omega(t) := \int \vartheta(x,t)\,\mathrm{d}x, \tag{6.7}$$

é uma quantidade conservada globalmente no tempo.

A teoria de soluções fracas de (6.6) é bem desenvolvida. A boa colocação para soluções fracas existe nos casos em que a vorticidade inicial é limitada, veja [Vis98, Vis99, Yud63, Yud95].

No caso em que a vorticidade pertence a L^p, pela Teoria de Calderón-Zygmund (veja o capítulo 5 do Livro de Adams e Fournier, [AF03]) teremos que $u \in W^{1,p}_{loc}$. Usando então a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev teremos que $u \in L^{p'}$, com $p' = \frac{2p}{2-p}$.

O problema na formulação fraca é dar um sentido ao termo $u\,\omega$. Mas podemos estimar esse termo usando a desigualdade de Hölder da seguinte forma,

$$\int u\ \omega\ \nabla\phi\ udx \leq \left(\int |u|^{p'}\right)^{1/p'} \left(\int |\omega|^{p}\right)^{1/p} \left(\int |\nabla\phi|^{r}\right)^{1/r}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{r} = 1$. Como tomamos $\phi \in C_c^\infty$, temos sua estimativa em L^∞ e então o que de fato precisamos para que o termo não-linear da equação do transporte seja integrável é que $1/p + 1/p' \leq 1$. Mas usando a expressão para p' teremos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{2-p}{2p} \leq 1.$$

O que implica

$$p \geq 4/3.$$

Portanto, se tormarmos $p \geq 4/3$, o termo não-linear relevante, $u\,\omega$, é localmente integrável, e a equação do transporte em (6.6) admite uma formulação fraca. Vamos tornar isso mais claro com a definição a seguir.

Definição 6.1 (Formulação Fraca do Problema de Valor Inicial para a Equação (6.6))**.** *Sejam*

$$\begin{cases} \omega_0 \in L^p(\mathbb{R}^2), \\ \omega = \omega(x,t) \in L^\infty\left([0,T); L^p(\mathbb{R}^2)\right), \\ p \geq 4/3, \\ u = \mathcal{K} * \omega. \end{cases}$$

Dizemos que ω é uma solução fraca do problema de valor inicial para (6.6) se, para toda função teste $\phi \in C_c^\infty\left([0,T) \times \mathbb{R}^2\right)$, temos

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \phi_t\ \omega + \nabla\phi\ \cdot\ u\ \omega\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,0)\ \omega_0(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Outra hipótese é sobre o campo de velocidades, u deve satisfazer:

$$u \in L^\infty\left([0,T); L^2(\mathbb{R}^2) + L^\infty(\mathbb{R}^2)\right).$$

Uma vez que para vorticidades em L^p as velocidades estão somente em $W^{1,p}_{loc}$, é natural considerar soluções fracas de (6.6) no contexto da teoria de soluções renormalizadas para equações do transporte lineares, i.e., no sentido de DiPerna-Lions, introduzidas no artigo [DPL89] e descritas ao longo do capítulo 2 desta dissertação. A propriedade mais interessante das soluções renormalizadas é a de que, em geral, elas são únicas. A conexão entre soluções fracas das equações de Euler e soluções renormalizadas da equação do transporte para a vorticidade em (6.6), com a velocidade sendo dada, é conhecida na área. Mas aparentemente isso não estava enunciado na literatura até o artigo de [LMN06]. Faremos isso na seção a seguir.

6.2 Resultado Principal

Proposição 6.2. *Seja $p \geq 2$. Se $\omega = \omega(x,t) \in L^\infty([0,T); L^p(\mathbb{R}^2))$ é uma solução fraca das equações de Euler, então ω é uma solução renormalizada da equação do transporte em (6.6) com velocidade $u = \mathcal{K} * \omega$.*

Comentário 6.3. *Note que para usar a Teoria de DiPerna-Lions precisamos que*

$$\begin{cases} \omega \in L^p, \\ u \in W^{1,\alpha}_{loc}, \ \alpha \geq q, \ 1/p + 1/q = 1. \end{cases}$$

Agora, usando o fato que $\omega \in L^p$, via a teoria de Calderón-Zygmund, teremos $u \in W^{1,p}_{loc}$. Ou seja, para mostrar que a formulação fraca satisfaz as hipóteses de consistência do capítulo 2, o que implicará na existência de solução renormalizada, precisamos de

$$p \geq q, \ 1/p + 1/q = 1 \iff p \geq 2.$$

Prova da Proposição (Adaptado de [LMN06]): Se $p \geq 2$, então a velocidade u pertence a $L^\infty([0,T); W^{1,p}_{loc})$ e portanto a $L^\infty\left([0,T); W^{1,p'}_{loc}\right)$, já que $p \geq p'$. A velocidade u satisfaz a condição de crescimento

$$\frac{u}{1+|x|} \in L^1([0,T]; L^1) + L^1([0,T]; L^\infty),$$

já que $L^2 + L^\infty$ está contido em $L^1 + L^\infty$ e uma estimativa em $L^2 + L^\infty$ sobre a velocidade é necessária na definição de solução fraca. Estamos portanto sob as condições do resultado de consistência, Teorema II.3 em [DPL89] ou Teorema 2.9 nesta dissertação, página 32, de forma que podemos concluir que ω é uma solução renormalizada.

□

Comentário 6.4. *Note que as soluções fracas como definidas neste capítulo necessitam que $p \geq 4/3$. O que acabamos de mostrar é que, para $p \geq 2$, uma solução fraca é uma solução renormalizada. Uma pergunta em aberto na área é o que se pode dizer para o caso $4/3 \leq p < 2$.*

Soluções fracas das equações de Euler 3D com baixa regularidade desempenham um papel fundamental na teoria de turbulência de Onsager-Kolmogorov, veja [Fri95]. Em [Ons49], Lars Onsager conjecturou que soluções fracas das equações de Navier-Stokes com elevados números de Reynolds aproximam soluções fracas de Euler com regularidade Hölder menor que 1/3. Onsager prosseguiu conjecturando que tais soluções fracas dissipam energia, uma quantidade formalmente conservada por essas equações. Essa dissipação anômala de energia é a base dos argumentos dimensionais de Onsager e Kolmogorov.

Uma teoria de turbulência para escoamentos 2D foi construída por Kraichnan e Batchelor tendo como base a dissipação anômala de enstrofia, a norma L^2 da vorticidade, veja [Fri95]. Entretanto, usando o fato que uma solução fraca da Equação de Euler 2D com vorticidade em $L^\infty(0,T;L^p)$, $p \geq 2$, é uma solução renormalizada, como visto pelo teorema acima, mostra-se facilmente que para soluções fracas das equações de Euler 2D isto não pode ocorrer. Esse é o conteúdo da proposição a seguir.

Proposição 6.5 (Conservação da Enstrofia e de outras funções da Vorticidade)**.** *Sejam $p \geq 2$ e $\omega_0 \in L^p(\mathbb{R}^2)$. Seja $\omega \in L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^2))$ uma solução fraca das Equações de Euler 2D, i.e., ω satisfaz a definição 6.1. Então a norma L^p, $p \geq 2$, da vorticidade é conservada temporalmente, i.e.,*

$$\frac{d}{dt}\int |\omega(x,t)|^p \, \mathrm{d}x = 0.$$

Prova: Uma vez que estamos sob as hipóteses do teorema 2.9, teremos que

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\int \beta(\omega)\,\mathrm{d}x + \int u\cdot\nabla\beta(\omega)\,\mathrm{d}x = 0,$$

mas como, integrando por partes, obtemos o termo *div* u e esse se anula, chegamos a

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\int \beta(\omega)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Agora, tomando β aproximando a função $x \mapsto |x|^p$ chegaremos a

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\int |\omega|^p\,\mathrm{d}x = 0.$$

$\square$

Referências Bibliográficas

[Aiz78] Michael Aizenman, *On Vector Fields as Generators of Flows: A Counterexample to Nelson's Conjecture*, Annals of Mathematics **107** 287-296 (1978), http://www.jstor.org/stable/1971145.

[Amb04] Luigi Ambrosio, *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields*, Invent. Math. **158** 227-260 (2004), http://dx.doi.org/10.1007/s00222-004-0367-2.

[AF03] Robert Adams e John Fournier, *Sobolev Spaces*, Pure and Applied Mathematics Vol.140, Academic Press - Elsevier, Second Edition - (2003).

[BAH87] R.B. Bird, R.C. Armstrong e O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Fluids*, Vol.1 - Fluid Mechanics e Vol.2 - Kinetic Theory, Wiley (1987).

[Bec73] A. Beck, *Uniqueness of flow solutions of differential equations*, Recent Advances in Topological Dynamics, (Lecture Notes in Mathematics V.318), Springer (1973).

[Bre83] Haïm Brezis, *Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Editora Masson, Paris, (1983)

[Cri07] Gianluca Crippa, *The flow associated to weakly differentiable vector fields*, Phd Thesis - Scuola Normale Superiore Di Pisa and Universität Zürich, (2007).

[CDL08] Gianluca Crippa and Camillo De Lellis, *Estimates and Regularity Results for The DiPerna-Lions Flow*, J. Reine Angew. Math **616**, 15-46 (2008).

[Dep02] Nicolas Depauw, *Non-unicité du transport par un champ de vecteurs presque BV*, Séminaire É. D. P., Ecole Polytechnique, Exposé n.**XIX**, 1–9, http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2002-2003____A19_0.

[DPL89] R.J. DiPerna e P.-L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Inventiones Mathematicae **98**, 511-547 (1989).

[Eva98] L.C.Evans, *Partial Differential Equations* Graduate Studies in Mathematics - Vol.19 - AMS - (1998).

[Eyi01] Gregory L. Eyink, *Dissipation in turbulent solutions of 2D Euler Equations*, Nonlinearity **14**, no. 4, 787-802, (2001), http://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/14/4/307.

[Fla09] Franco Flandoli, *Remarks on uniqueness and strong solutions to deterministic and stochastic differential equations*, Metrika **69**, 101-123 (2009), 10.1007/s00184-008-0210-7.

[Fig08] Alessio Figalli, *Existence and uniqueness of martingale solutions for SDEs with rough or degenerate coefficients*, Journal of Functional Analysis **254**, 109-153 (2008).

[Fig09] Alessio Figalli, *Habilitation à Diriger des Recherches*, Université de Nice Sophia-Antipolis - Laboratoire J. A. Dieudonné, (2009).

[Fri95] U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[GT01] D. Gilbarg e N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, (2001).

[HLBL07] M. Hauray, C. Le Bris and P.-L. Lions, *Deux remarques sur les flots généralisés d'équations différentielles ordinaires*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **344** 759-764 (2007).

[Iye06] Gautam Iyer, *A Stochastic Lagrangian Formulation of the Incompressible Navier-Stokes and Related Transport Equations*, PhD Thesis - The University of Chicago, Illinois, (2006).

[Jos05] Jürgen Jost, *Postmodern Analysis*, Universitext - Springer (2005).

[KS88] Ioannis Karatzas e Steven Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 113, Springer-Verlag (1988).

[Keu01] R. Keunings, *Advances in the computer modelling of the flow of polymeric liquids*, Comp. Fluid Dyn. J. **9**, 449-458, (2001).

[LBL] C. Le Bris e P.-L. Lions, *Generalized flows for stochastic differential equations with irregular coefficients*.

[LBL04] C. Le Bris e P.-L. Lions, *Renormalized solutions of some transport equations with partially $w^{1,1}$ velocities and applications*, Annali di Matematica **183**, 97-130 (2004).

[LBL08] C. Le Bris e P.-L. Lions, *Existence and Uniqueness of Solutions to Fokker-Planck Type Equations with Irregular Coefficients*, Communications in Partial Differential Equations **33**, 1272-1317 (2008).

[Lio96] P.-L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics - Vol.1: Incompressible Models*, Oxford Series in Mathematics and Its applications 3, Oxford Science Publications, (1996).

[Lio98] P.-L. Lions, *Sur les équations différentielles ordinaires et les équations de transport*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **326**, Série I, 833-838 (1998).

[LMN06] Milton C. Lopes Filho, Anna L. Mazzucato e Helena J. Nussenzveig Lopes, *Weak solutions, renormalized solutions, and enstrophy defects in 2D turbulence*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **179**, n.3, 353-387, (2006).

[MB02] Andrew J. Majda e Andrea L. Bertozzi, *Vorticity and Incompressible Flow*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Vol. 27, Cambridge University Press, Cambridge, (2002).

[Ons49] L. Onsager, *Statistical Hydrodynamics*, Nuovo Cimento (Supplemento), **6** (1949), 279.

[Per07] Benoît Perthame, *Transport Equations in Biology* Birkhäuser Verlag, Switzerland, (2007).

[Pro] Philip Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations - A New Approach*, Springer-Verlag (1990).

[RW00] L. C. G. Rogers e David Williams, *Diffusions Markov Processes and Martingales* Vol. 2 - Itô Calculus, Cambridge University Press, (2000).

[SV79] D. Stroock e S.R.S. Varadhan, *Multidimensional Diffusion Processes*, Grundlehren Math. Wiss., Vol. 233, Berlin - Springer (1979).

[Vis98] M. Vishik, *Hydrodynamics in Besov spaces*, Arch,. Ration. Mech. Anal. **145**, no. 3, 197-214, (1998).

[Vis99] M. Vishik, *Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in border-line spaces of Besov type*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **32**, no. 6, 769-812, (1999).

[Yud63] V. I. Yudovič, *Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid*, Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. **3**, 1032-1066, (1963).

[Yud95] V. I. Yudovich, *Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid*, Math. Res. Lett. **2**, no. 1, 27-38, (1995).