



Departamento de Engenharia Civil

Faculdade de Ciências e Tecnologia — Universidade de Coimbra

A decorative graphic of a stone arch bridge, rendered in a light gray, textured style. The bridge is shown from a perspective view, with the arch curving upwards. The text is overlaid on the bridge.

**Modelação e Avaliação Estrutural de
Pontes em Arco de Alvenaria**

Gilberto Antunes Ferreira Rouxinol

(Mestre)

**Tese apresentada para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil na
Especialidade de Estruturas pela Universidade de Coimbra**

Junho de 2007

Departamento de Engenharia Civil

Faculdade de Ciências e Tecnologia — Universidade de Coimbra

Modelação e Avaliação Estrutural de Pontes em Arco de Alvenaria



Mestre

Gilberto Antunes Ferreira Rouxinol

Equiparado Professor Adjunto

ESTV-ISPV



Orientador científico

Paulo Manuel Mendes Pinheiro da Providência e Costa

Professor Auxiliar

FCTUC

Orientador científico



José Antero Senra Vieira de Lemos

Investigador Coordenador

LNEC

**Tese apresentada para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil na
Especialidade de Estruturas pela Universidade de Coimbra**

Junho de 2007

À Deolinda,
à Carolina e
à Matilde.

RESUMO

O método dos elementos discretos baseado em elementos discretos poligonais, inicialmente aplicado ao estudo de maciços rochosos, depressa se adaptou e generalizou a outros estudos, como o das estruturas em alvenaria de edifícios e pontes históricas. Este método é particularmente apropriado à representação de estruturas de carácter predominantemente discreto com elementos discretos poligonais, dispensando, contrariamente ao método dos elementos finitos, a modelação das juntas com outro tipo de elemento. Entre as principais características do método encontra-se a possibilidade dos elementos discretos efectuarem deslocamentos e rotações finitos, separarem-se uns dos outros e estabelecerem novos contactos.

As formulações existentes do método dos elementos discretos contemplam modelos constituídos por elementos discretos poligonais, rígidos ou deformáveis, ou por elementos discretos circulares rígidos, quer em 2D quer em 3D. No sentido de alargar a aplicação deste método foi desenvolvido neste trabalho um modelo plano misto de elementos discretos rígidos que associa o elemento discreto poligonal e o elemento discreto circular. Deste modo, é possível efectuar estudos 2D de pontes em arco de alvenaria, simulando o arco e os muros de tímpano com elementos discretos poligonais e o material de enchimento do arco com elementos discretos circulares. Este modelo segue os requisitos clássicos do método dos elementos discretos mas introduz alguns aspectos novos, nomeadamente, a definição de novos tipos de contacto, a adequação do método de detecção de novos contactos, a geração da malha de elementos discretos circulares localizados entre o extradorso do arco e a cota do pavimento, entre outros. O modelo plano desenvolvido permite também a determinação de valores e vectores próprios do sistema constituído pela estrutura e enchimento, sendo os primeiros relevantes para a sua calibração. A aplicação do método misto dos elementos discretos à análise quase estática de estruturas está especialmente vocacionada para o cálculo da carga de colapso, e respectivo modo de colapso, de pontes em arco de alvenaria, sendo apresentado o exemplo de uma aplicação deste tipo.

ABSTRACT

The discrete element method applied to a system of polygonal discrete elements, originally employed in the study of jointed rock masses, was quickly adapted and generalized to other studies, such as the structural behaviour of historical masonry bridges and other buildings. This method is particularly appropriated to the representation with polygonal discrete elements of structures whose character is predominantly discrete, without the need to specifically contemplate the joint with any type of element, as it is required in the finite element method. One of the main characteristics of the method is the possibility of each discrete element to undergo finite displacements and rotations, disconnect from another one and establish new contacts.

The existent formulations of the discrete element method consider models constituted by polygonal discrete elements, rigid or deformable, or by rigid circular discrete elements, either in 2D or in 3D. In order to enlarge the domain of application of this method a rigid mixed plane model of discrete elements was developed in the present work, including both the polygonal and the circular discrete elements. This makes it possible to accomplish 2D studies of masonry arch bridges, modelling the arch and the spandrel walls with polygonal discrete elements and the fill of the arch with circular discrete elements. This model follows the classic requirements of the discrete element method, but required the introduction of some new features, namely, the definition of new types of contact, the adaptation of the detection method to these new types of contact, the generation of the mesh of circular discrete elements between the extrados of the arch and the road surface, among others. The developed 2D algorithm allows the determination of the eigenvalues and eigenvectors of the system structure plus fill, which are very useful to calibrate the numerical model. The application of the mixed discrete element method to the quasi-static analysis of structures is specially indicated for the calculation of the bearing capacity, and respective collapse mode, of masonry arch bridges, and an example of this type is presented.

RÉSUMÉ

La méthode des éléments discrets basé sur les systèmes d'éléments discrets polygonaux, initialement appliquée à l'étude des massifs rocheux, fut rapidement adaptée et généralisée à d'autres études, tel que ceux des maçonneries comme les bâtiments et les ponts historiques. Cette méthode est particulièrement appropriée à la représentation de structures au caractère prédominant discret avec des éléments discrets polygonaux, sans la nécessité de contempler le joint avec un autre type d'élément, comme dans la méthode des éléments finis. Entre les principal vertus de la méthode on trouve la capacité des éléments discrets pouvoir souffrir des déplacements et des rotations finis, de ce séparer les uns des autres et d'établir de nouveaux contacts.

Les formulations existantes de la méthode des éléments discrets comportent les modèles constitués par des éléments discrets polygonaux, rigides ou déformables, ou par des éléments discrets circulaires rigides, ci bien en 2D comme en 3D. Dans le sens d'agrandir son champ d'application, un modèle plan d'éléments discrets rigides mixte a été développé dans ce travail permettant d'assembler l'élément discret polygonal avec l'élément discret circulaire. De cette façon, il devient possible de réaliser des études 2D de ponts en arche de maçonnerie, simulant l'arche et les murs de tympan avec des éléments discrets polygonaux et le matériel de remplissage de l'arche avec des éléments discrets circulaires. Ce modèle suit les principes classiques de la méthode des éléments discrets et introduit quelques nouveaux aspects, à savoir, la définition de nouveaux types de contacts, l'adaptation de la méthode de détection de nouveaux contacts, la génération de la maille d'éléments discrets circulaires entre l'extrados de l'arche et la route glace, parmi d'autres. Le modèle 2D développé permet aussi la détermination des valeurs et des vecteurs propres du système structure y compris le remplissage, très utiles pour calibrer les modèles numériques. L'application de la méthode d'éléments discrets mixte à l'analyse quasi-statique de structures est particulièrement intéressante pour calculer la capacité de charge et respective mode de collapse des ponts en arche de maçonnerie, et on présente un exemple d'application de ce type.

EXTRACTO

El método de los elementos discretos basado en elementos discretos poligonales, inicialmente aplicado a estudios de macizos de roca, rápidamente se adaptó y generalizó a otros estudios, como al de las estructuras en fábrica de edificios y puentes históricos. Este método es particularmente apropiado a la representación de estructuras de carácter predominantemente discreto con elementos discretos poligonales sin la necesidad de contemplar la unión con cualquier otro tipo del elemento a semejanza del método de los elementos finitos. Entre las características principales del método se encuentra la capacidad que los elementos discretos poligonales puedan sufrir desplazamientos y rotaciones finitas, separarse unos de los otros y establecer nuevos contactos.

Las formulaciones existentes del método de los elementos discretos consideran modelos constituidos por elementos discretos poligonales, rígidos o deformables, o por elementos discretos circulares rígidos, ya sea en 2D o en 3D. A fin de ampliar su campo de aplicación fue desarrollado, en este trabajo, un modelo plano mixto de elementos discretos rígidos que asocian el elemento discreto poligonal y el elemento discreto circular. De esta forma son posibles llevar a cabo estudios 2D de puentes de arcos de fábrica, simulando el arco y las paredes del tímpano con elementos discretos poligonales y el material de relleno del arco con elementos discretos circulares. Este modelo sigue las exigencias clásicas del método de los elementos discretos, introduciendo algunos nuevos aspectos, como la definición de nuevos tipos de contactos, la adaptación del método de detección de nuevos contactos, la generación de la malla de elementos discretos circulares localizados entre el extradós del arco y la superficie del camino, entre otros. El 2D algoritmo desarrollado permite la determinación de los valores e vectores propios de la estructura, siendo muy útil para calibrar el modelo numérico. La aplicación del método de elemento discreto mixto al análisis casi estáticas de estructuras está especialmente indicada para el cálculo de la capacidad del carga y el modo de colapso respectivo de puentes de arcos de fábrica, y un ejemplo de este tipo es presentado.

PALAVRAS CHAVE

método dos elementos discretos
pontes (estruturas)
alvenaria, pontes
detecção de contactos
geração de malhas
estimativas de valores próprios
valores próprios
colapso estrutural

KEY WORDS

discrete element method

bridges (structures)

masonry, bridges

detection of contacts

mesh generation

estimate of eigenvalues

eigenvalues

structural collapse

MOTS CLÉ

méthode des éléments discrets
ponts (structure)
maçonnerie, ponts
détection des contacts
génération de malle
estimations des valeurs propre
valeurs propre
collapse structurel

PALABRAS CLAVE

método de los elementos discretos

puentes (estructuras)

arcos de fábrica, puentes

detección de contactos

generación de malla

estimativas de valores propios

valores propios

colapso estructural

AGRADECIMENTOS

O autor agradece a todas as pessoas e organizações que contribuíram para que este trabalho fosse possível e de um modo particular:

Aos orientadores, Prof. Doutor Paulo Manuel Mendes Pinheiro da Providência e Costa e Prof. Doutor José Antero Senra Vieira de Lemos, pela orientação, pelo apoio, pela disponibilidade, pelos incentivos, pela paciência e pela amizade.

Ao Prof. Doutor Adelino Vasconcelos Lopes pelo apoio e pela pronta disponibilidade na resolução de problemas relacionados com o programa Visual FORTRAN, pelos diversos aconselhamentos, pela cedência de rotinas para visualização gráfica síncrona, pelos incentivos e pela amizade.

À ESTV nas pessoas do actual Presidente do Conselho Directivo, Dr. Józse Alberto Ferreira, e do anterior Presidente do Conselho Directivo, Eng.º Fernando Sebastião, pelo apoio prestado à investigação e pela amizade.

Ao Prof. Doutor João Negrão, pelo apoio e pela disponibilidade na resolução de problemas relacionados com o programa Visual FORTRAN, pelos incentivos e pela amizade.

Ao Mestre António Luís Vasconcelos pelas pertinentes sugestões e apoio no desenvolvimento da macro DVB acoplada no programa AutoCAD[®], pelos incentivos e pela amizade.

Ao Prof. Doutor Aníbal Costa e ao Prof. Doutor António Arêde pela disponibilidade, pela cedência de dados sobre casos práticos por eles estudados e pela amizade.

À Mestre Cristina Costa e ao Mestre Pedro Costa pela pronta disponibilidade no esclarecimento sobre matérias relacionadas com ensaios, pela cedência de dados e resultados de trabalhos por eles elaborados e pela amizade.

Ao Prof. Doutor Eduardo Júlio por tudo o que fez, inclusive um protocolo com a Direcção Geral de Edifícios e Monumentos Nacionais, para que se pudesse estudar o nível de segurança da ponte rodoviária em arco de alvenaria de Mondim da Beira em Tarouca e pela amizade.

Ao Mestre Luís Duarte por ter convencido o autor, há cerca de uma década atrás, a iniciar a actual carreira académica, por escolher como tema de trabalho para a sua tese de doutoramento, o desenvolvimento de algoritmos em elementos discretos tendo como base o programa aqui apresentado, que acabou por representar um voto de confiança e dar ânimo ao autor, pelos debates sobre o método dos elementos discretos, pelos incentivos e pela amizade.

Ao Mestre Jonatas Valença pela utilização do programa aqui apresentado na sua dissertação de mestrado intitulada “Técnicas de fotogrametria em engenharia de estruturas”, o que permitiu a sua discussão e conseqüente melhoramento, pelos incentivos e pela amizade.

Ao Mestre José Avelino Padrão pela pronta disponibilidade no esclarecimento sobre matérias relacionadas com ensaios, pelos incentivos e pela amizade.

À Dr.^a Graça Ramos pela pronta disponibilidade no esclarecimento sobre matérias relacionadas com física e matemática, pelos incentivos e pela amizade.

Ao Mestre Manuel Pinto, director do departamento de Engenharia Civil da ESTV-ISPV, pelo apoio, pelos incentivos e pela amizade.

Ao Mestre Ventura Gouveia, director do curso de Engenharia Civil da ESTV-ISPV, pela elaboração de horários lectivos e marcação de exames e vigilâncias de exames compatíveis, pelos incentivos e pela amizade.

Ao Mestre Paulo Mendes e ao Mestre João Marado pela confiança depositada que permitiu ao autor abraçar uma carreira académica que o honra, pelos incentivos e pela amizade.

Ao Mestre António Baptista, ao Mestre Sá e Cruz, ao Mestre Carlos Costa, ao Mestre Francisco Martins, ao Mestre Paulo Costeira, ao Eng.º Ugo Berardinelli, ao Eng.º Paulo Albuquerque, ao Eng.º António Oliveira, ao Mestre Tiago Abreu, ao Mestre Nuno Raposo e ao Mestre Ricardo Almeida pelos incentivos e pela amizade.

Ao Eng.º Aníbal Tavares, ao Prof. Doutor Antunes do Carmo, ao Eng.º Rui Ferreira e ao Eng.º Mário Sá, pelos incentivos e pela amizade.

Ao Mestre Anísio Andrade, pelo envio via e-mail de artigos relacionados com as matérias aqui apresentadas, pelos incentivos e pela amizade.

Ao Prof. Doutor Alfredo Dias, ao Mestre Ricardo Costa, ao Mestre Miguel Ferreira e ao Mestre Diogo Gomes pela pronta disponibilidade na resolução de problemas de carácter informático do Laboratório de Estruturas do DEC-FCTUC, pelos incentivos e pela amizade.

Ao Mestre Pedro Gala e ao Eng.º Paulo Pimenta pelos incentivos e pela amizade.

À Dr.^a Lurdes Rosa e à Eng.^a Célia Botelho pelos incentivos e pela pronta, rápida e eficiente resolução de problemas administrativos.

ÍNDICE GERAL

RESUMO.....	v
ABSTRACT.....	vii
RÉSUMÉ.....	ix
EXTRACTO.....	xi
PALAVRAS CHAVE.....	xiii
KEY WORDS.....	xv
MOTS CLÉ.....	xvii
PALABRAS CLAVE.....	xix
AGRADECIMENTOS.....	xxi
ÍNDICE GERAL.....	xxv
1. Introdução.....	1
1.1. Importância e objectivo do estudo.....	2
1.2. Estruturação da tese.....	4
2. Métodos de análise para pontes em arco de alvenaria — Breve revisão.....	9
2.1. Generalidades.....	9
2.2. Método da análise limite.....	11
2.3. Método dos elementos finitos.....	14
2.4. Método dos elementos discretos.....	19
2.5. Método dos elementos finitos discretos.....	24
2.6. Outros métodos de análise.....	25

3. Os elementos discretos.....	27
3.1. Representação do material sólido	28
3.2. Restrições ao movimento	30
3.3. Características geométricas e de inércia dos elementos discretos	31
3.4. Carregamento — acção variável e acção permanente	33
3.5. Representação do contacto — Hipótese de contacto pontual	34
3.6. Aproximação dos vértices por arcos circulares	38
3.7. Área de influência do contacto	42
3.7.1. Formulação em termos de forças	44
3.7.2. Formulação em termos de tensões	44
3.8. Análise dos contactos pontuais	45
3.8.1. Propriedades geométricas	45
3.8.2. Contacto do tipo vértice-vértice.....	47
3.8.3. Contactos dos tipos vértice-lado e lado-vértice	50
3.8.4. Contacto do tipo círculo-círculo	53
3.8.5. Contactos dos tipos vértice-círculo e círculo-vértice.....	53
3.8.6. Contactos dos tipos lado-círculo e círculo-lado.....	54
3.8.7. Tolerâncias de sobreposição e de separação.....	56
3.9. Propriedades do material da unidade de alvenaria.....	59
3.10. Propriedades do material da junta.....	62
3.10.1. Determinação experimental das propriedades do material das juntas	65
3.10.1.1. Junta unidade/unidade.....	65
3.10.1.2. Junta unidade/enchimento e junta enchimento/enchimento	69
3.10.2. Determinação numérica das propriedades do material da junta enchimento/enchimento	70
3.10.3. Atribuição das propriedades do material das juntas à ponte em estudo	72
3.10.4. Atribuição das propriedades do material das juntas ao modelo de elementos discretos	73
3.11. Modelos constitutivos dos contactos	74
3.11.1. Modelo constitutivo elástico linear.....	74
3.11.2. Modelo constitutivo elástico linear “perfeitamente plástico”	75
3.11.3. Critério de resistência de Mohr-Coulomb.....	76

4. Detecção de contactos.....	79
4.1. Detecção de contactos por verificação directa.....	81
4.2. Detecção de contactos por volumes envolventes.....	81
4.3. Detecção de contactos por decomposição do domínio	82
4.3.1. Detecção de contactos através de árvores binárias	84
4.3.2. Detecção de contactos através de listas	86
4.3.2.1. Detecção de contactos por ordenação (<i>screening</i>).....	87
4.3.2.2. Detecção de contactos de Williams-O'Connor.....	89
4.3.2.3. Detecção de contactos de Munjiza-NBS	90
4.3.2.4. Detecção de contactos de Cundall	92
4.4. Detecção de contactos através da topologia local.....	92
4.5. Método de detecção de contactos proposto	94
4.5.1. Definição do domínio e envolvente rectangular	94
4.5.2. Procura directa — detecção de primeiro nível.....	99
4.5.3. Procura local — detecção de segundo nível	99
4.5.4. Activação da detecção dos contactos.....	101
4.6. Actualização dos contactos	102
5. Aspectos numéricos do método dos elementos discretos	109
5.1. Amortecimento	109
5.1.1. Amortecimento global — Análise estática	111
5.1.2. Amortecimento local — Análise estática	114
5.2. Integração das equações do movimento pelo método das diferenças finitas.....	115
5.2.1. Lei de movimento	115
5.2.1.1. Formulação com amortecimento global (FAG).....	118
5.2.1.2. Formulação com amortecimento local (FAL)	119
5.2.1.3. Formulação com massa modificada (FMM) — Amortecimento global....	120
5.2.1.4. Forças não equilibradas	122
5.2.2. Lei força-deslocamento.....	123
5.2.3. Ciclo de cálculo do método dos elementos discretos	126
5.2.4. Critério de convergência.....	127
5.3. Estados de tensão e de extensão em agregados de ED	130
5.3.1. Revisão bibliográfica	131

5.3.2. Estado de tensão em agregados de elementos discretos circulares.....	133
5.3.3. Estado de extensão em agregados de elementos discretos circulares.....	138
6. Estabilidade numérica.....	141
6.1. Frequências próprias e modos de vibração.....	141
6.1.1. Matrizes de rigidez e das quantidades de inércia.....	142
6.1.2. Assemblagem das matrizes de rigidez e de massa do sistema.....	147
6.1.3. Determinação das frequências e vectores próprios do sistema.....	150
6.1.4. Gestão da utilização de RAM.....	151
6.1.5. Exemplo de aplicação.....	151
6.2. Passo de tempo.....	155
6.2.1. Estimativas para a frequência angular própria máxima.....	156
6.2.2. Demonstração do teorema de Gerschgorin.....	162
6.2.3. Passos de tempo críticos obtidos pelos diferentes métodos.....	163
6.3. Instabilidade numérica na forma de <i>arrested instability</i>	164
6.3.1. Energia cinética e energia potencial elástica.....	166
6.3.2. Energia Inelástica.....	166
6.3.3. Trabalho realizado pelas forças de gravidade e variáveis.....	167
6.3.4. Trabalho realizado pelo amortecimento fictício.....	167
7. Geração das malhas de elementos discretos.....	169
7.1. Definição da malha de elementos discretos poligonais.....	170
7.1.1. Algoritmo para extrair informação relativa aos elementos discretos poligonais de um ficheiro DXF.....	171
7.1.2. Tipos de geração automática de malhas de elementos discretos poligonais.....	172
7.2. Definição da malha de elementos discretos circulares.....	173
7.2.1. Algoritmo para extrair informação de um ficheiro DXF.....	174
7.3. Geração automática de malhas de elementos discretos circulares.....	175
7.4. Método da expansão do raio.....	176
7.4.1. Sistemas de elementos discretos circulares.....	176
7.4.2. Definição dos domínios.....	178
7.4.3. Colocação aleatória de um elemento discreto circular.....	179
7.4.4. Expansão dos raios.....	182

7.4.5. Solução do método dos elementos discretos.....	184
8. Exemplo de aplicação	189
8.1. Características geométricas e propriedades dos materiais	190
8.2. Módulo de deformação do material de enchimento.....	194
8.3. Modelos estrutura/carga.....	196
8.3.1. Modelo 1 — Arco isolado sem o material de enchimento e o seu peso próprio	196
8.3.2. Modelo 2 — Arco isolado com as cargas verticais a simular a acção do enchimento no arco	199
8.3.3. Modelo 3 — Arco com o material de enchimento.....	200
8.3.4. Modelo 4 — Arco com o muro de tímpano.....	202
8.3.5. Conclusão.....	205
9. Conclusões e futuros desenvolvimentos	209
9.1. Conclusões	209
9.2. Desenvolvimentos futuros	212
APÊNDICE A.....	215
APÊNDICE B	217
APÊNDICE C	227
REFERÊNCIAS.....	233
ÍNDICE REMISSIVO DE AUTORES.....	253
ÍNDICE DE TABELAS.....	257
ÍNDICE DE FIGURAS	259
ABREVIATURAS e SIGLAS	265

NOTAÇÃO267

1. Introdução

As pontes em arco de alvenaria, onde se podem incluir os aquedutos, representam, desde o período Romano, uma das mais relevantes tipologias construtivas. Possibilitaram a ligação entre as cidades e o transporte de água até estas. Hoje deixaram de ter importância aquando da decisão do tipo de modelo e material na concepção de uma nova obra de arte, devido aos novos tipos de materiais estruturais, como o betão armado e o aço, e às novas exigências, como a necessidade de vencer vãos cada vez maiores. Em contrapartida adquiriram importância patrimonial, uma vez que permitem manter viva a história e muitas delas ainda estão em perfeitas condições de funcionamento, como é exemplo a Ponte da Formigosa, em arco de alvenaria de pedra natural de xisto, sobre o rio Tuela, no concelho de Mirandela, provavelmente construída na Idade Média, ver Figura 1-1. Isto é, as pontes durarão enquanto durar o mundo como afirma Dora (2005).

A construção de novas pontes em arco de alvenaria é escassa, porém é possível apontar alguns exemplos como o da recentemente inaugurada ponte em arco de alvenaria de pedra natural de granito, Ponte de Vila Fria, sobre o rio Vizela, no concelho de Felgueiras, projectada pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, ver Figura 1-2.



Figura 1-1: Ponte da Formigosa (vista de jusante).



Figura 1-2: Construção de um arco da Ponte de Vila Fria. Figura retirada de (ARÊDE 2005).

1.1. Importância e objectivo do estudo

Nas últimas quatro décadas o volume de tráfego rodoviário, nomeadamente o peso dos veículos de transportes pesados, aumentou significativamente em Portugal exigindo uma resposta diferente daquela para a qual as pontes em arco de alvenaria foram inicialmente “dimensionadas”. Juntando àquela acção a acção do ambiente atmosférico ao longo dos séculos, têm-se as principais causas que levam ao enfraquecimento ou inaptidão das pontes em arco de alvenaria. Por conseguinte, a avaliação periódica da capacidade portante das pontes em arco de alvenaria é fundamental. Não obstante, a verificação da sua segurança não é compatível com os preceitos estabelecidos nos códigos existentes e com as práticas de análise comumente usadas nos dias de hoje, pelo que reclamam por novas metodologias. Tal como afirma Lemos (2005), o desenvolvimento de novos instrumentos de análise no campo das idealizações matemáticas revela-se promissor podendo ser determinante nos estudos de preservação e restauro ou reabilitação, respeitando o carácter histórico das estruturas e garantindo as necessárias condições de segurança. A metodologia aqui apresentada representa um desses contributos.

Assim, o propósito deste trabalho é precisamente apresentar uma nova metodologia que permita avaliar a capacidade de carga das pontes em arco de alvenaria. Atendendo ao carácter predominantemente descontínuo deste tipo de estruturas, foi desenvolvido um programa de elementos discretos (ED) rígidos misto plano, baseado nos pressupostos apresentados em (CUNDALL 1971a, 1971b, 1979), que permite analisar o sistema estrutura mais enchimento através dum modelo descontínuo.

Cundall criou o método dos elementos discretos tendo em vista o estudo de maciços rochosos diaclasados (CUNDALL 1971a) e (LEMOS 1985, 1991, 1994), mas actualmente este método é aplicado ao estudo de muitos outros problemas, incluindo o das estruturas de alvenaria (LEMOS 1995a, 1996b, 1997d, 2003).

O método dos elementos discretos é especialmente apropriado para o estudo de problemas onde uma grande parte da deformação provém dos deslocamentos relativos entre unidades de alvenaria. As estruturas de alvenaria são indubitavelmente exemplos onde o método deve ser considerado, uma vez que a deformação e os modos de rotura dependem sobretudo da junta. O método permite facilmente a consideração da não linearidade geométrica e da não linearidade material, tanto ao nível das juntas como ao do material das unidades de alvenaria (esta última não é considerada neste trabalho). As unidades de alvenaria de pedra natural são representadas por elementos discretos poligonais (EDP) e o material de enchimento do arco é representado por elementos discretos circulares (EDC). As maiores dificuldades na aplicação do método dos elementos discretos prendem-se com a caracterização (1) da geometria dos elementos constituintes, devido à escassa informação no caso das construções históricas, e (2) das propriedades dos materiais, uma vez que a alvenaria é fortemente heterogénea e descontínua.

O principal objectivo do estudo foi desenvolver um programa computacional que possibilitasse a inclusão de elementos discretos rígidos circulares no modelo de elementos discretos rígidos poligonais, tendo para o efeito sido adoptado a linguagem de programação científica FORTRAN (*Formula Translating*) no ambiente Visual Compaq (COMPAQ 2002).

Desenvolvido o programa de elementos discretos rígidos misto foi ainda possível:

- (1) averiguar a sensibilidade de alguns parâmetros de entrada fundamentais para calibrar o modelo, nomeadamente o tipo de formulação forças/tensão, o tipo de amortecimento fictício, o passo de tempo;
- (2) avaliar a qualidade da sua aplicação na determinação da carga de colapso de uma ponte em arco de alvenaria sujeita a um carregamento estático.

1.2. Estruturação da tese

O trabalho teve como ponto de partida um programa de elementos discretos poligonais em FORTRAN desenvolvido por um grupo de trabalho do Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC), orientado por Vieira de Lemos. Esse programa (52 kB) é constituído pelas seguintes rotinas:

- (1) ficheiro de dados;
- (2) propriedades geométricas (área, centro de massa e inércia);
- (3) movimento com amortecimento fictício global;
- (4) distância de arredondamento;
- (5) detecção de contactos;
- (6) definição do contacto vértice-vértice e lado-vértice-lado;
- (7) actualização dos contactos;
- (8) forças de contacto;
- (9) geração automática de arcos de volta perfeita e de paredes com e sem sobressalto;
- (10) apresentação no monitor de alguns resultados (o modelo, os vectores deslocamento e velocidade dos vértices).

As rotinas (2), (9) e (10) não foram sujeitas a alterações e as restantes sofreram alterações ou não foram consideradas. As rotinas alteradas e novas produzidas no decorrer deste trabalho totalizam 1352 kB. No apêndice A apresenta-se um fluxograma resumo do programa desenvolvido.

A formulação estabelecida e apresentada nos capítulos seguintes segue os preceitos das duas formulações planas do método dos elementos discretos rígidos: a formulação com os elementos discretos rígidos poligonais; a formulação com os elementos discretos rígidos circulares. A junção das duas formulações consiste fundamentalmente em acomodar os

conceitos de uma e outra formulação, nomeadamente, na definição dos contactos, na detecção de contactos, nos modelos constitutivos para os contactos, na determinação do passo de tempo, no tipo de amortecimento, na lei força deslocamento, na lei de movimento, na aplicação da acção variável, etc.

Todos os algoritmos implementados e apresentados foram objecto de verificação. Entende-se por verificação o processo que visa desvendar as fontes de erros, nomeadamente:

- (1) erros lógicos — muitos destes erros surgiram nas diversas rotinas de contactos e foram corrigidos através da introdução de pequenas perturbações através de factores multiplicativos nos valores de comparação no comando IF de igualdade;
- (2) a precisão das variáveis relativas à problemática dos contactos foi verificada e entendeu-se declará-las de dupla precisão;
- (3) erros na entrada de dados — algoritmos para o efeito foram desenvolvidos para avisar o utilizador e para interromper o processo (por exemplo, se os dados relativos aos vértices dos elementos discretos poligonais não obedecem à ordem pré-estabelecida).

A formulação com elementos discretos deformáveis não foi implementada por exigir um tratamento diferenciado, quer ao nível dos contactos, designadamente, na sua definição e detecção, quer na geração automática da malha de elementos finitos no interior de cada elemento discreto, quer ainda nas alterações na estruturação de ficheiros de armazenamento de dados. Toda a escrita das rotinas para os elementos discretos rígidos é de raiz pelo que a introdução da deformabilidade dos elementos discretos exigiria mais tempo, além de que se desviaria do objectivo pré-estabelecido para este trabalho. No apêndice B é apresentada uma pequena nota sobre elementos discretos deformáveis com o objectivo de esclarecer a principal diferença entre as formulações rígida e deformável.

Segue-se uma breve descrição dos capítulos que se seguem a este capítulo introdutório.

No capítulo 2 são abordados os diferentes tipos de análises existentes para o estudo de estruturas de alvenaria.

No capítulo 3 são definidos os elementos discretos rígidos, incluindo as restrições ao movimento, a sua caracterização geométrica e a caracterização dos contactos. A interacção entre os dois tipos de elementos discretos é apresentada de uma forma pormenorizada. É estabelecida a hipótese de contacto pontual e os vértices dos elementos discretos poligonais são arredondados de modo a garantir uma definição unívoca da interacção entre os elementos discretos. É definida a área de influência dos contactos e é efectuada uma abordagem detalhada sobre os contactos. São enumeradas as propriedades que permitem definir um contacto e são definidos os oito tipos de contacto (vértice-vértice, vértice-lado, lado-vértice, círculo-círculo, vértice-círculo, lado-círculo, círculo-vértice e círculo-lado). É apresentado o problema das tolerâncias de sobreposição necessárias para avaliar a efectividade de um contacto. São apresentadas a determinação e atribuição das propriedades da junta. Por último, descrevem-se os modelos constitutivos elástico linear e elástico linear “perfeitamente plástico” em conjunto com o critério de resistência de Mohr-Coulomb para o corte, que se revelaram adequados para caracterizar o comportamento da junta.

No capítulo 4, é feito um estudo pormenorizado sobre a detecção dos contactos. São apresentados os diversos métodos existentes e é exposto o método proposto, baseado no método dos volumes envolventes e no método de Cundall.

No capítulo 5, são estabelecidas as equações que permitem obter a solução numérica do método dos elementos discretos. É abordada a questão dos vários tipos de amortecimento fictício, o amortecimento não viscoso local (amortecimento de Cundall) e o amortecimento viscoso global, incluindo o adaptável. São apresentadas genericamente a lei de movimento e a lei força-deslocamento acoplada a um modelo constitutivo. Seguidamente são enunciados os critérios de convergência. Finalmente, inclui-se uma secção sobre estados de tensão e de extensão em agregados de elementos discretos circulares.

No capítulo 6, são definidos alguns assuntos complementares. Dada a relevância das frequências próprias, tanto para calibrar o modelo como para estabelecer o passo de tempo, também é apresentada a formulação do problema de valores e vectores próprios e escrito o respectivo algoritmo. São apresentados vários métodos para a determinação do passo de tempo, requisito fundamental e muito sensível do método dos elementos discretos. A

validade de um método de integração no tempo exige que determinados requisitos sejam satisfeitos, designadamente a verificação de equilíbrio energético, pelo que se apresenta a formulação das expressões necessárias a tal verificação.

No capítulo 7, são apresentados os vários métodos para a geração das malhas de elementos discretos. A geração automática da malha de elementos discretos poligonais permite criar as formas em arco circular e segmentado, de paredes com e sem sobressalto e dos muros de tímpano. A geração automática da malha de elementos discretos circulares, através do método da expansão do raio, é utilizada para definir o enchimento do arco. Por último são descritos os procedimentos relativos à leitura de malhas desenhadas com o auxílio do programa AutoCAD[®] (2006) e à visualização do modelo de elementos discretos naquele programa.

No capítulo 8, é apresentado um exemplo que permite validar o modelo desenvolvido. A ponte de Bridgmill, no Reino Unido, foi sujeita nos anos 90 do século passado a um ensaio de carga realizado por Hendry *et al.* (PAGE 1993, 1995), no decurso do qual foi registada a carga máxima de pré-coloapso. Com a aplicação do método dos elementos discretos foram determinadas soluções numéricas para vários modelos:

- (1) apenas o arco isolado;
- (2) o arco isolado e as cargas que simulam o peso do material de enchimento;
- (3) o arco e o enchimento;
- (4) o arco e os muros de tímpano.

É efectuada a análise dos resultados numéricos e avaliada a qualidade desta solução por comparação com os resultados experimentais.

No capítulo 9, são apresentadas as principais conclusões e propostas para futuros desenvolvimentos.

2. Métodos de análise para pontes em arco de alvenaria — Breve revisão

Neste capítulo são tecidas algumas considerações sobre modelos e métodos e são apresentados os métodos de análise mais propalados para pontes em arco de alvenaria. A evolução histórica de 1675 a 1960 sobre as várias teorias aplicadas à análise de pontes em arco de alvenaria é apresentada em (ROUXINOL 1999). Nesta referência são também descritos os métodos de análise mais antigos, dos quais se destacam os métodos gráficos (o polígono funicular e de forças, o arco de três rótulas e a regra do terço central), o método elástico de Pippard e o método de avaliação de MEXE/MOT. Os métodos de análise aplicados hoje em dia ao estudo de pontes em arco de alvenaria são sobretudo o método da análise limite (método plástico), o método dos elementos finitos e, mais recentemente, o método dos elementos discretos e o método dos elementos finitos discretos.

2.1. Generalidades

Nesta secção é clarificado o conceito de modelo e de método (LEMOS 1999). Genericamente entende-se por modelo o conjunto de hipóteses que permite representar o sistema físico. Na mecânica das rochas é feita uma distinção importante entre os modelos

contínuos e os modelos descontínuos dependendo do tratamento das juntas. A idealização da geometria, por exemplo 2D ou 3D, e a forma de representar a interacção, por exemplo da estrutura com a fundação, são também características gerais dos modelos. As características fundamentais do comportamento dos materiais são descritas através de modelos constitutivos. Na mecânica das rochas, os modelos constitutivos podem referir-se a várias componentes do sistema, como por exemplo, o material das unidades de alvenaria, as interfaces, o reforço e os elementos de suporte.

Uma vez definido o modelo global e os modelos para os vários materiais é requerido um método que permita analisar uma representação particular do sistema físico, isto é, um modelo particular de uma determinada estrutura. A solução pode ser obtida através de vários métodos:

- (1) algebricamente quando os problemas são simples (e.g. a coluna de Euler);
- (2) através de modelos físicos à escala realizados em laboratório (e.g. os modelos de barragens);
- (3) através de métodos numéricos (e.g. diferenças finitas, elementos finitos, elementos discretos).

A distinção entre os conceitos de modelo e método é clara nos casos em que a teoria está bem estabelecida, como as teorias da elasticidade e da plasticidade. Por exemplo, quando o método dos elementos finitos ou o método dos elementos de fronteira são utilizados para resolver um problema elástico os pressupostos fundamentais são os mesmos, apenas o método numérico difere e espera-se uma solução similar. No caso dos modelos descontínuos, por exemplo na representação de um conjunto de unidades de alvenaria, pode haver pressupostos implícitos no método numérico que fazem com que a maneira de proceder seja diferente. Por exemplo, duas formulações de elementos discretos podem corresponder a diferentes modelos, devendo ser claramente identificados a interacção entre as unidades de alvenaria, a deformabilidade das unidades de alvenaria, o tipo de amortecimento fictício, para que os resultados possam ser correctamente interpretados.

Em engenharia a representação de um sistema físico através de um modelo envolve sempre um número de simplificações e aproximações significativo. Reproduzir todos os detalhes do sistema real é certamente impossível e o modelo apenas considera alguns aspectos

específicos de interesse. O processo para construir um modelo a usar em engenharia é muito selectivo quando comparado com os concebidos para as ciências da física. Na engenharia o objectivo não é descrever a “realidade” mas examinar aspectos específicos de como a estrutura deve ser dimensionada ou avaliada. Assim um modelo pode ser visto como uma ferramenta para responder a questões específicas, nomeadamente, sobre a capacidade da estrutura para cumprir determinados requisitos. Nesta perspectiva, o desígnio da análise é regular todos os processos de modelação e de selecção das características a serem incluídas na idealização. A inclusão de mais detalhes não melhora necessariamente o modelo. Pelo contrário, o objectivo é representar apenas as características essenciais que regem o comportamento da estrutura. O processo de modelação é também um factor determinante a este respeito. Os recursos computacionais estão continuamente a expandir-se, porém, a dimensão do modelo, a sua complexidade e o tempo de processamento são ainda hoje limitados. O tempo consumido na preparação dos dados de entrada e na interpretação dos resultados deve igualmente ser tido em consideração. Os modelos mais simples podem revelar-se instrumentos mais eficazes, se apresentarem capacidade suficiente para reproduzir os aspectos mais relevantes da resposta do sistema.

2.2. Método da análise limite

Kooharian, em 1953, mostrou ser possível aplicar os teoremas da análise limite ao estudo de estruturas de alvenaria (KOOHARIAN 1953) e (HEYMAN 1982). Porém, tal pressupõe que sejam aceites as seguintes hipóteses estabelecidas por Couplet e Coulomb (PAGE 1993):

- (1) a alvenaria não resiste a tensões de tracção;
- (2) as tensões na alvenaria são suficientemente baixas para que a resistência à compressão do material possa ser admitida infinita;
- (3) o módulo de elasticidade das unidades de alvenaria é infinito;
- (4) não ocorre deslizamento entre as unidades de alvenaria.

O EC6 (1988) na secção 4.4.1 toma em consideração a primeira hipótese. A hipótese (2) é insegura, podendo nalguns pontos da estrutura surgir concentrações de tensões que provocam o esmagamento local.

Heyman, em 1966, estabelece que a teoria da análise limite originalmente desenvolvida

para estruturas porticadas de aço pode ser adaptada à análise de estruturas de alvenaria. Os numerosos estudos por si publicados mostram que o método plástico é um método adequado para a análise de arcos de alvenaria (HEYMAN 1966, 1969, 1972, 1973, 1977, 1980, 1982, 1995a, 1995b, 1998), ver Figura 2-1. Heyman adopta geralmente leis de escoamento associadas, mas esta condição pode ser relaxada, ver por exemplo o modelo de análise limite com leis de escoamento não associadas utilizado por Lourenço (1998) e Orduña *et al.* (2005a, 2005b).

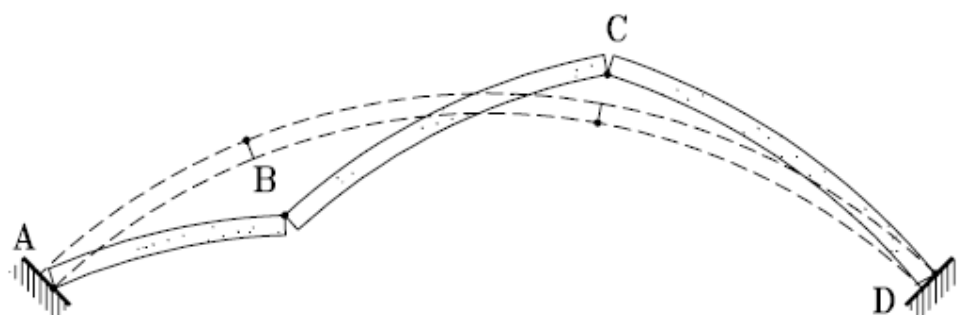


Figura 2-1: Mecanismo de colapso de um arco de alvenaria. Figura retirada de (BUFFARINI 2006).

Basicamente o método plástico permite a determinação de um factor de segurança relativo ao colapso do sistema estrutural que, no caso das pontes em arco de alvenaria, resulta da formação de rótulas entre as unidades de alvenaria. O factor de segurança é definido pela razão entre o nível de carga que provoca o colapso da estrutura e o nível de carga de serviço. Para efeito de verificação de segurança, a análise limite baseia-se fundamentalmente em dois teoremas, o teorema seguro e o teorema da unicidade, que aplicados ao caso das pontes em arco de alvenaria se enunciam da seguinte forma:

Teorema Seguro (ou do limite inferior): Se a linha de impulso, de um arco de alvenaria, está em equilíbrio com as cargas, incluindo o seu peso próprio, e permanece no seu interior em todas as secções do arco, então o arco é seguro. Esta solução de equilíbrio diz-se estaticamente admissível.

Teorema da Unicidade: Se a linha de impulso, de um arco de alvenaria, está em equilíbrio com as cargas, incluindo o seu peso próprio, permanece no seu interior em todas as secções do arco, e permite ainda a criação de um número de rótulas suficiente para a formação de um mecanismo, então o colapso é inevitável.

Diversos autores apresentam aplicações recentes da análise limite a pontes em arco de alvenaria. Gilbert *et al.* (1994) utilizam o método dos blocos rígidos para determinar as cargas de colapso de estruturas em alvenaria, existindo já diversas aplicações no campo das pontes em arco de alvenaria (MELBOURNE 1995a, 1995b, 1997), ver Figura 2-2.

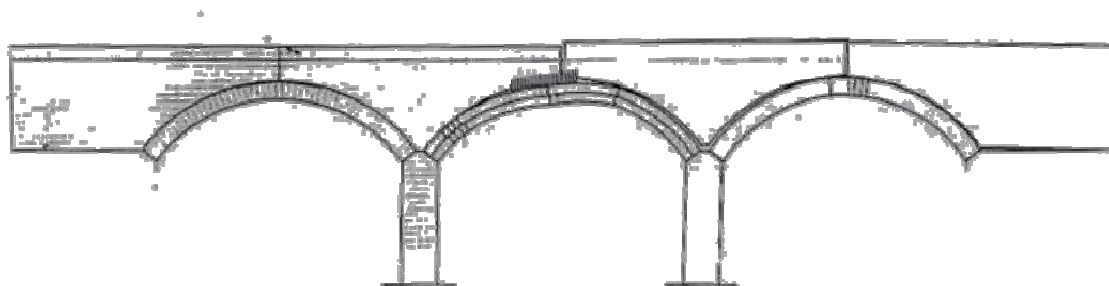


Figura 2-2: Modo de colapso de uma ponte em arco de alvenaria. Figura retirada de (MELBOURNE 1995a).

Migliore *et al.* (2006) utilizam um modelo de blocos rígidos onde o mecanismo de colapso é obtido através de uma aproximação energética; Pantano *et al.* (2006) aplicam o método num modelo 3D; Roca *et al.* (2006) aplicam a análise limite num modelo funicular 3D; Romano *et al.* (2006) aplicam a análise limite para comparar o comportamento de pontes em arco de alvenaria com geometrias distintas; Giordano *et al.* (2006) determinam a carga horizontal de colapso de uma ponte, comparam-na com a carga obtida utilizando o método dos elementos finitos, e provam que a utilização de expressões simples fornecem uma rápida resposta para avaliar a capacidade resistente de pontes sujeitas a acções sísmicas; Buffarini *et al.* (2006) estudam o reforço de pontes com plástico reforçado com fibras (FRP) tendo em consideração os modos de colapso associados à formação de rótulas que se podem desenvolver com as secções reforçadas, ver Figura 2-3.

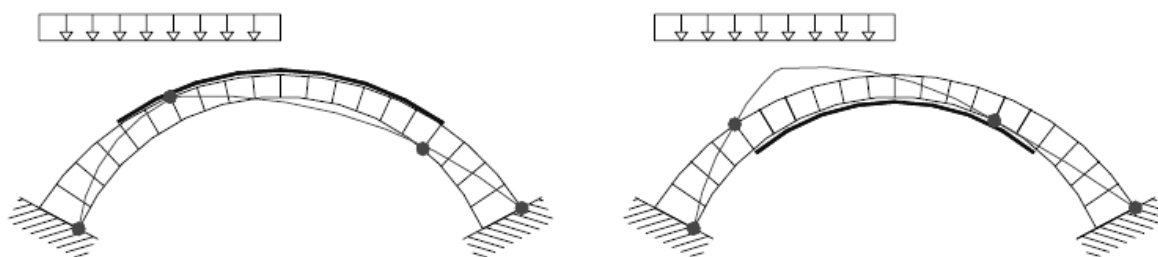


Figura 2-3: Localização das rótulas plásticas e da linha de impulso para um reforço FRP no intradorso e no extradorso do arco. Figura retirada de (BUFFARINI 2006).

2.3. Método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos foi estabelecido em 1953, na Boeing, em Seattle nos Estados Unidos da América, para o cálculo da estrutura das asas dos aviões, tendo as primeiras publicações escritas por Turner, Clough, Martin e Topp surgido apenas em 1956 (FREY 2001). Desde então, o método dos elementos finitos vulgarizou-se a muitos domínios da matemática e da engenharia. A formulação do método encontra-se em várias publicações, onde se destacam (ZIENKIEWICZ 1977), (BATHE 1976, 1982) e (HUGHES 1987).

No método dos elementos finitos a discretização das equações diferenciais que regem o problema é efectuada para um domínio finito que se designa de elemento finito. A assemblagem dos elementos, considerando as acções e as condições de fronteira, fornece um sistema de equações algébricas para o sistema estrutural. A resolução deste sistema fornece os deslocamentos nodais na estrutura, que são posteriormente utilizados para determinar o campo de tensões.

Os tipos de elementos finitos são numerosos, existindo elementos de barra, de viga, de casca, de placa, sólidos, etc., que permitem modelar as diferentes partes constituintes das estruturas de alvenaria como os pilares, os arcos, as abóbadas e as paredes. Frequentemente admite-se o modelo elástico linear. A não-linearidade material pode ser conseguida de forma aproximada reduzindo o módulo de elasticidade ou introduzindo rótulas em determinadas localizações do modelo evitando a rigidez irrealista de certas ligações nodais (LEMOS 1998a). A não-linearidade material pode igualmente ser introduzida através de modelos robustos como o de Molins *et al.* (1997), baseado em elementos 3D curvos de secção transversal variável de comportamento elástico linear para esforços de compressão e de tracção, com limite para este último. Desenvolvimentos recentes permitiram o estabelecimento de macro-elementos finitos que permitem modelar, através de um número reduzido de elementos, paredes inteiras de alvenaria e pavimentos, reduzindo consideravelmente o número de graus de liberdade do sistema. Por exemplo em (BRENCICH 1998) os resultados do modelo são comparados com os resultados obtidos em ensaios de painéis de tijolos. Lourenço (1996) justifica a aplicação daqueles elementos nos casos em que a estrutura é composta por paredes de dimensões suficientemente grandes para que os níveis de tensão ao longo do macro-elemento sejam aproximadamente

uniformes. Para reproduzir melhor o comportamento da alvenaria, a não-linearidade material é introduzida recorrendo a modelos constitutivos elasto-plásticos para os esforços de compressão e de corte, e modelos lineares elásticos, com limite, para os esforços de tracção. A dependência da resistência ao corte relativamente ao esforço de compressão é tida em consideração através do critério de rotura de Mohr-Coulomb.

Existem dois tipos de modelos de elementos finitos, os contínuos e os descontínuos. Os modelos contínuos não fazem qualquer distinção entre a unidade de alvenaria e a junta e tratam a alvenaria como um meio anisotrópico homogéneo contínuo. Tanto a linearidade como a não linearidade material podem ser consideradas, justificando-se mais a adopção da primeira, por exemplo, se o sistema estrutural é grande e complexo, e da segunda, por exemplo, quando é requerida uma análise dinâmica. A consideração do modelo de elementos finitos contínuos com linearidade material é muito vantajosa para averiguar a distribuição dos níveis de tensão em toda a estrutura para posteriormente simplificá-la, reduzindo o modelo da estrutura em submodelos (LEMOS 1998a). Para estes submodelos torna-se viável a adopção de modelos constitutivos mais complexos.

Os modelos descontínuos de elementos finitos representam explicitamente a junta através da introdução de um elemento finito de junta. Esta possibilidade foi introduzida em Page (1978), onde a junta é representada pelo elemento de junta de Goodman (GOODMAN 1968). Esta aproximação é denominada de micro-modelação e utiliza elementos contínuos para representar as unidades de alvenaria e elementos de junta de espessura finita, ver Figura 2-4 (b), ou nula, ver Figura 2-4 (c), para representar a interface entre as unidades de alvenaria.

A modelação detalhada da micro-modelação, Figura 2-4 (b), representa a argamassa da junta por um elemento contínuo e a interface unidade/argamassa por um elemento de junta de espessura nula. Esta modelação é apropriada para o estudo detalhado da distribuição das tensões de modelos construídos e ensaiados em laboratório (ZILJ 1997). De qualquer forma, a micro-modelação simplificada tem-se mostrado suficientemente precisa na maior parte das aplicações. Em ambos os modelos de micro-modelação, detalhado e simplificado, as unidades de alvenaria são discretizadas em elementos contínuos e por vezes é considerada uma junta vertical, com propriedades materiais iguais às da unidade de

alvenaria, para possibilitar a rotura da unidade de alvenaria por efeito dos esforços de tracção paralelos à junta de assentamento, ver Figura 2-5.

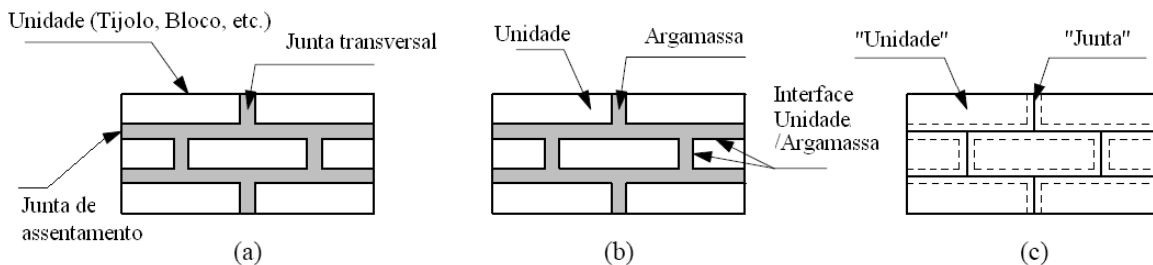


Figura 2-4: Método dos elementos finitos descontínuos: (a) alvenaria; (b) modelo detalhado da micro-modelação; (c) modelo simplificado da micro-modelação. Figura adaptada de (LOURENÇO 1996).

Na bibliografia especializada podem ser encontradas diversas aplicações do método dos elementos finitos a estruturas em arco de alvenaria. Por exemplo, para estudar o efeito do material de enchimento Thavalingam *et al.* (2001) utilizam o método dos elementos finitos e o dos elementos discretos, este através de dois modelos, e comparam os resultados com os obtidos experimentalmente, ver Figura 2-12 e Figura 2-13. Costa (2002) analisa o comportamento da ponte da Lagoncinha sob a acção do tráfego rodoviário, através do método dos elementos finitos, ver Figura 2-6.

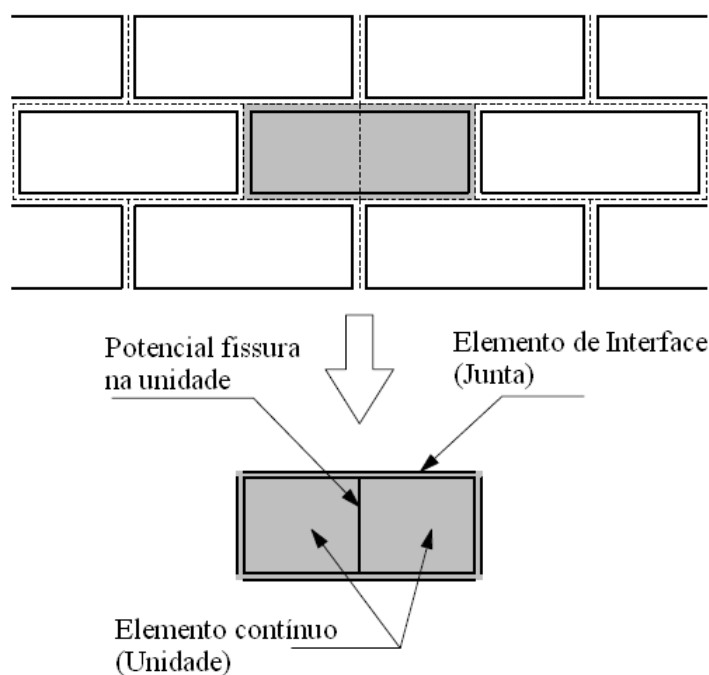


Figura 2-5: Introdução de junta vertical. Figura adaptada de (LOURENÇO 1996).



Figura 2-6: Modelo refinado de elementos finitos. Figura retirada de (COSTA 2002).

Gago *et al.* (2003) utilizam os resultados de um ensaio experimental realizado na ponte em arco de alvenaria de Bargower para: (1) verificar a capacidade de um modelo numérico de elementos finitos para simular o comportamento real da ponte, ver Figura 2-7; (2) calibrar os parâmetros de alguns modelos não-lineares.

Calderini *et al.* (2006) apresentam o estudo do reforço de uma ponte e utilizam o método dos elementos finitos. A estrutura é modelada através de elementos de casca (pilares, aduelas, tímpano e laje), de viga (vigas de reforço de betão armado e tirante) e sólidos (enchimento e encontro), ver Figura 2-8.

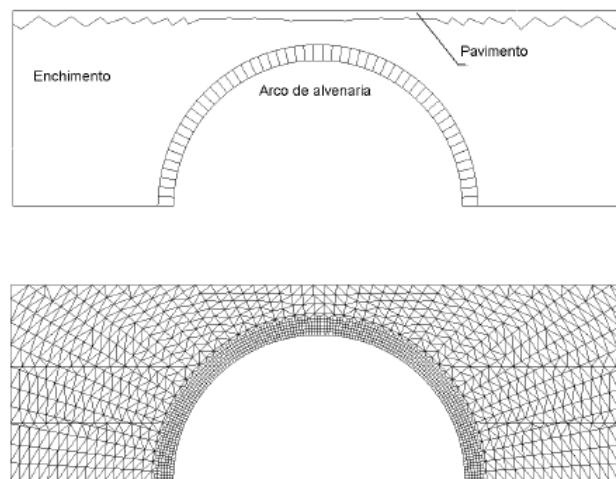


Figura 2-7: Malha de elementos finitos. Figura retirada de (GAGO 2003).

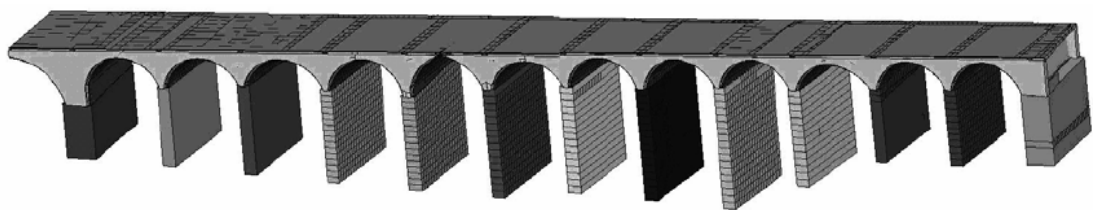


Figura 2-8: Representação global de um modelo de elementos finitos. Figura retirada de (CALDERINI 2006).

Pardeep *et al.* (2006) após a realização em laboratório, de dois modelos de arcos de alvenaria, sem e com tímpano mais enchimento, ver Figura 2-9, compararam os resultados

dos ensaios com os obtidos através do método dos elementos finitos.

Miri *et al.* (2006) realizam dois modelos de arco de alvenaria, um novo e outro rehabilitado, e comparam os resultados com os obtidos aplicando o método dos elementos finitos, ver Figura 2-10. Bandyopadhyay (2006) utiliza o método dos elementos finitos para comparar os resultados relativos a deslocamentos com os medidos experimentalmente para três níveis e posições de carga. Cecchi *et al.* (2006) utilizam o método dos elementos finitos para determinar as causas do colapso da ponte em arco de alvenaria de Augusto, determinar a geometria do arco através de técnicas da fotogrametria e definir a reconstrução da ponte.

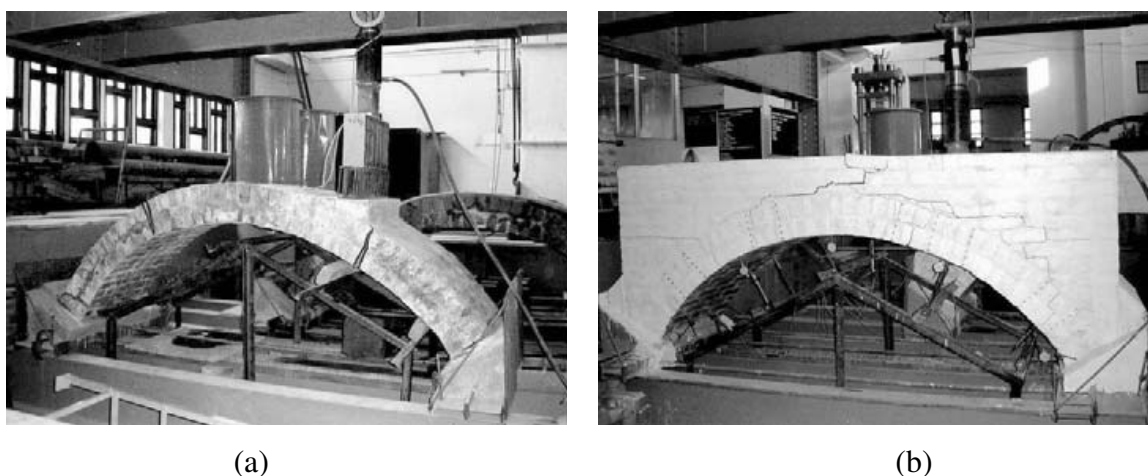


Figura 2-9: Desenvolvimento da fissuração no modelo construído em laboratório. Arco: (a) isolado; (b) com tímpano mais enchimento. Figura retirada de (PARDEEP 2006).

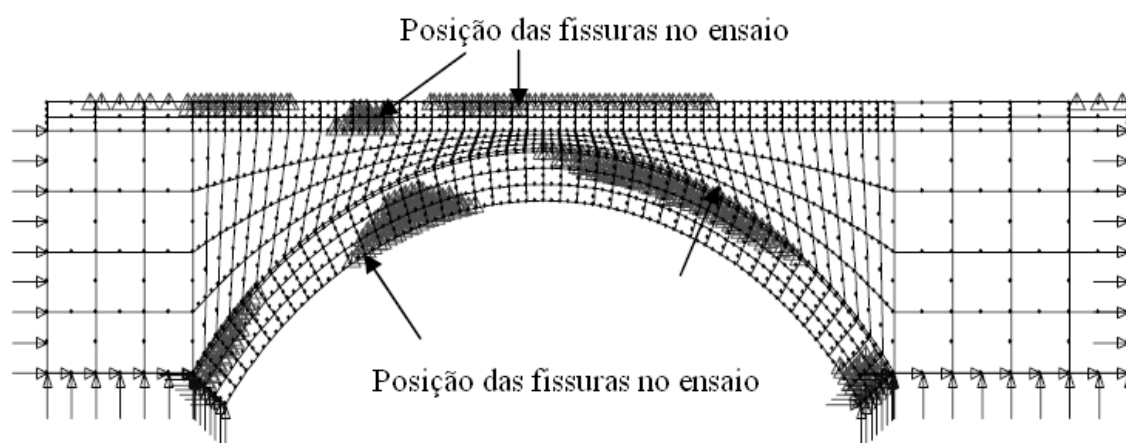


Figura 2-10: Posição das rótulas do modelo rehabilitado de elementos finitos. Figura adaptada de (MIRI 2006).

2.4. Método dos elementos discretos

O método dos elementos discretos foi inicialmente proposto por Cundall (1971a, 1971b) para o estudo de maciços rochosos diaclasados, representados por um conjunto de elementos discretos poligonais rígidos independentes contactando entre si ao longo de juntas. Posteriormente foi introduzida a deformação daqueles elementos e o método generalizou-se a 3D (CUNDALL 1988) e (HART 1988). O modelo com elementos discretos circulares surgiu em 1979 (CUNDALL 1979) para o estudo de solos. Mais tarde surgem modelos 3D com elementos esféricos seguindo-se outros melhoramentos tal como a utilização de macro-partículas para representar geometrias irregulares (LEMOS 2006).

No método dos elementos discretos as equações de movimento dos elementos discretos são integradas no tempo, considerando-se grandes deslocamentos através da actualização sequencial da posição desses elementos. Esta técnica numérica permite efectuar simulações estáticas e dinâmicas, fazendo com que o método dos elementos discretos se tenha generalizado a outros campos da engenharia nos quais esta aptidão é requerida, tal como os modelos micro-mecânicos dos solos e outros meios granulares (GHABOUSSI 1990), (TING 1995), (POTYONDY 1996, 2004) e (KONAGAI 1998), escoamentos (LORIG 1995), fractura dos sólidos (HOCKING 1987), (MUNJIZA 1992b) e (TRENT 1995), fractura por explosão (XIAN 1991), mecânica do gelo (HOPKINS 2004) e mais recentemente a estruturas de alvenaria (VIEIRA 1997), (LEMOS 1997b, 1997c, 1998a, 1998b, 1998c), (SÎNCRAIAN 2001), (THAVALINGAM 2001) e (ROUXINOL 2006).

Cundall *et al.* (1992) definem o método dos elementos discretos como um método numérico capaz de (1) reproduzir deslocamentos e rotações finitos dos elementos, incluindo a separação total entre os elementos e (2) reconhecer novos contactos automaticamente à medida que os cálculos progridem. Os mesmos autores identificam quatro classes principais de códigos de programação que estão de acordo com a definição do método dos elementos discretos:

Classe (1) — Método dos elementos discretos

Como já referido anteriormente, este método utiliza um algoritmo explícito de integração no tempo para resolver directamente as equações de movimento dos elementos discretos.

Os elementos discretos poligonais podem ser rígidos ou deformáveis e os contactos entre os elementos discretos são deformáveis, isto é, é permitida uma pequena sobreposição entre os elementos discretos. Tratando-se de elementos discretos circulares estes são considerados rígidos.

A Figura 2-11 mostra uma aplicação do método com elementos discretos poligonais rígidos 3D (LEMOS 1996a), e a Figura 2-12 (b) e a Figura 2-13 (b) mostram, uma aplicação do método com elementos discretos circulares rígidos (THAVALINGAM 2001).

Como referido no capítulo introdutório, proporcionar ao método dos elementos discretos a possibilidade de admitir elementos discretos rígidos poligonais e circulares foi o propósito deste trabalho, tendo como base a formulação de cada um deles.

Existem duas formulações para representar a deformação dos elementos discretos poligonais: (i) elemento discreto totalmente deformável (formulação que se generalizou); (ii) elemento discreto de deformação simples. Estas duas formulações são apresentadas de uma forma sucinta no apêndice B. Podem ser atribuídas ao elemento discreto relações constitutivas elásticas ou elásto-plásticas.

Em Cundall *et al.* (1978) foi proposta uma formulação permitindo a fractura do elemento discreto. O elemento discreto é automaticamente dividido em dois de acordo com um determinado critério baseado na distribuição das forças de tracção.

Classe (2) — Método modal

Este método, no caso dos elementos serem rígidos, é similar ao método dos elementos discretos, e no caso de serem deformáveis, corresponde a uma sobreposição modal (WILLIAMS 1987). O movimento e a deformação do elemento discreto são representados pela sobreposição dos modos fundamentais do elemento. A deformação é igual à soma dos modos normais permitindo o desacoplamento das equações modais. A solução das equações desacopladas é obtida através do método explícito das diferenças centrais, sendo a configuração final obtida por sobreposição modal. O método é adequado para sistemas descontínuos, muito soltos, e para simulações dinâmicas de sistemas densos. Hocking *et al.* (1985) desenvolveram o respectivo programa. Algumas aplicações do programa a

problemas da mecânica do gelo e das rochas, envolvendo fractura, são apresentadas em (HOCKING 1992).

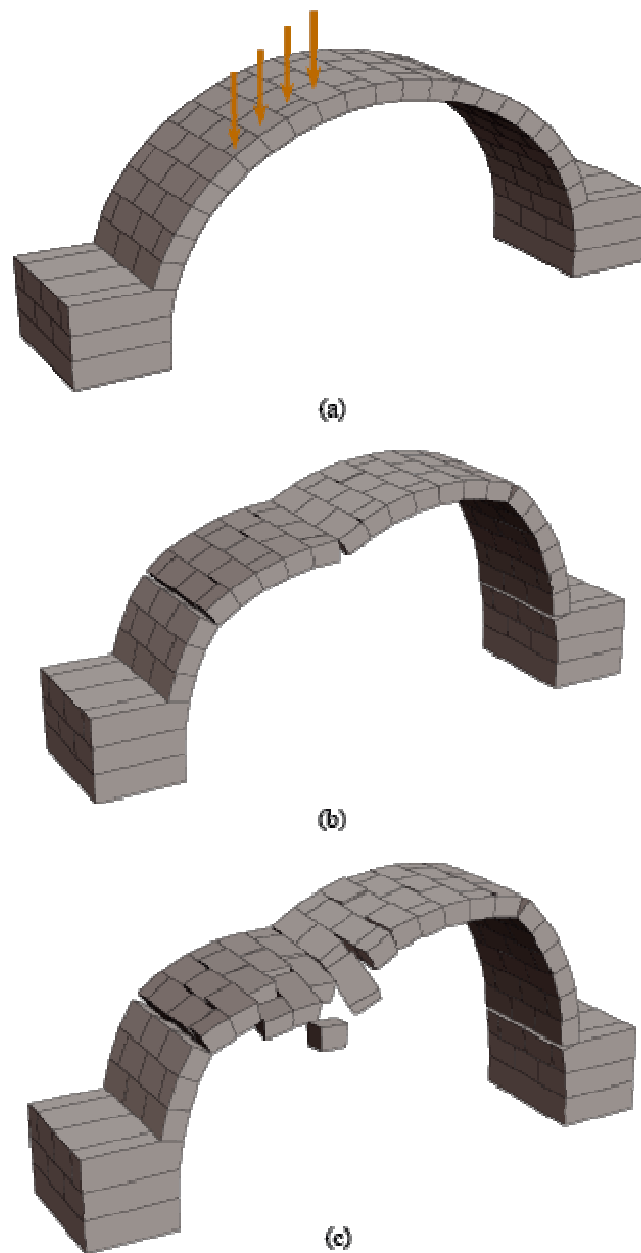


Figura 2-11: Modelo 3D de um arco de alvenaria: (a) carga assimétrica; (b) e (c) processo de colapso. Figura retirada de (LEMOS 1996a).

Classe (3) — Método da deformação descontínua (DDA)

Neste método assume-se que os contactos são rígidos e os elementos discretos rígidos ou deformáveis. A condição de não sobreposição é conseguida através de um esquema iterativo e a deformabilidade é considerada pela sobreposição dos modos de deformação. A Figura 2-12 (a) e a Figura 2-13 (a) mostram uma aplicação deste método (THAVALINGAM 2001). É uma técnica recente e foi desenvolvida por Shi *et al.* (1984)

com aplicação na mecânica das rochas (SHI 1988b, 1989). Um outro método que introduz melhoramentos ao nível dos contactos é o método do Lagrangeano aumentado (LIN 1995). O método determina as forças de contacto através de uma combinação iterativa entre os multiplicadores de Lagrange e o parâmetro de penalização do contacto.

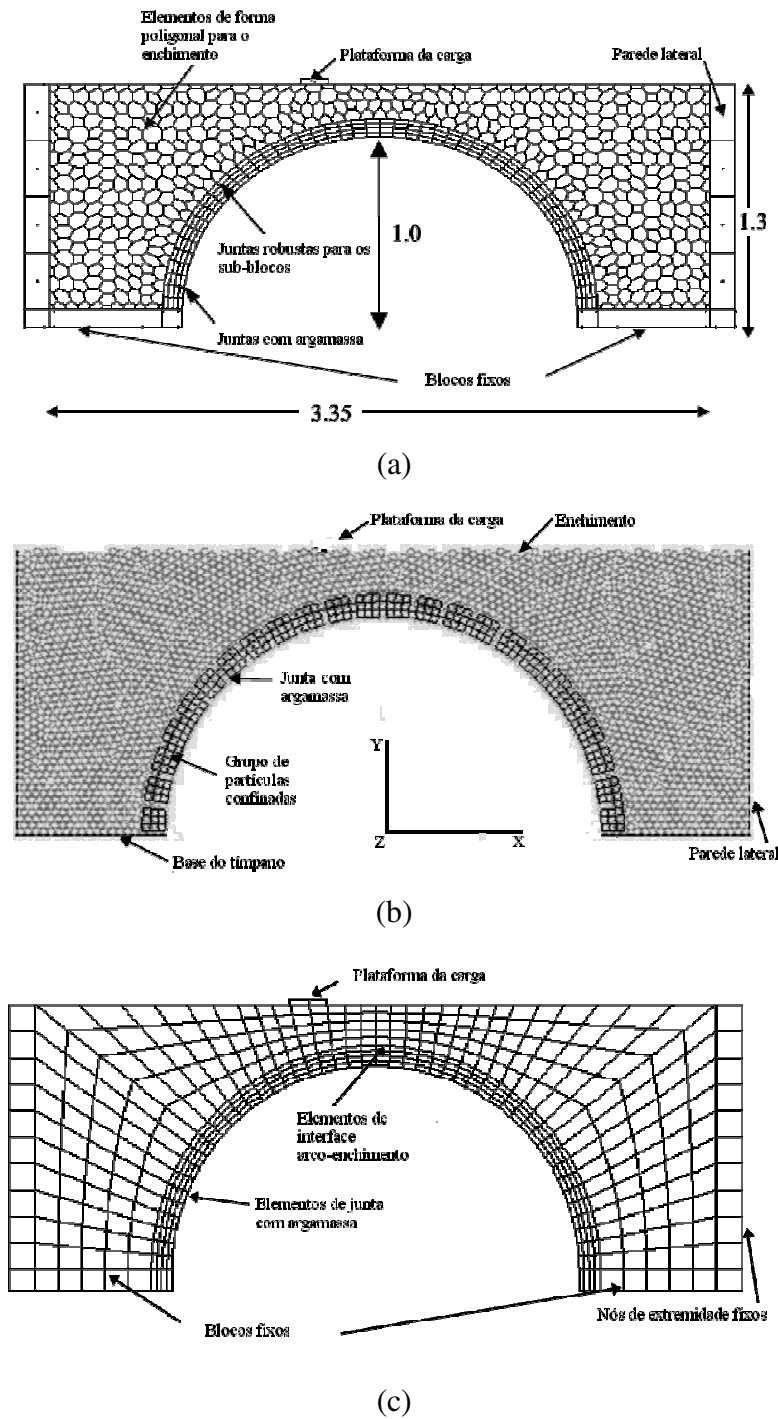


Figura 2-12: Modelo de um arco de volta perfeita em alvenaria de: (a) deformação descontínua; (b) elementos discretos circulares rígidos; (c) elementos finitos. Figura adaptada de (THAVALINGAM 2001).

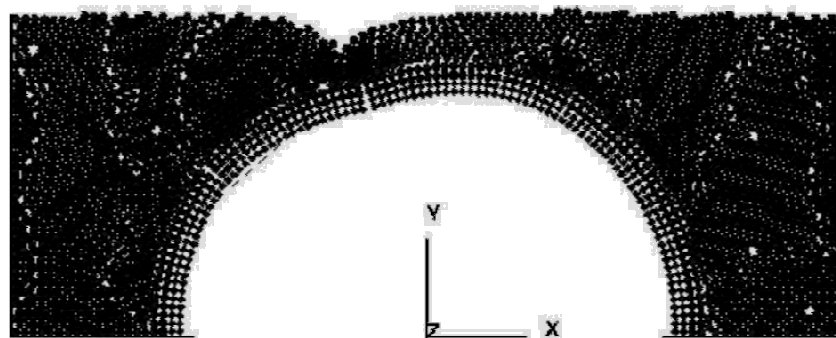
Classe (4) — Método da permuta da quantidade de movimento

Neste método assume-se que os contactos e os elementos discretos são rígidos. A quantidade de movimento entre dois elementos discretos é comutada quando ocorre a sua colisão. O atrito também pode ser representado (HAHN 1988).

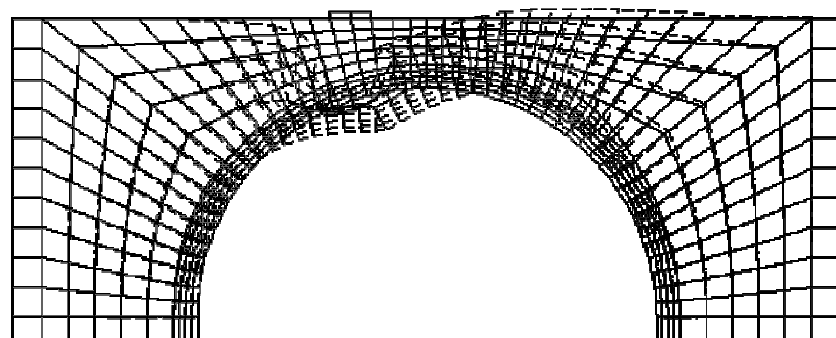
Outras classes de códigos, como o método do equilíbrio limite, podem também modelar as descontinuidades mas não satisfazem as exigências do código para os elementos discretos.



(a)



(b)



(c)

Figura 2-13: Deformada de um arco de volta perfeita em alvenaria obtida com o método de: (a) deformação descontínua; (b) elementos discretos circulares rígidos; (c) elementos finitos. Figura adaptada de (THAVALINGAM 2001).

2.5. Método dos elementos finitos discretos

A formulação padrão do método dos elementos finitos pode facilmente ser incluída em sistemas de elementos discretos (SÎNCRAIAN 2001). A deformação do meio contínuo é governada pelos elementos finitos e a interacção entre os corpos é governada pela técnica dos elementos discretos. Barbosa *et al.* (1989) apresentam um modelo onde a deformabilidade é introduzida representando cada elemento discreto por um elemento finito isoparamétrico e designam a técnica como o método dos elementos finitos discretos. Em (BARBOSA 1996) Barbosa apresenta uma aplicação deste método para estudar o comportamento de estruturas de alvenaria sujeitas à acção sísmica. Munjiza *et al.* (1995), Munjiza (2004) e Petrinic (1996) apresentam a teoria fundamental, assim como a descrição de alguns algoritmos para a solução numérica de problemas de grande dimensão, ver Figura 2-14.

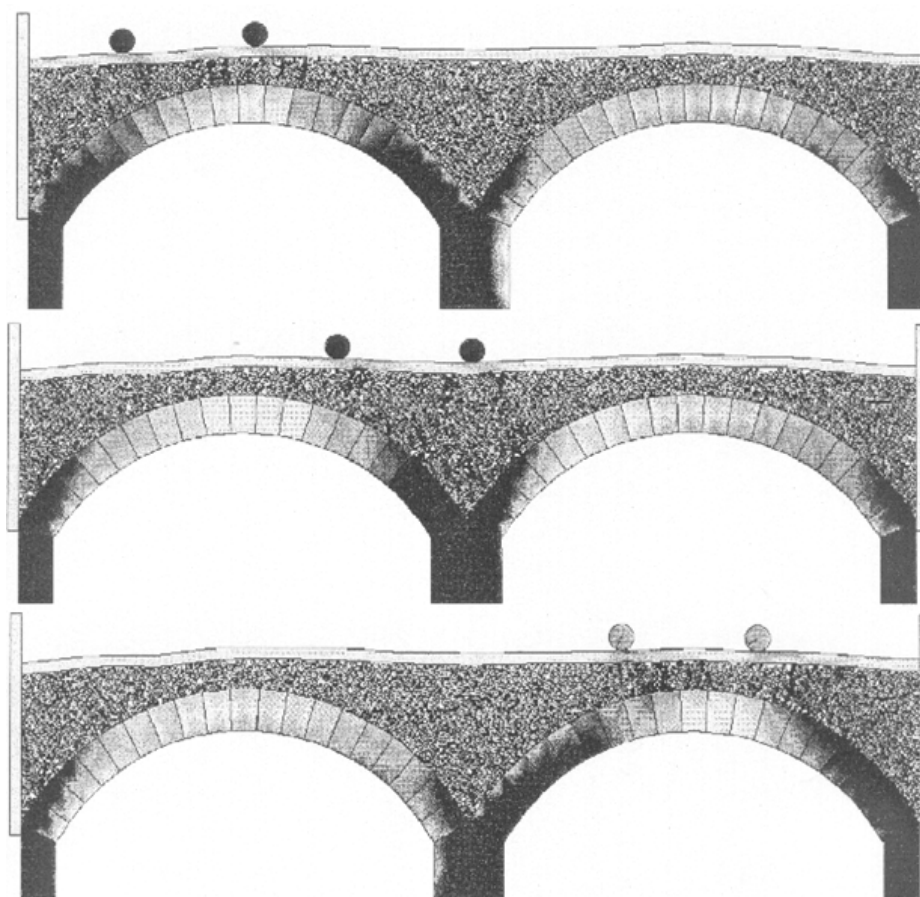


Figura 2-14: Ponte em arco de alvenaria com o enchimento modelado por elementos discretos circulares e as unidades de alvenaria por elementos finitos. Figura retirada de (PETRINIC 1996).

Mamaghani *et al.* (1999) desenvolveram um modelo baseado na técnica dos elementos

finitos discretos que incorpora elementos de contacto, para modelar estruturas de alvenaria de configuração arbitrária. O modelo pode ser utilizado tanto em análises estáticas como dinâmicas. As unidades de alvenaria são representadas por elementos discretos poligonais rígidos e os elementos de contacto são usados para modelar a interacção entre as unidades de alvenaria (escorregamento e separação).

2.6. Outros métodos de análise

Nesta secção referem-se outros métodos numéricos recentemente desenvolvidos (SÎNCRAIAN 2001).

O método dinâmico do contacto não suave, desenvolvido por Jean *et al.* (1991) (JEAN 1998) é um método de elementos discretos distinto do método descrito por Cundall. São adoptadas as relações de Signorini para o contacto unilateral e a lei de Coulomb para o atrito e é utilizado um algoritmo implícito para resolver as equações dinâmicas do movimento. As unidades de alvenaria são modeladas com elementos finitos.

Uma análise rigorosa do problema de contacto com atrito entre dois corpos em elasticidade infinitesimal é apresentada em (PIRES 1989). Nas zonas de fronteira dos dois corpos em contacto, são consideradas as condições linearizadas relativas às componentes normais do deslocamento e da tensão e a lei do atrito.

A teoria da mecânica da fractura é a mais adequada para representar a rotura de materiais frágeis, tais como as rochas, as alvenarias e o betão, uma vez que a propagação das fissuras é governada por critérios energéticos e a degradação das propriedades elásticas do material ocorre com a acumulação de danos. Podem ser estabelecidos diversos modelos, nomeadamente, o modelo de fissuração discreto (CORMEAU 1995) e (ALFAIATE 1997), o modelo de fissuração distribuída (WILLIAMS 1987), (ROTS 1989, 1991) e (LE MOS 1999) e o modelo de bloco (LORIG 1987), (MUNJIZA 1992b) e (VONK 1993).

3. Os elementos discretos

Nas secções seguintes são tecidas algumas considerações sobre os elementos discretos poligonal e circular, nomeadamente, a representação do material sólido e as suas limitações, as restrições ao movimento, as características geométricas dos elementos discretos e as propriedades do material das unidades de alvenaria.

Uma das principais características do método dos elementos discretos consiste em reconhecer automaticamente novas zonas de contacto entre os elementos poligonais e/ou os elementos circulares, durante a execução do programa. É imprescindível a adopção de formas simples para representar estas zonas, assim como algoritmos robustos e eficazes para as detectar e actualizar durante a execução do programa (CUNDALL 1988), (LE MOS 1999) e (MUNJIZA 2004).

Nesse sentido, as secções seguintes abordam também os vários preceitos relevantes para a formulação do método dos elementos discretos, nomeadamente, a hipótese de contacto pontual, a aproximação dos vértices por arcos circulares, a área de influência do contacto, a análise dos contactos, designadamente, a sua caracterização geométrica, os vários tipos de contacto e as tolerâncias de sobreposição. As propriedades da junta e os modelos

constitutivos dos contactos também são focados.

3.1. Representação do material sólido

Genericamente, os modelos baseados no método dos elementos discretos poligonais contam com duas hipóteses alternativas para representar o material sólido, isto é, assumem que o material é rígido ou deformável. Na primeira hipótese a geometria do elemento discreto é inalterável e, normalmente, ela é adoptada quando se considera que os movimentos nas descontinuidades (as interfaces entre os elementos discretos) são os principais responsáveis por toda a deformação do sistema e quando a deformabilidade do material pode ser ignorada. O escorregamento entre elementos discretos, a rotação dos elementos discretos e a abertura e o fecho das descontinuidades são exemplos desses movimentos. O material sólido do elemento discreto é de elevada resistência e de baixa deformabilidade quando comparado com o material da junta.

Porém, como se mostrará na secção 3.10 a deformabilidade do elemento discreto poligonal pode ser considerada de forma aproximada aquando da determinação das propriedades elásticas da junta, não sendo contudo possível representar a deformação associada à componente relativa ao coeficiente de Poisson. Por exemplo na Figura 3-1 o elemento discreto A exerce por acção da força de gravidade, G , e das forças variáveis, Q , uma compressão na direcção vertical sobre o elemento discreto C, provocando um encurtamento na direcção vertical e uma deformação nula na direcção horizontal, isto é reacções nulas nos elementos discretos contíguos B e D. Deste modo, uma das limitações da utilização dos elementos discretos indeformáveis prende-se com a não consideração do efeito do coeficiente de Poisson. Nos casos em que não é possível desprezar a deformação dos elementos discretos deve ser usado um modelo que contemple a deformação dos mesmos.

Geralmente, os sistemas constituídos por elementos discretos circulares adoptam a hipótese de material sólido rígido.

O algoritmo desenvolvido neste trabalho adopta a hipótese de material sólido rígido para os dois tipos de elementos discretos. No entanto, no apêndice B mostra-se como é considerada

a deformabilidade dos elementos discretos poligonais e apontam-se as correspondentes equações intermédias a introduzir no algoritmo.

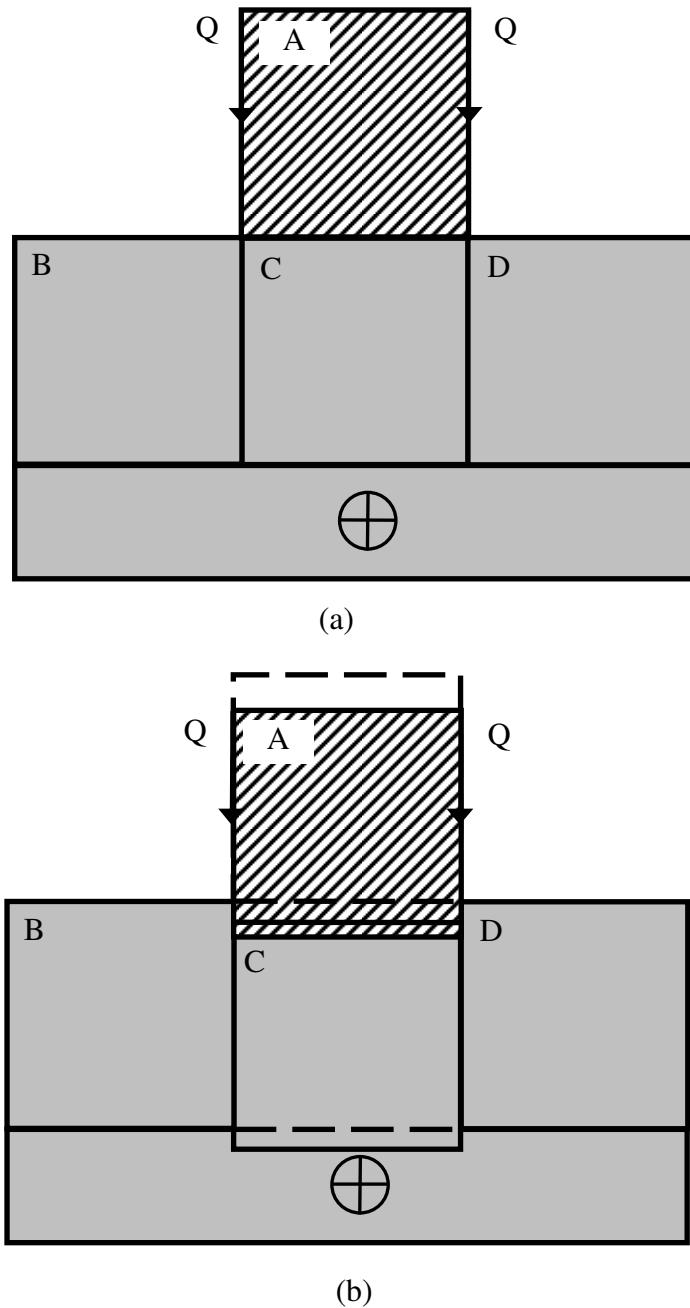


Figura 3-1: Configuração (a) inicial e (b) deformada do sistema na versão elemento rígido.

Tratando-se do desenvolvimento de um modelo de elementos discretos rígidos em duas dimensões, cada elemento discreto apresenta 3 graus de liberdade: dois deslocamentos ortogonais e uma rotação. A convenção estabelece como sentidos positivos os definidos por um sistema de eixos ortonormado, orientado no sentido directo, com origem no centro de

massa (CM) do elemento discreto, e com a rotação apresentando sentido directo relativamente ao eixo dos x_3x_3 . É frequente considerar o eixo dos x_1x_1 horizontal e o eixo dos x_2x_2 vertical, ver Figura 3-2.

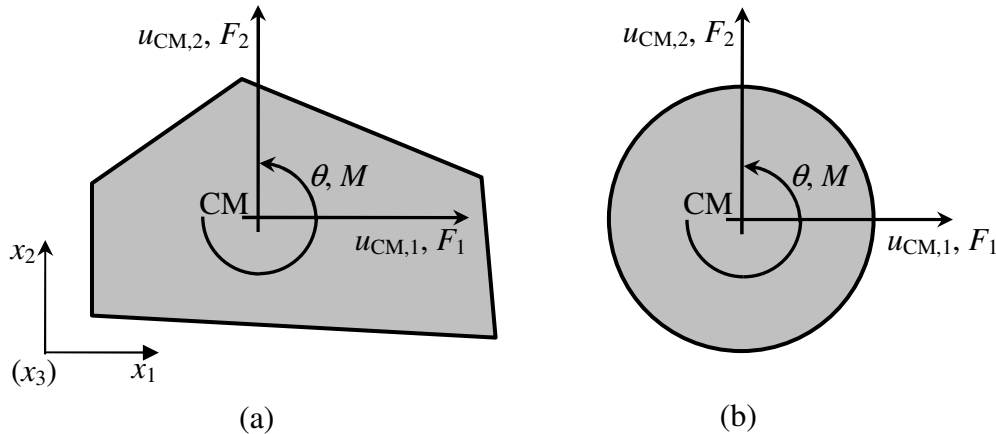


Figura 3-2: Convenção positiva para os deslocamentos e para as forças:
(a) elemento discreto poligonal; (b) elemento discreto circular.

A geometria de um elemento discreto poligonal fica completamente definida se todos os seus vértices (só foram considerados elementos poligonais com 3 a 5 vértices) forem identificados pelas suas coordenadas. A numeração dos vértices segue o sentido retrógrado. As relações entre comprimentos dos lados muito desproporcionadas devem ser evitadas. Assim, e de forma a evitar que os vértices teóricos se sobreponham, o comprimento do lado menor de um elemento discreto poligonal deve ser igual ou superior a duas vezes a distância de arredondamento, ver secção 3.6.

Um elemento discreto circular fica completamente definido pelas coordenadas do seu centro de massa e pelo seu raio.

3.2. Restrições ao movimento

Para modelar a região envolvente do sistema a analisar são usados elementos discretos com um ou mais deslocamentos prescritos. A Figura 3-3 mostra os vários tipos de restrições ao movimento que podem ser adoptados. Para as descrever é estabelecida uma matriz restrição ao movimento, \mathbf{B} , de dimensões $(N_{ED}, 3)$. Cada linha desta matriz corresponde a um elemento discreto e cada coluna corresponde a um grau de liberdade. Os elementos da

matriz tomam valor unitário ou nulo consoante o movimento seja impedido ou livre.

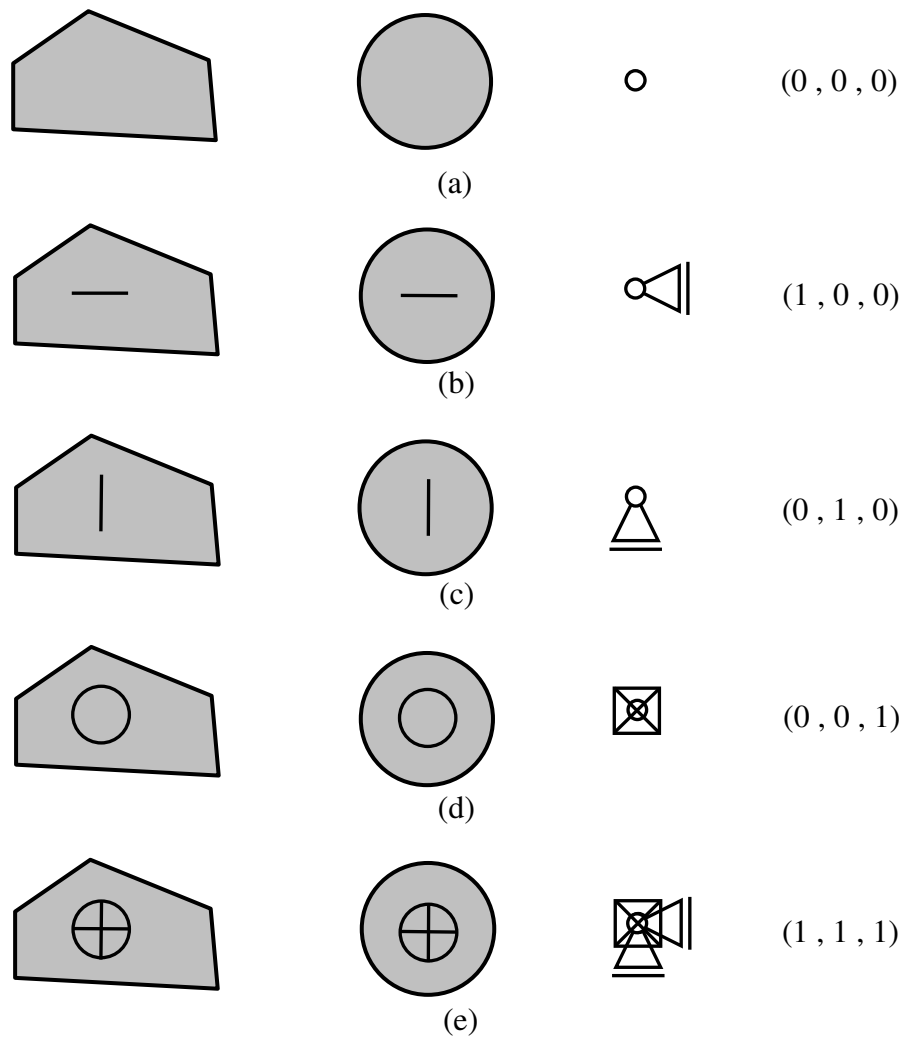


Figura 3-3: Da esquerda para a direita: condição de apoio para elementos poligonais e circulares, movimento restringido e correspondente linha da matriz restrição ao movimento.

(a) Movimento livre. Movimento restringido: (b) horizontal; (c) vertical; (d) rotação; (e) todos.

3.3. Características geométricas e de inércia dos elementos discretos

A área de um elemento discreto poligonal é dada pela soma das áreas dos triângulos nele inscritos. O número de triângulos inscritos N_{tri} é igual ao número de vértices do polígono menos dois. A área do triângulo k é dada por

$$A_{\text{tri},k} = \frac{1}{2} \left((x_{k,j+2,1} - x_{k,j,1})(x_{k,j+1,2} - x_{k,j,2}) - (x_{k,j+1,1} - x_{k,j,1})(x_{k,j+2,2} - x_{k,j,2}) \right) \quad (3.1)$$

sendo j o primeiro vértice do triângulo numerado no sentido retrógrado e $x_{k,j,i}$ a

coordenada i do vértice j do triângulo k . A área de um elemento discreto é então dada por

$$A = \begin{cases} \pi R^2 & \Leftarrow \text{EDC} \\ \sum_{k=1}^{N_{\text{tri}}} A_{\text{tri},k} & \Leftarrow \text{EDP} \end{cases} \quad (3.2)$$

onde R é o raio do elemento discreto circular.

As coordenadas do centro de massa de um elemento discreto poligonal, $x_{\text{CM},i}$, são dadas pela média ponderada das coordenadas dos centros de massa dos triângulos nele inscritos

$x_{\text{CM,tri},k,i}$,

$$x_{\text{CM},i} = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{N_{\text{tri}}} (x_{\text{CM,tri},k,i} A_{\text{tri},k}) \quad (3.3)$$

com

$$x_{\text{CM,tri},k,i} = \frac{1}{3} \sum_{r=j}^{j+2} x_{k,r,i} \quad (3.4)$$

O momento polar de inércia do elemento discreto relativamente ao eixo baricentro perpendicular ao plano do sistema estrutural é dado por

$$I_p = \begin{cases} \frac{1}{2} R^4 & \Leftarrow \text{EDC} \\ \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{N_{\text{tri}}} A_{\text{tri},k} \left(\frac{1}{12} \sum_{r=j}^{j+2} (x_{k,r,i} - x_{\text{CM,tri},k,i})^2 + (x_{\text{CM,tri},k,i} - x_{\text{CM},i})^2 \right) & \Leftarrow \text{EDP} \end{cases} \quad (3.5)$$

Para os elementos discretos circulares, em forma de esfera, o factor $1/2$ em (3.5) deve ser substituído por $2/5$. Todavia, a consideração de elementos discretos esféricos em problemas planos apenas faz sentido se o plano contiver todos os seus centros de massa. Este tipo de análise não é considerada no presente trabalho.

A matriz elementar diagonal das quantidades de inércia é dada por

$$\mathbf{m} = \rho b \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

com

$$m = \rho b A \quad (3.7)$$

e

$$I = \rho b I_p \quad (3.8)$$

sendo ρ a massa volúmica e b a espessura (dimensão normal ao plano da estrutura, por norma unitária).

3.4. Carregamento — acção variável e acção permanente

A acção variável, tal como definida nos Eurocódigos e designada neste trabalho de força variável pontual, Q , fica completamente definida se forem conhecidas as suas componentes no referencial global (x_1, x_2) , e o seu ponto de aplicação, isto é, o vértice no caso de um elemento poligonal ou o centro de massa no caso de um elemento circular, ver Figura 3-4. Este último caso é uma simplificação que resulta de se considerar que as forças têm direcção radial. Para um elemento poligonal a força variável pontual é dita de tracção (compressão) se for positivo (negativo) o seu produto interno pela normal externa à superfície do elemento. Esta classificação não é aplicável aos elementos circulares uma vez que uma dada força no centro de massa pode representar quer uma força de tracção quer uma força de compressão. Para os elementos circulares introduz-se pois o factor ψ que toma os valores $+1$ e -1 consoante a força aplicada é de tracção ou de compressão.

No programa de cálculo as forças variáveis pontuais podem ser definidas explicitamente ou de modo automático. A definição explícita é introduzida no ficheiro de dados que é do tipo ASCII (Código padrão americano para permuta de informações) ou do tipo DXF™ (formato de ficheiro da Autodesk para comunicação de dados de CAD, disponível nas versões ASCII e binária). A definição das forças variáveis por procedimentos automáticos é considerada tanto no caso do peso próprio do material de enchimento da ponte (situação que corresponde a um problema onde o material de enchimento não é simulado pelos elementos discretos circulares) como para as forças uniformemente distribuídas. Para o peso próprio do material de enchimento esta força é dada pelo produto da sua massa volúmica pela área de enchimento afecta ao vértice pertencente ao extradorso do elemento poligonal (admitindo-se unitária a espessura). A área de enchimento afecta ao vértice define-se pelo produto da diferença de cotas entre o vértice e o pavimento com a soma das semi-distâncias entre os vértices adjacentes ao vértice em questão. Para o caso de forças

distribuídas uniformes é definido o domínio de aplicação, a direcção, o sentido e a intensidade da força, sendo o cálculo das componentes das forças variáveis pontuais nos vértices dos elementos discretos efectuado de modo automático.

Para efectuar uma análise incremental por controlo de carga define-se para o correspondente sistema de forças, o seu ponto de aplicação, direcção e sentido e o valor do seu incremento.

As forças variáveis são constantes durante cada passo de cálculo, ou seja, até à obtenção da convergência, e podem ser incrementadas até ao colapso da estrutura.

A acção permanente, tal como definida nos Eurocódigos e designada neste trabalho de força de gravidade do elemento discreto, aplicada no seu centro de massa, é dada por

$$G = \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ gm \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

onde g é a aceleração da gravidade.

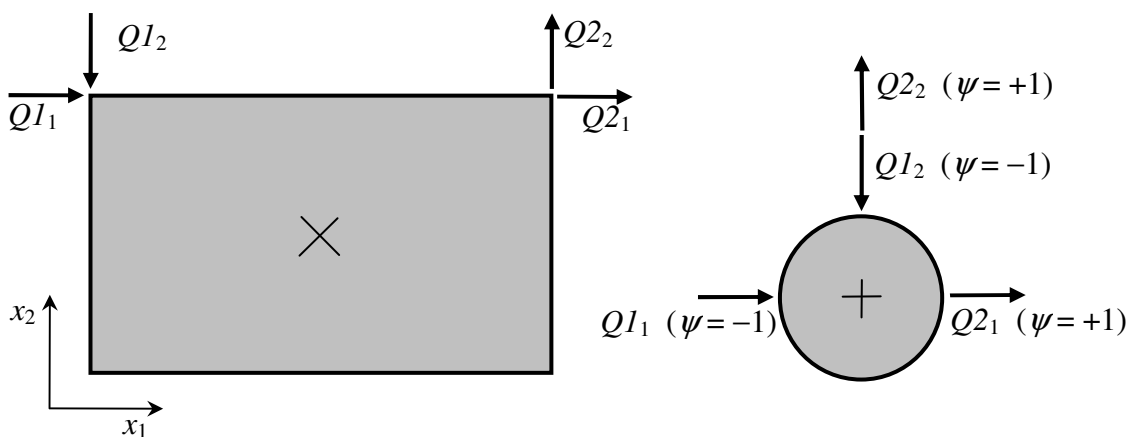


Figura 3-4: Aplicação de uma força variável de compressão Q1 e de tracção Q2.

3.5. Representação do contacto — Hipótese de contacto pontual

Há dois modelos de contacto, o rígido e o deformável. No modelo de contacto rígido não há sobreposição dos elementos discretos sendo a formulação relativamente complexa (SHI 1988a). A aproximação envolvida neste modelo é apropriada para sistemas de elementos

discretos circulares que se movem com velocidades elevadas e interagem através de colisões (SÎNCRAIAN 2001). No modelo de contacto deformável, utilizado na maioria das formulações do método dos elementos discretos (LEMOS 1995b), ocorre uma pequena sobreposição na presença de forças de compressão, o que corresponde à aproximação de junta de espessura nula. Na realidade ocorrem deformações ao nível da junta, representando, deste modo, a sobreposição uma aproximação do comportamento real.

A hipótese de contacto pontual para representar a zona de contacto é também adoptada na maioria das formulações e consiste em representar uma superfície concentrando as suas propriedades em pontos discretos de contacto (LEMOS 1997a). Para os elementos discretos poligonais indeformáveis, é criado um contacto sempre que um vértice concorra com um vértice ou um lado de outro elemento discreto poligonal. Para os elementos discretos poligonais deformáveis, divididos internamente por elementos finitos triangulares, é criado um contacto em cada nó da malha pertencente a um lado em contacto.

A variação das forças de interacção depende do deslocamento relativo dos dois elementos discretos, ver Figura 3-5. Podem ser utilizados modelos constitutivos formulados em termos de tensões ou de forças. No primeiro caso é atribuída a cada contacto pontual uma parcela da área total da superfície em contacto, a qual é designada de área ou comprimento de influência, Figura 3-6 (a).

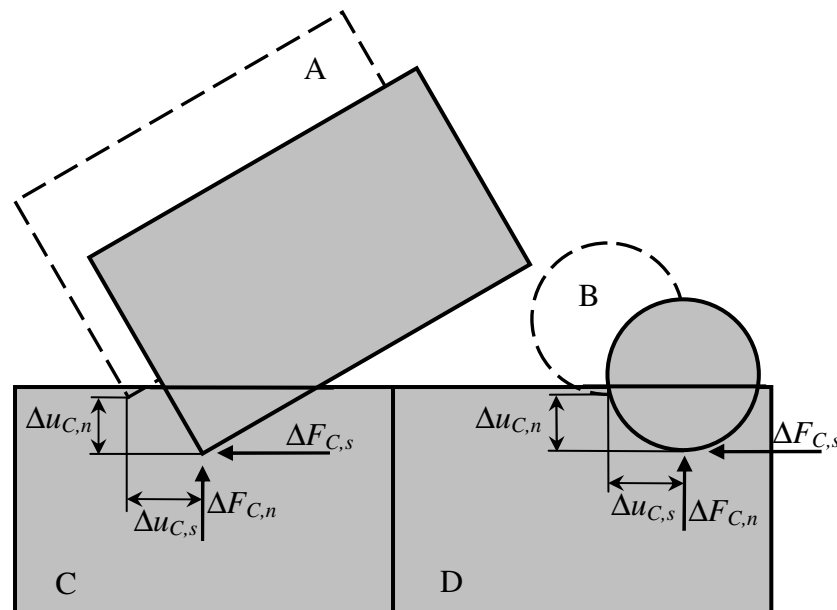


Figura 3-5: Forças de interacção exercidas sobre os elementos A e B (sobreposições propositadamente exageradas).

Pode-se determinar um valor aproximado para a tensão média ou, a partir de uma formulação mais detalhada, a distribuição de tensões (PIRES 1989). Alternativamente, é possível discretizar a superfície com um maior número de pontos de contacto. Nas formulações de elementos discretos poligonais deformáveis, cada nó da malha pertencente à superfície de contacto representa um possível ponto de contacto, devendo ser determinadas as áreas de influência ($b \times L_c$), ver Figura 3-6 (b).

A formulação em termos de tensões é justificada em problemas onde se pretende uma boa aproximação das tensões médias, como por exemplo, em descontinuidades extensas dos maciços rochosos, ou quando se pretenda determinar a história dos deslocamentos. Nos problemas onde se pretende apenas determinar a carga de colapso do sistema estrutural, onde a rigidez tem um papel menor, é suficiente utilizar a formulação em termos de forças. A importância da deformabilidade não é significativa para a determinação do mecanismo de ruptura. Numericamente esta formulação é vantajosa uma vez que o valor da rigidez não sofre variações bruscas aquando da mudança de tipo de contacto.

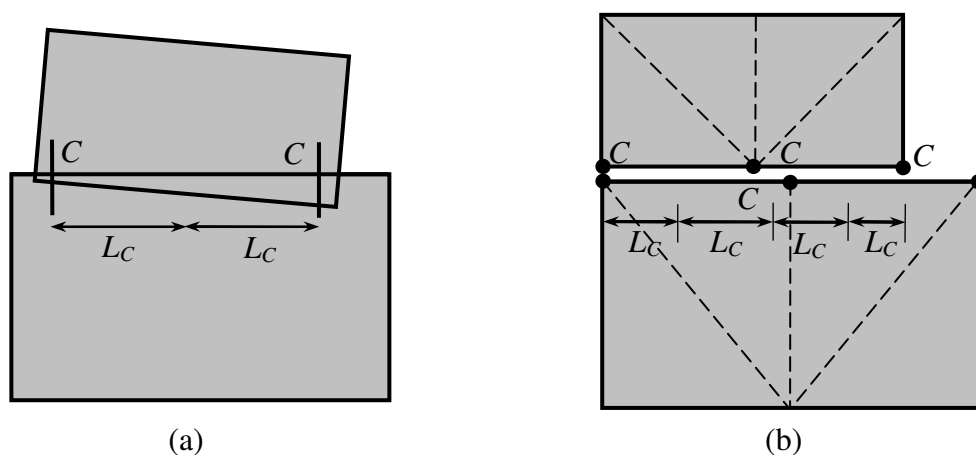


Figura 3-6: Comprimento de influência afecta ao contacto na formulação de elementos poligonais: (a) rígidos; (b) deformáveis.

A formulação em termos de tensões é teoricamente a mais correcta. Todavia, a determinação da área de influência do contacto não é simples, sobretudo em configurações de pré-colapso, onde o contacto “representa” uma rótula. Nestes casos é utilizado um valor mínimo para a área de influência do contacto.

No presente modelo plano, a área de influência é igual ao comprimento de influência do

contacto L_c ($b=1$), definido como a meia distância entre os dois pontos de contacto adjacentes do mesmo lado, ver Figura 3-6. O processo para determinar o comprimento de influência é descrito na secção 3.7.

Envolvendo o problema elementos discretos circulares, o contacto de Hertz-Mindlin é o mais indicado (ITASCA 2002). Quando os elementos discretos circulares se tocam as tensões de contacto são inicialmente nulas e depois aumentam com a sobreposição. No entanto, tendo por objectivo representar apenas o material de enchimento em estruturas de alvenaria, e por simplificação do modelo, a formulação em termos de forças é preferível.

A rigidez normal de contacto, definida pela relação entre a força normal e a sobreposição, pode ser considerada como um parâmetro de penalização numérico. Em muitas aplicações práticas, é possível atribuir um significado físico à rigidez de contacto. Nos modelos de elementos discretos poligonais ou circulares rígidos a rigidez de contacto pode ser calculada de forma a representar a deformabilidade total do sistema (deformação do elemento discreto poligonal ou circular e da junta) na fase de pré-rotura. A rigidez de contacto pode ser determinada a partir de ensaios realizados em modelos físicos (LEMOS 1990) e (VIEIRA 1997). Nos modelos de elementos discretos poligonais deformáveis a rigidez de contacto representa apenas a deformação da junta.

O modelo de interacção mecânica implementado é um modelo simples, onde se assume que as ligações entre os elementos discretos são materializadas por duas molas “lineares” elásticas, uma normal e outra de corte, sendo as forças de interacção proporcionais à interpenetração dos dois elementos discretos no contacto, ver Figura 3-7, (LEMOS 1987).

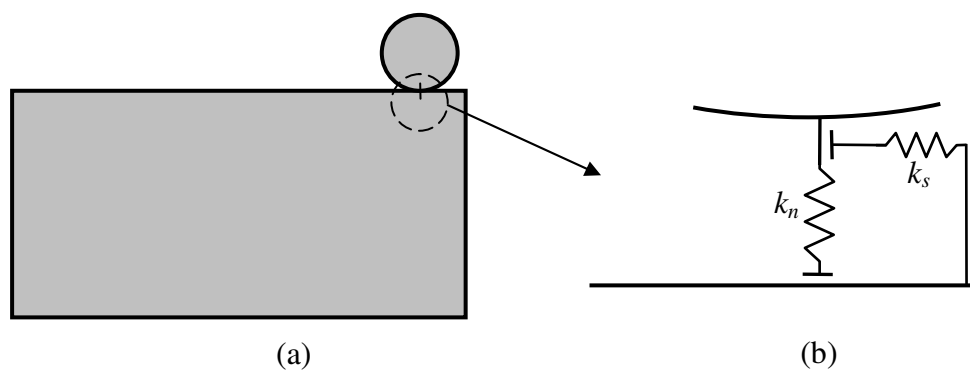


Figura 3-7: Interação mecânica entre elementos discretos: (a) elementos em contacto; (b) representação esquemática.

Um modelo alternativo ao do contacto pontual, onde, por exemplo, um contacto entre dois lados é representado por dois pontos, é o do contacto lado-lado. Neste caso as deformações da junta são expressas em termos de deslocamentos e rotações relativos médios (BELYTSCHKO 1983), (PETRINIC 1996) e (LEMOS 1999). Em contraste com as forças concentradas nos pontos de contacto este modelo de contacto fornece uma variação linear das tensões de contacto.

3.6. Aproximação dos vértices por arcos circulares

Para garantir uma correcta definição dos contactos entre elementos discretos é indispensável que os seus parâmetros geométricos sejam consistentes. Por exemplo, os vértices dos elementos discretos poligonais representam uma dificuldade, particularmente quando se pretende definir a normal do contacto, essencial para estabelecer as forças de contacto normais e tangenciais. Além disso, se ocorrer uma mudança do tipo de contacto, os vértices dos elementos discretos poligonais não permitem que ela seja suave.

De modo a ultrapassar estas dificuldades os vértices são arredondados através de arcos circulares (CUNDALL 1980). O arredondamento dos vértices garante uma definição unívoca dos parâmetros geométricos, isto é, as direcções normal, n , e tangencial, t , ficam completamente definidas de uma forma simples, particularmente no contacto do tipo vértice-vértice, como se ilustra na Figura 3-8, onde a passagem do contacto do tipo vértice-vértice para um do tipo vértice-lado é contínua, evitando, deste modo, variações bruscas da direcção da normal. O arredondamento dos vértices evita também o bloqueamento de sistemas compactos de elementos discretos poligonais, que ocorre por imbricação gerada por pequenos deslocamentos, como se ilustra na Figura 3-9. Na intersecção das duas discontinuidades o deslizamento na vertical é impedido pelo pequeno deslocamento na horizontal. Esta situação poderia ocorrer caso o material fosse altamente resistente. Substituir os vértices por arcos circulares representa também uma boa aproximação da realidade. Por exemplo, em materiais geomecânicos, devido às elevadas concentrações de tensões, é crível que os vértices se fracturem.

O arco circular, também designado de arco de arredondamento, é obtido a partir da consideração de um parâmetro designado de distância de arredondamento, d_r , que

apresenta igual valor para todos os vértices de cada elemento discreto poligonal e que define a distância entre o vértice e cada um dos dois pontos de concordância dos lados adjacentes (ao dito vértice) e o arco de arredondamento, ver Figura 3-10. O raio deste arco é dado por $R = d_r \tan \beta$ em que β é metade do ângulo interno formado pelos lados adjacentes.

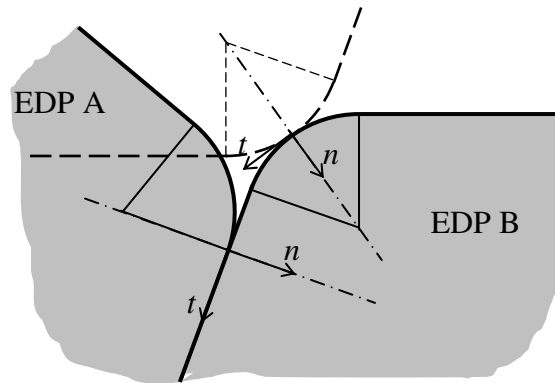


Figura 3-8: Rotação do elemento poligonal A sem perda de definição da normal do contacto.

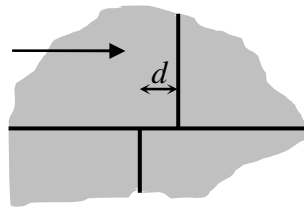


Figura 3-9: Imbricação de elementos no ponto de intersecção de descontinuidades.

Geralmente a distância de arredondamento é da ordem de 1 a 5 % da dimensão média dos lados do elemento discreto poligonal, intervalo de valores para o qual o comportamento do elemento não apresenta grande sensibilidade. O arredondamento dos vértices num problema em que se pretende avaliar a capacidade de carga de uma estrutura de elementos discretos poligonais permite reduzir os efeitos de imbricação e conduzir a valores do lado da segurança. Vieira (1997) apresenta a seguinte expressão para determinar a distância de arredondamento dos elementos discretos poligonais (igual para todos),

$$d_r = 0,01 \times \sqrt{\frac{1}{N_{\text{EDP}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{EDP}}} A_k} = 0,01 \times \bar{L}_p \quad (3.10)$$

onde A_k é a área do elemento poligonal k , N_{EDP} o número de elementos poligonais e \bar{L}_p o comprimento médio das arestas dos elementos poligonais.

Foram implementados dois processos alternativos de arredondamento dos vértices. No primeiro a distância de arredondamento é idêntica para todos os elementos poligonais sendo dada por uma expressão similar a (3.10). No segundo a distância de arredondamento, $d_{r,k}$, para o elemento discreto poligonal k é definida por uma percentagem χ_{rp} do comprimento da sua menor aresta, $L_{\min,k}$,

$$d_{r,k} = \chi_{rp} L_{\min,k} \quad (3.11)$$

Por norma o factor χ_{rp} é igual a 1 %.

A título de exemplo, a Figura 3-10 mostra as entidades necessárias para caracterizar o arredondamento do vértice V do elemento poligonal A, nomeadamente, (1) o sistema de eixos local com origem no vértice O contíguo ao vértice V quando o contorno do elemento é percorrido no sentido directo, (2) a distância de arredondamento $d_{r,A}$ (ou o raio do arco de arredondamento R_{VT}) e (3) o ângulo β . Por caracterização do arredondamento deve entender-se a determinação das coordenadas do centro do arco, designado de vértice teórico, ponto VT.

Genericamente, as coordenadas do vértice teórico VT, $x_{VT,i}$, são determinadas através da expressão

$$x_{VT} = x_V - \mathbf{T}_\alpha^T \begin{Bmatrix} d_{r,A} \\ R_{VT} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

onde $x_{V,i}$ são as coordenadas do vértice em estudo e \mathbf{T}_α^T a transposta da matriz de rotação \mathbf{T}_α

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

onde α é o ângulo entre os semi-eixos positivos x_1 e t medido no sentido directo, ver Figura 3-10. Porém, atendendo à mesma figura, \mathbf{T}_α pode ser escrita em função do versor tangente t , cujos co-senos directores são dados por

$$t_i = \frac{x_{V,i} - x_{O,i}}{L_{OV}} \quad (3.14)$$

com

$$L_{OV} = \left((x_{V,1} - x_{O,1})^2 + (x_{V,2} - x_{O,2})^2 \right)^{1/2} \quad (3.15)$$

ou seja,

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ -t_2 & t_1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

e como

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

onde \mathbf{n} é o versor normal representado na mesma figura, a matriz de rotação \mathbf{T}_α pode também ser escrita

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} n_2 & -n_1 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

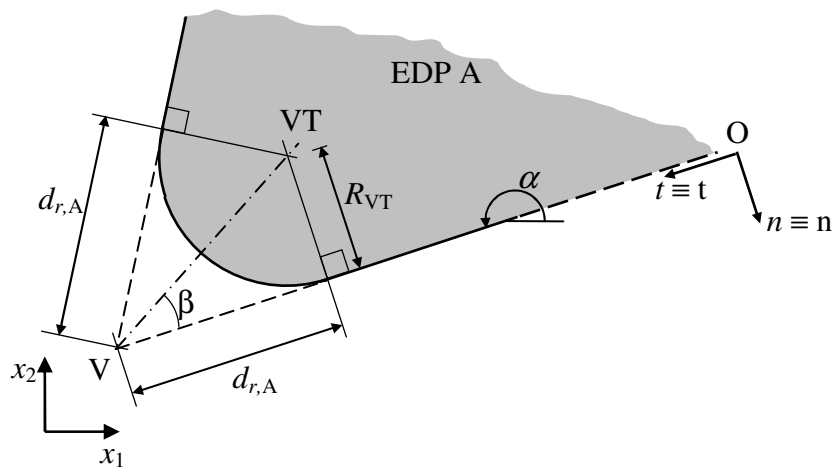


Figura 3-10: Caracterização do arredondamento do vértice V .

No caso dos elementos discretos circulares não faz sentido falar em distância de arredondamento. Porém este parâmetro ainda será utilizado de forma a uniformizar a notação, ver Figura 3-11.

Tal permitirá definir de uma forma sistemática as tolerâncias de sobreposição e separação em função desta quantidade, ver secção 3.8.7. Deste modo, para o elemento discreto circular k vem alternativamente, à semelhança dos preceitos apresentados para os elementos discretos poligonais,

$$d_{r,k} = d_{rc} \quad (3.19)$$

ou

$$d_{r,k} = 2\chi_{rc} R_k \quad (3.20)$$

onde d_{rc} representa a distância de arredondamento prescrita para todos os elementos discretos circulares, o factor χ_{rc} a percentagem do diâmetro do elemento discreto prescrita para todos os elementos discretos circulares e R_k o raio do elemento discreto circular k ou, para sistematizar, do “arco de arredondamento”.

Por norma o factor χ_{rc} também é igual a 1 %. Para um elemento discreto circular o vértice e o vértice teórico são considerados coincidentes com o centro de massa, escrevendo-se

$$x_v = x_{vT} = x_{CM} \quad (3.21)$$

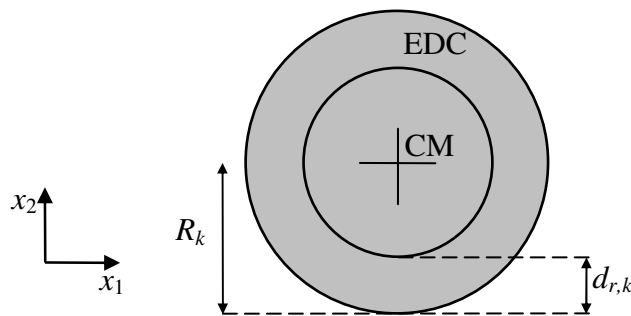


Figura 3-11: Caracterização do arredondamento de um elemento circular.

A distância de arredondamento máxima é definida por

$$d_{r,max} = \max_k(d_{r,k}) \quad (3.22)$$

3.7. Área de influência do contacto

Atendendo a que o modelo em estudo é composto de elementos discretos poligonais e elementos discretos circulares, a atribuição das propriedades dos materiais relativas à rigidez requer a determinação das áreas/comprimentos de influência de cada contacto. Como foi referido na secção 3.5, existem duas possibilidades de determinação da variação das forças de contacto a partir dos deslocamentos relativos: a formulação da lei constitutiva em termos de tensões ou em termos de forças. O algoritmo desenvolvido permite que se opte por uma destas formulações.

Os comprimentos de influência para contactos envolvendo elementos circulares são

prescritos em ambas as formulações e para contactos entre elementos poligonais são prescritos ou actualizados durante a execução do programa consoante se trate de uma formulação em termos de forças ou tensões.

Saliente-se que, para a formulação em termos de tensões, o utilizador deve prescrever um valor mínimo para o comprimento de influência para os contactos pontuais (contacto do tipo vértice-vértice) entre elementos discretos poligonais. Este deve estabelecer um compromisso entre a força de compressão máxima e a sobreposição máxima admissível.

De acordo com Coulomb, o esmagamento das aduelas contíguas a uma junta fissurada é evitado se se impuser uma distância mínima de 5 % da espessura da aduela entre o contorno da secção e a linha de impulso (HEYMAN 1995b). Acolhendo esta recomendação como uma sugestão para definir o comprimento de influência mínimo este pode então ser igualado a 10 % da altura da secção.

Deste modo, o comprimento de influência, por exemplo, para os dois contactos de uma junta inicialmente não fissurada é igual à semidistância entre os pontos de contacto, ver Figura 3-12 (a) e (c). Iniciando-se a fissuração um dos contactos é eliminado e o comprimento de influência para o contacto activo é determinado através de relações geométricas que têm em conta o deslocamento e a rotação das duas aduelas, ver Figura 3-12 (a) e (d). No limite, quando o comprimento de influência para o contacto activo é igual à corda definida pelos dois pontos de intersecção dos dois arcos de arredondamento, ocorre uma diminuição considerável da rigidez do contacto, ver Figura 3-12 (b) e (e).

Adoptando como valor mínimo para o comprimento de influência os 10 % da altura da secção definidos por Coulomb são evitados saltos numéricos bruscos entre iterações. A determinação dos comprimentos de influência dos contactos durante a execução do programa é feita apenas após a activação da rotina de detecção de contactos, isto é, não é feita em todas as iterações.

Foram então estabelecidos 3 tipos de comprimento de influência para os contactos, $L_{C,P-P}$, $L_{C,P-C}$ e $L_{C,C-C}$. Os segundos índices inferiores indicam, respectivamente, contactos entre

elementos poligonais, entre elementos poligonais e circulares e entre elementos circulares. Como referido o algoritmo criado distingue uma e outra formulação.

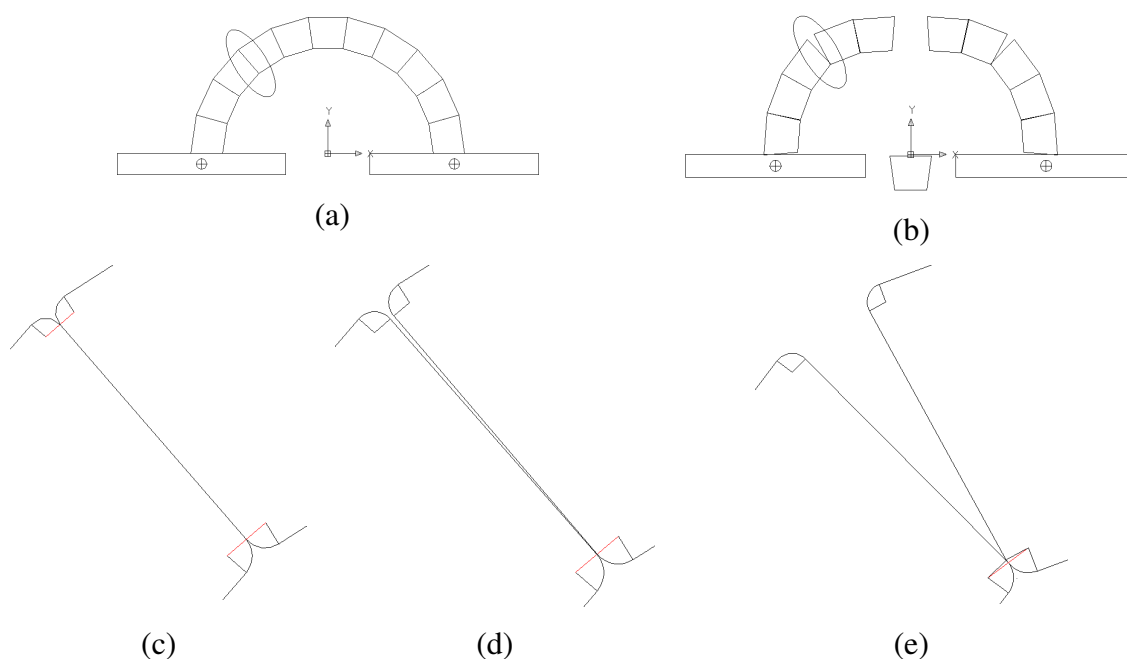


Figura 3-12: Fissuração de uma junta de um arco de alvenaria identificada pela elipse. Arco em (a) equilíbrio e em (b) colapso, e correspondente variação do comprimento de influência: (c) semidistância entre os contactos; (d) proporcional ao deslocamento e rotação; (e) intersecção dos dois arcos de arredondamento.

3.7.1. Formulação em termos de forças

São atribuídos, dependendo do tipo de contacto, os comprimentos de influência fixos $L_{C,P-P,fix}$, $L_{C,P-C,fix}$ e $L_{C,C-C,fix}$. O valor de $L_{C,P-P,fix}$ é igual a metade da altura da secção das aduelas do arco subtraída da distância de arredondamento. Considerando o arco com o muro de tímpano o comprimento de influência para os contactos entre elementos discretos pertencentes ao muro é tomado igual à distância acima referida ou a metade da dimensão média dos elementos discretos do muro subtraída da distância de arredondamento. Normalmente $L_{C,P-C,fix}$ e $L_{C,C-C,fix}$ são iguais e tomam o valor igual à média aritmética dos diâmetros dos elementos discretos circulares (ocasionando em certas situações um comprimento de influência superior ao diâmetro de um ou vários elementos circulares).

3.7.2. Formulação em termos de tensões

Um ciclo percorre todos os contactos e, identificados os contactos entre elementos poligonais e elementos circulares e entre elementos circulares, são atribuídos os respectivos

comprimentos de influência prescritos, $L_{C,P-C,fix}$ e $L_{C,C-C,fix}$. Um segundo ciclo percorre os elementos discretos poligonais identificando o ou os contactos entre os dois elementos discretos poligonais: (1) se o contacto é único é atribuído o comprimento de influência $L_{C,P-P} \geq L_{C,P-P,min}$; (2) se existem dois contactos é atribuída a semidistância entre os dois pontos de contacto.

3.8. Análise dos contactos pontuais

Nas subsecções seguintes são apresentadas as relações geométricas necessárias para caracterizar um contacto pontual. Primeiro são estabelecidas quais as características geométricas relevantes e depois são expostas detalhadamente as condições geométricas. Finalmente é descrita a problemática da sobreposição excessiva.

3.8.1. Propriedades geométricas

Atendendo ao arredondamento dos vértices dos elementos discretos poligonais, apresentado na secção 3.6, à natureza geométrica dos elementos discretos circulares e considerando contactos deformáveis, são definidos dois grupos de tipos de contactos. Um que inclui os contactos entre elementos discretos poligonais e outro que inclui os contactos envolvendo elementos discretos circulares.

O primeiro grupo inclui os contactos do tipo:

- (1) vértice-vértice;
- (2) vértice-lado;
- (3) lado-vértice.

O segundo inclui os contactos do tipo:

- (4) círculo-círculo;
- (5) vértice-círculo;
- (6) lado-círculo;
- (7) círculo-vértice;
- (8) círculo-lado.

Genericamente, nove quantidades definem completamente um contacto pontual:

- (1) a identificação/número de ordem do contacto C ;
- (2) o tipo de contacto 1, 2, ..., 8;
- (3) as coordenadas do ponto do contacto C , $x_{C,i}$;
- (4) a normal da superfície do contacto C , n_C ;
- (5) o número de ordem dos dois elementos discretos envolvidos no contacto, A e B (considera-se sempre que $A < B$);
- (6) as coordenadas dos centros de massa $x_{CM,A,i}$ e $x_{CM,B,i}$ dos elementos discretos A e B ;
- (7) as coordenadas $x_{VA,i}$ e $x_{VB,i}$ dos vértices VA e VB ;
- (8) as coordenadas $x_{VTA,i}$ e $x_{VTB,i}$ dos vértices teóricos VTA e VTB ;
- (9) os raios dos arcos de arredondamento R_{VTA} e R_{VTB} . Como referido na secção 3.6, por uma questão de uniformidade na definição dos contactos, o vértice e o vértice teórico também são definidos para os elementos discretos circulares, admitindo-se que coincidem com o seu centro de massa.

Um contacto pontual é dito efectivo se há sobreposição dos elementos discretos em contacto. Porém antes da ocorrência desta sobreposição, quando os dois elementos se encontram suficientemente próximos, ver secção 4.5, é estabelecido um contacto pontual virtual, de forma a reduzir a frequência do recurso às rotinas de detecção de contactos que são bastante exigentes em termos de tempo de cálculo. As forças de contacto surgem unicamente no caso do contacto ser efectivo, isto é, a sobreposição positiva. Estes parâmetros são definidos nas secções seguintes.

Nas secções que se seguem são analisados os diferentes tipos de contacto e são definidas as tolerâncias de sobreposição e de separação. As dimensões desproporcionadas na representação dos vários tipos de contacto nas figuras são propositadas, de forma a evidenciar as quantidades envolvidas. Optou-se por representar sempre contactos virtuais de modo a facilitar a sua compreensão.

3.8.2. Contacto do tipo vértice-vértice

A Figura 3-13 ilustra genericamente um contacto pontual vértice-vértice que aqui será classificado como um contacto do tipo 1. Os pontos VTA e VTB são os vértices teóricos e representam, respectivamente, os centros dos arcos de arredondamento de raio R_{VTA} e R_{VTB} . A recta definida pelos vértices teóricos (sentido \overline{AB}) determina a normal da superfície do contacto n_C ,

$$n_C = \frac{1}{L_{VTA VTB}} \begin{Bmatrix} x_{VTB,1} - x_{VTA,1} \\ x_{VTB,2} - x_{VTA,2} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

sendo $L_{VTA VTB}$ a distância entre os vértices teóricos VTA e VTB dada por

$$L_{VTA VTB} = \left((x_{VTB,1} - x_{VTA,1})^2 + (x_{VTB,2} - x_{VTA,2})^2 \right)^{1/2} \quad (3.24)$$

O vector n_C é unitário e o ponto C , equidistante das fronteiras dos elementos A e B, define a localização do contacto e a origem do referencial local do contacto (t, n) , cujo eixo das abcissas é perpendicular a n_C .

Para que um contacto do tipo 1 seja criado ou conservado é necessário que a projecção dos vértices teóricos VTA e VTB perpendicularmente aos lados contíguos aos vértices VB e VA se situe no interior das respectivas zonas de arredondamento. Além disso, é necessário que a sobreposição e a separação dos elementos discretos poligonais cumpram as tolerâncias de sobreposição e separação.

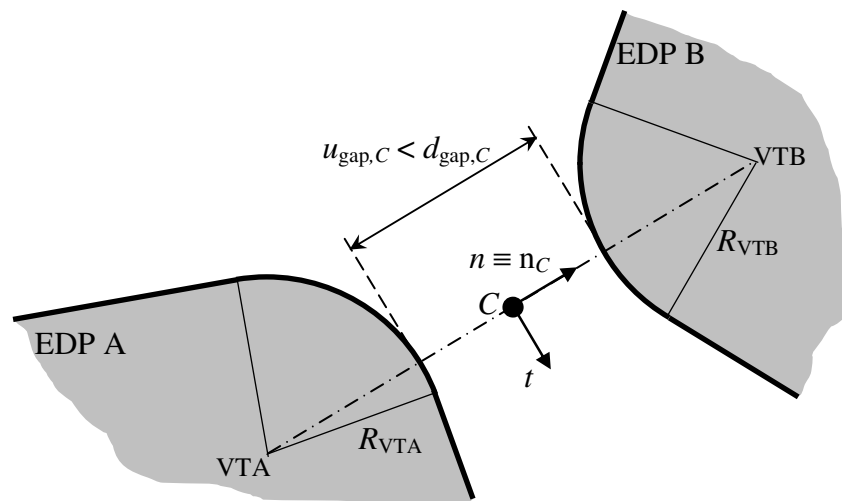


Figura 3-13: Contacto do tipo 1 (vértice-vértice).

Os referenciais locais $(t1, n1)$ e $(t2, n2)$ associados aos lados VB_1VB e $VBVB_2$ contíguos ao vértice VB têm como origem, respectivamente, os vértices VB_1 e VB , como se pode ver na Figura 3-14. As abcissas de VTA segundo aqueles referenciais, $t1_{VTA}$ e $t2_{VTA}$, devem respeitar, simultaneamente, as seguintes condições,

$$\begin{cases} t1_{VTA} > L_{VB1} - d_{r,B} \\ t2_{VTA} < d_{r,B} \end{cases} \quad (3.25)$$

onde L_{VB1} representa o comprimento do lado VB_1VB . Note-se que no exemplo ilustrado na Figura 3-14 ambas estas condições são satisfeitas, de modo que poder-se-á estar em presença de um contacto pontual. É porém necessário verificar as restantes condições.

Uma análise semelhante é feita para o vértice oposto, ver Figura 3-15. Os referenciais locais $(t1, n1)$ e $(t2, n2)$ associados aos lados VA_1VA e $VAVA_2$ adjacentes ao vértice VA têm como origem, respectivamente, os vértices VA_1 e VA . L_{VA1} é o comprimento do lado VA_1VA . As condições a verificar são

$$\begin{cases} t1_{VTB} > L_{VA1} - d_{r,A} \\ t2_{VTB} < d_{r,A} \end{cases} \quad (3.26)$$

Verifica-se de novo que o exemplo ilustrado na Figura 3-14, e duplicado na Figura 3-15 para melhor evidenciar a projecção do vértice oposto, satisfaz estas condições.

A verificação das inequações (3.25) e (3.26) permite distinguir entre contactos do tipo 1 e contactos dos tipos 2 ou 3. Para o contacto ser do tipo 1 é ainda necessário verificar que a variável de separação $u_{gap,C}$ dada por

$$u_{gap,C} = L_{VTA VTB} - R_{VTA} - R_{VTB} \quad (3.27)$$

satisfaz as condições

$$-d_{over,C} < u_{gap,C} < d_{gap,C} \quad (3.28)$$

onde $d_{gap,C}$ e $d_{over,C}$ são, respectivamente, as tolerâncias de separação e de sobreposição, que são da mesma ordem de grandeza da distância de arredondamento d_r . Note-se que a bem dizer, a única condição necessária à definição de contacto é $u_{gap,C} < d_{gap,C}$. A outra serve principalmente para despistar situações de sobreposição excessiva (e eventualmente para alguns casos extremos em que os elementos se trespasssem).

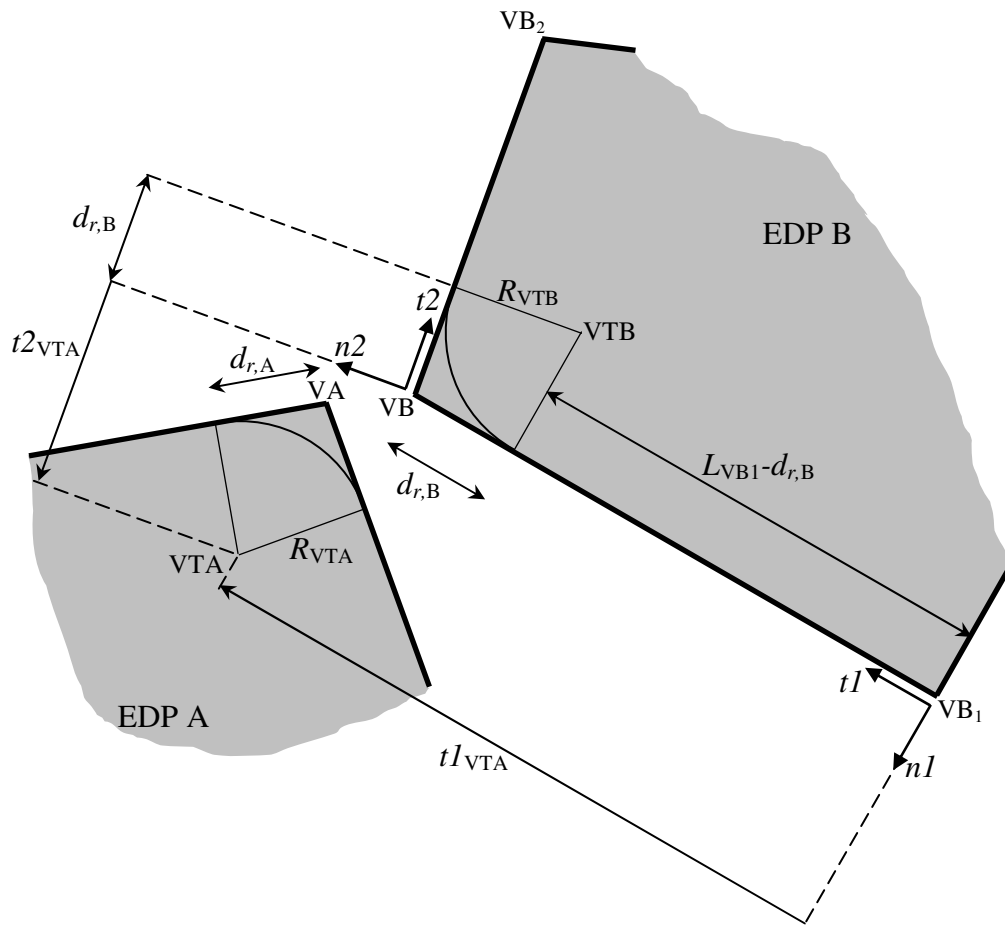


Figura 3-14: Projecção do vértice teórico VTA perpendicularmente aos lados contíguos ao vértice VB.

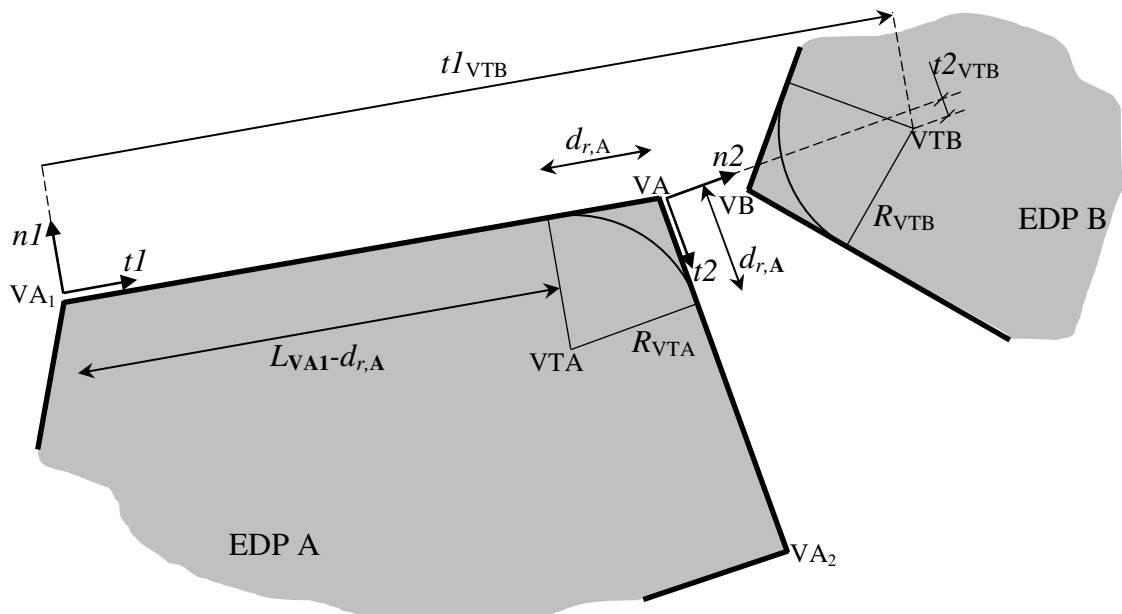


Figura 3-15: Projecção do vértice teórico VTB perpendicularmente aos lados contíguos ao vértice VA.

Verificadas as seis condições (3.25), (3.26) e (3.28) é criado o contacto pontual do tipo 1 e materializado pelo ponto C como mostra a Figura 3-13. As suas coordenadas são dadas por

$$x_C = x_{VTA} + \left(R_{VTA} + \frac{u_{\text{gap},C}}{2} \right) n_C \quad (3.29)$$

Note-se que este contacto pontual será efectivo ou virtual consoante $u_{\text{gap},C}$ seja menor ou maior que zero.

3.8.3. Contactos dos tipos vértice-lado e lado-vértice

O contacto do tipo 2 (vértice-lado) representado na Figura 3-16 é materializado pelo ponto C . Os pontos VTA , VTB e VTB_2 são os vértices teóricos associados aos arcos de arredondamento de raio, respectivamente, R_{VTA} , R_{VTB} e R_{VTB_2} . As distâncias de arredondamento são respectivamente $d_{r,A}$ e $d_{r,B}$ para os elementos discretos poligonais A e B . O referencial local $(t2, n2)$ associado ao lado $VBVB_2$ com origem no vértice VB e eixos das abcissas e ordenadas paralelo e perpendicular, respectivamente, àquele lado, permite determinar as coordenadas locais $(t2_{VTA}, n2_{VTA})$ do ponto VTA .

De forma a garantir que o contacto não é do tipo 1, o contacto do tipo 2 deve verificar as duas condições

$$d_{r,B} \leq t2_{VTA} \leq L_{VB_2} - d_{r,B} \quad (3.30)$$

onde L_{VB_2} é o comprimento do lado $VBVB_2$, que são complementares das condições (3.25). Isto é, a projecção do vértice teórico VTA perpendicularmente ao lado $VBVB_2$ deve situar-se entre as projecções dos vértices teóricos VTB e VTB_2 sobre $VBVB_2$, ou seja, entre as zonas de arredondamento desse lado.

Para um contacto do tipo 2 para além das condições (3.30), a separação $u_{\text{gap},C}$ entre a linha $VBVB_2$ e a paralela a $VBVB_2$ tangente ao arco de centro no vértice teórico VTA , dada por

$$u_{\text{gap},C} = n2_{VTA} - R_{VTA} \quad (3.31)$$

deve satisfazer as condições (3.28).

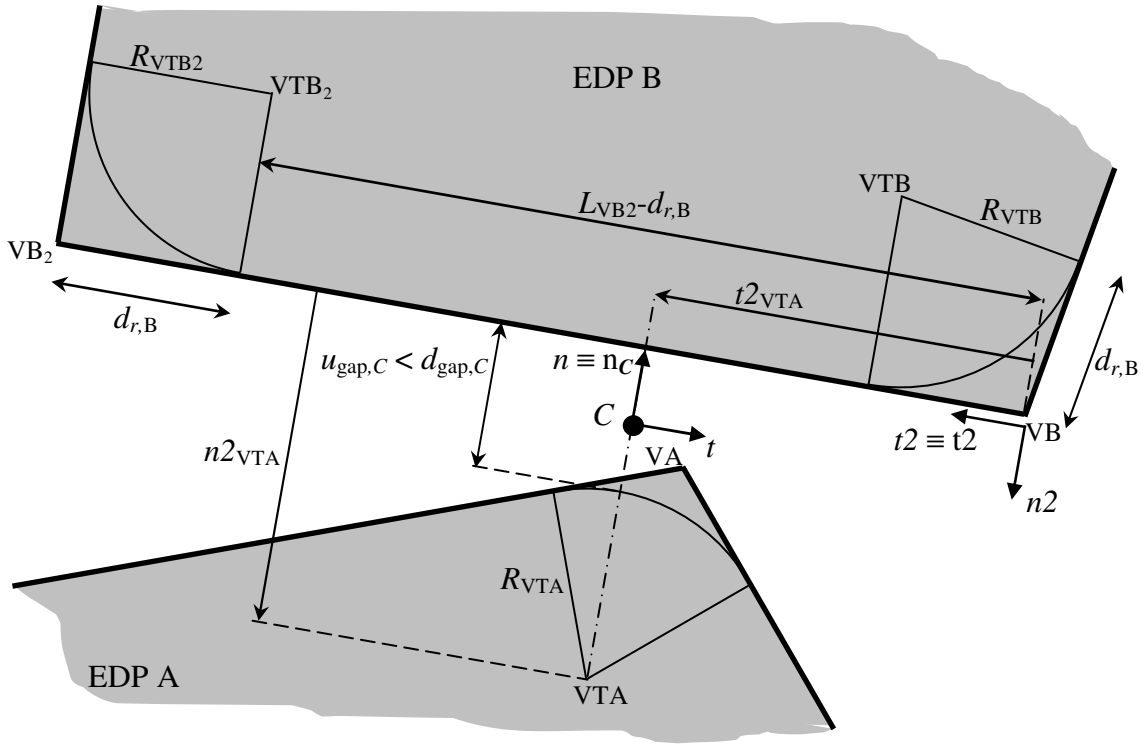


Figura 3-16: Contacto do tipo 2 (vértice-lado).

As coordenadas do contacto são determinadas pela expressão

$$x_C = x_{VB} + \mathbf{T}_\alpha^T \begin{Bmatrix} t2_{VTA} \\ \frac{1}{2} u_{gap,C} \end{Bmatrix}. \quad (3.32)$$

com \mathbf{T}_α similar a (3.16) definido pelo versor $t2$.

A normal do contacto, n_C , é definida por

$$n_C = \begin{Bmatrix} n_{C,1} \\ n_{C,2} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} n2_1 \\ n2_2 \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

O contacto do tipo 3 (lado-vértice) é caracterizado de forma similar ao contacto do tipo 2 mas o lado interveniente no contacto pertence agora ao elemento discreto de menor numeração, ver Figura 3-17. Note-se que esta figura resulta da reflexão da Figura 3-16 sobre uma recta horizontal pelo que o sistema de eixos associado ao contacto sofreu uma rotação de 180° e, conseqüentemente, também a normal do contacto apresentará componentes simétricas de (3.33), isto é,

$$n_C = \begin{Bmatrix} n2_1 \\ n2_2 \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

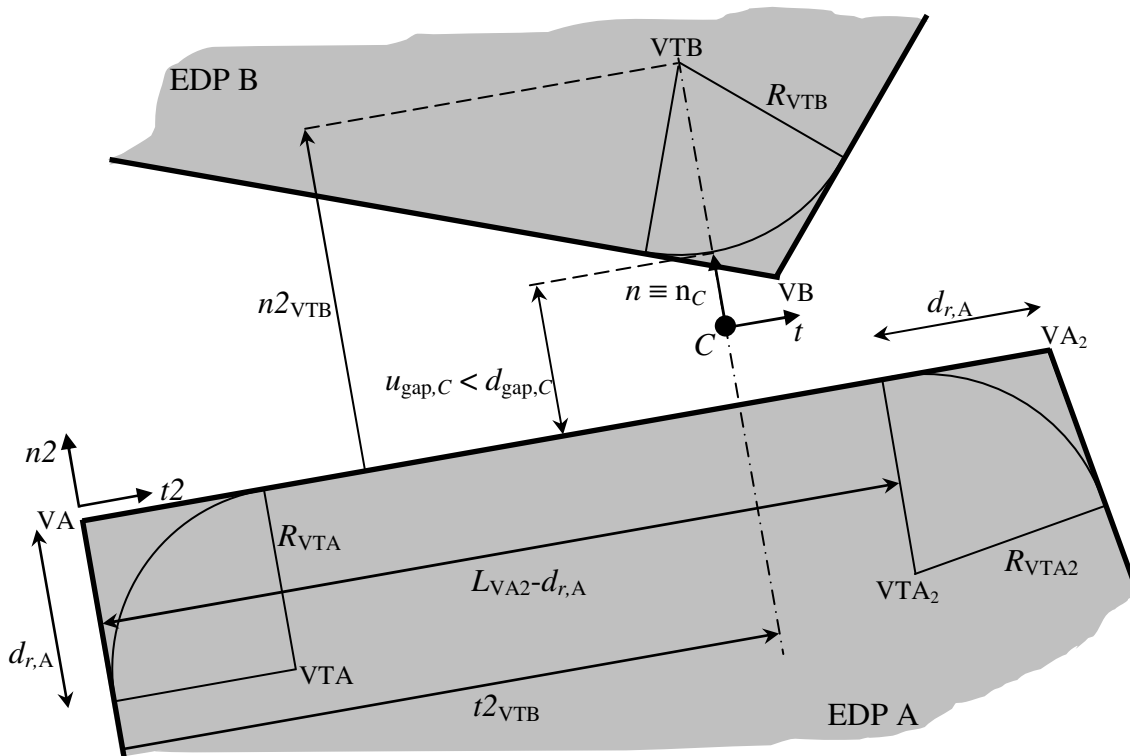


Figura 3-17: Contacto do tipo 3 (lado-vértice).

Assim um contacto pontual do tipo 3 também deve satisfazer as condições (3.30) ($d_{r,A} \leq t2_{VTB} \leq L_{VTA2} - d_{r,A}$) e (3.28). Mantendo-se a definição (3.16) com o versor $t2$ as coordenadas do contacto são dadas por (3.32) ($x_C = x_{VA} + \mathbf{T}_\alpha^T \{t2_{VTB} \quad u_{gap,C}/2\}^T$).

A Figura 3-18 ilustra como, em virtude do movimento relativo de dois elementos em contacto, pode evoluir o tipo de um dado contacto pontual. Assim, o contacto pontual do vértice VB que é inicialmente do tipo 3 passa suavemente primeiro a contacto do tipo 1 e depois a contacto do tipo 2, devido ao deslocamento do elemento discreto B.

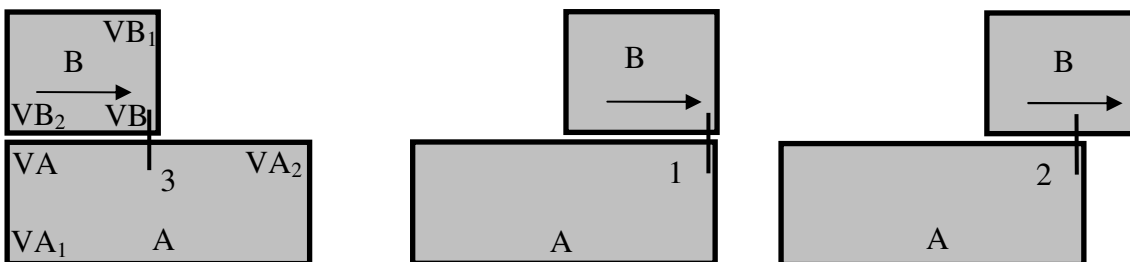


Figura 3-18: Mudança de tipo de contacto lado-vértice para contacto vértice-lado ($A < B$).

3.8.4. Contacto do tipo círculo-círculo

A Figura 3-19 representa um contacto do tipo 4 (círculo-círculo). Os raios dos elementos discretos circulares A e B são, respectivamente, R_A e R_B .

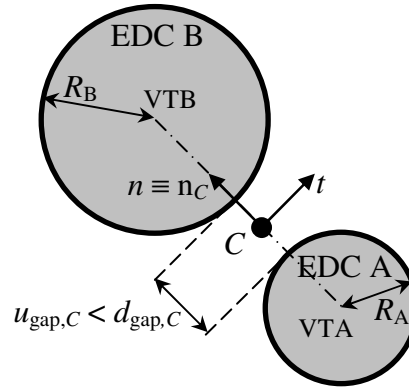


Figura 3-19: Contacto do tipo 4 (círculo-círculo).

A preservação do conceito de vértice teórico e a sua identificação ao centro de massa do elemento discreto circular possibilita que a caracterização dos vários tipos de contacto seja uniforme. Deste modo, os raios dos círculos podem ser identificados aos raios dos arcos de arredondamento considerados para os elementos discretos poligonais.

A direcção da recta definida pelos vértices teóricos VTA e VTB permite determinar a normal do contacto n_C , e o referencial local do contacto (t, n) com origem no ponto C . Para se criar e/ou manter um contacto pontual é necessário e suficiente satisfazer as condições (3.28), com $u_{\text{gap},C}$ calculado por (3.27). Finalmente, as coordenadas do contacto, ponto C , são determinadas através da equação (3.29).

3.8.5. Contactos dos tipos vértice-círculo e círculo-vértice

O contacto pontual do tipo 5 (vértice-círculo) encontra-se representado na Figura 3-20. O vértice teórico VTA do elemento discreto poligonal representa o centro do arco de arredondamento de raio R_{VTA} do vértice VA. O ponto VTB representa o vértice teórico do elemento discreto circular de raio R_B . Este tipo de contacto requer a verificação de duas condições. A projecção do centro do elemento circular sobre o elemento poligonal deve

situar-se na zona de arredondamento do vértice VA e, consoante o caso aplicável, a sobreposição ou separação dos elementos deve ser superior ou inferior, respectivamente, às tolerâncias de sobreposição e de separação.

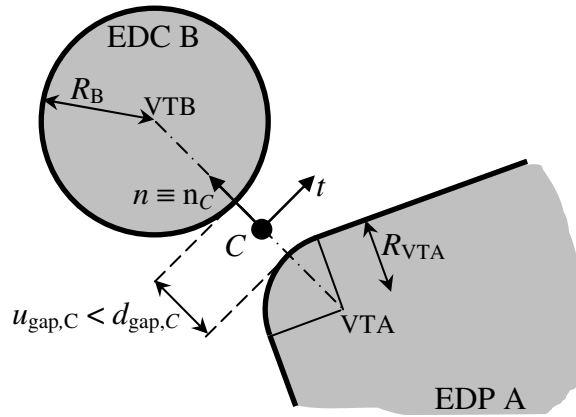


Figura 3-20: Contacto pontual do tipo 5 (vértice-círculo).

A projecção do ponto VTB é obtida definindo primeiro um sistema de eixos local para cada um dos lados adjacentes ao vértice VA, como se pode ver na Figura 3-21. Os referenciais locais $(t1, n1)$ e $(t2, n2)$ dos lados VA_1VA e $VAVA_2$ contíguos ao vértice VA têm como origem, respectivamente, os vértices VA_1 e VA_2 .

As abcissas $t1_{VTB}$ e $t2_{VTB}$ devem respeitar simultaneamente as condições (3.26). A variável de separação $u_{gap,C}$ determinada por (3.27), deve respeitar as condições (3.28). Criado o contacto, as suas coordenadas são determinadas pela equação (3.29) e a sua normal é definida por (3.23).

Um contacto pontual do tipo 7 (círculo-vértice) deve satisfazer os mesmos requisitos do contacto pontual do tipo vértice-círculo. Porém, a ordem do elemento discreto poligonal é maior que a do elemento discreto circular.

3.8.6. Contactos dos tipos lado-círculo e círculo-lado

O contacto do tipo 6 (lado-círculo) encontra-se representado na Figura 3-22. As quantidades $t2_{VTB}$ e $n2_{VTB}$ são as coordenadas do centro VTB, relativamente ao referencial local $(t2, n2)$ com origem no vértice VA. Neste caso devem ser satisfeitos dois

tipos de condições: (1) a projecção do centro VTB perpendicularmente ao lado $VAVA_2$ deve encontrar-se fora das zonas de arredondamento e (2) a variável de separação $u_{\text{gap},C}$ deve verificar as condições (3.28).

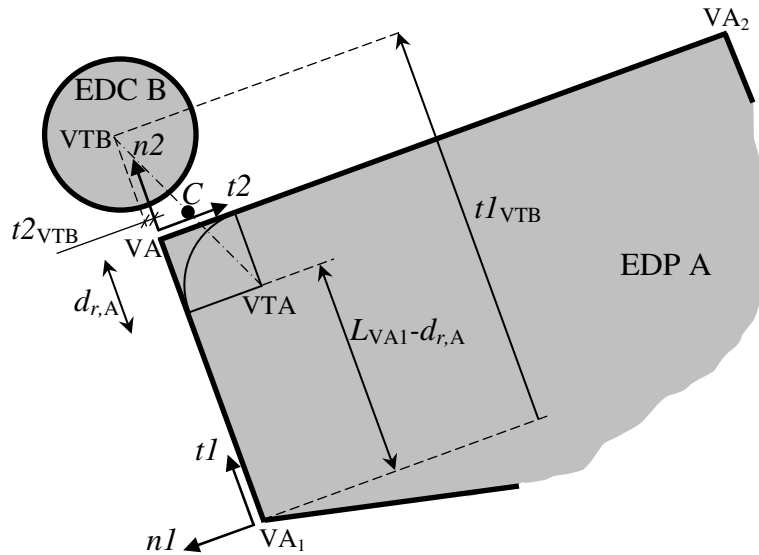


Figura 3-21: Projeções do vértice teórico VTB perpendicularmente aos lados VA_1VA e $VAVA_2$.

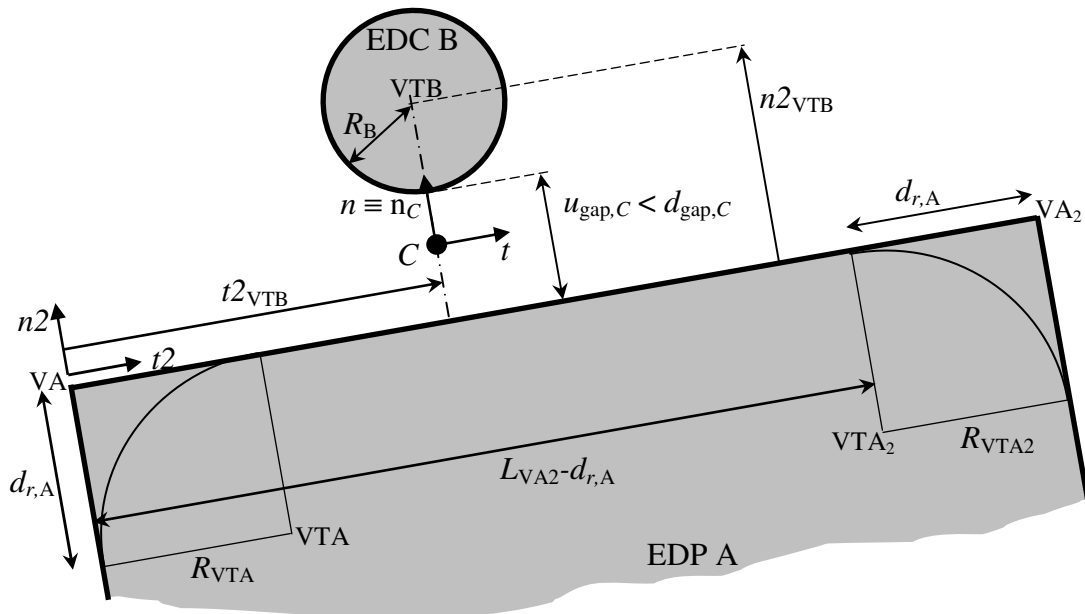


Figura 3-22: Contacto do tipo 6 (lado-círculo).

As coordenadas do contacto, ponto C , são obtidas de (3.32)

$(x_C = x_{VA} + \mathbf{T}_\alpha^T \{t2_{VTB} \quad u_{gap,C} / 2\}^T)$ e a normal do contacto é definida por (3.34).

A definição do contacto do tipo 8 (círculo-lado) é similar à do contacto do tipo lado-círculo, exceptuando-se a questão da numeração, anteriormente discutida.

A tabela seguinte mostra resumidamente as condições a verificar para se estabelecer um determinado tipo de contacto pontual, assim como as expressões que definem as suas coordenadas e a sua normal.

Tabela 3-1: Condições, coordenadas x_C e normal n_C dos vários tipos de contacto pontuais.

Tipo	Condições	x_C	n_C
1	$\begin{cases} t1_{VTA} > L_{VBI} - d_{r,B} \\ t2_{VTA} < d_{r,B} \end{cases}$ <p>(3.25)</p>	$x_C = x_{VTA} + \left(R_{VTA} + \frac{u_{gap,C}}{2} \right) n_C$ <p>(3.29)</p>	$n_C = \frac{1}{d_{VTAVTB}} \begin{Bmatrix} x_{VTB,1} - x_{VTA,1} \\ x_{VTB,2} - x_{VTA,2} \end{Bmatrix}$ <p>(3.23)</p>
	$\begin{cases} t1_{VTB} > L_{VAI} - d_{r,A} \\ t2_{VTB} < d_{r,A} \end{cases}$ <p>(3.26)</p>		
	4		
2, 8	$d_{r,B} \leq t2_{VTA} \leq L_{VB2} - d_{r,B}$ <p>(3.30)</p>	$x_C = x_{VB} + \mathbf{T}_\alpha^T \left\{ t2_{VTA} \quad \frac{u_{gap,C}}{2} \right\}^T$ <p>(3.32)</p>	$n_C = - \begin{Bmatrix} n2_1 \\ n2_2 \end{Bmatrix}$ <p>(3.33)</p>
3, 6	$d_{r,A} \leq t2_{VTB} \leq L_{VA2} - d_{r,A}$	$x_C = x_{VA} + \mathbf{T}_\alpha^T \left\{ t2_{VTB} \quad \frac{u_{gap,C}}{2} \right\}^T$	$n_C = \begin{Bmatrix} n2_1 \\ n2_2 \end{Bmatrix}$

3.8.7. Tolerâncias de sobreposição e de separação

É necessário definir uma tolerância que permita limitar a sobreposição dos elementos discretos e uma outra que permita limitar os contactos virtuais. A limitação da sobreposição impede o atravessamento dos elementos discretos mas também a sobreposição excessiva e a limitação da separação permite que um dado contacto permaneça activo mesmo quando não efectivo, o que pode ser vantajoso do ponto de vista numérico. Caso a sobreposição seja excessiva, deverá recorrer-se ao aumento da rigidez normal para que a sobreposição entre elementos discretos seja fisicamente aceitável, ver Figura 8-2 (SÎNCRAIAN 1998a, 2001)

(neste caso o procedimento baseado em resultados experimentais, e apresentado na secção 3.10, para o cálculo da rigidez normal a utilizar no método dos elementos discretos deixa de ser válido, caindo-se no problema da calibração do modelo) ou proceder ao seu controlo como se mostra na secção 8.1. Efectivamente, por vezes, estes excessos são fisicamente inadmissíveis e as relações geométricas anteriormente apresentadas podem perder significado. Como se pode ver na Figura 3-23 (a) uma sobreposição dentro de certos limites define sem ambiguidades o tipo de contacto. Porém, no caso de uma sobreposição excessiva, representada na Figura 3-23 (b), a definição do tipo de contacto não é única.

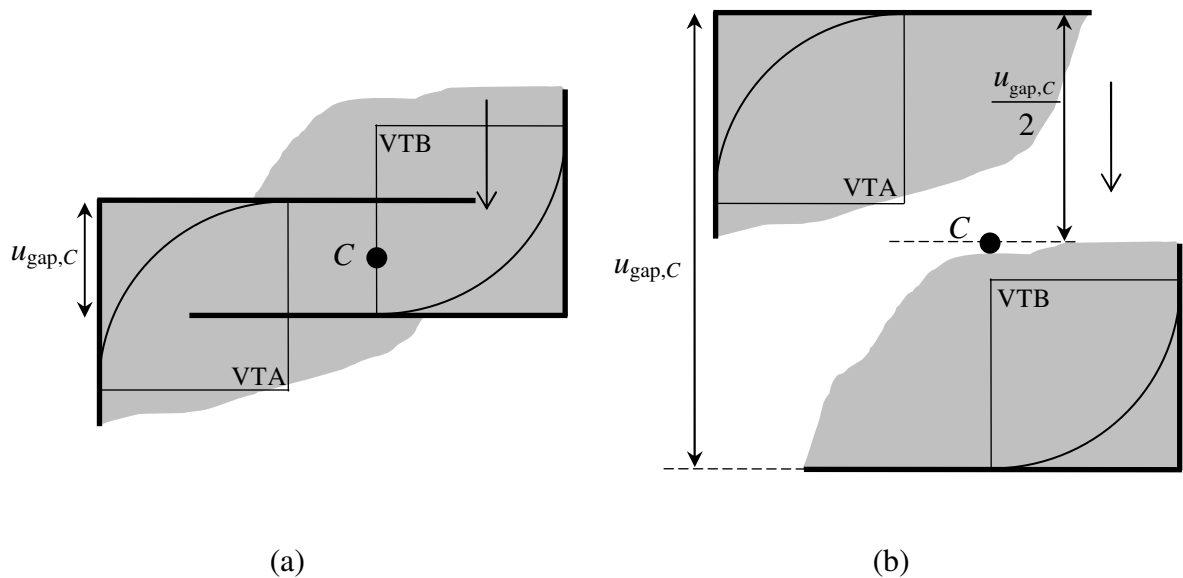


Figura 3-23: Sobreposição: (a) admissível; (b) não admissível.

Na Figura 3-23 (b) é possível definir um contacto pontual do tipo 3, tal como na Figura 3-23 (a), envolvendo o lado horizontal do elemento discreto poligonal A, mas também um contacto pontual do tipo 3 mas envolvendo o lado vertical do mesmo elemento. Ou seja, a representação do contacto não é unívoca o que conduz inevitavelmente a erros na determinação das forças de contacto. O deslocamento descendente origina na primeira figura deformações normais, associadas à definição do contacto do tipo 3, enquanto que na segunda figura origina além das deformações normais, associadas à definição do primeiro contacto, deformações de corte, associadas à definição do segundo contacto.

Por outro lado, uma tolerância de separação excessivamente grande pode dar origem à formação de muitos contactos virtuais que nunca se tornarão efectivos durante a execução do programa, o que o poderá tornar muito mais lento.

Para sistemas de elementos discretos poligonais estas tolerâncias são usualmente da ordem de grandeza da distância de arredondamento (SÎNCRAIAN 1998a) enquanto que para sistemas de elementos discretos circulares, são de uma ordem de grandeza inferior à dimensão do elemento (ITASCA 2002).

Para os sistemas constituídos por elementos poligonais e elementos circulares foram definidas as seguintes tolerâncias. A tolerância de sobreposição:

(1) para um contacto entre elementos discretos poligonais é

$$d_{\text{over},C} = \min(d_{r,A}, d_{r,B}) \quad (3.35)$$

(2) para um contacto entre um elemento circular A e um elemento poligonal B (ou vice-versa) é

$$d_{\text{over},C} = \begin{cases} 2d_{r,B} & \Leftarrow R_{\text{VTA}} \geq R_{\text{VTB}} \\ 2d_{r,A} & \Leftarrow R_{\text{VTA}} < R_{\text{VTB}} \end{cases} \quad (3.36)$$

(3) e no caso de um contacto entre elementos circulares é

$$d_{\text{over},C} = \frac{1}{2} \min(d_{r,A}, d_{r,B}). \quad (3.37)$$

Para os elementos discretos circulares é ainda necessário considerar o caso da utilização do método da expansão do raio na geração da malha, ver secção 7.4. Nessa situação é necessária uma tolerância de sobreposição elevada, como se mostra na secção 7.4.1,

$$d_{\text{over},C} = \chi_{\text{exp}} \max(R_{\text{VTA}}, R_{\text{VTB}}) \quad (3.38)$$

onde χ_{exp} , representa um factor, por norma igual a 1,0.

A tolerância de separação toma sempre o valor

$$d_{\text{gap},C} = \chi_{\text{tol}} \min(d_{r,A}, d_{r,B}) \quad (3.39)$$

em que o factor χ_{tol} toma valores no intervalo $[0, 2]$. Por norma considera-se 1,0 no caso de uma detecção de contactos e 2,0 no caso de uma actualização de contactos.

Quando a tolerância de sobreposição é ultrapassada no decurso de uma análise, é dada

informação ao utilizador através da mensagem de erro “*Sobreposição excessiva no contacto C*”, acompanhada da informação sobre o tipo de contacto, as coordenadas do contacto, o valor da sobreposição e, a nível gráfico, da identificação do contacto através de um círculo. Ocorrendo o erro é possível interromper a execução do programa ou, alternativamente, prosseguir a execução.

(1) Interrupção da execução do programa

Neste caso, após a interrupção é possível reiniciar a execução do procedimento iterativo a partir da última configuração de equilíbrio. Antes de reiniciar, é necessário identificar a causa do erro no sentido de o eliminar. Utilizando um comando apropriado é possível visualizar os elementos discretos em questão. As causas possíveis podem ser: (1) valor da rigidez normal da junta demasiado baixo, permitindo que os elementos discretos se sobreponham em demasia; (2) instabilidade numérica, caracterizada pelo incremento progressivo da amplitude de oscilação devido à utilização de um passo de tempo demasiado elevado. Uma representação gráfica da história das velocidades ou dos deslocamentos pode ajudar a evidenciar esta causa.

(2) Prossecução sem interrupção da execução

Esta possibilidade só é admissível na fase de colapso. As forças de compressão nos contactos onde a tolerância de sobreposição é ultrapassada deixam de ser incrementadas simulando uma degradação do material.

3.9. Propriedades do material da unidade de alvenaria

Vencer vãos consideráveis tendo como material disponível apenas unidades de alvenaria de pedra natural ou de cerâmica, requer que estas sejam dispostas de uma forma muito especial tal como em arco. A unidade de alvenaria é eficaz quando submetida a forças de compressão e pouco resistente quando sujeita a forças de tracção (o valor da tensão de compressão actuante é normalmente muito baixo quando comparado com o valor da resistência à compressão da unidade de alvenaria f_b e o valor da resistência à tracção da unidade de alvenaria f_{bt} é muito inferior a f_b). A forma em arco permite precisamente que a distribuição/degradação das forças no seu interior, representada pela linha de impulsos, se faça ao longo das aduelas e das juntas dentro dos limites do terço central das secções

transversais, garantindo, deste modo, apenas tensões de compressão. Na eventualidade da linha de impulso, em algumas secções, sair do terço central, surgem tensões de tracção naquelas secções que até um determinado valor são suportadas pela junta, fissurando-se esta quando aquele valor é ultrapassado. Uma vez que a argamassa nas juntas das pontes em arco de alvenaria muitas das vezes se encontra deteriorada ou simplesmente não existe a resistência à tracção da alvenaria f_t é desprezada.

Não obstante se referir anteriormente que o valor da tensão de compressão actuante ser muitas vezes inferior a f_b , não significa que estes dois valores não devam ser comparados. Já no que se refere à comparação do valor da tensão de compressão actuante com o valor da resistência à compressão da alvenaria, f , esta pode não ser satisfeita.

Molins (1998) apresenta um estudo sobre a ponte de Bridgemill e verifica que considerando o valor da resistência à compressão da alvenaria, a carga de colapso se reduz de cerca de 15 %. Calcula ainda, a variação da carga de colapso para diferentes valores de f que se encontra representada na Figura 3-24.

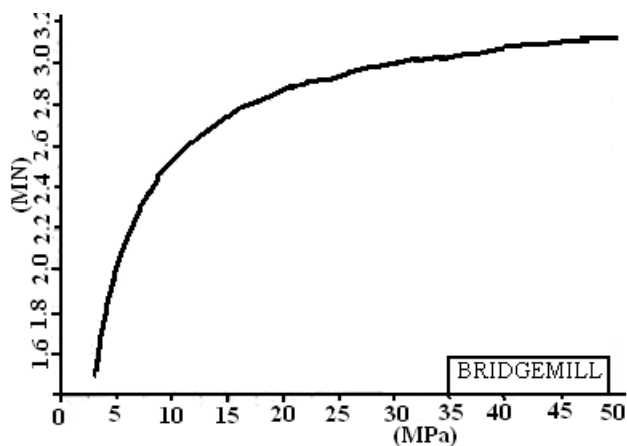


Figura 3-24: Carga de colapso em função da resistência à compressão da alvenaria, para uma carga em faca aplicada a um quarto de vão.

Por consequência, a adopção do valor da resistência à compressão da alvenaria como critério de colapso é muito conservadora. No presente trabalho a tensão de compressão máxima é comparada com f_b . Verifica-se que utilizando o modelo de elementos discretos misto proposto o valor da resistência à compressão da alvenaria é atingido para valores de carga muito inferiores aos valores da carga de rotura obtidos de ensaios *in situ*.

Em geral, excepto para alguns casos raros, como por exemplo um arco adintelado onde não é possível encontrar nenhuma combinação possível de rótulas entre o extradorso e intradorso por forma a obter-se um mecanismo de colapso, um arco em alvenaria não ruirá por esmagamento do material mas sim por instabilidade do conjunto.

A Tabela 3-2, elaborada por Rocha (1971), evidencia a clara diferença entre a resistência à compressão e à tracção de diferentes tipos de unidades de alvenaria de pedra natural. A título indicativo também são apresentados os valores do módulo de elasticidade, E_b , e coeficiente de Poisson, ν_b .

Tabela 3-2: Valores da resistência à tracção e à compressão, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, para diversas unidades de alvenaria (ROCHA 1971).

Tipo	f_{bt}	f_b	E_b	ν_b
	MPa	MPa	GPa	—
Granito	6,3	118,0	76,0	0,21
Basalto	22,9	215,5	100,0	0,25
Calcário	4,4	113,0	83,0	0,23
Gnaisse	4,9	160,0	93,3	0,22
Grés	3,7	82,0	53,8	0,25
Arenito	—	40,0	—	—

As propriedades relevantes das unidades de alvenaria para o modelo de elementos discretos são:

- (1) a massa volúmica ρ ;
- (2) a resistência à compressão f_b ;
- (3) a resistência à tracção f_{bt} ;
- (4) o módulo de elasticidade E_b ;
- (5) o coeficiente de Poisson ν_b .

A resistência à tracção não sendo efectivamente necessária, permite averiguar se os resultados dos ensaios são normais. Além daquelas propriedades, a porosidade e o

coeficiente de absorção de água também são normalmente determinados (COSTA P. 2007).

Ensaio recentemente efectuados em provetes preparados a partir de tarolos extraídos de pontes em arco de alvenaria permitem complementar a tabela anterior. Por exemplo, os ensaios de compressão simples realizados por Pedro Costa (2003) em tarolos extraídos da Ponte de Vila Fria, mostraram que a resistência à compressão da unidade de alvenaria (granito) é da ordem dos 50,0 a 75,0 MPa, correspondendo a um valor característico da resistência à compressão da unidade de alvenaria f_{bk} de 54,0 MPa e os ensaios de tracção por compressão diametral exibiram uma resistência à tracção da unidade de alvenaria na ordem dos 3,0 a 5,0 MPa, correspondendo a um valor característico da resistência à tracção da unidade de alvenaria f_{bt} de 2,84 MPa. Os valores registados para os módulos de elasticidade das unidades de alvenaria foram da ordem dos 17,0 a 35,0 GPa.

Os mesmos ensaios realizados por Cristina Costa (2002) em provetes extraídos da Ponte da Lagoncinha, também em granito, revelaram valores de 35,0 a 70,0 MPa para a resistência à compressão da unidade de alvenaria, 3,0 a 7,0 MPa para a resistência à tracção da unidade de alvenaria, 22,0 a 60,0 GPa para o módulo de elasticidade e 0,17 a 0,27 para o coeficiente de Poisson.

Ensaio realizados por diversos investigadores, nomeadamente, Hendry, Page, Harvey, Melbourne e Davey, sobre material extraído de pontes em arco de alvenaria, cujos resultados se encontram publicados em (PAGE 1993), mostram que a resistência à compressão das unidades de alvenaria é da ordem dos 21,9 a 43,8 MPa para arenito/grés; 7,7 MPa para tijolo; e 41,7 a 65,0 MPa para outros tipos de unidades de alvenaria. A resistência à compressão da alvenaria é apresentada apenas para duas pontes em arenito/grés e tijolo sendo, respectivamente, de 5,0 a 7,0 MPa e 4,0 MPa. A Tabela 3-3 reúne os valores indicados anteriormente.

3.10. Propriedades do material da junta

Na construção de uma ponte em arco de alvenaria as unidades de alvenaria de pedra natural ou de cerâmica são colocadas de modo a que as duas superfícies planas em contacto assentem na sua totalidade, encaixando-se perfeitamente para formar uma estrutura estável.

A resistência da argamassa utilizada para solidarizar o conjunto é diminuta quando comparada à resistência da unidade de alvenaria e, ao longo do tempo, vai se desagregando, permanecendo o conjunto estável devido à compactação resultante da acção da gravidade (HEYMAN 1995a). As tensões de compressão são fundamentais para a estabilidade do conjunto da estrutura de alvenaria. Todas as unidades de alvenaria se encontram compactadas pela acção da força de gravidade mas, para garantir a estabilidade, é também necessário que não ocorra deslizamento entre as unidades contíguas. A superfície envolvente da unidade de alvenaria apresenta geralmente rugosidade muito elevada. Coulomb afirmou que “a rugosidade é frequentemente tão elevada, nos materiais que se usam na construção de arcos de alvenaria, que as aduelas geralmente não deslizam umas sobre as outras” (HEYMAN 1995a). Admite-se igualmente que a linha de impulso é quase perpendicular ao plano da secção de qualquer junta. Quer isto dizer que a sua componente tangencial é muito inferior à componente normal de modo que normalmente não se produzirá deslizamento de uma aduela sobre outra. Vieira (1997) apresentou um estudo, usando o método dos elementos discretos, sobre o efeito do valor do ângulo de atrito entre aduelas e verificou que para ângulos de atrito superiores a 42° não ocorre deslizamento entre as aduelas do arco.

Tabela 3-3: Valores das resistências à tracção e à compressão, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson das unidades de alvenaria, obtidos por diversos autores.

Autores	Tipo	f_{bt}	f_b	E_b	ν_b
		MPa	MPa	GPa	—
Costa (2003)	Granito	3 – 5	50 – 75	17 – 35	—
Costa (2002)	Granito	3 – 7	35 – 70	22 – 60	0,17 – 0,27
Page (1993)	Arenito/Grés	—	22 – 44	—	—
	Tijolo	—	7,7	—	—
	Outra	—	42 – 65	—	—

A utilização nos contactos do modelo clássico de Mohr-Coulomb para o corte e a não consideração da resistência à tracção, tem proporcionado resultados satisfatórios na maioria dos estudos de estruturas de alvenaria antigas. Modelos mais elaborados justificam-se em análises mais detalhadas (LEMOS 1998a). No estudo de construções históricas, nomeadamente arcos de alvenaria, é preferível adoptar modelos de junta com o menor

número de parâmetros possível.

De facto os valores a considerar numa modelação excessivamente detalhada podem não estar disponíveis ou a sua determinação experimental ser demasiado complexa, como por exemplo, no caso da estimativa de um coeficiente de atrito que represente o estado real de degradação ou no da quantificação rigorosa dos parâmetros de rigidez. Além disso, numa análise cujo objectivo principal é avaliar a estabilidade da estrutura, a rigidez da junta não altera de forma significativa os resultados, como se pode concluir de um estudo de sensibilidade através de simulações numéricas fazendo variar os valores daqueles parâmetros.

As propriedades materiais determinantes são obtidas em ensaios laboratoriais, nomeadamente, ensaios triaxiais e ensaios de corte directo (ITASCA 1999), que fornecem o ângulo de atrito, a coesão, o ângulo de dilatância, a força máxima de tracção e as rigidezes normal e tangencial. Os valores mais frequentes para as rigidezes normal e tangencial das juntas das unidades de alvenaria de pedra natural situam-se entre 1 e 100 GPa/m, se se tratar de juntas com ligante, e acima de 100 GPa/m se se tratar de juntas bem talhadas de unidades de alvenaria de granito ou basalto. A bibliografia especializada apresentando valores para a rigidez das juntas é limitada, ver Bandis *et al.* (1983), Kulhawy (1975) e Rosso (1976).

Ensaio realizados por Muralha (2000) (ALMEIDA 2000) em provetes extraídos das paredes do Mosteiro da Serra do Pilar, Porto, constituídas por unidades de alvenaria de granito alterado a muito alterado com juntas preenchidas por uma argamassa muito friável, forneceram para a rigidez normal valores de 5300 a 11300 MPa/m para juntas de argamassa e de 6000 a 10600 MPa/m para juntas secas, e para a rigidez tangente de 170 a 3360 MPa/m (ensaio de corte) e 70 a 1910 MPa/m (ensaio de deslizamento) para juntas de argamassa e de 420 MPa/m (ensaio de deslizamento) para juntas secas. Vieira (1997) realizou um ensaio de compressão simples considerando duas unidades de alvenaria de *ytong* sobrepostas, sujeitas a uma força de compressão na direcção perpendicular à junta. O valor obtido para a rigidez normal da junta foi de 816 MPa/m.

3.10.1. Determinação experimental das propriedades do material das juntas

3.10.1.1. Junta unidade/unidade

A caracterização da junta pode fazer-se a partir da caracterização experimental por um lado da unidade de alvenaria e por outro lado, do sistema unidade de alvenaria mais junta (VIEIRA 1997) e (ITASCA 1999). Se se admitir que o sistema unidade/junta tem a mesma deformabilidade que o sistema equivalente são obtidas relações entre as propriedades dos dois sistemas. Para um ensaio de carga uniaxial sobre uma amostra simples contendo uma junta de espessura uniforme orientada perpendicularmente à direcção da carga, Figura 3-25 (b) a relação entre rigidezes é dada por

$$\frac{1}{k_{n,bj}} = \frac{1}{2k_{n,b}} + \frac{1}{k_{n,j}} \quad (3.40)$$

ou

$$k_{n,j} = \frac{2k_{n,bj}k_{n,b}}{2k_{n,b} - k_{n,bj}} \quad (3.41)$$

onde $k_{n,bj}$, $k_{n,b}$ e $k_{n,j}$ são a rigidez normal por unidade de área, respectivamente, do sistema composto pelas unidades de alvenaria contíguas e junta, de cada unidade de alvenaria isolada e da junta isolada.

O ensaio da unidade de alvenaria, Figura 3-25 (a), permite determinar a sua rigidez normal através da relação entre o seu módulo de elasticidade, E_b , e o comprimento da sua aresta, L_b (dimensão segundo a direcção da força aplicada),

$$k_{n,b} = \frac{E_b}{L_b} \quad (3.42)$$

O módulo de elasticidade da unidade de alvenaria é dado por

$$E_b = \frac{L_b}{\Delta L_b} \frac{F}{A} \quad (3.43)$$

onde $A = hb$ é a área da secção transversal, sendo h a altura (dimensão paralela ao plano do modelo na direcção da junta) e b a espessura (dimensão perpendicular ao plano do modelo), e ΔL_b a variação do comprimento L_b devido à força aplicada F .

O ensaio das unidades de alvenaria com junta, Figura 3-25 (b), permite determinar a sua rigidez normal equivalente através da relação entre o seu módulo de elasticidade equivalente, E_{bj} , e a distância entre os pontos de aplicação da carga na direcção normal à junta, L_{bj} ,

$$k_{n,bj} = \frac{E_{bj}}{L_{bj}} \quad (3.44)$$

com

$$E_{bj} = \frac{L_{bj}}{\Delta L_{bj}} \frac{F}{A} \quad (3.45)$$

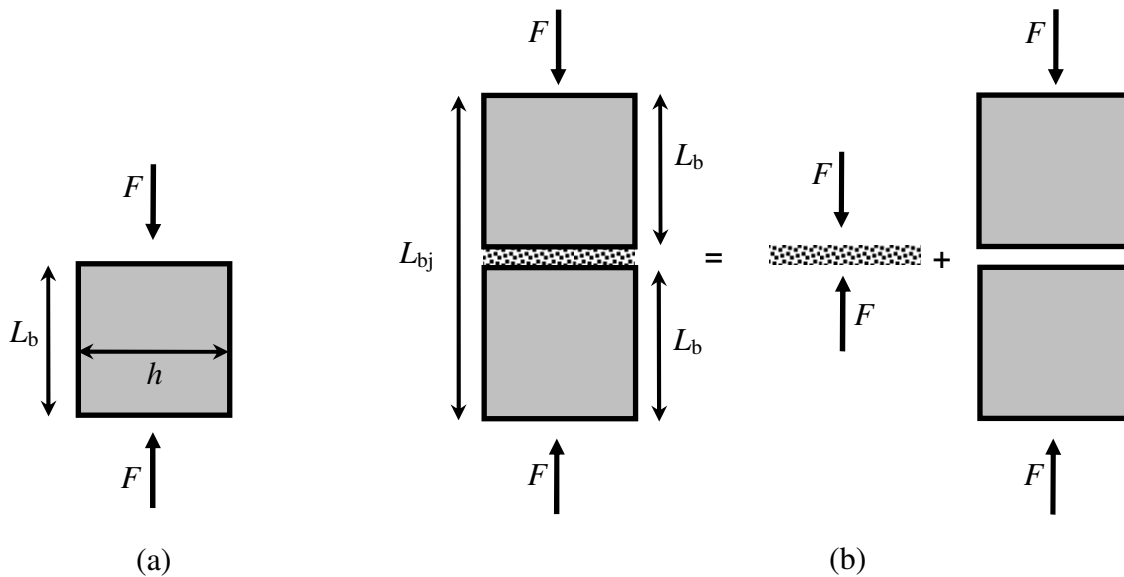


Figura 3-25: Ensaio (a) da unidade de alvenaria e (b) das unidades de alvenaria com junta.

Substituindo as expressões de (3.42) a (3.45) em (3.41) o valor experimental da rigidez normal da junta vem dado por

$$k_{n,j} = \frac{F}{A} \frac{1}{\Delta L_{bj} - 2\Delta L_b} \quad (3.46)$$

De forma similar a rigidez transversal da junta isolada $k_{s,j}$ é dada por

$$k_{s,j} = \frac{2k_{s,bj}k_{s,b}}{2k_{s,b} - k_{s,bj}} \quad (3.47)$$

onde $k_{s,bj}$ e $k_{s,b}$ são as rigidezes transversais por unidade de área, respectivamente, do sistema composto pelas unidades de alvenaria contíguas e junta, e de cada unidade de

alvenaria isolada. A rigidez tangencial da unidade de alvenaria é determinada por

$$k_{s,b} = \frac{G_b}{L_b} \quad (3.48)$$

sendo G_b o seu módulo de distorção

$$G_b = \frac{E_b}{2(1+\nu_b)} \quad (3.49)$$

Os valores para o coeficiente de Poisson da unidade de alvenaria obtidos experimentalmente são da ordem dos 0,17 a 0,27 (COSTA 2002), ver Tabela 3-3. Ensaio específicos permitem determinar o coeficiente de Poisson, por exemplo, através da determinação do módulo de compressibilidade cúbica da unidade de alvenaria K_b

$$K_b = \frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon_{v,b}} = \frac{E_b}{3(1-2\nu_b)} \Leftrightarrow \nu_b = \frac{3K_b - E_b}{6K_b} \quad (3.50)$$

onde $\bar{\sigma}$ é a tensão normal média ($\bar{\sigma} = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = F/(3A)$) e $\varepsilon_{v,b}$ a extensão volumétrica da unidade de alvenaria ($\varepsilon_{v,b} = \varepsilon_{x,b} + \varepsilon_{y,b} + \varepsilon_{z,b}$).

Similarmente a (3.44) a rigidez tangencial equivalente das unidades de alvenaria com junta é igual a

$$k_{s,bj} = \frac{G_{bj}}{L_{bj}} \quad (3.51)$$

com $G_{bj} = E_{bj}/(2+2\nu_{bj})$ onde E_{bj} é dado por (3.45), $\nu_{bj} = (3K_{bj} - E_{bj})/6K_{bj}$ e $K_{bj} = \bar{\sigma}/(\varepsilon_{x,bj} + \varepsilon_{y,bj} + \varepsilon_{z,bj})$. Simplificando (3.47) com (3.48), escrita para as duas unidades de alvenaria, e (3.51), o valor experimental da rigidez tangencial da junta é dado por

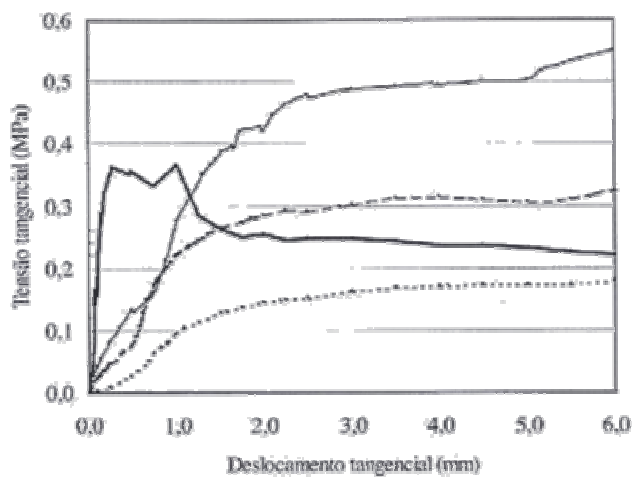
$$k_{s,j} = \frac{F}{2A} \frac{1}{(1+\nu_{bj})\Delta L_{bj} - 2(1+\nu_b)\Delta L_b} \quad (3.52)$$

Havendo dificuldade na determinação do coeficiente de Poisson das unidades de alvenaria com junta este é admitido igual ao coeficiente de Poisson da unidade de alvenaria pelo que atendendo a (3.46) a expressão anterior se reduz a

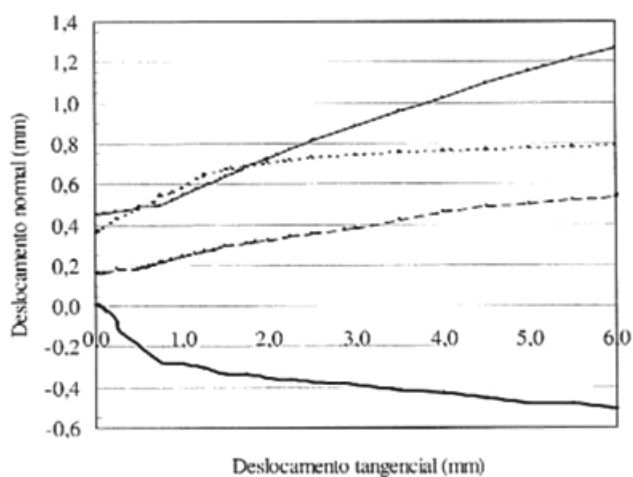
$$k_{s,j} = \frac{k_{n,j}}{2(1+\nu_b)} \quad (3.53)$$

Admitindo $\nu_b \approx 0,2$, valor frequentemente adoptado (COSTA 2002), conclui-se que a rigidez tangencial da junta é cerca de 40 % da rigidez normal da junta.

Para uma tensão normal constante, os ensaios de corte e deslizamento das juntas com argamassa, fornecem a variação da tensão tangencial e do deslocamento normal com o deslizamento tangencial, Figura 3-26 (MURALHA 2000).



(a)



(b)

Figura 3-26: Exemplo de relações obtidas laboratorialmente: (a) tensão tangencial-deslocamento tangencial; (b) deslocamento normal-deslocamento tangencial.

Ensaio de corte realizados em provetes com argamassa nas juntas e ensaios de deslizamento realizados em provetes com juntas secas permitem determinar a rigidez tangencial da junta, assim como outras propriedades, nomeadamente, a tensão tangencial máxima (tensão tangencial máxima lida no gráfico tensão tangencial-deslocamento tangencial obtido do ensaio de corte), a tensão tangencial resistente (média de um conjunto de valores da tensão tangencial depois de atingida a estabilização no ensaio de deslizamento), o ângulo de dilatância e as rectas de Coulomb (coesão e ângulo de atrito

interno).

Os gráficos obtidos nos ensaios de corte apresentam um andamento típico com uma tensão tangencial de pico seguida de uma diminuição acentuada. Os gráficos obtidos nos ensaios de deslizamento apresentam um crescimento da tensão tangencial na fase inicial seguido de uma estabilização.

Os gráficos deslocamento normal-deslocamento tangencial dos ensaios de corte apresentam um comportamento dilatante, com a abertura da junta durante o deslizamento, em sentido contrário ao da aplicação da tensão normal, e os dos ensaios de deslizamento um comportamento contraente, com o fecho da junta. A inclinação média das curvas deslocamento normal-deslocamento tangencial permite definir o ângulo de dilatância α_{dil} , cuja convenção estabelece o movimento dilatante como positivo e o movimento contraente como negativo. Em juntas secas o valor determinado para α_{dil} é reduzido sugerindo que se considere um valor nulo. A consideração da dilatância é mais importante em alvenarias confinadas pelo que neste trabalho ela não é considerada (LOURENÇO 1996) e (SÎNCRAIAN 2001).

Tanto o ensaio de corte para juntas de argamassa como o ensaio de deslizamento para juntas de argamassa ou secas permitem também obter o ângulo de atrito interno. Já o ensaio de inclinação progressiva para juntas secas permite determinar unicamente este parâmetro. Os valores do ângulo de atrito interno determinados por diversos tipos de ensaio para diferentes tipos de material de alvenaria são da ordem dos 35 a 42° (MURALHA 2000), (ALMEIDA 2000), (COSTA 2002), (VIEIRA 1997) e (PAGE 1993).

3.10.1.2. Junta unidade/enchimento e junta enchimento/enchimento

Os valores para as rigidezes normal e tangencial nas juntas definidas pelo extradorso do arco e o material de enchimento, são determinados considerando juntas com argamassa com uma espessura equivalente à irregularidade do extradorso. Em (COSTA 2002) são apresentados valores de 4000 a 65 000 MPa/m para a rigidez normal e de 2000 a 27 000 MPa/m para a rigidez tangencial. A informação sobre este tipo de junta é muito escassa.

As propriedades de rigidez para as juntas entre o material enchimento podem ser obtidas através do módulo de elasticidade do material de enchimento. O ensaio edométrico (COSTA 2002) permite determinar o módulo edométrico, que se relaciona com módulo de deformação do material de enchimento, pela expressão

$$E_f = \left(1 - \frac{2\nu_f^2}{1 - \nu_f}\right) E_{ed} \quad (3.54)$$

Atribuindo o valor 0,33 ao coeficiente de Poisson do material de enchimento (BAGUELIN 1987) obtém-se $E_f = 2E_{ed}/3$.

3.10.2. Determinação numérica das propriedades do material da junta enchimento/enchimento

Há diversos métodos que permitem relacionar o valor da rigidez do contacto para o betão com o valor do seu módulo de elasticidade. Estes métodos podem ser utilizados de uma forma aproximada para o material de enchimento (AZEVEDO 2003):

(1) O método da viga equivalente, ver Figura 3-27 (a): para dois elementos discretos circulares em contacto este método consiste em considerar uma “viga” de vão L igual à soma dos seus raios e de secção transversal igual ao produto da espessura b pelo dobro da média aritmética dos seus raios, \bar{R} (note-se que $2\bar{R} = L$).

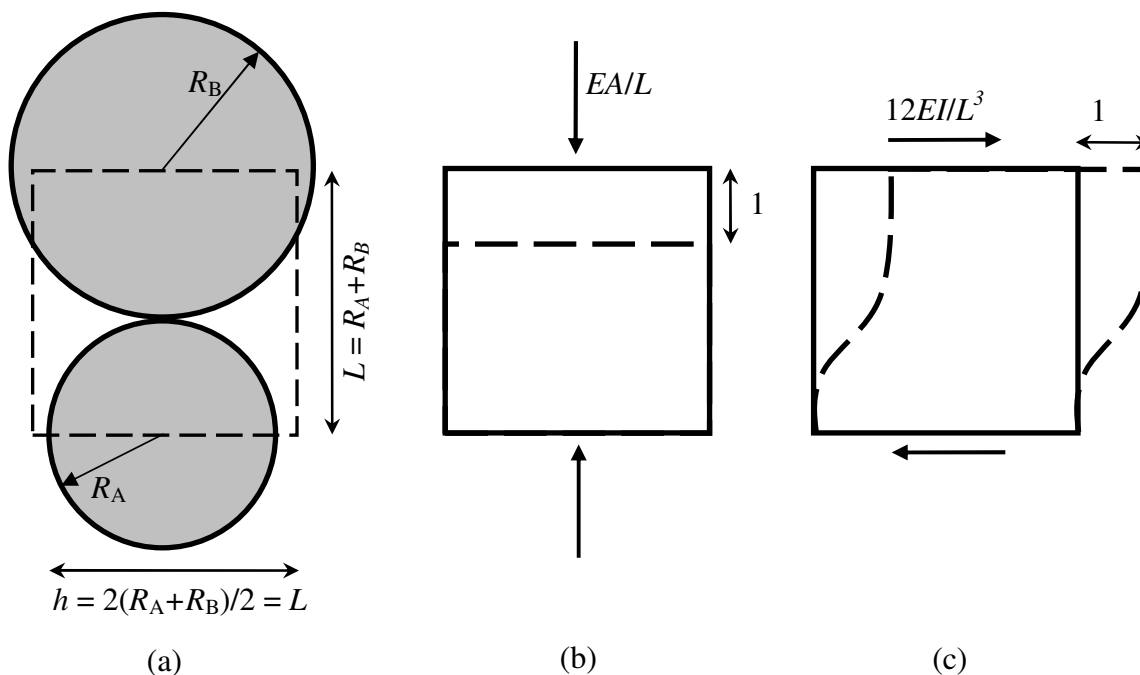


Figura 3-27: (a) Viga equivalente. Deformação: (b) axial e (c) transversal.

Considerando as expressões para a deformação axial e transversal desta viga equivalente, ver Figura 3-27 (b) e (c), vem

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{EA}{L} = \frac{Ehb}{L} = Eb = E \\ k_s &= \frac{12EI}{L^3} = \frac{12Eh^3b}{12L^3} = Eb = E \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde se fez $b = 1$.

(2) A teoria da elasticidade estabelece para um estado plano de tensão que

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\bar{R}}{L} = \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \\ k_s &= \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\bar{R}}{L} = \frac{1}{4} \frac{E}{1+\nu} \end{aligned} \quad (3.56)$$

(3) O método energético (AZEVEDO 2003) para malhas de distribuição regular hexagonal fornece para estados planos de tensão

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{\sqrt{3}}{3(1-\nu)} E \\ k_s &= \frac{\sqrt{3}(1-3\nu)}{3(1-\nu^2)} E \end{aligned} \quad (3.57)$$

e para estados planos de deformação

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{\sqrt{3}}{3(1+\nu)(1-2\nu)} E \\ k_s &= \frac{\sqrt{3}(1-4\nu)}{3(1+\nu)(1-2\nu)} E \end{aligned} \quad (3.58)$$

O método numérico proposto neste trabalho para estabelecer uma relação entre as rigidezes pontuais dos elementos circulares e as propriedades globais de um grupo de elementos circulares consiste em considerar uma amostra contendo um conjunto de elementos discretos com distribuição arbitrária, e envolvente rectangular que simule o material de enchimento, a qual é sujeita a um ensaio “numérico”. Esta amostra é confinada com o auxílio de três elementos poligonais fixos, dois verticais nos lados e um horizontal na base, ver Figura 8-5 (a). Um quarto elemento poligonal é colocado no topo da amostra para aplicação da carga, ver Figura 8-5 (b). Seguidamente são considerados valores múltiplos do

valor da rigidez dos contactos dos elementos discretos circulares obtido por um dos métodos anteriores (3.55) a (3.58) (que funcionarão como valores de referência) determinando-se para cada um deles a curva carga-deformação. Os módulos de deformabilidade tangente e secante são calculados para este conjunto de dados e comparados com os obtidos experimentalmente, permitindo determinar qual o multiplicador que deve afectar os valores de referência de modo a aproximar o comportamento da amostra dos resultados experimentais. Embora este método apresente alguma dependência das dimensões da amostra, pode-se afirmar que fornece um valor aceitável para caracterizar o contacto entre os elementos discretos circulares, ver secção 8.2 e (ROUXINOL 2007b, 2007c).

3.10.3. Atribuição das propriedades do material das juntas à ponte em estudo

As rigidezes normal e tangencial das juntas por unidade de área \bar{k}_n ($\equiv k_{n,bj}$) e \bar{k}_s ($\equiv k_{s,bj}$) dependem das dimensões das unidades de alvenaria e do material de enchimento adjacentes à junta, Figura 3-28. Esta mudança na notação pretende distinguir os valores de $k_{n,bj}$ e $k_{s,bj}$ que são obtidos experimentalmente dos de \bar{k}_n e \bar{k}_s que dependem das dimensões das unidades de alvenaria de cada problema em estudo.

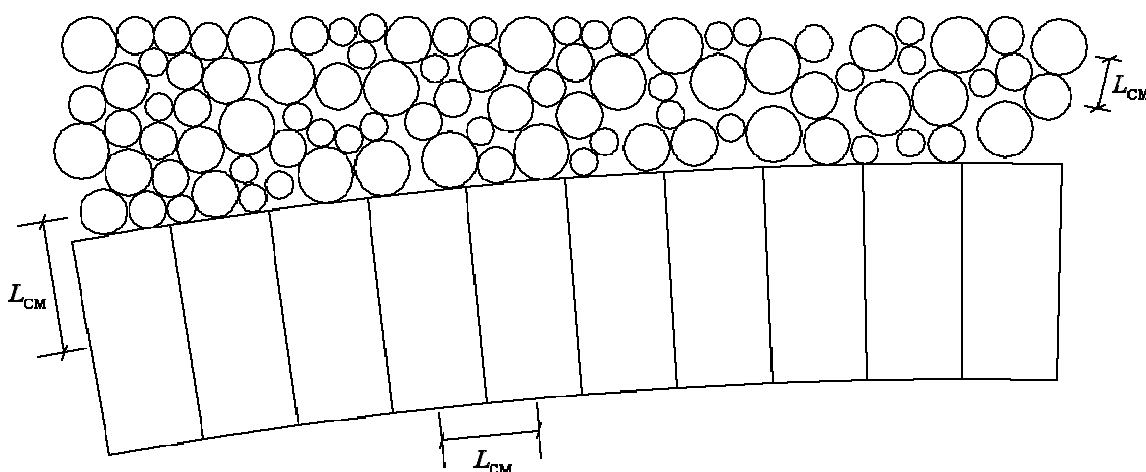


Figura 3-28: Distância entre os centros de massa L_{CM} .

As rigidezes normal e tangencial para qualquer tipo de junta por unidade de área \bar{k}_n e \bar{k}_s são obtidas através de relações similares a (3.40)

$$\begin{aligned}\bar{k}_n &= \frac{k_{n,j}k_{n,b}}{k_{n,j} + k_{n,b}} \\ \bar{k}_s &= \frac{k_{s,j}k_{s,b}}{k_{s,j} + k_{s,b}}\end{aligned}\quad (3.59)$$

com, atendendo a (3.42) e (3.48),

$$\begin{aligned}k_{n,b} &= \frac{E_b}{L_{CM}} \\ k_{s,b} &= \frac{G_b}{L_{CM}}\end{aligned}\quad (3.60)$$

onde L_{CM} é a distância entre os centros de massa das unidades de alvenaria ou do material de enchimento contíguo à junta projectada na direcção da sua normal, ver Figura 3-28. Deste modo, conhecidas as propriedades $k_{n,j}$, $k_{s,j}$, E_b e G_b , as rigidezes normal e tangencial do contacto por unidade de área (Pa/m) são fornecidas pelas expressões

$$\begin{aligned}\bar{k}_n &= \frac{k_{n,j}E_b}{E_b + k_{n,j}L_{CM}} \\ \bar{k}_s &= \frac{k_{s,j}G_b}{G_b + k_{s,j}L_{CM}}\end{aligned}\quad (3.61)$$

3.10.4. Atribuição das propriedades do material das juntas ao modelo de elementos discretos

As rigidezes normal e tangencial para o contacto pontual, k_n e k_s (N/m), são determinadas multiplicando \bar{k}_n e \bar{k}_s pela área de influência do contacto $A_c = L_c \times b$ ($b = 1$ m) isto é

$$\begin{aligned}k_n &= \bar{k}_n b L_c \\ k_s &= \bar{k}_s b L_c\end{aligned}\quad (3.62)$$

onde L_c é o comprimento de influência do contacto que pode ser fixo ou variável dependendo do tipo de formulação adoptada e do tipo de contacto, como anteriormente referido na secção 3.7. Assim a matriz constitutiva elástica local do contacto C é

$$\mathbf{E}_C = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} = b L_c \begin{bmatrix} \bar{k}_s & 0 \\ 0 & \bar{k}_n \end{bmatrix}\quad (3.63)$$

3.11. Modelos constitutivos dos contactos

Nos modelos descontínuos o comportamento mecânico das juntas é descrito por modelos constitutivos capazes de reproduzir os resultados experimentais. Estes modelos relacionam as tensões na junta com as deformações definidas em termos de deslocamentos relativos nos pontos de contacto. Neste trabalho, para a direcção normal à junta é adoptada uma relação linear entre a variação da força normal e o deslocamento normal relativo. Para a direcção paralela à junta é adoptada uma relação linear entre a variação da força tangencial e o deslocamento tangencial relativo da junta até que o valor da força tangencial corresponda a uma condição de deslizamento da junta. A resistência ao deslizamento é aproximada pelo critério de Mohr-Coulomb que fornece a força tangencial máxima que a junta pode mobilizar.

A seguir são apresentados os modelos constitutivos implementados para representar o comportamento físico da junta: (1) o modelo elástico linear; (2) o modelo elástico linear “perfeitamente plástico”; (3) o critério de resistência de Mohr-Coulomb. Arbitra-se o sinal positivo para a força de contacto normal de compressão, ver Figura 3-29.

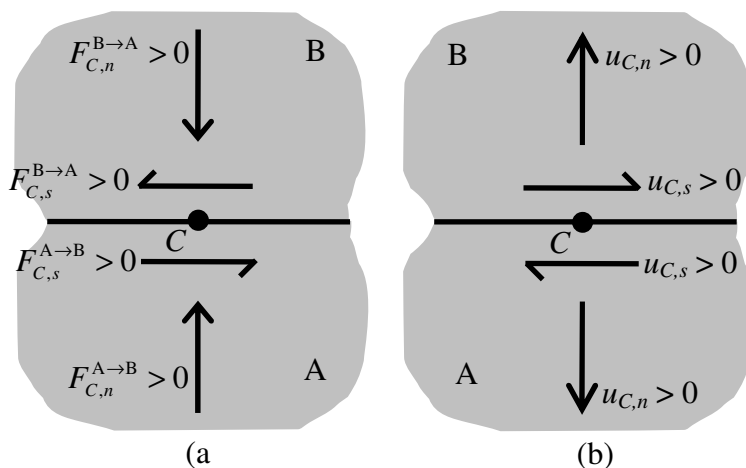


Figura 3-29: Sentidos positivos (a) das forças de contacto e (b) dos deslocamentos no contacto.

3.11.1. Modelo constitutivo elástico linear

O modelo constitutivo mais simples para o contacto consiste em considerar a variação das forças, normal e de corte, proporcionais aos deslocamentos relativos. Para o efeito são consideradas as constantes de proporcionalidade k_n e k_s , respectivamente, para os

deslocamentos com direcção normal, $u_{C,n}$, e tangencial, $u_{C,s}$, relativamente à superfície do contacto, ver Figura 3-30.

A este modelo não está associado qualquer critério de resistência tanto para as forças de contacto normal positivas como para as forças de contacto tangencial, pelo que as forças de contacto são ilimitadas. As forças de contacto normais negativas, de tracção, podem ou não serem admissíveis, ver Figura 3-30 (a) (no segundo caso o modelo constitutivo deixa obviamente de ser linear).

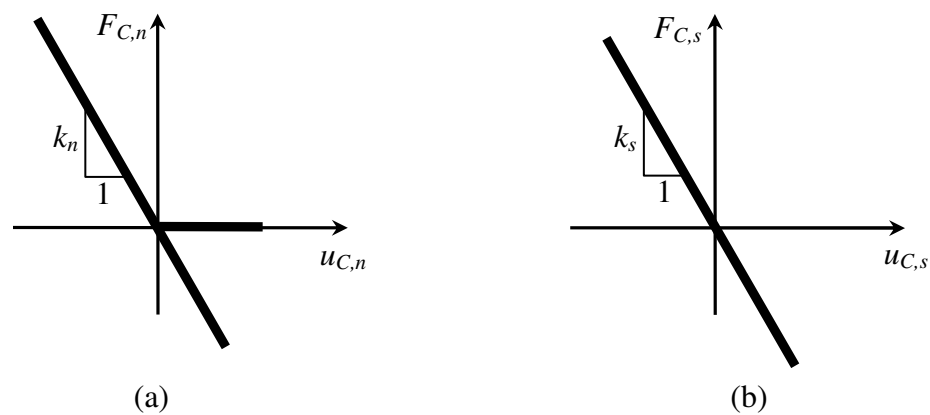


Figura 3-30: Modelo elástico linear. Relação (a) $F_{C,n} - u_{C,n}$ e (b) $F_{C,s} - u_{C,s}$.

3.11.2. Modelo constitutivo elástico linear “perfeitamente plástico”

O modelo elástico linear “perfeitamente plástico” encontra-se representado na Figura 3-31 (note-se que este modelo constitutivo é obviamente não-linear).

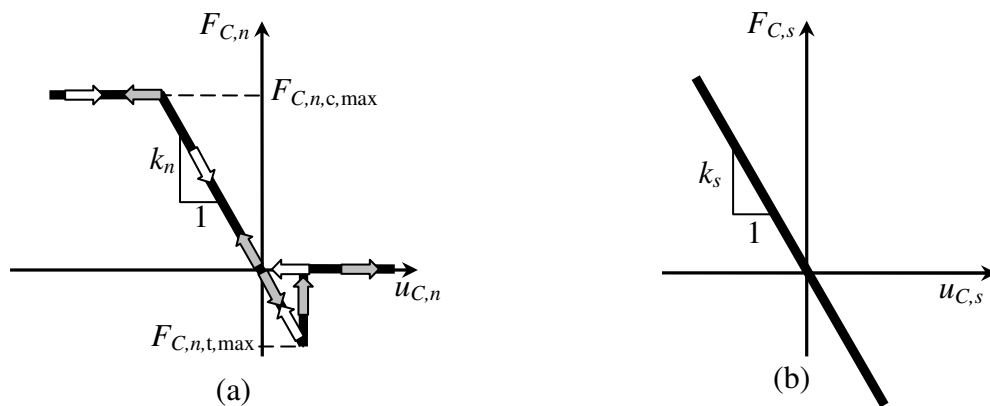


Figura 3-31: Modelo elástico linear “perfeitamente plástico”.
Relação (a) $F_{C,n} - u_{C,n}$ e (b) $F_{C,s} - u_{C,s}$.

As forças de contacto $F_{C,n}$ e $F_{C,s}$ dependem dos deslocamentos do contacto $u_{C,n}$ (Figura 3-31 (a)) e $u_{C,s}$ (Figura 3-31 (b)), respectivamente, e obedecem a determinados requisitos. Como se pode ver na Figura 3-31 (a), as forças de contacto de tracção e de compressão apresentam valores limites. O limite para a força de contacto de tracção é $F_{C,n,t,max} (\leq 0)$ tomando frequentemente o valor zero. Admite-se que a rotura por tracção é do tipo frágil com queda da força de contacto para zero após a rotura. O limite para a força de contacto de compressão é $F_{C,n,c,max} (> 0)$. Para uma força de contacto normal calculada admitindo-se um comportamento elástico linear $F_{elas,C,n}$, a força de contacto normal efectiva será dada pela função

$$F_{C,n} = \begin{cases} 0 & \Leftarrow F_{elas,C,n} < F_{C,n,t,max} \\ F_{elas,C,n} & \Leftarrow F_{C,n,t,max} \leq F_{elas,C,n} < F_{C,n,c,max} \\ F_{C,n,c,max} & \Leftarrow F_{elas,C,n} \geq F_{C,n,c,max} \end{cases} \quad (3.64)$$

A força de contacto tangencial pode ou não ser limitada. Neste trabalho a força de contacto tangencial máxima segue o critério de resistência de Mohr-Coulomb.

3.11.3. Critério de resistência de Mohr-Coulomb

A força de contacto tangencial máxima segue o critério de Mohr-Coulomb, representado na Figura 3-32 e formulado por

$$F_{C,s,max} = c + F_{C,n} \tan \phi \quad (3.65)$$

onde c é a coesão e ϕ o ângulo de atrito interno. A uma força de contacto tangencial calculada admitindo-se um comportamento elástico linear $F_{elas,C,s}$, corresponderá uma força de contacto tangencial efectiva dada por, ver Figura 3-32 (b),

$$F_{C,s} = \begin{cases} F_{elas,C,s} & \Leftarrow |F_{elas,C,s}| \leq |F_{C,s,max}| \\ F_{C,s,max} \frac{F_{elas,C,s}}{|F_{elas,C,s}|} & \Leftarrow |F_{elas,C,s}| > |F_{C,s,max}| \end{cases} \quad (3.66)$$

Adoptando o modelo elástico linear “perfeitamente plástico” para descrever a relação $F_{C,n} - u_{C,n}$, podem ocorrer três situações:

(1) Se a força de contacto de tracção, calculada admitindo um comportamento elástico linear, é superior à força de contacto de tracção máxima a força de contacto tangencial efectiva é nula (deslocamento da junta originando um contacto virtual);

(2) Se a força de contacto de compressão, calculada admitindo um comportamento elástico linear, é superior à força de contacto de compressão máxima a força de contacto tangencial máxima toma um valor constante (ponto A), ver Figura 3-32 (a);

(3) Se a força de contacto normal é inferior à força de contacto máxima de compressão e superior à força de contacto máxima de tracção a força de contacto tangencial máxima toma o valor dado pela expressão (3.65).

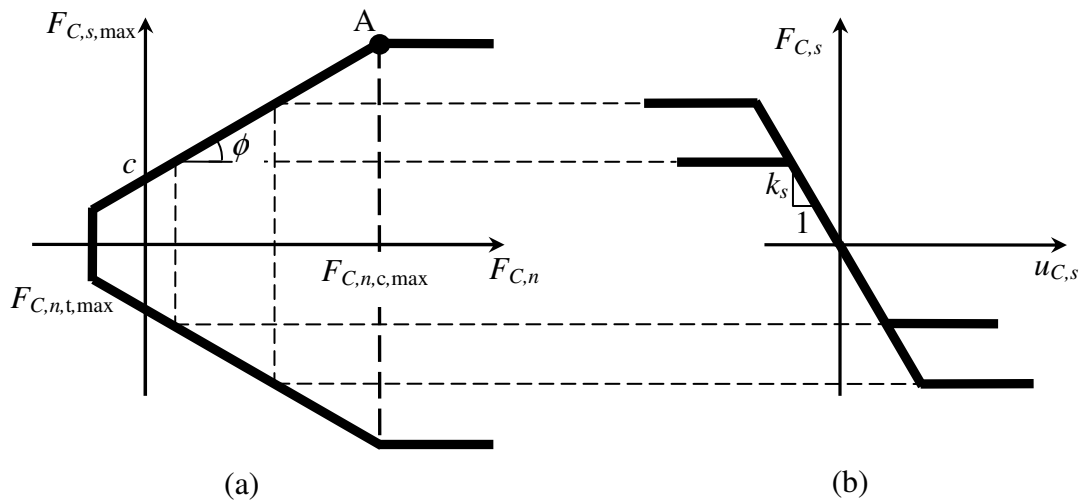


Figura 3-32: Critério de Mohr-Coulomb: (a) $F_{C,s,max}(c, \phi, F_n)$; (b) $F_{C,s}(u_{C,s}, F_{s,max})$.

4. Detecção de contactos

A detecção de contactos representa um aspecto crítico do método dos elementos discretos, sendo tanto mais crítico quanto maior for o número de elementos discretos e quanto maior for a complexidade geométrica do elemento discreto. O desenvolvimento de métodos eficientes de detecção de contactos é, indubitavelmente, um dos maiores desafios do método dos elementos discretos, particularmente se este for utilizado para efectuar análises dinâmicas, onde a sistemática supressão e criação de inúmeros contactos durante a execução do programa é inevitável, devido à ocorrência de grandes deslocamentos. Embora as relações geométricas que definem os contactos sejam elementares, como se viu anteriormente na secção 3.8, a sua verificação sistemática conduz a tempos da unidade central de processamento (CPU) elevados, proporcionais ao quadrado do número de elementos discretos do sistema, no caso do método de detecção de contactos ser de procura directa, isto é, cada elemento contra todos os outros.

A rotina de detecção de contactos é activada no início da execução do programa. As posteriores activações da mesma devem ser o menos frequentes possível. A definição de contacto virtual, por exemplo, permite mantê-lo activo, apesar das forças de contacto serem nulas, evitando a sua sistemática activação e desactivação. O contacto é criado se a

separação entre dois elementos for igual ou inferior à tolerância de separação $d_{\text{gap},C}$, ver secção 3.8.

Os métodos que permitem reduzir os tempos da CPU e os dispêndios de memória de acesso aleatório (RAM) podem classificar-se em três grandes grupos (LEMOS 1995b):

- (1) o método dos volumes envolventes (*body based cells*), de forma circular ou rectangular em 2D e esférica ou paralelepipedica em 3D (GREENGARD 1987) e (WILLIAMS 1988);
- (2) o método de decomposição do domínio (KNUTH 1973), (SAMET 1984), (LÖHNER 1987), (CUNDALL 1988), (BONET 1991), (WILLIAMS 1995, 1999), (MORRIS 2001) e (MUNJIZA 1992a, 2004);
- (3) o método da topologia local (CUNDALL 1980).

Nestes três grupos de métodos, a detecção de contactos apresenta dois níveis. No primeiro nível é avaliada a vizinhança dos elementos discretos que permite detectar um contacto potencial, com base num dos métodos atrás enunciados. A passagem para o segundo nível, onde são verificadas relações geométricas semelhantes às apresentadas na secção 3.8 (a complexidade das relações geométricas depende da forma do elemento) e que permitem definir um contacto efectivo ou virtual, só ocorre se for detectado um contacto potencial. Um contacto potencial define-se por antever um dos oito tipos de contacto (virtual ou efectivo) devido à proximidade dos elementos discretos atestada pela interpenetração das envolventes.

Nos métodos pertencentes ao primeiro grupo é definido um volume envolvente para cada elemento discreto. Nos métodos de decomposição do domínio, nomeadamente, o de detecção de contactos de Munjiza-NBS (2004), de Williams-O'Connor (1995) e de Cundall (1988), entre outros, é decomposto o domínio, classificando-se os elementos através de listas: (1) árvores binárias; (2) listas. A maioria destes métodos foi desenvolvida no âmbito dos elementos discretos do tipo partícula, de dimensão e forma diversa e sobretudo para aplicações 3D, tendo em vista a simulação de escoamentos, como descargas de agregados em silos.

Pretendendo-se efectuar análises quase-estáticas em 2D mais particularmente a análise

última de estruturas, em que os deslocamentos significativos ocorrem apenas depois de atingida a carga de colapso, e atendendo à diversidade dos elementos discretos, foi implementado um método de detecção de contactos que se baseia no método de detecção de contactos de Cundall e no método dos volumes envolventes. A implementação deste método revelou-se simples e permitiu ultrapassar a ineficiência do método de detecção de contactos directos, que se revela satisfatório apenas em análises com um número de elementos que não ultrapasse a centena (O'CONNOR 1992), (SHI 1993) e (WILLIAMS 1995). A selecção do método teve também em conta o tempo despendido na sua programação relativamente a outros métodos, sabendo-se de antemão que os ganhos com estes seriam escassos neste tipo de análise.

Nas secções que se seguem são abordados os métodos de detecção de contactos potenciais: (1) verificação directa (podendo obviamente também ser utilizado para detectar os contactos efectivos ou virtuais); (2) volumes envolventes; (3) árvores binárias; (4) listas, onde se inclui o de Cundall; (5) topologia local. Seguidamente é apresentado detalhadamente o método de detecção de contactos desenvolvido (baseado no método dos volumes envolventes e de Cundall) e, por fim, o método desenvolvido para a actualização de contactos.

4.1. Detecção de contactos por verificação directa

O método de detecção de contactos mais simples é o de verificação directa. Para cada par de elementos discretos é verificada a ocorrência de sobreposição através de relações geométricas semelhantes às definidas na secção 3.8. Uma vez que o número total de operações é igual a $(N_{ED}^2 - N_{ED})/2$, o tempo total da CPU é proporcional a N_{ED}^2 , em que N_{ED} é o número de elementos discretos. A Figura 4-1 mostra um pequeno exemplo com 6 elementos discretos, representando o número de operações a efectuar na detecção de contactos. Cada seta representa uma operação.

4.2. Detecção de contactos por volumes envolventes

Na detecção de contactos por volumes envolventes os elementos discretos de forma geométrica arbitrária, são inscritos numa envolvente de forma geométrica determinada, ver Figura 4-2. A envolvente mais simples e comum é a circular, com centro no centro de

massa do elemento discreto e raio com o menor valor que permita conter todo o elemento, como se pode ver na Figura 4-2 (circunferências a traço cheio), eventualmente acrescido de uma tolerância maior ou igual a $\chi_{tol} d_{r,max}$, ver Figura 4-2 (circunferências a tracejado). No entanto, podem ser consideradas outras formas geométricas para a envolvente tais como a rectangular, de lados paralelos aos eixos de coordenadas, e as complexas. Estas últimas conduzem a um maior tempo de cálculo no primeiro nível, uma vez que as relações geométricas são mais complexas, enquanto que para uma envolvente circular, a simples comparação entre a soma dos seus raios e a distância entre os seus centros permite averiguar se dois elementos discretos estão suficientemente próximos para definir um contacto potencial.

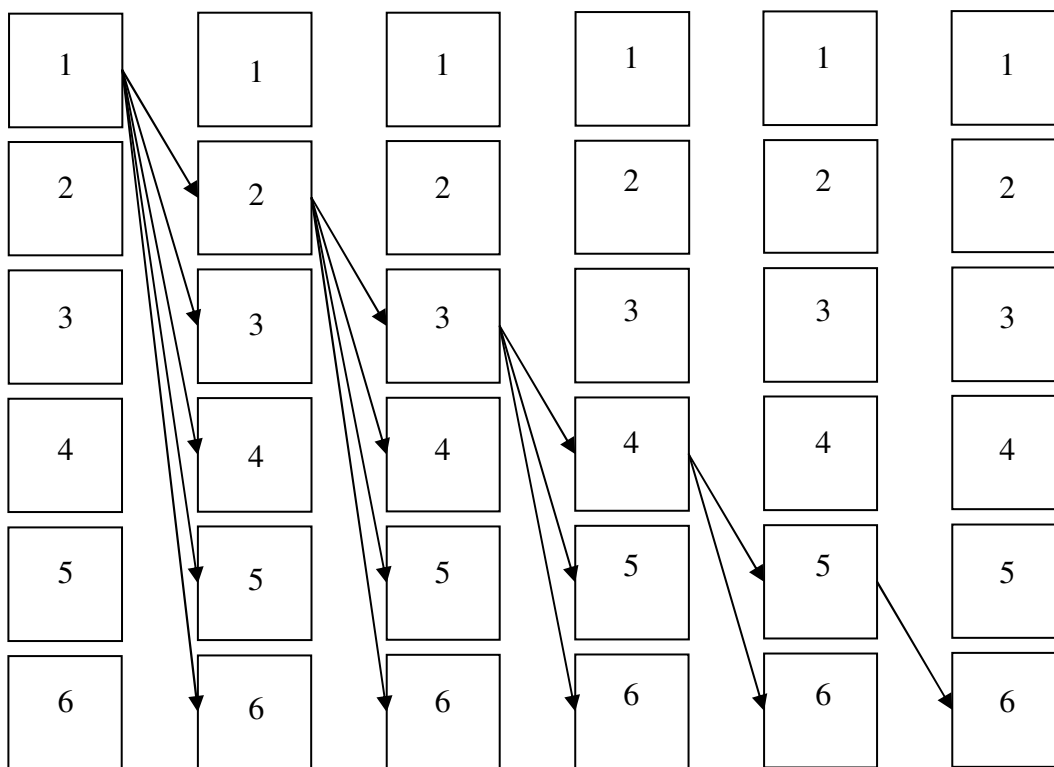


Figura 4-1: Operações a efectuar na detecção de contactos directa com $N_{ED} = 6$.

4.3. Detecção de contactos por decomposição do domínio

Nos métodos de detecção de contactos por decomposição do domínio os elementos discretos, de forma geométrica irregular ou regular e de tamanho semelhante, são inicialmente inscritos numa envolvente de forma geométrica circular, quadrada ou complexa. A envolvente é tal que o seu contorno é tangente ao contorno do elemento

discreto em alguns pontos. Por vezes, para simplificar, utiliza-se uma envolvente única com dimensão tal que envolva o maior elemento discreto. Para facilitar a explanação dos métodos, nas secções seguintes, à excepção do de Cundall, considera-se a envolvente circular de centro no centro de massa do elemento discreto, $x_{CM,i}$ e de raio constante e igual ao da envolvente de raio máximo (MUNJIZA 2004).

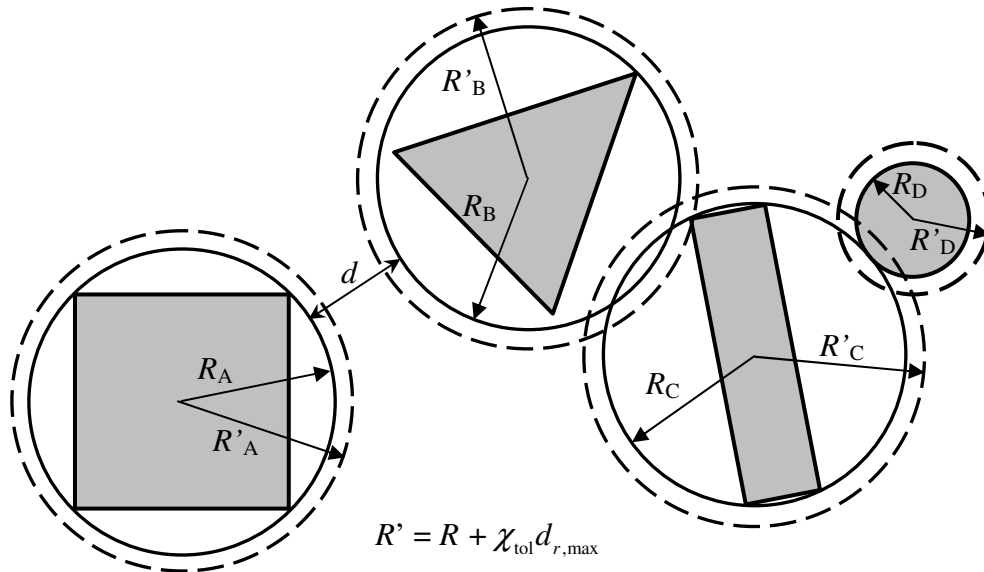


Figura 4-2: Envolventes circulares para o método dos volumes envolventes.

Para a decomposição do domínio o método considera células cuja menor dimensão é igual à dimensão da envolvente circular, ver Figura 4-3. Cada elemento discreto é atribuído a uma única célula. Por exemplo, para a envolvente circular, as coordenadas $x_{CM,i}$ do centro de massa de cada elemento discreto coincidente com o centro de massa da envolvente, são tornadas inteiras através da expressão

$$\hat{x}_{CM,i} = \text{int}\left(\frac{x_{CM,i} - x_{D,i,\min}}{d}\right) + 1 \quad (4.1)$$

onde d é o diâmetro da envolvente circular, $x_{D,i,\min}$ são as coordenadas mínimas do domínio e $\text{int}(X)$ fornece a parte inteira de X . Posteriormente, a detecção de contactos é realizada na célula em estudo, designada de célula central, e entre esta e as células contíguas. Porém, para não haver duplicação de detecções entre células, são consideradas apenas as células contíguas que limitam a central fazendo um L , isto é, para a célula central (i, j) , as células $(i-1, j)$, $(i-1, j-1)$, $(i, j-1)$ e $(i+1, j-1)$, ver Figura 4-3.

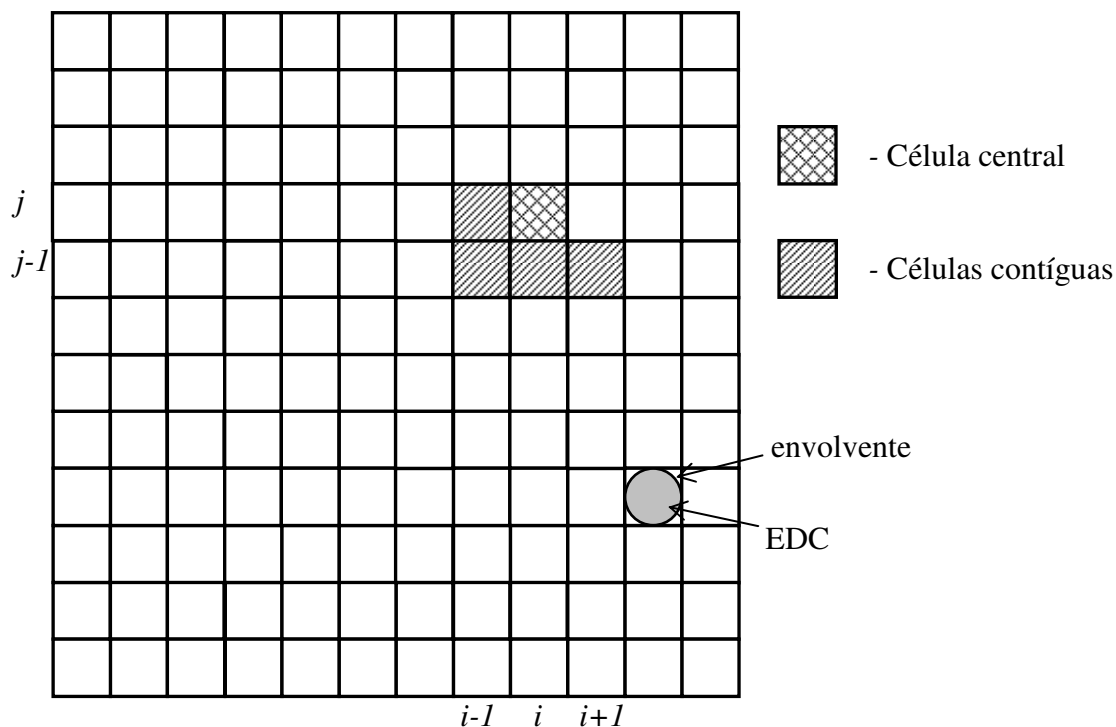


Figura 4-3: Célula central e células contíguas. Envolvente e elemento circular.

4.3.1. Detecção de contactos através de árvores binárias

O método consiste em subdividir sucessivamente o domínio de geometria rectangular ocupado pelos elementos discretos, formando hierarquicamente uma cadeia de células (MUNJIZA 2004) e (BONET 1991). Como já referido, a menor dimensão que cada uma destas células pode apresentar é igual à do diâmetro da envolvente.

O nível 1 é definido dividindo o domínio em duas células rectangulares iguais, o nível 2 é definido subdividindo cada uma destas células em duas células rectangulares iguais, prosseguindo o processo de subdivisão até um certo nível, ver Figura 4-4. Cada uma das células do nível mais elevado apresenta uma referência e pode conter um ou mais elementos discretos. O nível mais elevado é o das “folhas” e os restantes designam-se de “ramos”, ver Figura 4-5.

A localização de cada elemento discreto na respectiva célula pode fazer-se representar por uma árvore binária, como indica a Figura 4-5. Por exemplo, seguindo os nós pretos na mesma figura, o nó inferior esquerdo (nível 1) representa a célula da esquerda, o nó acima deste (nível 2) a célula superior esquerda e assim sucessivamente.

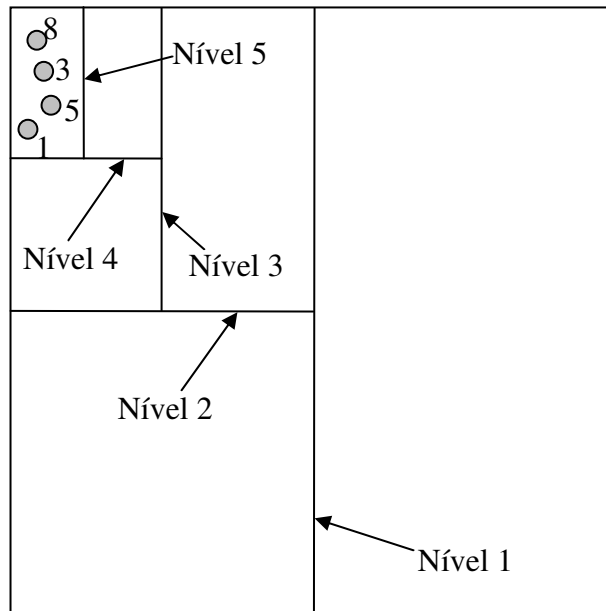


Figura 4-4: Subdivisão sucessiva do domínio até ao nível 5.

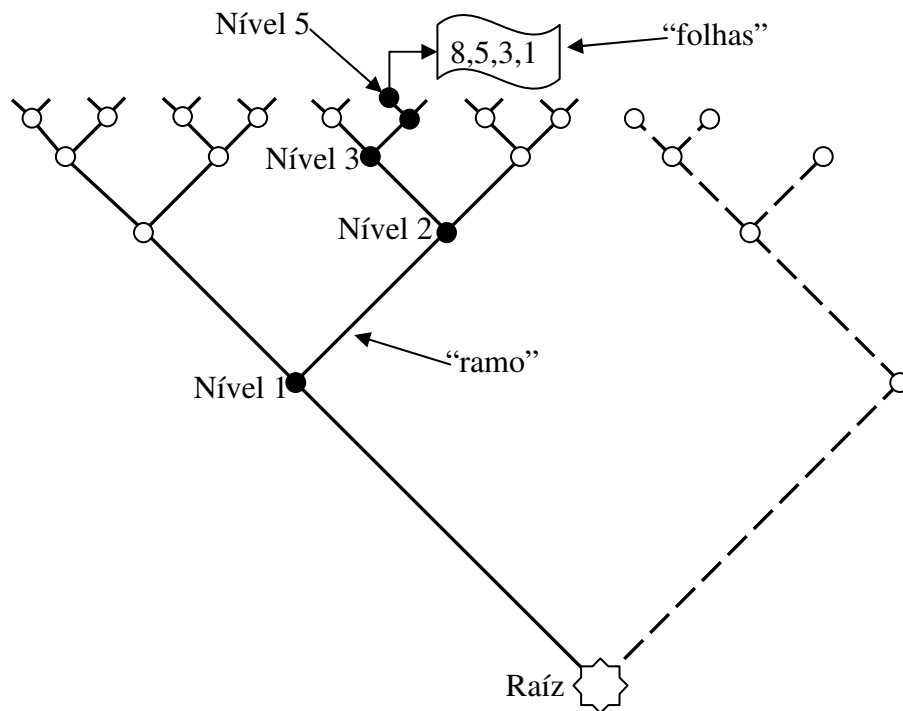


Figura 4-5: Representação, através de árvore binária, da subdivisão sucessiva do domínio ocupado pelos elementos discretos.

A construção de uma árvore binária e sua aplicação à detecção de contactos apresenta três passos:

- (1) atribuição dos elementos discretos às respectivas células no decorrer do processo de subdivisão do domínio;
- (2) conclusão do processo de subdivisão e descrição da árvore binária, cuja dimensão depende do número de elementos discretos, só sendo considerados os “ramos” para os quais existe pelo menos um elemento discreto na respectiva célula;
- (3) detecção de contactos operada ao nível das “folhas” da árvore.

Neste caso, a detecção de contactos é semelhante a uma detecção directa efectuada apenas para os elementos contidos na própria célula e nas células contíguas. Para tal é inicialmente definida uma lista para cada “folha” contendo a numeração dos elementos discretos por ordem decrescente, por exemplo, para o caso apresentado nas Figura 4-4 e Figura 4-5 vem 8, 5, 3 e 1. Seguidamente é estabelecido um vector, denotado E , de dimensão N_{ED} contendo todas as listas. Os elementos deste vector tomam o valor -1 quando o respectivo elemento discreto é o menor da lista e tomam o valor do elemento discreto que se lhe segue nas outras situações. Considerando, por exemplo, que o sistema representado na Figura 4-4 contém N_{ED} elementos (mas só estando representados quatro) o vector E toma a seguinte forma,

$$E = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots & N_{ED} \\ -1 & ? & 1 & ? & 3 & ? & ? & 5 & \dots & ? \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

Sendo conhecido o valor máximo de cada lista a procura dos contactos entre os elementos discretos segue a ordenação do vector E . Por exemplo para o caso ilustrado anteriormente, $[8] \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.

4.3.2. Detecção de contactos através de listas

Alternativamente aos métodos baseados em árvores binárias, onde o domínio é hierarquicamente dividido em células, nos métodos baseados em listas, o domínio é dividido em células de dimensão igual, ver Figura 4-6.

Na bibliografia especializada (MUNJIZA 2004) encontram-se vários métodos de decomposição do domínio por listas dos quais se podem enumerar os de:

- (1) ordenação (*screening*);

- (2) Williams-O'Connor;
- (3) Munjiza-NBS;
- (4) Cundall.

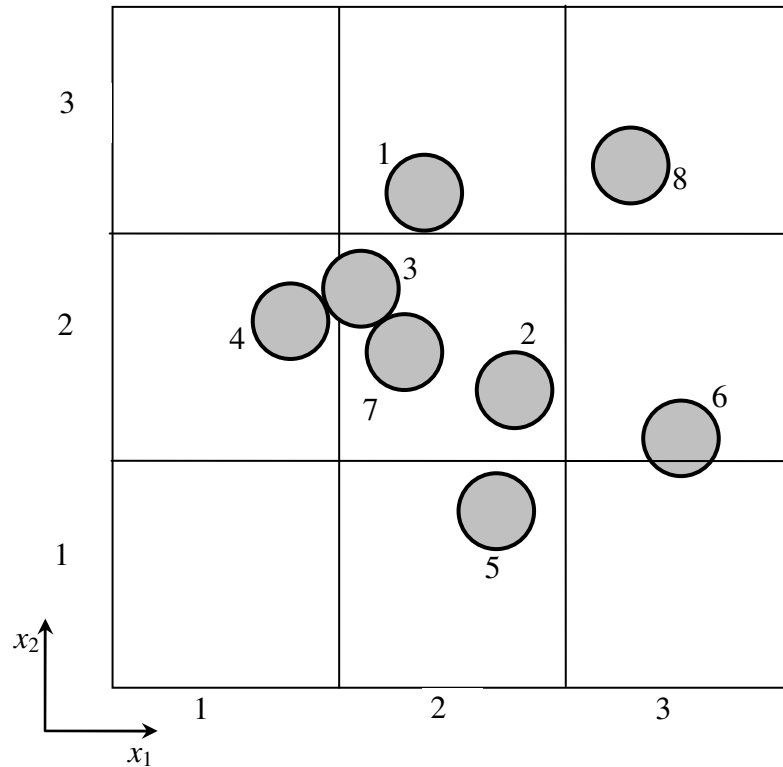


Figura 4-6: Domínio dividido em células de igual dimensão.

O método de detecção de contactos por ordenação, semelhante ao método desenvolvido por Cundall, embora seja muito eficiente em termos da CPU, requer muita memória RAM. A sua utilização está mais vocacionada para sistemas compactos ou densos. O método de detecção de contactos Williams-O'Connor é muito eficiente em termos da memória RAM. Todavia, o tempo necessário para fazer a distribuição é elevado, quando comparado com o tempo requerido pelos outros métodos (árvore binária, ordenação). O método de detecção de contactos de Munjiza-NBS supera as deficiências indicadas nos dois métodos anteriormente referidos (Munjiza 2004). Sucintamente, apresentam-se a seguir algumas considerações sobre estes métodos.

4.3.2.1. Detecção de contactos por ordenação (*screening*)

O método de detecção de contactos por ordenação considerada duas fases. Na primeira fase são estabelecidos o vector lista, E , e a matriz ordenação (*screening array*), C , que

descrevem a distribuição dos elementos discretos e na segunda fase é efectuada a detecção de contactos propriamente dita (MUNJIZA 2004). Após a divisão do domínio com uma malha rectangular é estabelecida a matriz \mathbf{C} de dimensão $N_{\text{cel},1} \times N_{\text{cel},2}$ igual, respectivamente, ao número de células nas direcções x_1 e x_2 , e o vector \mathbf{E} de dimensão N_{ED} . Inicialmente, os elementos de \mathbf{C} valem -1 , o que corresponde a considerar que todas as células estão vazias. No final da aplicação do método $\mathbf{C}(i, j)$ contém o número do elemento discreto de ordem máxima localizado na célula (i, j) . Inicialmente os elementos de \mathbf{E} valem também -1 . O elemento $\mathbf{E}(i)$ corresponderá ao elemento discreto i .

Para cada célula (i, j) não vazia é construído um vector auxiliar temporário $\mathbf{A}^{(i,j)}$, de dimensão igual ao número de elementos discretos contidos nessa célula, contendo a lista ordenada por ordem decrescente destes elementos.

À medida que são determinados os vectores auxiliares $\mathbf{A}^{(i,j)}$ a matriz \mathbf{C} e o vector \mathbf{E} vão sendo actualizados. $\mathbf{C}(i, j)$ toma o valor de $\mathbf{A}^{(i,j)}(1)$ ou seja, a mais elevada ordem presente na célula (i, j) . Para actualizar \mathbf{E} , seja $p > 0$ o número de elementos discretos situados na célula (i, j) e seja k inteiro tal que $0 < k \leq p$. Então $\mathbf{E}(\mathbf{A}^{(i,j)}(1)) = \mathbf{A}^{(i,j)}(2), \dots, \mathbf{E}(\mathbf{A}^{(i,j)}(k)) = \mathbf{A}^{(i,j)}(k+1), \dots, \mathbf{E}(\mathbf{A}^{(i,j)}(p)) = -1$.

Na segunda fase procede-se à detecção de contactos. São percorridos todos os coeficientes de \mathbf{C} incrementando i de 1 a $N_{\text{cel},1}$ e j de 1 a $N_{\text{cel},2}$. Nas células com $\mathbf{C}(i, j) = -1$ não ocorrem contactos. Se $\mathbf{C}(i, j) = a1 \neq -1$, recorre-se a \mathbf{E} para identificar $\mathbf{E}(a1) = a2$. Se $a2 \neq -1$ é necessário considerar na célula (i, j) um segundo elemento discreto e identificar $\mathbf{E}(a2) = a3$. Se $a3 \neq -1$ será necessário considerar um terceiro elemento discreto, e assim sucessivamente.

A detecção de contactos directa é realizada para os elementos discretos da célula central e das células adjacentes, ver Figura 4-3.

Considerando como exemplo o sistema ($N_{\text{ED}} = 8$) representado na Figura 4-6, as listas de

A são dadas por

$$\begin{aligned}
 A^{(1,1)} &= A^{(3,1)} = A^{(1,3)} = \{ \} \\
 A^{(1,2)} &= \{4\} \\
 A^{(2,1)} &= \{5\} \\
 A^{(2,2)} &= \{7, 3, 2\} \\
 A^{(2,3)} &= \{1\} \\
 A^{(3,2)} &= \{6\} \\
 A^{(3,3)} &= \{8\}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

a matriz **C** por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 1 \\ -1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

e o vector **E** por

$$\mathbf{E} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \{-1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1\} \end{matrix} \tag{4.5}$$

4.3.2.2. Detecção de contactos de Williams-O'Connor

No método de detecção de contactos de Williams-O'Connor, também são consideradas duas fases (MUNJIZA 2004).

Na primeira fase, após a divisão do domínio ocupado pelos elementos discretos, são estabelecidos para cada uma das direcções x_1 e x_2 dois vectores X_1 e X_2 , designados de vectores de distribuição. A dimensão de ambos os vectores é N_{ED} . Estes vectores contêm as coordenadas inteiras da célula onde reside o centro de massa de cada elemento discreto. É considerado ainda um terceiro vector, designado de vector auxiliar **D** também de dimensão N_{ED} para identificar a numeração dos elementos discretos.

O vector X_1 é seguidamente reordenado por ordem crescente, acompanhando os elementos dos vectores X_2 e **D** esta reordenação. Esta operação corresponde a uma troca de colunas, se os vectores X_1 , X_2 e **D** forem considerados como três linhas de uma matriz. Havendo elementos repetidos em X_1 , os elementos correspondentes de X_2 são reordenados por

ordem crescente, acompanhando os elementos do vector D esta reordenação.

Na segunda fase efectua-se o processo de detecção de contactos por verificação directa entre elementos discretos de cada célula e das células contíguas formando um L em seu torno.

Tomando novamente o sistema representado na Figura 4-6, como exemplo, os vectores X_1 , X_2 e D são inicialmente dados por

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

A reordenação de X_1 provoca as seguintes alterações

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & 3 & 3 \\ 2 & \underline{3} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{1} & \underline{2} & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

e reordenando o vector X_2 nas coordenadas repetidas em X_1 (elementos sublinhados), vem finalmente

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 7 & 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

4.3.2.3. Detecção de contactos de Munjiza-NBS

No método de detecção de contactos de Munjiza-NBS, são consideradas listas em x_2 , designadas por y_{iy} , e em x_1 para cada iy , designadas por $x_{ix,iy}$ (MUNJIZA 2004). O método estabelece, à semelhança do método de detecção de contactos por ordenação, a matriz C e o vector E . As coordenadas do centro de massa dos elementos discretos são tornadas inteiras sendo cada elemento discreto atribuído a uma única célula. Além desta classificação, os elementos discretos são imputados à respectiva coluna e linha das células, originando as listas.

Numa primeira fase são construídas as listas de linha y_{iy} com os elementos discretos

colocados por ordem decrescente. Seguidamente são considerados dois vectores inteiros para agrupar aquelas listas. Um designado por B , de dimensão igual ao número de linhas da malha, agrupa os primeiros elementos discretos das listas y_{iy} . Quando estas estão vazias é atribuído ao coeficiente respectivo o valor -1 . Um outro designado por Y , de dimensão igual ao número de elementos discretos no sistema, contém para cada elemento discreto a ordem do elemento que se lhe segue na lista y_{iy} . Nos casos em que ao elemento discreto da lista não se lhe segue nenhum ou aquela seja vazia, o valor de entrada em Y é igual a -1 .

Numa segunda fase cada lista y_{iy} é utilizada na construção das listas de coluna $x_{ix,iy}$ ($ix = 1$, número de colunas da malha) sendo os elementos discretos desta colocados por ordem crescente. Para cada conjunto de listas $x_{ix,iy}$ com y_{iy} fixo é construído um vector A_{iy} de dimensão igual ao número de colunas da malha que contém a ordem do elemento discreto de menor numeração daquelas listas ou, caso elas sejam vazias, o valor -1 . Seguidamente são estabelecidos os vectores X_{iy} , de dimensão igual ao número de elementos discretos. Os seus elementos contém a ordem do elemento discreto que se lhe segue em $x_{ix,iy}$ caso tal elemento exista ou o valor -1 no caso contrário.

A detecção de contactos é efectuada realizando procuras directas entre os elementos listados em cada célula e nas células vizinhas que formam um L em seu torno.

Considerando ainda como exemplo o sistema representado na Figura 4-6, as listas em x_2 são dadas por

$$\begin{aligned} y_{1y} &= \{5\} \\ y_{2y} &= \{7, 6, 4, 3, 2\} \\ y_{3y} &= \{8, 1\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Agrupando aquelas listas nos vectores B e Y vem,

$$B = \{5, 7, 8\} \quad (4.10)$$

$$Y = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \{-1 & -1 & 2 & 3 & -1 & 4 & 6 & 1\} \end{matrix} \quad (4.11)$$

As listas em x_i para cada lista iy , representadas por $x_{ix,iy}$, são dadas por

$$\begin{aligned} x_{1x,1y} &= \{0\} & x_{1x,2y} &= \{4\} & x_{1x,3y} &= \{0\} \\ x_{2x,1y} &= \{5\} & x_{2x,2y} &= \{2,3,7\} & x_{2x,3y} &= \{1\} \\ x_{3x,1y} &= \{0\} & x_{3x,2y} &= \{6\} & x_{3x,3y} &= \{8\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

e os vectores A_{iy} e X_{iy} , vêm dados por,

$$\begin{bmatrix} A_{1y} \\ A_{2y} \\ A_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\begin{bmatrix} X_{1y} \\ X_{2y} \\ X_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Após um mapeamento dos elementos discretos nas células, representado pelas matrizes C e E , a detecção de contactos é realizada sobre os elementos discretos de cada célula e das células adjacentes que formem um L .

4.3.2.4. Detecção de contactos de Cundall

No método de detecção de contactos proposto por Cundall, o domínio é dividido com uma malha rectangular de lados paralelos aos eixos coordenados (CUNDALL 1988). Cada elemento discreto, poligonal ou circular, é inscrito numa envolvente rectangular de lados também paralelos aos eixos coordenados e atribuído a uma ou várias células, tal como se ilustra na Figura 4-7 para um sistema de elementos discretos poligonais. A cada célula corresponde uma lista que contém a numeração dos elementos discretos, realizando-se a detecção de contactos por verificação directa, percorrendo a malha célula a célula. A eficiência do método depende da dimensão das células, sendo a densidade de células óptima da ordem de uma célula por elemento discreto.

4.4. Detecção de contactos através da topologia local

O método de detecção de contactos com base na topologia local tira partido da topologia do sistema para realizar a detecção de contactos e tem como aplicação sistemas constituídos

por elementos discretos poligonais (LEMOS 1995b). São construídas listas de vértices ou contactos, que definem o contorno de cada elemento discreto poligonal. Cada vértice aponta para o vértice ou contacto seguinte do mesmo elemento discreto e cada contacto contém apontadores para os vértices ou contactos seguintes de cada um dos elementos discretos. Os domínios estabelecidos (contorno dos espaços vazios entre os elementos discretos) permitem restringir a procura de novos contactos entre vértices e lados pertencentes ao mesmo domínio, ver Figura 4-8.

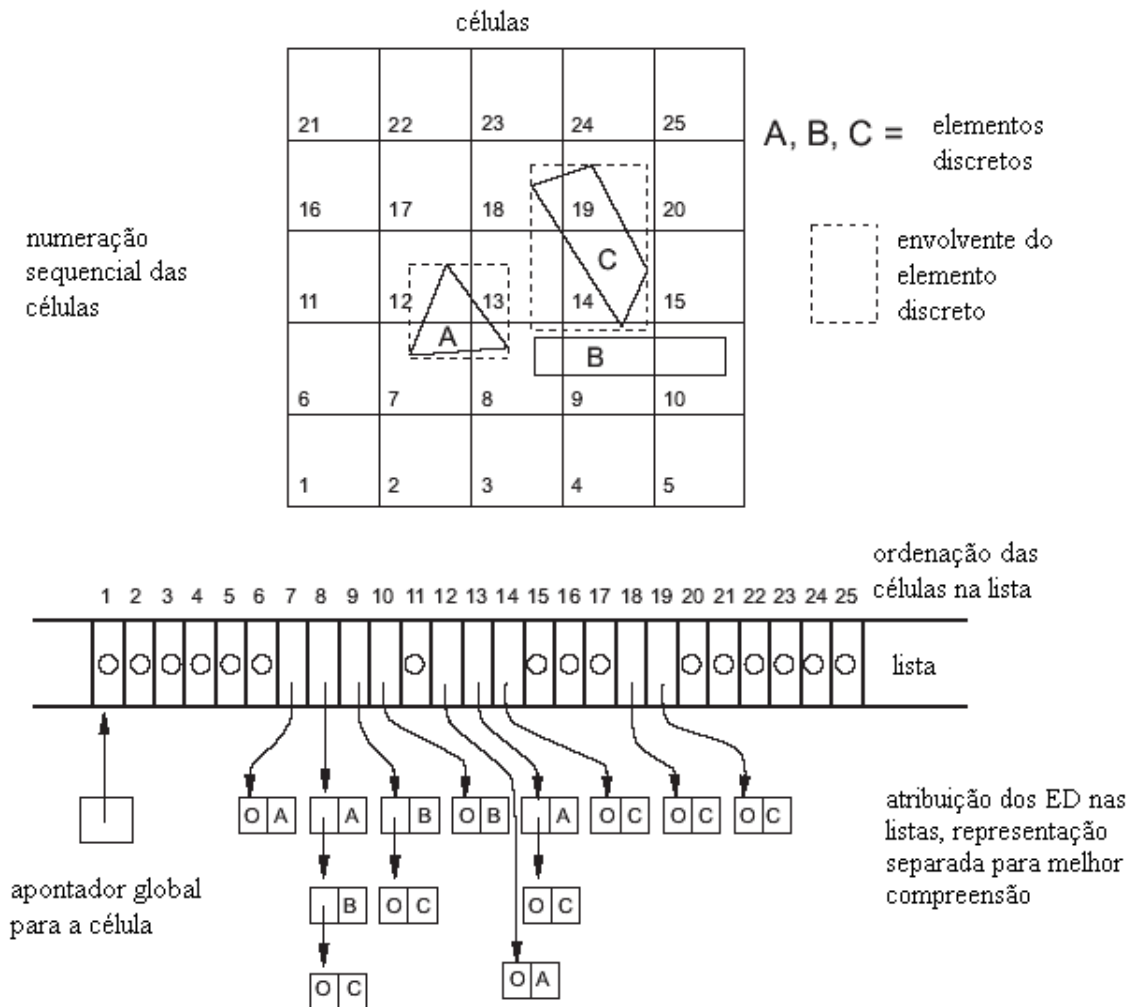


Figura 4-7: Etiquetagem dos elementos discretos 2D. Figura adaptada de (CUNDALL 1988).

A detecção de um novo contacto provoca a divisão do domínio, e a supressão de um contacto origina a junção de dois domínios contíguos. Uma boa utilização deste método requer a existência de sistemas de elementos discretos poligonais densos, para que seja possível reconhecer os domínios.

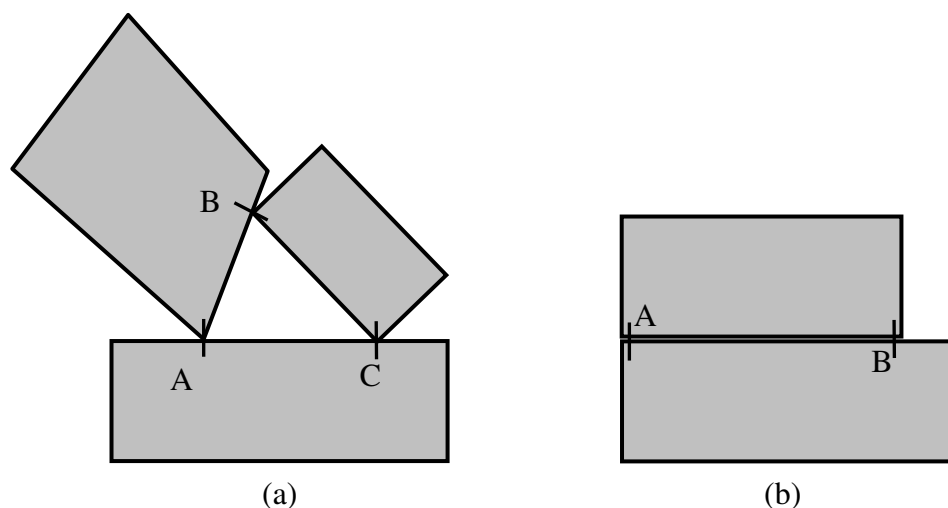


Figura 4-8: Domínios para a detecção de contactos baseada na topologia local.
Domínio: (a) ABC; (b) AB.

4.5. Método de detecção de contactos proposto

Os métodos descritos nas secções anteriores foram estabelecidos para sistemas de elementos discretos de geometria diversa e tamanho semelhante. O método de detecção de contactos proposto baseia-se nos métodos de Cundall (1988) e dos volumes envolventes (GREENGARD 1987).

Numa primeira fase o domínio ocupado pelos elementos discretos é dividido em células rectangulares. Seguidamente são estabelecidas listas que atribuem os elementos discretos às respectivas células. Percorrendo célula a célula é efectuada uma procura global de contactos potenciais, através do método dos volumes envolventes para o qual se adoptou a envolvente de geometria circular.

Numa segunda fase é feita uma procura local sobre aqueles contactos potenciais que, caso se satisfaçam as relações geométricas do contacto apresentadas na secção 3.8, definem um contacto pontual, o qual pode ser efectivo ou virtual.

4.5.1. Definição do domínio e envolvente rectangular

A Figura 4-9 mostra um domínio dividido em 24 células contendo, a título exemplificativo, dois tipos distintos de elementos discretos. Para estabelecer as listas que atribuem os elementos discretos às células, a cada elemento discreto é associada uma envolvente de

forma rectangular com os lados paralelos aos eixos coordenados, como se pode ver na mesma figura.

Para definir as coordenadas mínima e máxima da envolvente rectangular de um elemento discreto, são determinadas primeiro as suas coordenadas máxima e mínima

$$\begin{aligned}
 x_{i,\max} &= \begin{cases} \max(x_{V1,i}, x_{V2,i}, x_{V3,i}, \dots) & \Leftarrow \text{EDP} \\ x_{\text{CM},i} + R_{\text{VT}} & \Leftarrow \text{EDC} \end{cases} \\
 x_{i,\min} &= \begin{cases} \min(x_{V1,i}, x_{V2,i}, x_{V3,i}, \dots) & \Leftarrow \text{EDP} \\ x_{\text{CM},i} - R_{\text{VT}} & \Leftarrow \text{EDC} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

onde $x_{V1,i}, x_{V2,i}, x_{V3,i}, \dots$ são as coordenadas dos seus vértices. Posteriormente, os limites, da envolvente rectangular, definidos por estas coordenadas são incrementados de forma a atribuir o elemento discreto, não só às células por ele cobertas, mas também às células vizinhas. Por exemplo, o elemento discreto A da Figura 4-9 é atribuído às células de numeração 3, 4, 7 e 8 e às células de numeração 2, 6, 10, 11 e 12. Este procedimento permite assim a detecção de um maior número de contactos potenciais. Note-se que a detecção dos contactos será realizada célula a célula e não célula e células adjacentes formando um L . Os limites da envolvente rectangular de um elemento discreto qualquer A, são definidos por

$$\begin{aligned}
 x_{\text{ER},A,i,\min} &= x_{i,\min} - 2\sqrt{2} d_{r,\max} \\
 x_{\text{ER},A,i,\max} &= x_{i,\max} + 2\sqrt{2} d_{r,\max}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

onde $d_{r,\max}$ é a distância de arredondamento definida na secção 3.6. O factor de $2\sqrt{2}$ é igual ao que Cundall adopta para a formulação de elementos discretos circulares (ITASCA 2002). Já para a formulação de elementos discretos poligonais o factor adoptado por Cundall é unitário (ITASCA 1999).

Os limites do domínio são definidos através das coordenadas $x_{D,i,\max}$ e $x_{D,i,\min}$, iguais, respectivamente, aos valores máximo e mínimo, das coordenadas dos vértices das envolventes rectangulares, isto é, atendendo à Figura 4-9,

$$\begin{aligned}
 x_{D,i,\max} &= \max(x_{\text{ER},A,i,\max}, x_{\text{ER},B,i,\max}, \dots) \\
 x_{D,i,\min} &= \min(x_{\text{ER},A,i,\min}, x_{\text{ER},B,i,\min}, \dots)
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

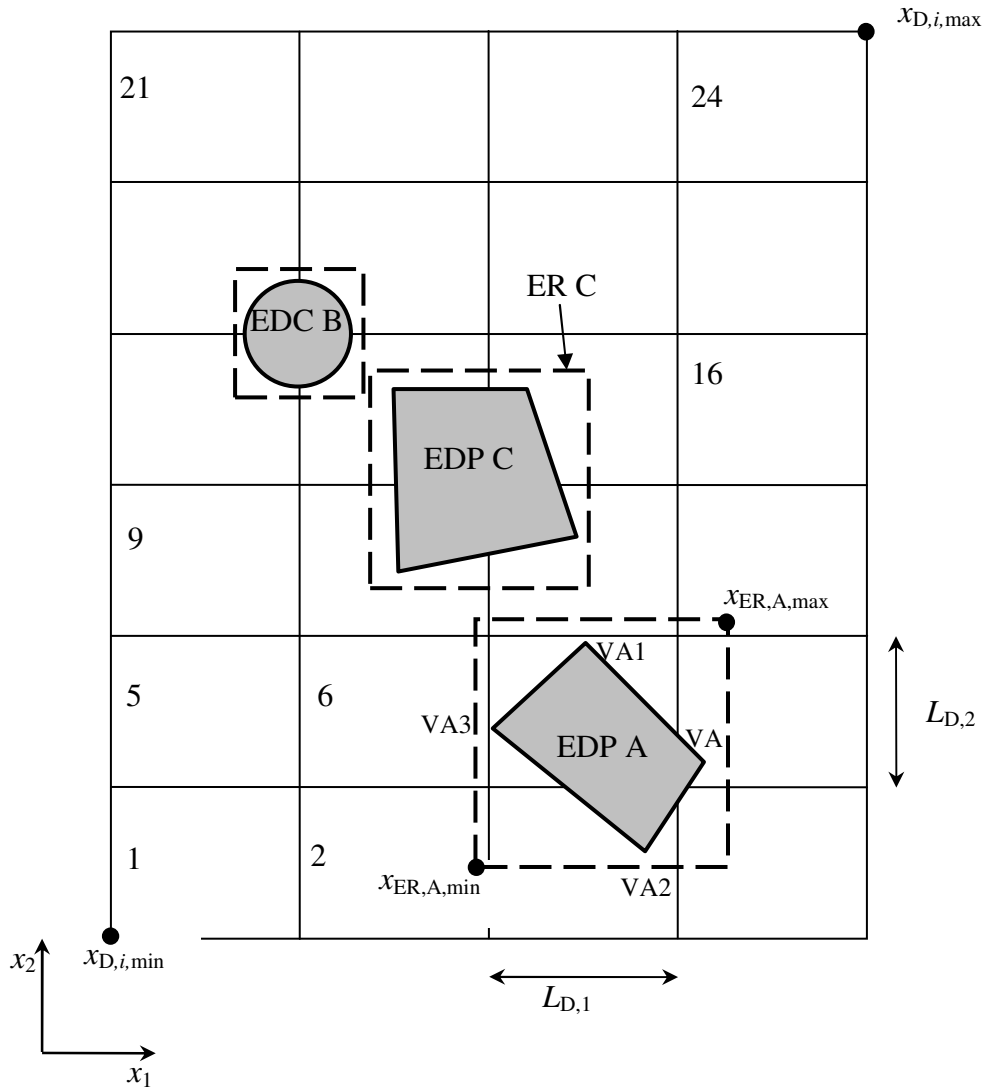


Figura 4-9: Domínio dividido em células para listar os elementos nas respectivas células.

O número de células $N_{cel,i}$ da malha na direcção x_i é dado por

$$N_{cel,i} = \text{int} \left(\frac{x_{D,i,max} - x_{D,i,min}}{L_{D,ini,i}} \right) + 1 \quad (4.18)$$

onde $L_{D,ini,i}$ é a dimensão constante inicialmente prescrita para a célula na direcção x_i .

Definido o número de células em ambas as direcções, as dimensões da célula são recalculadas de modo a corresponder àquele número, possibilitando a conversão de coordenadas reais em inteiras. As dimensões $L_{D,i}$ são dadas por

$$L_{D,i} = \frac{x_{D,i,max} - x_{D,i,min}}{N_{cel,i}} \quad (4.19)$$

Note-se que o número de células da malha, dado por

$$N_{\text{cel}} = N_{\text{cel},1} \times N_{\text{cel},2} \quad (4.20)$$

varia durante a execução do programa em virtude de $L_{D,\text{ini},i}$ ser uma constante. Por exemplo, à medida que um processo de colapso evolui e os elementos discretos se vão acumulando junto ao solo N_{cel} vai diminuindo.

Definidos os limites da envolvente rectangular do elemento discreto em coordenadas reais, estas são convertidas em coordenadas inteiras através das expressões

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\text{ER},i,\text{min}} &= \text{int} \left(\frac{x_{\text{ER},i,\text{min}} - x_{D,i,\text{min}}}{L_{D,i}} \right) + 1 \\ \hat{x}_{\text{ER},i,\text{max}} &= \text{int} \left(\frac{x_{\text{ER},i,\text{max}} - x_{D,i,\text{min}}}{L_{D,i}} \right) + 1 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Esta conversão permite afectar cada um destes pontos a uma célula da malha. Atendendo à Figura 4-9, por exemplo, a envolvente rectangular do elemento discreto poligonal A , tem como coordenadas limites, $\hat{x}_{\text{ER},A,\text{min}} = (2,1)$ e $\hat{x}_{\text{ER},A,\text{max}} = (4,3)$. As coordenadas inteiras da envolvente rectangular do elemento A são registadas no vector $\hat{x}_{\text{ER},A,j}$, com $j = 1, \dots, N_{\text{cel},A}$, em que $N_{\text{cel},A}$ é o número de células cobertas pela envolvente rectangular A . Para tal as abcissas são incrementadas progressivamente, da menor à maior, sendo, para cada valor das abcissas, as ordenadas incrementadas progressivamente da menor à maior. Seguindo ainda o exemplo anterior vem:

$$\hat{x}_{\text{ER},A,1} = \hat{x}_{\text{ER},A,\text{min}} = (2,1);$$

$$\hat{x}_{\text{ER},A,2} = (2,2);$$

$$\hat{x}_{\text{ER},A,3} = (2,3);$$

$$\hat{x}_{\text{ER},A,4} = (3,1);$$

$$\hat{x}_{\text{ER},A,5} = (3,2);$$

$$\hat{x}_{\text{ER},A,6} = (3,3);$$

$$\hat{x}_{\text{ER},A,7} = (4,1);$$

$$\hat{x}_{\text{ER},A,8} = (4,2);$$

$$\hat{x}_{ER,A,9} = \hat{x}_{ER,A,max} = (4, 3).$$

Cada um dos elementos de $\hat{x}_{ER,i,j}$ pertence a uma célula, cuja numeração é determinada por

$$E_{i,j} = (\hat{x}_{ER,i,j,2} - 1)N_{cel,1} + \hat{x}_{ER,i,j,1}, \quad i = A, B, \dots \text{ e } j = 1, 2, \dots, N_{cel,i} \quad (4.22)$$

O processo de listagem termina atribuindo a envolvente rectangular de cada elemento discreto à correspondente célula $E_{i,j}$. Voltando ao exemplo anterior, onde $N_{cel,1} = 4$, a envolvente do elemento discreto poligonal A é atribuído às células 2, 6, 10, 3, 7, 11, 4, 8 e 12 ($N_{cel,A} = 9$), ou seja, $E_A = \{2, 6, 10, 3, 7, 11, 4, 8, 12\}$.

Em seguida, define-se a matriz “ordenação” \mathbf{C} onde cada linha corresponde a um elemento discreto e cada coluna a uma célula da malha. Esta matriz define-se do seguinte modo

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(i, j) &= i \Leftarrow j \in E_i \\ \mathbf{C}(i, j) &= 0 \Leftarrow j \notin E_i \end{aligned} \quad (4.23)$$

Note-se que o número de envoltentes rectangulares contido na célula j é dado pelo número de elementos não nulos da coluna j de \mathbf{C} .

Seguidamente, a matriz \mathbf{C} é reordenada coluna a coluna. Seja k o número de elementos não nulos da coluna j . Estes k elementos passam a ocupar as k primeiras linhas da coluna ordenados de forma crescente, sendo nulos os restantes elementos da coluna. Ainda para o exemplo acima apresentado a matriz \mathbf{C} é inicialmente igual a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

e após a reordenação igual a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

4.5.2. Procura directa — detecção de primeiro nível

A distribuição de todos os elementos discretos pelas células da malha permite que a procura dos contactos seja efectuada num ciclo célula a célula. Neste ciclo para cada célula é efectuada uma procura directa utilizando o método dos volumes envolventes. Se for detectado um contacto potencial prossegue-se para o segundo nível.

A Figura 4-10 ilustra alguns aspectos de aplicação do método de detecção de contactos proposto: as células (duas rectangulares); as envolventes circulares; os contactos resultantes (representados graficamente por segmentos rectos curtos).

4.5.3. Procura local — detecção de segundo nível

No segundo nível é efectuada uma análise baseada na sua geometria real para classificar o contacto de virtual ou efectivo e quanto ao tipo. Para o efeito, cada vértice do elemento discreto A é confrontado com cada vértice do elemento discreto B, utilizando as relações geométricas enunciadas na secção 3.8. Para dois elementos discretos, por exemplo, de 4 vértices pode haver um total de 48 testes geométricos a efectuar (4 vértices contra 4 vértices para 3 tipos de contactos definidos entre elementos discretos poligonais). Para um elemento discreto poligonal de 4 vértices e um elemento discreto circular pode ser necessário efectuar 16 testes geométricos (4 vértices contra 1 “vértice” para 4 tipos de contactos definidos entre elementos discretos poligonais e circulares).

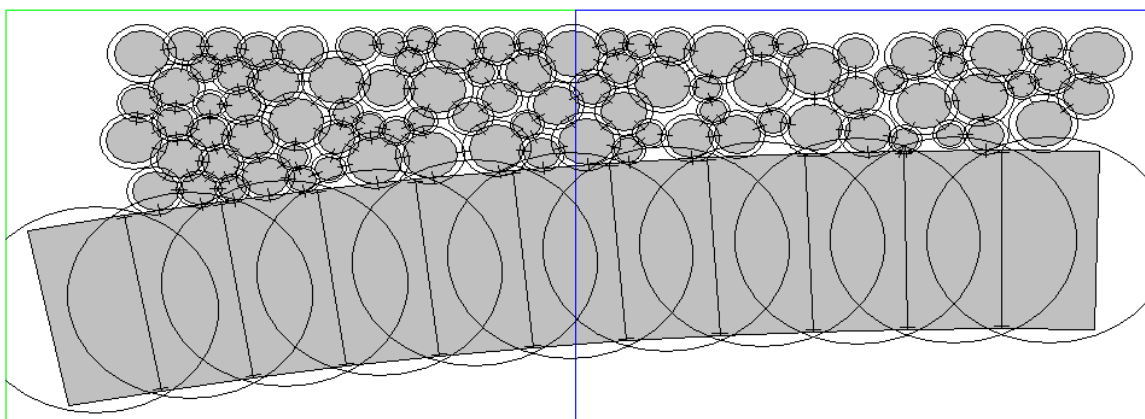


Figura 4-10: Células, envolventes e contactos.

De facto, na primeira iteração, após a leitura da geometria do sistema, é necessário efectuar a totalidade dos testes geométricos entre os dois elementos discretos elegíveis. Nas

restantes iterações o número de testes é menor em virtude do conhecimento dos contactos efectivos ou virtuais da iteração precedente.

As relações geométricas de cada tipo de contacto são agrupadas em três conjuntos em função da própria natureza do contacto. Um destes conjuntos permite definir os contactos dos tipos 2 e 8, outro, os contactos dos tipos 1, 4, 5 e 7 e o terceiro, os contactos dos tipos 3 e 6. Porém, só é iniciada a avaliação das relações geométricas definidas na secção 3.8 em cada um dos conjuntos se ainda não tiver sido detectado um contacto efectivo ou virtual entre os vértices em confrontação, evitando deste modo a reavaliação daquelas relações geométricas.

A verificação, da existência de contactos efectivos ou virtuais, é realizada percorrendo todos os contactos pré-existentes e, para cada um, são destacados os pares de elementos discretos e de vértices que o definem. Dependendo do tipo de contacto, é feito um cruzamento entre aqueles pares de elementos discretos e de vértices e os pares de elementos discretos e de vértices em pesquisa. Verificada a não igualdade entre as entidades são avaliadas as relações geométricas dos contactos.

Considere-se o exemplo ilustrado na Figura 4-11 de dois elementos poligonais A e B em contacto ($A < B$). Supondo que os contactos efectivos $C1$ e $C2$ do tipo 1 e 3, respectivamente, foram determinados no início da execução do programa e que se pretende realizar uma nova procura local.

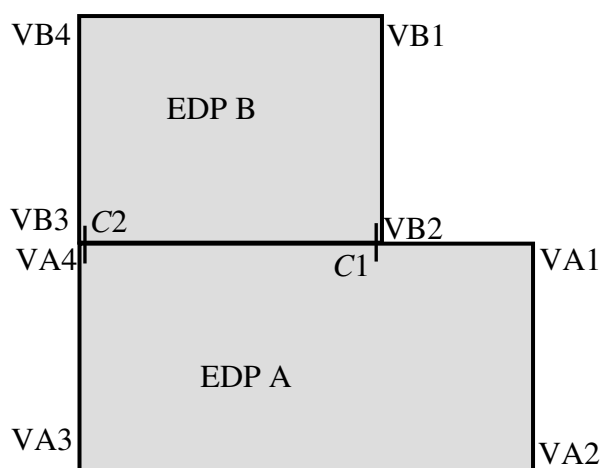


Figura 4-11: Verificação de contactos pré-existentes.

Ao contacto pré-existente $C1$ são destacados os pares de elementos discretos $(A-B)$ e de vértices $(VA4-VB2)$, e ao contacto $C2$ os pares $(A-B)$ e $(VA4-VB3)$. Ao par de elementos discretos em pesquisa $(A-B)$ correspondem os pares de vértices em pesquisa $(VA1-VB1)$, $(VA1-VB2)$, $(VA1-VB3)$, $(VA1-VB4)$, $(VA2-VB1)$, ..., $(VA4-VB4)$, ver Tabela 4-1.

Tabela 4-1: Pares de elementos discretos e vértices a pesquisar.

(A—B)		(A—B)		(A—B)		(A—B)	
VA1	(1) VB1	VA2	(5) VB1	VA3	(9) VB1	VA4	(13) VB1
	(2) VB2		(6) VB2		(10) VB2		(14) VB2
	(3) VB3		(7) VB3		(11) VB3		(15) VB3
	(4) VB4		(8) VB4		(12) VB4		(16) VB4
(X) — pesquisa X							

Por exemplo, para a pesquisa (1) são confrontados os pares $(A-B)/(VA1-VB1)$ com os pares $(A-B)/(VA4-VB2)$ e $(A-B)/(VA4-VB3)$ dos contactos $C1$ e $C2$, respectivamente. Como não há igualdade nos vértices é necessário avaliar as relações geométricas dos três tipos de contacto, ver secções 3.8.2 e 3.8.3. Já para a pesquisa (14) e (15) há igualdade com os pares do contacto $C1$ e $C2$, respectivamente, pelo que não são avaliadas aquelas relações.

4.5.4. Activação da detecção dos contactos

Para evitar a execução sistemática da rotina de pesquisa de contactos, efectivos ou virtuais, é feita uma estimativa do deslocamento máximo acumulado dos vértices, $u_{V,max}$, desde a última detecção de contactos efectuada, isto é,

$$u_{V,max} = u_{V,max} + \dot{u}_{V,max} \Delta t \quad (4.26)$$

onde $\dot{u}_{V,max}$ é a componente máxima em valor absoluto da velocidade. Sempre que se verificar a condição

$$u_{V,max} > \chi_d d_{r,max} \quad (4.27)$$

com o factor χ_d por defeito igual a 1,1, é actualizada a matriz “ordenação” C , efectuada

uma nova detecção de contactos e $u_{v,\max}$ toma valor nulo, ver Figura 4-12.

Cundall faz $\chi_d = 1,0$ para a formulação de elementos discretos circulares (ITASCA 2002) e $\chi_d = 0,35$ para a formulação de elementos discretos poligonais (ITASCA 1999). Azevedo (2003) substitui o segundo membro de (4.27) por um valor igual a um quarto da diferença entre a dimensão da envolvente rectangular do elemento discreto e a dimensão do elemento discreto (sistemas constituídos por elementos discretos circulares de dimensões iguais).

4.6. Actualização dos contactos

Usualmente a actualização dos contactos é apresentada como parte integrante da detecção de contactos. Aqui é feita uma distinção, porque a detecção de contactos é efectuada quando se inicia um novo ciclo de iterações ou quando o deslocamento máximo acumulado excede um determinado valor, enquanto que a actualização de contactos é feita em todas as iterações, ver Figura 4-12. A função de actualização de contactos não deve pois ser confundida com a de detecção de novos contactos. Em cada passo de tempo Δt , devido ao incremento do deslocamento dos vértices, é necessário actualizar os parâmetros que definem os contactos, como sejam as coordenadas do contacto, a sua normal, o tipo de contacto e a averiguação da possibilidade de eliminação, por separação excessiva, ou de suspensão da análise, por sobreposição excessiva, ver a secção 3.8.

Atendendo ao tipo de contacto em estudo é necessário verificar se a alteração da sua geometria implica uma reclassificação do tipo de contacto. O algoritmo que permite actualizar os contactos está dividido em oito níveis que correspondem aos oito tipos de contactos. Um contacto do tipo 1, pode transformar-se num contacto dos tipos 2 ou 3, ver Figura 4-13. Um contacto do tipo 2 ou 3, pode transformar-se num contacto do tipo 1, Figura 4-14. Um contacto do tipo 4 não sofre qualquer tipo de transformação. Finalmente, um contacto do tipo 5 pode transformar-se num contacto do tipo 6 e vice-versa, ver Figura 4-15. Idem para os contactos dos tipos 7 e 8, ver Figura 4-16.

Percorrendo os contactos pré-existentes um a um o algoritmo de actualização activa o respectivo nível. Numa primeira etapa são verificadas as condições geométricas relativas à

projectão dos vértices nas respectivas zonas de arredondamento. Se estas condições geométricas são satisfeitas o contacto é actualizado e mantém a mesma classificação. Entende-se por actualização do contacto a atribuição de novas coordenadas, normal e vértices. Se aquelas condições não são satisfeitas o contacto toma a nova classificação de tipo de contacto e é activado o respectivo nível. Neste caso, não é necessário verificar novamente as condições geométricas básicas passando-se directamente para a actualização propriamente dita. Porém, antes de proceder à actualização são investigadas as hipóteses de separação ou de sobreposição excessiva. A primeira conduz a duas situações: numa o contacto é classificado de virtual e na outra o contacto é eliminado. A última hipótese conduz à mensagem de erro “*Sobreposição excessiva no contacto C*”, ver secção 3.8.7. A actualização dos contactos representa uma fase importante no ciclo de cálculo, na medida em que garante a continuidade das forças de contacto, ou seja, evita a sua variação brusca, ver a Figura 3-18. Se houvesse eliminação do contacto aquando da passagem de um tipo de contacto para um outro, as forças de contacto desapareceriam.

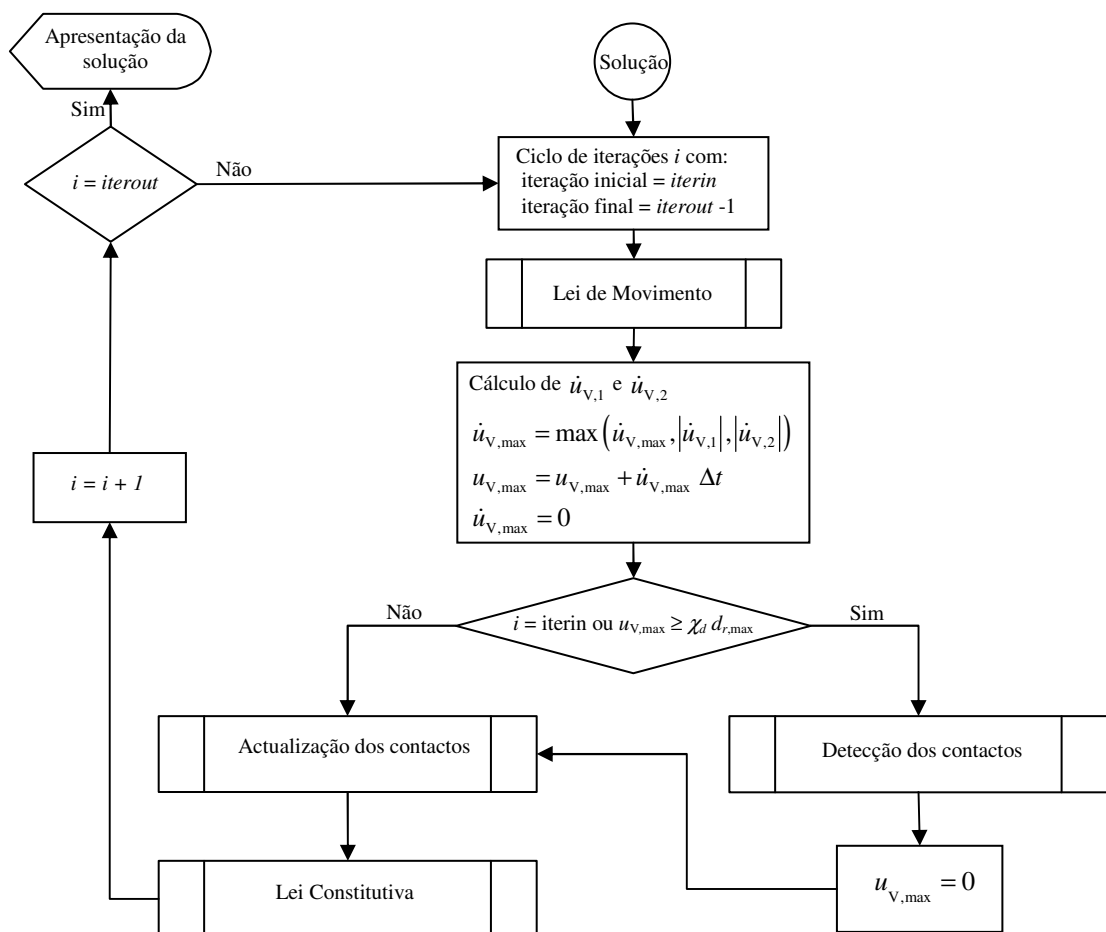


Figura 4-12: Fluxograma do algoritmo de activação da detecção de contactos.

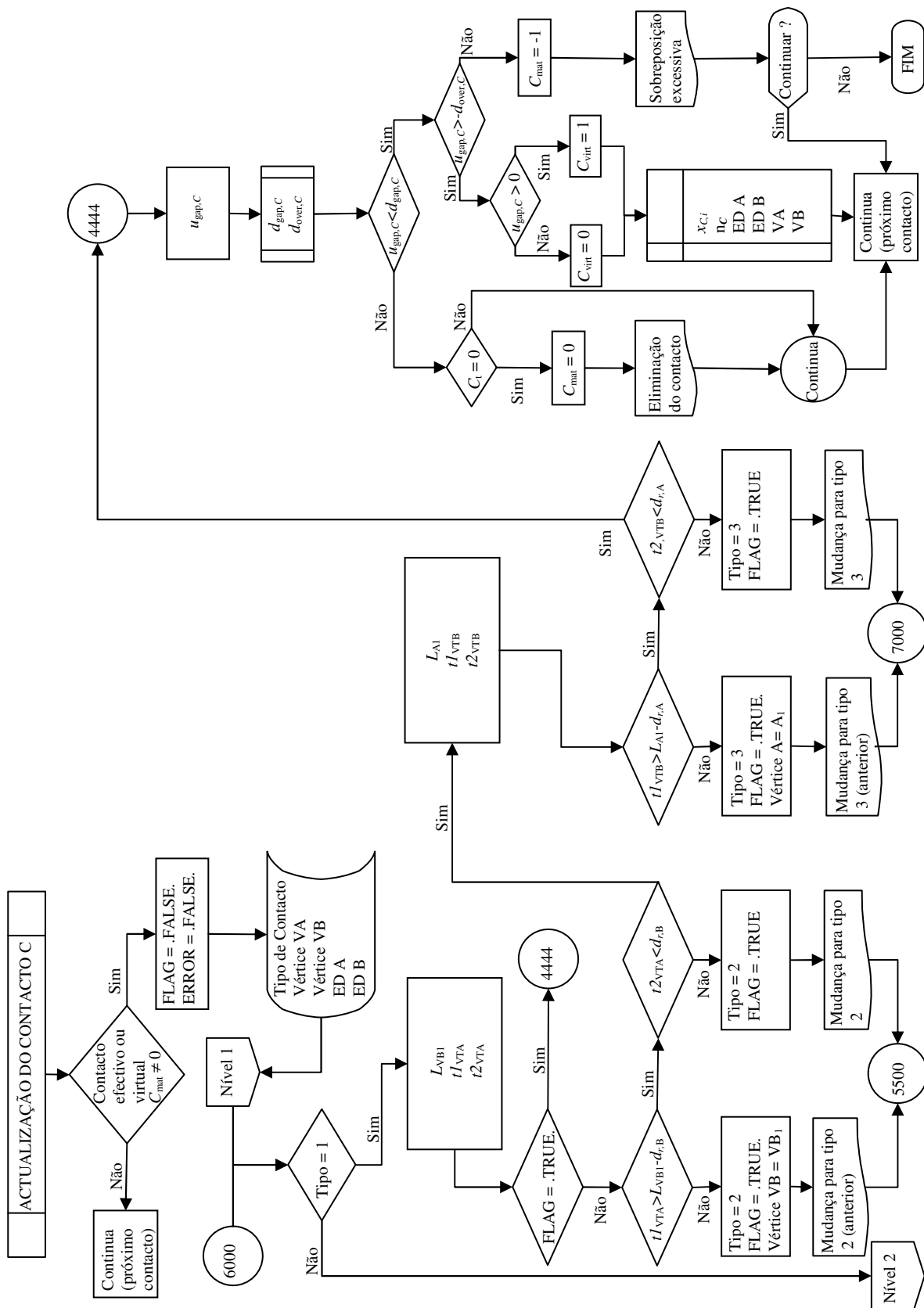


Figura 4-13: Fluxograma do algoritmo de actualização de um contacto — início, nível 1 e finalização.

4. Detecção de contactos

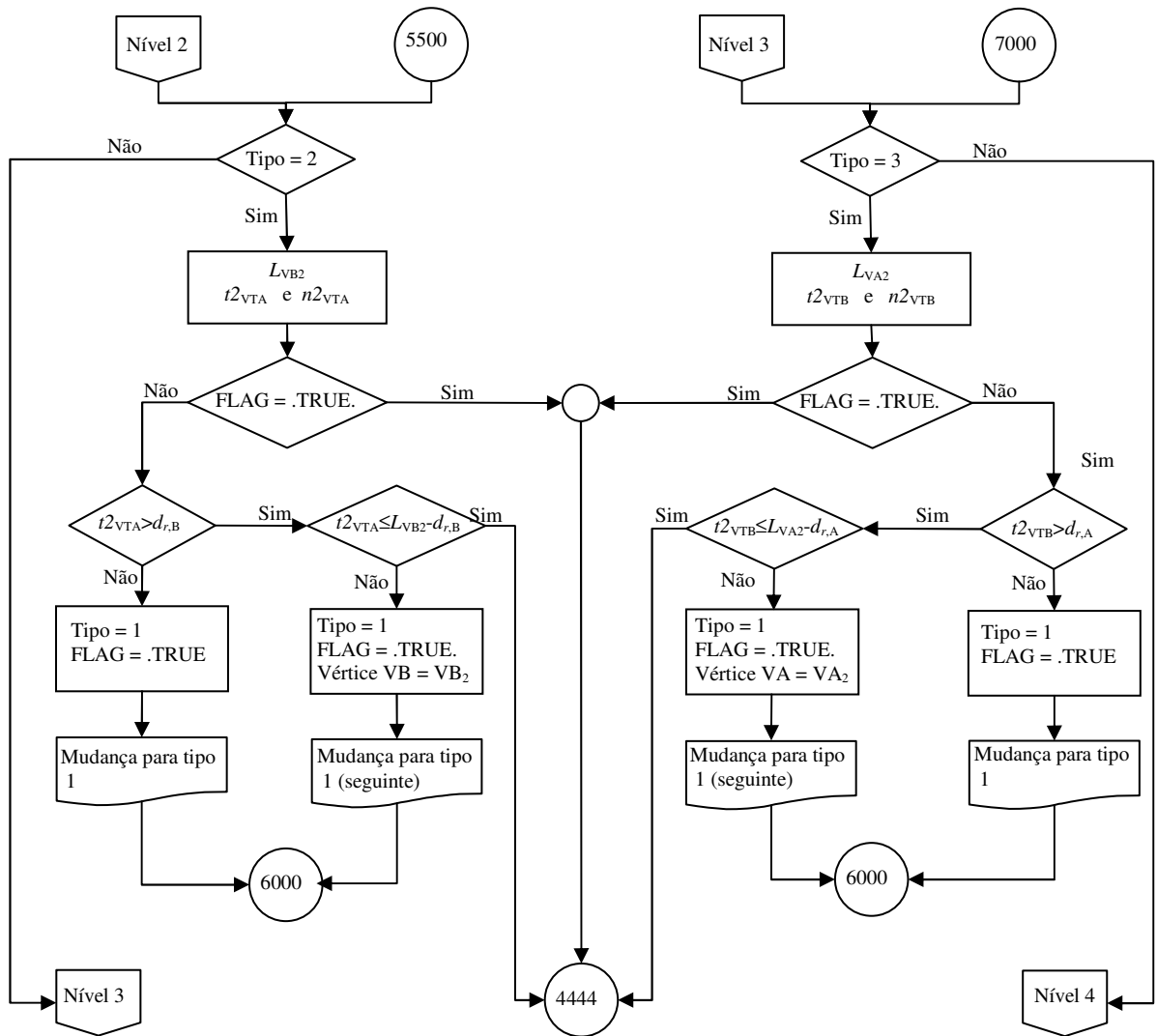


Figura 4-14: Fluxograma do algoritmo de actualização de um contacto — níveis 2 e 3.

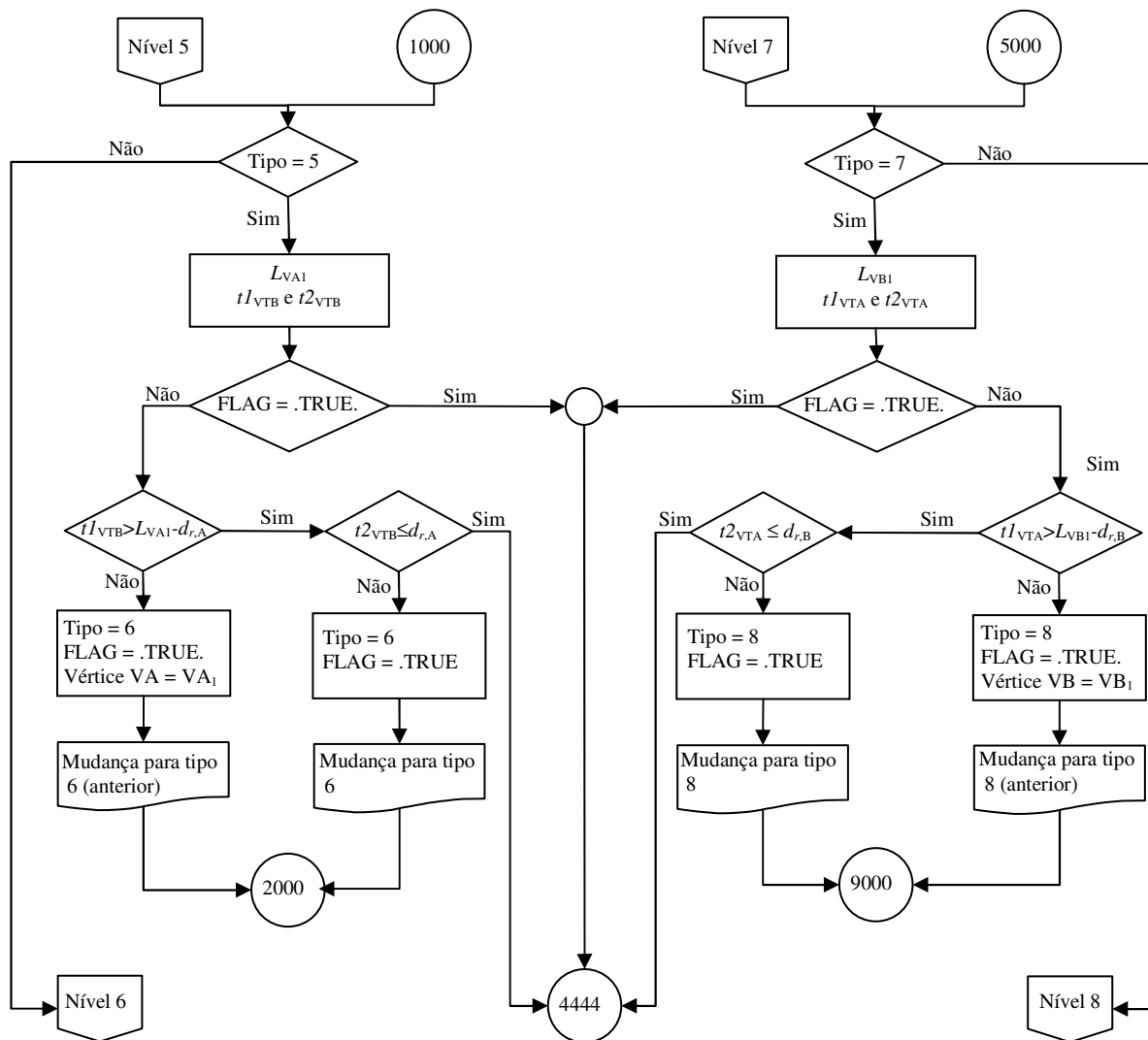


Figura 4-15: Fluxograma do algoritmo de actualização de um contacto — níveis 5 e 7.

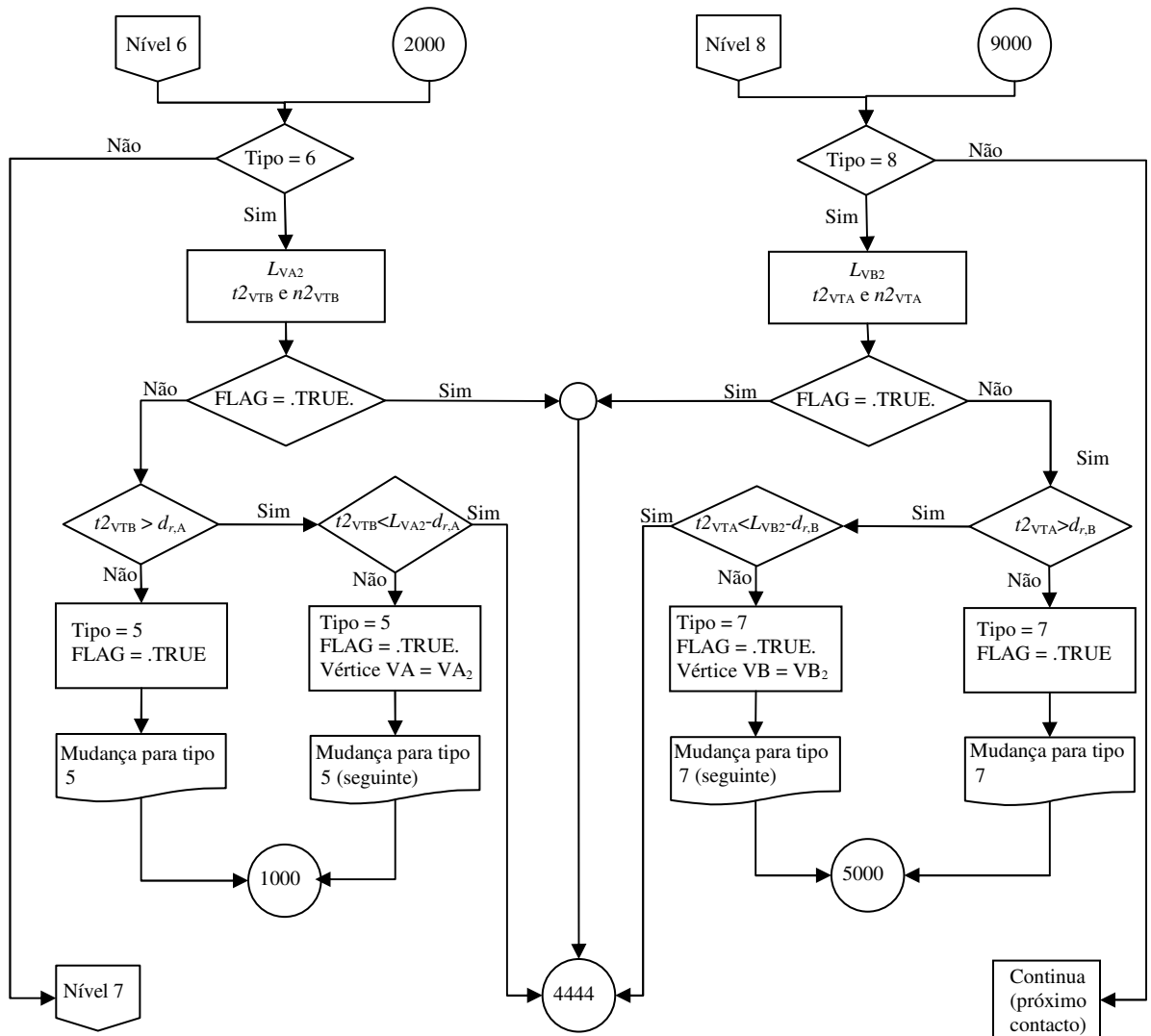


Figura 4-16: Fluxograma do algoritmo de actualização de um contacto — níveis 6 e 8.

5. Aspectos numéricos do método dos elementos discretos

Nas secções seguintes são abordados os seguintes aspectos relativos à implementação do método dos elementos discretos: o amortecimento, a lei de movimento e sua integração pelo método das diferenças finitas, a lei força-deslocamento, o critério de convergência e, por fim, na secção 5.3, são apresentadas as formulações que permitem determinar os estados de tensão e de extensão em agregados de elementos discretos circulares.

5.1. Amortecimento

Alicerçando-se numa formulação dinâmica, o método dos elementos discretos requer a introdução de uma determinada forma de amortecimento para a análise quer de problemas estáticos quer de problemas dinâmicos. Na bibliografia especializada são considerados vários tipos de amortecimento para ambos os problemas.

Em problemas estáticos, o método dos elementos discretos consiste na técnica da relaxação dinâmica (UNDERWOOD 1983). A consideração de um amortecimento fictício reduz progressivamente a velocidade dos elementos discretos, por dissipação de energia cinética,

conduzindo a um estado de equilíbrio ou a um mecanismo de colapso num número finito de iterações. As propriedades de massa e de amortecimento e o passo de tempo são escolhidos de forma a atenuar o mais rapidamente possível a resposta transiente. Todavia, as propriedades de rigidez e as acções variáveis, incluindo as forças de gravidade, deverão obviamente ser reais. Podem ser empregues duas formas distintas de amortecimento fictício. O amortecimento viscoso, proporcional à velocidade, designado de amortecimento global, e o amortecimento não viscoso proporcional às forças não equilibradas, designado de amortecimento local. A primeira e segunda forma de amortecimento conduzem, respectivamente, às formulações global e local das equações de movimento.

Embora a realização de análises dinâmicas esteja excluída do âmbito deste trabalho, explica-se sucintamente como considerar o amortecimento para essa situação. Tal permite também realçar a facilidade com que o algoritmo proposto pode ser ajustado. Assim, para análises dinâmicas é empregue o amortecimento de Rayleigh composto por duas parcelas, uma proporcional à massa e outra proporcional à rigidez. O amortecimento utilizado deve modelar o mais adequadamente possível o amortecimento real, embora a rigorosa definição deste não seja tarefa simples.

A parcela do amortecimento de Rayleigh proporcional à massa é introduzida nas equações de movimento através da correspondente força de amortecimento $F_{DRm,i}$,

$$F_{DRm,i} = \alpha m_i \dot{u}_i \quad (5.1)$$

Para o n-ésimo modo de vibração, a constante α relaciona o coeficiente de amortecimento relativo e a frequência angular correspondentes por

$$\xi_n = \frac{\alpha}{2 \omega_n} \quad (5.2)$$

A parcela do amortecimento de Rayleigh proporcional à rigidez permite controlar a velocidade relativa entre os elementos discretos e é introduzida ao nível dos contactos através das correspondentes forças de contacto viscosas,

$$\begin{aligned} F_{DRks,s,i} &= \beta k_s \dot{u}_{C,s,i} \\ F_{DRkn,n,i} &= \beta k_n \dot{u}_{C,n,i} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Para o n-ésimo modo de vibração, a constante β relaciona o coeficiente de amortecimento relativo e a frequência angular correspondentes por

5. Aspectos numéricos do método dos elementos discretos

$$\xi_n = \beta \frac{\omega_n}{2} \quad (5.4)$$

Considerando ambas as parcelas de amortecimento a relação entre o coeficiente de amortecimento relativo e a frequência angular escreve-se (CLOUGH 1993)

$$\xi_n \equiv \xi_n(\omega_n) = \alpha \frac{1}{2\omega_n} + \beta \frac{\omega_n}{2} \quad (5.5)$$

Para um dado sistema, para o qual $\xi_n(\omega_n)$ se admite conhecido, as constantes α [s⁻¹] e β [s] podem então ser obtidas considerando os pares de valores do amortecimento relativo e a frequência angular correspondentes a modos de vibração distintos ou, alternativamente, procurando o par correspondente ao mínimo de $\xi_n(\omega_n)$,

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi_{\min} \omega_{\min} \\ \beta &= \xi_{\min} / \omega_{\min} \end{aligned} \quad (5.6)$$

No programa UDEC (ITASCA 1999) o amortecimento de Rayleigh é especificado pela entrada dos parâmetros ξ_{\min} e ω_{\min} . Sincraian (2001), no seu estudo sobre estruturas em alvenaria sujeitas à acção sísmica, utilizou apenas a parcela do amortecimento de Rayleigh proporcional à massa porque a componente do amortecimento de Rayleigh proporcional à rigidez requer passos de tempo extremamente reduzidos para garantir a convergência e a estabilidade da solução, implicando elevados tempos da CPU.

5.1.1. Amortecimento global — Análise estática

O amortecimento global é considerado nas equações de movimento através de uma força proporcional à velocidade e à massa de cada elemento discreto, isto é $c = \alpha m$. A constante de amortecimento, α , deve ter um valor suficientemente elevado para eliminar as oscilações dinâmicas (LEMOS 1998a), ou seja, deve-se ter para o coeficiente de amortecimento relativo $\xi = 1$. Assim, atendendo a

$$c = \alpha m = \xi c_{\text{cr}} \quad (5.7)$$

com

$$c_{\text{cr}} = 2 m \omega \quad (5.8)$$

vem

$$\alpha = 2 \xi \omega \quad (5.9)$$

Atendendo ao critério de estabilidade, ver secção 6.2,

$$\omega \approx \frac{2}{\Delta t} \quad (5.10)$$

a relação anterior vem

$$\alpha = \frac{4 \xi}{\Delta t} \quad (5.11)$$

Por exemplo, considerando a primeira combinação do sistema estrutural apresentado na subsecção 6.1.5. as frequências angulares próprias mínima $\omega_{\min} = 48,44$ e máxima $\omega_{\max} = 16\,332,00$ rad/s, obtidas resolvendo o problema de valores e vectores próprios cuja formulação se encontra na secção 6.1, permitem obter, para $\xi = 1$, $\alpha_{\min} = 97$ e $\alpha_{\max} = 32\,664$ s⁻¹. Para o mesmo modelo do sistema estrutural e considerando o critério de estabilidade para $\Delta t_{cr} = \Delta t_{cr,5}^{\text{Comb.1}} = 17,286 \times 10^{-6}$ s ($\varphi = 0,1$), ver Tabela 6.3 (subsecção 6.2.3), e para $\xi = 1$, obtém-se $\alpha_{\max} = 23\,140,00$ rad/s.

Verifica-se que a adopção da constante de amortecimento mínima é insuficiente para anular as oscilações e que a adopção da constante de amortecimento máxima, correspondente ao modo com período mínimo, é exagerada, conduzindo a um processo de convergência muito lento, ou seja, necessitando de um elevado número de iterações. Atendendo às diversas simulações efectuadas verificou-se que valores para a constante de amortecimento situados no intervalo $[500, 1500]$ (s⁻¹) são os mais adequados.

Cundall (1987) aponta algumas dificuldades associadas à utilização do amortecimento global, nomeadamente: (1) a introdução de forças de amortecimento em determinadas zonas do sistema estrutural onde a velocidade é uniforme que podem influenciar o modo de colapso; (2) a determinação do valor óptimo da constante de amortecimento depender da resolução de um problema de valores e vectores próprios; (3) a consideração de um mesmo valor para a constante de amortecimento em partes distintas do sistema estrutural com andamentos diferenciados, por exemplo, encontrando-se uma em situação estável enquanto outra já entrou em colapso.

5. Aspectos numéricos do método dos elementos discretos

A utilização de um valor constante para a constante de amortecimento pode implicar um número de iterações excessivo para se atingir o equilíbrio estático. Cundall (1982) propõe um esquema de cálculo que permite acelerar o processo de convergência, designado de amortecimento global adaptável. Consiste em adequar continuamente a constante de amortecimento viscoso de tal modo que a razão entre a potência de amortecimento P_D e a derivada da energia cinética \dot{E}_k seja aproximadamente constante ao longo do tempo

$$R = \frac{\sum P_D}{\left| \sum \dot{E}_k \right|} \approx \text{const.} \quad (5.12)$$

onde os somatórios são estendidos a todos os elementos discretos do sistema e a potência de amortecimento é definida por

$$P_D = \frac{d}{dt} W_D \quad (5.13)$$

onde W_D é o trabalho $F_D \times u_{CM}$ realizado pela força de amortecimento F_D . Se se admitir que F_D é constante no intervalo Δt tem-se aproximadamente

$$P_D' \approx \alpha' I (\dot{\theta}^t)^2 + \alpha' m \sum_{i=1}^2 (\dot{u}_{CM,i}^t)^2 \quad (5.14)$$

sendo \dot{u}_{CM}^t e $\dot{\theta}_{CM}^t$ a velocidade e a velocidade angular, respectivamente, do centro de massa do elemento no instante t , aproximadas por (5.44) e (5.45).

A derivada da energia cinética é definida por (o segundo índice inferior em E indica a diferenciação)

$$\begin{aligned} E_{k,\dot{u}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{u}_{CM}^2 \right) = m \dot{u}_{CM} \ddot{u}_{CM} \\ E_{k,\dot{\theta}} &= I \dot{\theta}_{CM} \ddot{\theta}_{CM} \end{aligned} \quad (5.15)$$

e considerando \ddot{u}_{CM}^t e $\ddot{\theta}_{CM}^t$ aproximados por (5.22) e (5.23) vem aproximadamente

$$\dot{E}_k^t \approx \frac{I}{2 \Delta t} \left((\dot{\theta}^{t+\Delta t/2})^2 - (\dot{\theta}^{t-\Delta t/2})^2 \right) + \frac{m}{2 \Delta t} \sum_{i=1}^2 \left((\dot{u}_{CM,i}^{t+\Delta t/2})^2 - (\dot{u}_{CM,i}^{t-\Delta t/2})^2 \right) \quad (5.16).$$

Quando se utiliza a condição (5.12), se a energia cinética tende para zero, a potência de amortecimento tende igualmente para zero. Com este procedimento a dificuldade (2) acima referida é eliminada e a dificuldade (1) é parcialmente ultrapassada. Em ITASCA (1999) é proposto o valor 0,5 para a constante R . Este valor revelou-se adequado para a

implementação desenvolvida neste trabalho. Após a determinação de α^t , prossegue-se a execução do programa que fornece os valores de $\dot{u}^{t+\Delta t}$ e $\dot{\theta}^{t+\Delta t}$. Uma nova aplicação de (5.12) fornece o valor de $\alpha^{t+\Delta t}$ a utilizar na iteração seguinte. Porém, de forma a evitar variações bruscas do valor do coeficiente de amortecimento, Cundall determina um novo valor corrigido, $\alpha_{\text{cor}}^{t+\Delta t}$, definido por

$$\alpha_{\text{cor}}^{t+\Delta t} = \begin{cases} \frac{\alpha^{t+\Delta t}}{\chi_i} & \Leftarrow \alpha^{t+\Delta t} < \alpha^t \chi_d \\ \alpha^{t+\Delta t} & \Leftarrow \alpha^t \chi_d \leq \alpha^{t+\Delta t} < \frac{\alpha^t}{\chi_d} \\ \min(\alpha^{t+\Delta t} \chi_i, \alpha^0) & \Leftarrow \alpha^{t+\Delta t} \geq \frac{\alpha^t}{\chi_d} \end{cases} \quad (5.17)$$

Os parâmetros χ_i e χ_d , são factores multiplicativos iguais, respectivamente, a 1,05 e 0,90 (CUNDALL 1982). O valor inicial da constante de amortecimento, α^0 , é um valor prescrito que pode ser estimado por (5.11) com $\xi = 1$.

Se a estimativa inicial para a constante de amortecimento, α^0 , for excessivamente elevada a constante de amortecimento será reduzida progressivamente permitindo reduzir o tempo de cálculo. Porém, se subitamente surgir uma oscilação do movimento ela será incrementada progressivamente. Note-se que α^t nunca toma valores superiores a α^0 porque tal tornaria a execução do programa muito lenta. Como para os problemas tratados neste trabalho, o sistema estrutural converge para um estado de equilíbrio estático ou para um modo de colapso, a constante de amortecimento sofrerá normalmente uma redução progressiva, tendendo para zero o que se traduz numa redução do tempo de cálculo.

5.1.2. Amortecimento local — Análise estática

O amortecimento local é considerado nas equações de movimento através de uma força de amortecimento de grandeza proporcional às forças não equilibradas e com sentido oposto a estas (CUNDALL 1987), de modo que se pode afirmar que a força de amortecimento se opõe ao movimento dos elementos discretos. A constante de proporcionalidade, designada de constante de amortecimento não viscoso, é constante ao longo da análise. A utilização desta forma de amortecimento traduz-se nas seguintes vantagens:

- (1) os elementos discretos cujo estado seja estacionário não são amortecidos;

5. Aspectos numéricos do método dos elementos discretos

- (2) a constante de amortecimento não viscoso é adimensional, não depende das propriedades dos materiais, das forças variáveis nem das condições de fronteira;
- (3) é independente da frequência angular própria;
- (4) a força de amortecimento é variável de elemento para elemento.

Permitindo esta forma de amortecimento que a energia dissipada em cada ciclo seja independente da frequência angular própria ela pode ser entendida como uma forma de amortecimento histerético.

Em Itasca (1999) é recomendada a utilização do amortecimento local para as análises estáticas, pelas vantagens evocadas anteriormente e pela sua maior eficiência na minimização das oscilações provenientes de um colapso abrupto ocorrido no modelo.

Se a velocidade ocorre predominantemente numa direcção, por exemplo, devido à gravidade, então o sistema com amortecimento local pode levar a tempos de convergência maiores que o amortecimento global com o esquema adaptável. Na dúvida, é preferível correr a aplicação com amortecimento local e depois com o global e verificar os passos de tempo necessários em cada caso para obter convergência da solução.

5.2. Integração das equações do movimento pelo método das diferenças finitas

O método dos elementos discretos é estabelecido a partir de duas relações fundamentais: a segunda lei de Newton considerada ao nível dos elementos discretos e a lei força-deslocamento ao nível do contacto. A segunda lei de Newton permite determinar o deslocamento generalizado de cada elemento discreto por acção das forças nele aplicadas e a lei força-deslocamento, que traduz uma lei constitutiva, determina a variação das forças em cada contacto correspondentes ao deslocamento relativo de dois elementos discretos interactuantes.

5.2.1. Lei de movimento

Genericamente, a segunda lei de Newton estabelece que a força F_i exercida no centro de massa de um corpo de massa m , que se admite reduzido a um ponto, é igual à derivada (em

ordem ao tempo) da sua quantidade de movimento,

$$F_i(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{du_{CM,i}}{dt} \right), \quad i = 1, 2 \quad (5.18)$$

onde $u_{CM,i}$ representa as componentes do deslocamento do centro de massa. Considerando a massa constante, a expressão anterior toma a seguinte forma,

$$F_i = m \ddot{u}_{CM,i}, \quad i = 1, 2 \quad (5.19)$$

onde, por simplicidade, se passa a omitir a dependência de F relativamente ao tempo t . A “versão” rotacional da segunda lei de Newton é a lei de conservação do momento angular, que, no caso plano, pode ser expressa de forma escalar através de

$$M(t) = \frac{d}{dt} \left(I \frac{d\theta}{dt} \right) \quad (5.20)$$

onde M é o momento total devido às forças exteriores efectivas no centro de massa, θ é a rotação e I é o momento polar de inércia de massa do corpo a respeito do eixo de rotação perpendicular ao plano do sistema estrutural e passando pelo centro de massa. Considerando a massa constante vem

$$M = I \ddot{\theta} \quad (5.21)$$

Seguidamente é considerado unicamente o problema plano. As diferenças finitas centrais de primeira ordem permitem escrever a aceleração em função das velocidades

$$\ddot{u}_{CM,i}^t = \frac{1}{\Delta t} (\dot{u}_{CM,i}^{t+\Delta t/2} - \dot{u}_{CM,i}^{t-\Delta t/2}), \quad i = 1, 2 \quad (5.22)$$

$$\ddot{\theta}^t = \frac{1}{\Delta t} (\dot{\theta}^{t+\Delta t/2} - \dot{\theta}^{t-\Delta t/2}) \quad (5.23)$$

onde, $\ddot{u}_{CM,i}^t$, $\ddot{\theta}^t$ e $\dot{u}_{CM,i}^{t\pm\Delta t/2}$, $\dot{\theta}^{t\pm\Delta t/2}$ são as acelerações e velocidades, lineares e angulares, respectivamente, e Δt é o passo de tempo. O índice superior indica o instante de tempo e os sentidos positivos seguem a convenção estabelecida na Figura 3-2.

A exactidão das diferenças centrais é de segunda ordem (PINA 1995) eliminando da solução os erros de primeira ordem. Esta característica revela-se importante, na medida em que previne a acumulação de erros no decurso da análise.

Substituindo (5.22) e (5.23) em (5.19) e (5.21), respectivamente, obtêm-se as expressões que permitem determinar as velocidades de translação e de rotação do elemento discreto no

5. Aspectos numéricos do método dos elementos discretos

instante $t + \Delta t / 2$, em função das mesmas no instante $t - \Delta t / 2$,

$$\dot{u}_{CM,i}^{t+\Delta t/2} = \dot{u}_{CM,i}^{t-\Delta t/2} + \frac{F_i^t}{m} \Delta t, \quad i = 1, 2 \quad (5.24)$$

$$\dot{\theta}^{t+\Delta t/2} = \dot{\theta}^{t-\Delta t/2} + \frac{M^t}{I} \Delta t \quad (5.25)$$

As forças F_i^t representam a soma das forças de gravidade, de contacto e variáveis, e o momento M^t a soma dos momentos provocados por aquelas forças relativamente ao centro de massa do elemento discreto. As forças generalizadas de amortecimento são consideradas nas expressões (5.36) e (5.37).

Utilizando de novo as diferenças finitas centrais para escrever a velocidade em função do deslocamento

$$\dot{u}_{CM,i}^{t+\Delta t/2} = \frac{1}{\Delta t} (u_{CM,i}^{t+\Delta t} - u_{CM,i}^t), \quad i = 1, 2 \quad (5.26)$$

$$\dot{\theta}^{t+\Delta t/2} = \frac{1}{\Delta t} (\theta^{t+\Delta t} - \theta^t) \quad (5.27)$$

os acréscimos de deslocamento e de rotação no intervalo $[t, t + \Delta t]$ são obtidos a partir das velocidades do correspondente meio passo

$$\Delta u_{CM,i}^{t+\Delta t} = \dot{u}_{CM,i}^{t+\Delta t/2} \Delta t \quad (5.28)$$

$$\Delta \theta^{t+\Delta t} = \dot{\theta}^{t+\Delta t/2} \Delta t \quad (5.29)$$

e o deslocamento e rotação total do centro de massa do elemento discreto no instante $t + \Delta t$ são dados por

$$u_{CM,i}^{t+\Delta t} = u_{CM,i}^t + \dot{u}_{CM,i}^{t+\Delta t/2} \Delta t \quad (5.30)$$

$$\theta^{t+\Delta t} = \theta^t + \dot{\theta}^{t+\Delta t/2} \Delta t \quad (5.31)$$

Finalmente, a nova posição do centro de massa do elemento discreto é dada por

$$x_{CM,i}^{t+\Delta t} = x_{CM,i}^t + \Delta u_{CM,i}^{t+\Delta t} \quad (5.32)$$

A actualização das coordenadas de um vértice de um elemento discreto poligonal inclui o efeito de rotação do elemento discreto,

$$x_{V,i}^{t+\Delta t} = x_{V,i}^t + \dot{u}_{V,i}^{t+\Delta t/2} \Delta t, \quad i = 1, 2 \quad (5.33)$$

sendo a velocidade do vértice em qualquer instante t , $\dot{u}_{V,i}$, determinada através de

$$\dot{u}_{V,i} = \dot{u}_{CM,i} - e_{ij3} \dot{\theta} (x_{V,j} - x_{CM,j}), \quad i, j = 1, 2 \quad (5.34)$$

onde $x_{v,j}$ são as coordenadas do vértice em análise, $x_{CM,j}$ as coordenadas do centro de massa do elemento discreto, no mesmo instante t , e e_{ij3} é o símbolo de permutação definido por

$$e_{ij3} = \begin{cases} 1 & \Leftarrow i=1 \text{ e } j=2 \\ 0 & \Leftarrow i=j \\ -1 & \Leftarrow i=2 \text{ e } j=1 \end{cases} \quad (5.35)$$

Como foi anteriormente referido, o método dos elementos discretos quando aplicado à resolução de problemas estáticos ou quase-estáticos inclui uma forma de amortecimento fictício que reduz as oscilações associadas às equações de movimento não amortecidas. Para o efeito, na resolução das equações (5.24) e (5.25) são utilizadas duas formas de amortecimento, nomeadamente, o amortecimento global (viscoso) e o amortecimento local (não viscoso). A consideração de amortecimento é feita acrescentando nas equações (5.19) e (5.21) os termos $F_{D,i}$ e M_D , vindo

$$F_i + F_{D,i} = m\ddot{u}_{CM,i}, \quad i = 1, 2 \quad (5.36)$$

$$M + M_D = I\ddot{\theta} \quad (5.37)$$

5.2.1.1. Formulação com amortecimento global (FAG)

Para cada elemento discreto as forças de amortecimento $F_{D,i}$ e M_D de carácter viscoso são dadas por

$$F_{DG} = -C_D \begin{Bmatrix} \dot{u}_{CM,1} \\ \dot{u}_{CM,2} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

onde o índice inferior DG indica a formulação com amortecimento global e C_D é a matriz diagonal de amortecimento proporcional às quantidades de inércia,

$$C_D = \alpha_{\text{visc}} \mathbf{m} \quad (5.39)$$

onde α_{visc} é a matriz diagonal das constantes de amortecimento viscoso,

$$\alpha_{\text{visc}} = \begin{bmatrix} \alpha_{\text{visc,tra}} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{\text{visc,tra}} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\text{visc,rot}} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

sendo $\alpha_{\text{visc,tra}}$ e $\alpha_{\text{visc,rot}}$, respectivamente, as constantes de amortecimento de translação e de

rotação. Habitualmente são adoptadas constantes de amortecimento iguais

$$\alpha_{\text{visc,tra}} = \alpha_{\text{visc,rot}} \quad (5.41)$$

Substituindo (5.38) em (5.36) e (5.37) vem

$$F_i - C_{D,i} \dot{u}_{\text{CM},i} = m \ddot{u}_{\text{CM},i}, \quad i = 1, 2 \quad (5.42)$$

$$M - C_{D,3} \dot{\theta} = I \ddot{\theta} \quad (5.43)$$

Considerando

$$\dot{u}_{\text{CM},i}^t = \frac{1}{2} (\dot{u}_{\text{CM},i}^{t-\Delta t/2} + \dot{u}_{\text{CM},i}^{t+\Delta t/2}), \quad i = 1, 2 \quad (5.44)$$

$$\dot{\theta}^t = \frac{1}{2} (\dot{\theta}^{t-\Delta t/2} + \dot{\theta}^{t+\Delta t/2}) \quad (5.45)$$

em (5.38) obtém-se

$$F_{\text{DG},i}^t = -\frac{1}{2} \alpha_{\text{visc,tra}} m (\dot{u}_{\text{CM},i}^{t-\Delta t/2} + \dot{u}_{\text{CM},i}^{t+\Delta t/2}), \quad i = 1, 2 \quad (5.46)$$

$$M_{\text{DG}}^t = -\frac{1}{2} \alpha_{\text{visc,rot}} I (\dot{\theta}^{t-\Delta t/2} + \dot{\theta}^{t+\Delta t/2})$$

e as expressões (5.36) e (5.37), após a introdução das expressões (5.46) e de alguma manipulação algébrica, conduzem à versão amortecida de (5.24) e (5.25)

$$\dot{u}_{\text{CM},i}^{t+\Delta t/2} = \frac{\Phi 1_{\text{visc,tra}}}{\Phi 2_{\text{visc,tra}}} \dot{u}_{\text{CM},i}^{t-\Delta t/2} + \frac{F_i^t}{\Phi 2_{\text{visc,tra}} m} \Delta t, \quad i = 1, 2 \quad (5.47)$$

$$\dot{\theta}^{t+\Delta t/2} = \frac{\Phi 1_{\text{visc,rot}}}{\Phi 2_{\text{visc,rot}}} \dot{\theta}^{t-\Delta t/2} + \frac{M^t}{\Phi 2_{\text{visc,rot}} I} \Delta t \quad (5.48)$$

onde $\Phi 1_{\text{visc,tra}} = (1 - \alpha_{\text{visc,tra}} \Delta t / 2)$ e $\Phi 2_{\text{visc,tra}} = (1 + \alpha_{\text{visc,tra}} \Delta t / 2)$ e de igual forma para $\Phi 1_{\text{visc,rot}}$ e $\Phi 2_{\text{visc,rot}}$ com $\alpha_{\text{visc,tra}}$ substituído por $\alpha_{\text{visc,rot}}$.

5.2.1.2. Formulação com amortecimento local (FAL)

Considerando-se no problema plano forças e momento de amortecimento de carácter não viscoso, $F_{\text{DL},i}^t$ e M_{DL}^t , dadas para o instante t por

$$F_{\text{DL},i}^t = -\alpha_{\text{nvisc,tra}} \left| F_i^t \right| \frac{\dot{u}_{\text{CM},i}^{t-\Delta t/2}}{\left| \dot{u}_{\text{CM},i}^{t-\Delta t/2} \right|}, \quad i = 1, 2 \quad (5.49)$$

$$M_{\text{DL}}^t = -\alpha_{\text{nvisc,rot}} \left| M^t \right| \frac{\dot{\theta}^{t-\Delta t/2}}{\left| \dot{\theta}^{t-\Delta t/2} \right|} \quad (5.50)$$

permitem que as equações (5.36) e (5.37), quando consideradas as diferenças finitas centrais, tomem a seguinte forma

$$\dot{u}_{CM,i}^{t+\Delta t/2} = \dot{u}_{CM,i}^{t-\Delta t/2} + \frac{F_i^t + F_{DL,i}^t}{m} \Delta t, \quad i = 1, 2 \quad (5.51)$$

$$\dot{\theta}^{t+\Delta t/2} = \dot{\theta}^{t-\Delta t/2} + \frac{M^t + M_{DL}^t}{I} \Delta t \quad (5.52)$$

Para as constantes de amortecimento não viscoso, $\alpha_{nvisc,tra}$ e $\alpha_{nvisc,rot}$, relativas às translações e à rotação, são indicados em ITASCA (1999) e (2002) os valores de 0,8 e 0,7, respectivamente, para sistemas constituídos apenas por elementos discretos poligonais e apenas por elementos discretos circulares. Lemos (1999) apresenta o valor de 0,7 para a generalidade dos problemas quase-estáticos.

5.2.1.3. Formulação com massa modificada (FMM) — Amortecimento global

Como se referiu anteriormente, a adopção de um algoritmo explícito para integrar as equações de movimento, designadamente, o método das diferenças finitas centrais, tem como principal inconveniente a imposição de passos de tempo muito reduzidos para garantir a estabilidade numérica (LEMOS 1999). No entanto, quando aquele algoritmo é utilizado para determinar a solução de problemas quase-estáticos é introduzido um valor elevado para o coeficiente de amortecimento fictício, de modo a garantir a convergência rápida da solução (UNDERWOOD 1983). Neste tipo de problemas não é necessário considerar o valor real das quantidades de inércia (\mathbf{m}) tal como o passo de tempo também não tem significado real. A formulação com massa modificada permite melhorar a velocidade de convergência do método, reduzindo o número de passos de tempo necessário para atingir uma condição estacionária (quer o equilíbrio estático, quer o escoamento estacionário). Consiste em multiplicar as quantidades de inércia reais por um factor de escala. Por exemplo, as massas dos elementos discretos de maior dimensão devem ser reduzidas enquanto que as massas dos elementos discretos de menor dimensão devem ser aumentadas. O factor de escala é determinado através das expressões que definem o valor crítico para o passo de tempo. Fixando o valor do passo de tempo, por exemplo em uma unidade, são calculadas as correspondentes quantidades de inércia fictícias. É de salientar que embora as quantidades de inércia fictícias sejam afectadas pelo factor de escala, as quantidades gravíticas associadas às forças de gravidade mantêm-se inalteradas. A formulação com massa modificada é válida apenas para soluções estacionárias, porque os

5. Aspectos numéricos do método dos elementos discretos

estados transientes assim determinados não representam correctamente o comportamento dinâmico do sistema. Em geral a formulação com massa modificada é mais eficaz em problemas onde tanto a rigidez como a massa são fortemente não uniformes.

O algoritmo implementado segue os seguintes preceitos. Inicialmente é determinado o passo de tempo crítico Δt_{cr} , recorrendo ao método da soma simples apresentado na secção 6.2. O passo de tempo crítico é dado por (6.32) com ω_{max} aproximado por (6.49), e os factores multiplicativos $\chi_{modif,i}$ para cada elemento discreto são calculados por

$$\begin{aligned}\chi_{modif,i} &= \frac{1}{4m} (\Delta t_{cr})^2 k_{tra}, \quad i = 1, 2 \\ \chi_{modif,3} &= \frac{1}{4I} (\Delta t_{cr})^2 k_{rot}\end{aligned}\tag{5.53}$$

onde k_{tra} e k_{rot} são a rigidez máxima, respectivamente, de translação e de rotação, do elemento discreto dadas por (6.48). A matriz elementar das quantidades de inércia modificada é dada por

$$\mathbf{m}_{modif} = \begin{bmatrix} m_{modif,1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{modif,2} & 0 \\ 0 & 0 & m_{modif,3} \end{bmatrix} = \mathbf{m} \chi_{modif}\tag{5.54}$$

com χ_{modif} igual a

$$\chi_{modif} = \begin{bmatrix} \chi_{modif,1} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{modif,2} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{modif,3} \end{bmatrix}\tag{5.55}$$

Substituindo em (5.42) e (5.43) as quantidades de inércia modificada (5.54), as acelerações linear e angular (5.22) e (5.23), e as velocidades no instante t (5.44) e (5.45), e resolvendo em ordem à velocidade correspondente ao instante $t + \Delta t/2$, obtêm-se as equações de movimento,

$$\dot{u}_{CM,i}^{t+\Delta t/2} = \frac{\Phi 1_{visc,tra}}{\Phi 2_{visc,tra}} \dot{u}_{CM,i}^{t-\Delta t/2} + \frac{F_i^t}{\Phi 2_{visc,tra} m_{modif,i}} \Delta t, \quad i = 1, 2\tag{5.56}$$

$$\dot{\theta}^{t+\Delta t/2} = \frac{\Phi 1_{visc,rot}}{\Phi 2_{visc,rot}} \dot{\theta}^{t-\Delta t/2} + \frac{M^t}{\Phi 2_{visc,rot} m_{modif,3}} \Delta t\tag{5.57}$$

Quando se realiza uma detecção de contactos actualiza-se o passo de tempo crítico Δt_{cr} ,

dado pelo método da soma simples, e a matriz $\mathbf{m}_{\text{modif}}$.

5.2.1.4. Forças não equilibradas

No decorrer do processo iterativo são designadas de forças não equilibradas, os somatórios das forças e momentos reduzidos ao centro de massa de cada elemento discreto. Se o sistema se encontra em equilíbrio então o valor das forças não equilibradas é aproximadamente nulo, o que, em termos numéricos, equivale a que o valor absoluto da força não equilibrada máxima seja muito pequeno quando comparado com as forças não equilibradas existentes no início da execução do programa. Se a força não equilibrada máxima tende para um valor constante não nulo, tem-se uma situação de colapso do sistema estrutural.

O numerador do segundo termo do segundo membro das equações (5.47), (5.48), (5.51), (5.52), (5.56) e (5.57) representa um elemento do vector das forças não equilibradas $\{F_{\text{obf},1} \quad F_{\text{obf},2} \quad M_{\text{obf}}\}$, onde se omite o instante de tempo t . Este vector tem como ponto de aplicação o centro de massa do elemento discreto e componentes segundo os três graus de liberdade considerados, dois de translação e um de rotação

$$F_{\text{obf},i} = \begin{cases} F_i & \Leftarrow \text{FAG e FMM} \\ F_i + F_{\text{DL},i} & \Leftarrow \text{FAL} \end{cases}, \quad i = 1, 2 \quad (5.58)$$

$$M_{\text{obf}} = \begin{cases} M & \Leftarrow \text{FAG e FMM} \\ M + M_{\text{DL}} & \Leftarrow \text{FAL} \end{cases} \quad (5.59)$$

com F_{DL} e M_{DL} dados por (5.49) e (5.50) e

$$F_i = G_i + \sum_{C=1}^{N_{C,\text{ED}}} F_{C,i} + \sum_{n=1}^{N_{Q,\text{ED}}} Q_{n,i}, \quad i = 1, 2 \quad (5.60)$$

$$M = G_3 + \sum_{C=1}^{N_{C,\text{ED}}} M_C + \sum_{n=1}^{N_{Q,\text{ED}}} M_{Q_n} \quad (5.61)$$

onde, G_i é a componente da força de gravidade e $F_{C,i}$ e Q_i , representam as componentes das forças estaticamente equivalentes, respectivamente, de contacto e variável, que produzem os momentos M_C e M_Q . Os somatórios em C e em n são estendidos, respectivamente, a todos os contactos e a todas as forças variáveis do elemento discreto ED em análise.

As forças de gravidade são dadas por (3.9) e as forças variáveis por

$$\begin{cases} Q_i \\ M_Q = -e_{ij3} Q_i (x_{Q,j} - x_{CM,j}) \end{cases}, \quad i, j = 1, 2 \quad (5.62)$$

onde $x_{Q,j}$ são as coordenadas do ponto de aplicação da força variável do elemento discreto e Q_i as suas componentes. As forças de contacto $F_{C,i}$ e o momento M_C são definidos na seguinte secção.

5.2.2. Lei força-deslocamento

A representação da interacção mecânica nos pontos de contacto implica que as forças ao nível dos contactos dependam unicamente dos deslocamentos relativos que aí ocorrem.

Como referido nas secções 3.5 e 3.7, para a distribuição espacial das propriedades dos contactos são considerados dois modelos distintos para os contactos entre elementos discretos: (1) rigidez igual para todos os contactos com formulação em termos de forças; (2) rigidez proporcional à área do contacto com formulação em termos de tensões.

O incremento do deslocamento relativo entre os elementos discretos, por exemplo, A e B, no ponto de contacto, é obtido através da velocidade relativa no ponto de contacto, com componentes

$$\dot{u}_{C,i} = \dot{u}_{C,B,i} - \dot{u}_{C,A,i} \quad (5.63)$$

onde $\dot{u}_{C,A,i}$ e $\dot{u}_{C,B,i}$ são as componentes das velocidades do ponto de contacto dos elementos discretos. Para o elemento discreto A, por exemplo, as componentes da velocidade no ponto de contacto de coordenadas $x_{C,j}$, são dadas por uma expressão similar a (5.34),

$$\dot{u}_{C,A,i} = \dot{u}_{CM,A,i} - e_{ij3} \dot{\theta}_A (x_{C,j} - x_{CM,A,j}) \quad (5.64)$$

onde $\dot{u}_{CM,A,i}$ e $\dot{\theta}_A$ são as velocidades do centro de massa do elemento discreto A. As componentes tangencial e normal da velocidade relativa são dadas por

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_{C,s} \\ \dot{u}_{C,n} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\alpha \begin{Bmatrix} \dot{u}_{C,1} \\ \dot{u}_{C,2} \end{Bmatrix} \quad (5.65)$$

em que a matriz rotação é dada por (3.18).

O incremento de deslocamento relativo no contacto, segundo as direcções tangencial e normal (t_C, n_C) , num passo de cálculo Δt , ver Figura 5-1, é dado por

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_{C,s} \\ \Delta u_{C,n} \end{Bmatrix} = \Delta t \begin{Bmatrix} \dot{u}_{C,s} \\ \dot{u}_{C,n} \end{Bmatrix} \quad (5.66)$$

e o respectivo deslocamento relativo no contacto é

$$\begin{Bmatrix} u_{C,s} \\ u_{C,n} \end{Bmatrix}^{t+\Delta t} = \begin{Bmatrix} u_{C,s} \\ u_{C,n} \end{Bmatrix}^t + \begin{Bmatrix} \Delta u_{C,s} \\ \Delta u_{C,n} \end{Bmatrix}^{t+\Delta t} \quad (5.67)$$

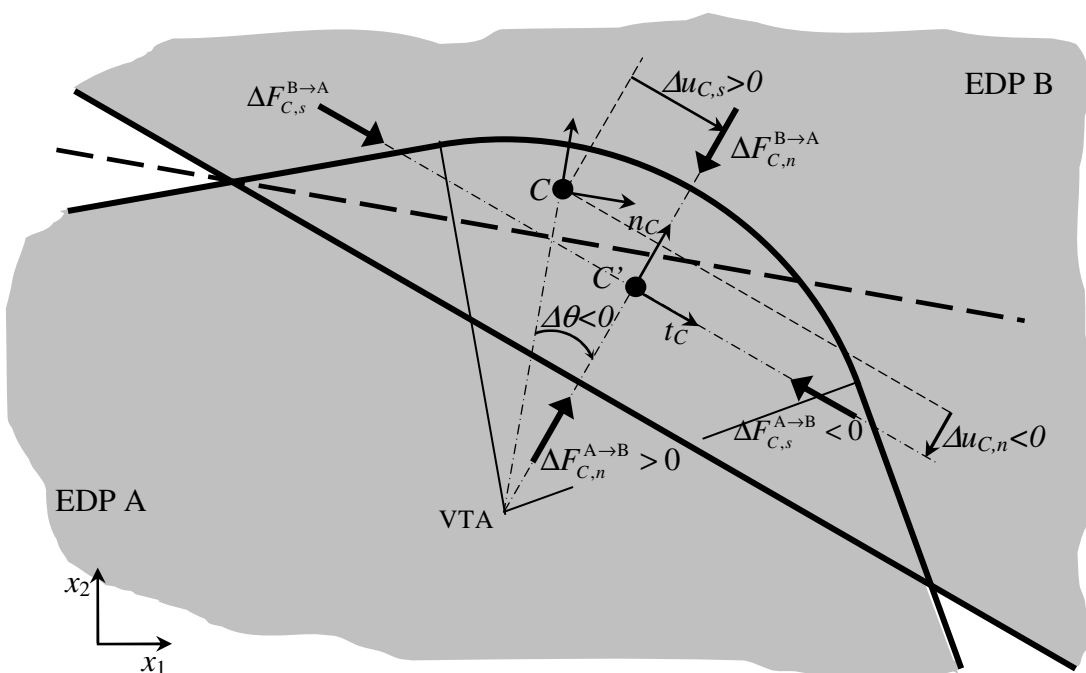


Figura 5-1: Incrementos dos deslocamentos relativos e forças no contacto C . As posições do ponto C e C' correspondem, respectivamente, ao instante t e $t + \Delta t$.

Encontrando-se o sistema em equilíbrio, $u_{C,n}$ deve ser igual a $u_{\text{gap},C}$ definido por (3.27). Resultando uma diferença esta é consequência do atraso com que o algoritmo reconhece os contactos efectivos. Por exemplo, um contacto entre dois elementos discretos justapostos na configuração inicial estabelece automaticamente um contacto efectivo. Já um contacto entre dois elementos discretos afastados inicialmente, só passa a ser considerado como efectivo quando a variável de separação $u_{\text{gap},C}$ se torna negativa no decorrer da execução do programa. Como o primeiro incremento de deslocamento relativo neste contacto só é calculado a partir do instante em que o contacto passa a estar classificado como efectivo,

5. Aspectos numéricos do método dos elementos discretos

ocorre um atraso no reconhecimento da situação de separação negativa. No entanto, este erro que depende do passo de tempo Δt é tão pequeno que não justifica o seu controlo numérico.

Em cada passo de tempo Δt os incrementos das forças elásticas tangencial $\Delta F_{\text{elas},C,s}$ e normal $\Delta F_{\text{elas},C,n}$ no contacto entre os elementos discretos genéricos A e B, ver Figura 5-1, são dados por

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_{\text{elas},C,s} \\ \Delta F_{\text{elas},C,n} \end{Bmatrix} = -\mathbf{E}_C \begin{Bmatrix} \Delta u_{C,s} \\ \Delta u_{C,n} \end{Bmatrix} \quad (5.68)$$

A matriz constitutiva elástica do contacto C , \mathbf{E}_C , é definida em (3.63). O sinal negativo decorre da convenção apresentada na secção 3.11 e representada na Figura 3-29. Como as forças de contacto são efectivamente pares de forças acção-reacção, o sinal positivo em (5.68) refere-se às forças exercidas pelo elemento A sobre o elemento B, com $A < B$.

Uma primeira estimativa para as forças elásticas de contacto no instante $t + \Delta t$ é obtida somando as forças de contacto efectiva no instante anterior t com os incrementos das forças elásticas de contacto, ou seja,

$$\begin{Bmatrix} F_{\text{elas},C,s} \\ F_{\text{elas},C,n} \end{Bmatrix}^{t+\Delta t} = \begin{Bmatrix} F_{C,s} \\ F_{C,n} \end{Bmatrix}^t + \begin{Bmatrix} \Delta F_{\text{elas},C,s} \\ \Delta F_{\text{elas},C,n} \end{Bmatrix}^{t+\Delta t} \quad (5.69)$$

As forças de contacto efectivas no instante $t + \Delta t$ devem ainda satisfazer os critérios de resistência adoptados na análise. Caso os valores dados por (5.69) violem estes critérios é efectuada a respectiva adequação, ver a secção 3.11,

$$\begin{Bmatrix} F_{C,s} \\ F_{C,n} \end{Bmatrix}^{t+\Delta t} \Leftarrow \begin{Bmatrix} F_{\text{elas},C,s} \\ F_{\text{elas},C,n} \end{Bmatrix}^{t+\Delta t} \quad (5.70)$$

O incremento de rotação $\Delta \theta^{t+\Delta t}$ é desprezado nas adições (5.67) e (5.69) por ser suficientemente pequeno. A força estaticamente equivalente e o momento nos centros de massa dos elementos discretos A e B, associados às forças no contacto, ver Figura 5-2, são dados por

$$\begin{cases} F_{C,A,i} = -F_{C,i} \\ M_{C,A} = e_{ij3} F_{C,i} (x_{C,j} - x_{CM,A,j}) \end{cases}, i, j = 1, 2 \quad (5.71)$$

e

$$\begin{cases} F_{C,B,i} = F_{C,i} \\ M_{C,B} = -e_{ij3} F_{C,i} (x_{C,j} - x_{CM,B,j}) \end{cases}, i, j = 1, 2 \quad (5.72)$$

com as forças de contacto em coordenadas globais, $F_{C,i}$, dadas por

$$\begin{Bmatrix} F_{C,1} \\ F_{C,2} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\alpha^T \begin{Bmatrix} F_{C,s} \\ F_{C,n} \end{Bmatrix} \quad (5.73)$$

sendo a matriz \mathbf{T}_α igual à utilizada em (5.65).

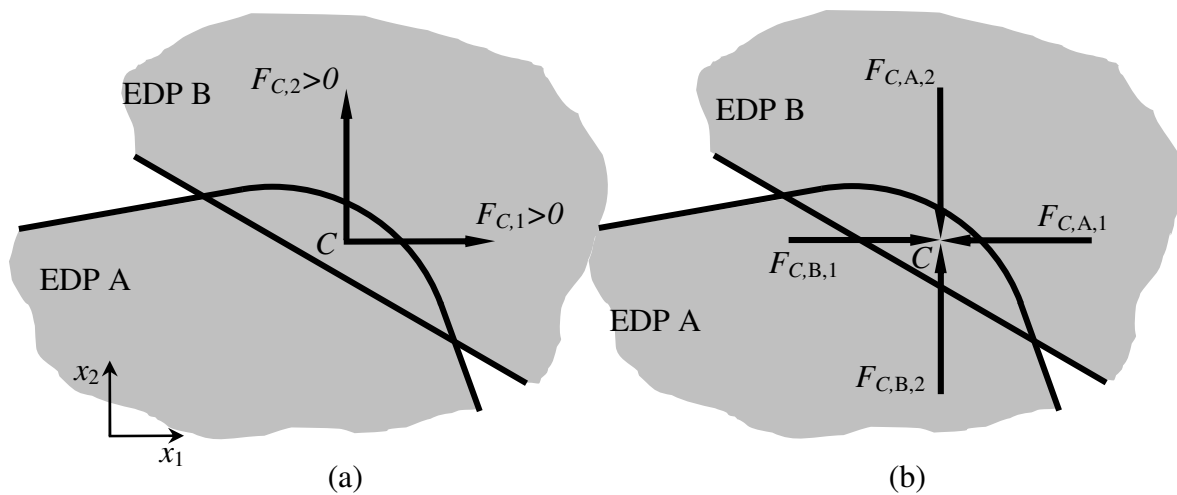


Figura 5-2: (a) Forças de contacto positivas; (b) Correspondentes forças de contacto actuantes em cada um dos elementos discretos.

5.2.3. Ciclo de cálculo do método dos elementos discretos

A Figura 5-3 apresenta resumidamente o ciclo de cálculo do método dos elementos discretos que, basicamente, consiste na activação sucessiva de três grandes princípios:

- (1) Lei de movimento: com as componentes da velocidade no instante $t - \Delta t / 2$ e forças no instante t , são determinadas as componentes da velocidade no instante $t + \Delta t / 2$. Com estas componentes são calculados os incrementos de deslocamento e a nova posição dos elementos discretos no instante $t + \Delta t$.
- (2) Detecção e actualização dos contactos: os contactos são actualizados, o que inclui tanto a criação de novos contactos como a conversão, manutenção ou supressão dos contactos existentes. Porém, a sub-rotina de detecção de contactos só é activada

quando o deslocamento máximo acumulado, verificado sobre todo o sistema, excede uma determinada tolerância.

- (3) Lei força-deslocamento: dada a nova posição dos elementos discretos é calculada a velocidade relativa no contacto e o incremento de deslocamento relativo segundo o referencial local. Aplicando a lei constitutiva é calculada a variação das forças de contacto. As forças de contacto, em coordenadas globais, são adicionadas às forças de gravidade e às forças variáveis, e ainda às forças de amortecimento se se tratar de uma formulação com amortecimento local. Caso esta soma seja “nula” há convergência e o ciclo termina, ver secção 5.2.4, caso contrário é iniciado novo ciclo em (1).

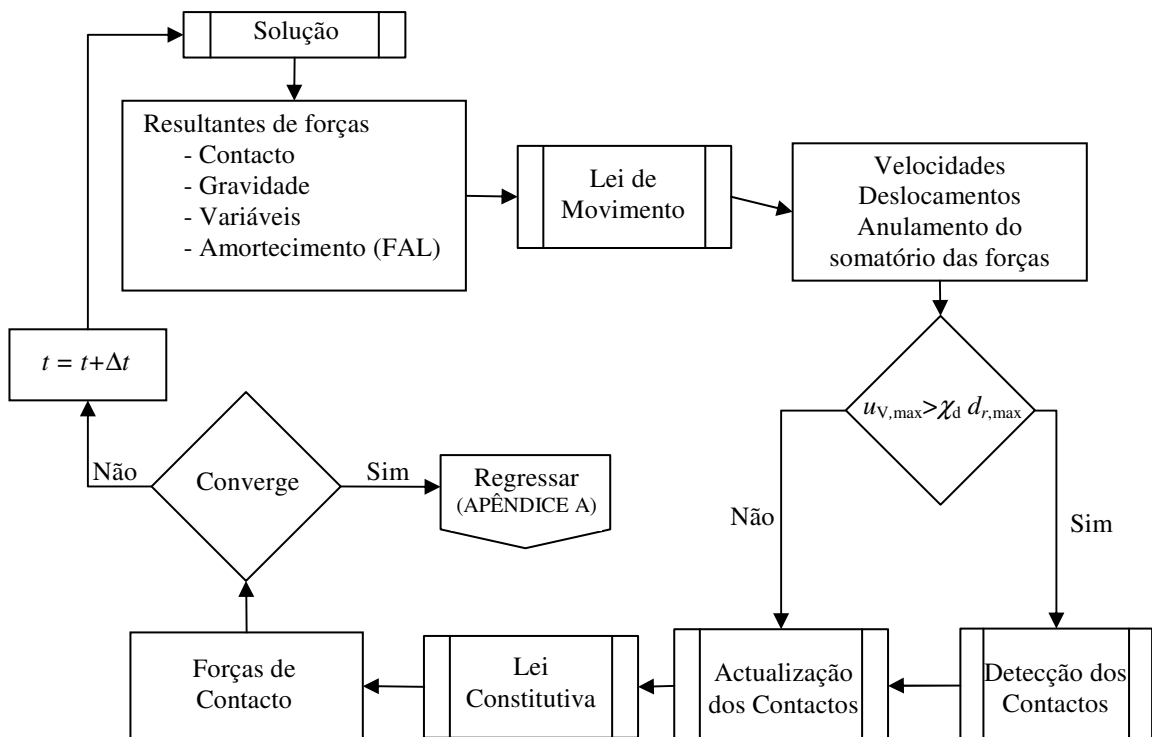


Figura 5-3: Ciclo de cálculo do método dos elementos discretos para cada nível de carga.

5.2.4. Critério de convergência

Os indicadores que permitem averiguar se a solução está a evoluir para um estado de equilíbrio ou para um estado de colapso são (1) as forças não equilibradas e (2) as velocidades dos centros de massa dos elementos discretos.

Após um determinado número de passos de tempo N_{pt} (por defeito igual a 100 000) é

determinado o valor da força não equilibrada máxima $F_{\text{obf,max}}^{(N_{\text{pt}})}$, o que corresponde à norma infinita do vector daquelas forças, isto é,

$$F_{\text{obf,max}}^{(N_{\text{pt}})} = \max_i \left| F_{\text{obf},j}^{(N_{\text{pt}}),i}, \frac{M_{\text{obf}}^{(N_{\text{pt}}),i}}{\bar{L}} \right|, \quad (i = A, B, \dots) \quad (5.74)$$

com $\bar{L} = \bar{L}_p$ ou \bar{L}_c consoante i seja um elemento poligonal ou circular ($\bar{L}_c = \frac{2}{N_{\text{EDC}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{EDC}}} R_k$).

Os sucessivos valores deste parâmetro são armazenados $\{F_{\text{obf,max}}^{(N_{\text{pt}})}, F_{\text{obf,max}}^{(2N_{\text{pt}})}, F_{\text{obf,max}}^{(3N_{\text{pt}})}, \dots\}$. Caso esta série de valores tenda para zero o sistema caminha para uma situação de equilíbrio. Para aplicar automaticamente incrementos de carga sucessivos é definido o número de passos de tempo N_{pt} para cada ciclo, o número de ciclos N_{cicl} a efectuar e um parâmetro de erro F_{err} com valor suficientemente pequeno tal que quando $F_{\text{obf,max}}^{(jN_{\text{pt}})} < F_{\text{err}}$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) se admite que o sistema atingiu o equilíbrio estático. Se para um determinado nível de carga o referido critério de convergência é satisfeito para $j \leq N_{\text{cicl}}$, a carga é incrementada e iniciada a série de ciclos seguinte. Se, pelo contrário, após os N_{cicl} ciclos o critério de convergência não for satisfeito, ou se o tempo de computação pré-estabelecido for ultrapassado, a tendência revelada pela série de valores $F_{\text{obf,max}}^{(jN_{\text{pt}})}$ indicará:

- (1) se o sistema se aproxima de uma situação de equilíbrio, caso em que se deverá verificar $F_{\text{obf,max}}^{(N_{\text{pt}})} > F_{\text{obf,max}}^{(2N_{\text{pt}})} > F_{\text{obf,max}}^{(3N_{\text{pt}})} \dots$, a partir de um certo valor de $j < N_{\text{cicl}}$;
- (2) se o equilíbrio não é possível, tendo-se eventualmente uma situação de colapso, caso em que se deverá verificar $F_{\text{obf,max}}^{(N_{\text{pt}})} \approx F_{\text{obf,max}}^{(2N_{\text{pt}})} \approx F_{\text{obf,max}}^{(3N_{\text{pt}})} \dots$;
- (3) se se está em presença de uma situação distinta das anteriores, ver Figura 5-4.

Em qualquer dos casos é necessário averiguar se a situação é normal, por exemplo, devido à dimensão do problema, ou se é uma situação que prefigura uma indefinição, por exemplo, a oscilação localizada de um pequeno número de elementos discretos circulares, e proceder às alterações apropriadas, por exemplo, do passo de tempo ou da constante de amortecimento.

Como foi anteriormente referido, se o valor da força não equilibrada máxima não tende

5. Aspectos numéricos do método dos elementos discretos

para zero, tomando um valor aproximadamente constante, pode-se estar em presença do início de um processo de colapso. Neste caso a velocidade do centro de massa de um ou vários elementos discretos aumenta progressivamente, indicando o seu destacamento.

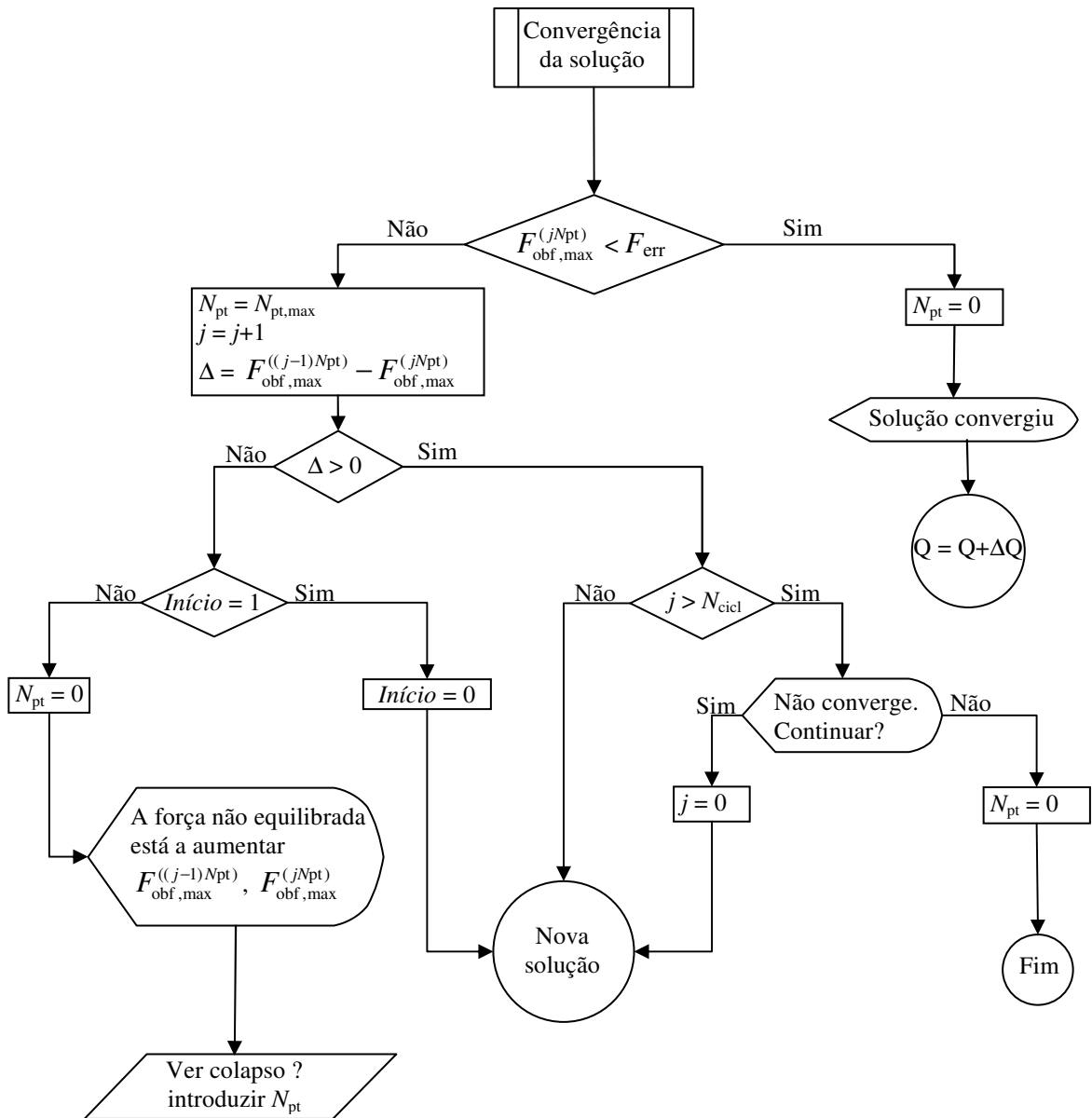


Figura 5-4: Fluxograma relativo à avaliação da convergência da solução.

A representação gráfica da força não equilibrada máxima, da velocidade ou do deslocamento do centro de massa (ou vértice) de um elemento discreto, permite monitorizar o processo de convergência. Por exemplo, na representação do deslocamento total do centro de massa de um dos elementos com carga aplicada, a convergência do processo é denunciada pela horizontalidade do gráfico para cada nível de carga, ver Figura 5-5.

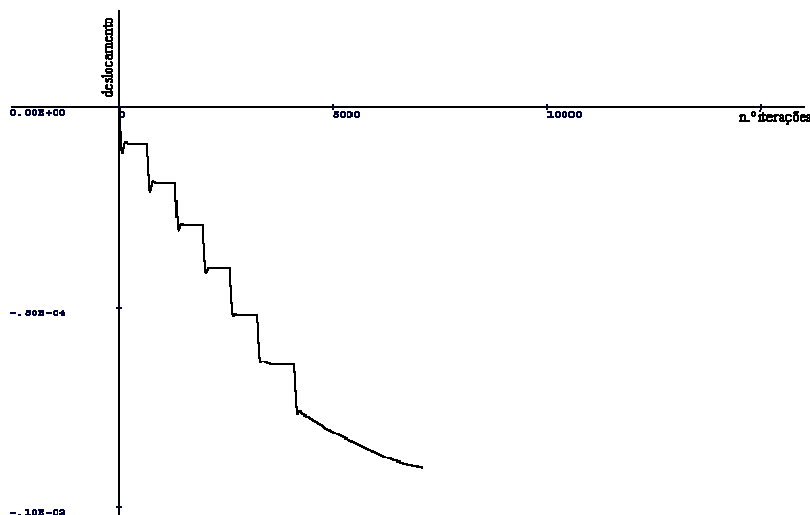


Figura 5-5: Evolução do deslocamento vertical do centro de massa de um elemento discreto com o número de iterações para diferentes níveis de carga.

5.3. Estados de tensão e de extensão em agregados de ED

Sendo a tensão e a extensão campos tensoriais definidos em meios contínuos, é necessário uma abordagem diferente para definir estas entidades em meios discretos, como os constituídos por elementos discretos circulares. Neste caso a tensão e a extensão são definidas através de quantidades discretas, como a força de contacto entre os elementos discretos circulares e os deslocamentos generalizados.

Assim, a “tensão” e a “extensão” deixam de ser definidas ao nível de cada ponto material, passando a ser definidas ao nível de um volume finito que pode ser associado a cada ponto. Este volume finito deve ser constituído por um número de elementos discretos circulares suficientemente grande para que possa ser considerado homogéneo e para que a tensão, definida desta forma, seja contínua. Este volume finito pode ser definido por um (i) alvéolo circular (ITASCA 2002), (ii) um alvéolo regular, hexagonal ou romboidal (CHANG 1989), (iii) alvéolo não regular hexagonal com vértices coincidentes com os pontos de contacto e os pontos de Dirichlet (SATAKE 2004), ou ainda por (iv) um alvéolo constituído por elementos discretos de diversas formas e dimensão (CHANG 2004) e (BARDET 1992, 2001). O ponto de Dirichlet é dado pela intersecção das rectas perpendiculares às arestas definidas pelos centros de massa dos elementos circulares em contacto, nos seus pontos médios.

Neste trabalho adoptou-se o alvéolo circular, sendo considerados como pertencentes ao alvéolo todos os elementos discretos nele contidos, bem como aqueles que o intersectam e cujo centro de massa lhe pertence.

O algoritmo implementado para a determinação de tensões e extensões segue os princípios enunciados em (ITASCA 2002), (CHANG 1989) e (AZEVEDO 2003).

5.3.1. Revisão bibliográfica

Vários autores desenvolveram investigação a este respeito. Christoffersen *et al.* (1981) usam o princípio dos trabalhos virtuais e o teorema da divergência de Gauss para definir o tensor das tensões. Adoptam uma série linear para definir o campo de deslocamentos virtual e admitem que os contactos não transmitem momento. A primeira destas hipóteses impede a determinação da tensão-momento. Por outro lado, a segunda dá origem a um problema não simétrico. Em seguida efectuam a decomposição num tensor das deformações puro e num tensor das rotações de corpo rígido. Os elementos discretos são de dimensão e forma diversa.

Ching Chang *et al.* (1989) estabelecem leis constitutivas para os diferentes tipos de alvéolos e elementos discretos circulares de igual dimensão. As condições de equilíbrio e o teorema da divergência de Gauss permitem estabelecer o tensor das tensões em função das forças de contacto, e o princípio da conservação da energia permite obter a matriz constitutiva. O princípio da conservação da energia é estabelecido da seguinte forma: o trabalho externo expresso em termos das variáveis macroscópicas, tensões e extensões, é igualado ao trabalho interno expresso em termos das variáveis microscópicas, forças e deslocamentos nos contactos. Chang *et al.* (2004) definem dois tipos de tensão, a tensão macro e a tensão média. A tensão macro está associada ao estabelecimento das expressões num meio discreto e a tensão média ao estabelecimento das expressões num meio equivalente contínuo. As expressões com as quantidades da tensão macro e média (tensão, tensão-momento e tensão de ordem superior) são obtidas recorrendo ao princípio dos trabalhos virtuais com o deslocamento virtual definido por uma série polinomial de segunda ordem. São impostas três condições essenciais para que as expressões sejam válidas. A primeira é a de não dependerem dos pontos de referência (coordenadas) dos elementos discretos, a segunda é a de possibilitarem a aplicação do tensor de transformação e, finalmente, a de não

dependerem da escolha do ponto central do alvéolo. A equação dos trabalhos virtuais é estabelecida de duas formas distintas. Numa das formas, a deformação e a rotação dos elementos discretos periféricos não são tidas em consideração, formulação idêntica à de Bardet *et al.* (2001) e que, segundo o mesmo autor, viola as condições um e três acima enunciadas, e na outra, tendo em conta a deformação e a rotação dos elementos discretos periféricos, a formulação assemelha-se à variacional que inclui as condições de fronteira. Neste trabalho os elementos discretos são de dimensão e forma variável.

Bagi (1996) apresenta expressões para definir os tensores das tensões e extensões. Descreve a geometria que representa o material discreto, nomeadamente, o sistema material alveolar, o sistema do espaço alveolar e a geometria das micro-variáveis. A dualidade entre o tensor das tensões e o tensor das extensões não é completa uma vez que o tensor das tensões é definido para o sistema material alveolar e o tensor das deformações é definido para o sistema do espaço alveolar. À medida que a dimensão do alvéolo circular considerado aumenta esta diferença diminui.

Kruyt *et al.* (1996) escrevem o tensor das tensões médio de duas formas, uma utilizando as forças externas e outra as forças internas. Para a primeira consideram as equações de equilíbrio indefinido para meios contínuos, e através do teorema da divergência de Gauss, escrevem a forma integral estendida sobre a fronteira. É possível estabelecer a forma discreta do integral anterior considerando as forças e as normais do contacto da fronteira. Para a segunda forma, consideram as condições de equilíbrio para um elemento discreto e multiplicam-nas pelas coordenadas do seu centro de massa. Escrevem o tensor das extensões médio de duas formas, uma utilizando o deslocamento relativo externo e outra o deslocamento relativo interno. Na primeira, formulação contínua, utilizam as derivadas dos deslocamentos no integral e através do teorema da divergência de Gauss escrevem o mesmo integral mas estendido sobre a fronteira obtendo posteriormente a forma discreta do integral. Para a segunda formulação são consideradas as condições de compatibilidade dos polígonos. Estes polígonos são obtidos unindo os centros de massa dos elementos discretos em contacto. Multiplicam as condições de compatibilidade pelas coordenadas do centro geométrico do polígono e obtêm uma equação semelhante à da formulação contínua.

Bardet *et al.* (2001) obtêm o tensor das tensões médio estabelecendo as equações do

trabalho virtual para o meio contínuo e para o meio discreto postulando que os meios, contínuo e discreto produzem o mesmo trabalho interno e externo. Determinam a expressão responsável pela assimetria do tensor. Esta tem como origem o facto de se adicionar parcelas relativas aos momentos externos criados pelas forças externas relativamente ao centro de massa de cada elemento discreto circular. Apresentam alguns exemplos que corroboram a assimetria do tensor. Numa simplificação, o vector (variável) obtido pela diferença de coordenadas dos centros de massa dos elementos discretos circulares em contacto é igualado ao vector (constante) obtido pela soma dos raios.

Satake (2004) define um tensor das tensões e das extensões em meios discretos. Para o efeito considera uma rede/malha de Dirichlet. Esta é obtida considerando cada elemento discreto dentro de um alvéolo. Os elementos discretos são de dimensão diversa e forma circular ou esférica. Define a tensão para um elemento discreto, a tensão para um contacto, a extensão para um vazio (ponto de Dirichlet) e a extensão para um contacto.

5.3.2. Estado de tensão em agregados de elementos discretos circulares

O algoritmo implementado para determinar o estado de tensão em agregados de elementos discretos circulares segue os preceitos expostos em (ITASCA 2002). A seguir é apresentada a sua formulação.

Não sendo possível determinar, no plano, o estado de tensão num ponto em meios discretos à semelhança dos meios contínuos, considera-se um procedimento alternativo. Nos agregados de elementos discretos circulares estes interagem entre si através dos contactos. Nestes contactos surgem forças que obedecem a uma determinada lei constitutiva força/deslocamento.

Num determinado volume de material contido num alvéolo de área A e espessura unitária o tensor das tensões médio é definido por

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{A} \int_A \sigma_{ij} dA \quad (5.75)$$

onde σ_{ij} é o tensor das tensões num ponto. Numa determinada área de elementos discretos o integral pode ser substituído pelo somatório estendido a todos os N_{EDC} elementos

discretos circulares — isto porque as tensões apenas existem nos elementos discretos circulares,

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{A} \sum_{p=1}^{N_{EDC}} \bar{\sigma}_{p,ij} A_p \quad (5.76)$$

onde $\bar{\sigma}_{p,ij}$ e A_p , são o tensor das tensões médio e a área, respectivamente, do elemento discreto circular p .

Aplicando (5.75) novamente, o tensor das tensões médio do elemento discreto circular p , vem dado por

$$\bar{\sigma}_{p,ij} = \frac{1}{A_p} \int_{A_p} \sigma_{p,ij} dA_p \quad (5.77)$$

Atendendo a

$$\sigma_{ij} = \delta_{ik} \sigma_{kj} = x_{i,k} \sigma_{kj} \quad (5.78)$$

onde δ_{ik} é o delta de Kronecker e o índice k antecedido de vírgula indica diferenciação em ordem a x_k , e à regra da derivada do produto

$$(x_i \sigma_{kj})_{,k} = x_{i,k} \sigma_{kj} + x_i \sigma_{kj,k} \quad (5.79)$$

a expressão (5.77) pode escrever-se

$$\bar{\sigma}_{p,ij} = \frac{1}{A_p} \int_{A_p} ((x_i \sigma_{p,kj})_{,k} - x_i \sigma_{p,kj,k}) dA_p \quad (5.80)$$

Ignorando as forças de massa, o segundo termo do integrando de (5.80), que representa a condição de equilíbrio, é nulo ($\sigma_{p,kj,k} = 0$). Aplicando agora o teorema da divergência de Gauss ao primeiro termo (GREENBERG 1978), o integral de superfície (5.80) é escrito sob a forma de integral curvilíneo

$$\bar{\sigma}_{p,ij} = \frac{1}{A_p} \int_{l_p} (x_i \sigma_{p,kj}) n_k dl_p = \frac{1}{A_p} \int_{l_p} x_i t_{p,j} dl_p \quad (5.81)$$

onde l_p é a curva definida pelo perímetro do elemento discreto p , n_k é o versor normal desta curva e $t_{p,j}$ são as componentes normais das forças de superfície.

Considerando a natureza discreta do problema o segundo integral de (5.81) é substituído por

5. Aspectos numéricos do método dos elementos discretos

$$\bar{\sigma}_{p,ij} = -\frac{1}{A_p} \sum_{r=1}^{N_r} y_{r,i} F_{r,j} \quad (5.82)$$

onde $y_{r,i}$ são as coordenadas do ponto r , pertencente à curva, relativas ao referencial rectangular cartesiano local com origem no centro de massa do elemento discreto circular paralelo ao referencial global (x_1, x_2) e $F_{r,j}$ são as componentes das forças normais naquele ponto. O somatório é estendido a todos os N_r pontos com forças aplicadas do elemento circular p . O sinal negativo na expressão (5.82) resulta da adopção de convenções de sinais opostas para $t_{p,j}$ e $F_{r,j}$, ver Figura 5-6.

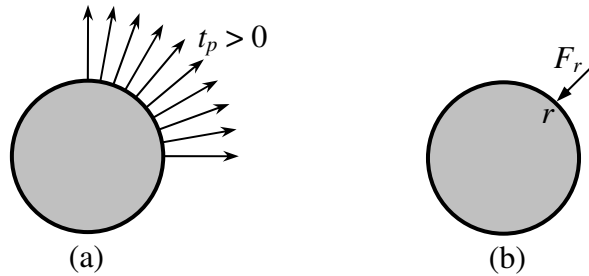


Figura 5-6: Representação da convenção para as forças de superfície: (a) na curva definida pelo perímetro do elemento; (b) F_r aplicada no ponto r .

Generalizando a todos os elementos discretos circulares e poligonais, distinguindo o ponto r em ponto de aplicação de uma força de contacto, C , e variável, Q , e fazendo

$$\begin{aligned} y_{C,i} &= x_{C,i} - x_{CM,i} \\ y_{Q,i} &= x_{V,i} - x_{CM,i} \end{aligned} \quad (5.83)$$

o tensor das tensões médio (5.82) para cada elemento discreto é dado por

$$\bar{\sigma}_{p,ij} = \begin{cases} \frac{1}{A_p} \left(\sum_{C=1}^{N_{C,p}} (x_{C,i} - x_{CM,i}) \kappa F_{C,p,j} + \sum_{q=1}^{N_{Q,p}} (x_{V,i} - x_{CM,i}) Q_{q,p,j} \right) & \Leftarrow \text{EDP} \\ \frac{1}{A_p} \left(\sum_{C=1}^{N_{C,p}} (x_{C,i} - x_{CM,i}) \kappa F_{C,p,j} + \sum_{q=1}^{N_{Q,p}} \psi R_p |Q_{q,p,j}| \right) & \Leftarrow \text{EDC} \end{cases} \quad (5.84)$$

onde o factor $\kappa = -1$ quando o elemento p é de numeração inferior ao outro elemento do contacto e $\kappa = 1$ na situação contrária. O factor ψ segue a definição apresentada na secção 3.4. O segundo somatório é estendido a todas as $N_{Q,p}$ forças variáveis aplicadas no elemento discreto p . Note-se que o sinal negativo em (5.82) se encontra contemplado nas

expressões de (5.84).

A tensão média ou isotrópica no elemento discreto é dada por

$$\sigma_{1,p} = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{p,11} + \bar{\sigma}_{p,22}) \quad (5.85)$$

A associação de uma escala de cores à tensão isotrópica permite visualizar a sua distribuição no final de cada ciclo de iterações.

O tensor das tensões médio do material contido no alvéolo considerado obtém-se substituindo-se (5.82) em (5.76). No entanto, é necessário definir de entre os elementos discretos circulares que intersectam a superfície do alvéolo quais devem ser considerados no cálculo de (5.76). No algoritmo plano implementado, é considerado um alvéolo circular e são considerados no cálculo do tensor das tensões médio apenas os elementos discretos circulares cujo centro de massa está contido no alvéolo.

Dadas as coordenadas do centro, x_{AC} , e o raio, R_{AC} , do alvéolo circular a que se refere o tensor das tensões, os N_p elementos discretos circulares cujo centro de massa está contido no alvéolo são identificados através da condição

$$L_{ACCM} \leq R_{AC} \quad (5.86)$$

onde L_{ACCM} é a distância entre o centro de massa do elemento discreto circular e o centro

do alvéolo, e a sua área é calculada $A_1 = \sum_{p=1}^{N_p} A_p$. Calcula-se igualmente a área dos N_q

($N_q > N_p$) elementos discretos circulares contidos no ou intersectados pelo alvéolo

independentemente da localização do centro de massa, $A_2 = \sum_{p=1}^{N_q} A_p$. Entende-se neste

contexto que a área A_p do elemento discreto circular p corresponde à parte do elemento discreto circular contida no alvéolo, ver Figura 5-7.

Igualando as equações que definem a fronteira do alvéolo e a fronteira do elemento discreto circular p , obtêm-se os pontos de intersecção A e B, de coordenadas x_A e x_B , ver Figura 5-7. Note-se que existem duas soluções distintas para $x_{A,2}$ e $x_{B,2}$, uma quando $x_{AC,2} = x_{CM,2}$

e outra quando $x_{AC,2} \neq x_{CM,2}$.

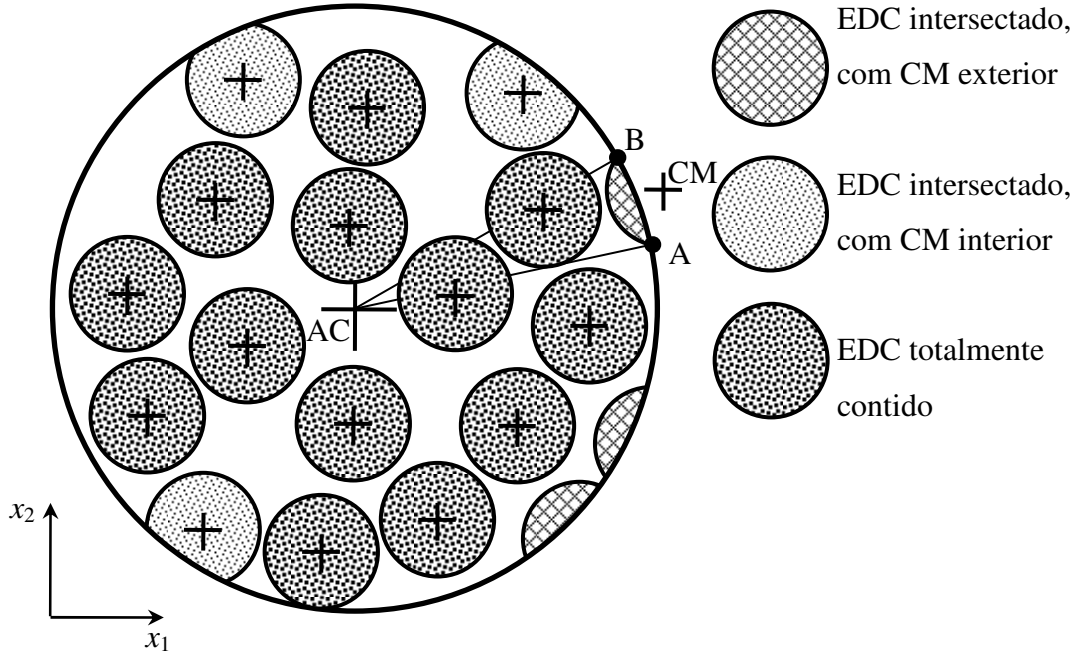


Figura 5-7: Representação dos elementos discretos circulares num alvéolo circular.

A área de intersecção é dada por

$$A_p = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(R_p^2 (2\pi - \theta_{CM,p} + \sin \theta_p) + R_{AC}^2 (\theta_{AC} - \sin \theta_{AC}) \right) & \Leftarrow L_{ACCM} < R_{AC} \\ \frac{1}{2} \left(R_p^2 (\theta_{CM,p} - \sin \theta_p) + R_{AC}^2 (\theta_{AC} - \sin \theta_{AC}) \right) & \Leftarrow L_{ACCM} \geq R_{AC} \end{cases} \quad (5.87)$$

onde θ_{CM} e θ_{AC} são os ângulos $\sphericalangle A, CM, B$ e $\sphericalangle A, AC, B$ calculados por

$$\cos \theta_i = \frac{1}{R_i^2} \left((x_{A,1} - x_{i,1})(x_{B,1} - x_{i,1}) + (x_{A,2} - x_{i,2})(x_{B,2} - x_{i,2}) \right) \quad (5.88)$$

com i igual a CM ou AC.

Assume-se que existe um campo uniforme de tensões σ_0 nos elementos contidos no alvéolo de área A . O tensor das tensões médio exacto $\bar{\sigma}_{ij}$ para o alvéolo é dado por

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{A} \sum_{p=1}^{N_q} \bar{\sigma}_{p,ij} A_p = \frac{1}{A} \sigma_0 \sum_{p=1}^{N_q} A_p = \sigma_0 \frac{A_2}{A} = \sigma_0 (1-n) \quad (5.89)$$

e a porosidade dada por

$$n = 1 - \frac{A_2}{A} \quad (5.90)$$

Define-se ainda o tensor das tensões médio aproximado $\tilde{\sigma}_{ij}$ para o alvéolo, isto é

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{A} \sum_{p=1}^{N_p} \bar{\sigma}_{p,ij} A_p = \frac{1}{A} \sigma_0 \sum_{p=1}^{N_p} A_p = \frac{1}{A} \sigma_0 A_1 \quad (5.91)$$

Resolvendo (5.91) em ordem a σ_0 e introduzindo em (5.89) vem

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1-n}{A_1} \sum_{p=1}^{N_p} \bar{\sigma}_{p,ij} A_p \quad (5.92)$$

Finalmente, utilizando (5.82) vem

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\frac{1-n}{A_1} \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{r=1}^{N_{r,p}} y_{r,i} F_{r,j} \quad (5.93)$$

Cundall (1987) e Bardet *et al.* (2001) apresentam uma expressão semelhante a esta. No entanto, substituem a distância do ponto de contacto ao centro de massa do elemento discreto pelo raio deste. Esta fórmula permite obter melhores resultados em sistemas apresentando uma sobreposição elevada dos elementos discretos circulares.

5.3.3. Estado de extensão em agregados de elementos discretos circulares

O algoritmo implementado para determinar o tensor da taxa de variação da deformação médio do alvéolo segue os princípios propostos em (FUNG 1969) e (ITASCA 2002) diferindo do utilizado para determinar o tensor das tensões médio. Como se viu anteriormente (5.82), o tensor das tensões médio é obtido através das forças nos pontos r . Ora nos vazios do alvéolo circular (pontos de Dirichlet — vértices dos alvéolos poligonais que envolvem cada um dos elementos discretos circulares) estas forças são nulas. Já o tensor da taxa de variação da deformação médio é obtido através das velocidades, que não são nulas nos vazios do alvéolo circular.

A formulação gira em torno da variação da geometria da rede alveolar gerada pelos pontos de Dirichlet. Em vez de assumir uma forma para o campo de velocidades nos vazios do alvéolo circular, o tensor da taxa de variação da deformação médio do alvéolo é obtido por

5. Aspectos numéricos do método dos elementos discretos

minimização do erro entre a velocidade relativa efectiva discreta e a velocidade relativa contínua de todos os elementos discretos circulares contidos nesse alvéolo.

O estado de deformação na vizinhança infinitesimal de um ponto de um meio contínuo é definido pelo tensor das deformações α_{ij} . Considerem-se dois pontos infinitamente próximos de coordenadas x_i e $x_i + dx_i$. Após a deformação, a diferença do deslocamento entre esses dois pontos é

$$du_i = u_{i,j} dx_j = \alpha_{ij} dx_j \quad (5.94)$$

O tensor das deformações pode ser decomposto num tensor simétrico (tensor das deformações puro) e noutra anti-simétrico (tensor das rotações de corpo rígido),

$$\alpha_{ij} = \varepsilon_{ij} - \omega_{ij} \quad (5.95)$$

onde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) \\ \omega_{ij} &= \frac{1}{2}(\alpha_{ji} - \alpha_{ij}) \end{aligned} \quad (5.96)$$

De forma similar, após a deformação, a diferença da velocidade entre aqueles dois pontos é

$$d\dot{u}_i = \dot{u}_{i,j} dx_j = \dot{\alpha}_{ij} dx_j \quad (5.97)$$

onde $\dot{\alpha}_{ij}$ é o tensor da taxa de variação da deformação que pode ser decomposto num simétrico e num anti-simétrico.

O deslocamento médio $\bar{u}_{AC,i}$ e o centro de massa médio $\bar{x}_{AC,i}$ do alvéolo que contém os centros de massa de N_p elementos discretos circulares, são dados pelas seguintes equações

$$\bar{u}_{AC,i} = \frac{1}{N_p} \sum_{p=1}^{N_p} u_{p,i} \quad (5.98)$$

$$\bar{x}_{AC,i} = \frac{1}{N_p} \sum_{p=1}^{N_p} x_{CM,p,i} \quad (5.99)$$

Para um determinado elemento discreto circular o deslocamento relativo efectivo discreto é dado por

$$u_{\text{ACCM},p,i} = u_{p,i} - \bar{u}_{\text{AC},i} \quad (5.100)$$

enquanto que considerando o tensor das deformações o deslocamento relativo contínuo é dado por

$$u_{\alpha,\text{ACCM},p,i} = \alpha_{ij} y_{\text{ACCM},p,i} \quad (5.101)$$

onde $y_{\text{ACCM},p,i}$ representa a posição do centro de massa do elemento discreto circular relativamente ao centro geométrico do alvéolo,

$$y_{\text{ACCM},p,i} = x_{\text{CM},p,i} - \bar{x}_{\text{AC},i} \quad (5.102)$$

O erro médio dos deslocamentos no alvéolo é proporcional a

$$u_{\text{err}} = \sum_{p=1}^{N_p} |u_{\alpha,\text{ACCM},p,i} - u_{\text{ACCM},p,i}|^2 \quad (5.103)$$

e introduzindo (5.101)

$$u_{\text{err}} = \sum_{p=1}^{N_p} (\alpha_{ij} y_{\text{ACCM},p,i} - u_{\text{ACCM},p,i})^2 \quad (5.104)$$

Estabelecendo a condição

$$\frac{\partial u_{\text{err}}}{\partial \alpha_{ij}} = 0 \quad (5.105)$$

para que u_{err} seja mínimo e derivando em ordem a α_{ij} a equação (5.104), obtém-se o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \sum y_{\text{ACCM},p,1} y_{p,1} & \sum y_{\text{ACCM},p,2} y_{p,1} \\ \sum y_{\text{ACCM},p,1} y_{p,2} & \sum y_{\text{ACCM},p,2} y_{p,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum u_{\text{ACCM},p,i} y_{\text{ACCM},p,1} \\ \sum u_{\text{ACCM},p,i} y_{\text{ACCM},p,2} \end{Bmatrix} \quad (5.106)$$

que resolvido primeiro para $i=1$ e depois para $i=2$, fornece as quatro componentes do tensor das deformações médio.

6. Estabilidade numérica

Neste capítulo são abordados vários assuntos relevantes para a estabilidade numérica do método dos elementos discretos. Na secção 6.1 é tratada a determinação das frequências e vectores próprios de sistemas compostos por elementos discretos poligonais e circulares. Na secção 6.2 são apresentados vários métodos para a determinação do passo de tempo Δt . A secção 6.3 explica como detectar a ocorrência de um fenómeno de instabilidade numérica designado por instabilidade interrompida (*arrested instability*).

6.1. Frequências próprias e modos de vibração

Foi desenvolvida uma rotina para a determinação de frequências próprias e modos de vibração de modelos de elementos discretos rígidos constituídos por elementos poligonais e circulares admitindo comportamento elástico linear dos contactos efectivos. Esta rotina possibilita a calibração dos parâmetros de deformabilidade dos contactos do modelo numérico através de ensaios dinâmicos *in situ* da estrutura, bem como o cálculo de parâmetros requeridos para o procedimento numérico, embora estes sejam normalmente obtidos através de métodos simplificados, como se mostra mais adiante. A análise de valores próprios pode ser efectuada para qualquer nível de carga, considerando apenas os contactos efectivos, como foi anteriormente referido.

Vários trabalhos mostram a importância da determinação dos valores próprios do sistema. Por exemplo, Aoki *et al.* (2006), Costa (2002), Arêde *et al.* (2005) e Costa *et al.* (2005) entre outros, apresentam os resultados obtidos numa série de ensaios dinâmicos destrutivos e não destrutivos realizados para caracterizar pontes em arco de alvenaria de pedra natural, incluindo a determinação das suas frequências fundamentais que, posteriormente, permitiram calibrar o modelo numérico adoptado.

6.1.1. Matrizes de rigidez e das quantidades de inércia

A construção de uma matriz de rigidez global não é requerida para o método dos elementos discretos, mas é-o para uma análise de valores próprios. As relações entre as forças generalizadas e os deslocamentos generalizados referidos ao centro de massa do elemento discreto são dadas, para um contacto genérico, por

$$F = k_c u_{CM} \quad (6.1)$$

onde F e u_{CM} representam, respectivamente, os vectores das forças e dos deslocamentos generalizados e k_c a matriz de rigidez do contacto em termos de deslocamentos e de forças generalizadas dos dois elementos envolvidos nesse contacto segundo o referencial local (t_c, n_c) . A Figura 6-1 representa um contacto pontual do tipo 6 (lado-círculo) e os correspondentes vectores das forças e dos deslocamentos generalizados,

$$F = \{F_1 \quad F_2 \quad F_3 \mid F_4 \quad F_5 \quad F_6\}^T$$

$$u_{CM} = \{u_{CM,1} \quad u_{CM,2} \quad u_{CM,3} \mid u_{CM,4} \quad u_{CM,5} \quad u_{CM,6}\}^T \quad (6.2)$$

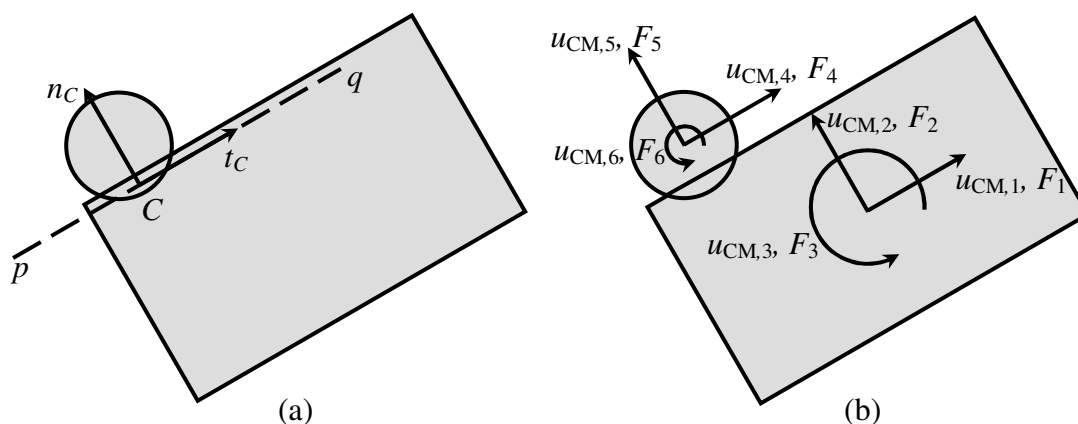


Figura 6-1: (a) Contacto pontual C ; (b) Forças e deslocamentos generalizados correspondentes.

A convenção para os sentidos positivos das forças e dos deslocamentos generalizados encontra-se representada na mesma figura. O plano de contacto C é definido pela linha a tracejado pq paralela a t_C e contendo o ponto C . As forças e os deslocamentos generalizados para os outros tipos de contacto são representados de maneira similar.

Para definir a matriz \mathbf{k}_C , considere-se a Figura 6-2, que representa um contacto genérico C , o plano de contacto pq e os centros de massa CMA e CMB dos elementos discretos A e B.

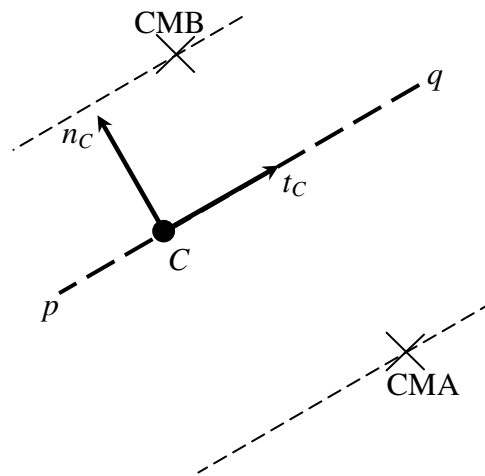


Figura 6-2: Contacto genérico C .

O elemento $k_{i,j}$ da matriz de rigidez do contacto representa a força generalizada segundo a coordenada i , devida a um deslocamento generalizado de valor unitário segundo a coordenada j , sendo os restantes deslocamentos nulos. Deste modo, cada coluna da matriz de rigidez do contacto é determinada impondo um deslocamento unitário segundo a coordenada j , $u_{CM,j} = 1$. Este deslocamento unitário corresponde a um deslocamento ao nível do contacto de $\{u_{C,s} \ u_{C,n}\}_j^T$. Usando a matriz constitutiva elástica local de um contacto as forças elásticas de contacto, associadas ao deslocamento unitário segundo a coordenada j , são dadas à semelhança de (5.68) por

$$\begin{Bmatrix} F_{C,s} \\ F_{C,n} \end{Bmatrix}_j = \mathbf{E}_C \begin{Bmatrix} u_{C,s} \\ u_{C,n} \end{Bmatrix}_j \quad (6.3)$$

tendo-se omitido o sinal negativo no membro esquerdo porque ele é irrelevante para o problema de valores próprios e o índice inferior elas por simplificação.

Os elementos da coluna j da matriz de rigidez do contacto são as forças generalizadas (referidas ao centro de massa de cada elemento discreto) estaticamente equivalentes às forças de contacto. As coordenadas do centro de massa dos elementos discretos A e B relativamente ao referencial local (t_C, n_C) são (ver Figura 6-3, Figura 6-4 e Figura 6-5)

$$\begin{cases} t_{C,CMA} \\ n_{C,CMA} \end{cases} = \mathbf{T}_{\alpha,C} \begin{cases} x_{CM,A,1} - x_{C,1} \\ x_{CM,A,2} - x_{C,2} \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\begin{cases} t_{C,CMB} \\ n_{C,CMB} \end{cases} = \mathbf{T}_{\alpha,C} \begin{cases} x_{CM,B,1} - x_{C,1} \\ x_{CM,B,2} - x_{C,2} \end{cases}$$

Observando a Figura 6-3 (a), um deslocamento unitário segundo a coordenada 1 corresponde a um deslocamento ao nível do contacto de $\{u_{C,s} \ u_{C,n}\}_1^T = \{1 \ 0\}^T$.

Atendendo a (6.3) as forças de contacto resultantes deste deslocamento são

$$\begin{cases} F_{C,A,s} \\ F_{C,A,n} \end{cases}_1 = \begin{cases} k_s \\ 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{C,B,s} \\ F_{C,B,n} \end{cases}_1 = - \begin{cases} k_s \\ 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

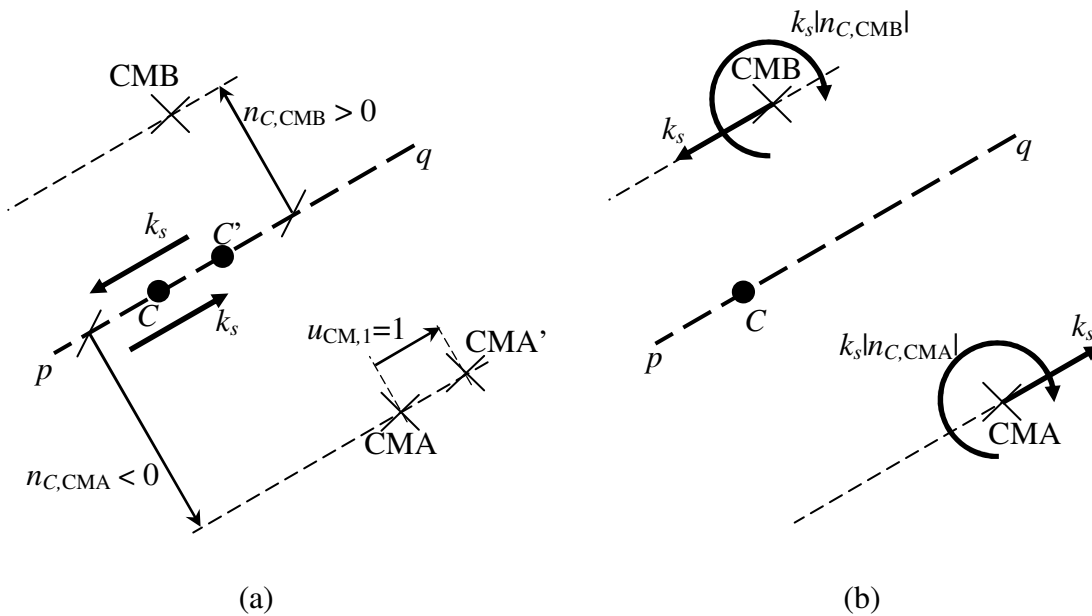


Figura 6-3: Primeira coluna de \mathbf{k}_C : (a) deslocamento generalizado segundo a coordenada 1 e (b) forças generalizadas.

Finalmente, as forças aplicadas no centro de massa de cada elemento discreto estaticamente equivalentes às forças de contacto, Figura 6-3 (b), vêm dadas por

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= F_{C,A,s} = k_s \\
 k_{12} &= F_{C,A,n} = 0 \\
 k_{13} &= n_{C,CMA} F_{C,A,s} + t_{C,CMA} F_{C,A,n} = n_{C,CMA} k_s \\
 k_{14} &= F_{C,B,s} = -k_s \\
 k_{15} &= F_{C,B,n} = 0 \\
 k_{16} &= n_{C,CMB} F_{C,B,s} + t_{C,CMB} F_{C,B,n} = -n_{C,CMB} k_s
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

De forma similar, para um deslocamento unitário segundo a coordenada 2, $\{u_{C,s} \ u_{C,n}\}_2^T = \{0 \ 1\}^T$, Figura 6-4, obtêm-se as forças generalizadas

$$k_{2,j} = \{0 \ k_n \ -t_{C,CMA} k_n \ 0 \ -k_n \ t_{C,CMB} k_n\} \tag{6.7}$$

e para a rotação unitária segundo a coordenada 3, $\{u_{C,s} \ u_{C,n}\}_3^T = \{n_{C,CMA} \ -t_{C,CMA}\}^T$,

Figura 6-5, as forças generalizadas são

$$\begin{aligned}
 k_{3,j} &= \{n_{C,CMA} k_s \ -t_{C,CMA} k_n \ t_{C,CMA}^2 k_n + n_{C,CMA}^2 k_s \\
 &\quad -n_{C,CMA} k_s \ t_{C,CMA} k_n \ -t_{C,CMA} t_{C,CMB} k_n - n_{C,CMA} n_{C,CMB} k_s\}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

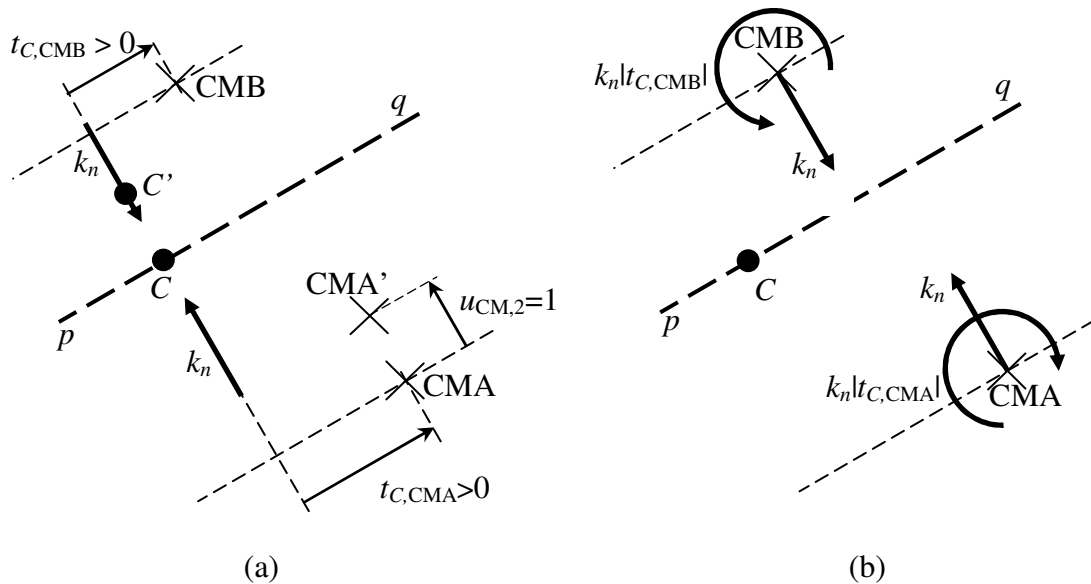


Figura 6-4: Segunda coluna de \mathbf{k}_C : (a) deslocamento generalizado segundo a coordenada 2 e (b) forças generalizadas.

Para as restantes colunas o procedimento é similar obtendo-se

$$\mathbf{k}_C = \begin{bmatrix} k_s & 0 & n_{C,CMA}k_s & -k_s & 0 & -n_{C,CMB}k_s \\ 0 & k_n & -t_{C,CMA}k_n & 0 & -k_n & t_{C,CMB}k_n \\ n_{C,CMA}k_s & -t_{C,CMA}k_n & t_{C,CMA}^2k_n + n_{C,CMA}^2k_s & -n_{C,CMA}k_s & t_{C,CMA}k_n & -t_{C,CMA}t_{C,CMB}k_n - n_{C,CMA}n_{C,CMB}k_s \\ -k_s & 0 & -n_{C,CMA}k_s & k_s & 0 & n_{C,CMB}k_s \\ 0 & -k_n & t_{C,CMA}k_n & 0 & k_n & -t_{C,CMB}k_n \\ -n_{C,CMB}k_s & t_{C,CMB}k_n & -t_{C,CMA}t_{C,CMB}k_n - n_{C,CMA}n_{C,CMB}k_s & n_{C,CMB}k_s & -t_{C,CMB}k_n & t_{C,CMB}^2k_n + n_{C,CMB}^2k_s \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Alternativamente, esta matriz pode ser definida matricialmente a partir da matriz constitutiva elástica local para o contacto, \mathbf{E}_C , e das relações de compatibilidade entre os deslocamentos generalizados e os deslocamentos no contacto, \mathbf{P} ,

$$\begin{Bmatrix} u_{C,s} \\ u_{C,n} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & n_{C,CMA} & | & -1 & 0 & -n_{C,CMB} \\ 0 & 1 & -t_{C,CMA} & | & 0 & -1 & t_{C,CMB} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \mathbf{u}_{CM} \quad (6.10)$$

isto é

$$\mathbf{k}_C = \mathbf{P}^T \mathbf{E}_C \mathbf{P} \quad (6.11)$$

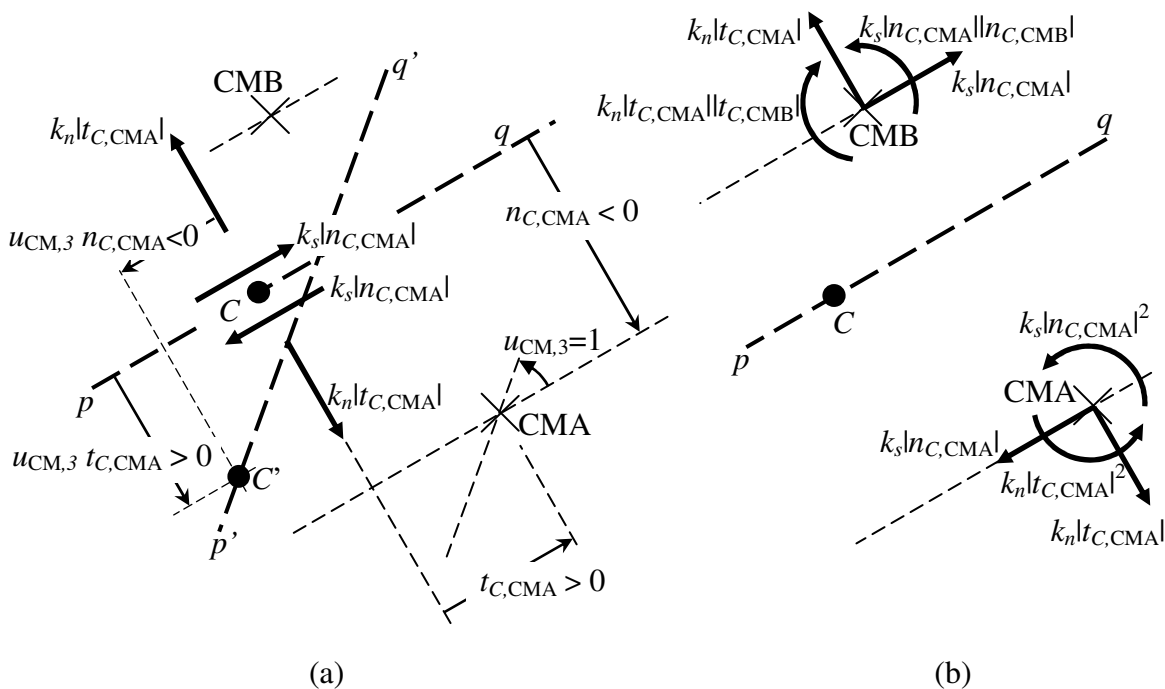


Figura 6-5: Terceira coluna de \mathbf{k}_C : (a) deslocamento generalizado segundo a coordenada 3 e (b) forças generalizadas.

Generalizando a matriz de rotação \mathbf{T}_α (3.18), de modo a incluir o grau de liberdade rotacional,

$$\mathbf{T}'_{\alpha,C} = \begin{bmatrix} n_{C,2} & -n_{C,1} & 0 \\ n_{C,1} & n_{C,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

e, de modo a tratar o conjunto de dois elementos discretos associados a um contacto, vem ainda,

$$\mathbf{T}''_{\alpha,C} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}'_{\alpha,C} & 0 \\ 0 & \mathbf{T}'_{\alpha,C} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

(0 é uma submatriz nula 3×3) que permite definir a matriz de rigidez do contacto no sistema de coordenadas globais

$$\mathbf{K}_C = \mathbf{T}''_{\alpha,C}{}^T \mathbf{k}_C \mathbf{T}''_{\alpha,C} \quad (6.14)$$

isto é

$$\mathbf{K}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{C,11} & \mathbf{K}_{C,12} \\ \mathbf{K}_{C,21} & \mathbf{K}_{C,22} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

com as submatrizes $\mathbf{K}_{C,ij}$ definidas por

$$\mathbf{K}_{C,ij} = (-1)^{i+j} \begin{bmatrix} n_{C,1}^2 k_n + n_{C,2}^2 k_s & n_{C,1} n_{C,2} (k_n - k_s) & -n_{C,1} t_{C,Ej} k_n + n_{C,2} n_{C,Ej} k_s \\ n_{C,1} n_{C,2} (k_n - k_s) & n_{C,1}^2 k_s + n_{C,2}^2 k_n & -n_{C,1} n_{C,Ej} k_s - n_{C,2} t_{C,Ej} k_n \\ -n_{C,1} t_{C,Ei} k_n + n_{C,2} n_{C,Ei} k_s & -n_{C,1} n_{C,Ei} k_s - n_{C,2} t_{C,Ei} k_n & t_{C,Ei} t_{C,Ej} k_n + n_{C,Ei} n_{C,Ej} k_s \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

onde $E_1 = \text{CMA}$ e $E_2 = \text{CMB}$.

Estabelecida a matriz de rigidez do contacto global \mathbf{K}_C para cada contacto e a matriz elementar das quantidades de inércia \mathbf{m} (3.6) para cada elemento discreto do sistema, é agregada a matriz de rigidez do sistema \mathbf{K} e a matriz das quantidades de inércia do sistema \mathbf{M} . A primeira resulta da contribuição de todos os contactos efectivos e a segunda da contribuição de todos os elementos discretos.

6.1.2. Assemblagem das matrizes de rigidez e de massa do sistema

Para proceder à assemblagem da matriz de rigidez do sistema é inicialmente estabelecida a matriz de incidência \mathbf{L} identificando os graus de liberdade activos de cada elemento

discreto. Cada linha desta matriz corresponde a um elemento discreto e cada coluna corresponde a um grau de liberdade, pelo que a dimensão de \mathbf{L} é $N_{ED} \times 3$ (N_{ED} é o número de elementos discretos do sistema).

O processo de criação da matriz de incidência consiste em atribuir aos graus de liberdade elementares dos N_{ED} elementos uma numeração sequencial definindo o correspondente grau de liberdade global. Um elemento da matriz de incidência nulo indica que esse grau de liberdade não está activo. A matriz restrição ao movimento \mathbf{B} definida na secção 3.2 contém informação sobre os deslocamentos impedidos de cada elemento discreto. Por exemplo, para uma matriz restrição ao movimento dada por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

a matriz de incidência toma a seguinte forma,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

A primeira linha de \mathbf{L} indica que os graus de liberdade locais 1, 2 e 3 do elemento discreto 1 não estão activos, não constituindo graus de liberdade. A segunda linha de \mathbf{L} indica que a coordenada local 2 do segundo elemento discreto corresponde ao grau de liberdade 1. A terceira e quarta linha da matriz de incidência, indicam que as coordenadas locais 1, 2 e 3 dos elementos discretos 3 e 4 correspondem aos graus de liberdade 2, 3, 4 e 5, 6, 7, etc.

Seguidamente, são definidas as matrizes de massa e rigidez do sistema. Inicialmente os elementos da matriz de rigidez tomam valores nulos. O “espalhamento” das matrizes de rigidez de cada contacto em coordenadas globais é seguidamente efectuado percorrendo todos os contactos e adicionando as contribuições das respectivas matrizes de rigidez do contacto à matriz global com o auxílio da matriz \mathbf{L}

$$K(i, j) := K(i, j) + K_c(u, v) \quad (6.19)$$

Para este efeito são lidos os graus de liberdade globais dos elementos discretos identificados na definição do contacto C , por exemplo os elementos discretos A e B , e construído um vector auxiliar

$$X_C = \{L_A \mid L_B\} \quad (6.20)$$

Seguidamente, é construído o vector de ocorrência do contacto C , O_C , por inspecção do vector X_C . Para cada um dos N elementos não nulos de X_C é criado um elemento em O_C , cuja dimensão é igual a N . Seguidamente é estabelecido um vector grau de liberdade elementar V_C , de dimensão N que contém as posições dos elementos não nulos de X_C .

A título exemplificativo, seguindo o exemplo a que se refere a matriz de incidência (6.18) e admitindo que o contacto C é definido pelos elementos discretos 2 e 4 obtém-se

$$\begin{aligned} X_C &= \{0 \ 1 \ 0 \ 5 \ 6 \ 7\} \\ N &= 4 \\ O_C &= \{1 \ 5 \ 6 \ 7\} \\ V_C &= \{2 \ 4 \ 5 \ 6\} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Para processar a soma (6.19) identificam-se as linhas e colunas de \mathbf{K} que correspondem às linhas e colunas de \mathbf{k}_C através de N , O_C e V_C . Iniciando a soma com um ciclo que percorre as linhas da matriz de rigidez do sistema e depois somando com um subciclo que percorre as colunas daquela linha. Para o ciclo em linhas, $i = O_{C,p}$ e $u = V_{C,p}$, com $p = 1, N$, e para o subciclo em colunas, $j = O_{C,q}$ e $v = V_{C,q}$, com $q = 1, N$.

Voltando ao exemplo anterior o ciclo em linhas opera nas linhas 1, 5, 6 e 7 e o subciclo em colunas opera nas colunas 1, 5, 6 e 7 de \mathbf{K} . As correspondentes linhas e colunas de \mathbf{k}_C são a 2, 4, 5 e 6. Para o primeiro ciclo vem

$$\begin{aligned} K_{1,1} &= K_{1,1} + K_{C,2,2} \\ K_{1,5} &= K_{1,5} + K_{C,2,4} \\ K_{1,6} &= K_{1,6} + K_{C,2,5} \\ K_{1,7} &= K_{1,7} + K_{C,2,6} \end{aligned} \quad (6.22)$$

e para os restantes o procedimento é similar.

Para a matriz das quantidades de inércia do sistema, \mathbf{M} , é inicialmente construída uma matriz nula de dimensão igual ao número de graus de liberdade do sistema. Posteriormente, percorrendo todos os elementos discretos do sistema, e com o auxílio da matriz \mathbf{L} são adicionadas nas correspondentes posições da matriz das quantidades de inércia do sistema os elementos da matriz elementar das quantidades de inércia, \mathbf{m} , correspondentes aos graus de liberdade activos.

6.1.3. Determinação das frequências e vectores próprios do sistema

Estabelecida a matriz de rigidez do sistema, \mathbf{K} , e a matriz das quantidades de inércia do sistema, \mathbf{M} , é definido o problema de valores próprios generalizado (CHOPRA 2001),

$$\mathbf{K}\phi = \omega^2\mathbf{M}\phi \quad (6.23)$$

onde ω representa uma frequência angular própria e ϕ um vector próprio. Dado que \mathbf{M} é diagonal esta equação poderia ser escrita no formato padrão multiplicando ambos os membros por \mathbf{M}^{-1} , vindo

$$\mathbf{A}\phi = \omega^2\phi \quad (6.24)$$

com $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$.

Porém, para preservar a simetria de \mathbf{K} são multiplicados ambos os membros de (6.23) por $\mathbf{M}^{-1/2}$ à esquerda vindo

$$\underbrace{\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\mathbf{M}^{1/2}\phi}_y = \underbrace{\omega^2}_{\lambda} \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}^{1/2} \underbrace{\mathbf{M}^{1/2}\phi}_y \quad (6.25)$$

ou seja,

$$\mathbf{A}y = \lambda y \quad (6.26)$$

com

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2} \quad (6.27)$$

$$y = \mathbf{M}^{1/2}\phi \quad (6.28)$$

e

$$\lambda = \omega^2 \quad (6.29)$$

Estabelecida a matriz simétrica \mathbf{A} é utilizada uma rotina para calcular os valores próprios λ e os vectores próprios y . As correspondentes frequências e modos de vibração são obtidos por inversão de (6.28) e (6.29)

$$\omega = \lambda^{1/2} \quad (6.30)$$

$$\phi = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{y} \quad (6.31)$$

6.1.4. Gestão da utilização de RAM

Convém salientar que o algoritmo implementado para calcular as frequências e vectores próprios de sistemas constituídos por elementos discretos rígidos poligonais e circulares requer uma quantidade elevada de RAM. Possuindo o PC utilizado 1MB deste tipo de memória, verificou-se inicialmente a limitação da utilização do algoritmo a sistemas com cerca de três dezenas de elementos discretos. A colocação em memória RAM das matrizes de dados e das requeridas no cálculo, como a matriz de massa e sua inversa, a matriz de rigidez etc., limitava a eficiência do processo. Para ultrapassar este obstáculo criaram-se ficheiros não formatados para armazenamento no disco de informação à medida que ela deixa de ser necessária. Este armazenamento no disco permite que na fase de pós-processamento sejam produzidos, em formato gráfico, os modos de vibração em qualquer instante do processo iterativo. Para tal, foram criados três formatos distintos de visualização dos modos de vibração:

- (1) configuração deslocada dos elementos discretos, ver Figura 6-6;
- (2) representação dos vectores deslocamento dos vértices dos elementos discretos poligonais e dos centros de massa dos elementos discretos circulares, ver Figura 6-7;
- (3) representação de linhas unindo os centros de massa dos elementos discretos, ver Figura 6-8.

6.1.5. Exemplo de aplicação

Como exemplo de aplicação foi escolhida a ponte de Bridgemill em Girvan, Escócia, cujas propriedades geométricas e materiais se encontram apresentadas em detalhe no capítulo 8.

Com este exemplo não se pretende calibrar o modelo numérico de elementos discretos através das frequências próprias relativas aos modos verticais, pois elas não foram determinadas no estudo realizado por Hendry *et al.* (PAGE 1993, 1995) e utilizado no presente trabalho. Porém, os factores χ_i introduzidos na definição da rigidez dos contactos pontuais visa justamente ilustrar uma possível calibragem daquele tipo (ROUXINOL

2007d). Assim, são apenas demonstradas as capacidades do algoritmo proposto com o modelo de 1984 elementos discretos circulares e 66 elementos discretos poligonais representado na Figura 7-3, originando 6138 graus de liberdade e 4843 contactos iniciais (efectivos e virtuais). Para a geração da malha de elementos discretos circulares recorreu-se ao método da expansão do raio, ver secção 7.4.

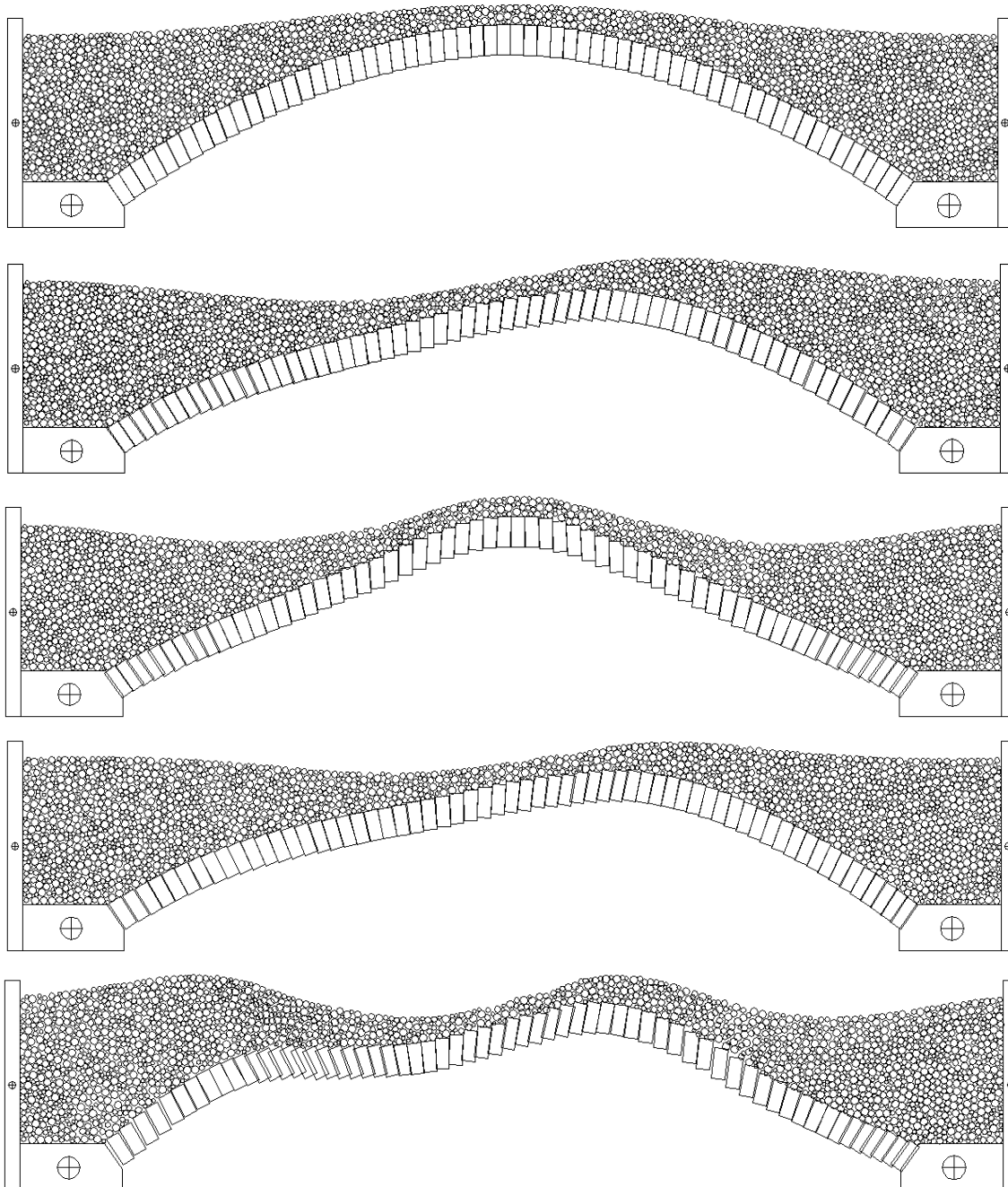


Figura 6-6: Primeiros 5 modos de vibração para a combinação 1, no formato 1.

Para contactos entre elementos discretos circulares (C-C) a rigidez normal distribuída é $\bar{k}_{n,C-C} = \chi_1 \times 1,596 \text{ GPa/m}$ e a tangencial é $\bar{k}_{s,C-C} = \chi_1 \times 0,666 \text{ GPa/m}$. Para os contactos

entre elementos discretos poligonais e circulares (P-C) e entre elementos discretos poligonais (P-P) adoptaram-se os valores $\bar{k}_{n,P-C} = \bar{k}_{n,P-P} = \chi_2 \times 4,840 \text{ GPa/m}$ e $\bar{k}_{s,P-C} = \bar{k}_{s,P-P} = \chi_2 \times 0,573 \text{ GPa/m}$.

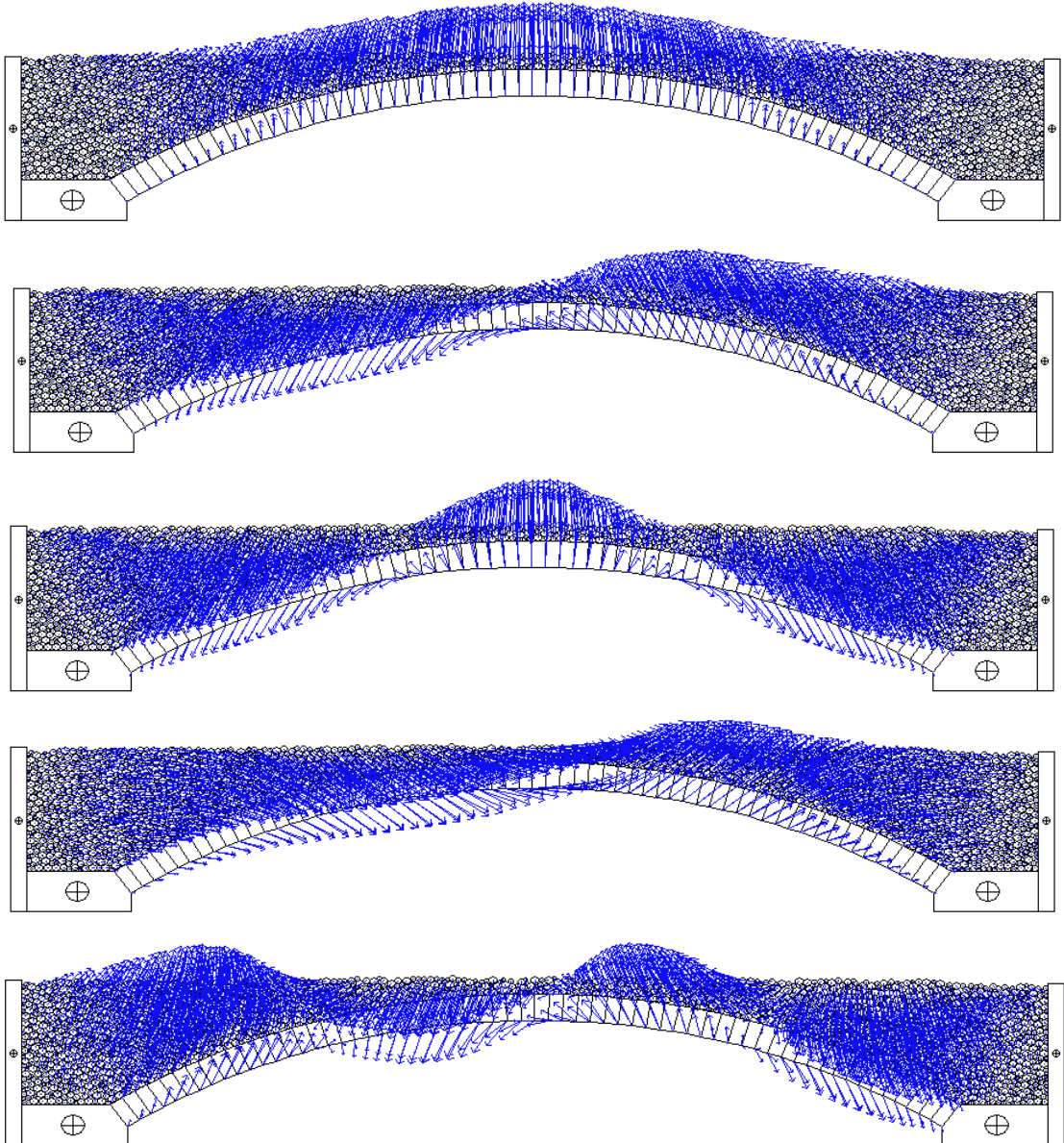


Figura 6-7: Primeiros 5 modos de vibração para a combinação 1, no formato 2.

Os factores χ_i , que permitiriam a calibragem do modelo numérico caso estivessem disponíveis valores para as frequências próprias medidos *in situ*, permitem avaliar o efeito da variação das rigidezes e tomam os valores 1, 10 e 100 criando um total de 5 combinações distintas (Comb.), ver a Tabela 6-1 (por lapso em (ROUXINOL 2007d) as

colunas dos factores χ_i estão trocadas).

Tabela 6-1: Caracterização da configuração deformada.

Comb.	χ_1	χ_2	Força não equilibrada	N.º de iterações	Reacção máxima	Flecha	Tensão de compressão	N.º de contactos
			N	—	kN	mm	MPa	—
1	1	1	0,9	130 000	445	9,694	1,306	5 394
2	10	1	0,8	200 000	438	9,905	1,314	5 416
3	100	1	4 250,0	200 000	444	9,920	1,310	5 401
4	1	10	5 140,0	200 000	444	0,944	1,274	5 349
5	10	10	1,0	330 000	443	0,924	1,244	5 407

A configuração deformada devida ao peso próprio é determinada para cada combinação por aplicação do método dos elementos discretos, com o passo de tempo crítico determinado pela fórmula de Morikawa (6.49) com $\varphi = 0,1$ em (6.32), ver secção 6.2. Seguidamente, para esta configuração, e para os contactos efectivos que ela define, é efectuada a análise de valores próprios. A convergência do método dos elementos discretos é atingida quando o valor absoluto da força não equilibrada é menor que o parâmetro de erro especificado, da ordem de 1,0 a 5000,0 N para este problema.

Nos modelos com rigidez de contacto pontual entre elementos circulares elevada a convergência requer um maior número de iterações. A Tabela 6-1 apresenta o valor da força não equilibrada final, o número de iterações e o valor da reacção máxima obtidos para cada combinação. A Tabela 6-1 apresenta ainda o deslocamento descendente do centro de massa do elemento discreto poligonal de fecho do arco, a tensão de compressão máxima no contacto pontual do lado do intradorso, entre o elemento discreto poligonal que representa a imposta e o que representa a primeira aduela do arco, e o número de contactos detectados (efectivos e virtuais) em cada simulação numérica. Na Tabela 6-2 encontram-se as primeiras 5 frequências próprias e as frequências angulares próprias máximas das combinações distintas.

O programa informático produz um ficheiro DXF™ que possibilita a visualização dos modos de vibração através de programas de CAD como o AutoCAD®. As Figura 6-6,

Figura 6-7 e Figura 6-8 ilustram os primeiros 5 modos de vibração para a combinação 1.

Tabela 6-2: Frequências próprias de vibração.

Comb.	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_{\max}	ω_{\max}
	Hz	Hz	Hz	Hz	Hz	Hz	rad/s
1	7,71	10,42	16,37	18,56	22,02	2599,32	16 332
2	10,76	17,06	25,93	32,73	37,13	7445,75	46 783
3	18,58	26,54	40,51	58,49	66,38	23483,31	147 550
4	19,77	19,89	32,69	37,44	38,98	5491,64	34 505
5	24,39	32,61	51,80	58,69	69,70	7349,93	46 181

6.2. Passo de tempo

Para integrar no tempo as equações diferenciais de movimento são utilizadas diferenças finitas, mais exactamente o método explícito das diferenças centrais. Este método de integração é condicionalmente estável, ou seja, requer a utilização de passos de tempo Δt inferiores a um passo de tempo dito crítico, Δt_{cr} , determinado a partir das propriedades de rigidez e de massa do sistema (BATHE 1982). A estabilidade e a precisão da integração são duas condições a ter em conta na determinação de Δt_{cr} . A estabilidade do processo iterativo requer que o raio espectral do operador linear recorrente (que estabelece o processo iterativo) seja inferior à unidade. Esta condição é cumprida se

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (6.32)$$

onde ω_{\max} é a frequência angular própria máxima não amortecida do sistema de N_{GDL} graus de liberdade. Por outro lado, a satisfação do critério de estabilidade garante geralmente a satisfação do critério de precisão.

Como o esforço computacional é directamente proporcional ao número de passos de tempo (iterações) necessários para obter a solução, a determinação de Δt_{cr} é muito importante. O período mínimo pode ser determinado resolvendo o problema de valores e vectores próprios, embora tal não seja usual porque a resolução deste problema se revela impraticável para sistemas com um número de graus de liberdade muito elevado.

Na secção 5.1 para além do problema estático é também analisado o caso dinâmico. Neste caso o amortecimento (de contacto) é proporcional à rigidez, e Δt_{cr} é dado por (BELYTSCHKO 1983)

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}} \left(\sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right) \quad (6.33)$$

onde ξ é o coeficiente de amortecimento relativo correspondente à frequência angular própria máxima.

6.2.1. Estimativas para a frequência angular própria máxima

A resolução do problema de valores e vectores próprios, sobretudo se o passo de tempo for actualizado em cada iteração, é pouco eficiente em sistemas com elevado número de graus de liberdade e em movimento constante como nos problemas de elementos discretos. Além disso, o algoritmo explícito utilizado pelo método dos elementos discretos, não necessita do estabelecimento de uma matriz de rigidez, pelo que várias simplificações podem ser consideradas, conduzindo a diferentes procedimentos para estimar ω_{max} . A seguir são enunciados os vários procedimentos apresentados em (LEMOS 1999) e (AZEVEDO 2003). Estes procedimentos ou métodos foram implementados no algoritmo de determinação do passo de tempo para a formulação do método dos elementos discretos com dois tipos de elementos discretos, nomeadamente:

(1) o método baseado na aplicação do teorema de Gerschgorin considerando para o efeito a matriz de rigidez do sistema \mathbf{K} e a matriz das quantidades de inércia do sistema \mathbf{M} ;

(2) o método baseado no teorema de Gerschgorin considerando para o efeito as matrizes de rigidez de todos os contactos de um elemento discreto \mathbf{K}_C e as quantidades de inércia desse elemento discreto \mathbf{m} ;

(3) o método semelhante ao anterior mas desprezando os termos não diagonais das submatrizes de rigidez;

(4) o método da soma simples;

(5) o método baseado na fórmula de Morikawa.

Seja \mathbf{A} uma matriz real quadrada de ordem N . Defina-se para cada uma das suas N linhas o intervalo fechado limitado pelos pontos $a_{ii} \mp \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, que é designado intervalo de Gerschgorin de \mathbf{A} . O Teorema de Gerschgorin afirma que qualquer valor próprio de \mathbf{A}

se encontra em, pelo menos, um dos N intervalos de Gerschgorin de \mathbf{A} .

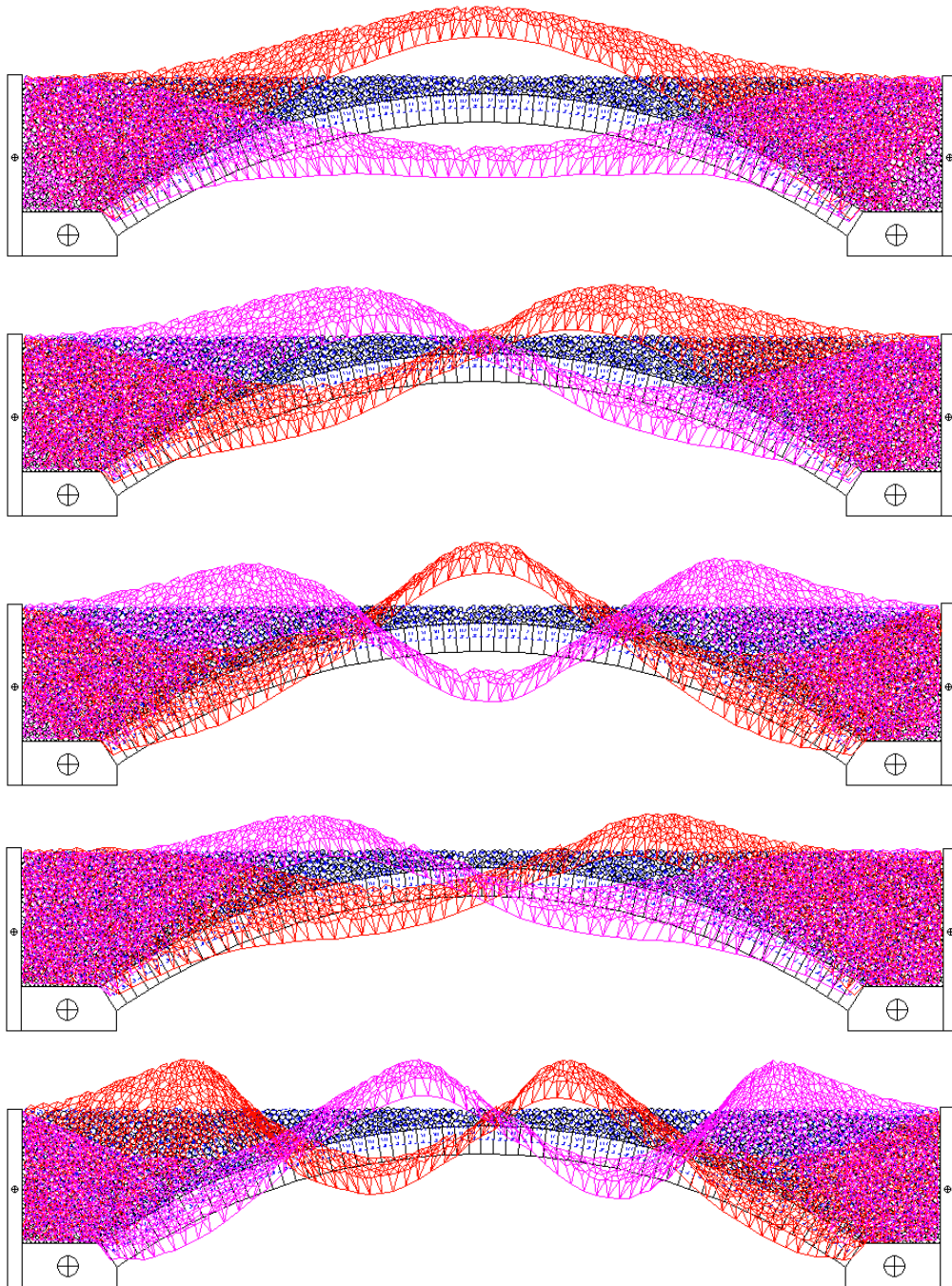


Figura 6-8: Primeiros 5 modos de vibração para a combinação 1, no formato 3.

Método (1)

O método baseado no teorema de Gerschgorin considerando a matriz de rigidez do sistema, \mathbf{K} , permite evitar a resolução do problema de valores e vectores próprios. No entanto, a construção da matriz de rigidez do sistema é inevitável. Note-se ainda que o teorema de Gerschgorin pressupõe que o problema de valores próprios está no formato padrão (6.26).

Por isso, antes da sua aplicação a matriz \mathbf{K} é multiplicada à esquerda e à direita pela matriz $\mathbf{M}^{-1/2}$, ver (6.27). A aplicação do teorema de Gerschgorin permite determinar um majorante para a frequência angular própria máxima. O valor λ_i relativo à linha i do sistema é calculado somando os valores absolutos dos elementos da linha i da matriz \mathbf{A} de (6.27), isto é,

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{N_{\text{GDL}}} |A_{ij}| \quad (6.34)$$

De acordo com o teorema de Gerschgorin o máximo dos valores λ_i é um majorante dos valores próprios do sistema, de sorte que, o majorante da frequência angular própria é então

$$\omega_{\text{Ger,max}} = \sqrt{\max(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_{\text{GDL}}})} \quad (6.35)$$

De modo a avaliar quais os graus de liberdade preponderantes, se os de translação ou os de rotação, são ainda identificadas as frequências máximas daqueles tipos, $\omega_{\text{Ger,tra,max}}$ e $\omega_{\text{Ger,rot,max}}$, ver método (2).

Método (2)

Os métodos (2) e (3) resultam da aplicação do teorema de Gerschgorin à matriz de rigidez do contacto \mathbf{K}_C , no sistema de coordenadas globais, e não à matriz de rigidez do sistema \mathbf{K} . Este procedimento justifica-se pela procura de um modo de vibração do sistema que conduza ao valor máximo para a frequência angular própria — este é um modo periódico no plano que pode ser descrito por dois elementos discretos iguais. Para tal são considerados todos os contactos pontuais efectivos de um dado elemento discreto para esse modo. A decomposição (6.15) com (6.16) no formato normalizado (6.26), com $\mathbf{A} = \mathbf{A}_C$ e $\mathbf{M} = \mathbf{m}$, permite escrever as submatrizes

$$\mathbf{A}_{C,ij} = (-1)^{i+j} \begin{bmatrix} \frac{n_{C,1}^2 k_n + n_{C,2}^2 k_s}{m} & \frac{n_{C,1} n_{C,2} (k_n - k_s)}{m} & \frac{-n_{C,1} t_{C,Ej} k_n + n_{C,2} n_{C,Ej} k_s}{\sqrt{m} \sqrt{I}} \\ \frac{n_{C,1} n_{C,2} (k_n - k_s)}{m} & \frac{n_{C,1}^2 k_s + n_{C,2}^2 k_n}{m} & \frac{-n_{C,1} n_{C,Ej} k_s - n_{C,2} t_{C,Ej} k_n}{\sqrt{m} \sqrt{I}} \\ \frac{-n_{C,1} t_{C,Ei} k_n + n_{C,2} n_{C,Ei} k_s}{\sqrt{m} \sqrt{I}} & \frac{-n_{C,1} n_{C,Ei} k_s - n_{C,2} t_{C,Ei} k_n}{\sqrt{m} \sqrt{I}} & \frac{t_{C,Ei} t_{C,Ej} k_n + n_{C,Ei} n_{C,Ej} k_s}{I} \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

onde $E_1 = \text{CMA}$ e $E_2 = \text{CMB}$. O valor λ_i correspondente a cada grau de liberdade é obtido somando os valores absolutos dos elementos da linha i das matrizes \mathbf{A}_C dos contactos do elemento discreto. As expressões para determinar λ_i associado a todos os contactos do elemento discreto são dadas por

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{tra}} &= \max(\lambda_{\text{tra},j}) \\ \lambda_{\text{rot}} &= \max(\lambda_{\text{rot},j}), \quad j = 1, 2\end{aligned}\quad (6.37)$$

com

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{tra},j} &= \sum_{C=1}^{N_{C,ED}} \left(\sum_{i=1}^3 |A_{C,11,ji}| + \sum_{i=1}^3 |A_{C,12,ji}| \right) \\ \lambda_{\text{rot},j} &= \sum_{C=1}^{N_{C,ED}} \left(\sum_{i=1}^3 |A_{C,j1,3i}| + \sum_{i=1}^3 |A_{C,j2,3i}| \right)\end{aligned}, \quad j = 1, 2 \quad (6.38)$$

onde $\lambda_{\text{tra},j}$ e $\lambda_{\text{rot},j}$ representam, respectivamente, os valores associados a um elemento discreto nas formas de translação e de rotação (a soma da primeira e da segunda linha é igual a soma da quarta e quinta linha, respectivamente, de \mathbf{A}_C). Os somatórios são estendidos a todos os $N_{C,ED}$ contactos do elemento discreto. Os majorantes das frequências angulares próprias nas formas de translação e de rotação são calculados por

$$\begin{aligned}\omega_{\text{Ger,tra}} &= \sqrt{\lambda_{\text{tra}}} \\ \omega_{\text{Ger,rot}} &= \sqrt{\lambda_{\text{rot}}}\end{aligned}\quad (6.39)$$

Percorrendo todos os N_{ED} elementos discretos, os majorantes das frequências máximas vêm dados por

$$\begin{aligned}\omega_{\text{Ger,tra,max}} &= \max(\omega_{\text{Ger,tra},1}, \omega_{\text{Ger,tra},2}, \dots, \omega_{\text{Ger,tra},N_{ED}}) \\ \omega_{\text{Ger,rot,max}} &= \max(\omega_{\text{Ger,rot},1}, \omega_{\text{Ger,rot},2}, \dots, \omega_{\text{Ger,rot},N_{ED}})\end{aligned}\quad (6.40)$$

O majorante da frequência a adoptar é

$$\omega_{\text{Ger,max}} = \max(\omega_{\text{Ger,tra,max}}, \omega_{\text{Ger,rot,max}}) \quad (6.41)$$

Método (3)

Desprezando os elementos envolvendo acoplamento translação-rotação a matriz de rigidez do contacto \mathbf{k}_C (6.9) no sistema de coordenadas locais escreve-se

$$\tilde{\mathbf{K}}_C = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 & -k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_n & 0 & 0 & -k_n & 0 \\ 0 & 0 & t_{C,CMA}^2 k_n + n_{C,CMA}^2 k_s & 0 & 0 & -t_{C,CMA} t_{C,CMB} k_n - n_{C,CMA} n_{C,CMB} k_s \\ -k_s & 0 & 0 & k_s & 0 & 0 \\ 0 & -k_n & 0 & 0 & k_n & 0 \\ 0 & 0 & -t_{C,CMA} t_{C,CMB} k_n - n_{C,CMA} n_{C,CMB} k_s & 0 & 0 & t_{C,CMB}^2 k_n + n_{C,CMB}^2 k_s \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

e no sistema de coordenadas globais escreve-se

$$\tilde{\mathbf{K}}_C = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{C,11} & \tilde{\mathbf{K}}_{C,12} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{C,21} & \tilde{\mathbf{K}}_{C,22} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

onde as submatrizes $\tilde{\mathbf{K}}_{C,ij}$ são iguais às submatrizes $\mathbf{K}_{C,ij}$ com excepção dos elementos $K_{C,ij,13}$, $K_{C,ij,23}$, $K_{C,ij,31}$ e $K_{C,ij,32}$ que são nulos.

Aplicando o teorema de Gerschgorin a $\tilde{\mathbf{K}}_C$ no formato padrão (6.26)

$$\tilde{\mathbf{A}}_{C,ij} = (-1)^{i+j} \begin{bmatrix} \frac{n_{C,1}^2 k_n + n_{C,2}^2 k_s}{m} & \frac{n_{C,1} n_{C,2} (k_n - k_s)}{m} & 0 \\ \frac{n_{C,1} n_{C,2} (k_n - k_s)}{m} & \frac{n_{C,1}^2 k_s + n_{C,2}^2 k_n}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t_{C,Ei} t_{C,Ej} k_n + n_{C,Ei} n_{C,Ej} k_s}{I} \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

as expressões para determinar os valores λ_i são similares a (6.37) com as somas de (6.38)

dadas por ($\mathbf{A}_C = \tilde{\mathbf{A}}_C$)

$$\begin{aligned} \lambda_{tra,1} &= \frac{2}{m} \sum_{C=1}^{N_{C,ED}} \left[\left| n_{C,1}^2 k_n + n_{C,2}^2 k_s \right| + \left| n_{C,1} n_{C,2} (k_n - k_s) \right| \right] \\ \lambda_{tra,2} &= \frac{2}{m} \sum_{C=1}^{N_{C,ED}} \left[\left| n_{C,1}^2 k_s + n_{C,2}^2 k_n \right| + \left| n_{C,1} n_{C,2} (k_n - k_s) \right| \right] \\ \lambda_{rot,1} &= \frac{1}{I} \sum_{C=1}^{N_{C,ED}} \left[\left| t_{C,CMA}^2 k_n + n_{C,CMA}^2 k_s \right| + \left| t_{C,CMA} t_{C,CMB} k_n + n_{C,CMA} n_{C,CMB} k_s \right| \right] \\ \lambda_{rot,2} &= \frac{1}{I} \sum_{C=1}^{N_{C,ED}} \left[\left| t_{C,CMB}^2 k_n + n_{C,CMB}^2 k_s \right| + \left| t_{C,CMA} t_{C,CMB} k_n + n_{C,CMA} n_{C,CMB} k_s \right| \right] \end{aligned} \quad (6.45)$$

Os majorantes das frequências próprias angulares são determinados utilizando (6.39), (6.40) e (6.41).

Para sistemas constituídos por elementos circulares de igual raio Azevedo (2003) apresenta expressões similares às de (6.45), isto é, as duas primeiras são iguais e a terceira e quarta, sendo $t_{C,CMA} = t_{C,CMB} = 0$ e $n_{C,CMA} = n_{C,CMB}$, simplificam-se vindo

$$\lambda_{\text{rot},1} = \lambda_{\text{rot},2} = \frac{1}{I} \sum_{C=1}^{N_{C,ED}} \left[\left| n_{C,CMA}^2 k_s \right| + \left| n_{C,CMA} n_{C,CMB} k_s \right| \right] \approx \frac{1}{I} 2 \sum_{C=1}^{N_{C,ED}} R^2 k_s \quad (6.46)$$

uma vez que $n_{C,CMA} = n_{C,CMB} \approx R$.

Azevedo (2003) apresenta também uma aplicação dos métodos 2 e 3 a sistemas constituídos por elementos circulares cuja matriz de rigidez do contacto é similar a (6.9). Azevedo conclui que a utilização da matriz de rigidez completa dos contactos do elemento discreto conduz geralmente a um valor para $\omega_{\text{Ger,max}}$ superior ao obtido considerando o problema de valores e vectores próprios e que a utilização do método (3) conduz a um valor para $\omega_{\text{Ger,max}}$ inferior ao obtido considerando o método (2).

Método (4)

O método da soma simples é semelhante aos métodos 2 e 3 e permite estimar ω_{max} sem construir a matriz de rigidez do contacto (LEMOS 1999). Assim, nos somatórios só são consideradas as parcelas das rigidezes normal e tangente segundo o sistema de coordenadas (t_C, n_C) associado ao contacto. As expressões para determinar, de forma conservativa, o majorante do valor próprio associado a cada grau de liberdade são

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{tra}} &= \frac{1}{m} k_{\text{tra}} \\ \lambda_{\text{rot}} &= \frac{1}{I} k_{\text{rot}} \end{aligned} \quad (6.47)$$

onde

$$\begin{aligned} k_{\text{tra}} &= 2 \sum_{C=1}^{N_{C,ED}} (k_n + k_s) \\ k_{\text{rot}} &= \begin{cases} 2R^2 \sum_{C=1}^{N_{C,ED}} (k_s + k_n) & \Leftarrow \text{EDP} \\ 2R^2 \sum_{C=1}^{N_{C,ED}} k_s & \Leftarrow \text{EDC} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.48)$$

Note-se que o factor 2 nas expressões (6.47) se deve à inclusão da rigidez de ambos os

elementos discretos em contacto, consequência da aplicação do teorema de Gerschgorin. Para os elementos discretos circulares a rigidez associada ao grau de liberdade de rotação, k_{rot} , depende apenas da rigidez tangencial, uma vez que, para o modo de vibração envolvendo unicamente a rotação, a força normal de contacto não introduz momento. As expressões (6.47) são melhor compreendidas se se atender aos modos de deformação representados na Figura 6-9 para o caso de uma distribuição regular rectangular de elementos discretos circulares. A estimativa para $\omega_{ss,max}$ obtém-se através da expressão (6.41).

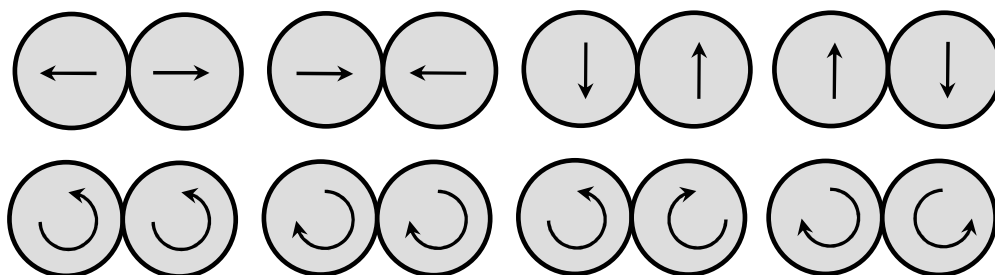


Figura 6-9: Modos de deformação de dois elementos discretos circulares em contacto.

Método (5)

A fórmula simples de Morikawa (1993), permite estimar ω_{max} por consideração da rigidez pontual máxima k_{max} e da massa mínima m_{min} de todo o sistema, isto é

$$\omega_{Mor,max} = \frac{1}{\varphi} \sqrt{\frac{k_{max}}{m_{min}}} \tag{6.49}$$

onde o factor $\varphi \in]0,1]$ reflecte o facto de cada elemento discreto apresentar $N_{C,ED}$ contactos e de a rigidez de cada um desses contactos surgir duas vezes de acordo com a aplicação do teorema de Gerschgorin. Habitualmente φ toma o valor de 0,1.

6.2.2. Demonstração do teorema de Gerschgorin

Bathe (1982) apresenta uma demonstração muito simples do procedimento baseado no teorema de Gerschgorin utilizado nas secções anteriores. Para o problema de valores próprios $\mathbf{A}y = \lambda y$ são aplicadas normas a ambos os membros

$$\|\mathbf{A}y\| = \|\lambda y\| \tag{6.50}$$

Recordando algumas condições satisfeitas pelas normas

$$\begin{aligned}\|\lambda y\| &= |\lambda| \|y\| \\ \|\mathbf{A}y\| &\leq \|\mathbf{A}\| \|y\|\end{aligned}\tag{6.51}$$

e substituindo em (6.50)

$$\|\mathbf{A}\| \|y\| \geq |\lambda| \|y\|\tag{6.52}$$

ou seja,

$$|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|\tag{6.53}$$

Quer isto dizer que qualquer valor próprio de \mathbf{A} tem valor absoluto menor ou igual à norma de \mathbf{A} . Ora o valor próprio com maior valor absoluto define o raio espectral de \mathbf{A} , $\vartheta(\mathbf{A}) = \max |\lambda_i|$. Deste modo

$$\vartheta(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|\tag{6.54}$$

Neste caso, a norma mais conveniente a utilizar para a matriz \mathbf{A} é a norma infinita, porque determina um valor superior às restantes. Esta norma é determinada da seguinte forma

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^N |A_{ij}|\tag{6.55}$$

sendo N o número de colunas da matriz \mathbf{A} que para o problema em estudo é dada por (6.27).

6.2.3. Passos de tempo críticos obtidos pelos diferentes métodos

Considerando novamente o exemplo apresentado na secção 6.1.5, foram determinadas estimativas para o passo de tempo crítico através dos cinco métodos expeditos descritos na secção 6.2.1, cujos resultados se exibem na Tabela 6-3. A coluna 3 contém os valores do passo de tempo crítico $\Delta t_{cr,0}$ obtidos por resolução do problema de valores próprios e por (6.32). Na determinação do passo de tempo pelo quinto método considerou-se $\varphi = 0,1$.

Verifica-se que as estimativas para o passo de tempo crítico proporcionadas pelos métodos expeditos apresentados na subsecção 6.2.1 são todas admissíveis, uma vez que, são inferiores ao passo de tempo obtido por solução do problema de valores próprios. Além disso, conclui-se que o valor de φ considerado para calcular $\Delta t_{cr,5}$ é demasiado reduzido por conduzir a resultados demasiado conservativos.

A análise da Figura 6-10 que representa os resultados exibidos na Tabela 6-3 permite

verificar mais facilmente que os métodos 3 e 4 de uma maneira geral fornecem valores superiores aos do método 1 e 2. A consideração da matriz de rigidez do contacto “desacoplada” do método 3 também parece revelar-se mais eficiente do que a matriz de rigidez do contacto completa do método 2, tal como observou Azevedo. Por outro lado, verifica-se que o método da soma simples, método 4, conjuga resultados bons com uma implementação simples visto que não requer a construção da matriz de rigidez do contacto.

Tabela 6-3: Passo de tempo crítico para diferentes combinações e métodos.

Comb.	ω_{\max}	$\Delta t_{cr,0}$	$\Delta t_{cr,1}$	$\Delta t_{cr,2}$	$\Delta t_{cr,3}$	$\Delta t_{cr,4}$	$\Delta t_{cr,5}$
	rad · s ⁻¹	10 ⁻⁶ s	10 ⁻⁶ s	10 ⁻⁶ s	10 ⁻⁶ s	10 ⁻⁶ s	10 ⁻⁶ s
1	16 332	122,459	26,716	22,499	99,815	97,290	17,286
2	46 783	42,751	8,523	7,302	32,960	35,071	14,461
3	147 548	13,555	2,800	2,360	10,850	11,091	4,573
4	34 505	57,963	14,077	14,141	38,282	38,052	5,466
5	46 181	43,308	8,677	7,346	33,297	30,766	5,466

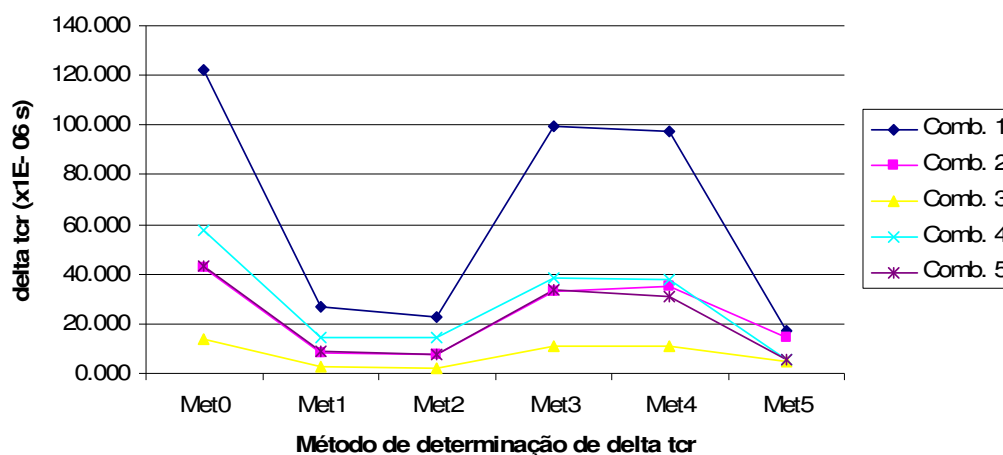


Figura 6-10: Passo de tempo crítico para diferentes métodos.

6.3. Instabilidade numérica na forma de *arrested instability*

Numa análise não linear, utilizando um método explícito de integração no tempo, a monitorização do equilíbrio energético permite detectar a ocorrência do fenómeno de instabilidade numérica conhecido por *arrested instability* (instabilidade interrompida), evidenciado no decorrer da análise por, após um período de instabilidade, a solução voltar a

estabilizar (BELYTSCHKO 1983) e (AZEVEDO 2003). Sem aquele tipo de monitorização, a ocorrência deste fenómeno poderia passar despercebida, podendo originar erros na solução na ordem dos 10 a 50 por cento.

A ocorrência de uma instabilidade interrompida está associada à violação da lei da conservação da energia. Assim, para despistar a ocorrência de uma instabilidade interrompida Belytschko *et al.* (1976) propuseram que, no decorrer do processo iterativo, seja monitorizada a condição

$$|E| \leq \delta \|E\| \quad (6.56)$$

ou seja,

$$|E_k + E_p - W| \leq \delta (|E_k| + |E_p| + |W|) \quad (6.57)$$

onde o primeiro membro representa o valor absoluto da energia total e o segundo representa a sua norma de Hölder (ℓ_1) afectada por um parâmetro positivo de valor próximo de zero. Nestas expressões E é a energia total do sistema composta pelas componentes (conservativas) de energia cinética, E_k , energia potencial elástica, E_p , e trabalho realizado pelas forças de gravidade e variáveis, W .

Belytschko *et al.* (1976, 1983) verificaram que para valores do parâmetro δ menores que 0,01 — 0,02 o método dos elementos finitos é estável e que para valores na ordem de 0,05 pode ocorrer uma instabilidade interrompida.

Para análises efectuadas com o método dos elementos discretos, Petrinic (1996) e Azevedo (2003), adicionam às parcelas conservativas anteriormente referidas, a energia inelástica E_i , associada a escorregamentos irreversíveis entre elementos discretos e o trabalho realizado pelas forças de amortecimento W_D . Estas duas novas parcelas não afectam o segundo membro da nova condição de conservação da energia,

$$|E + E_i + W_D| \leq \delta \|E\| \quad (6.58)$$

na qual Azevedo utilizou, com sucesso, o valor de 0,02 para δ .

Nas secções que se seguem são estabelecidas as parcelas energéticas consideradas no algoritmo desenvolvido. Considera-se um sistema constituído por N_{ED} elementos discretos

com N_C contactos efectivos.

6.3.1. Energia cinética e energia potencial elástica

No método das diferenças centrais a energia cinética no instante t é dada, aproximadamente, pela média das energias cinéticas nos instantes $t - \Delta t / 2$ e $t + \Delta t / 2$,

$$E_k^t = \frac{1}{4} \sum_{ED=1}^{N_{ED}} \left[m \sum_{i=1}^2 \left(\left(\dot{u}_{CM,i}^{t-\Delta t/2} \right)^2 + \left(\dot{u}_{CM,i}^{t+\Delta t/2} \right)^2 \right) + I \left(\left(\dot{\theta}_i^{t-\Delta t/2} \right)^2 + \left(\dot{\theta}_i^{t+\Delta t/2} \right)^2 \right) \right]_{ED} \quad (6.59)$$

A energia potencial elástica linear do sistema no instante t é dada por

$$E_p^t = \frac{1}{2} \sum_{C=1}^{N_C} \left(\frac{(F_{C,n}^t)^2}{k_n} + \frac{(F_{C,s}^t)^2}{k_s} \right) \quad (6.60)$$

6.3.2. Energia Inelástica

A energia dissipada até ao instante t , E_i^t , devido à ocorrência de deformações irreversíveis (escorregamentos) ao nível dos contactos, $u_{inel,C,s}^t$, é determinada pela soma da energia dissipada em todos os incrementos de tempo, através da expressão

$$E_i^t = \sum_{C=1}^{N_C} E_{i,C}^t \quad (6.61)$$

onde a energia dissipada no contacto $E_{i,C}^t$ é dada por

$$E_{i,C}^t = \begin{cases} 0 & \Leftarrow t = 0 \\ E_{i,C}^{t-\Delta t} + \Delta E_{i,C}^t & \Leftarrow t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots \end{cases} \quad (6.62)$$

O incremento de energia dissipada no contacto C , $\Delta E_{i,C}^t$, é dado por

$$\Delta E_{i,C}^t = -\frac{1}{2} \left(F_{C,s}^{t-\Delta t} + F_{C,s}^t \right) \Delta u_{inel,C,s}^t \leq 0 \quad (6.63)$$

onde o incremento de deformação inelástica no instante t , $\Delta u_{inel,C,s}^t$, é obtido por

$$\Delta u_{inel,C,s}^t = \Delta u_{C,s}^t - \Delta u_{elas,C,s}^t \quad (6.64)$$

onde $\Delta u_{C,s}^t$ é o incremento de deformação total no instante t e

$$\Delta u_{elas,C,s}^t = \frac{\Delta F_{C,s}^t}{k_s} \quad (6.65)$$

é o incremento de deformação elástica no instante t com o incremento da força tangencial, $\Delta F_{C,s}^t$, dado por

$$\Delta F_{C,s}^t = F_{C,s}^t - F_{C,s}^{t-\Delta t} \quad (6.66)$$

6.3.3. Trabalho realizado pelas forças de gravidade e variáveis

O trabalho realizado pelas forças de gravidade e variáveis apresenta uma parcela correspondente ao trabalho realizado pelas forças de gravidade, G_i , e outra ao trabalho realizado pelas N_Q forças variáveis, Q_i ,

$$W^t = W_G^t + W_Q^t \quad (6.67)$$

onde,

$$W_G^t = \begin{cases} 0 & \Leftarrow t = 0 \\ W_G^{t-\Delta t} + \sum_{ED=1}^{N_{ED}} \sum_{i=1}^2 [P_i \Delta u_{CM,i}^t]_{ED} & \Leftarrow t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots \end{cases} \quad (6.68)$$

e

$$W_Q^t = \begin{cases} 0 & \Leftarrow t = 0 \\ W_Q^{t-\Delta t} + \sum_{Q=1}^{N_Q} \left[M^t \Delta \theta^t + \sum_{i=1}^2 Q_i^t \Delta u_{CM,i}^t \right]_Q & \Leftarrow t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots \end{cases} \quad (6.69)$$

em que M^t é o momento no centro de massa devido a Q_1^t e Q_2^t .

6.3.4. Trabalho realizado pelo amortecimento fictício

O trabalho realizado pelas forças e momentos de amortecimento fictício é determinado por

$$W_D^t = \begin{cases} 0 & \Leftarrow t = 0 \\ W_D^{t-\Delta t} + \sum_{ED=1}^{N_{ED}} \sum_{i=1}^2 [F_{D,i}^t \Delta u_{CM,i}^t + M_D^t \Delta \theta^t]_{ED} & \Leftarrow t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots \end{cases} \quad (6.70)$$

$F_{D,i}^t$ e M_D^t são dados por (5.38) para o amortecimento global e por (5.49) e (5.50) para o amortecimento local.

7. Geração das malhas de elementos discretos

A caracterização da geometria de estruturas em alvenaria pode ser feita seguindo vários métodos, nos quais se destacam os convencionais, baseados na leitura de peças desenhadas (se existentes) e em medições através de fita métrica, taqueómetro e distanciómetro laser, e os não convencionais, baseados na fotografia, correntemente designados por fotogrametria, (COSTA 2002) e (VALENÇA 2006), e nos ensaios *in situ*, por exemplo, extracção de tarolos e ultra-sons (KOMEYLI-BIRJANDI 1986).

Atendendo aos vários métodos existentes, a definição da geometria da estrutura, sobre a qual o algoritmo criado opera, pode ser feita a partir de rotinas de geração automática ou da leitura de ficheiros ASCII previamente estabelecidos (ROUXINOL 2007^a). O arco de volta perfeita ou segmentado, o arcobotante, o pilar, o muro, o muro de tímpano e o enchimento do arco, de distribuição regular ou aleatória, são exemplos de elementos constituintes de uma ponte em arco de alvenaria, que podem ser gerados automaticamente. Exemplos de ficheiros ASCII referidos são os ficheiros do tipo DXF ou do tipo documento de texto no ambiente Windows da Microsoft.

A geometria da submalha de elementos discretos circulares, dependendo do tipo de enchimento, admite distribuições (1) regulares, rectangulares ou hexagonais, ou (2) aleatórias, de raio constante ou variável. A geração da submalha de elementos discretos circulares de distribuição aleatória requer a definição de (1) uma área rectangular, designada por domínio de actuação, fora da qual não são admitidos elementos discretos circulares e de (2) um conjunto de subdomínios, denominados por domínios de inibição, fechados convexos (circulares, rectangulares, triangulares, arcos) para descrever zonas interiores à referida área rectangular onde também não são admitidos elementos discretos circulares. Para garantir que um valor prescrito da porosidade ou do estado de tensão é atingido, os elementos discretos circulares são inicialmente distribuídos com um raio inferior ao efectivo, efectuando-se posteriormente a sua expansão e a aplicação do método dos elementos discretos. Após a definição completa da geometria da estrutura esta é visualizada numa janela gráfica convencional ou no programa AutoCAD[®] (AUTOCAD 2006) através de uma macro VBA (*Visual Basic for Applications*) incorporada, ver apêndice C.

7.1. Definição da malha de elementos discretos poligonais

A especificação de cada elemento discreto poligonal inclui o seu número de ordem, a quantidade de vértices que possui, e a numeração e coordenadas destes, como foi referido na secção 3.1. As restantes propriedades, designadamente, a área, o centro de massa, a massa e a inércia, são determinadas posteriormente através de rotinas próprias, ver a secção 3.3. No método dos elementos discretos os elementos poligonais são definidos individualmente, em oposição ao método dos elementos finitos. Por exemplo, numa malha de elementos finitos um nó comum a 4 elementos finitos é perfeitamente definido pela entrada simples das suas coordenadas e numeração, ao passo que numa malha de elementos discretos ao “nó comum” são atribuídas coordenadas e número de ordem 4 vezes, uma vez para cada um dos elementos discretos poligonais que o contêm. Por consequência, os algoritmos de pré e pós-processamento disponíveis para ler malhas de elementos finitos, por exemplo o GiD[®] (GID 1998), não são adequados. Para definir a malha de elementos discretos poligonais existem várias possibilidades:

- (1) através da leitura de um ficheiro ASCII do tipo documento de texto, criado pelo utilizador, onde, associadas a vários códigos, se encontram guardadas as coordenadas dos vértices de cada elemento discreto poligonal e respectiva

numeração;

- (2) através da leitura de um ficheiro ASCII do tipo DXF, criado com o auxílio do programa AutoCAD (numa das versões 14/LT 98/LT 97), onde, além de outras informações, se encontram guardadas as coordenadas dos vértices de cada elemento discreto poligonal. O facto de guardar o desenho no formato DXF na versão 14/LT 98/LT 97 deve-se a um requisito intrínseco ao algoritmo desenvolvido, isto é o algoritmo foi concebido para aquela versão de formatação;
- (3) através de algoritmos de geração automática.

De seguida são tecidas algumas considerações acerca das duas últimas possibilidades.

7.1.1. Algoritmo para extrair informação relativa aos elementos discretos poligonais de um ficheiro DXF

O algoritmo desenvolvido permite ler ficheiros ASCII do tipo DXF se no programa AutoCAD o desenho de cada elemento discreto (poligonal ou circular), for feito, na mesma camada, no plano xy e com qualquer cor para os elementos discretos com os três movimentos livres, excepto a cor rosa (cor número 6) que identifica os domínios de inibição, a cor vermelha (cor número 1) que identifica os elementos discretos com os movimentos de translação e de rotação restringidos e a cor azul (cor número 5) que identifica os elementos discretos que suportam uma acção externa.

Os elementos discretos poligonais devem ser desenhados com o auxílio do comando *PoliLinha 3D* que gere a entidade *PoliLinha*. Os pontos (no máximo 5) da *PoliLinha* seguem o sentido retrógrado. O comando *PoliLinha 3D* é finalizado com o comando *Fechar*, para garantir a forma fechada. O ficheiro DXF contém, além de outras informações, que neste contexto não são relevantes, informação sobre a entidade *PoliLinha*, particularmente, as suas coordenadas. A obtenção das coordenadas é feita através do reconhecimento de vários códigos, designadamente, o *POLYLINE*, o *AcDbEntity*, o *VERTEX*, o *AcDb3dPolylineVertex*, o *SEQEND* e o *EOF* que seguem uma sequência lógica. O algoritmo abre o ficheiro do tipo DXF e lê linha a linha, o conjunto de caracteres inscritos. Encontrado um conjunto de caracteres idêntico a *POLYLINE* é activado um apontador que indica que se está em presença de uma entidade *PoliLinha*. O próximo

conjunto de caracteres de interesse a ser lido é *AcDbEntity*. Efectivamente, se a terceira linha que se lhe segue é igual a 62, quer dizer que existe uma quarta linha com a informação da cor da *PoliLinha*: se a terceira linha é igual a 100 a quarta linha não existe. Se a quarta linha existe e o seu número for igual a 6 quer dizer que se está em presença de um domínio e não de um elemento discreto poligonal pelo que a rotina vai novamente à procura de um conjunto de caracteres igual a *POLYLINE*. A seguir, independentemente da informação sobre a cor, a numeração do elemento discreto poligonal é actualizada. Contudo, se a informação sobre a cor existir e se for igual a 5 ou 1, então é identificado um elemento discreto poligonal, com uma acção externa ou com os três movimentos restringidos, respectivamente. O passo seguinte é identificar um conjunto de caracteres igual a *VERTEX* para activar a contagem do número de vértices do elemento discreto poligonal. Posteriormente, a segunda, quarta e sexta linhas a seguir à linha com o conjunto de caracteres igual a *AcDb3dPolylineVertex*, correspondem às coordenadas $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$ e $z \equiv x_3$ do vértice. Voltando a encontrar um conjunto de caracteres igual a *VERTEX*, a contagem dos vértices é actualizada e são guardadas as coordenadas do vértice seguinte. Se em vez de *VERTEX* se ler *SEQEND*, tal significa que não existem mais vértices nesta *PoliLinha*. Se à leitura seguinte corresponder *POLYLINE*, uma nova *PoliLinha* é lida. Ao conjunto de caracteres EOF corresponde o fim do processo de leitura do ficheiro DXF. Finalmente, se o desenho tiver sido projectado numa vista de frente/posterior (coordenadas y nulas, isto é, o plano $xy \equiv x_1x_2$ não é definido) é feita uma permutação de coordenadas entre y e z .

7.1.2. Tipos de geração automática de malhas de elementos discretos poligonais

Os algoritmos de geração automática dos elementos de arco de volta perfeita e de parede, com e sem sobreposição, foram desenvolvidos por Vieira (1997) e por Sincraian (2001) no LNEC. Os algoritmos de geração automática dos elementos de arco segmentado e de arcobotante seguem basicamente o algoritmo de geração automática do elemento de arco de volta perfeita. O algoritmo de geração da malha de parede de tímpano é uma junção do algoritmo de geração automática do elemento parede com o algoritmo de leitura do ficheiro do tipo DXF. Numa primeira fase é feita a geração automática do elemento parede, que irá constituir o muro de tímpano, e do elemento arco de volta perfeita ou do elemento arco

segmentado. Estes dois elementos são lidos no programa AutoCAD, através de uma macro VBA desenvolvida para o efeito, e são feitas as alterações necessárias. O desenho é guardado em formato DXF na versão 14/LT 98/LT 97. Este ficheiro do tipo DXF é posteriormente utilizado para criar um ficheiro do tipo documento de texto contendo toda a informação sobre a numeração dos elementos discretos poligonais e dos vértices, incluindo as suas coordenadas, ou para criar directamente o modelo. A Figura 7-1 mostra alguns exemplos de geração automática de subestruturas de elementos discretos.

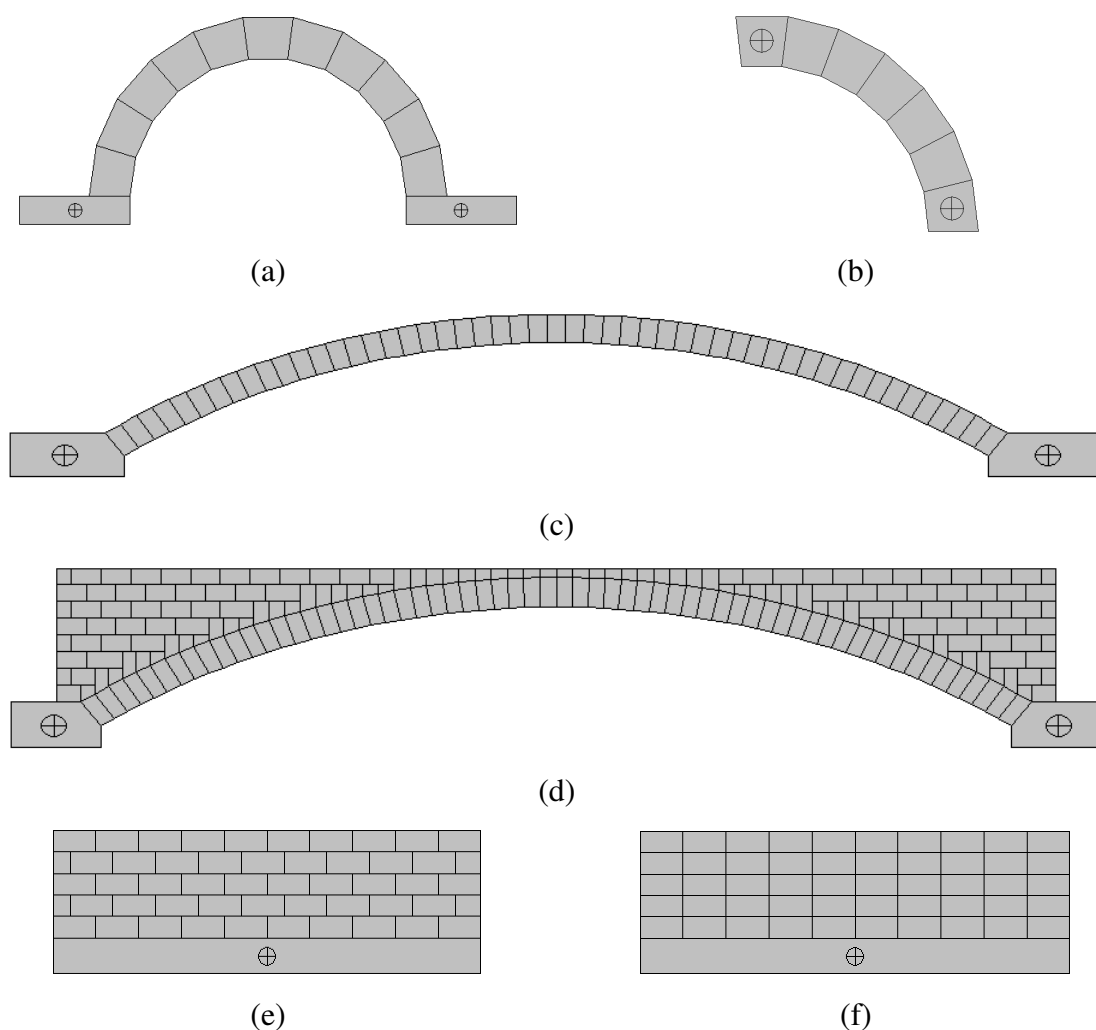


Figura 7-1: Geração automática de subestruturas de elementos discretos: (a) arco de volta perfeita; (b) arcobotante; (c) arco segmentado; (d) arco segmentado com os muros de tímpano; (e) parede com sobreposição; e (f) parede sem sobreposição.

7.2. Definição da malha de elementos discretos circulares

A especificação de cada elemento discreto circular inclui o seu número de ordem, o raio e as coordenadas do centro de massa, ver a secção 3.1. As restantes propriedades são

determinadas posteriormente, como referido anteriormente para o caso dos elementos discretos poligonais, ver secção 3.3.

7.2.1. Algoritmo para extrair informação de um ficheiro DXF

No programa AutoCAD o desenho de cada elemento discreto circular segue os pressupostos anteriormente referidos para o desenho de cada elemento discreto poligonal. Os elementos discretos circulares são desenhados com o auxílio do comando *Circunferência* que gere a entidade com a mesma designação. São admitidos quaisquer subcomandos para aquele comando.

Depois de guardar o desenho no formato e na versão referidos na secção 7.1.1, a obtenção das coordenadas é feita através do reconhecimento de vários códigos, particularmente, o *CIRCLE*, *AcDbEntity*, *AcDbCircle*, *ENDSEC* e *EOF* que cumprem uma sequência lógica. Após a abertura do ficheiro do tipo DXF o algoritmo percorre várias linhas até detectar o conjunto de caracteres *CIRCLE*, sendo activado um apontador para indicar esta detecção.

A numeração do centro de massa do elemento discreto circular é actualizada. Segue-se a identificação do conjunto de caracteres *AcDbEntity*. Se o conjunto de caracteres da terceira linha a seguir a *AcDbEntity* for igual a 62, então existe uma quarta linha com a identificação da cor. Um número de cor igual a 1 ou a 5, indica, respectivamente, que o elemento discreto circular está restringido ou está submetido a uma acção externa. Continuando a leitura do ficheiro o conjunto de caracteres *AcDbCircle* identifica as coordenadas do centro da circunferência. As coordenadas x , y e z correspondem, respectivamente, à segunda, quarta e sexta linha a seguir a *AcDbCircle* e a oitava linha corresponde ao raio.

O conjunto de caracteres *ENDSEC* indica o fim da informação sobre o EDC e *EOF* indica o fim do ficheiro. Ao contrário do caso de leitura dos elementos discretos poligonais, se o desenho tiver sido projectado numa vista de topo/base é efectuada uma permutação de coordenadas entre y e z . A macro VBA referida permite também representar a malha de elementos discretos circulares no programa AutoCAD.

7.3. Geração automática de malhas de elementos discretos circulares

Foram produzidos dois grupos de rotinas para geração automática de malhas de elementos discretos circulares. Um relativo às malhas de distribuição regular rectangular (Figura 7-2.a) e hexagonal (Figura 7-2.b), e outro relativo às malhas de distribuição aleatória (Figura 7-3), apresentadas na secção 7.4.

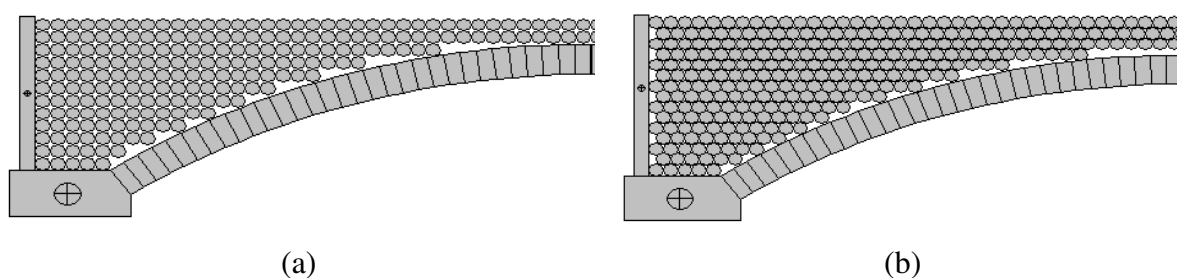


Figura 7-2: Malhas de EDC de distribuição regular (a) rectangular e (b) hexagonal.

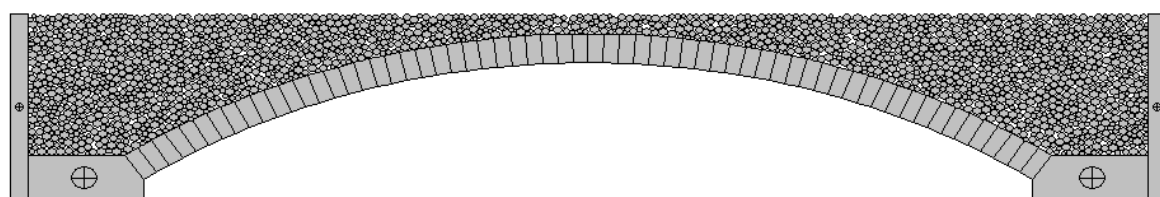


Figura 7-3: Malha de EDC de distribuição aleatória.

Para as malhas de distribuição regular são necessários os seguintes parâmetros de entrada: os números de linhas, N_{x2} , e de colunas, N_{x1} , as coordenadas do centro de massa do elemento discreto circular ($p=1$) pertencente à primeira linha e à primeira coluna, $x_{CM,p,i}$, o raio R , as restrições de movimento (matriz \mathbf{B}), a espessura (por defeito unitária) e o tipo de material.

O índice p indica a numeração do elemento discreto circular ($p=1,2,\dots,N_{EDCG}$, onde N_{EDCG} é o número de elementos discretos circulares da geração). Os elementos discretos circulares são numerados sequencialmente a partir do canto inferior esquerdo, crescendo para a direita e para cima.

Para a malha com distribuição regular rectangular as coordenadas dos centros de massa dos elementos circulares são dadas por

$$\begin{aligned}
 p &= (i-1)N_{x1} + j \\
 x_{CM,p,1} &= x_{CM,1,1} + 2R(j-1) \\
 x_{CM,p,2} &= x_{CM,1,2} + 2R(i-1)
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

com $i = 1, 2, \dots, N_{x2}$ e $j = 1, 2, \dots, N_{x1}$.

A Figura 7-4 mostra uma malha gerada desta forma e submetida a um ciclo de iterações para equilibrar o peso próprio.

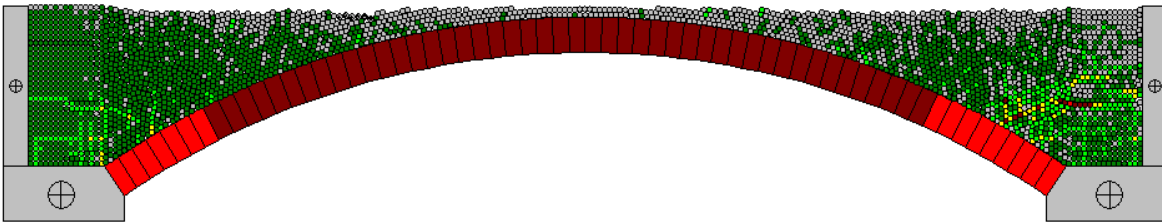


Figura 7-4: Malha de elementos discretos circulares de distribuição regular rectangular

Para a malha com distribuição regular hexagonal as coordenadas dos centros de massa dos elementos circulares são dadas por

$$\begin{aligned}
 p &= (i-1)N_{x1} + j \\
 x_{CM,p,1} &= x_{CM,1,1} + \frac{1+(-1)^i}{2}R + 2R(j-1) \\
 x_{CM,p,2} &= x_{CM,1,2} + R(i-1)\sqrt{3}
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

com $i = 1, 2, \dots, N_{x2}$ e $j = 1, 2, \dots, N_{x1}$.

Caso haja domínios de inibição (Figura 7-2) o algoritmo não coloca elementos discretos circulares no seu interior e o número de linhas e de colunas é determinado automaticamente, ver a secção 7.4.

7.4. Método da expansão do raio

7.4.1. Sistemas de elementos discretos circulares

O método de geração da malha de elementos discretos circulares por expansão do raio (POTYONDY 2004) é iniciado atribuindo coordenadas aleatórias num dado domínio de preenchimento a um número prescrito de elementos discretos circulares, com raio de valor inferior àquele que virá a ser o valor final (normalmente metade). O número prescrito de elementos discretos circulares deve garantir a obtenção de uma porosidade ou de um estado

de tensão específico (neste trabalho este último requisito não foi considerado). Só é colocado um novo elemento discreto circular se não se sobrepuser a outro nem ao limite do domínio de preenchimento. O raio inicial deve ser suficientemente inferior ao final de modo a que seja possível colocar a totalidade do número prescrito de elementos discretos circulares naquele domínio. Seguidamente, como o próprio nome do método indica, o raio é incrementado progressivamente até ao seu valor final. Após cada incremento do valor do raio é determinada uma configuração admissível através do método dos elementos discretos. O incremento progressivo do raio reflecte-se na redução da porosidade concluindo-se este processo quando ela atinge o valor pretendido.

Se os domínios de preenchimento apresentam uma geometria complexa os incrementos do raio devem ser mais suaves. Se o domínio de preenchimento apresentar zonas com diâmetro interno muito reduzido quando comparado com a dimensão máxima dos elementos discretos, por exemplo, entre o extradorso do arco e o pavimento da ponte, a disposição aleatória dos elementos discretos circulares pode levantar algumas dificuldades. Isto é, em espaços limitados a redistribuição dos elementos discretos circulares após um incremento do raio pode revelar-se difícil levando à criação (1) de conglomerados de elementos discretos circulares coagidos entre si e por parte da fronteira do domínio de inibição e (2) de espaços com excesso de vazios.

O método de expansão do raio conduz ou a um determinado estado de tensão ou a uma determinada porosidade consoante o critério adoptado. Note-se que na geração da malha de elementos discretos circulares interessa apenas a disposição dos elementos discretos circulares no domínio de preenchimento, pelo que a força de gravidade não se encontra “activada” e a solução obtida pelo método dos elementos discretos corresponde a um estado de suspensão dos elementos discretos (como se o plano da estrutura fosse horizontal). Assim, dado que não há qualquer força exercida sobre os elementos discretos para além das forças de contacto, a convergência é garantida quando todas as sobreposições são eliminadas. Todavia, este limite pode não ser atingível, isto é a porosidade ou o estado de tensão prescrito pode não ser alcançado, devido aos factores enunciados anteriormente, e a solução final apresentar um estado de tensão associado à sobreposição dos elementos discretos circulares. Durante a fase de incremento progressivo do raio o valor da rigidez pontual normal do contacto deve ser baixo, por exemplo, da ordem de 1kN/m, de modo a

que as sobreposições significativas (admissíveis atendendo a (3.38)) dos elementos discretos circulares não dêem lugar a movimentos de repulsão exagerados associados a picos da energia cinética, que podem conduzir à expulsão de elementos do domínio de preenchimento. Este fenómeno faz-se notar mais no caso do incremento do raio de uma única vez, para o qual é maior a energia potencial elástica, devido à maior sobreposição nos contactos.

Nas secções que se seguem é apresentado o algoritmo do método da expansão do raio aplicado a sistemas com ambos os tipos de elementos discretos e com domínio de preenchimento de geometria complexa. Primeiro são definidos os domínios de inibição e de preenchimento. A seguir é apresentado o método de colocação dos elementos discretos circulares no domínio de preenchimento. Numa terceira parte, são descritas as equações para a expansão do raio e por último é exposta a aplicação do método dos elementos discretos para obter uma configuração admissível.

7.4.2. Definição dos domínios

Designa-se domínio de inibição, Ω_D , um polígono convexo definido por um mínimo de 3 vértices, numerados no sentido horário, no qual não é permitida a existência de qualquer elemento discreto circular na geração automática de malhas de distribuição aleatória. Cada aresta deste domínio é denotada $\Phi_{D,f}$ e é definida pelas coordenadas das suas extremidades, $x_{D,f,j,i}$, isto é de dois vértices consecutivos. Os índices inferiores D , f , j e i , indicam, respectivamente, o domínio de inibição, a aresta, o vértice e a coordenada cartesiana. $D = 1, 2, \dots, N_D$, onde N_D é o número de domínios de inibição, $f = 1, 2, \dots, N_{D,f}$, onde $N_{D,f}$ é o número de arestas do domínio D e $j = 1, 2$. As formas geométricas com o padrão em zebra representadas na Figura 7-5 são quatro exemplos de domínios de inibição, três de geometria rectangular e um que inclui o arco com 63 arestas.

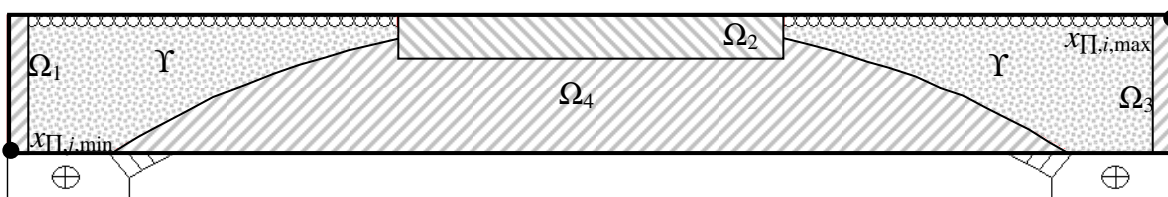


Figura 7-5: Domínios de inibição de geometria rectangular e em arco.

O domínio de actuação, Π , com geometria rectangular e representado na Figura 7-5 a traço cheio, é definido pelas coordenadas mínimas e máximas dos vértices dos domínios de inibição,

$$\begin{aligned} x_{\Pi,i,\min} &= \min(x_{D,f,j,i}) \\ x_{\Pi,i,\max} &= \max(x_{D,f,j,i}) \end{aligned} \quad (7.3)$$

de modo que é necessário colocar propositadamente os domínios de inibição em posições tais que permitam definir Π correctamente. Por exemplo e ainda na mesma figura, os dois domínios de inibição Ω_1 e Ω_3 de geometria rectangular com os lados maiores na vertical e coincidentes, neste caso, com os elementos discretos poligonais permitem definir aquelas coordenadas. A diferença entre o domínio de actuação Π e a união dos domínios de inibição Ψ define o domínio de preenchimento Υ , ver a forma geométrica com o padrão ponto na Figura 7-5.

Eventualmente, se antes da aplicação do método da expansão do raio já foram dispostos alguns elementos discretos circulares em Υ , como os que estão situados junto à aresta superior de Υ na Figura 7-5, o seu raio não é expandido e os seus movimentos permanecem temporariamente restringidos durante a aplicação da expansão do raio, ver Figura 7-8, onde a associação do símbolo \oplus a um dado elemento discreto indica restrição total de movimento, ver secção 3.2. Após a fase de expansão são atribuídas a estes elementos discretos circulares as eventuais restrições de movimento inicialmente prescritas, ver Figura 7-12. Assim, os três elementos discretos circulares ao nível do pavimento distando um quarto de vão do encontro esquerdo adquirem novamente a liberdade de movimento de translação vertical e os restantes a liberdade de movimento total.

7.4.3. Colocação aleatória de um elemento discreto circular

As coordenadas aleatórias do centro de massa de um novo elemento discreto circular p de raio $R_{p,\text{ini}}$, a acrescentar em Υ , são definidas com a função intrínseca do FORTRAN $RAN(\text{iseed})$, que fornece uma sequência de números pseudo-aleatórios $X_{p,i}$ no intervalo $[0,1]$. O valor inicial do raio $R_{p,\text{ini}}$ é dado por

$$R_{p,\text{ini}} = \eta R_p \quad (7.4)$$

em que o factor de redução η é por defeito igual a 0,5 e R_p é o valor do raio do elemento

pretendido. No início de cada geração da malha de elementos discretos circulares deve ser utilizado para valor do argumento *iseed* um valor diferente daquele considerado na geração anterior. Para tal, o valor de *iseed* é definido pelo produto das variáveis de tempo do computador, *segundo* e *centésimo de segundo*, relativas ao instante em que é executada a instrução *RAN*.

O número de tentativas para colocação de um elemento discreto circular em Υ é dado pelo produto de uma constante prescrita (maior que um) pelo número de elementos discretos circulares.

Os raios dos elementos discretos circulares podem ser constantes ou variáveis de forma discreta ou contínua numa dada gama de valores. A forma discreta traduz-se pela prescrição do valor dos raios individualmente e a forma contínua pela prescrição dos valores do raio mínimo e máximo e pelo número de peneiros a considerar na distribuição. A colocação aleatória dos elementos discretos circulares é feita começando pelos elementos discretos circulares de raio superior.

As dimensões de Π são dadas por

$$d_{\Pi,i} = x_{\Pi,i,\max} - x_{\Pi,i,\min} \quad (7.5)$$

e as coordenadas aleatórias do centro de massa de um potencial novo elemento discreto circular são dadas por

$$x_{CM,p,i} = x_{\Pi,i,\min} + R_{p,\text{ini}} + X_{p,i} (d_{\Pi,i} - 2R_{p,\text{ini}}) \quad (7.6)$$

O par de coordenadas (7.6) só é validado se o ponto correspondente pertencer a Υ . Para o efeito, o algoritmo implementado para a verificação do domínio de preenchimento consiste em percorrer os domínios de inibição um a um e, para cada um deles, verificar as arestas uma a uma. Como os domínios de inibição são externamente convexos, os seus pontos singulares, isto é os vértices, não causam dificuldades de univocidade como se mostra a seguir.

Fixando o domínio Ω_D e a sua aresta $\Phi_{D,f}$ é definido um referencial ortogonal local (t, n) com origem O no primeiro vértice de $\Phi_{D,f}$ e eixo t paralelo a $\Phi_{D,f}$, ver Figura 7-6. As coordenadas locais do centro de massa do elemento discreto circular p são dadas por

$$\begin{Bmatrix} t_p \\ n_p \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\alpha \begin{Bmatrix} x_{CM,p,1} - x_{D,2,1,1} \\ x_{CM,p,2} - x_{D,2,1,2} \end{Bmatrix} \quad (7.7)$$

O ponto de coordenadas (t_p, n_p) é exterior à aresta $\Phi_{D,f}$ de Ω_D se respeitar a condição de afastamento

$$n_p - R_{p,ini} \geq 0 \quad (7.8)$$

O cumprimento desta condição é avaliado para todas as arestas do domínio de inibição em estudo. O par de coordenadas é rejeitado se ela nunca for satisfeita para um dos domínios de inibição Ω_D . Neste caso a rotina de coordenadas aleatórias é chamada novamente.

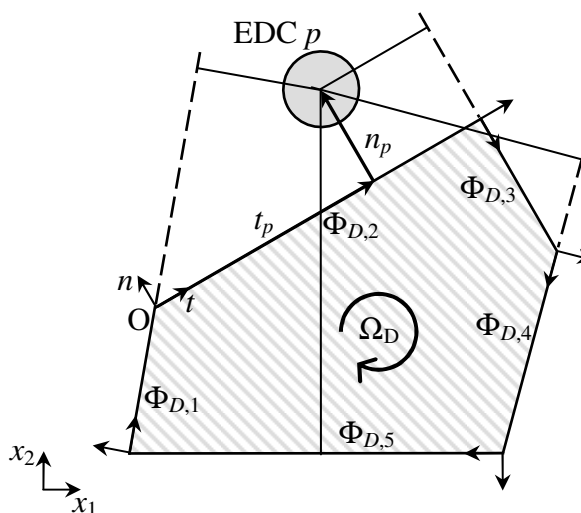


Figura 7-6. Verificação da condição de afastamento entre um domínio de inibição e um elemento discreto circular.

Se aquela condição for satisfeita para todas as arestas de todos os domínios de inibição o elemento discreto circular é admitido para integrar a malha de elementos discretos circulares se não se sobrepuser a nenhum dos j elementos discretos circulares previamente existentes e/ou anteriormente admitidos. Para tal é necessário verificar a condição,

$$L_{jp} - R_{j,ini} - R_{p,ini} \leq 0 \quad (7.9)$$

com $L_{jp} = \sqrt{(x_{CM,p,1} - x_{CM,j,1})^2 + (x_{CM,p,2} - x_{CM,j,2})^2}$ e $j = 1, 2, \dots, p-1$.

A Figura 7-7 representa a malha de elementos discretos circulares obtida por aplicação do algoritmo de colocação aleatória de elementos discretos circulares relativa ao estudo da

ponte de Bridgemill apresentado no capítulo 8.

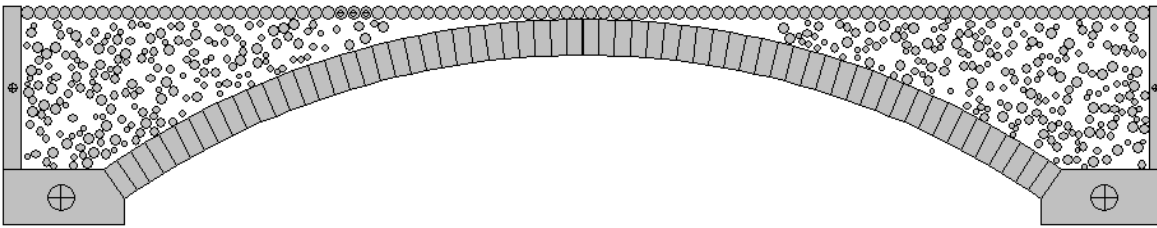


Figura 7-7: Malha de elementos discretos circulares em Υ antes da fase de expansão (porosidade 65%).

Concluído o processo de colocação de elementos discretos circulares a porosidade inicial n_{ini} é calculada por aplicação de (5.90)

$$n_{ini} = 1 - \frac{\pi}{A_{\Upsilon}} \sum_{i=1}^{N_{EDC}} R_{i,ini}^2 \quad (7.10)$$

onde A_{Υ} é a área do domínio de preenchimento Υ .

7.4.4. Expansão dos raios

A expansão dos raios é efectuada após a fixação de todos os elementos discretos que não fazem parte da malha a afectar pela expansão, ver Figura 7-8.

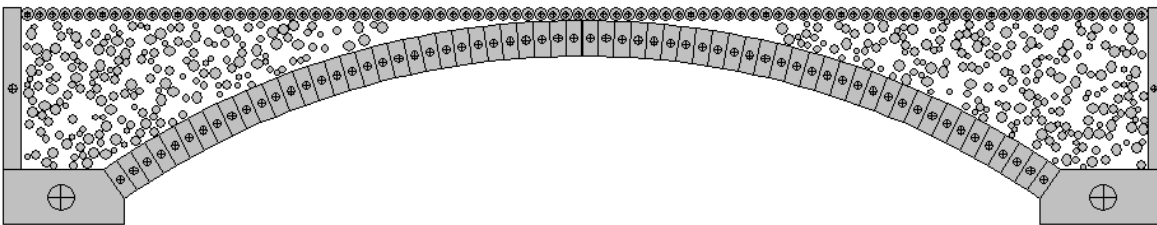


Figura 7-8: Bloqueamento dos elementos discretos não envolvidos na fase de expansão do raio (porosidade 65%).

(1) Considerando a porosidade dada por

$$n = 1 - \frac{\pi}{A_{\Upsilon}} \sum_{p=1}^{N_{EDC}} R_p^2 \quad (7.11)$$

e o raio dos elementos discretos circulares constante, $\sum_{p=1}^{N_{EDC}} R_p^2 = N_{EDC} R^2$, são possíveis duas situações:

(i) dada a porosidade n_{pre} e o raio R , é determinado o número de elementos discretos

circulares N_{EDC}

$$N_{\text{EDC}} = \frac{A_{\Gamma}}{\pi R^2} (1 - n_{\text{pre}}) \quad (7.12)$$

(ii) dada a porosidade n_{pre} e o número de elementos discretos circulares N_{EDC} é determinado o raio R

$$R = \sqrt{\frac{A_{\Gamma}}{\pi N_{\text{EDC}}} (1 - n_{\text{pre}})} \quad (7.13)$$

(2) Considerando agora os raios dos elementos discretos circulares variáveis, admite-se de forma simplificada que os elementos discretos circulares apresentam raio igual ao raio médio, \bar{R} , dado pela média dos valores dos raios prescritos mínimo e máximo

$$\bar{R} = \frac{R_{\text{min}} + R_{\text{max}}}{2} \quad (7.14)$$

Neste caso, dada a porosidade n_{pre} , o número de elementos discretos circulares N_{EDC} é

$$N_{\text{EDC}} = \frac{A_{\Gamma}}{\pi \bar{R}^2} (1 - n_{\text{pre}}) \quad (7.15)$$

sendo a respectiva porosidade aproximada dada por

$$\tilde{n}_{\text{pre}} \approx 1 - \frac{\pi N_{\text{EDC}} \bar{R}^2}{A_{\Gamma}} \quad (7.16)$$

Posteriormente é determinada uma distribuição do número de elementos discretos circulares pelos vários peneiros, garantindo o número total de elementos discretos circulares.

Como se referiu, a expansão do raio aplicada aos elementos discretos circulares livres é efectuada com um ou mais incrementos N_{inc} . Durante o processo de expansão o raio dos elementos discretos circulares é dado por

$$R_p^{(k)} = \lambda R_p^{(k-1)} \quad (7.17)$$

onde k é a ordem do incremento do raio ($k=1,2,\dots$) e λ o factor de expansão do raio, idêntico para todos os elementos, de modo que se tem

$$\lambda^2 = \frac{\sum_{p=1}^{N_{EDC}} (R_p^{(k)})^2}{\sum_{p=1}^{N_{EDC}} (R_p^{(k-1)})^2} = \frac{A_Y (1-n^{(k)})}{\pi} \frac{\pi}{A_Y (1-n^{(k-1)})} \quad (7.18)$$

ou seja

$$\lambda = \left(\frac{1-n^{(k)}}{1-n^{(k-1)}} \right)^{1/2} \geq 1 \quad (7.19)$$

com $n^{(k)} \leq n^{(k-1)}$. Se $N_{inc} = 1$, $n^{(k)} \equiv n_{pre}$ e, atendendo a (7.4), $\lambda = 1/\eta$. Se $N_{inc} > 1$, quando $n^{(k)} \approx n^{(k-1)}$ vem $\lambda \approx 1$ e o processo de expansão cessa. A Figura 7-9 representa a aplicação de (7.17) com $n^{(k-1)} = 40\%$ e $n^{(k)} = 37\%$ ($\lambda = 1,025$).

Após cada incremento do valor dos raios procede-se à actualização das características dos elementos discretos circulares, nomeadamente, a área e as quantidades de inércia. Para eliminar a sobreposição dos elementos discretos circulares efectua-se um ciclo de iterações do método dos elementos discretos como se explica na próxima secção.

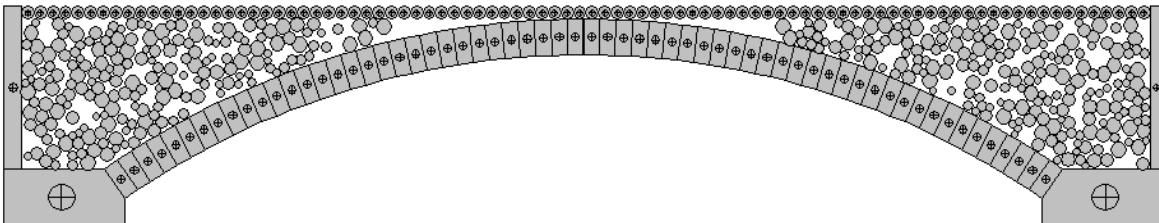


Figura 7-9: Malha de elementos discretos circulares durante a aplicação do método da expansão do raio (porosidade 37%).

7.4.5. Solução do método dos elementos discretos

Como foi referido na secção 5.2, a aplicação do método dos elementos discretos consiste na aplicação alternada da lei força-deslocamento e da lei do movimento. Uma lei força-deslocamento elástica linear fornece, para cada contacto, a força de contacto normal

$$\begin{Bmatrix} F_{elas,C,s} \\ F_{elas,C,n} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{k}_s & 0 \\ 0 & \tilde{k}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_{gap,C} \end{Bmatrix} \quad (7.20)$$

onde $u_{gap,C}$ é a variável de separação no ponto de contacto, determinada por (3.27), e \tilde{k}_n a rigidez normal reduzida para a qual, como se referiu na secção 7.4.1, é considerado um valor muito inferior ao da rigidez normal efectiva. De modo a reduzir o tempo de

computação no método dos elementos discretos, é desprezada a força de contacto tangencial, a força de gravidade, $G=0$, e a força variável, $Q=0$. A lei de movimento fornece a velocidade do elemento discreto, \dot{u}_{CM} , provocada apenas pelas forças de contacto. O ciclo de iterações com a equação (7.20) e a lei de movimento, secção 5.2.1, prossegue até que sejam eliminadas todas as sobreposições envolvendo elementos discretos circulares, o que lhes confere um estado de tensão nulo.

A Figura 7-10 ilustra um estado intermédio do processo iterativo para o qual o estado de tensão em alguns elementos ainda não é nulo. Nas Figura 7-10, Figura 7-11, Figura 7-12 e Figura 7-13 a cor dos elementos discretos circulares, do verde-escuro ao encarnado, indica a tensão isotrópica instalada determinada por (5.85), correspondendo o verde escuro a um valor mais reduzido, o encarnado a um valor mais elevado e o cinzento a uma tensão isotrópica nula.

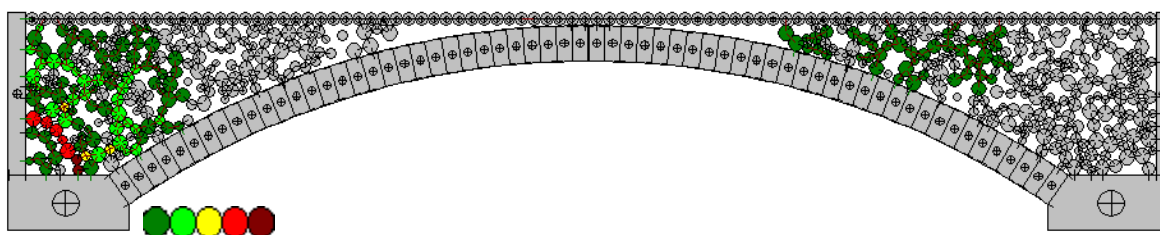


Figura 7-10: Estado intermédio do processo de expansão correspondente a uma porosidade de 37%.

À medida que o valor da porosidade obtida $n^{(k)}$ tende para o valor da porosidade prescrita n_{pre} o número de iterações do método dos elementos discretos requerido para eliminar as sobreposições aumenta, podendo eventualmente ocorrer um bloqueio local que inviabiliza a continuação do processo de incrementação do raio, situação que se ilustra na Figura 7-11.

Efectivamente, na zona central do arco a distância entre o extradorso do arco e a superfície inferior da fila de elementos discretos circulares fixos que delimita o domínio de preenchimento é reduzida, devendo ser evitada a colocação de elementos discretos circulares nessa zona. A colocação de um domínio de inibição de geometria rectangular nesta zona evita o bloqueio prematuro do processo de expansão, ver Figura 7-5.

A Figura 7-3 apresenta um exemplo de uma malha de elementos discretos circulares onde o risco de bloqueio não é tão acentuado porque para a delimitação superior do domínio de preenchimento, em vez de se utilizar uma linha de elementos discretos circulares, que posteriormente integrará aquele domínio, foi utilizado uma linha de elementos rectangulares fictícios, Figura 7-14, o que tem ainda a vantagem de eliminar a superfície dentada constituída pelos elementos circulares. Além disso os raios dos elementos discretos circulares da malha têm um valor menor.

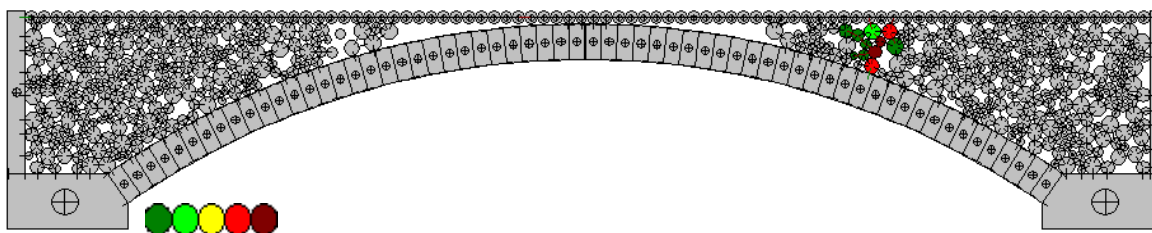


Figura 7-11: Final do processo de expansão correspondente a uma porosidade de 30 %.

Se se constatar não ser possível prosseguir com o incremento do raio dos elementos o processo de expansão cessa e a porosidade resultante $n^{(k)}$ é comparada com a porosidade prescrita, permitindo classificar a malha de elementos discretos circulares obtida. Por exemplo, o número de elementos discretos circulares determinado por (7.15), para uma porosidade n_{pre} de 16 % originou a malha inicial representada na Figura 7-7, que corresponde a uma porosidade $n^{(k)}$ de 65 %. No final da aplicação do método da expansão do raio a porosidade é de 30 %, ou seja, superior ao valor inicialmente especificado de 16 %, devido ao conglomerado de elementos discretos circulares a cor, Figura 7-11, coagidos entre si e por parte da fronteira do domínio de inibição, como referido na secção 7.4.1.

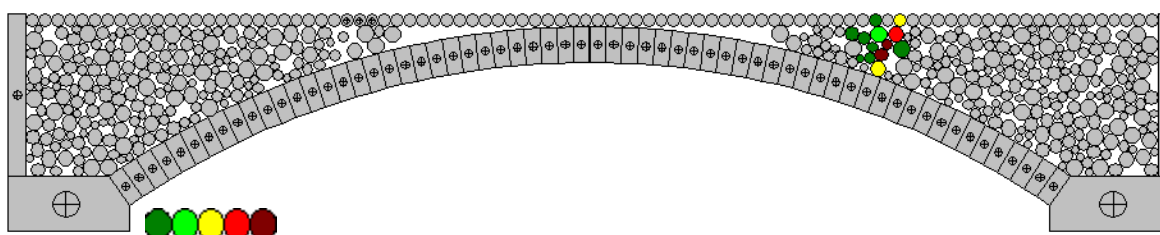


Figura 7-12: Atribuição das condições de fronteira efectivas aos elementos circulares (porosidade 30 %).

Por último, as restrições ao movimento dos elementos discretos poligonais também são devolvidas ao seu estado inicial, ou seja, anterior à aplicação do método da expansão do raio, ver Figura 7-13. Constatase que a sobreposição final entre elementos discretos circulares corresponde a um estado de tensão inicial representado na mesma figura. Este estado de tensão é determinado, não com a rigidez normal reduzida \tilde{k}_n , mas com a rigidez real dos contactos k_n .

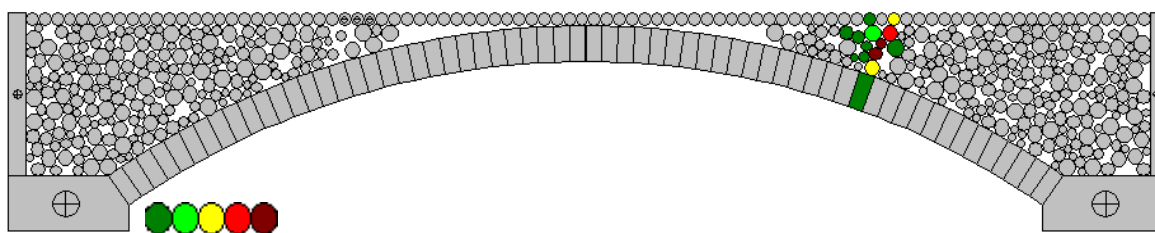


Figura 7-13: Malha final de elementos poligonais e elementos circulares (porosidade 30%).

Todavia, caso se pretenda que a sobreposição resultante origine um estado de tensão nulo a força de contacto normal em (7.20) é omitida. Depois aquando da determinação da solução correspondente ao peso próprio a separação resultante $u_{\text{gap},C}$ não é adicionada ao incremento de deslocamento do contacto $\Delta u_{C,n}$ em (5.68). Também é possível anular a sobreposição reduzindo os dois raios dos elementos discretos circulares em contacto de metade de $u_{\text{gap},C}$, o que tem como consequência a variação insignificante da porosidade.

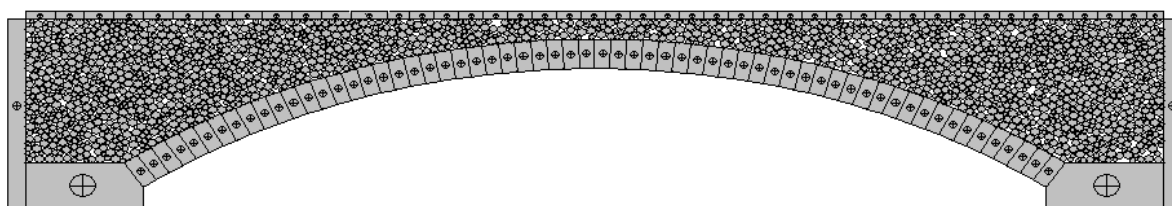


Figura 7-14: Malha final de elementos circulares e fila de elementos poligonais fictícios (porosidade 25%).

8. Exemplo de aplicação

Como aplicação do programa de elementos discretos desenvolvido é apresentada a análise detalhada do comportamento da ponte em arco de alvenaria de Bridgemill em Girvan na Escócia, construída em 1869, ver Figura 8-1. Hendry, Davies e Royles mediram a sua geometria, determinaram as suas propriedades mecânicas e realizaram um ensaio *in situ* aplicando uma carga do tipo “faca” a um quarto de vão no decorrer do qual registaram a carga de pré-rotura, isto é a carga que corresponde à abertura das juntas que representam o mecanismo de colapso (PAGE 1993). Devido à escassez de informação sobre ensaios de carga neste tipo de pontes, este exemplo tem sido usado por vários investigadores para avaliar a performance dos seus modelos numéricos (MOLINS 1998) e (FORD 2003).

No que se segue, são tecidas algumas considerações acerca dos valores atribuídos aos parâmetros que permitem representar as propriedades dos materiais constituintes da ponte e são apresentados quatro modelos distintos de estrutura/carga:

- (1) arco isolado sem o material de enchimento e o seu peso próprio;
- (2) arco isolado com cargas verticais para simular a acção do enchimento no arco;
- (3) arco com os muros de tímpano;
- (4) arco com o material de enchimento.

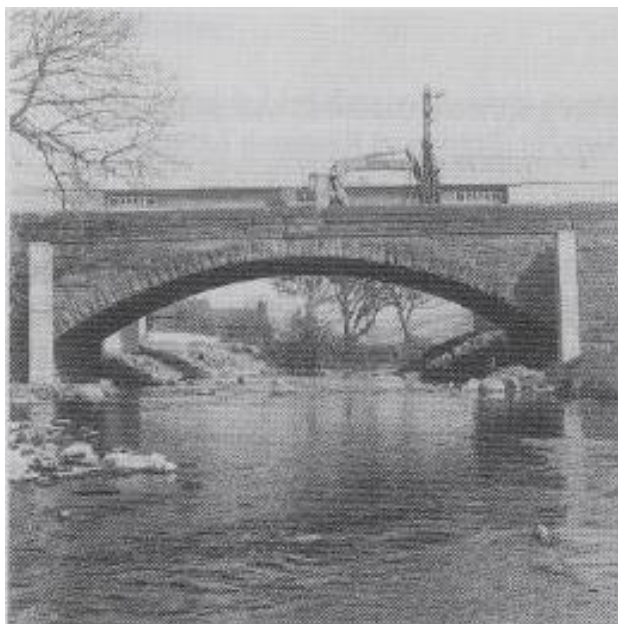


Figura 8-1: Ponte em arco de alvenaria de Bridgmill. Figura retirada de (PAGE 1995).

8.1. Características geométricas e propriedades dos materiais

Os dados sobre a geometria e as propriedades dos materiais da ponte de Bridgmill são apresentadas num relatório de Page (1993). Porém, neste relatório não se encontram indicados alguns parâmetros experimentais essenciais para a modelação numérica do problema. Houve assim a necessidade de estabelecer alguns valores por consulta da bibliografia especializada para estruturas similares, tendo em conta que a sua influência nos resultados é limitada.

O arco da ponte, constituído por 62 aduelas com secção de altura $h = 0,711$ m, tem forma parabólica, com 18,3 m de vão, 8,3 m de largura e 2,85 m de flecha. A relação entre a flecha e o vão do arco permite afirmar que a diferença entre a forma parabólica e circular é pequena pelo que o arco parabólico é aproximado por um arco segmentado (VERMELTFOORT 2001). A distância entre o extradorso da aduela de fecho e a cota do pavimento é de 0,478 m (0,203 para o enchimento, 0,125 para a sub-base e 0,150 para a camada betuminosa).

Para as aduelas e os muros de tímpano o módulo de elasticidade, E_b , é de 15 GPa, a massa volúmica, ρ_b , é de 2100 kg/m³, a resistência à compressão da alvenaria, f , está

compreendida entre 5,0 e 7,0 MPa, e a resistência à compressão da unidade de alvenaria, f_b , é de 43,8 MPa. Para o enchimento, constituído por uma mistura de brita, areia e argila, a massa volúmica, ρ_f , é de 1890 kg/m³. Para o módulo de deformação, E_f , ausente de Page (1993), é admitido o valor de 40 MPa apresentado em Molins (1998).

A primeira aproximação para os valores das rigidezes elásticas por unidade de área normal \bar{k}_n e tangencial \bar{k}_s é obtida pelas expressões (3.60) e encontra-se indicada na Tabela 8-1, onde a notação P-P, P-C e C-C indica, respectivamente, contactos entre elementos poligonais, entre elementos poligonais e elementos circulares, e entre elementos circulares.

Tabela 8-1: Cálculo da rigidez normal \bar{k}_n e tangencial \bar{k}_s das juntas.

	L_{CM}	ν	E	G	$k_{n,j}$	$k_{s,j}$	\bar{k}_n	\bar{k}_s
	m	—	GPa	GPa	GPa/m	GPa/m	GPa/m	GPa/m
P-P	0,320	0,2	15,00	6,250	5,400	0,590	4,840	0,573
P-C	0,506	0,2	0,04	0,017	65,000	27,000	0,079*	0,034*
C-C	0,150	0,2	0,04	0,017	≈ 65,000	≈ 27,000	0,266*	0,111*

* — Valor de primeira aproximação

Os valores do coeficiente de Poisson ν da unidade de alvenaria e das rigidezes normal ($k_{n,j,P-P}$ e $k_{n,j,P-C}$) e tangencial ($k_{s,j,P-P}$ e $k_{s,j,P-C}$) das juntas são iguais aos estabelecidos por Costa (2002).

Não se encontrando na bibliografia valores para as rigidezes normal $k_{n,j,C-C}$ e tangente $k_{s,j,C-C}$ da junta foram arbitrados valores iguais aos de $k_{n,j,P-C}$ e $k_{s,j,P-C}$.

Os valores para L_{CM} encontram-se indicados na Figura 3-28. O valor para $L_{CM,C-C}$ é dado pelo dobro da média dos raios prescritos mínimo, $R_{\min} = 0,05$ m, e máximo, $R_{\max} = 0,10$ m, dos elementos circulares e $L_{CM,P-C}$ por $h/2 + \bar{R} = 0,506$ m (por lapso considerou-se $\bar{R} = 0,15$ m — os valores correctos de primeira aproximação para $\bar{k}_{n,P-C}$ e $\bar{k}_{s,P-C}$ seriam 0,093 e 0,039 GPa/m). O módulo de distorção é calculado através de uma relação

similar a (3.49).

Verificou-se que os valores de primeira aproximação para as rigidezes normal $\bar{k}_{n,P-C}$ e tangencial $\bar{k}_{s,P-C}$ se revelaram insuficientes. Num estudo prévio com uma malha de elementos circulares menos densa verificou-se que os elementos circulares junto à carga pontual tendiam a atravessar os elementos poligonais do arco como se pode ver na figura Figura 8-2. Como segunda aproximação aquelas rigidezes foram consideradas iguais às de $\bar{k}_{n,P-P}$ e $\bar{k}_{s,P-P}$.

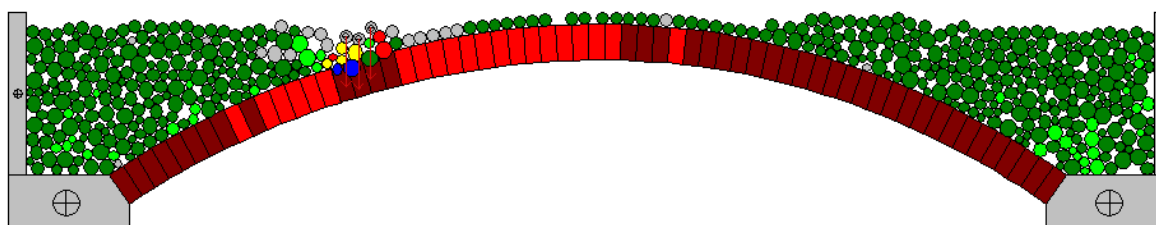


Figura 8-2: Primeira aproximação da rigidez normal e tangencial dos contactos entre elementos poligonais e elementos circulares.

As restantes propriedades das juntas consideradas no modelo de elementos discretos são indicadas na Tabela 8-2.

Em Cavicchi *et al.* (2005), Gago *et al.* (2003) e Sîncraian *et al.* (1998b) são indicados valores para a coesão, c , no intervalo de $[1, 20]$ kPa. Para este problema optou-se o valor 1,5 kPa.

O valor do ângulo de atrito interno, ϕ , para as juntas entre elementos poligonais é admitido igual ao valor obtido em ensaios laboratoriais realizados no LNEC em provetes extraídos do Mosteiro da Serra do Pilar (MURALHA 2000). Para os restantes contactos é considerado um valor igual.

A resistência à tracção da alvenaria, f_t , é considerada nula, tal como preconiza o EC6 (1988) e tal como admitem Heyman (1982), Molins (1998), Sîncraian *et al.* (1998^a) e

Lemos (2006). A resistência à tracção do material de enchimento, $f_{f,t}$, também é considerada nula.

Os valores para os comprimentos de influência dos contactos são determinados tendo em consideração os pressupostos apresentados na secção 3.7. A distância de arredondamento é igual a 0,01 m.

Tabela 8-2: Propriedades das juntas dos elementos discretos.

	c	ϕ	$f_t, f_{f,t}$	f_b	$L_{C,\dots,fix}$	$L_{C,l,min}$
	kPa	°	MPa	MPa	m	m
P-P	0	35,6	0	43,8	0,3455	0,0711
P-C	1,50	35,6	0	—	0,1500	—
C-C	1,50	35,6	0	—	0,1500	—

A malha de elementos circulares obtida por aplicação do método da expansão do raio apresentado na secção 7.4, e com as propriedades constantes na Tabela 8-1 e Tabela 8-2, iniciou-se prescrevendo (1) os raios, mínimo e máximo, de 0,05 e 0,10 m ($\bar{R} = 0,075$ m) como referido; (2) uma distribuição de quatro peneiros; (3) um coeficiente de redução $\eta = 0,5$; (4) uma porosidade de 0,16; (5) a constante de 500 para a determinação do número de tentativas para colocação de um elemento discreto circular em Υ ; e o factor constante para o método de expansão do raio $\chi_{exp} = 1,0$.

Aplicando (7.15) com $A_\Upsilon = 41,187$ m², o número de elementos discretos circulares $N_{EDC} = 1957$ (490 elementos discretos têm raio $\eta \times 0,05$ m e 489 elementos discretos para cada um dos restantes raios — $\eta \times 0,066$, $\eta \times 0,083$ e $\eta \times 0,100$ m). Concluída a colocação aleatória dos elementos circulares ($n^{(0)} = 0,78$), ver Figura 8-3, e após a aplicação alternada de incrementos do raio (secção 7.4.4) e do método dos elementos discretos (secção 7.4.5) os raios obtidos são de 0,0384, 0,0512, 0,0640 e 0,0768 m correspondendo uma porosidade de $n^{(\infty)} = 0,47$. A Figura 8-14 mostra a solução obtida por aplicação do método dos elementos discretos para o peso próprio do sistema.

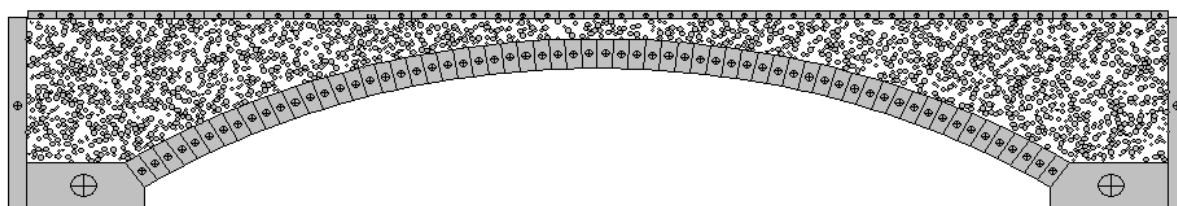


Figura 8-3: Colocação de elementos circulares em Υ e fila de elementos poligonais fictícios (porosidade 78%).

8.2. Módulo de deformação do material de enchimento

Para averiguar a correspondência entre o módulo de deformação do material de enchimento especificado por E_f e o que efectivamente resulta da malha de elementos discretos adoptada realizou-se um estudo comparativo. Após a obtenção da malha de elementos discretos circulares que simula o material de enchimento do arco, Figura 7-3, foi isolada uma amostra quadrada com um metro de lado, Figura 8-4. Os elementos intersectados pela fronteira quadrada foram removidos, e foram acrescentados elementos circulares correspondentes ao raio mais pequeno em alguns espaços vazios, de forma a conservar aproximadamente o valor da porosidade.

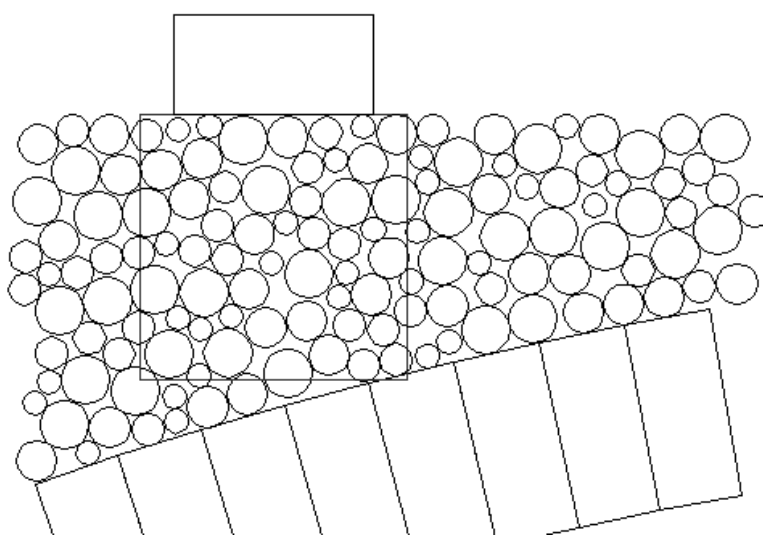


Figura 8-4: Amostra quadrada de elementos circulares considerada no estudo comparativo.

A amostra foi confinada com três elementos poligonais fixos, dois nos lados e um na base, Figura 8-5(a). Um quarto elemento discreto poligonal com o movimento vertical livre e pesando 2,6 kN foi colocado no topo, sujeito a incrementos de carga de 25 kN e o seu deslocamento vertical medido, Figura 8-5(b).

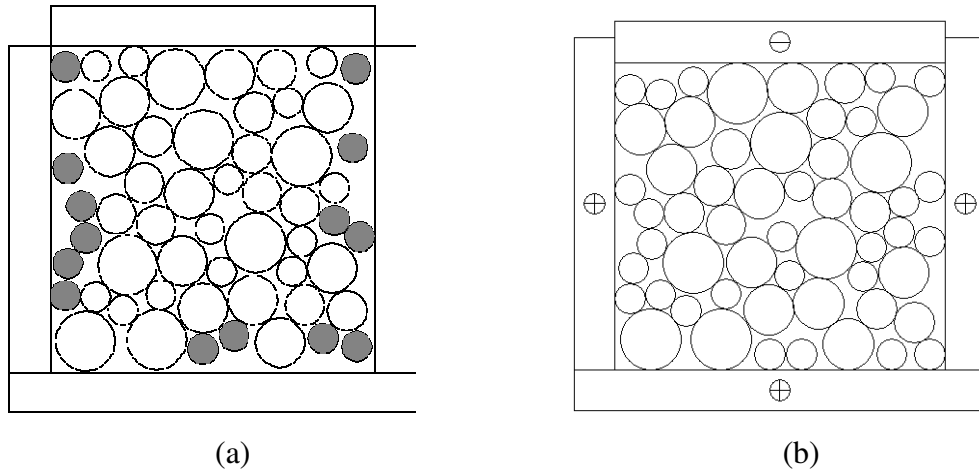


Figura 8-5: (a) Confinamento da amostra. (b) Aplicação da carga.

No estudo comparativo foram considerados cinco conjuntos de valores para as rigidezes normal e tangencial dos contactos entre elementos circulares, iguais a uma, duas, quatro, seis e oito vezes os valores de $\bar{k}_{n,C-C}$ e $\bar{k}_{s,C-C}$ constantes na Tabela 8-1. Os restantes parâmetros foram mantidos fixos. Os valores da força vertical aplicada e do deslocamento obtido foram representados na Figura 8-6.

Estas curvas apresentam módulos de deformação tangente cujos valores médios são, respectivamente, 22, 28, 34, 42 e 48 MPa e módulos de deformação secante (calculados com base na diferença entre os valores final e inicial dos resultados) de, respectivamente, 16, 26, 12, 14 e 18 MPa. Os três últimos valores vêm significativamente aumentados se o resultado dos primeiros quatro incrementos forem ignorados, 28, 43 e 54 MPa, ver Figura 8-6.

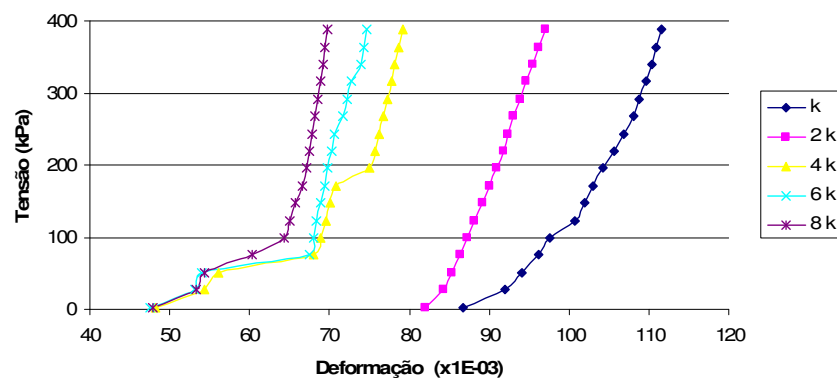


Figura 8-6: Relação entre as deformações e as tensões na amostra confinada.

Conclui-se que, para satisfazer o valor especificado para E_f , a rigidez adoptada para os contactos entre elementos discretos circulares deve ser cerca de seis vezes superior aos valores constantes do Tabela 8-1, ou seja $\bar{k}_{n,C-C} = 6\bar{k}_{n,C-C}^* = 1,596$ e $\bar{k}_{s,C-C} = 6\bar{k}_{s,C-C}^* = 0,666$ GPa/m.

8.3. Modelos estrutura/carga

Nas análises apresentadas seguidamente primeiro é aplicado o peso próprio dos elementos discretos de cada modelo e posteriormente as respectivas cargas incrementais de 200 kN. Os encontros são considerados infinitamente rígidos. A face superior horizontal do elemento discreto poligonal que simula o encontro tem 2 m de comprimento. A carga última (que provoca o colapso do arco) é dada por metro linear de arco e, entre parêntesis, apresenta-se igualmente a resultante aplicada sobre os 8,3 m de largura do arco, para facilitar a comparação com os resultados de Hendry *et al.*

8.3.1. Modelo 1 — Arco isolado sem o material de enchimento e o seu peso próprio

Neste modelo, Figura 8-7, o arco é considerado isolado e sujeito ao seu peso próprio e à carga incremental do tipo “faca” com $L_0 = 0,75$ m, Figura 8-8. É adoptado um ângulo de dispersão para a carga de 26° , correspondendo a uma inclinação vertical/horizontal $s = 2 : 1$. A superfície de degradação da carga intersecta o extradorso do arco nos pontos P_1 e P_2 com profundidades $h_1 = 1,13$ m e $h_2 = 0,66$ m, ver Figura 8-8. Os dois pontos definem uma linha cuja projecção horizontal apresenta comprimento

$$L = L_0 + \frac{h_1 + h_2}{s} \quad (8.1)$$

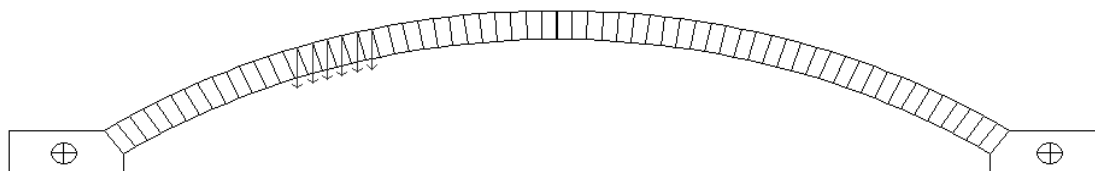


Figura 8-7: Arco isolado e carga.

Admita-se que a intensidade da carga em P_1 e P_2 é inversamente proporcional à

profundidade do material de enchimento, isto é,

$$q_1 = \frac{q}{h_1} \text{ e } q_2 = \frac{q}{h_2} \quad (8.2)$$

Considere-se ainda uma aproximação trapezoidal para a intensidade da carga entre P_1 e P_2 . A resultante do trapézio assim formado deve ser igual à resultante da carga uniformemente distribuída, Q , dada por

$$\frac{q_1 + q_2}{2} L = Q \quad (8.3)$$

Substituindo (8.2) em (8.3) e resolvendo em ordem à constante de proporcionalidade q

$$q = \frac{2Q}{L} \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \quad (8.4)$$

e

$$q_1 = \frac{2Q}{L} \frac{h_2}{h_1 + h_2} \quad (8.5)$$

$$q_2 = \frac{2Q}{L} \frac{h_1}{h_1 + h_2}$$

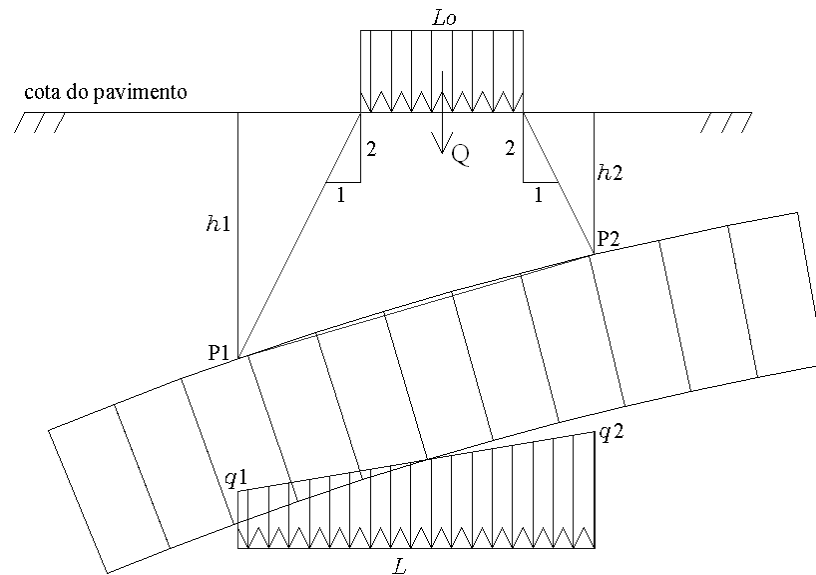


Figura 8-8: Distribuição no extradorso do arco da carga uniformemente distribuída no pavimento.

Com esta formulação a linha de acção da resultante da distribuição trapezoidal (0,750 m na horizontal e a partir do ponto P_1) não é exactamente coincidente com a da resultante da distribuição rectangular (0,775 m na horizontal e a partir do ponto P_1). Considerando a

distância ao encontro esquerdo esta diferença representa um erro na ordem dos 0,5% (4,55 m em vez do valor correspondente a um quarto do vão, 4,575 m). Ter-se ia evitado esta excentricidade se em vez da hipótese (8.2) se tivesse imposto a posição da resultante do trapézio, isto é,

$$\left(\frac{L_0}{2} + \frac{h_1}{s}\right)Q = \frac{L^2}{6}(2q_2 + q_1) \quad (8.6)$$

e, atendendo a (8.3), vem

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{2Q}{L} \left(\frac{3}{2} \frac{L_0}{L} + \frac{3h_1}{sL} - 1 \right) \\ q_2 &= \frac{2Q}{L} \left(-\frac{3}{2} \frac{L_0}{L} - \frac{3h_1}{sL} + 2 \right) \end{aligned} \quad (8.7)$$

Numa primeira fase foi comparado o desempenho dos dois tipos de amortecimento: o viscoso global e o não viscoso local. No caso viscoso, a possibilidade de ajustar a intensidade do amortecimento nas sucessivas iterações, através da activação do amortecimento global adaptável, também foi avaliada. As curvas de resposta carga-deslocamento são obviamente coincidentes, ver Figura 8-9, e a carga de colapso é de 204,82 kN·m⁻¹ (1700 kN). O número total de iterações requerido para as análises com amortecimento local e global adaptável são similares, cerca de 120 000, valor dez vezes menor que o da análise com amortecimento global não adaptável.

A coincidência do valor do deslocamento correspondente à carga de colapso nos três tipos de análise foi forçada, isto é, a tendência revelada pela série de valores $F_{\text{obf,max}}^{(jN_{\text{pt}})}$ corresponde ao caso (2), ver secção 5.2.4. Normalmente, em situações de colapso o processo iterativo só é interrompido quando se esgota o número de iterações estabelecido inicialmente para cada incremento de carga. O deslocamento medido nesse instante é muito superior ao apresentado na Figura 8-9, correspondendo a uma configuração deformada semelhante à representada na Figura 8-10.

Adoptando o amortecimento global adaptável foi avaliada a sensibilidade da resposta para os dois tipos de comprimento de influência do contacto, fixo ou variável. Verificou-se que a carga e o mecanismo de colapso são idênticos para os dois casos, mostrando-se na Figura 8-10 o correspondente a $L_{C,P-P} = L_{C,P-P,\text{fix}}$. Porém, foi observado um crescimento

significativo do valor da tensão normal máxima, de 1,49 para 6,06 MPa, dependendo de $L_{C,P,P}$ ser fixo ou variável. Em ambos os casos a tensão normal é inferior a f_b .

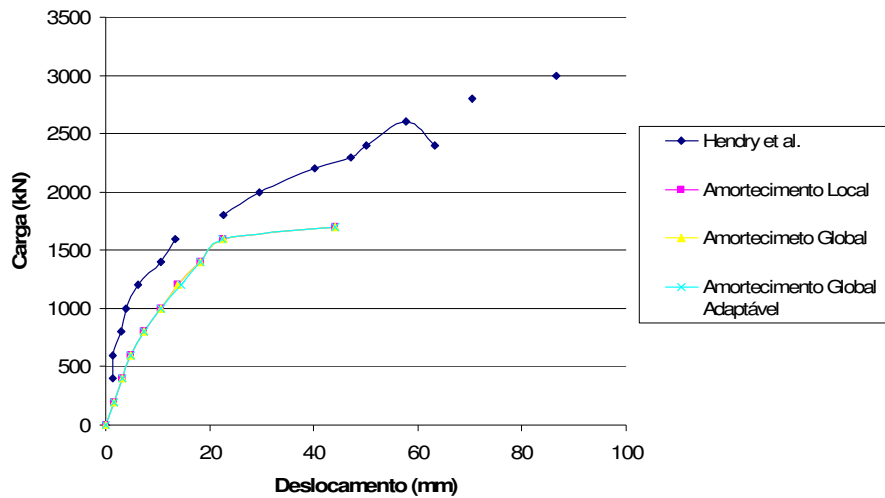


Figura 8-9: Relação entre o deslocamento e a carga para o modelo 1.

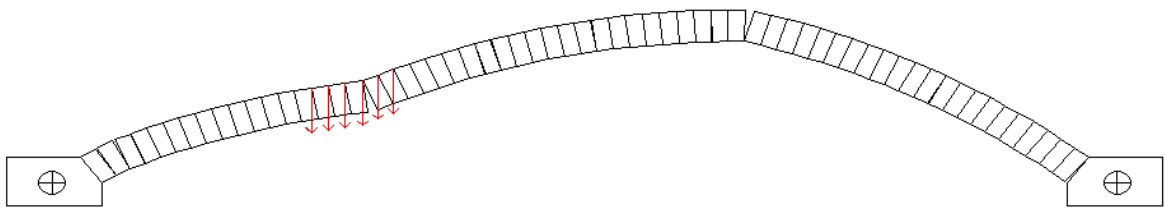


Figura 8-10: Mecanismo de colapso do arco isolado.

8.3.2. Modelo 2 — Arco isolado com as cargas verticais a simular a acção do enchimento no arco

Neste modelo o material de enchimento é mais uma vez excluído do modelo de elementos discretos, mas o seu peso próprio é considerado conjuntamente com o das aduelas do arco, ver Figura 8-11. A distribuição da carga do tipo “faca” pelos vértices dos elementos discretos poligonais é idêntica à definida para o modelo 1.

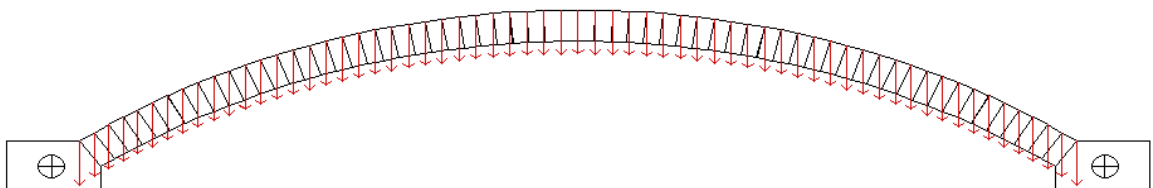


Figura 8-11: Arco isolado, peso próprio do material de enchimento e carga, cuja representação se confunde com a do peso próprio.

A Figura 8-12 representa as relações carga-deslocamento obtidas, que exibem uma carga de colapso de 325,30 kN/m (2700 kN). A diferença do valor do deslocamento final, observável na Figura 8-12 para os diferentes tipos de amortecimento, é devida ao facto do processo iterativo ter sido interrompido para fases distintas do colapso, como foi referido no caso do modelo 1. O número de iterações requerido para o amortecimento local e global adaptável foi de cerca de 230 000 e para o amortecimento global não adaptável 2 350 000.

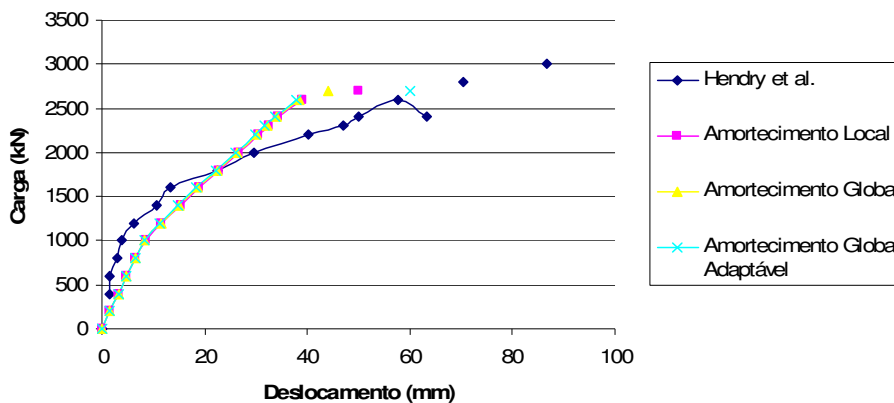


Figura 8-12: Relação entre o deslocamento e a carga para o modelo 2.

Os valores máximos das tensões são novamente inferiores a f_b , tanto para o caso do comprimento de influência dos contactos fixo (2,74 MPa) como para o caso variável (10,57 MPa). A Figura 8-13 ilustra o mecanismo de colapso. Note-se que os mecanismos das Figura 8-10 e Figura 8-13 são semelhantes tendo a rótula junto ao cumee sido deslocada de 3 aduelas para a direita na segunda figura.

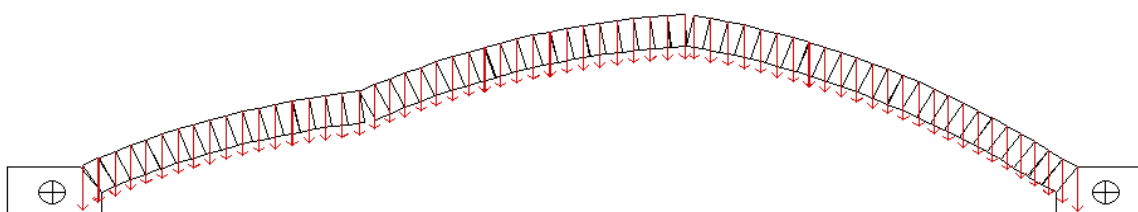


Figura 8-13: Mecanismo de colapso do arco com as acções a simular o material de enchimento.

8.3.3. Modelo 3 — Arco com o material de enchimento

O modelo para esta análise inclui o arco, o material de enchimento simulado por 1957 elementos circulares, e a carga pontual dividida equitativamente pelos dois vértices superiores dum elemento poligonal adicional, pesando 17,72 kN/m (147 kN), situado a

um quarto de vão e apresentando componente vertical do deslocamento livre, ver a Figura 8-14.

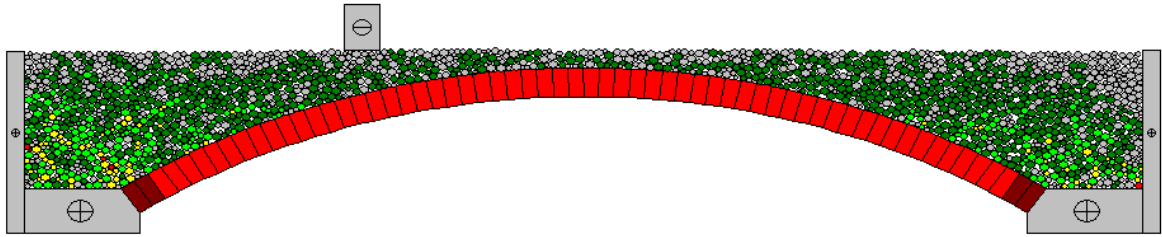


Figura 8-14 : Remoção dos elementos poligonais auxiliares e configuração após a aplicação do método de expansão do raio.

Foi decidido utilizar o amortecimento viscoso global adaptável com o comprimento de influência dos contactos fixo. A carga de rotura é de 379,2 kN/m (3147 kN) e o valor máximo da tensão de compressão registado, no incremento anterior, ao qual corresponde uma carga de 2947 kN, é de 2,90 MPa, novamente inferior a f_b . A diferença de comportamento das curvas carga-deslocamento experimental e numérica representadas na Figura 8-15 pode justificar-se pelo facto de o modelo de contacto ser simples e de rigidez constante (à compressão). A consideração de um modelo mais elaborado, por exemplo, com uma relação constitutiva apresentando uma redução progressiva da rigidez normal, ao reflectir o efeito do dano progressivo no arco poderia levar a uma melhor aproximação das duas curvas, ver secção 3.11. A Figura 8-17 ilustra diversas configurações correspondentes a vários níveis de carga. Observa-se o afundamento brusco do elemento poligonal que suporta a carga pontual quando esta atinge o valor de 114,1 kN/m (947 kN), ver Figura 8-16. A Figura 8-18 mostra o mecanismo de colapso efectivo.

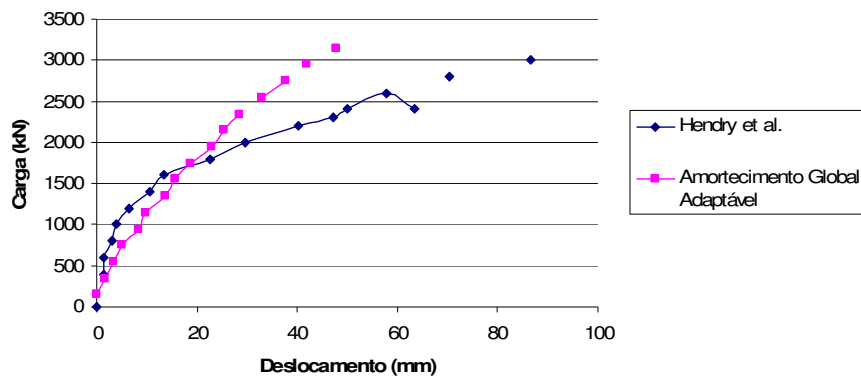


Figura 8-15: Relação entre o deslocamento e a carga para o modelo 3.

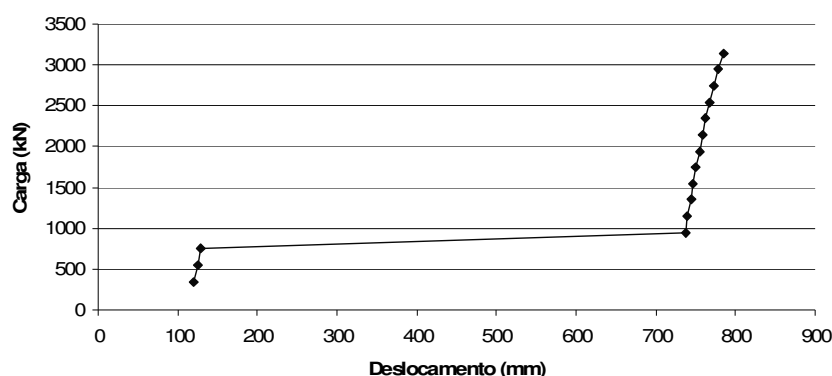


Figura 8-16: Relação entre o deslocamento e a carga para o elemento poligonal que suporta a carga pontual.

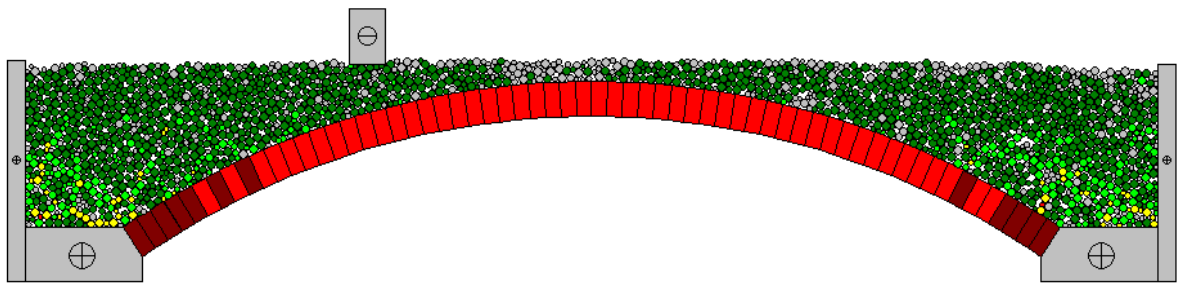
8.3.4. Modelo 4 — Arco com o muro de tímpano

O quarto modelo inclui apenas o arco, o muro de tímpano e a carga pontual, sem o material de enchimento. A malha utilizada para o muro é constituída por elementos poligonais de dimensão $60 \times 22 \times 40$ cm, representando cada quatro unidades de alvenaria da estrutura original, ver Figura 8-19. A adopção de uma malha de elementos discretos poligonais mais refinada, em Rouxinol *et al.* (2006), conduz a resultados similares.

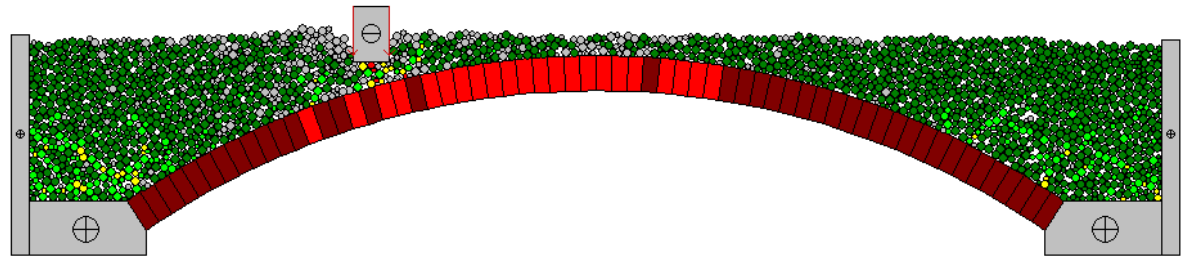
A carga é directamente aplicada em dois elementos discretos poligonais situados a um quarto de vão e pertencentes à malha de elementos discretos poligonais do muro, gerada através do algoritmo apresentado na secção 7.1.2.

A utilização do amortecimento não viscoso local e do amortecimento viscoso global adaptável, com o comprimento de influência fixo, conduziram a resultados semelhantes como se pode ver na Figura 8-20. Em ambos os casos, a carga que origina o colapso deste modelo é de $433,73 \text{ kN/m}$ (3600 kN). O amortecimento adaptável conduziu a um número de iterações significativamente superior. Verifica-se que a tensão máxima de compressão, de $2,83 \text{ MPa}$, é inferior à tensão admissível tanto da alvenaria f como das aduelas f_b .

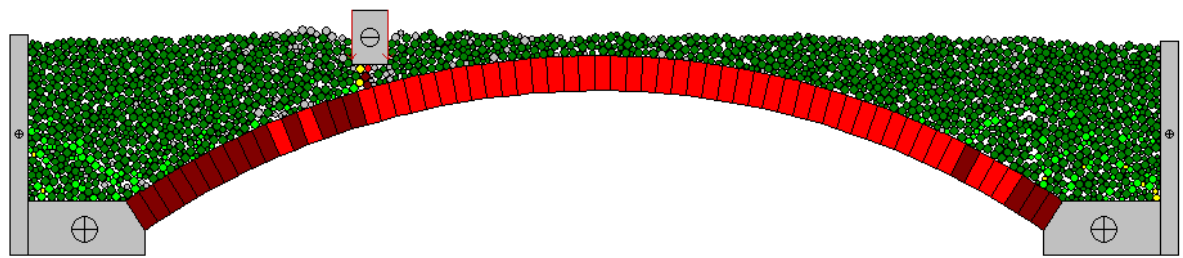
A Figura 8-21 apresenta uma configuração do sistema para o peso próprio e a Figura 8-22 para uma carga inferior à de colapso. A Figura 8-23 mostra o mecanismo de colapso do arco com o tímpano.



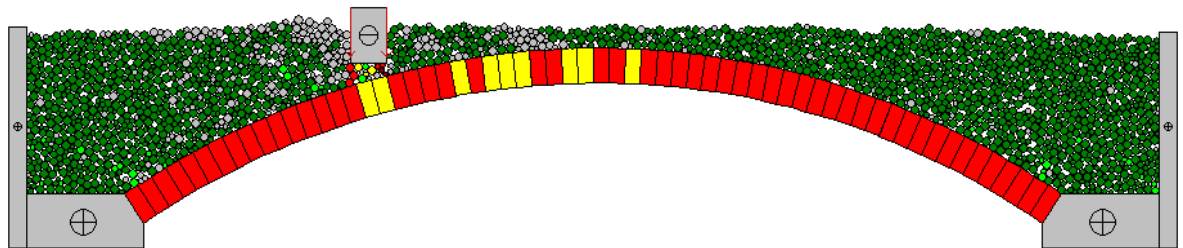
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 8-17: Soluções para a carga de: (a) 347 kN; (b) 947 kN; (c) 1147 kN; e (d) 3147 kN.

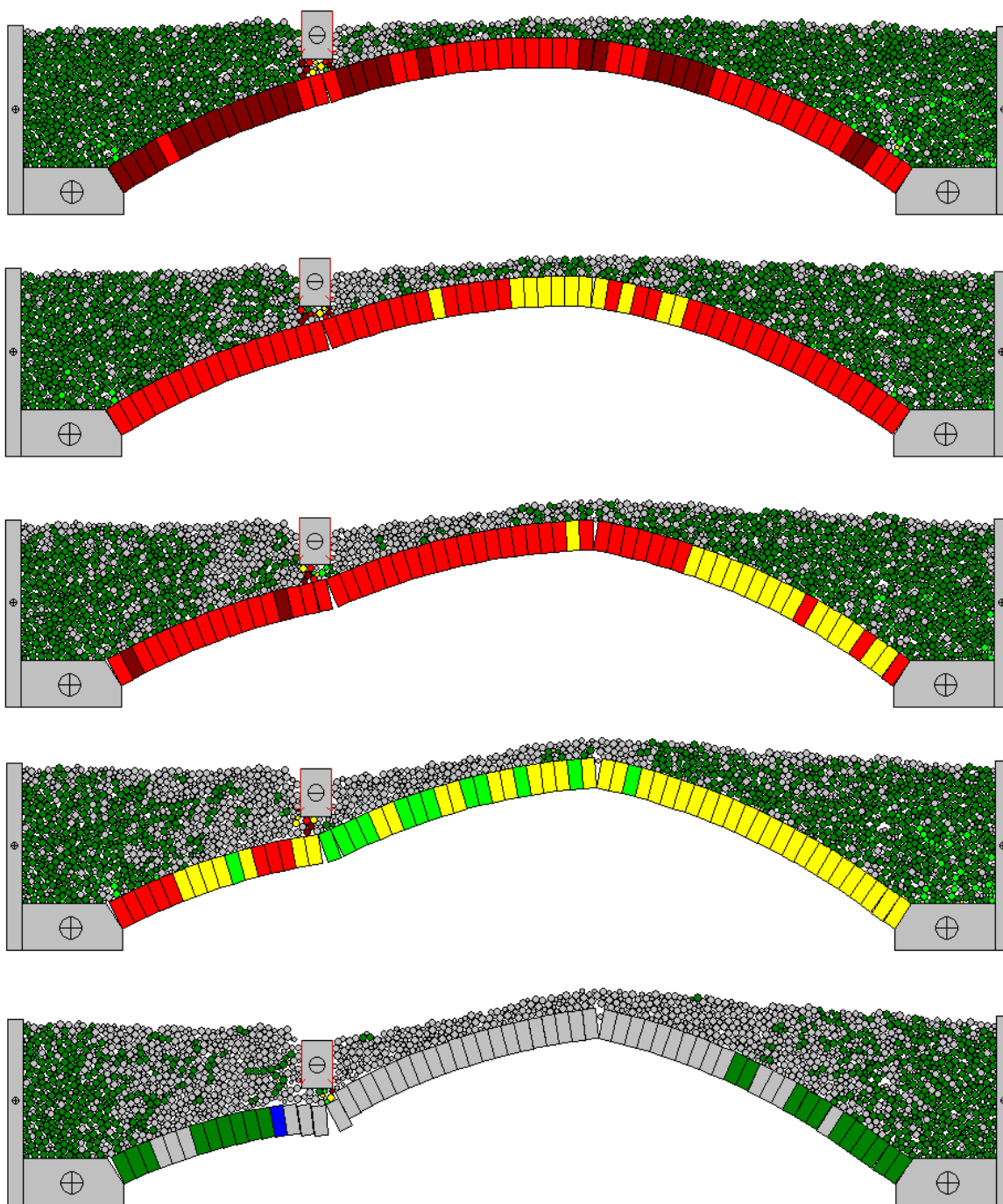


Figura 8-18: Colapso efectivo. Carga de 3147 kN.

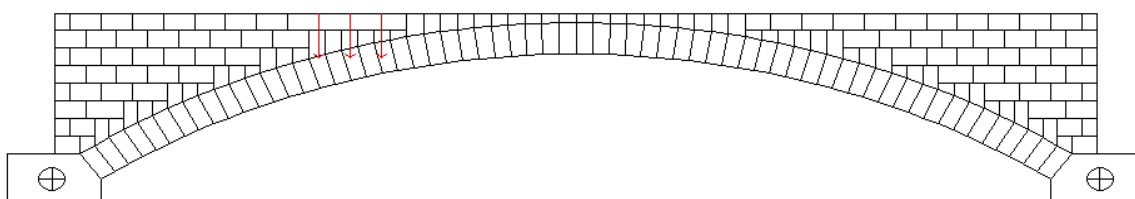


Figura 8-19: Arco com os muros de tímpano e a carga.

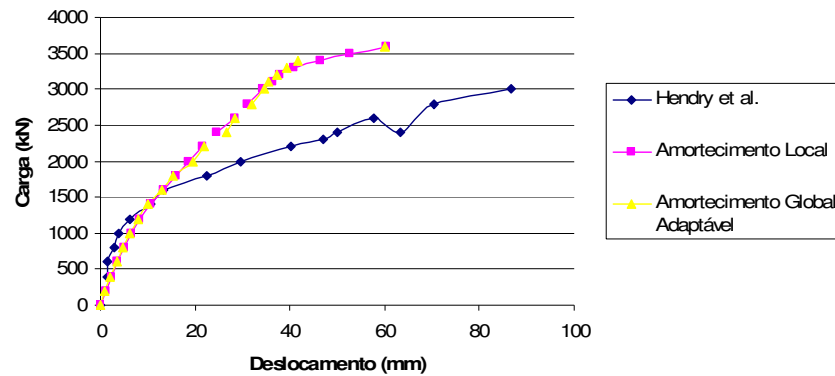


Figura 8-20 : Relação entre o deslocamento e a carga.

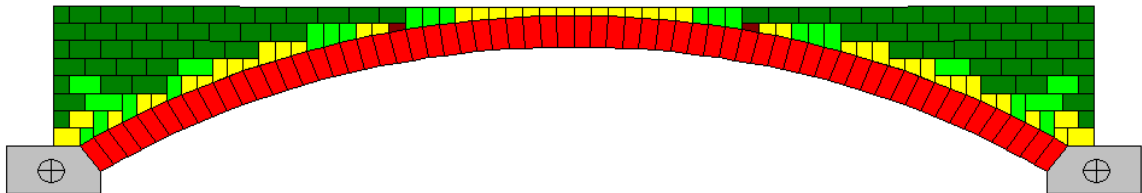


Figura 8-21: Solução do método dos elementos discretos para o peso próprio.

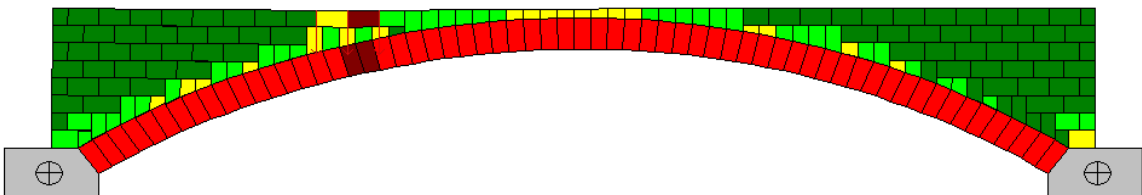


Figura 8-22: Equilíbrio para uma carga inferior à de colapso.

8.3.5. Conclusão

Considerando o resultado dos modelos 3 e 4 das duas secções anteriores e estabelecendo uma proporção entre as larguras dos elementos constituintes da ponte, uma largura de 7,86 m para o material de enchimento e de 0,44 m para os muros de tímpano, obtém-se uma carga de rotura de 3171 kN correspondendo a um erro de cerca de 2,5% quando comparado com o valor obtido *in situ*. Note-se que se admitiu a inexistência de muros longitudinais interiores e que o modelo proposto só permite uma aproximação pouco rigorosa ao comportamento 3D de uma ponte deste tipo. A Figura 8-24 reúne as curvas obtidas com os quatro modelos considerados e o resultado de Hendry *et al.*

O exemplo apresentado mostra que o programa de elementos discretos misto implementado

tem capacidade para vir a ser um programa a considerar em problemas onde se pretenda determinar a carga de colapso de pontes em arco de alvenaria. Pode concluir-se que a utilização de elementos discretos circulares para simular o material de enchimento permite a obtenção de resultados numéricos muito próximos dos obtidos através de ensaios *in situ*.

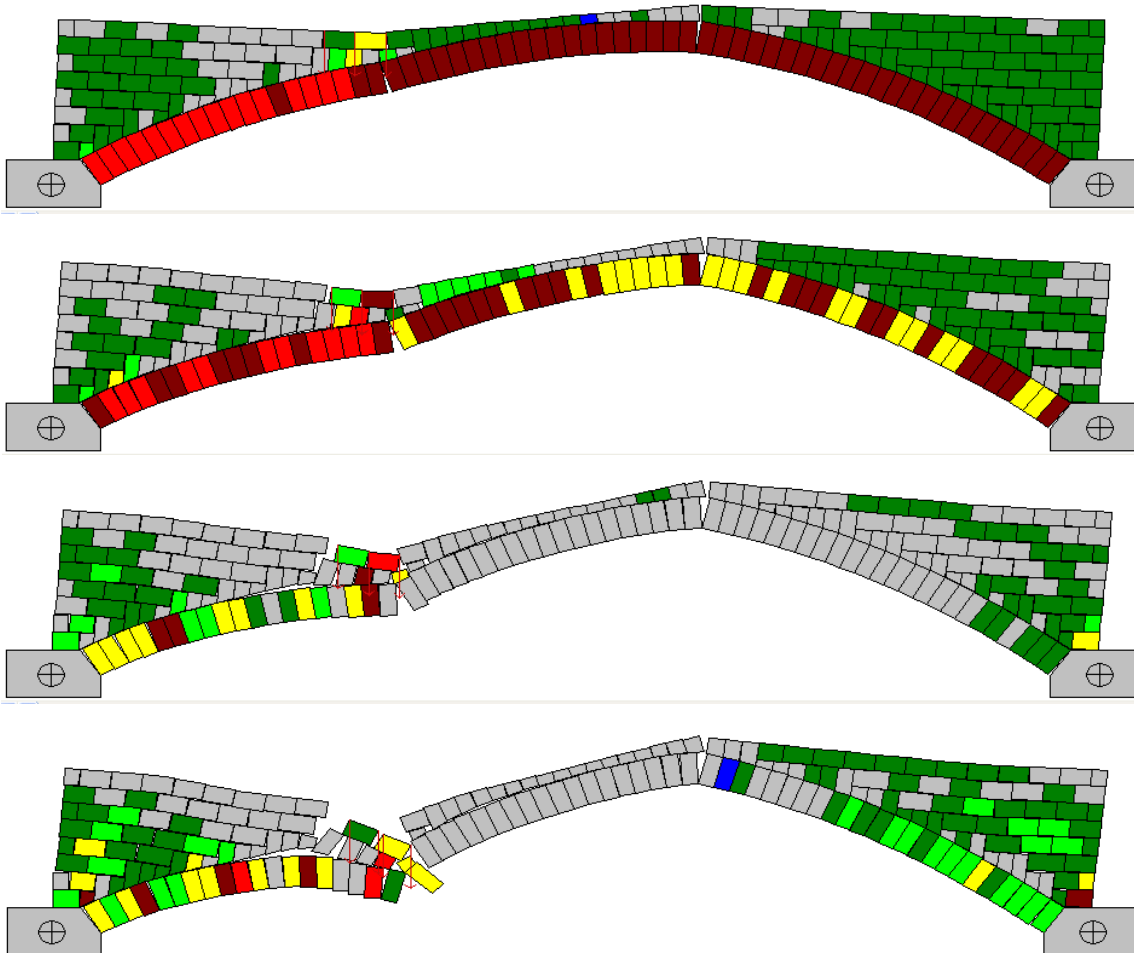


Figura 8-23: Mecanismo de colapso do arco com muro de tímpano. Carga de 3600 kN.

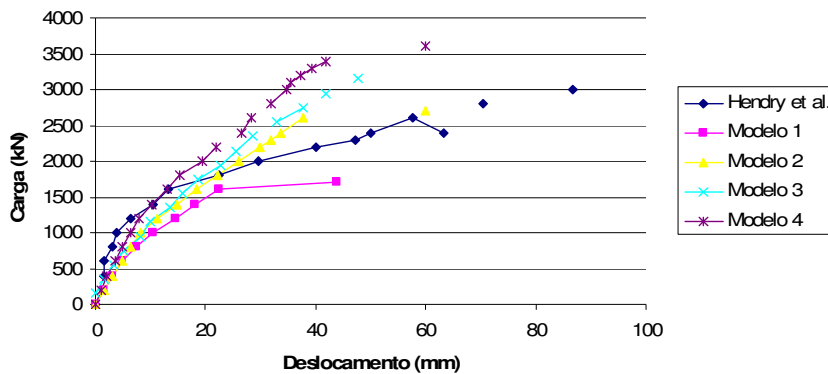


Figura 8-24: Comparação dos resultados dos quatro modelos com o resultado de Hendry *et al.*

O modelo 1 apresentou um valor baixo para a carga de colapso, o que confirma a relevância da inclusão do material de enchimento no modelo de elementos discretos. Também era esperado um valor alto para a carga de rotura do modelo 4, cuja rigidez é elevada pela inclusão do muro de tímpano. O modelo 2 é um exemplo bastante interessante pela sua simplicidade, permitindo uma estimativa do valor da carga de rotura que mostrou ser próximo do obtido no ensaio.

A comparação dos vários tipos de amortecimento fictício permitiu concluir que não interferem com o resultado final, verificando-se uma maior eficiência na utilização tanto do amortecimento local como do global adaptável.

A adopção de comprimento de influência fixo ou variável neste tipo de análise mostrou ser pouco relevante, excepto no que respeita ao valor das tensões máximas de compressão que, no entanto, não apresenta consequências na determinação do estado de colapso, incluindo a possibilidade de colapso por esmagamento do material.

9. Conclusões e futuros desenvolvimentos

Neste trabalho foi apresentado um modelo numérico de elementos discretos que permite determinar a capacidade de carga de pontes em arco de alvenaria e foi descrito o programa desenvolvido para a sua implementação computacional, baseado no método dos elementos discretos com elementos rígidos poligonais, de 3 a 5 vértices, e circulares.

Nas secções seguintes são tecidas algumas considerações finais acerca do programa computacional desenvolvido. Na secção de conclusões apresentam-se os resultados mais significativos e na última secção apresentam-se possíveis melhoramentos e desenvolvimentos.

9.1. Conclusões

Foi apresentado um tratamento unificado da representação numérica do contacto em modelos de elementos discretos que incluem elementos discretos poligonais e circulares, assim como, a sua implementação computacional através de algoritmos de detecção e actualização de contactos que contemplam todos os casos de interacção entre aqueles dois tipos de elementos discretos, tendo em atenção a eficiência de cálculo requerida em sistemas com muitos elementos. As tolerâncias de sobreposição e de separação foram

definidas em função da distância de arredondamento. Nas análises efectuadas verificou-se que os factores 1,1 para a activação da rotina de detecção (secção 4.5.4), 2,0 para a actualização de contactos e 1,0 para a detecção de contactos (secção 3.8.7) se mostraram apropriados para sistemas contendo os dois tipos de elementos discretos. Verificou-se também que a consideração do modelo constitutivo elástico linear sem tracções associado ao modelo de Mohr-Coulomb forneceu resultados adequados.

O desenvolvimento de rotinas para a determinação dos estados de tensão e extensão, permitiram aumentar as potencialidades do programa, revelando-se a determinação dos estados de tensão fundamental para a análise e interpretação dos resultados.

Foi dada especial atenção às questões numéricas essenciais para a aplicação do método dos elementos discretos, tais como: (1) o amortecimento; (2) o passo de tempo; (3) o equilíbrio energético. Foram considerados dois tipos de amortecimento, o amortecimento local e o amortecimento global. Verificou-se que a adopção do amortecimento global requer um tempo de processamento excessivo, que pode ser remediado mediante a implementação de um esquema de amortecimento adaptável. Como, além disso, as análises efectuadas com diversos modelos de amortecimento conduziram a soluções estruturais semelhantes, conclui-se ser preferível a adopção quer do modelo de amortecimento global adaptável quer do modelo de amortecimento local, atendendo ao facto do tempo de cálculo ser inferior. Para a determinação do passo de tempo óptimo foi comparada a performance do cálculo rigoroso baseado na resolução do problema de valores próprios com diversos procedimentos expeditos baseados no teorema de Gerschgorin ou na fórmula de Morikawa (utilizada nos programas comerciais de elementos poligonais ou circulares). A condição de equilíbrio energético permitiu despistar situações de instabilidade interrompida, porém tal situação não foi ilustrada.

O desenvolvimento de um procedimento para a construção das matrizes de rigidez e de massa do sistema de elementos discretos rígidos, para a hipótese de contactos efectivos elásticos, possibilitou o cálculo de frequências próprias por resolução do problema de valores próprios associado e a consequente determinação do passo de tempo crítico abrindo ainda portas à realização de estudos com vista à calibração do modelo numérico.

A secção de geração das malhas de elementos discretos poligonais e elementos discretos circulares, teve por objectivo a apresentação de vários processos de geração automática de malhas de elementos discretos poligonais e circulares. Para as malhas de elementos discretos poligonais, foram tratados vários aspectos relativos ao processo de geração automática e de utilização do programa AutoCAD. Numa segunda etapa foram definidos os elementos discretos circulares e analisada a transferência entre ficheiros dos tipos documento de texto e DXF, quer através da leitura de ficheiros do tipo DXF, a partir de um programa em FORTRAN, quer através de ficheiros do tipo documento de texto com o programa AutoCAD acoplado a uma macro DVB. Por último, verificou-se que os vários algoritmos evidenciam a robustez requerida para proceder a qualquer tipo de geração de malhas de sistemas com elementos discretos poligonais e circulares.

As rotinas gráficas desenvolvidas facilitaram o processo de identificação/visualização de falhas do programa no decurso da análise, evitando frequentemente a morosa inspecção dos ficheiros de resultados, tendo-se pois revelado essenciais para a sua depuração.

O estudo da ponte de Bridgemill mostra que o programa é adequado para o estudo da capacidade de carga de pontes em arco de alvenaria. Verificou-se que a consideração de elementos discretos circulares para simular o material de enchimento do arco conduziu a uma carga de rotura muito próxima da registada no ensaio *in situ* referenciado na literatura. O modelo do arco isolado confirma a importância do material de enchimento uma vez que foi o que apresentou menor carga de colapso. O modelo com o arco e os murros de tímpano confirma o incremento considerável de resistência da ponte proporcionado por estes elementos uma vez que apresentou a máxima carga de colapso. O modelo do arco isolado em que o material de enchimento foi substituído pelo seu peso mostrou ser razoável uma vez que permite determinar uma boa aproximação para a carga de colapso de forma mais expedita. Verificou-se também que as análises feitas com e sem a actualização do comprimento de influência conduziram a valores diferentes para as tensões, que porém se revelaram sempre inferiores ao valor da resistência à compressão da unidade de alvenaria.

No processo de validação do modelo verificou-se a inexistência de informação relativa a certas propriedades dos materiais, o que originou a sua calibração. A calibração do modelo consiste em ajustar os seus parâmetros atendendo a determinados limites aceitáveis. A

calibração efectuada resumiu-se à determinação de valores para a rigidez dos contactos (k_n, k_s) entre elementos discretos circulares tais que a malha de elementos discretos circulares que simula o enchimento fornecesse valores para os módulos de deformação e distorção (E, G) apropriados de acordo com a informação disponível na literatura. Este procedimento representa um método geral para determinar o valor para parâmetros micro-mecânicos (por exemplo k_n, k_s) que seja compatível com o valor de uma dada propriedade macroscópica (por exemplo E, G), obtida quer na literatura quer experimentalmente.

9.2. Desenvolvimentos futuros

Para tornar o programa desenvolvido mais competitivo é necessário (1) dotá-lo de capacidade de resolver problemas de dimensão considerável, num curto espaço de tempo, (2) que a entrada de dados seja amigável e que (3) a saída de resultados facilite a sua análise. Estes dois últimos requisitos consomem frequentemente muito mais tempo que o de processamento devido à sua complexidade. Para os concretizar, em primeiro lugar, são necessários algoritmos de interface eficazes em termos da concepção do modelo, da atribuição das propriedades dos materiais, da criação de ficheiros de resultados e da visualização destes. Em segundo lugar, os algoritmos de detecção de contactos, de solução das equações de movimento (determinação do amortecimento e do passo de tempo) e de determinação de valores próprios, por exemplo, devem ser melhorados substancialmente tendo em vista a redução do tempo de cálculo, que é muito elevado para este modelo misto. São particularmente relevantes os aspectos seguidamente elencados:

- (1) A validação numérica do programa informático desenvolvido requer a comparação de performance e de resultados com os obtidos com programas que implementem outros métodos, para um conjunto de problemas padrão representativo. Serão particularmente relevantes para esta comparação tanto o método dos elementos discretos com elementos deformáveis como o método dos elementos finitos.
- (2) Optimizar o algoritmo numérico adoptado, ou considerar algoritmos mais eficazes, de modo a permitir o estudo de sistemas com um número de graus de

liberdade mais elevado. Este desenvolvimento permitirá averiguar a dependência da solução do problema estrutural, em particular o valor da capacidade portante de pontes em arco de alvenaria, do refinamento da malha de elementos discretos circulares utilizada para simular o enchimento do arco.

- (3) Generalizar o programa elaborado de modo a permitir o estudo de outras tipologias de estruturas planas de alvenaria, nomeadamente, paredes. Estas tanto podem ser modeladas no seu próprio plano, como segundo um plano normal que contém os dois panos de unidades de alvenaria irregular delimitando um espaço preenchido com material de enchimento.
- (4) Desenvolver rotinas para a aplicação de acções dinâmicas, incluindo acelerações nos apoios, de forma a realizar a análise dinâmica de estruturas. A análise dinâmica de estruturas em alvenaria pelo método dos elementos discretos apresenta ainda tópicos que requerem aprofundamento, em particular pela elevada capacidade de processamento informático requerida. Por exemplo, o modelo de elementos discretos poligonais é adequado para componentes estruturais com dimensão limitada, tais como arcos, pilares, paredes, etc. Para estruturas de maior dimensão ou mais complexas, estes modelos locais deverão ser enquadrados num modelo global aproximado obtido por redução do número de graus de liberdade original.
- (5) Implementar modelos de contacto mais elaborados. Os modelos utilizados por Lourenço (1996) para as juntas com argamassa contemplam o enfraquecimento à tracção e ao corte e a rotura em compressão (*cap model*). Estes modelos podem ser implementados no programa como referido nas secções 3.11 e 5.2.2. A consideração de modelos constitutivos mais realistas que englobem comportamento elástico não linear e comportamento plástico permitirá avaliar, por exemplo, se a diferença entre a curva deslocamento-carga experimental e a obtida através do modelo proposto nesta tese pode ser justificada pela lei constitutiva simples utilizada.
- (6) Incluir um modelo simples para a fractura das unidades de alvenaria, permitindo

que, numa determinada fase do processo de cálculo do programa, cada elemento discreto poligonal apresentando um nível de tensão acima de um valor especificado seja substituído por um conjunto de pequenos elementos discretos circulares. Este conjunto de elementos circulares, com uma envolvente semelhante à do elemento poligonal inicial, passa a constituir um macro-elemento. As ligações dos elementos contidos no macro-elemento apresentam uma relação constitutiva própria que modela a deformabilidade do macro-elemento e possibilita a sua própria fractura que ocorrerá, por exemplo, quando a tensão de tracção ultrapassa um valor dado pelo modelo de resistência assumido. Esta técnica foi implementada num modelo para betão por Azevedo (2003) que representou o agregado do betão com macro-elementos discretos circulares formados por elementos discretos circulares ligados entre si. O autor deste trabalho está a preparar uma nova linha de investigação nesta área.

- (7) Aplicar o programa ao estudo de algumas patologias, quer estruturais quer materiais, que frequentemente afectam as pontes em arco de alvenaria antigas, para avaliar a sua segurança. Exemplos dessas patologias são os movimentos dos encontros, a abertura de juntas e a degradação do material das unidades de alvenaria.
- (8) Generalizar o programa desenvolvido de modo a possibilitar o estudo de problemas tridimensionais com elementos discretos esféricos e “poliédricos”. Nestes últimos as arestas seriam aproximadas por superfícies cilíndricas e os vértices por superfícies esféricas. Este desenvolvimento exige um trabalho bastante intenso de programação em virtude da complexidade da geometria 3D.

APÊNDICE A

Apresenta-se neste apêndice um fluxograma resumo do programa desenvolvido (Figura A-1).

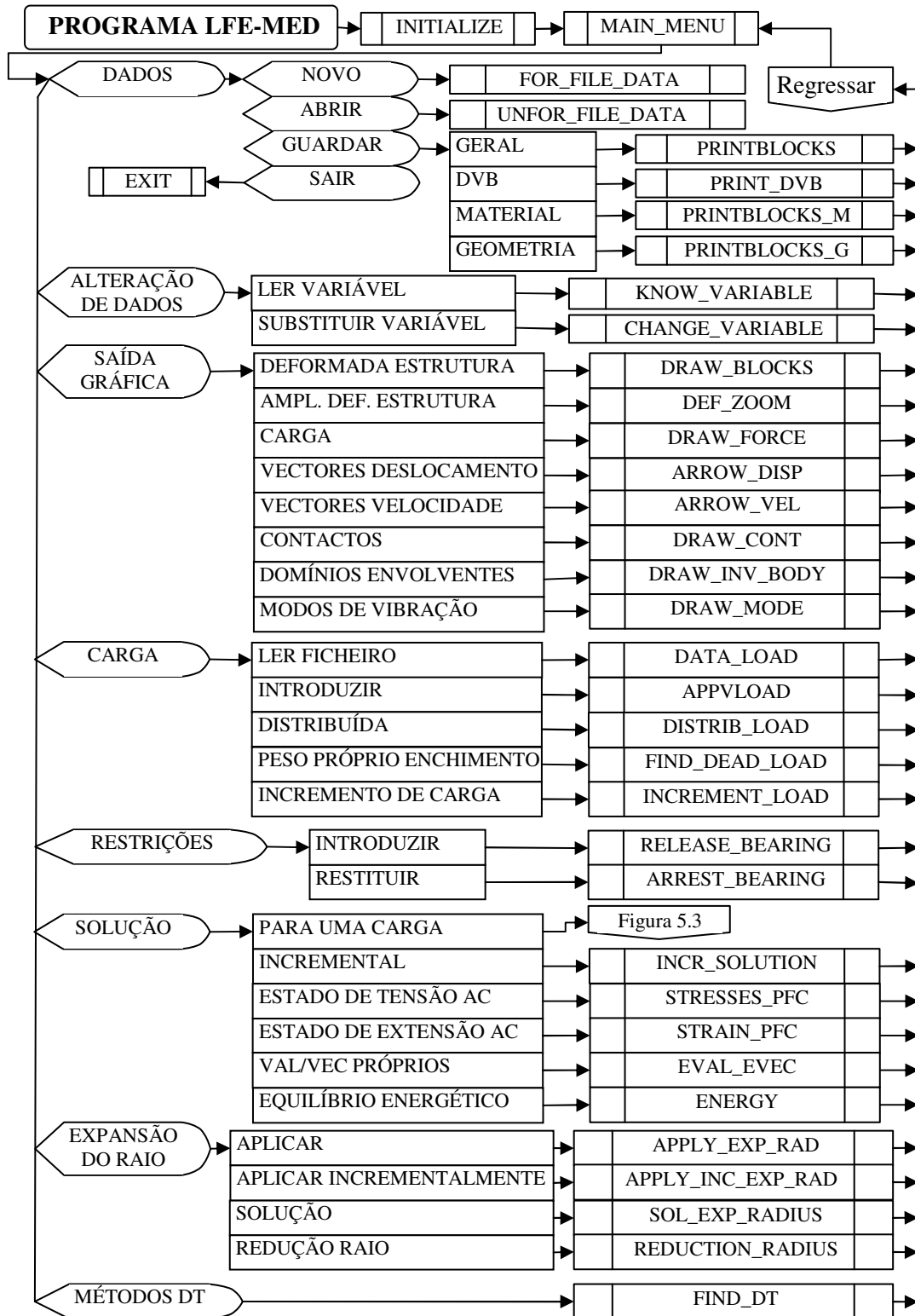
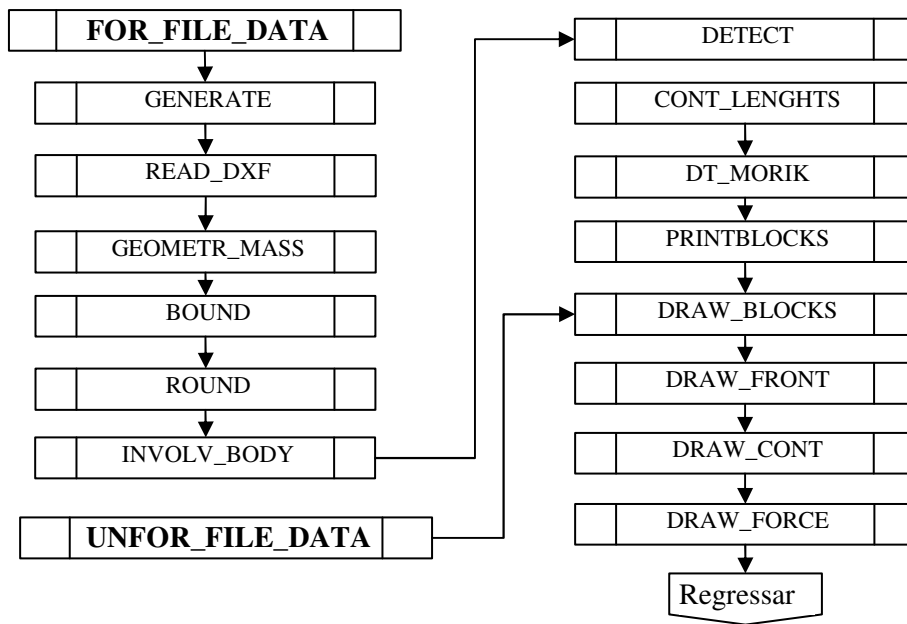


Figura A-1: Fluxograma resumo do programa desenvolvido.



FOR_FILE_DATA → Leitura de dados de entrada de um ficheiro formatado

UNFOR_FILE_DATA → Leitura de dados de um ficheiro não formatado de uma estrutura salva numa anterior aplicação do LFE-MED.

GENERATE → Geração das várias malhas de EDP e EDC

READ_DXF → Leitura de ficheiros com a extensão DXF

GEOMETR_MASS → Características geométricas e matrizes das quantidades de inércia

BOUND → Matriz restrição ao movimento

ROUND → Distância de arredondamento

INVOLV_BODY → Domínios envolventes

DETECT → Detecção de contactos

CONT LENGHTS → Comprimentos de influência

DT_MORIK → Passo de tempo, fórmula de Morikawa

PRINTBLOCKS → Guardar dados num ficheiro formatado

DRAW_BLOCKS → Desenhar estrutura

DRAW_FRONT → Desenhar os domínios rectangulares

DRAW_CONT → Desenhar os contactos

DRAW_FORCE → Desenhar as cargas aplicadas

Figura A-2: Continuação do fluxograma apresentado na Figura A-1.

APÊNDICE B

Este apêndice pretende mostrar de uma forma genérica como pode ser considerada a deformabilidade dos elementos discretos poligonais. Como referido na secção 2.4 existem duas formulações:

- (1) elemento discreto totalmente deformável, onde as unidades de alvenaria são divididas por uma malha de elementos finitos triangulares no plano ou tetraédricos no espaço, permitindo que a fronteira permaneça poligonal ou tetraédrica o que facilita a descrição da geometria dos contactos (LEMOS 1998^a);
- (2) elemento discreto de deformação simples, onde é considerado um estado de tensão uniforme no interior de cada elemento discreto.

B.1. Elemento discreto totalmente deformável

Os elementos discretos são divididos em elementos finitos triangulares constituindo uma malha, ver Figura B-1. A geometria triangular dos elementos finitos justifica-se pela simplicidade com que é gerada automaticamente a malha interna, fazendo-se coincidir os vértices dos triângulos com os vértices do polígono.

Como é apresentado no capítulo 5, o método dos elementos discretos consiste na aplicação alternada iterativa da lei de movimento e da lei constitutiva. Quando são considerados elementos discretos deformáveis, os deslocamentos são calculados ao nível dos nós da malha dos elementos finitos triangulares, e quando são considerados elementos discretos rígidos os deslocamentos são calculados ao nível do centro de massa do elemento discreto. É definida uma lei constitutiva para o elemento discreto deformável. A Figura B-2 mostra resumidamente o ciclo de cálculo do método dos elementos discretos e evidencia as principais diferenças entre as duas formulações.

Assim, os principais passos do método dos elementos discretos com elementos discretos deformáveis são (CUNDALL 1978) e (LEMOS 1987):

- (1) as velocidades nos nós da malha de elementos finitos são obtidas através da lei movimento;
- (2) são calculados os incrementos de deslocamento;
- (3) é actualizada a localização da fronteira do elemento discreto e são calculados os incrementos de deslocamento nos contactos;
- (4) é aplicada uma lei constitutiva para as juntas para obter as novas tensões de contacto e conseqüentemente as novas forças de contacto;
- (5) são determinados os incrementos de extensões e rotações das envolventes dos nós, ver Figura B-3;
- (6) é aplicada a lei constitutiva para o elemento discreto poligonal para obter as novas tensões das envolventes dos nós;
- (7) as forças de contacto, as tensões das envolventes dos nós e as forças variáveis são adicionadas voltando-se ao passo (1).

Seguidamente alguns destes passos são descritos de forma mais pormenorizada.

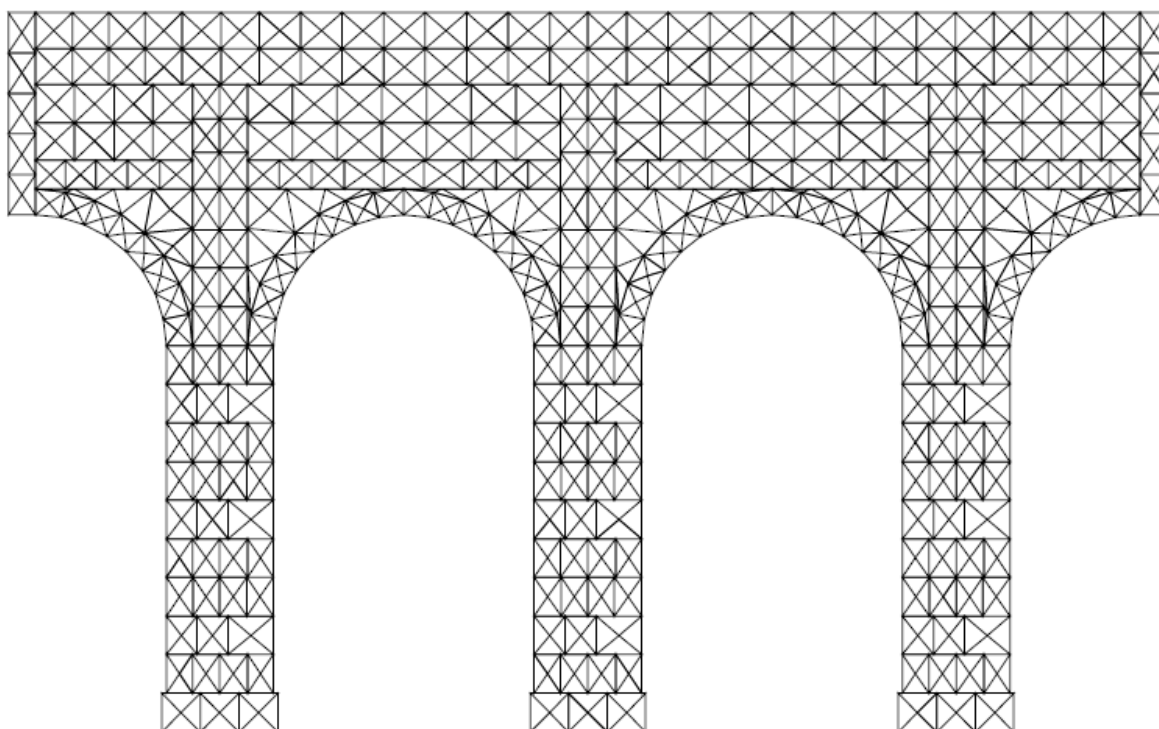


Figura B-1: Malha de elementos triangulares do método dos elementos discretos. Fachada do claustro do Mosteiro de S. Vicente de Fora de Lisboa. Figura retirada de (LEMOS 1998b).

Passo (1)

A equação de movimento segundo a coordenada i para cada nó da malha de elementos finitos é

$$m \ddot{u}_i + C_D \dot{u}_i = F_i + m g_i \quad (\text{B.1})$$

onde g_i é a constante da aceleração da gravidade, C_D o amortecimento e F_i é uma resultante de forças dada por

$$F_i = F_{C,i} + Q_i + F_{N,i} \quad (\text{B.2})$$

As parcelas $F_{C,i}$ e Q_i são as forças de contacto e as forças externas nos nós da fronteira da malha.

A parcela $F_{N,i}$ contém as contribuições das tensões na zona adjacente ao nó N , sendo dada por

$$F_{N,i} = \int_q \sigma_{ij} n_j ds \quad (\text{B.3})$$

onde, ver Figura B-3, q é o contorno da envolvente associada ao nó N , definida pelo centro de massa e os pontos médios das arestas de cada um dos triângulos ligados ao nó N , σ_{ij} é o tensor das tensões da envolvente do nó e n_j são as componentes do vector externo normal ao contorno q .

Para triângulos de deformação constante o teorema da divergência permite obter,

$$F_N = \int_A \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dA \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_{2,2} - x_{2,3} & -x_{2,1} + x_{2,3} & x_{2,1} - x_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_{1,2} + x_{1,3} & x_{1,1} - x_{1,3} & -x_{1,1} + x_{1,2} \\ -x_{1,2} + x_{1,3} & x_{1,1} - x_{1,3} & -x_{1,1} + x_{1,2} & x_{2,2} - x_{2,3} & -x_{2,1} + x_{2,3} & x_{2,1} - x_{2,2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

e

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{ \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \} \quad (\text{B.6})$$

Em ambos os integrais a numeração dos triângulos, contíguos ao nó, é feita no sentido directo.

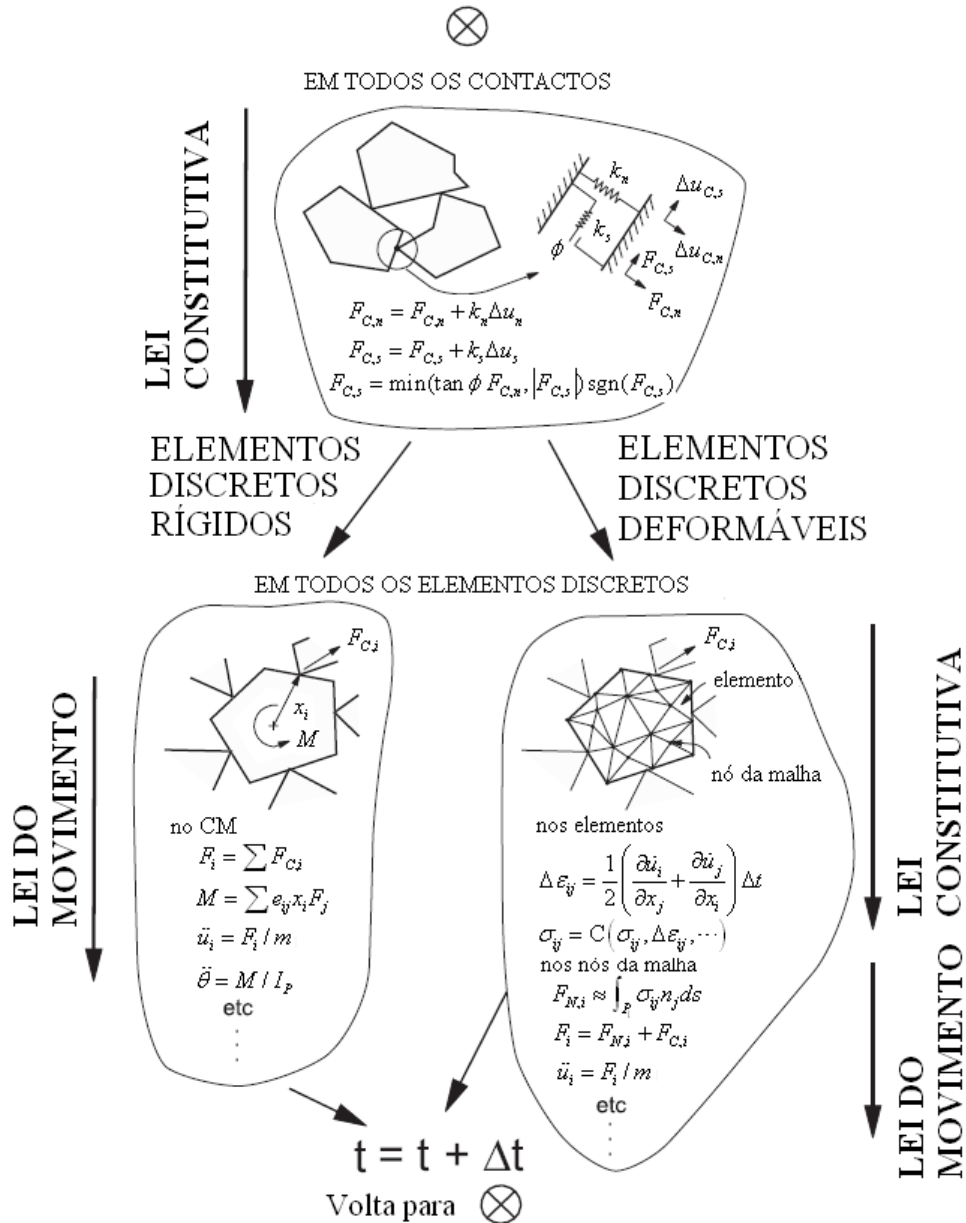


Figura B-2: Ciclo de cálculo do método dos elementos discretos. Figura adaptada de (ITASCA 1999).

Para que possam ser consideradas constantes as tensões na envolvente ao nó o contorno q é substituído no integral (B.3) pelo contorno q_1 , definido como a linha poligonal fechada constituída pelos segmentos de recta que bissectam as arestas dos triângulos que contêm o nó N , isto é

$$F_{N,i} \approx \int_{q_1} \sigma_{ij} n_j ds \quad (B.7)$$

cuja discretização conduz a

$$F_{N,i} \approx \sum_{Z=1}^{N_Z} \sigma_{ij}^Z \Delta s^Z n_j^Z \quad (\text{B.8})$$

onde N_Z é o número de triângulos que contém o nó N e Δs é o respectivo comprimento do contorno (CUNDALL 1978).

Considere-se a contribuição NZ_2Z_1 do elemento NES para a envolvente do nó N . O produto $\Delta s^Z n_j^Z$ na equação (B.8) é dado por

$$\begin{aligned} \Delta s^Z n_1^Z &= x_{2,Z_2}^Z - x_{2,Z_1}^Z \\ \Delta s^Z n_2^Z &= x_{1,Z_1}^Z - x_{1,Z_2}^Z \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Porém, como são armazenadas as coordenadas dos vértices de cada triângulo é preferível escrever

$$\begin{aligned} \Delta s^Z n_1^Z &= \frac{1}{2} (x_{2,E}^Z - x_{2,S}^Z) \\ \Delta s^Z n_2^Z &= -\frac{1}{2} (x_{1,E}^Z - x_{1,S}^Z) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

O segundo membro da primeira equação de (B.10) pode ser comparado com os coeficientes B_{11} e B_{34} da matriz (B.5), e o segundo membro da segunda equação de (B.10) com os coeficientes B_{24} e B_{31} .

Passo (2)

Os incrementos de deslocamento são calculados por

$$\Delta u_i = \dot{u}_i \Delta t \quad (\text{B.11})$$

Passo (5)

Os incrementos de extensões e de rotações na envolvente do nó são dados por

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \frac{\Delta \epsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{B.12})$$

$$\dot{\omega}'_{ij} = \frac{\Delta \omega'_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (\text{B.13})$$

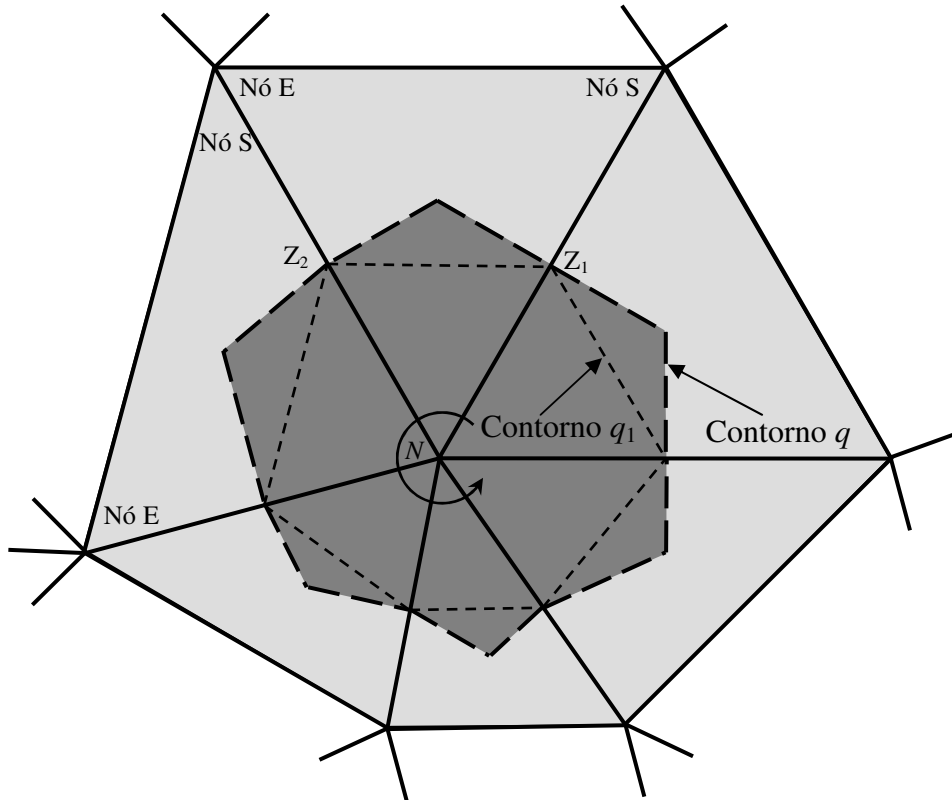


Figura B-3: Definição da envolvente do nó N (sombreado escuro) e dos contornos q e q_1 .

Uma vez que o procedimento é incremental as relações lineares anteriores não necessitam de verificar a condição de pequenas deformações. Considerando a formulação para elementos de deformação constante, aquelas expressões tomam a seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{11} &= \frac{1}{2A} \dot{u}_{1,i} \bar{x}_{2,i} \\ \dot{\epsilon}_{22} &= \frac{1}{2A} \dot{u}_{2,i} \bar{x}_{1,i} \\ \dot{\epsilon}_{12} &= \frac{1}{4A} (\dot{u}_{1,i} \bar{x}_{1,i} + \dot{u}_{2,i} \bar{x}_{2,i}) \\ \dot{\theta}'_{12} &= \frac{1}{4A} (\dot{u}_{1,i} \bar{x}_{1,i} - \dot{u}_{2,i} \bar{x}_{2,i})\end{aligned}\tag{B.14}$$

onde $\bar{x}_{1,i} = x_{1,k} - x_{1,j}$ e $\bar{x}_{2,i} = -(x_{2,k} - x_{2,j})$, com os índices inferiores i, j e k a respeitarem uma permutação cíclica, com valores 1, 2 e 3. O índice repetido em (B.14) segue a convenção de Einstein para a soma.

Passo (6)

É usada uma relação constitutiva incremental, pelo que é possível correr problemas de

carácter não linear. São incluídos critérios de rotura para contemplar problemas elásto-plásticos onde as regras de endurecimento e as leis de escoamento são estabelecidas. A título exemplificativo, é apresentada uma relação que segue uma lei elástica,

$$\Delta\sigma_{ij} = \lambda \Delta\varepsilon_v \delta_{ij} + 2G \Delta\varepsilon_{ij} \quad (\text{B.15})$$

onde $\Delta\sigma_{ij}$ são os incrementos elásticos do tensor das tensões, λ é a constante de Lamé ($\lambda = \nu E / (1 - \nu - 2\nu^2)$), G é o módulo de distorção do material ($G = E / (2 + 2\nu)$), $\Delta\varepsilon_{ij}$ são os incrementos das extensões e $\Delta\varepsilon_v$ é o incremento de extensão volumétrica

$$\Delta\varepsilon_v = \Delta\varepsilon_{11} + \Delta\varepsilon_{22} \quad (\text{B.16})$$

Em análises envolvendo grandes deslocamentos as tensões do passo de tempo anterior são corrigidas para atender à rotação incremental (BELYTSCHKO 1983).

Os passos (3), (4) e (7) são similares aos apresentados nas secções 5.2.1, 3.11 e 5.2.2, respectivamente.

B.2. Elemento discreto de deformação simples

O processo anterior tem a vantagem de tratar elementos discretos poligonais de geometria complexa, carregamentos complexos e sistemas que experimentam deformações consideráveis, daí a divisão em elementos finitos, conduzindo o refinamento da malha a um maior número de graus de liberdade, o que possibilita a obtenção de uma forma deformada mais adequada.

Alternativamente ao elemento discreto poligonal totalmente deformável é possível estabelecer o elemento discreto poligonal de deformação simples (CUNDALL 1978). Trata-se de considerar a deformação do elemento discreto poligonal considerando unicamente a sua deformabilidade volumétrica, ver Figura B-4. Neste caso o elemento discreto poligonal não é dividido em elementos finitos.

O conceito associado ao elemento de deformação simples consiste em equilibrar a pressão aplicada, P , com a tensão isotrópica, σ_1 , no interior do elemento discreto poligonal. No processo de convergência os pontos pertencentes ao contorno do elemento discreto

poligonal movem-se para o interior (ou para o exterior) na direcção do centro de massa do mesmo, isto é o valor da tensão isotrópica no interior oscila em torno de um valor igual ao da pressão aplicada. Em termos práticos, a oscilação volumétrica segundo este primeiro modo, é análoga à de um sistema constituído por uma mola linear elástica vertical suportando na sua extremidade uma massa m e uma força variável Q . A força variável Q é a pressão aplicada P , a força na mola elástica F_k é a tensão isotrópica interna σ_I , o deslocamento u é a extensão volumétrica $\varepsilon_v = \Delta V / V$, a velocidade \dot{u} é a taxa de variação da extensão volumétrica $\dot{\varepsilon}_v$, a massa m na extremidade é a massa efectiva m_e do elemento discreto poligonal, a constante da mola k é o módulo de deformabilidade K , a lei de equilíbrio força deslocamento $u = Q/k$ é a lei de equilíbrio pressão extensão volumétrica $\varepsilon_v = P/K$ e a frequência angular própria $\omega = \sqrt{k/m}$ vem $\omega = \sqrt{K/m_e}$. Defini-se massa efectiva m_e como a massa que faz com que a frequência angular própria ω seja igual à frequência do primeiro modo volumétrico. É determinada fazendo-se corresponder a velocidade de propagação de onda do sistema contínuo ($c = \sqrt{E^*/\rho}$) à velocidade do sistema discreto constituído por molas elásticas ($c = \ell\sqrt{E^*/m_e/2}$),

$$m_e = \frac{\ell^2 m}{4A} \quad (\text{B.17})$$

onde ℓ é o comprimento do elemento discreto poligonal na direcção de propagação da onda, E^* é o módulo de elasticidade correspondente ao tipo de onda (igual a G para as ondas “S” ou de corte e igual a $K + 4G/3$ para as ondas “P” ou de compressão), e m e A são, respectivamente, a massa e a área do elemento discreto poligonal. A massa volúmica ρ é dada por $m/V \approx m/A$ para uma espessura unitária.

Por analogia com o algoritmo das diferenças finitas centrais aplicado ao sistema massa-mola elástica, a resposta da variação volumétrica do elemento discreto poligonal é dada por

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_v &= \dot{\varepsilon}_v + \frac{\Delta t}{m_e} (P - \sigma_I) \\ \sigma_I &= \sigma_I + K \dot{\varepsilon}_v \Delta t \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

onde, para o elemento discreto poligonal, a primeira equação representa a lei de movimento para as extensões e a segunda a lei constitutiva.

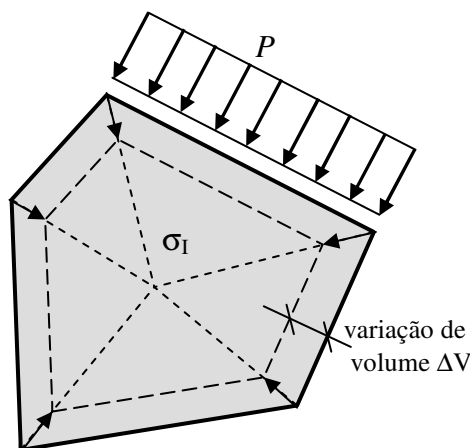


Figura B-4: Deslocamento da fronteira devido à compressão volumétrica.

Atendendo ao teorema da divergência de Gauss, a tensão média no interior do volume do elemento discreto poligonal pode ser determinada a partir de (5.84).

Na formulação de elementos discretos poligonais rígidos os deslocamentos da fronteira são obtidos a partir dos deslocamentos e da rotação do centro de massa. Na formulação de elementos discretos poligonais deformáveis os deslocamentos da fronteira são ainda função da deformação do elemento. Considerando, por exemplo, uma deformação volumétrica por compressão, o vector de deslocamento de cada um dos vértices do elemento discreto poligonal aponta para o interior e na direcção do centro de massa do mesmo, e a sua grandeza é proporcional à distância entre o centro de massa e o vértice, ver Figura B-4. O incremento de deslocamento $\Delta u_{C,i}$ do ponto na fronteira com coordenadas $y_{C,j}$ relativamente ao centro de massa do elemento é dado por

$$\Delta u_{C,i} = y_{C,j}(\Delta \varepsilon_{ij} + \Delta \theta_{ij}) + \Delta u_i \quad (\text{B.20})$$

onde, $\Delta \theta_{ij}$ e Δu_i , são respectivamente, os incrementos de rotação e de translação de corpo rígido utilizados na formulação de elementos discretos poligonais rígidos e $\Delta \varepsilon_{ij}$ são os incrementos de extensão.

APÊNDICE C

Macro em *Visual Basic for Applications* desenvolvida no programa AutoCAD (AUTOCAD 2007) para a leitura de ficheiros com a extensão do tipo XLS™ criados com a aplicação do programa Microsoft Office Excel® 2003 e respeitando uma determinada ordem, ver a Tabela C-1.

```
Private Sub CommandButton1_Click()
CommonDialog1.ShowOpen
Dim XLFile As Object
Dim i As Integer
Dim Pontos3(0 To 11) As Double, a As Integer, b_type As Integer, ncorb As Integer
Dim Pontos4(0 To 14) As Double, tx As Double, ty As Double, nx As Double, ny As Double, x1 As
Double, y1 As Double, x2 As Double, y2 As Double, lz As Double
Dim Pontos5(0 To 17) As Double, cg_tot_x As Double, cg_tot_y As Double
Dim SPHERE(0 To 2) As Double, RAI0 As Double, textoescrive As String
Dim startPoint(0 To 2) As Double, endPoint(0 To 2) As Double, SPHERE_APOIO(0 To 2) As
Double, RAI0_APOIO As Double

Set XLFile = GetObject(CommonDialog1.FileName)
With XLFile.sheets("P_BLOCKS")

i = 3
100 b_type = .CELLS(i, 3)
    ncorb = .CELLS(i, 4)
    cg_tot_x = .CELLS(i, 15)
    cg_tot_y = .CELLS(i, 16)
    b_fix_x = .CELLS(i, 12)
    b_fix_y = .CELLS(i, 13)
    b_fix_w = .CELLS(i, 14)

If (b_type = 1) Then
    If (ncorb = 3) Then
        Pontos3(0) = .CELLS(i, 5)
        Pontos3(1) = .CELLS(i, 6)
        Pontos3(2) = .CELLS(i, 7)
        Pontos3(3) = .CELLS(i + 1, 5)
        Pontos3(4) = .CELLS(i + 1, 6)
        Pontos3(5) = .CELLS(i + 1, 7)
        Pontos3(6) = .CELLS(i + 2, 5)
        Pontos3(7) = .CELLS(i + 2, 6)
        Pontos3(8) = .CELLS(i + 2, 7)
        Pontos3(9) = .CELLS(i, 3)
        Pontos3(10) = .CELLS(i, 4)
        Pontos3(11) = .CELLS(i, 5)
        Set Polilinha = ThisDrawing.ModelSpace.Add3Dpoly(Pontos3)
        If ((b_fix_x = 1) Or (b_fix_y = 1) Or (b_fix_w = 1)) Then
            Polilinha.Color = acRed
        Else
            Polilinha.Color = acGreen
        End If
    End If
End With
End Sub
```

```

Elseif (ncorb = 4) Then
  Pontos4(0) = .CELLS(i, 5)
  Pontos4(1) = .CELLS(i, 6)
  Pontos4(2) = .CELLS(i, 7)
  Pontos4(3) = .CELLS(i + 1, 5)
  Pontos4(4) = .CELLS(i + 1, 6)
  Pontos4(5) = .CELLS(i + 1, 7)
  Pontos4(6) = .CELLS(i + 2, 5)
  Pontos4(7) = .CELLS(i + 2, 6)
  Pontos4(8) = .CELLS(i + 2, 7)
  Pontos4(9) = .CELLS(i + 3, 5)
  Pontos4(10) = .CELLS(i + 3, 6)
  Pontos4(11) = .CELLS(i + 3, 7)
  Pontos4(12) = .CELLS(i, 5)
  Pontos4(13) = .CELLS(i, 6)
  Pontos4(14) = .CELLS(i, 7)
  Set Polilinha = ThisDrawing.ModelSpace.Add3Dpoly(Pontos4)
  If ((b_fix_x = 1) Or (b_fix_y = 1) Or (b_fix_w = 1)) Then
    Polilinha.Color = acRed
  Else
    Polilinha.Color = acGreen
  End If
Elseif (ncorb = 5) Then
  Pontos5(0) = .CELLS(i, 5)
  Pontos5(1) = .CELLS(i, 6)
  Pontos5(2) = .CELLS(i, 7)
  Pontos5(3) = .CELLS(i + 1, 5)
  Pontos5(4) = .CELLS(i + 1, 6)
  Pontos5(5) = .CELLS(i + 1, 7)
  Pontos5(6) = .CELLS(i + 2, 5)
  Pontos5(7) = .CELLS(i + 2, 6)
  Pontos5(8) = .CELLS(i + 2, 7)
  Pontos5(9) = .CELLS(i + 3, 5)
  Pontos5(10) = .CELLS(i + 3, 6)
  Pontos5(11) = .CELLS(i + 3, 7)
  Pontos5(12) = .CELLS(i + 4, 5)
  Pontos5(13) = .CELLS(i + 4, 6)
  Pontos5(14) = .CELLS(i + 4, 7)
  Pontos5(15) = .CELLS(i, 5)
  Pontos5(16) = .CELLS(i, 6)
  Pontos5(17) = .CELLS(i, 7)
  Set Polilinha = ThisDrawing.ModelSpace.Add3Dpoly(Pontos5)
  If ((b_fix_x = 1) Or (b_fix_y = 1) Or (b_fix_w = 1)) Then
    Polilinha.Color = acRed
  Else
    Polilinha.Color = acGreen
  End If
End If

If ((b_fix_x = 1) Or (b_fix_y = 1) Or (b_fix_w = 1)) Then
  Call dist(ncorb, Pontos3, Pontos4, Pontos5, cg_tot_x, cg_tot_y, b_fix_x, b_fix_y, b_fix_w)
End If

Else
  SPHERE(0) = .CELLS(i, 5)
  SPHERE(1) = .CELLS(i, 6)
  SPHERE(2) = .CELLS(i, 7)
  RAIO = .CELLS(i, 11)
  Set Polilinha = ThisDrawing.ModelSpace.AddCircle(SPHERE, RAIO)
  If ((b_fix_x = 1) Or (b_fix_y = 1) Or (b_fix_w = 1)) Then

```

```

        Polilinha.Color = acRed
    End If
    Call desenhos_apoios2(RAIO, cg_tot_x, cg_tot_y, b_fix_x, b_fix_y, b_fix_w)
End If
i = i + ncorb
If (i >= .CELLS(2, 2) + 2) Then
    □ram 200
Else
    □ram 100
End If

200 textoescreve = "bloco"

'Set textObj = ThisDrawing.ModelSpace.AddText(textoescreve, SPHERE, 2 * RAIO)

Update

End With
End Sub
Sub desenhos_apoios1(minus, cg_tot_x, cg_tot_y, b_fix_x, b_fix_y, b_fix_w)
Dim XCA As Double, YCA As Double, XCB As Double, YCB As Double
Dim startPoint(0 To 2) As Double
Dim endPoint(0 To 2) As Double
Dim SPHERE_APOIO(0 To 2) As Double, RAIO_APOIO As Double
    If (b_fix_x = 1) Then
        XCA = cg_tot_x - minus / 2
        YCA = cg_tot_y
        XCB = cg_tot_x + minus / 2
        YCB = cg_tot_y
        startPoint(0) = XCA: startPoint(1) = YCA: startPoint(2) = 0
        endPoint(0) = XCB: endPoint(1) = YCB: endPoint(2) = 0
        Set Polilinha = ThisDrawing.ModelSpace.AddLine(startPoint, endPoint)
        Polilinha.Color = acRed
    End If
    If (b_fix_y = 1) Then
        XCA = cg_tot_x
        YCA = cg_tot_y - minus / 2
        XCB = cg_tot_x
        YCB = cg_tot_y + minus / 2
        startPoint(0) = XCA: startPoint(1) = YCA: startPoint(2) = 0
        endPoint(0) = XCB: endPoint(1) = YCB: endPoint(2) = 0
        Set Polilinha = ThisDrawing.ModelSpace.AddLine(startPoint, endPoint)
        Polilinha.Color = acRed
    End If
    If (b_fix_w = 1) Then
        SPHERE_APOIO(0) = cg_tot_x
        SPHERE_APOIO(1) = cg_tot_y
        SPHERE_APOIO(2) = 0
        RAIO_APOIO = minus / 2
        Set Polilinha = ThisDrawing.ModelSpace.AddCircle(SPHERE_APOIO, RAIO_APOIO)
        Polilinha.Color = acRed
    End If
End Sub
Sub desenhos_apoios2(RAIO, cg_tot_x, cg_tot_y, b_fix_x, b_fix_y, b_fix_w)
Dim XCA As Double, YCA As Double, XCB As Double, YCB As Double
Dim startPoint(0 To 2) As Double
Dim endPoint(0 To 2) As Double
Dim SPHERE_APOIO(0 To 2) As Double, RAIO_APOIO As Double
    If (b_fix_x = 1) Then

```

```

XCA = cg_tot_x - RAIO / 2
YCA = cg_tot_y
XCB = cg_tot_x + RAIO / 2
YCB = cg_tot_y
startPoint(0) = XCA: startPoint(1) = YCA: startPoint(2) = 0
endPoint(0) = XCB: endPoint(1) = YCB: endPoint(2) = 0
Set Polilinha = ThisDrawing.ModelSpace.AddLine(startPoint, endPoint)
Polilinha.Color = acRed
End If
If (b_fix_y = 1) Then
XCA = cg_tot_x
YCA = cg_tot_y - RAIO / 2
XCB = cg_tot_x
YCB = cg_tot_y + RAIO / 2
startPoint(0) = XCA: startPoint(1) = YCA: startPoint(2) = 0
endPoint(0) = XCB: endPoint(1) = YCB: endPoint(2) = 0
Set Polilinha = ThisDrawing.ModelSpace.AddLine(startPoint, endPoint)
Polilinha.Color = acRed
End If
If (b_fix_w = 1) Then
SPHERE_APOIO(0) = cg_tot_x
SPHERE_APOIO(1) = cg_tot_y
SPHERE_APOIO(2) = 0
RAIO_APOIO = RAIO / 2
Set Polilinha = ThisDrawing.ModelSpace.AddCircle(SPHERE_APOIO, RAIO_APOIO)
Polilinha.Color = acRed
End If
End Sub

Sub dist(ncorb, Pontos3, Pontos4, Pontos5, cg_tot_x, cg_tot_y, b_fix_x, b_fix_y, b_fix_w)

Dim x1 As Double, y1 As Double, x2 As Double, y2 As Double
Dim minus As Double
minus = 1E+20
If (ncorb = 3) Then
For j = 0 To ncorb - 1 Step 3
x1 = Pontos3(j)
y1 = Pontos3(j + 1)
x2 = Pontos3(j + 3)
y2 = Pontos3(j + 4)
Call edge_vector(x1, y1, x2, y2, tx, ty, nx, ny, lz)
Call det_minus(minus, x1, y1, tx, ty, nx, ny, lz, cg_tot_x, cg_tot_y)
Next j
Call desenhos_apoios1(minus, cg_tot_x, cg_tot_y, b_fix_x, b_fix_y, b_fix_w)
Elseif (ncorb = 4) Then
For j = 0 To ncorb - 1 Step 3
x1 = Pontos4(j)
y1 = Pontos4(j + 1)
x2 = Pontos4(j + 3)
y2 = Pontos4(j + 4)
Call edge_vector(x1, y1, x2, y2, tx, ty, nx, ny, lz)
Call det_minus(minus, x1, y1, tx, ty, nx, ny, lz, cg_tot_x, cg_tot_y)
Next j
Call desenhos_apoios1(minus, cg_tot_x, cg_tot_y, b_fix_x, b_fix_y, b_fix_w)
Elseif (ncorb = 5) Then
For j = 0 To ncorb - 1 Step 3
x1 = Pontos5(j)
y1 = Pontos5(j + 1)
x2 = Pontos5(j + 3)

```

```

y2 = Pontos5(j + 4)
Call edge_vector(x1, y1, x2, y2, tx, ty, nx, ny, lz)
Call det_minus(minus, x1, y1, tx, ty, nx, ny, lz, cg_tot_x, cg_tot_y)
Next j
Call desenhos_apoios1(minus, cg_tot_x, cg_tot_y, b_fix_x, b_fix_y, b_fix_w)
End If
End Sub
Sub det_minus(minus, x1, y1, tx, ty, nx, ny, lz, cg_tot_x, cg_tot_y)
Dim xc1 As Double, yc1 As Double, xr As Double, yr As Double
xc1 = cg_tot_x - x1
yc1 = cg_tot_y - y1
xr = xc1 * tx + yc1 * ty
yr = xc1 * nx + yc1 * ny
If (Abs(yr) < minus) Then
minus = Abs(yr)
End If
End Sub
Sub edge_vector(x1, y1, x2, y2, tx, ty, nx, ny, lz)
Dim XL1 As Double, YL1 As Double
XL1 = x2 - x1
YL1 = y2 - y1
lz = Sqr(XL1 ^ 2 + YL1 ^ 2)
tx = XL1 / lz
ty = YL1 / lz
nx = -ty
ny = tx
End Sub
Private Sub CommandButton2_Click()
UserForm1.hide
End Sub

```

Tabela C-1: Formato das primeiras linhas de um ficheiro do tipo XLS para ser lido através da macro VBA.

BLOCK	CORNER	TYPE	NCORB	X CORNEF	Y CORNEF	Z CORNEF	ICORB	COR BEFC	CCOR AFTE	CORN RAI	BOUND X	BOUND Y	BOUND W	CG X	CG Y	ROUND C	: ROUND C	'ROUND C	:	
2050	2250																			
1	1	1	4	0.10410E+	0.35274E+	0.00000E+	1	4	2	0.10088E<	0	0	0	0.10584E+	0.38778E+	0.10414E+	0.28005E+	0.00000E+		
1	2	1	4	0.10437E+	0.42385E+	0.00000E+	2	1	3	0.99137E<	0	0	0	0.10584E+	0.38778E+	0.10488E+	0.34894E+	0.00000E+		
1	3	1	4	0.10764E+	0.42230E+	0.00000E+	3	2	4	0.99036E<	0	0	0	0.10584E+	0.38778E+	0.10775E+	0.34628E+	0.00000E+		
1	4	1	4	0.10724E+	0.35125E+	0.00000E+	4	3	1	0.10096E<	0	0	0	0.10584E+	0.38778E+	0.10707E+	0.27748E+	0.00000E+		
2	5	1	4	0.10095E+	0.35710E+	0.00000E+	1	8	6	0.10092E<	0	0	0	0.10265E+	0.39235E+	0.10101E+	0.28220E+	0.00000E+		
2	6	1	4	0.10113E+	0.42822E+	0.00000E+	2	5	7	0.99075E<	0	0	0	0.10265E+	0.39235E+	0.10142E+	0.35119E+	0.00000E+		
2	7	1	4	0.10441E+	0.42706E+	0.00000E+	3	6	8	0.98961E<	0	0	0	0.10265E+	0.39235E+	0.10449E+	0.34909E+	0.00000E+		
2	8	1	4	0.10409E+	0.35600E+	0.00000E+	4	7	5	0.10106E<	0	0	0	0.10265E+	0.39235E+	0.10394E+	0.29021E+	0.00000E+		
3	9	1	4	0.23976E+	0.15473E+	0.00000E+	1	12	10	0.10096E<	0	0	0	0.24110E+	0.19383E+	0.24596E+	0.14007E+	0.00000E+		
3	10	1	4	0.21280E+	0.22058E+	0.00000E+	2	9	11	0.99032E<	0	0	0	0.24110E+	0.19383E+	0.21731E+	0.20295E+	0.00000E+		
3	11	1	4	0.24328E+	0.23271E+	0.00000E+	3	10	12	0.99026E<	0	0	0	0.24110E+	0.19383E+	0.24544E+	0.21543E+	0.00000E+		
3	12	1	4	0.26894E+	0.16635E+	0.00000E+	4	11	9	0.10100E<	0	0	0	0.24110E+	0.19383E+	0.27282E+	0.15199E+	0.00000E+		
4	13	1	4	0.21134E+	0.13883E+	0.00000E+	1	16	14	0.10099E<	0	0	0	0.21182E+	0.17794E+	0.21750E+	0.12681E+	0.00000E+		
4	14	1	4	0.18294E+	0.20406E+	0.00000E+	2	13	15	0.99027E<	0	0	0	0.21182E+	0.17794E+	0.18763E+	0.18912E+	0.00000E+		
4	15	1	4	0.21314E+	0.21686E+	0.00000E+	3	14	16	0.99039E<	0	0	0	0.21182E+	0.17794E+	0.21552E+	0.20215E+	0.00000E+		
4	16	1	4	0.24027E+	0.15109E+	0.00000E+	4	15	13	0.10096E<	0	0	0	0.21182E+	0.17794E+	0.24414E+	0.13925E+	0.00000E+		
5	17	1	4	-0.27575E+	0.44410E+	0.00000E+	1	20	18	0.10000E<	1	1	1	-0.25806E+	0.19570E+	-0.27475E+	0.44040E+	0.00000E+		
5	18	1	4	-0.24037E+	0.44140E+	0.00000E+	2	17	19	0.10000E<	1	1	1	-0.25806E+	0.19570E+	-0.24137E+	0.44040E+	0.00000E+		
5	19	1	4	-0.24037E+	-0.50000E+	0.00000E+	3	18	20	0.10000E<	1	1	1	-0.25806E+	0.19570E+	-0.24137E+	-0.49000E+	0.00000E+		
5	20	1	4	-0.27575E+	-0.50000E+	0.00000E+	4	19	17	0.10000E<	1	1	1	-0.25806E+	0.19570E+	-0.27475E+	-0.49000E+	0.00000E+		
6	21	1	5	0.00000E+	0.00000E+	0.00000E+	1	25	22	0.32105E<	1	1	1	-0.12525E+	0.26133E+	-0.32105E+	-0.10000E+	0.00000E+		
6	22	1	5	0.00000E+	-0.50000E+	0.00000E+	2	21	23	0.10000E<	1	1	1	-0.12525E+	0.26133E+	-0.10000E+	-0.49000E+	0.00000E+		
6	23	1	5	-0.24037E+	-0.50000E+	0.00000E+	3	22	24	0.10000E<	1	1	1	-0.12525E+	0.26133E+	-0.23937E+	-0.49000E+	0.00000E+		
6	24	1	5	-0.24037E+	0.58524E+	0.00000E+	4	23	25	0.10000E<	1	1	1	-0.12525E+	0.26133E+	-0.23937E+	0.57524E+	0.00000E+		
6	25	1	5	-0.40375E+	0.58524E+	0.00000E+	5	24	21	0.19048E<	1	1	1	-0.12525E+	0.26133E+	-0.41375E+	0.56619E+	0.00000E+		
7	26	1	4	0.18335E+	0.12266E+	0.00000E+	1	29	27	0.10099E<	0	0	0	0.18291E+	0.16177E+	0.18931E+	0.11301E+	0.00000E+		
7	27	1	4	0.15344E+	0.18720E+	0.00000E+	2	26	28	0.99029E<	0	0	0	0.18291E+	0.16177E+	0.15823E+	0.17472E+	0.00000E+		
7	28	1	4	0.18332E+	0.20070E+	0.00000E+	3	27	29	0.99018E<	0	0	0	0.18291E+	0.16177E+	0.18586E+	0.18828E+	0.00000E+		
7	29	1	4	0.21196E+	0.13558E+	0.00000E+	4	28	26	0.10098E<	0	0	0	0.18291E+	0.16177E+	0.21569E+	0.12596E+	0.00000E+		
8	30	1	4	0.15569E+	0.10606E+	0.00000E+	1	33	31	0.10097E<	0	0	0	0.15431E+	0.14514E+	0.16140E+	0.98643E+	0.00000E+		
8	31	1	4	0.12423E+	0.15985E+	0.00000E+	2	30	32	0.99012E<	0	0	0	0.15431E+	0.14514E+	0.12912E+	0.15974E+	0.00000E+		
8	32	1	4	0.15377E+	0.18406E+	0.00000E+	3	31	33	0.99056E<	0	0	0	0.15431E+	0.14514E+	0.15647E+	0.17384E+	0.00000E+		
8	33	1	4	0.18399E+	0.11967E+	0.00000E+	4	32	30	0.10098E<	0	0	0	0.15431E+	0.14514E+	0.18752E+	0.11211E+	0.00000E+		
9	34	1	4	0.12881E+	0.89906E+	0.00000E+	1	37	35	0.10099E<	0	0	0	0.12645E+	0.12894E+	0.13376E+	0.83744E+	0.00000E+		
9	35	1	4	0.95767E+	0.15288E+	0.00000E+	2	34	36	0.99036E<	0	0	0	0.12645E+	0.12894E+	0.10030E+	0.14420E+	0.00000E+		
9	36	1	4	0.12494E+	0.16783E+	0.00000E+	3	35	37	0.99033E<	0	0	0	0.12645E+	0.12894E+	0.12737E+	0.15883E+	0.00000E+		
9	37	1	4	0.15675E+	0.10422E+	0.00000E+	4	36	34	0.10096E<	0	0	0	0.12645E+	0.12894E+	0.15962E+	0.97717E+	0.00000E+		
10	38	1	4	0.10221E+	0.73199E+	0.00000E+	1	41	39	0.10096E<	0	0	0	0.98909E+	0.11216E+	0.10643E+	0.68308E+	0.00000E+		
10	39	1	4	0.67657E+	0.13535E+	0.00000E+	2	38	40	0.99038E<	0	0	0	0.98909E+	0.11216E+	0.71782E+	0.12810E+	0.00000E+		

REFERÊNCIAS

- ALFAIATE, J., Pires, E. B. e Martins, J. A. C. (1997), “A finite element analysis of non-prescribed crack propagation in concrete”, *Computers & Structures*, vol. 63, N.º 1, pp. 17-26.
- ALMEIDA, Celeste (2000), “Análise do comportamento da igreja do Mosteiro da Serra do Pilar sob a acção dos sismos”, *Dissertação de Mestrado*, Universidade do Porto, Porto.
- AOKI, T., Rivella, D., Sabia, D. e Komiyama, T. (2006), “Structural characterization of Rakanji stone arch bridge by numerical model updating”, *V Int. Conf. Structural Analysis of Historical Constructions*, (Eds.: P.B. Lourenço, P. Roca, C. Modena, S. Agrawal), vol. 2, pp. 887-895, Nova Deli.
- ARÊDE, A. D. e Costa, A. G. (2005), “Avaliação experimental e monitorização de estruturas antigas de alvenaria de pedra. Experiência do NCREP/LESE em dois casos de estudo”, *2.º Seminário, A Intervenção no Património Práticas de conservação e reabilitação*, Porto.
- AUTOCAD[®] 2007 3D (2006), *Software de desenho assistido por computador*, Autodesk Inc.
- AZEVEDO, N. M. M. (2003), “A rigid particle discrete element model for the fracture analysis of plain and reinforced concrete”, *Tese de Doutoramento*, Heriot-Watt University School of the Built Environment Civil Engineering, Edimburgo.
- BAGI, K. (1996), “Stress and strain in granular assemblies”, *Mechanics of Materials*, vol. 22(3), pp. 165-177.
- BAGUELIN, F., Jézéquel, J. F. e Shields, D. H. (1987) “The pressuremeter and foundation engineering”, *Series on rock and soil mechanics*, Trans Tech publication.

- BANDIS, S. C., Lumsden, A. C., e Barton, N. R. (1983), “Fundamentals of Rock Joint Deformation”, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech*, vol. 20(6), pp. 249-268.
- BANDYOPADHYAY, D. (2006), “Case study of structural health monitoring of na age old stone masonry arch bridge”, *V Int. Conf. Structural Analysis of Historical Constructions*, (Eds. P.B. Lourenço, P. Roca, C. Modena e S. Agrawal), vol. 3, pp. 1989-1995, Nova Deli.
- BARBOSA, R. e Ghaboussi, J. (1989), “Discrete Finite Element Method”, 1st U.S. Conf. Discrete Element Methods, CSM, pp. 17-19, Golden, Colorado.
- BARBOSA, R. (1996), “Discontinuous Structural Analysis”, *Proc. 11th European Conf. on Earthquake Engineering*, Paris.
- BARDET, J. P. e Huang, Q. (1992), “Numerical modelling of micro polar effects in idealized granular materials”, *Mechanics of Granular Materials and Powder Systems*, vol. 37, pp. 85-91.
- BARDET, J. P. e Vardoulakis, I. (2001), “The asymmetry of stress in granular media”, *Int. J. Solids and Structures*, vol. 38(2), pp. 353-367.
- BATHE, K. J. e Wilson, E. L. (1976), “Numerical Methods in Finite Element Analysis”, Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- BATHE, K. J. (1982), “Finite element procedures in engineering analysis”, Prentice-Hall.
- BELYTSCHKO, T., Chiapetta, R. L. e Bartel, H. D. (1976), “Efficient large scale non-linear transient analysis by finite elements”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 10, pp. 579-596.
- BELYTSCHKO, T. (1983), “An overview of semidiscretization and time integration procedures”, *Comp. Meth. Transient Analysis*, (Eds T. Belytschko e T. J. R. Hughes), pp. 245-265.

- BONET, J. e Peraire, J. (1991), “Na Alternating Digital Tree (ADT) Algorithm for 3D Geometric Searching and Intersection Problems”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 31, pp. 1-17.
- BRENCICH, A., Gambarotta, L. e Lagomarsino, S. (1998), “A macroelement approach to the three-dimensional seismic analysis of masonry buildings”, 11th European Conf. Earthquake Eng., Paris.
- BUFFARINI, G., Clemente, P. e de Felice, G. (2006), “Retrofitting of masonry arch with FRP”, V Int. Conf. Structural Analysis of Historical Constructions, (Eds. P.B. Lourenço, P. Roca, C. Modena e S. Agrawal), vol. 3, pp. 1439-1446, Nova Deli.
- CALDERINI, C., Lagomarsino, S. e Resemini, S. (2006), “The monumental bridge of Monte Carmelo (Italy): Strategies for the historical and architectural preservation”, V Int. Conf. Structural Analysis of Historical Constructions, (Eds. P.B. Lourenço, P. Roca, C. Modena, S. Agrawal), vol. 3, pp. 1868-1875, Nova Deli.
- CAVICCHI, A. e Gambarotta, L. (2005), “Collapse analysis of masonry bridges taking into account arch-fill interactio”, *Engng Structures*, 27, pp. 605-615.
- CECCHI, A. e Passerini, A. (2006), “Survey, digital reconstruction, finite elements framework the Augustus bridge in Narni (Italy)”, V Int. Conf. Structural Analysis of Historical Constructions, (Eds. P.B. Lourenço, P. Roca, C. Modena, S. Agrawal), vol. 3, pp. 2036-2042, Nova Deli.
- CHANG, S. Ching e Misra, A. (1989), “Theoretical and experimental study of regular packing of granules”, *J. Engng Mechanics*, vol. 115, n.º 4, pp. 704-720.
- CHANG, S. Ching e Matthew, R. Kuhn (2004), “On virtual work and stress in granular media”, *Int. J. Solids and Structures*, vol. 42, pp. 3773-3793.
- CHOPRA, A. K. (2001), “Dynamics of Structures – Theory and Applications to Earthquake Engineering”, 2nd Edition, Prentice Hall.

- CHRISTOFFERSEN, J., Mehrabadi, M. M. e Nemat-Nasser, S. (1981), “A micromechanical description of granular material behaviour”, *J. Applied Mechanics*, vol. 48, pp. 339-344.
- CLOUGH, R. W., Penzien, J. (1993), “Dynamics of Structures”, 2nd Edition, McGraw-Hill.
- COMPAQ Visual Fortran® 6.6 (2002), Software para criação de programas, Compaq Information Technologies Group, L.P.
- CORMEAU, A. e Shrive, N. G. (1995), “A 2D model for the prediction of failure modes in masonry subject to in-plane loads”, *Computer Method in Structural Masonry – 3*, (Eds. Pande and Middleton), Books and Journals Int., pp. 195-204.
- COSTA, C (2002), “Análise do Comportamento da Ponte da Lagoncinha sob a Acção do Tráfego Rodoviário”, Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto, Porto.
- COSTA, C., Ârede, A. e Aníbal Costa (2005), “Modelação numérica da Ponte de Vila Fria. Do projecto à entrada em serviço”, 2.º Seminário, A Intervenção no Património Práticas de conservação e reabilitação, Porto.
- COSTA, P. (2003), “Relatório dos ensaios laboratoriais — Ponte de Vila Fria”, Instituto da Construção, Universidade do Porto, Porto.
- COSTA, P. (2007), “Análise da construção e do comportamento dum ponte de pedra”, Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto, Porto.
- CUNDALL, P. A. (1971a), “The measurement and analysis of accelerations in rock slopes”, Tese de Doutoramento, Universidade de Londres, Londres.
- CUNDALL, P. A. (1971b), “A Computer Model for Simulating Progressive Large Scale Movements in Blocky Rock Systems”, *Proc. Of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics*, vol. 1, paper No. II-8, Nancy, França.

- CUNDALL, P. A., Marti, J., Beresford, P., Last, N. e Asgian, M. (1978), “Computer Modelling of Jointed Rock Masses”, U.S. Army Engineers Waterways Experiment Station, Technical Report N-78-4.
- CUNDALL, P. A. e Strack, O. D. L. (1979), “A discrete Numerical Model for Granular Assemblies”, *Géotechnique*, 29, pp. 47-65.
- CUNDALL, P. A. (1980), “UDEC – A generalized distinct element program for modelling jointed rock mass”, European Research Office, Final technical report DAJA37-79-C-0548.
- CUNDALL, P. A. (1982), “Adaptive Density-Scaling for Time-Explicit Calculations”, Proc. 4th Int. Conf. Num. Meth. Geomechanics, pp. 23-26, Edmonton, Canada.
- CUNDALL, P. A. (1987), “Distinct Element Models of Rock and Soil Structure”, Analytical and Computational. Meth. Engng. Rock Mech. (Ed. E. T. Brown), pp. 129-163, George Allen & Unwin.
- CUNDALL, P. A. (1988), “Formulation of three-dimensional distinct element model – Part I: A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks”, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, vol. 25, n.º 3, pp. 107-116.
- CUNDALL, P. A. e Hart, R. D. (1992), “Numerical Modeling of Discontinua”, *Engineering Computations*, vol. 9(2), pp. 101-113.
- DORA, A. e Andreia, L. (2005), “Alcântara – Uma Ponte que Durará Enquanto Durar o Mundo”, *Revista Engenharia e Vida, Engenharia Civil, Construção e Desenvolvimento*, Ano 1, n.º 12, Abril, pp. 86-88.
- EUROCODE No6 (1988), “Common unified rules for masonry structures”.
- FORD, T. E., Augarde, C. E. e Tuxford, S. S. (2003), “Modeling masonry arch bridges using commercial finite element software”, 9th Int. Conf. Civil and Structural Engineering Computing, Egmond aan Ze, Holanda.

- FREY, F. e Jirousek, J. (2001), “Analyse des structures et milieux continus”, *Traité de Génie Civil, de l’Ecole polytechnique fédérale de Lausanne*, vol. 6, Press Polytechniques et Universitaires Romandes.
- FUNG, Y. C. (1969), “A First Course in Continuum Mechanics”, Prentice-Hall.
- GAGO, A. S., Alfaiate, J. e de Almeida, J. R. (2003) “Simulação numérica de um ensaio experimental efectuado numa ponte em alvenaria de pedra”, VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional, Universidade de Évora, Évora.
- GHABOUSSI, J. e Barbosa, R. (1990), “Three-dimensional discrete element method for granular materials”, *Int. J. Num. Analitical Meth. Geomech.*, vol. 14, pp. 451-472.
- GID[®] (1998), “Pre and post processing system for F.E.M. calculations”, International center for numerical methods in engineering – CIMNE, Barcelona.
- GILBERT, M. e Melbourne, C. (1994), “Rigid-block analysis of masonry structures”, *The Structural Engineer*, vol. 72, N.º 21, pp. 356-361.
- GIORDANO, A., De Luca, A., Mele, E. e Romano, A. (2006), “Simplified evaluation of the horizontal capacity of masonry arches”, *V Int. Conf. Structural Analysis of Historical Constructions*, (Eds. P.B. Lourenço, P. Roca, C. Modena e S. Agrawal), vol. 2, pp. 1221-1229, Nova Deli.
- GOODMAN, R. E., Taylor, R. L. e Brekke, T. L. (1968), “A model for the mechanics of jointed rock”, *J. Soil Mech. Found. Div., ASCE*, vol. 94, N.ºSM3, pp. 637-659.
- GREENBERG, D. M. (1978), “Foundations of Applied Mathematics”, Prentice-Hall.
- GREENGARD, F. L. (1987), “The rapid evaluation of potential fields in particle systems”, *Dissertação de Mestrado*.
- HAHN, J. K. (1988), “Realistic Animation of Rigid Bodies”, *Computer Graphics*, vol. 24(4), pp. 299-308.

- HART, R. D., Cundall, P. A. e Lemos, J. V. (1988), “Formulation of a three-dimensional distinct element model – Part II: Mechanical calculations”, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol. 25, pp. 117-125.
- HEYMAN, J. M. A. (1966), “The stone skeleton”, *Int. J. Solids and Structures*, vol. 2, n.º2, pp. 249-279.
- HEYMAN, J. M. A. (1969), “The safety of masonry arches”, *Int. J. Mechanical Sciences*, n.º11, pp. 363-385.
- HEYMAN, J. M. A. e Threlfall, B. D. (1972), “Two masonry bridges: I. Telford’s bridge at Over”, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, n.º52, pp. 319-330.
- HEYMAN, J. M. A., Padfield C. J. e Threlfall, B. D. (1973), “Two masonry bridges: II. Clare College”, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, paper 7554, pp. 305-318.
- HEYMAN, J. M. A. (1977), “The restoration of masonry: structural principles”, *Architectural Science Review*, n.º2, pp. 35-37.
- HEYMAN, J. M. A., Hobbs, N. B. e Jermy B. S. (1980), “The rehabilitation of Teston bridge”, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Parte 1, n.º68, pp. 489-497.
- HEYMAN, J. M. A. (1982), “The masonry arch”, Ellis Horwood.
- HEYMAN, J. M. A. (1995a), “The Stone Skeleton”, *Structural Engineering of Masonry Architecture*, Cambridge University Press.
- HEYMAN, J. M. A. (1995b), “Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica”, Instituto Juan de Herrera.
- HEYMAN, J. M. A. (1998), “Mechanical behaviour of arches and vaults”, *Structural Analysis of Historical Constructions II*, (Eds. P. Roca, J.L. González, E. Oñate e P.B. Lourenço), CIMNE, Barcelona.
- HOCKING, G., Mustoe, G. G. W. e Williams, J. R. (1985), *CICE Discrete Element Code – Theoretical Manual*, Lakewood, Colorado: Applied mechanics Inc.

- HOCKING, G., Mustoe, G. e Williams, J. R. (1987), “Dynamic analysis for generalized three dimensional contact and fracturing of multiple bodies”, NUMETA’87, 2nd Int. Conf. on Advances in Numerical Methods in Engineering: Theory and Applications, Swansea, Reino Unido.
- HOCKING, G. (1992), “The discrete element method for analysis of fragmentation of discontinua”, *Engineering Computations*, vol. 9, pp. 145-155.
- HOPKINS, M. A. (2004), “A discrete element Lagrangian sea ice model”, *Engineering Computations*, vol. 21 Issue 2/3/4, pp. 409-421.
- HUGHES, T. J. R. (1987), “The finite element method – Linear static and dynamic finite element analysis”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- IMSL (2002), *Fortran Subroutines for Mathematical Applications*, Math/Library, vol. 1, vol. 2, Visual Numerics.
- ITASCA Consulting Group, Inc. (1999), “UDEC – Universal Distinct Element Code”, *User’s Manual*, Version 3.1, Minneapolis, Estados Unidos da América.
- ITASCA Consulting Group, Inc. (2002), “PFC2D – Particle Flow Code in 2 Dimensions”, *User’s Guide*, Version 3.0, Minneapolis, Estados Unidos da América.
- JEAN, M. e Moreau, J. J. (1991), “Dynamics of elastic or rigid bodies with frictional contact and numerical methods”, (Eds. R. Blanc, P. Suquet e M. Raous), pp. 9-29, *Publications du LMA*.
- JEAN, M. (1998), “The non smooth contact dynamics method”, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Special issue on computational modelling of contact and friction, (Eds.: J. A. C. Martins e A. Klarbring).
- KNUTH, D. N. (1973), “The art of computer Programming”, Addison-Wesley.
- KOMEYLI-BIRJANDI, F. (1986), “Sonic investigation of masonry structures”, *Tese de Doutorado*, Universidade de Edimburgo, Edimburgo.

- KONAGAI, K., Matsushima, T. e Mikami, A. (1998), “Deformation build up within a granular assemblage during an intense earthquake”, *J. Earthquake Engineering*, vol. 2, No. 3, pp. 419-441.
- KOOHARIAN, A. (1953), “Limit analysis of voussoir (segmental) and concrete arches”, *Proc. Am. Concr. Inst.*, 49, pp. 317-328.
- KRUYT, N. P. e Rothenburg, L. (1996), “A micromechanical definition of the strain tensor for granular materials”, *J. of Applied Mechanics (Transactions of the ASME)*, vol. 118, pp. 706-11.
- KULHAWY, F. H. (1975), “Stress Deformation Properties of Rock and Rock Discontinuities”, *Engineering Geology*, vol. 9, pp. 327-350.
- LEMOS, J. V., Hart, R. D. e Cundall, P. A. (1985), “A generalized distinct element program for modelling jointed rock mass”, *Proc. of the Int. Symposium on Fundamentals of Rock Joints*, pp. 335-343, Björkliden.
- LEMOS, J. V. (1987), “A distinct Element Model for dynamic Analysis of Jointed Rock with Application to Dam Foundations and Fault motion”, *Tese de Doutorado*, Universidade de Minnesota, Minneapolis, Estados Unidos da América.
- LEMOS, J. V. (1990), “A comparison of numerical and physical models of a blocky framework”, *Mechanics of Jointed and Faulted Rock* (Ed. Rossmannith), pp. 509-514, Balkema.
- LEMOS, J. V. (1991), “Computational topics in discrete element method”, *Proc. Workshop in Computational Methods in Geotechnique*, Rio de Janeiro.
- LEMOS, J. V. (1994), “Computational topics in discrete element modelling”, *Applications of Computational Mechanics in Geotechnical Engineering* (Ed. Vargas *et al.*), pp. 371-384, Balkema.
- LEMOS, J. V. (1995^a), “Segurança de arcos de alvenaria”, *IV Encontro Nacional de Mecânica Computacional*, vol. 1, pp. 91-99, Lisboa.

- LEMOS, J. V. (1995b), “Metodologias para detecção e actualização de contactos em modelos de elementos discretos”, IV Encontro Nacional de Mecânica Computacional, vol. 1, pp. 61-72, Lisboa.
- LEMOS, J. V. (1996a), “Assessment of the ultimate load of a masonry arch using discrete elements”, Computer Methods in Structural Masonry – 3, Books & Journals International (Eds. J. Middleton and G. N. Pande), pp. 294-302, Swansea, Reino Unido.
- LEMOS, J. V. (1996b), “Seismic modelling of the molumn-architrave structure of the Parthenon”, Report 249/96 – NDE/NEE, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.
- LEMOS, J. V. (1997^a), “A representação do contacto em modelos de elementos discretos”, Congresso Nacional: V Encontro Nacional de Mecânica Computacional, vol. 1, pp. 565-573, Universidade de Guimarães, Guimarães.
- LEMOS, J. V. (1997b), “Discrete element modelling of historical structures”, New Technologies in Structural Engineering (Eds. S. P. Santos e A. M. Baptista), vol. 2, pp. 1099-1106, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.
- LEMOS, J. V. (1997c), “Discrete Element Modelling of the Seismic Behaviour of Stone Masonry Arches”, Computer Methods in Structural Masonry – 4, (Eds. G. N. Pande, J. Middleton e B. Kralj), pp. 220-227, E&FN Spon.
- LEMOS, J. V. (1997d), “Análise da rotura de um arco de alvenaria pelo método dos elementos discretos”, Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, n.º 41, pp. 9-13.
- LEMOS, J. V. (1998a), “Numerical Models for Seismic Analysis of Monuments”, Proc. Monument-98 Workshop on Seismic Performance of Monuments, pp. K19-K36, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.
- LEMOS, J. V. (1998b), “Discrete Element Analysis of the S. Vicente de For a Model Test”, Proc. Monument 98 – Workshop on Seismic Performance of Monuments, pp. 13-20, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

- LEMOS, J. V., Schiappa de Azevedo, F., Oliveira, C. S. e Sincaian, G. E. (1998c), “Three-Dimensional Analysis of a Block Masonry Pillar using Discrete Elements”, Proc. Monument-98 Workshop on Seismic Performance of Monuments, pp. 117-126, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.
- LEMOS, J. V. (1999), “Modelling and failure analysis in rock engineering”, Laboratório Nacional de Engenharia Civil.
- LEMOS, J. V. (2003), “Análise modal de estruturas antigas com modelos de blocos rígidos”, Congresso Nacional: VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional, vol. 1, pp. 1-8, Universidade de Évora, Évora.
- LEMOS, J. V. (2005), “Modelação Matemática de Estruturas Antigas”, Revista Engenharia e Vida, Engenharia Civil, Construção e Desenvolvimento, Ano 1, n.º 12, Abril, pp. 62-66.
- LEMOS, J. V. (2006), “Modeling of Historical Masonry with Discrete Elements”, Computational Mechanics – Solids, Structures and Coupled Problems, (Eds. C. A. Mota Soares, J. A. C. Martins, H. C. Rodrigues e J. A.C. Ambrósio), pp. 375-391, Lisboa.
- LIN, C. (1995), “Extensions to the DDA for jointed rock masses and other blocky systems”, Tese de Doutoramento, Universidade do Colorado, Boulder.
- LÖHNER, R. e Morgan K. (1987), “Na unstructured multigrid method for elliptic problems”, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 24, pp. 101-115.
- LORIG, L. J., e Cundall, P. A. (1987) “Modeling of reinforced concrete using the distinct element method”, in Fracture of Concrete and Rock (Eds. Shah e Swartz), pp. 276-287, Springer-Verlag.
- LORIG, L. J., Board, M. P. Potyondy, D. O. e Coetzee, M. J. (1995), “Numerical modelling of caving using continuum and micro-mechanical models”, in Proc. 3rd Canadian Conf. Computer Applications in the Mineral Industry (Ed. H. S. Mitri), pp. 416-425, Montreal.

- LOURENÇO, P. B. (1996), “Computational strategies for masonry structure”, Tese de Doutoramento, Delft University of Technology, Delft.
- LOURENÇO, P. B. (1998), “Avanços recentes na modelação de estruturas de alvenaria”, *Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas*, série I, 44, pp. 27-32.
- MAMAGHANI, I. H. P., Aydan, Ö. e Kajikawa, Y. (1999), “Analysis of masonry structures under static and experimental analysis”, in *Constitutive Laws for Engineering Materials* (Eds. C. S. Desai, E. Krempl, G. Frantziskonis e H. Saadatmanesh), pp. 427-432, ASME, Nova Iorque.
- MELBOURNE, C., Gilbert, M. e Wagstaff, M. (1995a), “The Behaviour of Multi-Span Masonry Arch Bridges”, *Arch bridges, Proc. 1st Int. Conf. Arch Bridges*, (Ed. C. Melbourne), pp. 489-497, Bolton, Reino Unido.
- MELBOURNE, C. e Gilbert, M. (1995b), “The behaviour of multiring brickwork arch bridges”, *The Structural Engineer*, vol. 73, No. 3, pp. 39-47.
- MELBOURNE, C., Gilbert, M. e Wagstaff, M. (1997), “The Collapse Behaviour of Multispan Brickwork Arch Bridges”, *The Structural Engineer*, vol. 75, No. 17, pp. 297-305.
- MIGLIORE, M. R., Letizia, F. S. e Ruocco, E. (2006), “On the stability of stone arches”, *V Int. Conf. Structural Analysis of Historical Constructions*, (Eds. P.B. Lourenço, P. Roca, C. Modena e S. Agrawal), vol. 2, pp. 965-972, Nova Deli.
- MIRI, M. e Hughes, T. G. (2006), “The physical and numerical modelling of a repaired masonry arch bridge”, *V Int. Conf. Structural Analysis of Historical Constructions*, (Eds. P.B. Lourenço, P. Roca, C. Modena e S. Agrawal), vol. 2, pp. 1255-1262, Nova Deli.
- MOLINS, C. e Roca, P. (1997), “Capacity of masonry arches and spatial frames”, *J. Structural Eng.*, ASCE, 124, N.º6, pp. 653-663.

- MOLINS, C. (1998), “Numerical simulation of the ultimate response of arch bridges”, Structural Analysis of Historical Constructions II, (Eds. P. Roca, J.L. González, E. Oñate e P.B. Lourenço), CIMNE, Barcelona.
- MORIKAWA, H. Sawamoto, Y. e Kobayashi, N. (1993), “Local Fracture Analysis of a Reinforced Concrete Slab by the Discrete Element Method”, Proc. 2nd Int. Conf. Discrete Element Methods, pp. 275-286, Cambridge, Massachusetts IESL Publications.
- MORRIS, J., Glenn, L., Blair, S. e Heuze, F. (2001), “The distinct element method – Application to structures in jointed rock”, Int. Workshop Meshfree Methods of Partial Differential Equations, Bona, Alemanha.
- MUNJIZA, A., Bicanic, N. e Owen, D. R. J. (1992a), “BSD Contact detection algorithm for discrete elements in 2D”, DEM 2nd U.S. Conf., Boston, Massachusetts IESL Publications.
- MUNJIZA, A. (1992b), “Discrete element in transient framework of fractured media”, Tese de Doutoramento (C/PH/157/1992), University College of Wales, Swansea, Reino Unido.
- MUNJIZA, A., Owen, D. R. J. e Bicanic, N. (1995), “A combined finite-discrete element method in transient framework of fracturing solids”, Int. J. Eng. Computation, vol. 12, pp. 145-174.
- MUNJIZA, A. (2004), “The combined finite-discrete element method”, John Wiley & Sons.
- MURALHA (2000), “Ensaio de mecânica das rochas na Igreja do Mosteiro da Serra do Pilar”, Relatório n.º 277/00-NOS, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.
- O’CONNOR, R., Gill, M. J. J. e Williams, J. R. (1992), “A linear Complexity Contact Detection Algorithm for Multi-Body Simulation”, DEM 2nd U.S. Conf., Boston, Massachusetts IESL Publications.

- ORDUNA, A. e Lourenço, P. B. (2005a), “Three-dimensional limit analysis of rigid blocks assemblages. Part I: Torsion failure on frictional interfaces and limit analysis formulation”, *Int. J. Solids and Structures*, vol. 42, pp. 5140-5160.
- ORDUNA, A. e Lourenço, P. B. (2005b), “Three-dimensional limit analysis of rigid blocks assemblages. Part II: Load-path following solution procedure and validation”, *Int. J. Solids and Structures*, vol. 42, pp. 5161-5180.
- PAGE, A. W. (1978), “Finite element model for masonry”, *J. Structural Division, ASCE*, 104(ST8), pp. 1267-1285.
- PAGE, J. (1993), “Masonry arch bridges. State-of-the-Art Review”. Transport Research Laboratory, Department of Transport, Londres.
- PAGE, J. (1995), “Load tests to collapse on masonry Arch Bridges”, *Proc. 1st Int. Conf. Arch Bridges*, (Ed. C. Melbourne), pp.289-298, Bolton, Reino Unido.
- PANTANO, S., Perretti, A. e Rossi, P. P. (2006), “Limit analysis of three-dimensional masonry structures”, *V Int. Conf. Structural Analysis of Historical Constructions*, (Eds. P.B. Lourenço, P. Roca, C. Modena e S. Agrawal), vol. 2, pp. 1107-1115, Nova Deli.
- PARDEEP, K. e Bhandari, N. M. (2006), “Testing for assessment of load carrying capacity of masonry arch bridges”, *V Int. Conf. Structural Analysis of Historical Constructions*, (Eds. P.B. Lourenço, P. Roca, C. Modena e S. Agrawal), vol. 2, pp. 827-834, Nova Deli.
- PETRINIC, N. (1996), “Aspects of discrete element modelling involving facet-to-facet contact detection and interaction”, *Tese de Doutoramento (C/PH/198/1996)*, University College of Wales, Swansea, Reino Unido.
- PINA (1995), “Métodos numéricos”, McGraw-Hill.
- PIRES, E. B. e Costa, P. P. (1989), “Análise numérica do problema de contacto com atrito entre dois corpos elásticos”, *X Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia (MECOM-89)*, vol. 3, pp. A969-A989, Porto.

- POTYONDY, D. O., Cundall, P. A. e Lee, C. (1996), “Modelling rock using bonded assemblies of circular particles”, Proc. 2nd North American Rock Mechanics Symposium (Eds. Aubertin *et al.*), pp. 1937-1944, Montreal.
- POTYONDY, D. O. e Cundall, P. A. (2004), “A bonded-particle model for rock”, Int. J. Rock Mechanics & Mining Sciences, n.º 41, pp. 1329-1364.
- ROCA, P., Andreu, A. e Gil, L. (2006), “Limit analysis of masonry constructions by 3D funicular modelling”, V Int. Conf. Structural Analysis of Historical Constructions, (Eds. P.B. Lourenço, P. Roca, C. Modena e S. Agrawal), vol. 2, pp. 1135-1142, Nova Deli.
- ROCHA, M. (1971), “Curso de mecânica das rochas”, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.
- ROMANO, A. e Ochsendorf, J. A. (2006), “Circular, pointed and basket-handle arches: a comparison of structural behaviour of masonry spans”, V Int. Conf. Structural Analysis of Historical Constructions, (Eds. P.B. Lourenço, P. Roca, C. Modena e S. Agrawal), vol. 2, pp.1205-1212, Nova Deli.
- ROSSO, R. S. (1976), “A comparison of joint stiffness measurements in direct shear, triaxial compression, and *In Situ*”, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., vol. 13, pp. 167-172.
- ROTS, J. G. e Blaauwendraad, J. (1989), “Crack models for concrete: discrete or smeared? fixed, multi-directional or rotating?”, vol. 34, N.º 1, Heron.
- ROTS, J. G. (1991), “Numerical simulation of cracking in structural masonry”, vol. 36, Heron.
- ROUXINOL, G. A. F. (1999), “Modelo simplificado para o estudo da estabilidade de arcos em alvenaria”, Dissertação de Mestrado, Universidade de Coimbra, Coimbra.
- ROUXINOL, G. A. F., Providência, P. e Lemos, J. V. (2006), “The discrete element method with 2D rigid polygonal and circular elements”, V Int. Conf.

Structural Analysis of Historical Constructions, (Eds. P.B. Lourenço, P. Roca, C. Modena e S. Agrawal), vol. 2, pp. 1023-1031, Nova Deli.

ROUXINOL, G. A. F., Providência, P. e Lemos, J. V. (2007^a), “Aplicação do método da expansão do raio em domínios complexos no método dos elementos discretos”, CMNE 2007 – Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia, XXVII CILAMCE – Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, (Eds. J. César de Sá, Raimundo Delgado, Abel D. Santos, António Rodríguez-Ferran, Javier Oliver, Paulo R. M. Lyra e José L. D. Alves), pp. 310 (artigo completo em cd-rom), Porto.

ROUXINOL, G. A. F., Providência, P. e Lemos, J. V. (2007^b), “Bridgemill bearing capacity assessment by a discrete element method”, Proc. 5th Int. Conf. Arch Bridges, (Eds. Paulo B. Lourenço, Daniel V. Oliveira e Artur Portela), pp. 669-676, Funchal, Madeira.

ROUXINOL, G. A. F., Providência P. e Lemos, J. V. (2007^c), “Analyse de ponts historiques utilisant la méthode des éléments discrets mixte”, 23^{eme} Congrès Mondial de la Route, (Association Mondiale de la Route – AIPCR/PIARC), artigo a publicar em cd-rom em 2008 (versão em inglês também), Paris.

ROUXINOL, G. A. F., Providência, P. e Lemos, J. V. (2007^d), “Método dos elementos discretos 2D com elementos rígidos poligonais e circulares – Determinação de valores e vectores próprios”, Sísmica 2007 – 7º Cong. Sismologia e Engenharia Sísmica (Eds. Raimundo Delgado, Aníbal Costa e Xavier Romão), pp. 295-296, Porto.

SAMET, H. (1984), “The quad-tree and related hierarchical data structures”, Comput. Surveys, vol. 16(2), pp. 187-285.

SANTOS, J. (2001), AutoCAD[®] 2002 – Guia de Consulta Rápida, FCA.

SATAKE, M. (2004), “Tensorial form definitions of discrete-mechanical quantities for granular assemblies”, Int. J. Solids Structures, vol. 41, pp. 5775-5791.

- SHI, GH. e Goodman, R. E. (1984), “Discontinuous deformation analysis”, Proc. 25th U.S. Rock Mech. Symp., pp. 269-277.
- SHI, GH. e Goodman, R. E. (1988a), “Discontinuous deformation analysis – A new method for computing stress, strain and sliding of block systems”, Proc. 29th U.S. Rock Mech. Symp., pp. 381-394.
- SHI, GH. (1988b), “Discontinuous deformation analysis – A new numerical model for the static and sliding of block systems”, Tese de Doutorado, Universidade da Califórnia, Berkeley, Califórnia.
- SHI, GH. (1989), “Discontinuous deformation analysis – A new numerical model for the static and dynamics of block systems”, Lawrence Berkeley Laboratory, Report to DOE OWTD, Contract AC03-76SF0098.
- SHI, GH. (1993), “Block system modeling by discontinuous deformation analysis”, Computational Mechanics Publications, Southampton, Reino Unido e Boston, Estados Unidos da América.
- SÎNCRAIAN, G. E. e Lemos, J. V. (1998^a), “A discrete element program based on a rigid block formulation”, Relatório 40/98 – NDE/NEE, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.
- SÎNCRAIAN, G. E., Oliveira, C. S. e Lemos, J. V. (1998^b), “Assessment of the seismic behaviour of a stone masonry aqueduct using the discrete element method”, Proc. 11th European Conf. Earthquake Engineering, Balkema.
- SÎNCRAIAN, G. E. (2001), “Seismic Behaviour of Blocky Masonry Structures – A discrete Element Methods Approach”, Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- THAVALINGAM, A., Bicanic, N., Robinson, J. I. e Ponniah, D. A. (2001), “Computational framework for discontinuous modelling of masonry arch bridges”, Computers and Structures, vol. 79, pp. 1821-1830.

- TING, J. M., Meachum, L. e Rowell, J. D. (1995), “Effect of particle shape on the strength and deformation mechanics of ellipse-shaped granular assemblages”, *Engng. Computations*, vol. 12, pp. 99-108.
- TRENT, B. C. e Margolin, L. G. (1995), “Numerical validation of a constitutive theory for an arbitrarily fractured solid”, *Engng. Computations*, vol. 12, pp. 125-134.
- UNDERWOOD, P. (1983), “Dynamic relaxation”, *Comp. Meth. Transient Analysis*, (Eds. T. Belytschko e T. J. R. Hughes), pp. 1-65.
- VALENÇA J. (2006), “Técnicas de fotogrametria em engenharia de estruturas”, *Dissertação de Mestrado, Universidade de Coimbra, Coimbra*.
- VERMELTFOORT, A. T. (2001), “Analysis and experiments of masonry arches”, *Proc. 3rd Int. Seminar Historical Constructions*, (Eds. Lourenço P. B. e Roca P.), pp. 489-498, *Universidade do Minho, Guimarães*.
- VIEIRA J. L. M. (1997), “Um modelo de elementos discretos para o estudo de estruturas de alvenaria”, *Dissertação de Mestrado, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa*.
- VONK, R. A. (1993), “A micromechanical investigation of the softening of concrete loaded in compression”, vol. 38, N.º 3, *Heron*.
- WILLIAMS, J. R., e Mustoe, G. G. (1987) “Model methods for the Analysis of Discrete Systems”, *Computers & Geotechnics*, vol. 4, pp. 1-19.
- WILLIAMS, J. R. (1988), “Contact analysis of large numbers of interacting bodies using discrete modal methods for simulating material failure on the microscopic scale”, *Eng. Computational*, vol. 5, pp. 198-209.
- WILLIAMS, J. R., e O’Connor, R. (1995), “A linear complexity intersection algorithm for discrete element simulation of arbitrary geometries”, *Engng. Computations*, vol. 12, pp. 185-201.
- WILLIAMS, J. R. e O’Connor, R. (1999), “Discrete Element Simulation and the Contact Problem”, *Archives Comp. Meth. Engng*, vol. 6(4), pp. 279-304.

- XIAN, L., Bicanic, N., Owen, D. R. J. e Munjiza, A. (1991), “Rock blasting simulation by rigid body analysis and rigid-brittle fracturing model”, Proc. NEC-91.
- ZIENKIEWICZ, O. C. (1977), “The finite element method”, Prentice-Hall.
- ZILJ, G. P. A. G. e Rots, J. G. (1997), “Toward numerical prediction of cracking in masonry walls”, Computer Methods in Structural Masonry – 4 (Eds. G. N. Pande, J. Middleton e B. Kralj), pp. 94-102, E&FN Spon.

ÍNDICE REMISSIVO DE AUTORES

- Alfaiate, 25
Almeida, 64, 69
Aoki, 142
Arêde, 2, 142
Augusto, 18
Azevedo, 70, 71, 102, 131, 156, 161, 164,
165, 214
Bagi, 132
Baguelin, 70
Bandis, 64
Bandyopadhyay, 18
Barbosa, 24
Bardet, 130, 132, 138
Bathe, 14, 155, 162
Belytschko, 38, 156, 165, 223
Bonet, 80, 84
Brencich, 14
Buffarini, 12, 13
Calderini, 17
Cavicchi, 192
Cecchi, 18
Chang, 130, 131
Chopra, 150
Christoffersen, 131
Clough, 14, 111
Cormeau, 25
Costa, 16, 17, 62, 63, 67, 69, 70, 142, 169,
191
Costa P., 62
Coulomb, 6, 11, 15, 25, 43, 63, 68, 74, 76,
77, 210
Couplet, 11
Cundall, 3, 6, 19, 20, 25, 27, 38, 80, 81, 87,
92, 93, 94, 95, 102, 112, 113, 114, 138,
217, 221, 223
Davey, 62
Davies, 189
Dirichlet, 130, 133, 138
Dora, 1
Euler, 10
Ford, 189
Frey, 14
Fung, 138
Gago, 17, 192
Gauss, 131, 132, 134, 225
Gerschgorin, 156, 157, 158, 160, 162
Ghaboussi, 19
Gilbert, 13
Giordano, 13
Goodman, 15
Greenberg, 134
Greengard, 80, 94
Hahn, 23
Hart, 19
Harvey, 62
Hendry, 7, 62, 151, 189, 196, 205, 206
Hertz-Mindlin, 37
Heyman, 11, 12, 43, 63, 192
Hocking, 19, 20, 21

- Hölder, 165
Hopkins, 19
Hughes, 14
Jean, 25
Knuth, 80
Komeyli-Birjandi, 169
Konagai, 19
Koocharian, 11
Kronecker, 134
Kruyt, 132
Kulhawy, 64
Lagrange, 22
Lemos, 2, 3, 4, 9, 14, 15, 19, 20, 21, 25, 27, 35, 37, 38, 63, 80, 93, 111, 120, 156, 161, 193, 217, 218
Lin, 22
Löhner, 80
Lorig, 19, 25
Lourenço, 12, 14, 16, 69
Mamaghani, 24
Martin, 14
Melbourne, 13, 62
Migliore, 13
Miri, 18
Mohr, 6, 15, 63, 74, 76, 77, 210
Molins, 14, 60, 189, 191, 192
Morikawa, 154, 156, 162, 216
Morris, 80
Munjiza, 19, 24, 25, 27, 80, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90
Muralha, 64, 68, 69, 192
Newton, 115, 116
O'Connor, 80, 81, 87, 89
Orduña, 12
Page, 7, 11, 15, 62, 63, 69, 151, 189, 190, 191
Pantano, 13
Pardeep, 17, 18
Petricic, 24, 38, 165
Pina, 116
Pippard, 9
Pires, 25, 36
Poisson, 28, 61, 63, 67, 70, 191
Potyondy, 19, 176
Rayleigh, 110, 111
Roca, 13
Rocha, 61
Romano, 13
Rosso, 64
Rots, 25
Rouxinol, 9, 19, 72, 151, 153, 169, 202
Royles, 189
Samet, 80
Satake, 130, 133
Shi, 21, 22, 34, 81
Signorini, 25
Sîncraian, 19, 24, 25, 35, 56, 58, 69, 111, 172, 192
Thavalingam, 16, 19, 20, 21, 22, 23
Ting, 19
Topp, 14
Trent, 19
Turner, 14
Underwood, 109, 120
Valença, 169
Vermeltfoort, 190
Vieira, 19, 37, 39, 63, 64, 65, 69, 172
Vonk, 25

Williams, 20, 25, 80, 81, 87, 89

Xian, 19

Zienkiewicz, 14

Zilj, 15

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3-1: Condições, coordenadas x_c e normal n_c dos vários tipos de contacto pontuais.	56
Tabela 3-2: Valores da resistência à tracção e à compressão, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, para diversas unidades de alvenaria (ROCHA 1971).	61
Tabela 3-3: Valores das resistências à tracção e à compressão, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson das unidades de alvenaria, obtidos por diversos autores.....	63
Tabela 4-1: Pares de elementos discretos e vértices a pesquisar.	101
Tabela 6-1: Caracterização da configuração deformada.....	154
Tabela 6-2: Frequências próprias de vibração.	155
Tabela 6-3: Passo de tempo crítico para diferentes combinações e métodos.	164
Tabela 8-1: Cálculo da rigidez normal \bar{k}_n e tangencial \bar{k}_s das juntas.....	191
Tabela 8-2: Propriedades das juntas dos elementos discretos.	193

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1: Ponte da Formigosa (vista de jusante).	2
Figura 1-2: Construção de um arco da Ponte de Vila Fria. Figura retirada de (ARÊDE 2005).	2
Figura 2-1: Mecanismo de colapso de um arco de alvenaria. Figura retirada de (BUFFARINI 2006).	12
Figura 2-2: Modo de colapso de uma ponte em arco de alvenaria. Figura retirada de (MELBOURNE 1995a).	13
Figura 2-3: Localização das rótulas plásticas e da linha de impulso para um reforço FRP no intradorso e no extradorso do arco. Figura retirada de (BUFFARINI 2006).	13
Figura 2-4: Método dos elementos finitos descontínuos: (a) alvenaria; (b) modelo detalhado da micro-modelação; (c) modelo simplificado da micro-modelação. Figura adaptada de (LOURENÇO 1996).	16
Figura 2-5: Introdução de junta vertical. Figura adaptada de (LOURENÇO 1996).	16
Figura 2-6: Modelo refinado de elementos finitos. Figura retirada de (COSTA 2002).	17
Figura 2-7: Malha de elementos finitos. Figura retirada de (GAGO 2003).	17
Figura 2-8: Representação global de um modelo de elementos finitos. Figura retirada de (CALDERINI 2006).	17
Figura 2-9: Desenvolvimento da fissuração no modelo construído em laboratório. Arco: (a) isolado; (b) com tímpano mais enchimento. Figura retirada de (PARDEEP 2006).	18
Figura 2-10: Posição das rótulas do modelo reabilitado de elementos finitos. Figura adaptada de (MIRI 2006).	18
Figura 2-11: Modelo 3D de um arco de alvenaria: (a) carga assimétrica; (b) e (c) processo de colapso. Figura retirada de (LEMOS 1996a).	21
Figura 2-12: Modelo de um arco de volta perfeita em alvenaria de: (a) deformação descontínua; (b) elementos discretos circulares rígidos; (c) elementos finitos. Figura adaptada de (THAVALINGAM 2001).	22
Figura 2-13: Deformada de um arco de volta perfeita em alvenaria obtida com o método de: (a) deformação descontínua; (b) elementos discretos circulares rígidos; (c) elementos finitos. Figura adaptada de (THAVALINGAM 2001).	23

Figura 2-14: Ponte em arco de alvenaria com o enchimento modelado por elementos discretos circulares e as unidades de alvenaria por elementos finitos. Figura retirada de (PETRINIC 1996).....	24
Figura 3-1: Configuração (a) inicial e (b) deformada do sistema na versão elemento rígido.	29
Figura 3-2: Convenção positiva para os deslocamentos e para as forças:	30
Figura 3-3: Da esquerda para a direita: condição de apoio para elementos poligonais e circulares, movimento restringido e correspondente linha da matriz restrição ao movimento. (a) Movimento livre. Movimento restringido: (b) horizontal; (c) vertical; (d) rotação; (e) todos.	31
Figura 3-4: Aplicação de uma força variável de compressão Q_1 e de tracção Q_2	34
Figura 3-5: Forças de interacção exercidas sobre os elementos A e B (sobreposições propositadamente exageradas).	35
Figura 3-6: Comprimento de influência afecta ao contacto na formulação de elementos poligonais: (a) rígidos; (b) deformáveis.....	36
Figura 3-7: Interação mecânica entre elementos discretos: (a) elementos em contacto; (b) representação esquemática.	37
Figura 3-8: Rotação do elemento poligonal A sem perda de definição da normal do contacto.	39
Figura 3-9: Imbricação de elementos no ponto de intersecção de descontinuidades.....	39
Figura 3-10: Caracterização do arredondamento do vértice V	41
Figura 3-11: Caracterização do arredondamento de um elemento circular.	42
Figura 3-12: Fissuração de uma junta de um arco de alvenaria identificada pela elipse. Arco em (a) equilíbrio e em (b) colapso, e correspondente variação do comprimento de influência: (c) semidistância entre os contactos; (d) proporcional ao deslocamento e rotação; (e) intersecção dos dois arcos de arredondamento.....	44
Figura 3-13: Contacto do tipo 1 (vértice-vértice).	47
Figura 3-14: Projecção do vértice teórico VTA perpendicularmente aos lados contíguos ao vértice VB	49
Figura 3-15: Projecção do vértice teórico VTB perpendicularmente aos lados contíguos ao vértice VA	49
Figura 3-16: Contacto do tipo 2 (vértice-lado).	51
Figura 3-17: Contacto do tipo 3 (lado-vértice).	52

Figura 3-18: Mudança de tipo de contacto lado-vértice para contacto vértice-lado ($A < B$).	52
Figura 3-19: Contacto do tipo 4 (círculo-círculo).....	53
Figura 3-20: Contacto pontual do tipo 5 (vértice-círculo).....	54
Figura 3-21: Projecções do vértice teórico VTB perpendicularmente aos lados VA_1VA e $VAVA_2$	55
Figura 3-22: Contacto do tipo 6 (lado-círculo).....	55
Figura 3-23: Sobreposição: (a) admissível; (b) não admissível.....	57
Figura 3-24: Carga de colapso em função da resistência à compressão da alvenaria, para uma carga em faca aplicada a um quarto de vão.	60
Figura 3-25: Ensaio (a) da unidade de alvenaria e (b) das unidades de alvenaria com junta.	66
Figura 3-26: Exemplo de relações obtidas laboratorialmente: (a) tensão tangencial-deslocamento tangencial; (b) deslocamento normal-deslocamento tangencial. .	68
Figura 3-27: (a) Viga equivalente. Deformação: (b) axial e (c) transversal.	70
Figura 3-28: Distância entre os centros de massa L_{CM}	72
Figura 3-29: Sentidos positivos (a) das forças de contacto e (b) dos deslocamentos no contacto.....	74
Figura 3-30: Modelo elástico linear. Relação (a) $F_{C,n} - u_{C,n}$ e (b) $F_{C,s} - u_{C,s}$	75
Figura 3-31: Modelo elástico linear “perfeitamente plástico”.....	75
Figura 3-32: Critério de Mohr-Coulomb: (a) $F_{C,s,max}(c, \phi, F_n)$; (b) $F_{C,s}(u_{C,s}, F_{s,max})$	77
Figura 4-1: Operações a efectuar na detecção de contactos directa com $N_{ED} = 6$	82
Figura 4-2: Envolventes circulares para o método dos volumes envolventes.....	83
Figura 4-3: Célula central e células contíguas. Envolvente e elemento circular.....	84
Figura 4-4: Subdivisão sucessiva do domínio até ao nível 5.....	85
Figura 4-5: Representação, através de árvore binária, da subdivisão sucessiva do domínio ocupado pelos elementos discretos.....	85
Figura 4-6: Domínio dividido em células de igual dimensão.....	87
Figura 4-7: Etiquetagem dos elementos discretos 2D. Figura adaptada de (CUNDALL 1988).	93
Figura 4-8: Domínios para a detecção de contactos baseada na topologia local.....	94
Figura 4-9: Domínio dividido em células para listar os elementos nas respectivas células.	96

Figura 4-10: Células, envolventes e contactos.....	99
Figura 4-11: Verificação de contactos pré-existentes.....	100
Figura 4-12: Fluxograma do algoritmo de activação da detecção de contactos.	103
Figura 4-13: Fluxograma do algoritmo de actualização de um contacto — início, nível 1 e finalização.	104
Figura 4-14: Fluxograma do algoritmo de actualização de um contacto — níveis 2 e 3....	105
Figura 4-15: Fluxograma do algoritmo de actualização de um contacto — níveis 5 e 7....	106
Figura 4-16: Fluxograma do algoritmo de actualização de um contacto — níveis 6 e 8....	107
Figura 5-1: Incrementos dos deslocamentos relativos e forças no contacto C . As posições do ponto C e C' correspondem, respectivamente, ao instante t e $t + \Delta t$	124
Figura 5-2: (a) Forças de contacto positivas; (b) Correspondentes forças de contacto actuantes em cada um dos elementos discretos.	126
Figura 5-3: Ciclo de cálculo do método dos elementos discretos para cada nível de carga.	127
Figura 5-4: Fluxograma relativo à avaliação da convergência da solução.	129
Figura 5-5: Evolução do deslocamento vertical do centro de massa de um elemento discreto com o número de iterações para diferentes níveis de carga.	130
Figura 5-6: Representação da convenção para as forças de superfície: (a) na curva definida pelo perímetro do elemento; (b) F_r aplicada no ponto r	135
Figura 5-7: Representação dos elementos discretos circulares num alvéolo circular.....	137
Figura 6-1: (a) Contacto pontual C ; (b) Forças e deslocamentos generalizados correspondentes.....	142
Figura 6-2: Contacto genérico C	143
Figura 6-3: Primeira coluna de \mathbf{k}_C : (a) deslocamento generalizado segundo a coordenada 1 e (b) forças generalizadas.....	144
Figura 6-4: Segunda coluna de \mathbf{k}_C : (a) deslocamento generalizado segundo a coordenada 2 e (b) forças generalizadas.....	145
Figura 6-5: Terceira coluna de \mathbf{k}_C : (a) deslocamento generalizado segundo a coordenada 3 e (b) forças generalizadas.....	146
Figura 6-6: Primeiros 5 modos de vibração para a combinação 1, no formato 1.	152
Figura 6-7: Primeiros 5 modos de vibração para a combinação 1, no formato 2.	153
Figura 6-8: Primeiros 5 modos de vibração para a combinação 1, no formato 3.	157

Figura 6-9: Modos de deformação de dois elementos discretos circulares em contacto....	162
Figura 6-10: Passo de tempo crítico para diferentes métodos.	164
Figura 7-1: Geração automática de subestruturas de elementos discretos: (a) arco de volta perfeita; (b) arcobotante; (c) arco segmentado; (d) arco segmentado com os muros de tímpano; (e) parede com sobreposição; e (f) parede sem sobreposição.	173
Figura 7-2: Malhas de EDC de distribuição regular (a) rectangular e (b) hexagonal.....	175
Figura 7-3: Malha de EDC de distribuição aleatória.	175
Figura 7-4: Malha de elementos discretos circulares de distribuição regular rectangular..	176
Figura 7-5: Domínios de inibição de geometria rectangular e em arco.....	178
Figura 7-6. Verificação da condição de afastamento entre um domínio de inibição e um elemento discreto circular.	181
Figura 7-7: Malha de elementos discretos circulares em Υ antes da fase de expansão (porosidade 65%).	182
Figura 7-8: Bloqueamento dos elementos discretos não envolvidos na fase de expansão do raio (porosidade 65%).	182
Figura 7-9: Malha de elementos discretos circulares durante a aplicação do método da expansão do raio (porosidade 37%).	184
Figura 7-10: Estado intermédio do processo de expansão correspondente a uma porosidade de 37%.	185
Figura 7-11: Final do processo de expansão correspondente a uma porosidade de 30 %..	186
Figura 7-12: Atribuição das condições de fronteira efectivas aos elementos circulares (porosidade 30 %).	186
Figura 7-13: Malha final de elementos poligonais e elementos circulares (porosidade 30%).	187
Figura 7-14: Malha final de elementos circulares e fila de elementos poligonais fictícios (porosidade 25%).	187
Figura 8-1: Ponte em arco de alvenaria de Bridgemill. Figura retirada de (PAGE 1995)..	190
Figura 8-2: Primeira aproximação da rigidez normal e tangencial dos contactos entre elementos poligonais e elementos circulares.	192
Figura 8-3: Colocação de elementos circulares em Υ e fila de elementos poligonais fictícios (porosidade 78%).	194
Figura 8-4: Amostra quadrada de elementos circulares considerada no estudo comparativo.	194

Figura 8-5: (a) Confinamento da amostra. (b) Aplicação da carga.....	195
Figura 8-6: Relação entre as deformações e as tensões na amostra confinada.....	195
Figura 8-7: Arco isolado e carga.....	196
Figura 8-8: Distribuição no extradorso do arco da carga uniformemente distribuída no pavimento.....	197
Figura 8-9: Relação entre o deslocamento e a carga para o modelo 1.....	199
Figura 8-10: Mecanismo de colapso do arco isolado.....	199
Figura 8-11: Arco isolado, peso próprio do material de enchimento e carga, cuja representação se confunde com a do peso próprio.....	199
Figura 8-12: Relação entre o deslocamento e a carga para o modelo 2.....	200
Figura 8-13: Mecanismo de colapso do arco com as acções a simular o material de enchimento.....	200
Figura 8-14 : Remoção dos elementos poligonais auxiliares e configuração após a aplicação do método de expansão do raio.....	201
Figura 8-15: Relação entre o deslocamento e a carga para o modelo 3.....	201
Figura 8-16: Relação entre o deslocamento e a carga para o elemento poligonal que suporta a carga pontual.....	202
Figura 8-17: Soluções para a carga de: (a) 347 kN; (b) 947 kN; (c) 1147 kN; e (d) 3147 kN.....	203
Figura 8-18: Colapso efectivo. Carga de 3147 kN.....	204
Figura 8-19: Arco com os muros de tímpano e a carga.....	204
Figura 8-20 : Relação entre o deslocamento e a carga.....	205
Figura 8-21: Solução do método dos elementos discretos para o peso próprio.....	205
Figura 8-22: Equilíbrio para uma carga inferior à de colapso.....	205
Figura 8-23: Mecanismo de colapso do arco com muro de tímpano. Carga de 3600 kN...206	206
Figura 8-24: Comparação dos resultados dos quatro modelos com o resultado de Hendry <i>et al.</i>	206

ABREVIATURAS e SIGLAS

ASCII	Código padrão americano para permuta de informações
CPU	Unidade Central de Processamento
DDA	Discontinuous Deformation Analysis
DXF	Formato de comunicação ASCII ou binário para migração entre diferentes sistemas
EC6	Eurocódigo 6: Projecto de estruturas de alvenaria
ED	Elemento discreto
EDC	Elemento discreto circular
EDP	Elemento discreto poligonal
FAG	Formulação com amortecimento global
FAL	Formulação com amortecimento local
FMM	Formulação com massa modificada
FRP	Plástico reforçado com fibras
IMSL	Mathematical and Statistical Libraries
LFE	LNEC-FCTUC-ESTV
LNEC	Laboratório Nacional de Engenharia Civil
MED	Método dos Elementos Discretos
MEDM	Método dos Elementos Discretos Mistos
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEXE	Military Engineering Experimental Establishment
MOT	Ministry of Transport
NBS	No Binary Search
PC	Computador Pessoal
PFC	Particle Flow Code (programa comercial de elementos discretos circulares)
RAM	Memória de acesso aleatório
UDEC	Universal Distinct Element Code (programa comercial de elementos discretos poligonais)
VBA	Visual Basic for Applications (programa da Microsoft Visual Basic)
XLS	Ficheiros de folha de cálculo Microsoft Excel

NOTAÇÃO

a) Maiúsculas latinas

A	Área
$A^{(i,j)}$	Vector auxiliar temporário da célula (i, j)
\mathbf{B}	Matriz restrição ao movimento Matriz com as derivadas das funções de interpolação
B	Vector que agrupa os primeiros elementos discretos das listas y_{iy}
C	Contacto
\mathbf{C}	Matriz ordenação
D	Vector auxiliar para identificar a numeração dos elementos discretos Módulo de elasticidade, Módulo de defomabilidade (para solos)
E	Energia total do sistema composta pelas componentes conservativas (E_k , E_p e W)
E_{bj}	Módulo de elasticidade do conjunto junta e unidades de alvenaria contíguas à junta
E^*	Módulo de elasticidade correspondente ao tipo de onda
E_k	Energia cinética
E_p	Energia potencial elástica
E_i	Energia inelástica
E	Vector lista
\mathbf{E}_C	Matriz constitutiva elástica para o contacto C
F	Força
F	Vector das forças generalizadas
$F_{\text{obf},i}^{(N_{\text{pt}})}$	Força não equilibrada após N_{pt} passos de tempo
G	Módulo de distorção
G	Acção permanente, força de gravidade
I_p	Momento polar de inércia
I	Momento polar de inércia de massa

K_b	Módulo de compressibilidade cúbica da unidade de alvenaria
\mathbf{K}_c	Matriz de rigidez do contacto no sistema de coordenadas globais
$\tilde{\mathbf{K}}_c$	Matriz obtida de \mathbf{K}_c anulando os termos cruzados
\mathbf{K}	Matriz de rigidez do sistema de elementos discretos
L	Comprimento
L_c	Comprimento de influência do contacto
\mathbf{L}	Matriz de incidência
\mathbf{M}	Matriz das quantidades de inércia do sistema
\mathbf{O}_c	Vector de ocorrência do contacto
P	Pressão
P_D	Potência de amortecimento
\mathbf{P}	Matriz compatibilidade entre os deslocamentos generalizados e no contacto
Q	Acção variável
R	Raio
\mathbf{T}_α	Matriz de rotação (2×2)
$\mathbf{T}_{\alpha',c}$	Matriz de rotação (3×3) similar a \mathbf{T}_α definida a partir da normal do contacto e incluindo o grau de liberdade rotacional.
$\mathbf{T}_{\alpha'',c}$	Matriz de rotação (6×6)
\mathbf{V}_c	Vector grau de liberdade elementar
W	Trabalho realizado pelas forças de gravidade e variáveis
W_D	Trabalho realizado pelas forças e momentos de amortecimento fictício

b) Minúsculas latinas

b	Largura, espessura
c	Coesão, amortecimento, velocidade de propagação de onda
d	Distância, diâmetro
d_r	Distância de arredondamento para EDP
d_{rc}	Distância de arredondamento para EDC
$d_{r,k}$	Distância de arredondamento para o ED k

$d_{\text{gap},C}$	Tolerância de separação do contacto C
$d_{\text{over},C}$	Tolerância de sobreposição do contacto C
e_{ijk}	Símbolo de permutação ($e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1$; $e_{321} = e_{213} = e_{132} = -1$; zero nos restantes casos)
f_b	Resistência à compressão da unidade de alvenaria
f_{bk}	Valor característico da resistência à compressão da unidade de alvenaria
f_{bt}	Resistência à tracção da unidade de alvenaria
f_{btk}	Valor característico da resistência à tracção da unidade de alvenaria
f	Resistência à compressão da alvenaria
f_t	Resistência à tracção da alvenaria
f_{ft}	Resistência à tracção do material de enchimento
g	Constante da aceleração da gravidade
h	Altura, profundidade
\mathbf{k}_C	Matriz de rigidez do contacto em termos de deslocamentos e de forças generalizadas nas coordenadas locais
$\tilde{\mathbf{k}}_C$	Matriz obtida de \mathbf{k}_C anulando os termos cruzados
\tilde{k}_n	Rigidez normal reduzida
\tilde{k}_s	Rigidez tangencial reduzida
$k_{n,bj}$	Rigidez normal por unidade de área do sistema composto pelas unidades de alvenaria contíguas e junta do ensaio
\bar{k}_n	Rigidez normal por unidade de área do sistema composto pelas unidades de alvenaria contíguas e junta de cálculo
k_n	Rigidez normal do contacto pontual
$k_{s,bj}$	Rigidez tangencial por unidade de área do sistema composto pelas unidades de alvenaria contíguas e junta do ensaio
\bar{k}_s	Rigidez tangencial por unidade de área do sistema composto pelas unidades de alvenaria contíguas e junta de cálculo
k_s	Rigidez tangencial do contacto pontual
m	Massa
m_e	Massa efectiva
\mathbf{m}	Matriz elementar das quantidades de inércia
n	Porosidade
\mathbf{n}	Versor normal

t	Versor tangente
t, n	Relativo aos eixos t e n
u	Deslocamento
\dot{u}	Velocidade
\ddot{u}	Aceleração
u	Vector dos deslocamentos generalizados
$u_{\text{gap},C}$	Variável de separação do contacto C
x	Coordenada rectangular cartesiana

c) Maiúsculas gregas

Π	Domínio de actuação
Υ	Domínio de preenchimento
Φ	Aresta de fronteira
Ψ	União dos domínios de inibição
Ω	Domínio de inibição

d) Minúsculas gregas

α	Ângulo, constante de amortecimento
α_{dil}	Ângulo de dilatação
\mathbf{a}_{visc}	Matriz diagonal das constantes de amortecimento viscoso
α_{ij}	Tensor das deformações
$\dot{\alpha}_{ij}$	Taxa de variação do tensor das deformações
ε_{ij}	Tensor das deformações puro
ε_V	Extensão volumétrica
$\dot{\varepsilon}_V$	Taxa de variação da extensão volumétrica
η	Factor de redução
θ	Rotação
$\dot{\theta}$	Velocidade angular

$\ddot{\theta}$	Aceleração angular
ν	Coefficiente de Poisson
ξ	Coefficiente de amortecimento relativo
ρ	Massa volúmica
σ	Tensor das tensões
σ_I	Tensão isotrópica
φ	Factor de segurança para o passo de tempo
ϕ	Ângulo de atrito interno
χ_{tp}	Percentagem do comprimento da menor aresta de um EDP
χ_{rc}	Percentagem do diâmetro de um EDC
χ_{tol}	Factor de tolerância para a separação
χ_d	Factor usado na decisão sobre a activação da rotina de detecção de contactos
χ_{exp}	Factor de tolerância para o método de expansão do raio
ψ	Factor igual a 1 (tracção) ou -1 (compressão)
ω	Frequência angular própria
ω_{ij}	Tensor das rotações de corpo rígido

e) Índices inferiores gerais

AC	Alvéolo circular
C	Contacto
CM	Centro de massa
D	Amortecimento, domínio
DG	Amortecimento global
DL	Amortecimento local
DRkn	Amortecimento de Rayleigh proporcional à rigidez normal
DRks	Amortecimento de Rayleigh proporcional à rigidez tangente
DRm	Amortecimento de Rayleigh proporcional à massa
ED	Elemento discreto
EDC	Elemento discreto circular

EDCG	Elemento discreto circular da geração
EDP	Elemento discreto poligonal
ER	Envolvente rectangular
G	Força de gravidade
GDL	Grau de liberdade
Q	Força variável
V	Vértice
VT	Vértice teórico

b	Unidade de alvenaria
bj	Unidade de alvenaria e junta
c	Compressão
cel	Célula
cicl	Ciclo
cor	Corrigido
cr	Crítico
ed	Edométrico
elas	Elástico
err	Erro
f	Enchimento
fix	Fixo
gap	Separação
Ger	Gerschgorin
inel	Inelástico
inc	Incremento
ini	Inicial
i, j, k	Índices variáveis
j	Junta
mat	Material
max	Máximo
min	Mínimo
modif	Modificada

n, n	Relativo à direcção normal
n_{visc}	Não viscoso
obf	Força não equilibrada
$over$	Sobreposição
pre	Prescrito
rot	Rotação
ss	Soma simples
s, t	Relativo à direcção t
t	Tracção
tra	Translação
tol	Tolerância
tri	Triângulo
$visc$	Viscosidade
$virt$	Virtual

Π	Domínio de actuação
Υ	Domínio de preenchimento

f) Índices superiores gerais

(k)	Iteração k
t	No instante de tempo t
0	Relativo a valor inicial, valor prescrito

g) Símbolos

\bar{x}	Valor médio de x (não se aplica a \bar{k}_n e \bar{k}_s)
\hat{x}	Valor inteiro de x
\tilde{x}	Valor aproximado de x
\dot{x}	Derivada de x em ordem ao tempo
\ddot{x}	Segunda derivada de x em ordem ao tempo

$=$	Igual a
$:=$	Toma o valor de
\equiv	Idêntico
\approx	Aproximadamente igual a
$<$	Menor que
\leq	Menor ou igual a
$>$	Maior que
\geq	Maior ou igual a
\Leftarrow	Se
$ a $	valor absoluto de a
$\{ \}$	Vector
$[]$	Matriz
Δx	Incremento da variável x

Investigação co-financiada

