Do Prazer de Aprender à Magia de Ensinar

Liliana Carolina Vieira Pinho

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Do Prazer de Aprender à Magia de Ensinar

Liliana Carolina Vieira Pinho

Relatório para a obtenção do grau de **Mestre em Ensino da Matemática no 3.° ciclo do Ensino Básico e no Secundário**

Orientador Pedagógico: Paulo Amílcar São Miguel Borges de Carvalho
Orientador Científico: Helena Maria Mamede Albuquerque

Júri

Presidente: Maria Celeste de Almeida Gouveia
Orientador: Helena Maria Mamede Albuquerque
Vogal: Joana Maria da Silva Teles Correia

Data: julho de 2016

Resumo

O presente relatório tem como função descrever e refletir sobre as experiências vividas ao longo do ano de estágio curricular que decorreu na Escola Secundária D. Duarte, do Agrupamento Escolas Coimbra Oeste, sob a orientação científica da Doutora Helena Maria Mamede Albuquerque, e pedagógica do Dr. Paulo Amílcar São Miguel Borges de Carvalho, ao longo do ano letivo 2015/2016.

O estágio curricular decorre no segundo ano do Mestrado no Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. A realização do estágio obriga à execução de um relatório que descreva toda a atividade desenvolvida ao longo do ano letivo.

Este relatório divide-se em quatro capítulos. No 1º capítulo faremos uma introdução ao trabalho realizado enquadrando-o na dinâmica da escola. No 2º capítulo daremos algumas informações sobre as turmas e apresentaremos um resumo sobre a prática letiva. No 3º descreveremos as atividades desenvolvidas durante este ano letivo. O capítulo final contém a conclusão em forma de reflexão pessoal sobre o ano de estágio.

Palavras Chave: Estágio Curricular, Matemática, Ensino, Mestrado

Abstract

This report serves to describe and show my reflection on the experiences during the internship year held at the High School D. Duarte, Grouping Schools of Coimbra West, under the supervision of Dr. Helena Maria Mamede Albuquerque, and pedagogical Dr . Paulo Amílcar São Miguel Borges de Carvalho, during the school year 2015/2016.

The internship takes place during the second year of Master in Mathematics Teaching , during 3rd Period of High School Teaching at the Mathematics Department of University of Coimbra.

The completion of stage requires the execution of a report describing all the activity developed throughout the school year. This report is divided into four sections. In the 1st chapter I will make an introduction to the work done, framing it in the school dynamics. In the 2nd chapter some information will be given about the classes and a summary of the teaching practice will be presented. In the 3rd chapter, I will describe the activities done during this school year. The final chapter contains the conclusion in the form of personal reflection on the internship year.

Keywords: Internship, Mathematics, Education, Master

Agradecimentos

Muitos anos se passaram e muitas foram as pessoas que me marcaram e que de uma maneira ou de outra, me apoiaram e incentivaram. Esta página não é suficiente para enumerar todas, por isso vou refiro-me às que considero principais, tendo todas as outras no coração e no pensamento também.

Agradeço em primeiro lugar, à minha família, que sempre acreditou em mim, até ao último minuto e sem os quais nada disto faria sentido. Em especial um enorme obrigado aos meus avós, para os quais, todas as palavras que conheço, nunca serão suficientes para agradecer tudo o que sempre me deu e por acreditarem em mim em todos os momentos, quando eu já só duvidava.

Agradeço em especial, à pessoa que mais me aguentou neste último ano, Álvaro Pinheiro. Obrigado por estares sempre presente nos momentos bons e menos bons. Sei também o quanto foi complicado, mas prometo que para ti terei também a mesma imensa paciência.

Um obrigado também à minha segunda família que levo de Coimbra e que no futuro, mesmo longe e ocupada, estarei sempre perto, à distância de uma chamada ou de uma mensagem. Não são apenas segredos que levo desta cidade dentro de mim, levo também comigo para sempre amigos no coração.

Ficariam incompletos estes agradecimentos, sem agradecer ao meu mestre, colega e amigo, que levo também no coração, Dr. Paulo Carvalho, o meu obrigada pelas horas infindáveis que me ouviu e pelos conselhos que me deu, os quais me acompanharão para o futuro. Durante este ano, foi o melhor mentor que poderia ter tido, nunca deixando de ser o meu colega de estágio que eu precisava.

Para a Doutora Helena Albuquerque, um obrigada também, por ter sido muitas vezes como uma mãe para mim e por todas as vezes que disse para não me preocupar, palavras essas que mesmo sem me despreocuparem, acalmaram-me e deram-me coragem para continuar. Agradeço por em todos os momentos em mim e me apoiar nesta etapa da minha vida.

E por fim, um agradecimento especial à Doutora Celeste Gouveia por me ter feito encarar esta profissão de outra forma e permitir-me crescer como professora, e se chego hoje aqui a este momento, foi porque certo dia as suas palavras foram de tal forma inspiradoras, que não me permitiram desistir.

Se tiverem determinação,
Se tiverem vontade de lutar,
Com certeza serão bem-sucedidos,
Com certeza terão um brilhante futuro.
Lu Xum

Conteúdo

Lista de Figuras

Capítulo 1

Enquadramento

O presente relatório é iniciado com a descrição da Escola Secundária D. Duarte, "casa" que me acolheu nestes últimos 10 meses, e do núcleo de estágio de Matemática aí existente.

Figura 1.1: Entrada principal da Escola Secundária D.Duarte

1.1. A Escola

A Escola Secundária D. Duarte foi inaugurada a 17 de abril de 1969, pelo então Presidente da República, Américo Tomás, o Ministro da Educação da época, José Hermano Saraiva, e o Ministro das Obras Públicas, Rui Sanches, antes de estes se deslocarem à Universidade de Coimbra para a inauguração do Departamento de Matemática desta mesma universidade. Este dia viria a ser recordado por todos como o início da "Crise de 69", em que os estudantes universitários se revoltaram com a falta de diálogo por parte do governo e a não participação das estruturas estudantis nos órgãos políticos do Estado Novo.

Recentemente com as reformas do ensino, a escola veio a integrar o Agrupamento Escolas Coimbra Oeste, como escola sede do mesmo. O agrupamento conta atualmente com oferta educativa desde o Pré-Escolar até ao Ensino Secundário.

Durante anos, a escola sofreu várias transformações ao nível da sua oferta educativa. Atualmente a Escola Secundária D. Duarte alberga ensino secundário, uma turma do 3º ciclo do ensino básico e vários cursos de formação profissional. No presente ano letivo a oferta educativa à comunidade foi:

- Ensino Regular
  - Curso de Ciências e Tecnologias;
  - Curso de Línguas e Humanidades.
- Ensino Profissional
  - Técnico Recursos Florestais e Ambientais;
  - Técnico Cozinha-Pastelaria;
  - Técnico Restaurante-Bar;
  - Técnico Gestão e Programação de Sistemas Informáticos.
  - Animador Soiocultural;
- 3^o ciclo
  - Uma turma de 8º ano.

1.2. Núcleo de Estágio

No dia 1 de setembro de 2015, pelas 10 horas, decorreu no gabinete 2.6 do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, uma reunião de apresentação entre o orientador pedagógico e a estagiária, presidida pela orientadora científica, Doutora Helena Maria Mamede Albuquerque. O núcleo de estágio foi, deste modo, constituído pelo orientador pedagógico, Dr. Paulo Amílcar Carvalho, coordenador do Departamento Curricular de Matemática e Informática da escola, e pela professora estagiária Liliana Pinho.
Nesse mesmo dia fui visitar a escola, aproveitando para ir à secretaria preencher uma ficha com os dados pessoais, e criar o endereço de correio eletrónico institucional que utilizei para me corresponder com os restantes professores. Nesta primeira semana as reuniões do núcleo de estágio serviram essencialmente para planear algumas atividades que viriam a ser realizadas ao longo do ano. Neste período tivemos ainda tempo para organizar o calendário de exames dos alunos de 3º ano dos cursos de ensino profissional existentes na escola, uma vez que a época extraordinária decorre no início do mês de setembro.
No dia 8 de setembro decorreu na Escola Secundária D. Duarte um almoço convívio para todo o pessoal docente e não docente do Agrupamento Escolas Coimbra Oeste.

Esse momento foi aproveitado para, num ambiente informal, conhecer alguns professores e ficar a conhecer melhor o ambiente escolar. Nesse dia à tarde teve lugar a primeira reunião de Departamento Curricular de Matemática e Informática, onde vários foram os pontos de trabalho, entre os quais a apresentação dos novos membros do departamento.

Nos dias 14 e 15 de setembro o núcleo de estágio reuniu-se, para participar no secretariado dos exames referentes ao ensino profissional, onde desde logo me foi proporcionado um primeiro contacto com a realidade. Durante a participação no secretariado foi-me proposto pelo professor cooperante a oportunidade de corrigir exames do módulo A9-Funções de Crescimento.

Tendo neste ano letivo o orientador pedagógico a seu cargo quatro turmas, duas de ensino regular e duas do ensino profissional, desde logo ficou decidido que eu apenas assistiria, e lecionaria, aulas a três dessas turmas. Acompanhei então ao longo do ano letivo a turma de 1º ano do curso profissional de Animador Sociocultural, uma das turmas de 11º ano do Curso de Ciências e Tecnologias, e por fim uma turma também do 11º ano, mas esta de Línguas e Humanidades.

De uma maneira geral posso avaliar a experiência deste ano letivo como bastante enriquecedora, em particular, ao nível de conteúdos lecionados os quais foram muito diversificados.

Capítulo 2

Prática Pedagógica

Neste capítulo apresentarei uma descrição de cada turma, assim como as atividades desenvolvidas ao longo do ano letivo. Sempre foram discutidos e refletidos em conjunto pela estagiária e pelo professor cooperante os elementos de avaliação a aplicar e a preparação das aulas lecionadas. Neste capítulo serão referenciadas ainda as aulas de Plano Sucesso Escolar que tive oportunidade de lecionar à turma do 11º ano do Curso de Ciências e Tecnologias.

2.1. 11º ano: Matemática A

2.1.1. Caraterização

Os alunos da turma do 11º ano do Curso de Ciências e Tecnologias, frequentam a disciplina de Matemática A. A turma no início do ano contava com um total de 18 alunos, com uma média de idades de 16 anos, e com cerca de 67% de rapazes e 33% de raparigas. A maioria dos alunos vivia em agregados familiares de 4 ou 5 elementos. Enquanto que metade da turma residia entre 6 a 10 km da escola. Havia 6 alunos que residiam a mais de 10 km da escola, e dois desses alunos deslocavam-se diariamente de Penela para a escola. Cerca de metade dos alunos levantava-se diariamente antes das 7 horas da manhã, e a maioria afirmava estudar entre 1 a 2 horas por dia, e não ter retenções em anos anteriores.

Todos os alunos possuíam computador em casa, e utilizavam a Internet principalmente para aceder às redes sociais e para fazerem pesquisas. Para os alunos desta turma as qualidades mais importantes de um professor eram a de "saber ensinar" e "ser justo" (informação recolhida através do inquérito aos alunos e encarregados de educação no início do ano letivo por parte do diretor de turma).

Desde o início do ano letivo a turma demonstrou um comportamento irrepreensível e de bastante simpatia, pelo que se tornou desde logo fácil a minha interação com os alunos. No fim do 1º período a turma passou a ser constituída apenas por 17 alunos, uma vez que um deles alterou o seu percurso escolar.

2.1.2. Trabalho em Sala de Aula

Na escola o manual adotado para Matemática A neste ano letivo foi o "Ípsilon - 11º ano", dos autores Carlos Andrade, Cristina Viegas, Paula Pinto Pereira, e Pedro Pimenta, da Texto Editora, permitindo a continuação do projeto já iniciado pelos alunos no ano letivo anterior.

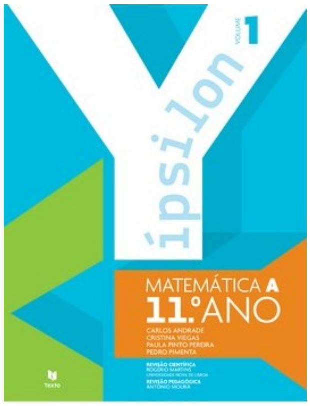


Figura 2.1: Parte 1 do Manual Adotado para Matemática A

No início do ano foram construídas as planificações a longo prazo, para o 11º ano na disciplina de Matemática A (conforme o Anexo A.1 deste relatório). Estes alunos suportavam uma carga horária, relativa à disciplina de Matemática A, de 3 blocos de 90 minutos semanais. A avaliação dos alunos foi feita segundo critérios aprovados pelo departamento curricular, e pelo conselho pedagógico do agrupamento, que podem ser encontrados no Anexo A.2. Todos os documentos de avaliação foram feitos por mim em conjunto com o professor cooperante em parceria com o professor da outra turma de 11º ano do Curso de Ciências e Tecnologias, Dr. Leonel Antunes. Também as fichas de trabalho disponibilizadas aos alunos no decorrer do ano letivo foram elaboradas em conjunto com os dois professores.

Durante o ano letivo foi-me proporcionada a hipótese de lecionar os conteúdos referentes à definição de plano, à posição relativa entre planos, à programação linear, e às operações com funções racionais. Lecionei à turma um total de 6 aulas de 90 minutos, não contabilizando as aulas de apoio.

No 1º período as aulas foram maioritariamente lecionadas pelo professor cooperante, sendo o meu papel secundário, uma vez que ia prestando auxílio e esclarecendo pequenas dúvidas que iam surgindo aos alunos. Quase no término deste período e no contexto da lecionação da equação cartesiana do plano tive oportunidade de lecionar uma aula em que foi resolvida uma ficha formativa onde os alunos poderiam definir o plano com recurso a vários elementos fornecidos. A ficha formativa assim como a planificação da aula podem ser encontrados nos Anexos A.3 e A.4 deste documento. Os alunos após recordarem que podemos definir um plano com recurso, a duas retas estritamente paralelas, a três pontos não colineares, uma reta e um ponto exterior à reta, duas retas concorrentes, ou o vetor normal ao plano e um ponto do mesmo (do qual se esquecem frequentemente), facilmente começaram a perceber o objetivo da ficha formativa. Nesta aula tentei revelar a importância de dado um ponto do plano e um vetor normal a este ser necessário escrever a equação geral do plano, e de que dada uma equação geral do plano ser também possível determinar um vetor normal ao mesmo. Para que os alunos compreendessem que estas operações seriam rápidas e fáceis, fui dizendo várias vezes, que dado um ponto do plano e um vetor normal tinham 30 segundos para escrever a equação geral do plano, e que dada a equação geral do plano tinham 5 segundos para escrever um vetor normal ao plano.

No início do 2º período tive a oportunidade de lecionar a posição relativa entre três planos. O principal objetivo era colocar os alunos a tentar visualizar no espaço o que era lhes era apresentado nos exercícios. Para isso era necessário que quando olhassem para as equações cartesianas dos planos apresentados fosse visível o que poderia ser ou não a sua interseção.

Intimamente ligado a esta interpretação surge a resolução de sistemas, que os alunos até então apenas sabiam resolver pelo método de substituição. Foi então que tive oportunidade de lhes ensinar o método da adição ordenada que se baseia num princípio de equivalência que consiste na substituição de uma equação pela sua adição algébrica com outra. Todos os alunos acompanharam a lecionação da aula e revelaram posteriormente domínio destes conceitos em provas de avaliação.

Ainda neste período tive oportunidade de dar o capítulo referente a Programação Linear. Como preparação para essa prática elaborei um pequeno resumo da matéria que deveria ser abordada de modo a servir-me de base e apoio nas aulas. Esse resumo pode ser consultado no Anexo A.5 do presente relatório. Este tema era completamente desconhecido por parte dos alunos, e foi introduzido iniciando a explicação com uma contextualização histórica, despertando assim o interesse, não só pelo conceito, mas também pelo modo como surgiu e pela complexidade que pode alcançar. Ao nível do 11º ano os problemas resolvidos e analisados apenas abordam a existência de duas variáveis, apesar de ser essencial os alunos saberem e compreenderem que essa é uma realidade limitada e que podem existir centenas de milhares de variáveis, o que torna imprescindível recorrer a algoritmos eficientes aplicados por computadores, cada vez mais potentes e rápidos, de modo a ajudarem a evolução deste "novo" ramo da Matemática.

As aulas desenvolveram-se com a explicação do que era, e de como surgia um problema de programação linear. Os conceitos teóricos fundamentais para a resolução destes problemas, são o de função objetivo, variáveis de decisão, restrições ao problema, região admissível, solução admissível, e solução ótima. Para conceber um problema de programação linear é necessário passar por uma série de fases, e essa foi a principal mensagem que quis transmitir aos alunos. São elas:

- Verificação, no contexto do problema da legitimidade do uso de inequações ou equações lineares;
- Identificação das variáveis decisão;
- Descrição da função objetivo;
- Definição das restrições;
- Formulação matemática do problema.

Na resolução de um exercício de programação linear os alunos devem passar por vários passos, após a formulação do problema, ou seja, depois de devidamente identificada a função objetivo e as devidas restrições, os alunos devem passar à representação geométrica da região admissível sendo as possíveis soluções ótimas garantidamente os vértices dessa região plana. No seguimento da resolução, os alunos devem determinar as coordenadas dos pontos vértice da região admissível, e verificar qual deles resulta na melhor solução para o problema.

No decorrer das aulas muitos foram os exercícios resolvidos mas o que mais problemas provocou foi o que apresento de seguida:

"Uma frutaria confeciona dois tipos de bebidas com sumo de laranja e sumo de manga.

- Bebida X: um litro de sumo de laranja por cada litro de sumo de manga.
- Bebida Y: três litros de sumo de laranja por cada litro de sumo de manga.

Para confecionar estas bebidas, a frutaria dispõe diariamente de 18 litros de sumo de laranja e de 10 litros de sumo de manga. Cada litro de bebida X dá um lucro de 3 euros e cada litro de bebida Y dá um lucro de 4 euros. Supondo que a frutaria vende diariamente toda a produção destas bebidas, quantos litros de bebida X e quantos litros de bebida Y deve confecionar por dia, para maximizar o lucro?".

Os alunos tiveram alguma dificuldade em formular o problema devido às proporções utilizadas na produção dos dois tipos de bebida. Um litro de sumo de laranja e um litro de sumo de manga, no caso da bebida do tipo X, produziam dois litros de bebida, ao contrário do que os alunos começaram por pensar.

Na semana seguinte à lecionação dos conteúdos, os alunos realizaram um teste de avaliação em que foram postos à prova os conceitos lecionados e em que todos os alunos tiveram aproveitamento positivo. O teste pode ser consultado no Anexo A.6.

Agrupamento Escolas Coimbra Oeste 11ºA				
		1	2	Total
Nº	Nome	10	20	30
1		10	18	28
2		10	17	27
3		0	14	14
4		10	12	22
6		0	15	15
7		10	15	25
8		10	10	20
9		10	11	21
10		10	19	29
11		10	18	28
12		10	19	29
13		10	9	19
14		8	16	24
15		10	19	29
16		6	19	25
17		10	18	28
18		10	19	29

Figura 2.2: Classificações do Teste de Avaliação sobre Programação Linear

Ainda no decorrer do mesmo período letivo lecionei os conteúdos referentes a operações racionais com funções. Durante a exposição foi possível fazer a caraterização das funções soma, diferença, produto e quociente de funções. Como era de esperar, determinar o domínio das funções adição, subtração e produto não se revelou um obstáculo para os alunos, assim como o cálculo das suas expressões analíticas. Porém na divisão de funções as coisas tornaram-se mais complicadas uma vez que não é suficiente proceder à interseção dos domínios das funções entre as quais opera, mas também é necessário intersetar estes dois conjuntos com os pontos da função denominador em que esta não se anula. Resumindo a parte mais delicada para os alunos era compreenderem que o cálculo do domínio da função quociente entre duas funções racionais se calculava do seguinte modo

$$D_{\frac{f(x)}{g(x)}} = D_{f(x)} \cap \{x \in D_{g(x)} : g(x) \neq 0\}.$$

Após alguns exercícios os alunos rapidamente conseguiram compreender o conceito e este deixou de ser um ponto complicado para eles. O plano de aula relativo a este tema pode ser encontrado no Anexo A.7 deste relatório.

2.1.3. Plano Sucesso Escolar

Na escola é disponibilizada a oportunidade de os alunos assistirem às aulas de Plano Sucesso Escolar, onde têm oportunidade de esclarecer dúvidas e resolver exercícios. Estas aulas de apoio foram lecionadas integralmente por mim, e tiveram ao longo do ano uma adesão bastante significativa (11 dos alunos estiveram presentes em mais de metade dessas aulas, chegando a haver alunos com mais de 85% de presenças).
No dia 6 de outubro chegou o dia de começar a lecionar estas aulas, e apesar do meu receio, tentei parecer confiante e determinada. Os alunos vinham naturalmente como se não fosse importante ser eu ou o professor cooperante a dar as aulas. Para eles aquele era o momento de esclarecer as infindáveis dúvidas sobre trigonometria, aquele tema horrível que eles tanto temiam.
Todas as semanas durante 90 minutos esforçava-me para que aqueles poucos minutos fossem rentáveis e esclarecedores. Penso que para os alunos que as frequentavam com regularidade estas foram produtivas. Nas "vésperas" dos testes de avaliação ou das fichas de avaliação as presenças chegavam a ultrapassar os 80% da turma. Esses eram os dias mais complicados, 14 ou 15 alunos cada um com a sua dúvida, cada um com os seus exercícios,..., era uma batalha constante para resolver todos os problemas, e esclarecer todas as dúvidas que se acumulavam para aquele dia.
Durante o ano foram lecionadas 26 aulas, 9 dessas aulas no 1º período, em que nos centrámos em trigonometria e já mais no término do período no produto escalar. Outras 9 aulas no 2º período, que foram principalmente dedicado à programação linear, resolução de equações e inequações fracionárias, operações com funções e inversas de funções, e por fim, as restantes 8 aulas no 3º período, que foram dedicadas essencialmente ao cálculo de derivadas e às sucessões de números reais.

2.2. 11º ano: Matemática Aplicada às Ciências Sociais

2.2.1. Caraterização

Os alunos da turma do 11º C eram do Curso de Línguas e Humanidades, e por isso podiam escolher a disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais. Começou por ser uma turma de 23 alunos, que se foi reduzindo até ao fim do ano, para 17 alunos, devido a algumas anulações de matrícula, por parte destes.
Nesta turma metade dos alunos tinham origem em agregados familiares com três elementos, e apenas três dos alunos viviam a mais de 10 km da escola, mas apesar disso 15 acordavam antes das 7 horas da manhã.
Para os alunos da turma a qualidade mais importante de um professor era "saber ensinar" (informação recolhida através do inquérito aos alunos e encarregados de educação no início do ano letivo por parte do diretor de turma). Nesta turma havia 10 alunos que já tinham tido retenções, a grande maioria dos alunos admitia estudar diariamente entre 1 a 2 horas. Na turma havia um aluno que não tinha computador em casa, mas 20 dos alunos afirmavam utilizar o computador maioritariamente para aceder às redes sociais.
A turma tinha alguns problemas de comportamento. Era uma turma onde havia repetidamente conversas paralelas durante a aula, manuseio de telemóvel e distração constante. Os alunos da turma demonstravam, na sua maioria, problemas de maturidade, uma vez que não sabiam entrar convenientemente na sala de aula. O desinteresse pela disciplina apresentava-se como denominador comum à maioria dos alunos. Deste modo foi complicado criar uma ligação de empatia com os alunos, assim como de produzir bons resultados.

2.2.2. Trabalho em Sala de Aula

No ano letivo que agora termina o manual adotado, na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, foi o da Porto Editora, com o título "MACS 11", dos autores Maria Augusta Ferreira Neves, Sandra Bolinha e Luísa Faria.

Figura 2.3: Parte 1 do Manual Adotado para MACS

No início do ano, antes mesmo do começo das aulas, ficou a meu cargo a planificação a longo e médio prazo dos conteúdos curriculares, que viria a ser posteriormente aprovada pelo professor cooperante. A planificação a longo prazo encontra-se no Anexo B.1 do presente relatório, enquanto que no Anexo B.2 pode encontrar-se a planificação a médio prazo. Também antes do início das aulas foi proposto pelo orientador cooperante a criação de três fichas de trabalho relacionadas com o tema Modelo de Grafos, de modo a que os alunos pudessem resolver os exercícios dessas fichas, para consolidação dos conteúdos. As referidas fichas podem ser encontradas no Anexo B.3, B.4 e B.5 do relatório de estágio.

O primeiro período foi dedicado aos modelos de grafos e aos modelos populacionais. As aulas deste período foram integralmente lecionadas pelo professor cooperante, sendo o meu papel secundário, o qual passava por ir apoiando os alunos e esclarecendo as dúvidas que poderiam surgir durante a exposição.

No 2º período tive a oportunidade de lecionar 21 aulas dedicadas ao capítulo de probabilidades. Para que os alunos começassem por recordar os conceitos já adquiridos sobre o tema, a sua lecionação começou com a resolução de um teste diagnóstico fundamentalmente sobre matéria do 9º ano. A ficha diagnose pode ser consultada no Anexo B.6. Ao corrigir a ficha aproveitei para ir recordando os conceitos que os alunos deveriam dominar para obterem um bom desempenho neste capítulo. Como preparação para as aulas tive oportunidade de redigir um documento síntese com os conceitos e informações importantes a transmitir aos alunos. Esse documento pode ser encontrado no Anexo B.7 do presente relatório.

Como já referido anteriormente, esta turma revelava uma falta de motivação e de interesse por parte da maioria dos alunos o que levou a resultados menos bons, e a que durante as aulas fosse muito complicado conseguir que eles ouvissem o que se estava a tentar transmitir e conseguissem assim assimilar a matéria de uma forma conveniente.

Para que eles pudessem acompanhar a matéria e ligar a teoria à parte prática, em todas as aulas eram resolvidos exercícios além dos referidos no manual adotado e no caderno de atividades.

Como pode ser verificado no plano de aula constante no Anexo B.8, esta foi iniciada com um resumo das propriedades já estudadas e aplicadas. De seguida passou-se à resolução dos exercícios propostos para que os alunos pudessem consolidar os conceitos. Sendo a aula referida anteriormente lecionada após a ficha de avaliação, era de esperar que houvesse por parte dos alunos um domínio da matéria, o que não se verificou.

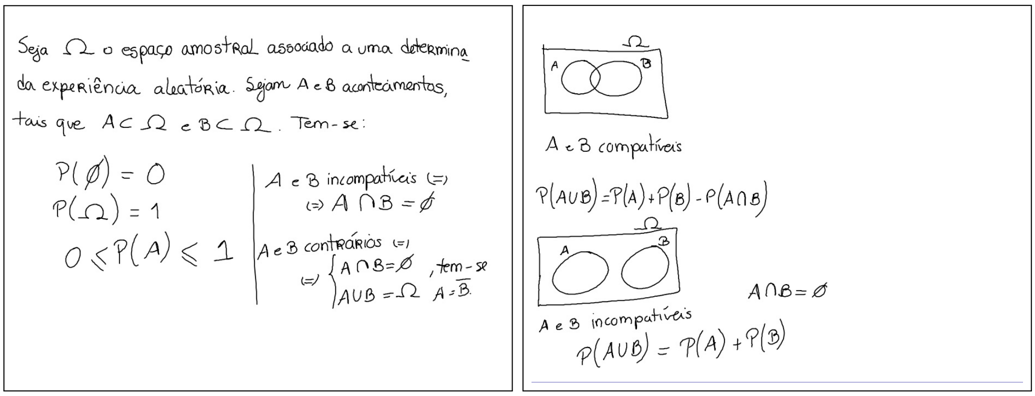


Figura 2.4: Quadro Interativo Referente ao Plano de Aula do Anexo B.8

Após ter tido a oportunidade de introduzir os conceitos de variável aleatória e de distribuição de um probabilidade aleatória, o professor cooperante voltou a lecionar as aulas à turma.

Após a lecionação das 21 aulas de 90 minutos e com o regresso do orientador pedagógico, as aulas passaram novamente a consistir em tirar dúvidas e a ajudar os alunos nas suas tarefas.

Durante todo o ano as provas de avaliação foram sempre realizadas pelo núcleo de estágio. Porém, a última ficha de avaliação foi elaborada integralmente por mim, assim como os seus critérios de correção. Estes documentos podem ser consultados no Anexo B.9 e B.10 do presente relatório. Nesta ficha os resultados não foram os melhores como se pode ver pelo quadro seguinte.

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

ESCOLA SECUNDARIA DE D. DUARTE
5º TESTE DE AVALIAÇAO - Remediação
24/05/2016
11º C

Nº	Nome	1	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	4.1	4.2	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	Total
		24	15	20	15	10	14	10	14	12	20	14	12	20	200
1		13	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	3	26
2		20	11	2	0	5	0	0	0	10	0	3	12	5	68
3		18	15	14	15	5	8	0	0	12	3	11	0	0	101
4		20	9	0	0	0	0	0	0	12	1	1	12	5	60
6															0
7		22	15	0	12	0	0	10	0	0	0	4	0	0	63
8		18	9	0	0	10	14	0	0	12	0	0	12	2	77
9															AM
10															0
12		12	15	10	0	0	0	0	0	12	0	0	10	0	59
13		12	12	0	0	0	0	0	0	10	0	0	11	2	47
14		16	15	13	12	0	14	10	14	12	6	14	12	0	138
15															AM
16															AM
17		24	12	4	0	0	0	0	0	10	0	0	10	3	63
18		22	15	17	0	10	14	10	14	12	0	10	12	5	141
19		16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16
20		12	0	17	0	0	0	0	0	10	0	0	12	19	70
21		20	15	10	15	0	0	0	0	12	0	0	0	13	85
22															AM
23															0
26		18	12	17	15	10	14	0	0	12	0	1	12	0	111

Figura 2.5: Classificações da 5ª Ficha de Avaliação

2.3. 1º ano: Animação Sociocultural

2.3.1. Caraterização

A turma do primeiro ano do curso de Animador Sociocultural era composta por 12 alunos com uma média de idades de 16 anos, e que provinham maioritariamente de agregados familiares de 3 ou 4 elementos. A maioria dos alunos vivia a mais de 10 km da escola, e apenas um dos alunos se levantava diariamente depois das 7 horas da manhã. Também 11 dos alunos afirmava estudar entre 1 a 2 horas por dia.

Apesar de todos os alunos possuírem computador em casa, dez dos alunos revelavam que a sua utilização é essencialmente para aceder às redes sociais. De qualquer modo a qualidade que mais admiravam num professor era a capacidade de "saber ensinar" (informação recolhida através do inquérito aos alunos e encarregados de educação no início do ano letivo por parte do diretor de turma).

Sendo Animação Sociocultural um curso com apenas 100 horas de matemática os módulos lecionados são o A3: Estatística, o A7: Probabilidade e o B5: Jogos e Matemática.

Neste caso tratava-se uma turma onde era normalmente fácil de trabalhar e em que a maioria dos alunos se mantinham interessados e empenhados. Tratava-se de uma turma especial devido à presença de dois alunos com necessidade educativas especiais: um aluno com dislexia e outro com problemas moderados de défice intelectual.

Devido, mais a este segundo aluno, a lecionação das aulas acabou por ser adaptada e os métodos de avaliação do aluno reestruturados.

2.3.2. Trabalho em Sala de Aula

No decorrer do ano letivo tive oportunidade de lecionar 88 aulas de 45 minutos à turma do 1º ano de Animação Sociocultural. O ano letivo iniciou-se com o módulo de Estatística que foi lecionado pelo professor cooperante, em que o meu papel era o de auxiliar os alunos, em particular os que tinham mais dificuldades, pois muitos deles já vinham de percursos alternativos.

As aulas lecionadas por mim começaram ainda em dezembro, com o início do módulo de probabilidade, onde a opção por aulas mais práticas se veio a revelar um sucesso. As aulas durante o módulo decorriam com a exposição de conceitos de modo que todos os alunos os compreendessem, e de seguida esses mesmos conceitos eram postos à prova na resolução de exercícios e na interpretação de enunciados. A avaliação foi feita através de duas fichas de avaliação e de uma prova final em que os alunos deveriam obter uma classificação positiva para concluírem o módulo.

No fim do módulo três dos alunos da turma não conseguiram alcançar a classificação positiva pelo que tiveram oportunidade de concluírem o módulo numa prova de recuperação que pode ser encontrada no Anexo C.1. Após a prova de recuperação foi ainda preciso recorrer à prova de Remediação para que um dos alunos chegasse a uma classificação que lhe permitisse concluir o módulo. Assim todos os alunos concluíram o módulo A7: Probabilidade com aproveitamento.

O último módulo lecionado teve contornos diferentes dos anteriores. O módulo Jogos e Matemática teve uma organização diferente, uma vez que era avaliado continuamente sendo a participação em atividades na sala de aula importante.

Os alunos começaram o módulo por construir um Tangram Chinês que serviu para estes praticarem a construção de imagens. A primeira atividade dos alunos foi a construção de imagens com o tangram, que pode ser encontrada no Anexo C.2 do presente relatório.

No seguimento do módulo foi proposta a elaboração de trabalhos cooperativos entre alunos, subjugados ao tema Jogos do Mundo, em que cada grupo deveria pesquisar a história de um jogo e as suas regras para posteriormente apresentar esse trabalhos à turma. Estes trabalhos foram iniciados em sala de aula e concluídos pelos alunos em casa, sendo apresentados no último dia de aulas.

Para desenvolver o raciocínio lógico, geométrico e numérico dos alunos foram resolvidos vários exercícios que os estimulassem. Uma das atividades pode ser consultada no Anexo C.3.

No decorrer do módulo teve ainda lugar um torneio organizado através do método suíço, do jogo Cães e Gatos, de modo que os alunos compreendessem tanto o jogo como o método utilizado para a organização do torneio. Aquando da explicação do método suíço foram explicadas algumas vantagens e desvantagens dos vários métodos de organização de torneios.

Por fim e de modo a implementar o Projeto Educacional II, que tinha por tema Frisos e Padrões, as últimas aulas foram dedicadas à construção de autómatos. A turma foi organizada em três grupos, e cada um teve oportunidade de escolher um tema que servisse de inspiração para a construção do brinquedo mecânico que se movimentava. Após essa construção e respeitando as condições iniciais apresentadas, todos os grupos decoraram os autómatos com frisos e padrões, como podem ser vistos de seguida.

Figura 2.6: Autómatos Criados pelos Alunos

Capítulo 3

Atividades Desenvolvidas

3.1. Direção de Turma

No decorrer do ano letivo tive oportunidade de auxiliar a Dr.ª Vanda Pereira na direção de turma do 8º ano da Escola Secundária D. Duarte. Esta turma tinha 27 alunos que na sua maioria provinham de agregados familiares de 3 ou 4 elementos. Dos alunos da turma, 19 residiam a menos de 6 km da escola, devido a esse fator a maioria da turma levantava-se depois das 7 horas da manhã. A maioria dos alunos afirmava estudar entre 1 a 2 horas diárias, e apenas 4 alunos já tinham tido retenções. Dos alunos da turma 3 admitiam não querer prosseguir os estudos após a conclusão do ensino secundário. Ainda assim um terço da turma possuía Serviço de Ação Social Escolar, e dois alunos não tinham computador em casa.

No seguimento do acompanhamento à direção de turma existiram reuniões com a respetiva diretora de turma de modo a compreender melhor todas as tarefas que esta tinha que executar. No decorrer do ano participei ativamente na organização do dossier de turma, na preparação das reuniões, principalmente na do 3º período, e no lançamento das pautas com as classificações dos alunos.

Esta experiência foi acima de tudo importante para compreender melhor o trabalho de um diretor de turma.

3.2. IX Concurso de Fotografia - Matemática no Quotidiano

Como sabemos a matemática encontra-se em tudo no nosso redor. Ainda assim é muitas vezes difícil para um olhar menos curioso encontrá-la. O Concurso de Fotografia - Matemática no Quotidiano teve mais uma vez como objetivo unir a arte e a ciência, incentivando à produção de fotografias que evidenciassem a matemática presente no nosso ambiente.

No dia 11 de setembro foi montada a primeira exposição de fotografia do ano, na Escola Secundária D. Duarte. A exposição tinha como objetivo dar a conhecer as fotografias que tinham sido concorrentes nas edições anteriores do concurso. Durante toda a tarde a tarefa foi a de pendurar as fotografias junto à entrada da secretaria da escola, de modo a dar a conhecer o concurso, que todos os anos tem lugar no Agrupamento Escolas Coimbra Oeste.

O grande objetivo da exposição era o de despertar a atenção dos alunos para pequenos momentos capturados em que se pode ver claramente a matemática no dia-a-dia. Os alunos e a restante comunidade educativa tiveram a oportunidade de analisar as fotografias e de debater entre si os conceitos presentes.

Durante o mês de abril todos os elementos da comunidade educativa do Agrupamento Escolas Coimbra Oeste tiveram oportunidade de participar no IX Concurso de Fotografia - A Matemática no Quotidiano. Foram apresentadas a concurso 26 fotografias, que mais uma vez fizeram parte de uma exposição, que tinha como objetivo para além de dar a conhecer as fotografias, colocar todos a debater e explorar os conceitos matemáticos nelas presentes. Posteriormente um júri pluridisciplinar teve oportunidade de votar, tendo elegido assim as três fotografias vencedoras.

Figura 3.1: 1º, 2º e 3º Classificadas no IX Concurso de Fotografia - A Matemática no Quotidiano, respetivamente

3.3. Matemático do Mês

Ainda no início do ano letivo surgiu a ideia, de criar uma zona na escola onde fosse possível despertar o interesse e a atenção dos alunos para a matemática. Deste modo durante o ano letivo tive o prazer de criar pequenos posters em que dava a conhecer alguns matemáticos famosos tais como Pedro Nunes, Leonhard Euler, Andrey Kolmogorov, Isaac Newton e Anastácio da Cunha. Todos estes tiveram um poster afixado durante pelo menos um mês de modo a que os alunos ficassem a conhecer um pouco melhor cada um dos matemáticos.

O grande objetivo desta atividade foi a tentativa de aumentar a cultura dos alunos assim como despertar-lhes o interesse pela matemática, de modo a que estes sentissem a necessidade de irem pesquisar mais informações.

Sempre que um novo matemático surgia, a curiosidade dos alunos crescia, e muitos vinham ter comigo a falar sobre o matemático e as suas descobertas.

Figura 3.2: Matemático do Mês: Isaac Newton

3.4. Palestra: Métodos Eleitorais

Com a proximidade das eleições presidenciais, que se realizaram no dia 4 de outubro, parecia-me importante que os alunos entendessem a importância de compreender melhor este processo de escolha.

Deste modo organizei no dia 7 de outubro, na sala 17 da Escola Secundária D. Duarte, uma palestra intitulada "Teoria de Eleições", que teve como oradora a Doutora Maria Celeste Gouveia, professora do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

A palestra foi dedicada aos alunos de Matemática Aplicada às Ciências Sociais do 10º ano de escolaridade, mas como modo de rever a matéria que viria a sair no exame nacional da disciplina no fim do presente ano letivo, foram também convidados os alunos do 11º ano do Curso de Letras e Humanidades.

Contudo a palestra tinha ainda como objetivo que os alunos, que em breve seriam maiores de idade, percebessem a importância de uma vida ativa eleitoralmente, e que compreendessem melhor o painel político atual do país.

A palestra decorreu com a apresentação de vários métodos eleitorais que poderiam ser aplicados a um determinado caso prático apresentado pela oradora. Os vários métodos resultavam sempre em vencedores distintos. Deste modo os alunos poderiam perceber que o método utilizado podia ser escolhido dependendo do resultado que pretendêssemos obter. Durante a palestra, a Doutora Maria Celeste Gouveia foi questionando os alunos presentes sobre o seu futuro académico, e qual a sua profissão no fim dos estudos. Estas questões serviram para a oradora ir fazendo um paralelismo entre a matemática e os cursos que os alunos ambicionam concluir. A oradora para além de chamar a atenção para a importância da matemática na sala de aula, aproveitou para ressalvar a necessidade urgente de os alunos construirem uma cultura geral sólida, de modo a perceberem o que se passa à sua volta, e no mundo.

Por fim foi entregue à Doutora Maria Celeste Gouveia uma medalha em nome da escola, medalha essa comemorativa dos 40 anos da fundação da Escola Secundária D. Duarte, agradecendo a disponibilidade e simpatia da oradora em se deslocar à instituição para falar não só de teoria de eleições, mas também da importância da Matemática na sociedade.

Figura 3.3: Palestra com a Doutora Maria Celeste Gouveia

3.5. Palestra: Combinatória

Como o pensamento combinatório só é realmente alcançado pelos alunos quando o seu cérebro atinge o estado de maturidade, os alunos muitas vezes não têm facilidade em compreender o raciocínio lógico envolvido.

Por este motivo convidei o Doutor Jorge Picado, professor do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, para realizar uma palestra sobre o assunto, no dia 8 de outubro , na sala 3 da Escola Secundária D. Duarte.

A palestra foi destinada aos alunos do 12º ano de Matemática A, e teve como objetivo despertar o pensamento combinatório nos estudantes.

Durante 90 minutos o Doutor Jorge Picado apresentou alguns exemplos simples de situações do dia-a-dia que serviram de motivação para os conceitos de combinatória do programa. Em casos mais simples e mais complexos os alunos conseguiram eles próprios resolver exercícios de combinatória, e deduzir as fórmulas combinatórias.

Os alunos estiveram bastante interessados e empenhados durante a palestra, o que transpareceu perante o orador, que teceu bastantes elogios aos alunos presentes.

Por fim foi entregue ao Doutor Jorge Picado uma medalha, em nome da escola, comemorativa dos 40 anos da fundação da Escola Secundária D. Duarte, de modo a agradecer a sua disponibilidade e simpatia por se ter deslocado à instituição para falar das estratégias para um bom pensamento combinatório.

Figura 3.4: Palestra com o Doutor Jorge Picado

3.6. Competições Nacionais de Ciência

O PmatE é um projeto de investigação e desenvolvimento, fundado em 1989, na Universidade de Aveiro, cuja missão é a aplicação das tecnologias da comunicação e informação e o desenvolvimento de conteúdos e eventos para a promoção do sucesso escolar e da cultura científica.

Ao longo dos anos, o PmatE tem crescido e alargado a sua área de atuação: da matemática, estendeu-se a novas áreas do saber como o português, a biologia, a geologia, a física, e mais recentemente, a literacia financeira e a química, transformando-se assim num ousado e criativo projeto interdisciplinar.

No dia 17 de fevereiro decorreu na Escola Secundária D. Duarte a participação de cerca de 440 alunos do Agrupamento Escolas Coimbra Oeste nas competições do Redemat, organizada pela Universidade de Aveiro. Estas competições são realizadas em pares, com o objetivo de os alunos utilizando o concurso ganhem gosto pelos temas abordados.

Durante todo o dia alunos do 1º ciclo participaram no "diz3" em que são postos à prova os conteúdos das três grandes áreas em estudo, matemática, português e estudo do meio. De igual modo também os alunos de 2º ciclo colocaram à prova os conhecimentos nas áreas da matemática, do português e das ciências naturais, no "diz+". Já os alunos de 3º ciclo e secundário colocaram à prova os seus conhecimentos matemáticos no "equamat" e no "mat12", respetivamente.

Durante o dia estive a organizar os grupos que online prestaram provas, tentando a sua classificação para as Competições Nacionais de Ciência, que se realizam na Universidade de Aveiro.

Figura 3.5: Alunos a prestar provas no Redemat

No dia 11 de maio pelas 9 horas partiu um autocarro da Escola Secundária D. Duarte em direção à Universidade de Aveiro. A bordo do autocarro estavam 30 alunos do ensino secundário e 4 professores, entre eles eu própria. Durante todo o dia os alunos, tiveram oportunidade de participar nas várias provas das competições, sendo elas o "mat12" prova sobre Matemática. O "fquest" prova para alunos do 10º e 11º anos sobre a disciplina de Física e Química. O "gvida" prova sobre a disciplina de Biologia e Geologia, para alunos que frequentam o 10º e 11º anos. E as provas de "fis12" e "bio12" provas destinadas aos alunos de 12º ano, onde são postas a provas as disciplinas de Física e Biologia, respetivamente.

Figura 3.6: Grupo do Ensino Secundário que foi às Competições Nacionais de Ciência

3.7. Canguru Matemático sem Fronteiras

A Associação Canguru sem Fronteiras é uma associação de caráter internacional que reúne personalidades do mundo da matemática de 55 países. O seu objetivo é promover a divulgação da matemática elementar por todos os meios ao seu alcance e, em particular, pela organização anual do concurso Canguru Matemático sem Fronteiras, que tem lugar no mesmo dia em todos os países participantes.

O concurso pretende, deste modo, estimular e motivar o maior número possível de alunos para a matemática e é um complemento a outras atividades, tais como as olimpíadas. Em Portugal a organização deste concurso está a cargo do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra com o apoio da Sociedade Portuguesa de Matemática.

Este ano a prova teve lugar no dia 17 de março, na Escola Secundária D. Duarte assim como em todo o agrupamento onde os alunos tiveram oportunidade de participar.

Durante a prova a minha tarefa foi a de vigiar a sala onde decorriam dois níveis. A da categoria Júnior onde participaram alunos de 10º e 11º anos, e a da categoria Estudante que contava com a participação de alunos do 12º ano de escolaridade. A atividade decorreu sem contratempos, com alguns dos alunos a obterem um bom resultado.

Figura 3.7: Logotipo do Canguru sem Fronteiras

3.8. Adoção de Manuais

No dia 18 de maio reuniram-se os docentes de matemática do ensino secundário, no gabinete de matemática da escola, de modo a selecionar os manuais a adotar para o 11º ano no próximo ano letivo, tanto para Matemática A como para Matemática Aplicada às Ciências Sociais.

No decorrer da reunião foram analisados todos os manuais e debatido os seus pontos fortes e alguns pontos considerados menos fortes. Acabaram por ser adotados os manuais "Novo Ipsílon 11", dos autores Carlos Andrade, Paula Pinto Pereira e Pedro Pimenta, da Raiz Editora, para Matemática A, e o "Máximo 11", dos autores Maria Augusta Ferreira Neves, Luísa Faria e Bruno Ribeiro, da Porto Editora, para Matemática Aplicada às Ciências Sociais.

No mesmo dia ocorreu a reunião de departamento curricular, em que me foi dada a oportunidade de ser a secretária do coordenador do Departamento Curricular de Matemática e Informática, e de redigir a respetiva ata. A reunião tinha como ponto principal a aprovação das propostas para manuais do próximo ano letivo, de modo a que estes pudessem ser posteriormente aprovados pelo conselho pedagógico. A ata da referida reunião pode ser visualizado no Anexo D.1 deste relatório.

3.9. Tangram

No dia 3 de junho decorreu na escola sede do Agrupamento Escolas Coimbra Oeste uma atividade dinamizada por mim, com o apoio presencial dos restantes professores do grupo disciplinar.

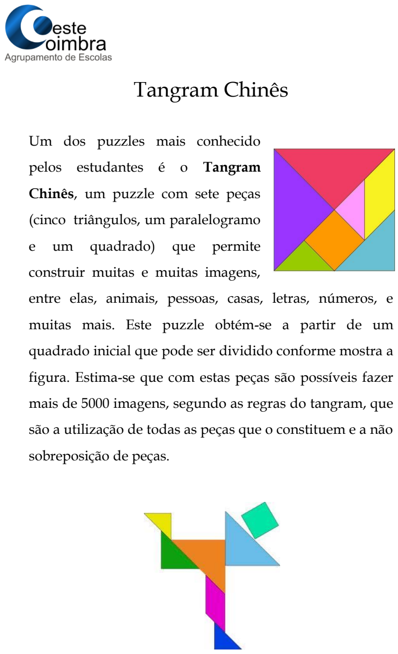
Para a atividade foi necessário escolher algo que pudesse ser destinado a todos os alunos do agrupamento. Para esta atividade escolhi o Tangram Chinês.

Este puzzle constituído por sete peças é conhecido como "tabuleiro da sabedoria". A palavra tan significa "sete", e representa as sete peças que constituem o tangram. Este jogo é um desafio à criatividade e à capacidade de reproduzir determinadas formas sem sobrepor peças.

O jogo Tangram tem aplicação como recurso pedagógico para desenvolver diversos conceitos matemáticos tais como áreas, figuras equivalentes, ângulos, relações entre os lados das figuras, etc. Durante 2 horas e meia, todos os alunos tiveram oportunidade de construir algumas figuras com tangram, podendo no fim do processo de construção confirmar se esta estava correta.

A atividade teve como objetivo mostrar que a Matemática pode ser divertida, familiarizar os alunos com algumas figuras geométricas, desenvolver o raciocínio lógico para a resolução de problemas e aumentar a sua capacidade de visualização espacial.

A atividade correu muitíssimo bem com muitos alunos a gostarem e a participarem com grande animação.



Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

Tangram Chinês

Um dos puzzles mais conhecido pelos estudantes é o **Tangram Chinês**, um puzzle com sete peças (cinco triângulos, um paralelogramo e um quadrado) que permite construir muitas e muitas imagens, entre elas, animais, pessoas, casas, letras, números, e muitas mais. Este puzzle obtém-se a partir de um quadrado inicial que pode ser dividido conforme mostra a figura. Estima-se que com estas peças são possíveis fazer mais de 5000 imagens, segundo as regras do tangram, que são a utilização de todas as peças que o constituem e a não sobreposição de peças.

Figura 3.8: Folheto informativo disponibilizado na atividade

Figura 3.9: Atividade realizada com o Tangram Chinês

3.10. Peddy Matemática

No dia 27 de junho pelas 14 horas decorreu na Escola Secundária D. Duarte uma atividade do grupo disciplinar de Matemática, destinada aos alunos participantes na IX Academia DD. A atividade foi organizada por mim e consistiu na realização de um peddy paper em que os alunos aplicaram os seus conhecimentos matemáticos.

A Academia DD é um recurso disponibilizado pelo Agrupamento Escolas Coimbra Oeste, aos alunos do 3º ciclo, em que estes desfrutam de diversas atividades, jogos, visitas de estudo, canoagem, entre muitas outras. Todos os grupos disciplinares são convidados a prepararem atividades para os alunos.

Este ano de modo a criar uma ideia mais positiva da disciplina de matemática e a despertar o interesse pela mesma, a atividade do grupo disciplinar consistiu num percurso com seis postos, cada um numa sala que os alunos deveriam encontrar após calcularem o resultado de uma expressão numérica ou de uma equação de 1º grau.

Nas salas as atividades foram diversas, todas relacionadas com a matemática. A cada tarefa bem executada era atribuída uma pontuação, permitindo no final determinar qual a equipa vencedora. As informações relativas ao peddy paper podem ser encontradas nos Anexos E.1 e E.2.

A atividade decorreu muito bem, com todos os alunos a divertirem-se e alguns demonstrando grande à vontade na disciplina.

Figura 3.10: Equipas a realizar tarefas no Peddy Matemática

Capítulo 4

Conclusão

Durante todo o meu percurso escolar até ingressar na Universidade de Coimbra nunca imaginei que o ensino seria o meu futuro, antes pelo contrário, se me perguntassem o que queria seguir quando escolhi Matemática a resposta seria "Não sei, mas não quero ser professora". Estava eu longe de imaginar que me viria a apaixonar por esta profissão e pela magia que a suporta.

O ensino surgiu na minha vida um pouco como passatempo, em ajudas pontuais a conhecidos. A paixão foi timidamente surgindo, sabendo eu que ensinar não seria fácil.

Com a realização da parte letiva do Mestrado em Ensino pensei que poderia estar apta para lecionar e principalmente a enfrentar uma turma.

O primeiro dia de aulas foi uma aventura pois os alunos não estavam habituados a ter professores estagiários. Para eles o facto de terem ali uma professora no fundo da sala era estranho.

Ter os alunos a tratarem-me por professora começou por ser desde logo um pouco desconfortável. Não sabia que era aquela a sensação de perceber que para aqueles alunos não era uma simples pessoa desconhecida que transmitia conhecimento, era uma inspiração, um exemplo.

Com o decorrer do ano letivo fui percebendo que deve haver uma constante transformação por parte do professor para conseguir chegar aos alunos. Não chega ser professor, é necessário adaptarmo-nos ao perfil de cada um. A sua formação é consequência da nossa postura em sala de aula.

Ser professor é ensinar, e é claro que todos ansiamos pelos bons resultados por parte dos alunos, mas infelizmente nem sempre depende de nós, e essa foi a minha maior frustração. A dúvida surge quando vemos a falta de resultados. "Será a culpa minha?", esta era a questão que começava a surgir na minha cabeça. Depois de investir nesta profissão, de acreditar que este é o meu futuro, não conseguir chegar aos alunos era de facto um medo. Na verdade vamos aprendendo a viver com esse sentimento.

Durante parte do ano senti que esse poderia ser um problema meu. Felizmente, durante o estágio tive oportunidade de compreender que não depende só de mim o sucesso dos alunos. Para essa conclusão muito contribuí-o o orientador pedagógico que me foi apoiando e dando muitos conselhos.

No global o estágio curricular foi muito importante não só a nível profissional, mas também a nível pessoal. As amizades que ganhei na Escola Secundária D. Duarte vão marcar todo o meu percurso profissional e pessoal. Fui muito bem acolhida e integrada no seio do núcleo docente e não docente da escola. Rapidamente todos me fizeram esquecer que era estagiária, e me trataram como colega sem fazer qualquer diferenciação.

Olhando para trás penso que poderia ter melhorado a técnica de lecionação das aulas, com métodos de explicação diferentes para tentar alcançar outros alunos, tentando motivá-los de outro modo.

Com todas as atividades desenvolvidas e com a possibilidade fornecida em lecionar três turmas de percursos distintos, acredito que a minha visão sobre a escola e sobre a profissão ficou bastante mais enriquecida. Acredito que o futuro como professora será mais simplificado após este ano pois a convivência que pude ter com a comunidade escolar ajudar-me-á a ter uma rápida e fácil integração numa qualquer escola no futuro.

Anexos

Apêndice A

Anexos - Matemática A

A.1. Planificação Longo Prazo de Matemática A

Agrupamento de Escolas

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS COIMBRA OESTE

Planificação a Longo Prazo | Matemática A | 11º Ano

2015/2016

Período Letivo	Início	Fim	Temas/Subtemas	Nº de aulas	Nº de aulas para testes	Nº de aulas de auto e hétero avaliação	Nº total de aulas
1º	21/set	17/dez	**Geometria no Plano e no Espaço II** – Problemas envolvendo triângulos; – Círculo trigonométrico e funções seno, cosseno e tangente; – Produto escalar de dois vetores e aplicações; – Perpendicularidade de vetores e de retas; equação cartesiana do plano definido por um ponto e um vetor normal; – Intersecção, paralelismo e perpendicularidade de retas e planos; – Programação linear (breve introdução).	32	4	2	38

Período Letivo	Início	Fim	Temas/Subtemas	Nº de aulas	Nº de aulas para testes	Nº de aulas de auto e hétero avaliação	Nº total de aulas
2º	**4/jan**	**18/mar**	**Introdução ao Cálculo Diferencial I. Funções racionais e com radicais. Taxa de Variação e Derivada** – Propriedades das funções do tipo $f(x) = a + \dfrac{b}{cx+d}$; – Operações com funções. Composição e inversão de funções. – Funções irracionais; resolução de equações irracionais; – Noção intuitiva de limite; – Taxa média de variação e taxa de variação/derivada; – Extremos relativos e monotonia de uma função;	26	4	1	**31**
3º	**4/abr**	**3/jun**	**Introdução ao Cálculo Diferencial I. Funções racionais e com radicais. Taxa de Variação e Derivada (conclusão)** – Problemas envolvendo funções ou taxas de variação.	3	2	1	**26**
			Sucessões Reais – Definição, diferentes formas de representação e propriedades; – Progressões aritméticas: termo geral e soma de *n* termos consecutivos; – Progressões geométricas: termo geral e soma de *n* termos consecutivos; – Sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e primeira definição de *e*; – Limites: infinitamente grandes e infinitamente pequenos. Limites reais e convergência; – Problemas de limites com progressões.	20			

2

A.2. Critérios de Avaliação do Curso Ciências e Tecnologias

Agrupamento de Escolas Oeste Coimbra

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO

Ensino Secundário | CCH | Matemática A

2015/2016

Domínio	Competências Gerais: Capacidades / Aptidões	Competências Gerais: Conhecimentos[1]	Possíveis Instrumentos de Avaliação	Ponderação 10º	Ponderação 11º	Ponderação 12º
Cognitivo	• Desenvolver a capacidade de demonstrar proposições matemáticas • Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real • Desenvolver o raciocínio e o pensamento científico • Desenvolver a capacidade de comunicar • Desenvolver a capacidade de utilização das novas tecnologias	• Iniciar e ampliar o estudo da Lógica Bivalente e da Teoria de Conjuntos • Ampliar o conceito de número • Ampliar conhecimentos de Geometria no Plano e no Espaço • Iniciar e ampliar o estudo da Análise Infinitesimal • Ampliar conhecimentos de Estatística e de Probabilidades • Conhecer aspectos da História da Matemática	• Testes de avaliação sumativa	60 %	60 %	65 %
			• Fichas de trabalho individual • Relatórios • Composições matemáticas • Trabalhos de pesquisa • Trabalhos de grupo • Observação direta	30 %	30 %	25 %
Sócio - Afetivo (Valores / Atitudes)	• Manifestar interesse e empenho na execução das atividades propostas nas aulas • Desenvolver hábitos de trabalho e persistência • Fazer-se acompanhar do material necessário ao desempenho da sua atividade • Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação • Respeitar as regras estabelecidas para a sala de aula • Ser assíduo e pontual		• Grelhas de observação • Observação direta • Grelhas de auto ou heteroavaliação	10 %		

Em cada período a classificação, M_i, será obtida pela aplicação dos factores de ponderação apresentados. Será sempre arredondada às unidades.

Atendendo a que a avaliação é um processo contínuo, a avaliação no final de cada período, P_i, terá em consideração a classificação do período anterior, de acordo com a seguinte expressão:

$$P_1 = M_1, \qquad P_2 = 0,3\times P_1 + 0,7\times M_2 \qquad \text{e} \qquad P_3 = 0,5\times P_2 + 0,5\times M_3$$

Observações:

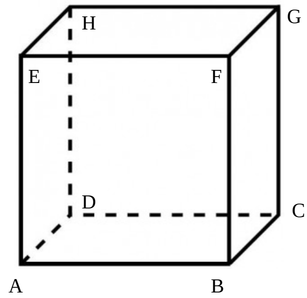
- A partir do segundo, os testes de avaliação sumativa incluirão, ainda que com peso variável, conteúdos abordados em períodos anteriores.
- Não é obrigatório, da parte do professor, utilizar todos os instrumentos de avaliação listados, podendo, contudo, recorrer a outros diferentes daqueles.

[1] De acordo com os conteúdos do programa curricular do ano de escolaridade em causa

A.3. Ficha Formativa de Matemática A

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

E. S. de D. Duarte
Matemática A – 11º Ano
Ficha Formativa



1. Num referencial o.n., considere o seguinte cubo de aresta 6 unidades e cuja base está assente no plano *xOy*. Seja *D* o ponto de coordenadas (2;2;0). Aplicando as propriedades do produto escalar entre vetores:
   1.1. Escreva uma equação do plano mediador do segmento [*EC*].
   1.2. Determine uma equação da superfície esférica de diâmetro [*AG*].
   1.3. Determine a equação do plano tangente à superfície esférica, determinada na alínea anterior, no seu ponto *B*.
   1.4. Determine a equação do plano que contém os pontos *A*, *C* e *H* do cubo.

2. Considere os pontos *A*(2;-1;0), *B*(1;1;1) e *C*(-2;0;3). Determine a equação do plano que os contém.

3. Obtenha uma equação geral do plano que contém o ponto *A*(3;-1;-3) e que é perpendicular a reta $(x,y,z)= (0;1;2)+k(2;-1;-3), k\in\mathbb{R}$.

4. Dados os pontos *A*(-1;2;4), *B*(0;1;1) e *C*(2;0;2):
   4.1. Verifique que o triângulo [*ABC*] é retângulo;
   4.2. Determine uma equação do plano que contém o triângulo.

5. Obtém uma equação cartesiana do plano que contém o ponto A(5;5;0) e a reta $(x,y,z)=(0;0;5)+k(-5;5;-2), k\in\mathbb{R}$.

6. Num referencial o.n. do espaço as retas *a* e *b* têm as seguintes equações vetoriais:
$$a:(x,y,z)= (-1;2;3)+k(-1;0;1), k\in\mathbb{R}$$
$$b:(x,y,z)= (0;1;2)+k(-3;0;3), k\in\mathbb{R}$$
   6.1. Justifique que as retas são estritamente paralelas;
   6.2. Determine uma equação cartesiana do plano que contém as retas a e b .

7. Considere o plano definido pelas r e s, com as seguintes equações vetoriais:
$$r:(x,y,z)=(5;1;-3)+k(-1;2;-3), k\in\mathbb{R}$$
$$s:(x,y,z)=(5;1;-3)+k(0;5;2), k\in\mathbb{R}$$
   7.1. Calcule, com aproximação à centésima do radiano, o ângulo das retas *r* e *s*.
   7.2. Determine uma equação cartesiana do plano definido pelas retas r e s .

1

A.4. Planificação da Aula de Matemática A

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

E. S. de D. Duarte
Matemática A-11ºano
Ano Letivo 2015/2016
10.Dezembro.2015
90 minutos

Sumário:

- Exercícios de consolidação envolvendo planos e superfícies esféricas;
- Modos de definir um plano.

Material didático:

- Caderno diário e material de escrita;
- Calculadora.

Objetivos Específicos:

- Definir um plano no espaço dados um vetor normal e um ponto do plano;
- Definir um plano no espaço dados três pontos não colineares;
- Definir equação geral de um plano no espaço.

Estratégias e Desenvolvimentos:

- Resolução de dois exercícios de consolidação relacionados com a matéria dada na última aula (lugares geométricos no espaço);
- Generalizar a situação de ter um vetor normal ao plano e um ponto do mesmo;
- Dado um vetor normal ao plano e um ponto do mesmo, obter a equação geral do plano;
- Dada a equação geral do plano encontrar um vetor normal a esse;
- Resolução de um exercício em que os alunos, dados três pontos não colineares, deveram encontrar a equação geral do plano que eles definem;
- Resolução dos exercícios 3 e 4 da ficha formativa.

Resolução dos Exercícios da Ficha Formativa

(Nesta aula apenas se tenciona executar os exercícios até ao 4)

1.

1.1.

$E(8;2;6) \quad C(2;8;0)$

$M\left(\frac{8+2}{2};\frac{2+8}{2};\frac{6+0}{2}\right)=(5;5;3)$

$\overrightarrow{EC}=(-6;6;-6)$

$\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{MX}=0 \Leftrightarrow (-6;6;-6).(x-5;y-5;z-3)=0 \Leftrightarrow -6x+30+6y-30-6z+18=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x+6y-6z+18=0 \Leftrightarrow x-y+z-3=0$

1.2.

$A(8;2;0) \quad G(2;8;6)$

$\overrightarrow{AX}.\overrightarrow{GX}=0 \Leftrightarrow (x-8;y-2;z).(x-2;y-8;z-6)=0 \Leftrightarrow x^2-10x+16+y^2-10y+16+z^2-6z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-10x-10y-6z+32=0$

1.3.

$M(5;5;3) \quad B(8;8;0)$

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BX}=0 \Leftrightarrow (3;3;-3).(x-8;y-8;z)=0 \Leftrightarrow 3x-24+3y-28-3z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+3y-3z-48=0 \Leftrightarrow x+y-z-16=0$

1.4.

$A(8;2;0) \quad C(2;8;0) \quad e \quad H(2;2;6)$

$\overrightarrow{AC}=(-6;6;0)$

$\overrightarrow{AH}=(-6;0;6)$

$\vec{n}=(A;B;C)$

$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AH}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6A+6B=0\\ -6A+6C=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}B=A\\ C=A\end{cases}, A\in\mathbb{R}$

$A=1 \Rightarrow \vec{n}(1;1;1)$

Consideremos $P(x;y;z)$ um ponto genérico do plano,

$\vec{n}.\overrightarrow{AP}=0 \Leftrightarrow (1;1;1).(x-8;y-2;z)=0 \Leftrightarrow x-8+y-2+z=0 \Leftrightarrow x+y+z-10=0$

2.

$A(2;-1;0) \quad B(1;1;1) \quad e \quad C(-2;0;3)$

$\overrightarrow{AB}=(-1;2;1)$

$\overrightarrow{BC}=(-3;-1;2)$

$\overrightarrow{AB}$ não é colinear com $\overrightarrow{BC}$ logo os pontos A, B e C não são pontos colineares.

$\vec{n}=(A;B;C)$

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{BC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-A+2B+C=0\\ -3A-B+2C=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=2B+C\\ -6B-3C-B+2C=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\text{———}\\ -7B-C=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=-5B\\ C=-7B\end{cases}, B \in \mathbb{R}$$

$B=-1 \Rightarrow \vec{n}(5;-1;7)$

$5x-y+7z+D=0,$ considere-se o ponto B(1;1;1):

$5x-y+7z+D=0 \Rightarrow 5\times1-1\times1+7\times1+D=0 \Leftrightarrow 11+D=0 \Leftrightarrow D=-11$

Eq. geral do plano: $5x-y+7z-11=0$

3.

$A(3;-1;-3)$

$(x;y;z)=(0;1;2)+k(2;-1;-3), k \in \mathbb{R}$

$2x-y-3z+D=0$

$2\times3-1\times(-1)-3\times(-3)+D=0 \Leftrightarrow 6+1+9+D=0 \Leftrightarrow D=-16$

Eq. geral do plano: $2x-y-3z-16=0$

4.

4.1.

$A(-1;2;4) \quad B(0;1;1) \quad e \quad C(2;0;2)$

$\overrightarrow{AB}=(1;-1;-3)$

$\overrightarrow{AC}=(3;-2;-2)$

$\overrightarrow{BC}=(2;-1;1)$

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ são não colineares.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3+2+6=12$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=2+1-3=0$

$[ABC]$ é triângulo retângulo no ponto B.

4.2.

$\vec{n} = (A; B; C)$

$$\begin{cases} \vec{n}.\overline{AB} = 0 \\ \vec{n}.\overline{BC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - B - 3C = 0 \\ 2A - B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B + 3C \\ 2B + 6C - B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -4C \\ B = -7C \end{cases}, C \in \mathbb{R}$$

$C = -1 \Rightarrow \vec{n}(4; 7; -1)$

$4x + 7y - z + D = 0,$ considere-se o ponto B(0;1;1):

$4x + 7y - z + D = 0 \Rightarrow 4 \times 0 + 7 \times 1 - 1 \times 1 + D = 0 \Leftrightarrow 6 + D = 0 \Leftrightarrow D = -6$

Eq. geral do plano: $4x + 7y - z - 6 = 0$

5.

$(x; y; z) = (0; 0; 5) + k(-5; 5; -2), k \in \mathbb{R}$ e $A(5; 5; 0)$

$\vec{v} = (-5; 5; -2)$

$\vec{u} = (5; 5; 0) - (0; 0; 5) = (5; 5; -5)$

$\vec{n} = (A; B; C)$

$$\begin{cases} \vec{n}.\vec{v} = 0 \\ \vec{n}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5A + 5B - 2C = 0 \\ 5A + 5B - 5C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5A + 5B - 2A - 2B = 0 \\ C = A + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7A = -3B \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{3}{7}B \\ C = \dfrac{10}{7}B \end{cases}, B \in \mathbb{R}$$

$B = 7 \Rightarrow \vec{n}(3; 7; 10)$

$3x + 7y + 10z + D = 0$

Considere-se o ponto (0;0;5):

$3 \times 0 + 7 \times 0 + 10 \times 5 + D = 0 \Leftrightarrow D = -50$

Eq. geral do plano: $3x + 7y + 10z - 50 = 0$

6.

6.1.

As retas são estritamente paralelas pois os vetores diretores destas são colineares, $(-3; 0; 3) = k(-1; 0; 1) k \in \mathbb{R}$, com $k = 3$ verifica-se a igualdade.

$$(0; 1; 2) = (-1; 2; 3) + k(-1; 0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -1 - k \\ 1 = 2 \quad ! \\ 2 = 3 + k \end{cases} \Rightarrow \text{o ponto (0;1;2) da reta b não pertence à reta a.}$$

6.2.

$\vec{v} = (0;1;2) - (-1;2;3) = (1;-1;-1)$

$\vec{n}(A;B;C)$

$\begin{cases} \vec{n}.(-1;0;1) = 0 \\ \vec{n}.(1;-1;-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A + C = 0 \\ A - B - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = C \\ C - B - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = C \\ B = 0 \end{cases}, C \in \mathbb{R}$

$C = 1 \Rightarrow \vec{n}(1;0;1)$

$x + z + D = 0$

Considere-se o ponto (0;1;2):

$0 + 2 + D = 0 \Leftrightarrow D = -2$

Eq. geral do plano: $x + z - 2 = 0$

7.

7.1.

$\vec{r} = (-1;2;-3) \quad e \quad \vec{s} = (0;5;2)$

$\|\vec{r}\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\|\vec{s}\| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

$\cos\left(r \wedge s\right) = \dfrac{|(-1;2;-3).(0;5;2)|}{\|\vec{r}\|.\|\vec{s}\|} \Leftrightarrow \cos\left(r \wedge s\right) = \dfrac{|10-6|}{\sqrt{14} \times \sqrt{29}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r \wedge s = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{\sqrt{406}}\right) \Leftrightarrow r \wedge s \simeq 1.37 rad$

7.2.

$\vec{n}(A;B;C)$

$\begin{cases} \vec{n}.\vec{r} = 0 \\ \vec{n}.\vec{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A + 2B - 3C = 0 \\ 5B + 2C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A + 2B + \dfrac{15}{2}B = 0 \\ C = -\dfrac{5}{2}B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{19}{2}B \\ C = -\dfrac{5}{2}B \end{cases}, B \in \mathbb{R}$

$B = 2 \Rightarrow \vec{n}(19;2;-5)$

$19x + 2y - 5z + D = 0$

Considere-se o ponto (5;1;-3):

$19 \times 5 + 2 \times 1 - 5 \times (-3) + D = 0 \Leftrightarrow D = -112$

Eq. geral do plano: $19x + 2y - 5z - 112 = 0$

A.5. Programação Linear

Liliana Pinho

Programação Linear

Matemática A – 11ºano

Escola Secundária D. Duarte
Agrupamento de Escolas Coimbra Oeste
Ano Letivo 2015/16

Liliana Pinho
Programação Linear
Matemática A

Conteúdo

Liliana Pinho
Programação Linear
Matemática A

1.Introdução

Programação Linear é uma importante área da otimização por várias razões. Muitos problemas práticos em pesquisa operacional podem ser expressos como problemas de programação linear. Pode dizer-se que se refere a um conjunto de métodos cujo objetivo é tirar o maior proveito possível de sistemas económicos, industriais, militares, etc., cuja estrutura possa ser definida matematicamente.

Para conseguir a resolução dos complexos problemas que surgem nestas áreas, tem sido de vital importância o progresso da operacionalidade dos computadores, cada vez mais potentes e rápidos, de modo que este ramo da Matemática progride ao ritmo do avanço tecnológico.

Os investigadores têm procurado algoritmos cada vez mais eficientes (investigação operacional) que possam ser implementados no computador. Foi exatamente isso que aconteceu, após o final da 2ª Guerra Mundial, com o algoritmo denominado "método simplex" (1947, EUA- G. Dantzig), que começou a ser aplicado em 1951 e que permite resolver problemas de programação linear com centenas de variáveis.

É um campo de investigação atual, pelo que, constantemente, surgem novos métodos, cada vez mais eficazes.

Liliana Pinho
Programação Linear
Matemática A

2. Problemas de Programação Linear

2.1. O que são?

O problema básico da programação linear é o de otimizar uma certa expressão linear, que se chama função objetivo, por exemplo, $f(x,y)=3x+4y$, sabendo que as variáveis x e y estão submetidas a uma série de restrições que são expressas por inequações lineares como, por exemplo $x \geq 0$, $y \geq 0$, $5x+2y \leq 10$, $x+2y \leq 6$.

Na prática, tanto o número de variáveis como o número de restrições pode ser de centenas de milhar, o que faz com que seja imprescindível recorrer a algoritmos eficientes.

2.2. Conceitos Básicos

Para o nosso estudo são considerados apenas os problemas de programação linear com duas variáveis, x e y.

Função objetivo: é a função linear que se pretende otimizar, isto é, maximizar ou minimizar.

Variáveis de decisão: são as variáveis reais x, y, ... , do problema.

Restrições do problema: são as condições que resultam do enunciado do problema, e que restringem as variáveis.

Região admissível: é a região do plano xOy definida pelas restrições do problema.

Solução admissível: é qualquer par de valores que corresponda às coordenadas de um ponto da região admissível.

Solução ótima: é qualquer solução admissível que otimize a função objetivo - solução do problema.

4

Liliana Pinho
Programação Linear
Matemática A

3. Formulação do Problema

3.1. Enunciado e interpretação

Ao conceber um modelo linear para um problema, devemos considerar as seguintes fases:

- Verificação, no contexto do problema da legitimidade do uso de inequações ou equações lineares;
- Identificação das variáveis decisão;
- Identificação da função objetivo;
- Identificação das restrições;
- Formulação matemática do problema.

Depois de ter sido obtida a formulação matemática é então possível resolver o problema de otimização.

Exemplo:

Uma fábrica de betoneiras dispõe de 20 robots de pintura e de 10 robots montagem. A produção das betoneiras pode ser feita usando dois tipos de linhas de produção.

Tipo A: linha com 2 robots, 1 de pintura e 1 de montagem;

Tipo B: linha com 4 robots, 3 de pintura e 1 de montagem;

Sabe-se que as linhas com 2 robots produzem 3 betoneiras por hora, enquanto que as linhas formadas com 4 robots produzem 5 betoneiras por hora. Queremos saber quantas linhas de cada tipo devemos formar para produzir a maior quantidade possível de betoneiras por hora.

Resolução:

Queremos saber quantas linhas de cada tipo, A e B, devemos formar para produzir a maior quantidade de betoneiras por hora, portanto, aquelas são as incógnitas. Podemos então resumir a informação no seguinte quadro:

Linha	Variáveis	Pintura	Montagem	Betoneiras/h
Tipo A	x	1	1	3
Tipo B	y	3	1	5
Total	----	x+3y	x+y	3x+5y

É necessário ter em consideração ainda que a empresa dispõe apenas de 20 robots de pintura, pelo que teremos que $x+3y\leq 20$, e apenas há disponíveis 10 robots de montagem, logo $x+y\leq 10$. Pelo contexto do problema, percebemos que não pode haver um número negativo de linhas de montagem de cada tipo, deste modo temos:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

Liliana Pinho
Programação Linear
Matemática A

Por hora sabemos que a fábrica produz $3x+5y$ betoneiras, deste modo e como o que queremos é maximizar o número de betoneiras produzidas por hora na fábrica, esta vai ser a nossa função objetivo.

Resumidamente o nosso problema pode representar-se por:

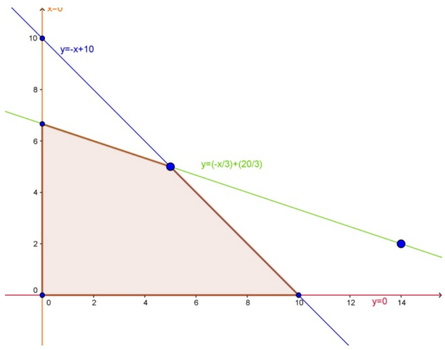
$$\begin{aligned}&\max f(x,y)=3x+5y\\&\text{sujeito a}\\&x+3y\leq 20,\\&x+y\leq 10,\\&x\geq 0,\\&y\geq 0.\end{aligned}$$

3.2. Representação Geométrica

A região admissível

$$\begin{cases}x+3y\leq 20\\x+y\leq 10\\x\geq 0\\y\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\leq \dfrac{-x}{3}+\dfrac{20}{3}\\y\leq -x+10\\x\geq 0\\y\geq 0\end{cases}$$

É a região do plano, limitada pelos eixos coordenados e pelas retas $y=-x/3+20/3$ e $y=-x+10$, (que devemos começar por representar) a sombreado na figura.



Os pontos que verificam as restrições impostas pelo problema estão nessa região, deste modo a solução do problema tem que estar, também, representada nessa zona.

Qualquer ponto da região admissível poderá ser solução do problema, mas como será possível encontrar a solução ótima?

6

Liliana Pinho
Programação Linear
Matemática A

3.3. Solução ótima

A solução ótima é o ponto (x,y) (ou pontos, no caso de o problema admitir várias soluções) da região admissível que corresponde para o qual a equação $f(x,y)=k \Leftrightarrow = 3x+5y=k$ é possível.

Consideremos diferentes valores que k pode tomar:

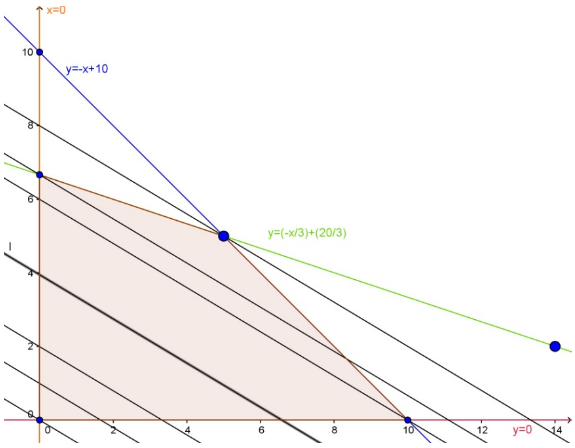
$k=0 \rightarrow 3x+5y=0 \Leftrightarrow y=\frac{-3}{5}x$

$k=5 \rightarrow 3x+5y=5 \Leftrightarrow y=\frac{-3}{5}x+1$

$k=10 \rightarrow 3x+5y=10 \Leftrightarrow y=\frac{-3}{5}x+2$

…

Graficamente o que acontece é o aparecimento de sucessivas retas paralelas (retas de nível), que intersectam a região admissível. Pretendemos obter, daquele conjunto de retas, aquela que intersecta a região admissível no ponto em que k é máximo.



Podemos concluir que o ponto em que a função objetivo toma o seu valor máximo é o ponto de intersecção da reta $y=-x+10$ e $y=\frac{-x}{3}+\frac{20}{3}$.

$$\begin{cases} y=-x+10 \\ y=\frac{-x}{3}+\frac{20}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -x+10=\frac{-x}{3}+\frac{20}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x=-\frac{10}{3} \Leftrightarrow x=5$$

$x=5 \Rightarrow y=-5+10=5$

Concluímos então, que a solução ótima é dada pelo ponto $(5,5)$. Neste ponto a função objetivo toma o valor de 40, logo este será o número máximo de betoneiras que a fábrica pode produzir por hora.

7

Liliana Pinho
Programação Linear
Matemática A

4. Soluções de um Problema Linear

Existem três situações possíveis na resolução de exercícios de programação linear, pode existir uma solução ótima e nesse caso essa solução estará sempre num dos vértices do polígono da região admissível, podem haver infinitas soluções, o que significa que todos os pontos de um dos lados do polígono ou linha poligonal da região admissível podem ser soluções, e nesses casos escolhe-se um dos pontos desse lado. E por fim pode ainda acontecer que o problema pode ser impossível, ou seja não existe nenhum ponto que seja solução do problema.

5. Resolução de Exercícios

5.1. Como resolver um exercício?

Exercício 1: O Sr. Mota, do quiosque em frente à escola, pretende pôr à venda dois tipos de calculadoras: uma do tipo Ba, para ser vendida aos alunos do Ensino Básico, e outra do tipo Se, para ser vendida a outros alunos. Para o efeito, dispõe de um capital de 5500€.

Para ele o custo da calculadora Ba é de 50€, e o custo da calculadora Se é de 100€.

O fornecedor exige que a encomenda seja de pelo menos 20 calculadoras Ba, e de pelo menos 15 calculadoras Se. Da experiência de anos anteriores o Sr. Mota pensa ser acertado prever a venda de não mais de 80 calculadoras.

O preço de venda da calculadora Ba é do seu custo mais 20%, o preço de venda da calculadora é o seu custo mais 15%.

Qual a quantidade de calculadoras de cada tipo a encomendar de modo a que o lucro seja máximo?

Tipo de calculadoras	Nº de calculadoras (variáveis)	Custo (€)	Preço de venda (€)	Lucro (€)
Ba	x	$50x$	$1.2\times 50=60$	$10x$
Se	y	$100y$	$1.15\times 100=115$	$15y$
Restrições	$x\geq 0$ $y\geq 0$ $x\geq 20$ $y\geq 15$ $x+y\leq 80$	$50x+100y\leq 5500$		

8

Deste modo podemos formular o problema como sendo:

$$\max f(x,y) = 10x + 15y$$

sujeito a

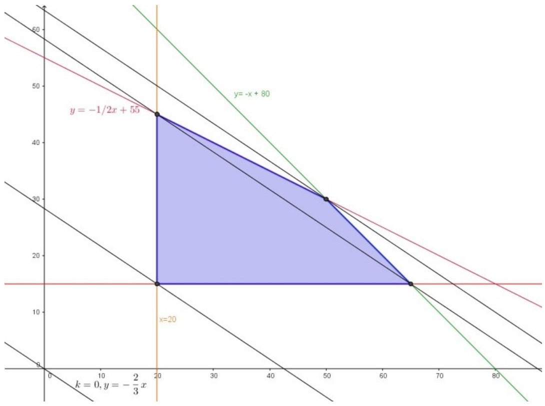
$$x + y \leq 80$$

$$50x + 100y \leq 5500$$

$$x \geq 20$$

$$y \geq 15$$

Vamos proceder à representação geométrica da região admissível.



Pode-se facilmente perceber que o ponto que nos indicara a solução ótima vai ser o ponto de interseção das retas $y = -x + 80$ e $y = -\frac{1}{2}x + 55$, vamos então calcular esse ponto:

$$\begin{cases} y = -x + 80 \\ y = -\frac{1}{2}x + 55 \end{cases} \Leftrightarrow -x + 80 = -\frac{1}{2}x + 55 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = -25 \Leftrightarrow x = 50$$

Deste modo podemos calcular as duas coordenadas do ponto $y = -50 + 80 = 30$, logo as coordenadas do ponto que nos dá a solução ótima é $(50,30)$, pelo que o lucro máximo é dado por, $10 \times 50 + 15 \times 30 = 950$.

Podemos então concluir o exercício afirmando que o Sr. Mota deverá comprar 50 calculadoras do tipo Ba e 30 do tipo Se, obtendo um lucro máximo de 950€.

Liliana Pinho
Programação Linear
Matemática A

Exercício 2: Um criador de suínos pretende saber qual a composição da ração que deve ser dada diariamente a cada animal, em granulado e em farinha. De modo que, mantendo certa qualidade nutritiva, o seu custo seja mínimo. No quadro seguinte, estão os dados relativos ao custo, às quantidades mínimas diárias de ingredientes que cada animal deve ingerir, bem como as quantidades mínimas existentes em cada tipo de ração.

	Peso (Kg)	Carbo- -hidratos (g/Kg)	Vitaminas (g/Kg)	Proteínas (g/Kg)	Custo (€)
Granulado	x	20	50	30	10
Farinha	y	50	10	30	5
Quantidade mínima requerida	$x \in \mathbb{N}_0$ $y \in \mathbb{N}_0$	200	150	210	
	$x \geq 0$ $y \geq 0$	$20x + 50y \geq 200$	$50x + 10y \geq 150$	$30x + 30y \geq 210$	$\min 10x + 5y$

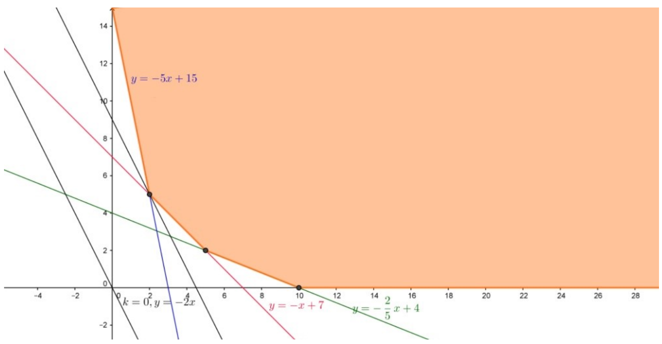
Deste modo podemos formular o problema como sendo:

$$\min f(x, y) = 10x + 5y$$

sujeito a

$$20x + 50y \geq 200$$
$$50x + 10y \geq 150$$
$$30x + 30y \geq 210$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Vamos proceder à representação geométrica da região admissível.



10

Pode-se facilmente perceber que o ponto que nos indicara a solução ótima vai ser o ponto de interseção das retas $y=-5x+15$ e $y=-x+7$, amos então calcular esse ponto:

$$\begin{cases} y=-5x+15 \\ y=-x+7 \end{cases} \Leftrightarrow -5x+15=-x+7 \Leftrightarrow -4x=-8 \Leftrightarrow x=2$$

Deste modo podemos calcular as duas coordenadas do ponto $y=-5\times 2+15=5$, logo as coordenadas do ponto que nos dá a solução ótima é $(2,5)$, pelo que o lucro mínimo é dado por, $10\times 2+5\times 5=45$.

Podemos então concluir o exercício afirmando que o criador de suínos deverá dar a cada animal 2Kg de granulado e 5Kg de farinha de modo que estes tenham uma alimentação equilibrada, gastando,n o mínimo, 45€.

A.6. Teste de Avaliação sobre Programação Linear

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

E. S. de D. Duarte
Matemática A – 11º Ano
Ficha Individual N.º 4

Apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.
Todas as questões devem ser resolvidas recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.
Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o valor exato. Todos os resultados devem ser apresentados de forma tão simplificada quanto possível.

Na região do baixo Mondego, as recentes chuvas torrenciais causaram inundações e a região foi considerada zona de catástrofe.

Para enfrentar a situação, os organismos ligados aos serviços agropecuários decidiram adquirir rações para animais. Foram pedidos, com urgência, dois tipos de ração: FarX e FarY.

A FARJO é uma fábrica especializada na produção deste tipo de ração. Estas rações contêm três tipos de aditivos: vitaminas, sabores e conservantes.

Para cada tonelada do tipo FarX, são necessários dois quilogramas de vitaminas, um quilograma de sabores e um quilograma de conservantes.

Para cada tonelada do tipo FarY, são necessários um quilograma de vitaminas, dois quilogramas de sabores e três quilogramas de conservantes.

A FARJO dispõe diariamente, de 16 quilogramas de vitaminas, 11 quilogramas de sabores e 15 quilogramas de conservantes. Estas são as únicas restrições na produção destas rações.

Represente por x a quantidade de ração FarX, produzida diariamente, expressa em toneladas, e por y a quantidade de ração FarY, produzida diariamente, expressa em toneladas.

1. É possível a FARJO fabricar, num só dia, 4 toneladas de FarX e 3 toneladas de FarY?
   Justifique.
2. Quais são as quantidades de ração de cada tipo que devem ser produzidas, de modo que a quantidade total de ração produzida diariamente seja máxima?
   Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:
   - indique a função objetivo;
   - indique as restrições do problema;
   - represente, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
   - indique os valores das variáveis para os quais é máxima a função objetivo.

Cotações

Questões	1.	2.	Total
Cotações	10	20	30

FI-04-V1

A.7. Planificação da Aula de Matemática A

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

E. S. de D. Duarte
11ºA (Matemática A)
Ano Letivo 2015/2016
90 minutos

Aula nº59: 25/Fevereiro/2016

Unidade Didática:
Introdução ao cálculo diferencial I

Tema:
Funções racionais e funções com radicais

Especificação do Tema:
Operações com funções racionais

Sumário:

- Operações com funções.
- Resolução de exercícios.

Material Didático:

- Caderno diário e material de escrita;
- Calculadora.

Objetivos da Aula:

Gerais:

- Usar corretamente linguagens das diferentes áreas do saber cultural, científico e tecnológico para se expressar;
- Usar corretamente a língua portuguesa para comunicar de forma adequada e para estruturar o pensamento lógico;
- Adotar estratégias adequadas à resolução de problemas e à tomada de decisões;
- Desenvolver o espírito de entre ajuda, respeito mútuo e colaboração;
- Compreender enunciados e textos.

Específicos:

- Fatorizar polinómios;
- Simplificar frações racionais, indicando o domínio de validade da simplificação;
- Caraterizar uma função;
- Operar com funções.

Metodologia:

Caraterizar uma função resultante da soma, da diferença, do produto e do quociente de funções. Resolver exercícios relacionados com o tema estudado. Introdução ao estudo da composição de funções.

Liliana Pinho

Descrição da Aula:

Início da aula com a leitura do sumário da aula anterior.

Sejam f e g, funções tais que:

$$\begin{array}{l} f : D_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longrightarrow y = f(x) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} g : D_g \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longrightarrow y = g(x) \end{array}$$

Para caraterizar uma função é necessário indicar:

- O domínio;
- A expressão analítica.

Operações com funções:

1) $(f+g)(x)$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g$

$$\begin{array}{l} (f+g) : D_{f+g} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\qquad x \longrightarrow y = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array}$$

2) $(f-g)(x)$

$D_{f-g} = D_f \cap D_g$

$$\begin{array}{l} (f-g) : D_{f-g} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\qquad x \longrightarrow y = (f-g)(x) = f(x) - g(x) \end{array}$$

3) $(f \times g)(x)$

$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$

$$\begin{array}{l} (f \times g) : D_{f \times g} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\qquad x \longrightarrow y = (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \end{array}$$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$D_{f/g} = (D_f \cap D_g) \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\} = D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\}$

$$\begin{array}{l} \left(\frac{f}{g}\right) : D_{\left(\frac{f}{g}\right)} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\qquad x \longrightarrow y = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

Exemplo:

1. Seja $f(x) = \frac{2}{x+1}$ e $g(x) = \frac{2x-1}{x}$.

   $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

   $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{2x-1}{x} = \frac{2x^2+3x-1}{x(x+1)}$

   $D_{f+g} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$

2

Liliana Pinho

2. Seja $f(x)=\frac{1}{x}$ e $g(x)=\frac{x+1}{x+3}$.

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$D_g=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+3}{x(x+1)}$

$g(x)=0 \Leftrightarrow x=-1 \wedge x\neq -3$

$D_{f/g}=\mathbb{R}\setminus\{0\}\cap\mathbb{R}\setminus\{-3;-1\}=\mathbb{R}\setminus\{-3;-1;0\}$

Exercício 1: Considere as funções $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$, $g(x)=\frac{x+3}{x+1}$ e $h(x)=\frac{1}{x+3}$. Caraterize:

a) $(f+g)(x)$

b) $(f\times g)(x)$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

d) $(h-f)(x)$

e) $\left(\frac{h}{g}\right)(x)$

Resolução do exercício 42 e 43, respetivamente, da página 51 e 52 do manual.

Introdução ao conceito de composição de funções racionais através da resolução do exercício 47 da página 56 do manual.

Considerem-se as funções $f(x)=x+2$ e $g(x)=\frac{1}{x}$.

$D_f=\mathbb{R}$

$D_g=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{1}{x+2}$

$D_{g\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$i(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{x}+2$

$D_{f\circ g}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Na realidade quando nos pedem para calcular a imagem por g de $f(3)$, o que os pedem é para que calculemos $g(f(3))$ que é o mesmo que nos pedirem para calcular $(g\circ f)(3)$.

5) $(g\circ f)(x)$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\}$

$(g\circ f): D_{g\circ f}\longrightarrow\mathbb{R}$

$\qquad x\longrightarrow y=(g\circ f)(x)=g(f(x))$

Resolução da tarefa 13 e do exercício 49 da página 57.

3

Liliana Pinho

Apêndice B

Anexos - Matemática Aplicada às Ciências Sociais

B.1. Planificação a Longo Prazo de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS COIMBRA OESTE
Planificação a Longo Prazo | MACS | 11º Ano
2015/2016

Período Letivo	Início	Fim	Temas/Subtemas	Nº de aulas	Nº de aulas para testes	Nº de aulas de auto e hetero avaliação	Nº total de aulas
1º	21/set	17/dez	**Modelos Matemáticos** - Modelos de grafos. - Modelos populacionais.	27	4	1	38
			Modelos de Probabilidade - Fenómenos aleatórios. - Argumento de simetria e regra de Laplace. - Modelos de probabilidade em espaços finitos. Variáveis quantitativas. Função massa de probabilidade.	6			
2º	4/jan	18/mar	**Modelos de Probabilidade** - Probabilidade condicional. Árvores de probabilidade. Acontecimentos independentes. - Probabilidade Total. Regra de Bayes. - Valor médio e variância populacional. - Espaço de resultados infinitos. Modelos discretos e modelos contínuos. Exemplos de modelos contínuos. - Modelo Normal.	26	4	1	31
3º	4/abr	3/jun	**Introdução à Inferência Estatística** - Parâmetro e estatística. - Distribuição de amostragem de uma estatística. - Noção de estimativa pontual. Estimação de um valor médio. - Importância da amostragem aleatória, no contexto da Inferência Estatística. Utilização do Teorema do Limite Central na obtenção da distribuição de amostragem da média. - Construção de estimativas intervalares ou intervalos de confiança para o valor médio de uma variável. - Estimativa pontual da proporção com que a população verifica uma propriedade. - Construção de intervalos de confiança para a proporção. - Interpretação do conceito de intervalo de confiança.	23	2	1	26

B.2. Planificação a Médio Prazo de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS COIMBRA OESTE

Planificação a Médio Prazo | MACS | 11º Ano

2015/2016

Temas	Subtemas	Nº de aulas
TEMA 1: **MODELOS MATEMÁTICOS**	❖ **Modelos de Grafos** ▪ Linguagem e notações da teoria de grafos. ➢ Grafo, aresta, vértice, vértice isolado, arestas paralelas, grafo nulo; ➢ Vértices e arestas adjacentes, ordem e dimensão de um grafo; ➢ Grau de um vértice, grafo regular; ➢ Subgrafo; ➢ Grafo conexo, ponte, grafo completo, grafo simples, k_n ; ➢ Caminho, circuito.	**5**
	▪ Grafos eulerianos. ➢ Circuito de Euler, caminho euleriano; ➢ Teorema de Euler, teorema do caminho de Euler. ➢ Eulerização de um grafo.	**5**
	▪ Grafos hamiltonianos. Árvores. ➢ Circuitos hamiltonianos; ➢ Grafos bipartidos e grafos planares; ➢ O problema do caixeiro viajante; ➢ Algoritmo da cidade mais próxima; ➢ Algoritmo do peso das arestas; ➢ Árvore, árvore abrangente; ➢ Algoritmo de Kruskal; ➢ Algoritmo de Prim.	**6**

1

Temas	Subtemas	Nº de aulas
TEMA 1: **MODELOS MATEMÁTICOS**	❖ **Modelos Populacionais** ▪ Modelos discretos. ➢ Progressões aritméticas; ➢ Progressões geométricas	**5**
	▪ Modelos contínuos. ➢ Crescimento linear. ➢ Crescimento logarítmico. ➢ Crescimento exponencial. ➢ Crescimento logístico.	**9**

2

Temas	Subtemas	Nº de aulas
TEMA 2: **MODELO DE PROBABILIDADES**	❖ **Problemas de contagem.** ▪ Princípio fundamental da contagem. ▪ Diagrama em árvore. ▪ Estatística descritiva e estatística indutiva.	**3**
	❖ **Conjuntos.** ▪ Operações com conjuntos. ➢ Reunião de conjuntos; ➢ Interseção de conjuntos; ➢ Complementação de conjuntos; ➢ Complementação de um conjunto relativamente a outro. ▪ Propriedades das operações com conjunto e leis de De Morgan.	**4**
	❖ **Modelos de probabilidade em espaços finitos.** ▪ Fenómenos aleatórios. ▪ Argumentos de simetria e Regra de Laplace. ➢ Espaço de resultados. Acontecimentos; ➢ Operações com acontecimentos; ➢ Definição frequencista de probabilidade; ➢ Definição clássica de probabilidade e aplicação da regra de Laplace à resolução de problemas em experiências compostas.	**13**

3

Temas	Subtemas	Nº de aulas
TEMA 2: **MODELO DE PROBABILIDADES**	▪ Probabilidade condicional. ➢ Árvore de probabilidades. Acontecimentos independentes; ➢ Probabilidade total de um acontecimento – Regra de Bayes. ▪ Distribuição de frequências relativas e distribuição de probabilidades. ➢ Função massa de probabilidade de uma variável aleatória discreta; ➢ Média versus valor médio; ➢ Desvio padrão amostral versus desvio padrão populacional. ❖ **Modelos de probabilidade em espaços infinitos** ▪ Modelos discretos e modelos contínuos – exemplos. ▪ Modelo normal. ➢ Distribuição normal estandardizada; ➢ Cálculo de probabilidades com base no modelo normal, recorrendo ao uso de uma tabela da função de distribuição de uma *Normal Standard*; ➢ Teorema do limite central.	**10** **5**

4

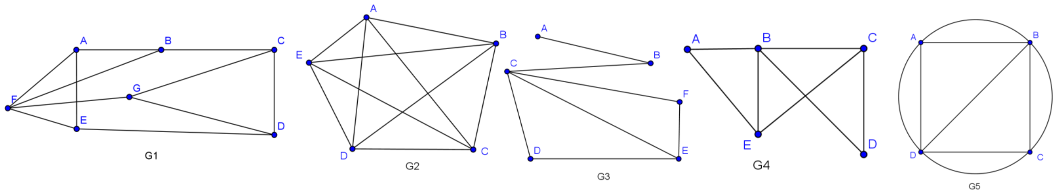
Temas	Subtemas	Nº de aulas
TEMA 3: **INTRODUÇÃO À INFERÊNCIA ESTATÍSTICA**	❖ **Parâmetro e estatística.** ▪ População e amostra. ▪ Métodos de amostragem. ▪ Estatística descritiva e estatística indutiva.	**6**
	❖ **Distribuição de amostragem de uma estatística. Teorema do limite central.** ▪ Noção de estimativa pontual. Estimação do valor médio; ▪ Utilização do Teorema do Limite Central na obtenção da distribuição de amostragem da média; ▪ Intervalos de confiança. ▪ Estimativa de uma proporção. ➢ Intervalo de confiança para a proporção; ➢ Margem de erro.	**19**

B.3. Ficha de Trabalho 01 - Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

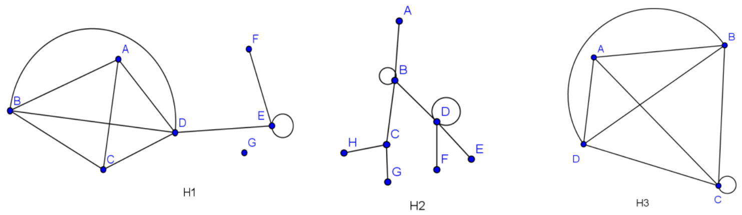
E. S. de D. Duarte
MACS – 11º Ano
FT 01- Linguagem e notações de teoria de grafos

1. Considere os grafos apresentados de seguida:



   1.1. Indique a ordem e a dimensão de cada um dos grafos;
   1.2. Dê um exemplo de vértices e arestas adjacentes em cada um dos grafos;
   1.3. Indique para cada um dos grafos o conjunto de arestas incidentes em B.
   1.4. Indique o grau de cada um dos vértices dos grafos G1, G3 e G5.

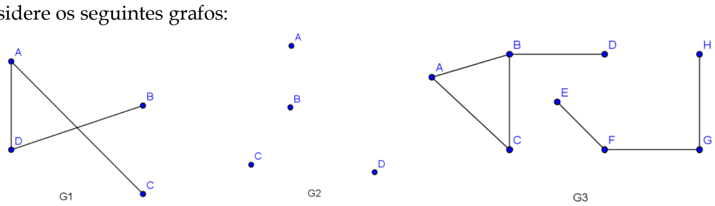
2. Indique para cada um dos seguintes grafos:



   2.1. O grau de cada vértice;
   2.2. Vértices isolados;
   2.3. Lacetes;
   2.4. Arestas paralelas.

3. Desenhe, se possível, um grafo de ordem 5 com as seguintes restrições:
   3.1. A: grau 5, B: grau 2, C: grau 3, D: grau 2, E: grau 1;
   3.2. A: grau 6, B: grau 3, C: grau 2, D: grau 2, E: grau 3;
   3.3. A: grau 2; B: grau 2, C: grau 2, D: grau 3, E: grau 3.

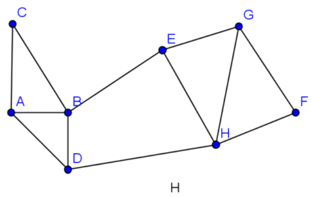
4. Considere os seguintes grafos:



   4.1. Quais se podem dizer conexos?
   4.2. No caso de existir algum grafo desconexo, é possível torna-lo conexo com a inserção de uma só ponte?

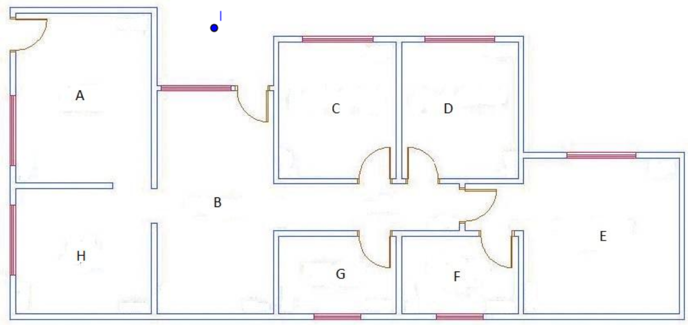
1

5. Considere o grafo H.



5.1. Encontre:
   5.1.1. Um caminho de comprimento 5 entre C e G.
   5.1.2. Um caminho de comprimento 6 entre A e G.
   5.1.3. Um circuito a partir de A com comprimento 8.

6. Na figura encontra-se representada a planta de uma casa em que as divisões estão identificadas por A, B, C, D, E, F, G e H. O ponto I encontra-se no exterior da casa.



6.1. Represente por um grafo a planta da casa, de modo a que os vértices sejam as divisões e o ponto exterior à casa, e as arestas os caminhos possíveis de deslocação de uma divisão para outra;
6.2. O grafo desenhado na alínea anterior é completo? Justifique.
6.3. O grafo desenhado será conexo? Justifique.
6.4. Qual a ordem e a dimensão do grafo obtido?
6.5. Seria possível retirar uma aresta ao grafo resultante de modo a que este continue a ser conexo?

7. Desenhe o grafo K_6.
7.1. Qual o grau de cada vértice do grafo?
7.2. Quantas arestas tem K_6.

8. Quantas arestas e vértices existem num grafo K_{43}.

9. Sabendo que K_n, é um grafo simples e completo, em que existem 4278 arestas. Determine n.

Soluções

1.

1.1/1.2/1.3

Grafos	Ordem	Dimensão	Vértices Adjacentes	Arestas Adjacentes	Arestas incidentes em B
G1	7	11	A,B	AB, BC	AB, FB, CB
G2	5	10	B,C	AC, CB	AB, EB, DB, CB
G3	6	7	E,F	FE, ED	AB,CB
G4	5	7	C,E	EB, BD	AB,CB,DB,EB
G5	4	9	D,B	AB, BD	AB,AB,DB,CB,CB

1.4

	A	B	C	D	E	F	G
G1	3	3	3	3	3	4	3
G3	1	2	4	2	3	2	----
G5	4	5	4	5	----	----	----

2.

2.1

	A	B	C	D	E	F	G	H
H1	3	4	3	5	4	1	0	----
H2	1	5	3	5	1	1	1	1
H3	3	4	5	4	----	----	----	----

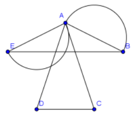
2.2 /2.3/2.4

	Vértice Isolado	Lacetes	Arestas Paralelas
H1	G	EE	BD, DB
H2	----	BB,DD	----
H3	----	CC	BD, DB

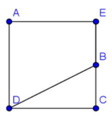
3.

3.1 Não é possível.

3.2



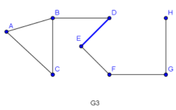
3.3



4.

4.1 Grafo G1

4.2

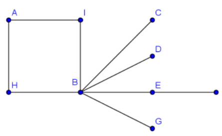


5.

5.1.1 CBEHFG **5.1.2** ACBEHFG **5.1.3** ACBEGFHDA

6.

6.1



3

6.2 Não se trata de um grafo completo pois cada vértice não está ligado a todos os outros os vértices por meio de uma aresta.

6.3 O grafo é conexo, pois qualquer um dos vértices está ligado a outro qualquer vértice por meio de uma aresta, ou um conjunto de arestas.

6.4 Ordem: 9 e Dimensão:9

6.5 Sim, por exemplo BI.

7.

7.1 O grau de cada vértice é 5.

7.2 15

8. 903

9. K_{93}

B.4. Ficha de Trabalho 02 - Matemática Aplicada às Ciências Sociais

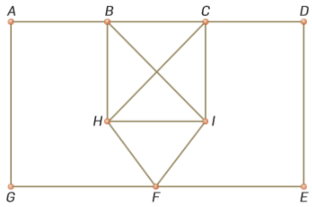
Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

E. S. de D. Duarte
MACS – 11º Ano
FT 02- Grafos Eulerianos

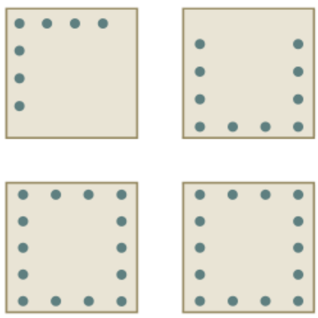
1. Um pintor de estradas tem de pintar, a traço interrompido, todas as ruas de uma certa localidade. O grafo seguinte, onde os vértices representam as esquinas e as arestas representam as ruas, serve de modelo para essa situação:

    1.1. Será possível pintar todas as estradas sem repetir nenhuma rua e regressar ao ponto de partida? Justifique.

    1.2. Qual será, nesse caso, o percurso a seguir pelo pintor?



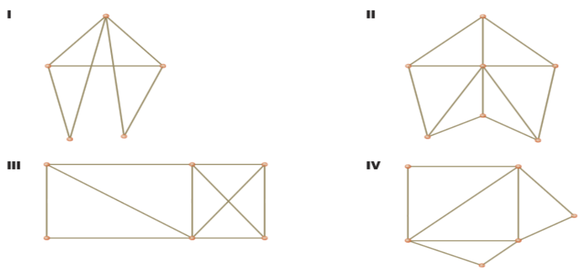
2. A figura abaixo representa um esquema com ruas de uma cidade, onde os pontos representam parquímetros.



2.1 Desenhe um grafo que possa auxiliar o funcionário, independentemente do sentido do percurso, que vai recolher as moedas de todos os parquímetros.

2.2 Será possível percorrer todas as arestas do grafo uma única vez? Em caso afirmativo indique o caminho obtido.

3. Para cada um dos seguintes grafos:

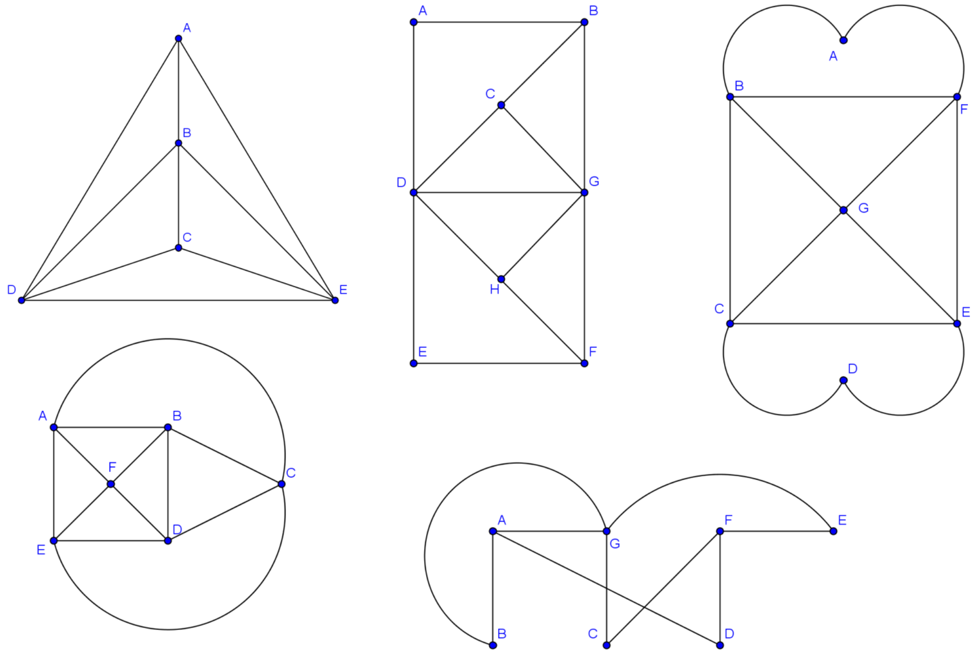


    3.1. Verifique se têm circuitos eulerianos.

    3.2. Naqueles que não existe um circuito de Euler, encontre uma boa eulerização.

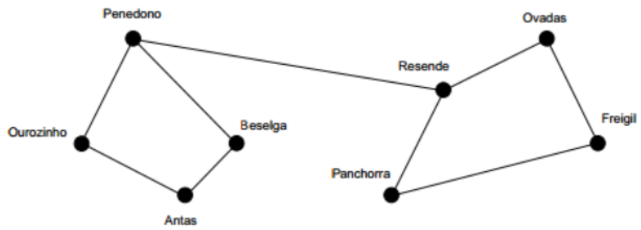
1

4. Verifique, e indique, se cada um dos seguintes grafos são eulerianos:



5. Dos grafos anteriores quais os que admitem um caminho de Euler?

6. A empresa Silva Filhos dedica-se à limpeza de estradas. Na figura encontra-se o grafo que serve de modelo ao circuito utilizado pela empresa para efetuar a limpeza das estradas. Cada vértice do grafo representa uma localidade, e cada aresta representa uma estrada que liga duas localidades.



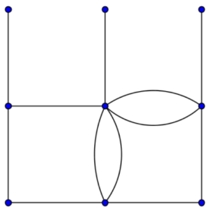
6.1. Considere a afirmação: "Não é possível limpar todas as estradas representadas no grafo da figura percorrendo cada estrada uma e uma só vez, se o camião de limpeza partir de Beselga. Mas é possível alterar essa situação". Justifique a veracidade da afirmação anterior.

6.2. Reproduz o grafo da figura, acrescentando-lhe uma aresta de modo a que o grafo obtido represente um modelo a partir do qual seja possível limpar todas as estradas, percorrendo cada estrada uma única vez. Considera que a equipa parte de Beselga e volta à mesma localidade.

Soluções

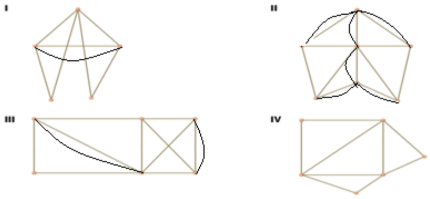
1.
1.1 Sim **1.2** Por exemplo: C-B-I-F-E-D-C-I-H-F-G-A-B-H-C

2.



3.
3.1 Grafo IV.

3.2



4. Os grafos de Euler são: III e IV.

5. Admitem caminho de Euler: I, III, IV e V.

6.
6.1 Não

6.2 Duplicar a aresta de Penedono para Resende.

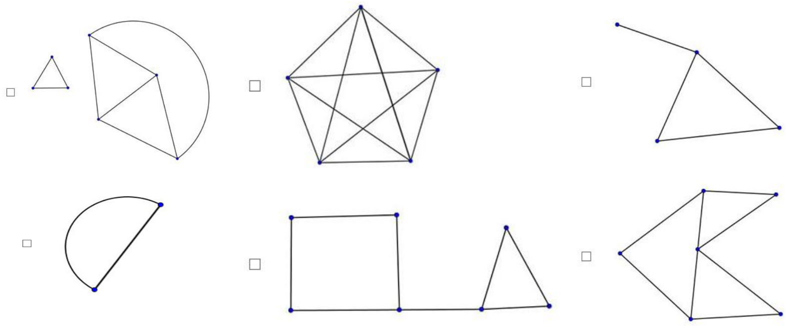
B.5. Ficha de Trabalho 03 - Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

E. S. de D. Duarte
MACS – 11º Ano
FT 03- Grafos de Hamilton e Árvores Geradoras

1. Considerando a definição de Hamilton, indique a veracidade das afirmações seguintes :
   1.1. Num circuito de Hamilton não pode haver arestas repetidas;
   1.2. Um grafo desconexo pode admitir um circuito de Hamilton;
   1.3. Num circuito de Hamilton existe sempre um e um só vértice que se repete.
   1.4. Um grafo, para ser hamiltoniano não pode ter vértices de grau um;
   1.5. Um grafo, para admitir um circuito de Hamilton, pode ter apenas dois vértices de grau ímpar.

2. Observe os grafos seguintes e assiná-la os que admitem circuito de Hamilton:

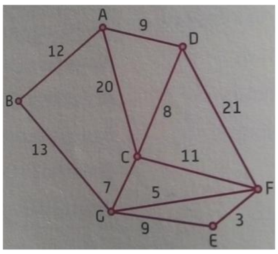


3. Das situações que se seguem, indique quais as que representam circuitos de Hamilton.
   a) A inspeção das estradas numa localidade;
   b) Manutenção de fotocopiadoras das escolas de um concelho;
   c) Distribuição de combustível pelas áreas de serviço de um distrito;
   d) Recolha de lixo urbano por parte de uma empresa;
   e) Levantamento dos depósitos efetuados nas caixas multibanco de uma cidade, por parte de uma empresa;
   f) Construção de passeios nas vias públicas de uma localidade.

4. Uma família de turistas está alojada num hotel representado por A. O guia recomenda seis locais- B, C, D, E, F e G- verdadeiramente importantes que não deixarão de poder ir visitar. As ligações entre os locais e respetivas distâncias, em quilómetros, que os separam estão assinaladas no grafo.

   4.1 Partindo do hotel, é possível percorrer todas as ruas assinaladas passando uma e uma só vez em cada uma delas? Ter-se-á de repetir alguma?

   4.2 Considere a mesma questão, mas tendo, obrigatoriamente, de regressar ao hotel. Determine o caminho mais curto para visitar todos os locais, partindo do hotel.



1

5. Uma agência de uma seguradora pretende instalar seis computadores ligados entre si. Uma forma de interpretar a "melhor" ligação é otimizar a quantidade de cabo para ligar os computadores. Devido à localização que vão ter, não é possível cada par de computadores estar diretamente ligado entre si, na tabela indicam-se quais as ligações possíveis. OS computadores estão representados por letras e a distância em metros.

	A	B	C	D	E	F
A	-	9	-	-	-	3
B	9	-	8	-	8	11
C	-	8	-	3	5	-
D	-	-	3	-	6	11
E	-	8	5	6	-	9
F	3	11	-	11	9	-

5.1 Modele a situação através de um grafo.

5.2

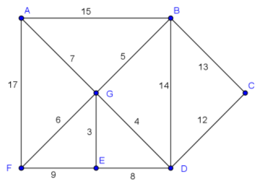
a) Qual a quantidade mínima de cabos necessários para ter todos os computadores ligados quer diretamente ou indiretamente?

b) No grafo, assinale as arestas que lhe permitem obter a ligação mínima entre os computadores.

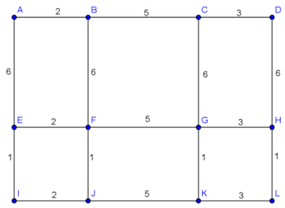
c) Descreva como procedeu para encontrar essa ligação.

6. Utilize o algoritmo de Kruskal para encontrar a árvore geradora mínima para cada um dos grafos seguintes:

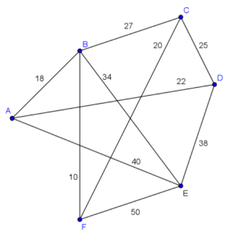
6.1.



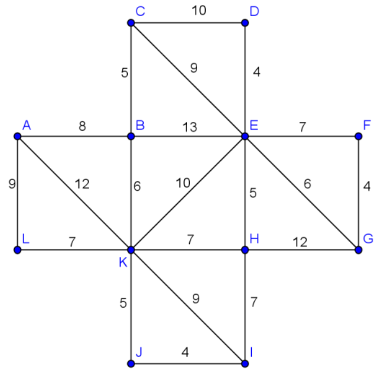
6.2.



6.3.



7. O construtor de um condomínio fechado deseja instalar um sistema subterrâneo de sucção de resíduos sólidos provenientes de cada moradia. O esquema da urbanização está representado pelo grafo seguinte:

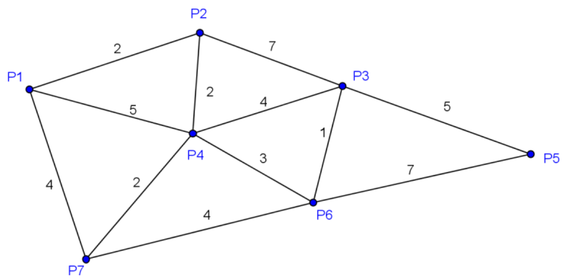


sendo cada moradia representada por um vértice e estando indicadas as distâncias, em metros, entre cada uma.

7.1. Qual é o menor número de metros de tubagem subterrânea a utilizar, de forma a minimizar os custos?

7.2. Onde deverá ficar a central de recolha de lixos, de modo a minimizar as distâncias percorridas?

8. Uma certa área florestal protegida tem sete postos de vigia, que serão interligados por uma linha telefónica. O grafo seguinte representa a posição dos postos de vigia, bem como a distância entre eles (em quilómetros):



Determine quais as ligações a efetuar, de modo a minimizar a quantidade de cabo a utilizar. Desenhe a árvore obtida e calcule o seu comprimento.

B.6. Teste Diagnóstico de Probabilidades

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

Escola Secundária de D. Duarte

Teste Diagnóstico – Probabilidades

11º Ano – MACS

Parte I

1. Qual dos seguintes, é um fenómeno aleatório?
   (A) Calcular a velocidade constante a que foi percorrido um percurso de 10 Km, conhecido o tempo gasto.
   (B) Determinar a área de um pentágono regular, conhecida a medida do seu lado.
   (C) Observar o tempo de atraso nos sucessivos circuitos de um autocarro dos SMTUC ao longo de um dia.
   (D) Calcular a altura de determinado volume de água num recipiente cilíndrico.

2. Considere a experiência aleatória que consiste em dois lançamentos sucessivos de um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e registo da soma das pontuações obtidas. Qual dos seguintes é um acontecimento elementar?
   (A) Obter soma 12. (B) Obter soma superior a 10.
   (C) Obter soma 1. (D) Obter soma par.

3. Um grupo de jovens, formado por 6 rapazes e algumas raparigas, foram acampar para o Gerês. Sabendo que a probabilidade de, ao escolher um deles ao acaso, ele ser rapariga é de $\frac{3}{5}$, quantas raparigas tinha o grupo?
   (A) 4 (B) 6 (C) 9 (D) 12

4. Admita, agora, que o grupo de jovens é constituído por 6 rapazes e 8 raparigas. Diariamente são escolhidos, ao acaso, dois dos jovens para fazer o almoço. A probabilidade de os dois jovens escolhidos serem do mesmo sexo é, aproximadamente
   (A) 0,16 (B) 0,47 (C) 0,31 (D) 0,51

5. Considere duas urnas contendo bolas numeradas de 1 a 4, indistinguíveis ao tato. Considere a soma dos valores obtidos, ao extrair uma bola de cada urna. Qual a probabilidade da soma ser igual a 7?
   (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{4}$

6. Dos 25 alunos de uma turma, 13 praticam badminton, 9 praticam natação e 8 não praticam qualquer daquelas modalidades. Escolhido um aluno da turma ao acaso, qual a probabilidade de ele, daquelas modalidades, praticar apenas natação?
   (A) 48 % (B) 36 % (C) 20 % (D) 16 %

1

7. Na entrada de um restaurante de self-service, está afixada a ementa que se reproduz. O preço da refeição é fixo, desde que esta seja constituída por uma sopa, um prato e uma sobremesa. Quantas refeições a preço fixo é possível organizar?

(A) 3 (B) 12

(C) 8 (D) 18

EMENTA
<u>SOPAS</u>
Caldo verde
Canja de galinha
<u>PRATOS</u>
Jardineira
Frango assado
Pescada cozida
<u>SOBREMESAS</u>
Leite-creme
Arroz doce
Pêssego em calda

8. Admita que uma pessoa escolhe os três pratos ao acaso. Qual a probabilidade de comer canja e não comer peixe?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

9. Na tabela, registaram-se os resultados de um inquérito dirigido a todos os trabalhadores de uma empresa sobre a sua habilitação para conduzir:

	Possui licença de condução	**Não possui licença de condução**
Sexo feminino	38	12
Sexo masculino	32	8

A probabilidade de um trabalhador da empresa, escolhido ao acaso, ser do sexo feminino e possuir licença de condução é, aproximadamente

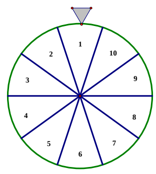
(A) 42 % (B) 56 % (C) 78 % (D) 91 %

10. Relativamente à empresa referida na alínea anterior, selecionou-se um funcionário que não possui licença de condução. Qual é a probabilidade de ele ser do sexo masculino?

(A) $\frac{4}{45}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{4}{9}$

Parte II

1. Observe a roleta da figura e considere a experiência aleatória que consiste em a rodar e verificar o número indicado pelo ponteiro quando ela para.



1.1. Utilizando os termos <u>elementar</u>, <u>composto</u>, <u>certo</u> ou <u>impossível</u>, classifique, de forma tão rigorosa quanto possível, os seguintes acontecimentos:

1.1.1. " Sair um número negativo";

1.1.2. "Sair divisor de 11";

1.1.3. "Sair número par";

1.1.4. "Sair um número racional".

1.2. Determine, sob a forma de fração irredutível, a probabilidade de cada um dos seguintes acontecimentos:

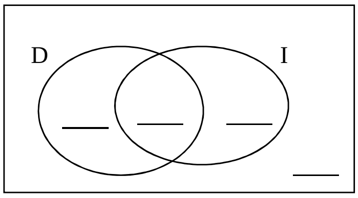
1.2.1. A: "sair número primo";

1.2.2. B: "sair múltiplo de 4";

1.2.3. C: "sair divisor de 12";

1.2.4. D: "sair um número que seja quadrado perfeito".

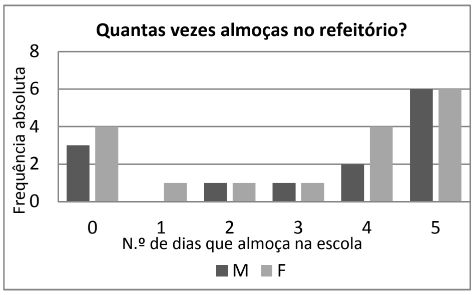
2. Numa turma do 9.º ano com 24 alunos, 16 estão inscritos no Desporto Escolar (D), 12 no Clube de Informática (I) e 3 não têm qualquer atividade extracurricular. Há alunos que estão inscritos em ambas as atividades.



   2.1. Complete o diagrama de Venn, de forma a ilustrar a situação descrita.
   2.2. Escolhendo um dos alunos ao acaso, determine, na forma de percentagem com arredondamento às unidades, as seguintes probabilidades:
      2.2.1. Não estar inscrito nem no Desporto Escolar nem no Clube de Informática.
      2.2.2. Ele não estar inscrito no Desporto Escolar.

3. Lançou-se três vezes uma moeda ao ar. Considere as faces <u>valor</u> (V) e <u>nacionalidade</u> (N) e o registo das faces que ficam voltadas para cima.
   3.1. Indique o espaço amostral Ω, relativo à experiência aleatória descrita.
   3.2. Determine a probabilidade de obter face <u>V</u> nas três moedas.
   3.3. Determine a probabilidade de obter pelo menos uma face <u>N</u>.

4. O gráfico de barras da figura mostra os resultados de um inquérito feito pela respetiva Diretora de Turma, aos alunos de uma turma da escola, em relação ao número de vezes que estes almoçaram no refeitório, durante a semana.



   4.1. Quantos alunos tem a turma? Quantos deles são do sexo masculino (M)?
   4.2. Escolhendo ao acaso um dos alunos da turma, determine a probabilidade de ele, na semana em causa:
      4.2.1. Nunca ter almoçado no refeitório. Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.
      4.2.2. Ser do sexo feminino e ter almoçado na escola pelo menos duas vezes. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.
   4.3. Se se escolher aleatoriamente uma rapariga da turma, qual a probabilidade dela ter, na semana a que diz respeito o questionário, almoçado na escola 4 vezes? Apresente o resultado na forma de dízima com arredondamento às milésimas.

5. Para angariar fundos para a viagem de finalistas, uma turma do 12º ano organizou um cabaz de Natal. Os alunos venderam rifas azuis, verdes e amarelas. Sabe-se que, no sorteio do cabaz, a probabilidade da rifa sorteada ser azul é $\frac{1}{3}$ e de ser verde é $\frac{2}{5}$.
   5.1. Qual a probabilidade da rifa vencedora ser amarela?
   5.2. Sabendo que foram vendidas 135 rifas, quantas delas eram azuis?

3

6. O Luís tem dois dados, um branco e um preto, ambos equilibrados e com a forma de um cubo. As faces do dado branco estão numeradas de 1 a 6, e as do dado preto estão numeradas de (-6) a (-1). O Luís lançou uma vez os dois dados e adicionou os valores registados nas faces que ficaram voltadas para cima. Qual é a probabilidade de essa soma ser um número negativo? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

7. A Márcia escreveu em três cartões iguais os números do conjunto $\{-2;0;2\}$, um em cada cartão, e colocou-os numa bolsa. De seguida realizou a experiência aleatória que consistiu em retirar sucessivamente, sem reposição, dois cartões da bolsa e registar os respetivos números.
   7.1. Indique o conjunto de resultado (espaço amostral) associado à experiência aleatória descrita.
   7.2. Indique a probabilidade dos seguintes acontecimentos:
      7.2.1. A soma dos números é zero;
      7.2.2. O produto dos números é zero.

8. Certo dia o professor de Matemática levou um dado para a aula e pediu aos alunos que averiguassem se ele era, ou não, equilibrado. Um dos grupos de trabalho, constituído para o efeito, após efetuar alguns lançamentos, apresentou a tabela que aqui se reproduz e concluiu que o dado era viciado. Num curto texto, diga se concorda com a conclusão apresentada e porquê, referindo, caso discorde dela, o motivo da sua discordância e qual o procedimento que adotaria.

Face	Nº de Ocorrências	Frequência com que ocorreu
1	10	20 %
2	3	6 %
3	5	10 %
4	7	14 %
5	5	10 %
6	20	40 %
Total	**50**	**100 %**

B.7. Probabilidades - resumo

Liliana Pinho

Probabilidades
Matemática Aplicada às Ciências Sociais
11ºano

Escola Secundária D. Duarte
Agrupamento de Escolas Coimbra Oeste
Ano Letivo 2015/16

Liliana Pinho
Probabilidades
M.A.C.S.

Conteúdo

2

Liliana Pinho
Probabilidades
M.A.C.S.

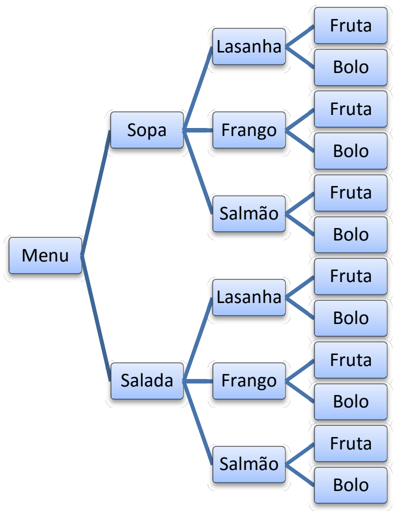
Problemas de Contagem

Na grande maioria dos casos, o estudo de determinadas situações baseia-se na contagem de todos os casos possíveis.

Se num menu existem 3 categorias de pratos, entradas, prato principal e sobremesa:

- Entradas: sopa, salada;
- Prato Principal: lasanha, frango no forno, salmão;
- Sobremesa: fruta, bolo.

Quantos menus distintos se poderiam fazer?



Entrada		Prato		Sobremesa			
2	x	3	x	2	=	12	$\longrightarrow$ Existem 12 menus distintos à escolha.

Conseguimos calcular o total de hipóteses multiplicando as totalidades de cada opção.

E se agora fosse preciso calcular as possibilidades distintas de o João se vestir, sabendo que possui 5 t-shirts diferentes, 2 pares de calças distintos e 2 pares de sapatos.

Calças		T-shirts		Sapatos			
2	x	5	x	2	=	20	$\longrightarrow$ Existem 20 conjuntos distintos à escolha.

Princípio fundamental de contagem: Se um resultado R é composto por uma sucessão de k resultados em que cada um deles pode ocorrer, respetivamente, de $n_1, n_2, \ldots, n_k$ maneiras diferentes, então o resultado R pode ocorrer de $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ maneiras distintas.

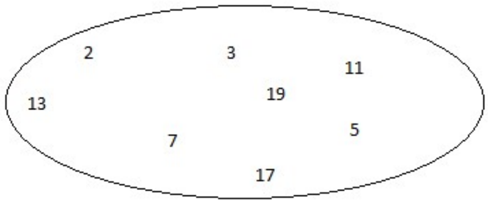
3

Liliana Pinho
Probabilidades
M.A.C.S.

Representação de um conjunto e seu cardinal

Um conjunto definido como sendo o conjunto dos números primos menores que 20, pode ser representado e várias maneiras:

- Por meio de um diagrama:



- Em extensão: enumeração de todos os elementos do conjunto.
  C={2,3,5,7,11,13,17,19}
- Em compreensão: propriedade comum a todos os seus elementos e apenas a esses elementos.
  C={Números primos menores que 20}

Ao número de elementos de um conjunto chama-se cardinal do conjunto e representa-se por #.

Exemplo:

C={2,3,5,7,11,13,17,19}

#C=8

Conjunto Vazio

Diz-se que um conjunto é vazio se não tem elementos. $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 0\} = \{\,\} = \varnothing$. Quando um conjunto é vazio diz-se que tem cardinal igual a 0.

Subconjunto de um Conjunto

A é subconjunto de *B*, ou *A* está contido em *B* se todo o elemento de *A* é elemento de B.

$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Igualdade entre Conjuntos

Dois conjuntos dizem-se iguais se ambos têm todos os elementos do outro. *A=B* se e só se todo o elemento de *A* é elemento de *B* e se todo o elemento de *B* é elemento de *A*.

$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Conjunto Universal ou Universo

O conjunto universal é constituído por todos os elementos do universo que estamos a considerar no cado em estudo. Representamos o Universo por U ou por S. Qualquer subconjunto de elementos está contido no Universo.

$\forall A,\ A \subseteq S$

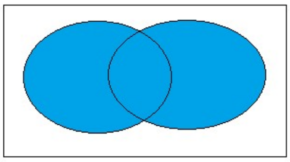
Liliana Pinho
Probabilidades
M.A.C.S.

Operações:

Reunião de Conjuntos

Sejam *A* e *B* dois conjuntos quaisquer. $A \cup B$ (reunião de *A* com *B* / *A* ou *B*) é constituída por todos os elementos que pertençam a *A* ou a *B*.

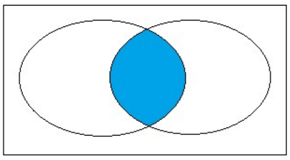
$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$



Interseção entre Conjuntos

Sejam *A* e *B* dois conjuntos quaisquer. $A \cap B$ (interseção de *A* com *B* / *A* e *B*) é definida pelos elementos que pertençam a *A* e a *B*.

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$



Exemplo:

$A = \{\text{"números pares inferiores a 20"}\} = \{2;4;6;8;10;12;14;16;18\}$

$B = \{\text{"números múltiplos de 5 não superiores a 20"}\} = \{5;10;15;20\}$

$A \cup B = \{2;4;5;6;8;10;12;14;15;16;18;20\}$

$A \cap B = \{10\}$

Nota Importante:

$A \cup S = S$

$A \cup \varnothing = A$

$A \cap S = A$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

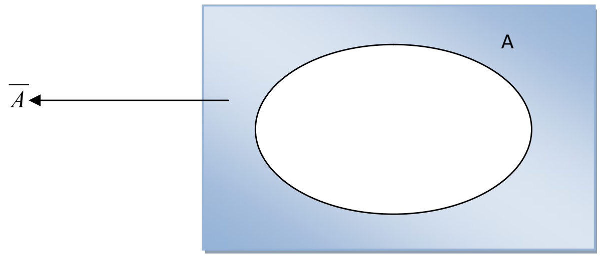
5

Liliana Pinho
Probabilidades
M.A.C.S.

Complementar de um Conjunto

O complementar do conjunto A representa-se por $\overline{A}$.

$\overline{A} = \{x : x \notin A\}$



Nota:

$A \cup \overline{A} = S$

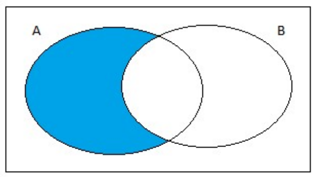
$A \cap \overline{A} = \varnothing$

$\overline{\overline{A}} = A$

Complementar de um Conjunto em relação a Outro Conjunto

O complementar do conjunto *A* em relação a *B* é o conjunto que contém todos os elementos de *A* que não pertencem a *B*, e representa-se por $A \setminus B$.

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$



Conjuntos Disjuntos

Dois conjuntos dizem-se disjuntos se não têm elementos em comum. $A \cap B = \varnothing$

Exemplo:

$A = \{\text{números naturais pares}\}$

$B = \{\text{números naturais ímpares}\}$

$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A$ e B são disjuntos

Liliana Pinho
Probabilidades
M.A.C.S.

Propriedades das Operações com Conjuntos

	Reunião	Interseção
Propriedade Comutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Propriedade Associativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Elemento Neutro	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap S = A$
Elemento Absorvente	$A \cup S = S$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
Idempotência	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Propriedade Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap$ $\cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup$ $\cup (A \cap C)$

Leis de Morgan

Sejam *A* e *B* dois conjuntos quaisquer:

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Experiência aleatória e experiência determinista

1º Caso: Atirar um ovo do 1ºandar.

Já sabemos previamente que o ovo se vai partir ao cair no chão. Chamamos a este tipo de experiência determinista ou causal.

2º Caso: Lançar um dado equilibrado.

Não sabemos que face ficará voltada para cima. Chamamos a este tipo de experiência aleatória ou casual.

Experiência Determinista: As experiências deterministas ou causais caraterizam-se por produzirem sempre o mesmo resultado, desde que sejam repetidas sob as mesmas condições.

Experiências Aleatórias: As experiências aleatórias são experiências cujo resultado, apesar de se encontrar entre o conjunto de resultados conhecidos à partida, não pode ser conhecido antes da realização da experiência, ainda que esta seja realizada sob as mesmas condições.

Só as experiências aleatórias interessam ao estudo da probabilidade, pois esta teoria ocupa-se do estudo das leis que reagem aos fenómenos cujo resultado depende do acaso.

Espaço de Resultados: Espaço de resultados é um conjunto cujos resultados são os que consideramos como possíveis ao modelar um fenómeno aleatório.

Acontecimento: Acontecimento é um resultado ou um conjunto de resultados do espaço dos resultados, é portanto, um subconjunto do espaço dos resultados ou espaço amostral.

Exemplo:

7

Liliana Pinho
Probabilidades
M.A.C.S.

Experiência: "Lançamento de um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6".

$S = \{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow$ Espaço dos Resultados ou Espaço Amostral

$A =$ "Sair número par"

$A = \{2,4,6\} \rightarrow$ Acontecimento

Acontecimento Elementar: Quando os acontecimentos são constituídos por um único resultado, dizem-se acontecimentos elementares.

Exemplo:

$B = \{$Sair múltiplo de 5$\}$

$\# B = 1$

$B = \{5\} \rightarrow$ Acontecimento Elementar

Acontecimento Composto: Se o resultado de uma experiência consta de dois ou mais elementos do espaço dos resultados, dizemos que se trata de um acontecimento composto.

$A =$ "Sair número par"

$\# A = 3$

$A = \{2,4,6\} \rightarrow$ Acontecimento composto

No caso de um acontecimento composto o cardinal do conjunto é superior a 1.

Acontecimento certo: Se o resultado de uma experiência conta com todos os acontecimentos do espaço dos resultados, dizemos que se trata de um acontecimento certo.

$S = \{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow$ Acontecimento Certo

#S=6

$P($"Sair um número menor que 7"$) = P($Acontecimento Certo$) = 1$

Acontecimento Impossível: Se o resultado de uma experiência não tem qualquer elemento do espaço dos resultados, dizemos que se trata de um acontecimento impossível.

$C :$ "Sair número 9"

$C = \varnothing \rightarrow$ Acontecimento Impossível

$P(C) = 0$

Acontecimento União: Acontecimento união entre *A* e *B* é o acontecimento constituído por todos os resultados de *A* ou de *B*. Representa-se por $A \cup B$. Para que a união de dois acontecimentos se realize, basta que um deles se realize.

Acontecimento Interseção: Acontecimento interseção dos acontecimentos *A* e *B* é o acontecimento constituído pelos resultados que pertencem simultaneamente a *A* e *B*. Este acontecimento representa-se por $A \cap B$. Para que o acontecimento interseção de dois acontecimentos se realize é necessário que os dois acontecimentos se realizem em simultâneo.

Acontecimentos Incompatíveis ou Mutuamente Exclusivos: são acontecimentos que não têm resultados comuns. Quando dois acontecimentos são mutuamente exclusivos, a realização de um deles implica que o outro não se realiza.

A e B incompatíveis $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

Acontecimento Contrário: O acontecimento contrário do acontecimento *A* é o acontecimento constituído por todos os resultados de *S* que não pertencem a *A*. Este acontecimento representa-se por $\overline{A}$ ou A^c.

$$A \text{ e } B \text{ contrários} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap B = \varnothing \\ A \cup B = S \end{cases}$$

Liliana Pinho
Probabilidades
M.A.C.S.

Definição de Probabilidade

Definição frequencista de probabilidade: Define-se probabilidade (experimental ou frequencista) de um acontecimento A e representa-se por $P(A)$ como sendo o valor à volta do qual tende a estabilizar a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória.

Probabilidade de um acontecimento: A probabilidade de um acontecimento aleatório define-se como sendo a soma das probabilidades dos acontecimentos elementares que o compõem.

Regras de Probabilidade

Regra 1: Qualquer que seja o acontecimento *A*, tem-se que $P\left(A\right) \geq 0$.

Regra 2: A probabilidade do espaço dos resultados, *S*, é igual a 1.

Regra 3: Dados os acontecimentos *A* e *B*, incompatíveis, então a probabilidade de *A* ou de *B* se realizarem, $P(A \cup B)$, é igual à soma das probabilidades de *A* e de *B* se realizarem.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Propriedades das Probabilidades

Propriedade 1: A probabilidade do acontecimento impossível é igual a zero, $P(\emptyset) = 0$.

Propriedade 2: A probabilidade *P(A)* de qualquer acontecimento *A* é tal que $0 \leq P(A) \leq 1$. Esta propriedade é imediata tendo em conta que *A* é constituído por alguns resultados do espaço dos resultados e a soma das probabilidades de todos os resultados é igual a 1.

Propriedade 3: A probabilidade do acontecimento contrário de $A, \overline{A}$, é igual a $1 - P(A)$.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Propriedade 4: Dados dois acontecimentos *A* e *B*, a probabilidade de *A* ou *B* se realizarem, $P(A \cup B)$, é igual a soma das probabilidades de *A* e de *B* se realizarem menos a probabilidade de *A* e *B* se realizarem conjuntamente: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Note que quando se pede a probabilidade de os acontecimentos A ou B ocorrerem, significa que pode ocorrer qualquer um dos dois ou ambos os acontecimentos. Se pretendermos obter a probabilidade de A ou B ocorrerem sem que possam ocorrer os dois em simultâneo, então facilmente se verifica que $P(A \mid B \cup B \mid A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

Regra de Laplace

Pierre Simon Laplace (1749-1827) foi o primeiro que se conhece a enunciar a definição de probabilidade. Esta definição apenas pode ser corretamente aplicada quando os acontecimentos elementares são igualmente prováveis.

Regra de Laplace: Define-se probabilidade de acontecimento *A* associado a um espaço de resultados, *S*, com n resultados igualmente prováveis, sendo a razão entre o número *m* de resultados favoráveis a *A* (resultados que compõem *A*) e o número *n* de resultados possíveis (resultados que compõem *S*).

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Liliana Pinho
Probabilidades
M.A.C.S.

A regra de Laplace, utilizada para calcular o valor da probabilidade para um dado acontecimento apenas se pode aplicar no caso em que o conjunto dos resultados é um conjunto finito.

Probabilidade Condicionada

Partindo de dois acontecimentos *A* e *B*, sendo que *P(A)>0*. Representa-se por $P(B \mid A)$ a probabilidade da ocorrência de *B*, na hipótese de A já se ter realizado. Supor que se realizou *A* equivale a restringir o universo aos sucessos elementares de *A*. Assim, a probabilidade condicional $P(B \mid A)$ pode ser interpretada como uma probabilidade que tem subjacente um novo espaço amostral, *A*, subconjunto do espaço original.

Os sucessos elementares de B, tendo-se realizado A, correspondem aos sucessos $A \cap B$. Assim, somos conduzidos à definição

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0 .$$

Nota:

$P(A \cap B) = P(B) \times P(A \mid B), P(B) \neq 0$ e

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A), P(A) \neq 0$

Acontecimentos Independentes

Este é um dos conceitos mais importantes no estudo das probabilidades. Dois acontecimentos são independentes quando a realização de um deles não interfere na probabilidade de realização do outro.

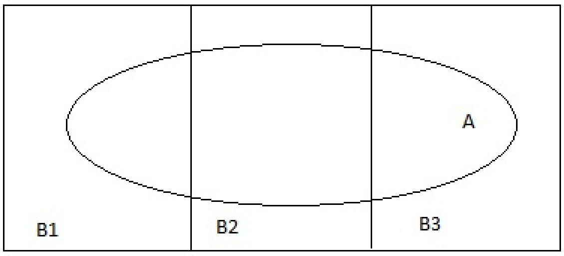
Acontecimentos Independentes: Dois acontecimentos são independentes se e só se $P(A \mid B) = P(A), P(B) \neq 0$.

É fácil deduzir que,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Logo pudemos reescrever a definição de acontecimentos independentes como sendo:

Acontecimentos Independentes: Dois acontecimentos são independentes se e só se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.



$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(A) = P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

10

Liliana Pinho
Probabilidades
M.A.C.S.

Teorema da Probabilidade Total

Teorema da Probabilidade Total: Se $B_1, B_2, \dots, B_k$ são uma família de acontecimentos que formam uma partição do espaço de resultados e *A* é um acontecimento qualquer, tem-se $P(A) = P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + \dots + P(B_k) \times P(A \mid B_k)$.

Regra de Bayes

Regra de Bayes: Se $B_1, B_2, \dots, B_k$ são uma família de acontecimentos que formam uma tal partição do espaço de resultados, *S*, e *A* é um acontecimento qualquer tal que *P(A)>0*, tem-se:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i) \times P(A \mid B_i)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + \dots + P(B_k) \times P(A \mid B_k)}$$

Para qualquer acontecimento B_i com $I = 1, 2, \dots, k$.

11

B.8. Plano de Aula de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

E. S. de D. Duarte
11ºC (M.A.C.S.)
Ano Letivo 2015/2016
90 minutos

Aula nº53: 4/Fevereiro/2016

Unidade Didática:

Probabilidades

Tema:

Métodos de contagem. Definição clássica de probabilidade.

Especificação do Tema:

Espaço dos resultados. Regra de Laplace.

Sumário:

- Propriedades das probabilidades;
- Resolução de exercícios com experiências compostas.

Material Didático:

- Caderno diário e material de escrita;
- Calculadora.

Objetivos da Aula:

Gerais:

- Usar corretamente linguagens das diferentes áreas do saber cultural, científico e tecnológico para se expressar;
- Usar corretamente a língua portuguesa para comunicar de forma adequada e para estruturar o pensamento lógico;
- Adotar estratégias adequadas à resolução de problemas e à tomada de decisões;
- Desenvolver o espírito de entre ajuda, respeito mútuo e colaboração;
- Compreender enunciados e textos.

Específicos:

- Compreender algumas das propriedades das probabilidades;
- Aplicação das propriedades a exercícios concretos;
- Praticar o cálculo de probabilidades de experiências compostas.

Metodologia:

Exposição das propriedades das probabilidades, seguidas de exercícios para aplicação das mesmas.

Liliana Pinho

Descrição da Aula:

Leitura do sumário da aula anterior. Síntese de algumas propriedades já conhecidas:

$P(\emptyset)=0, \quad P(\Omega)=1$

Recordar a definição de acontecimentos contrários e incompatíveis, assim como as leis de De Morgan.

Síntese das propriedades e regras das probabilidades.

Regras de Probabilidade:

Regra 1: Qualquer que seja o acontecimento *A*, tem-se que $P(A)\geq 0$.

Regra 2: A probabilidade do espaço dos resultados, *S*, é igual a 1.

Regra 3: Dados os acontecimentos *A* e *B*, incompatíveis, então a probabilidade de *A* ou de *B* se realizarem, $P(A\cup B)$, é igual à soma das probabilidades de *A* e de *B* se realizarem. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Propriedades das Probabilidades:

Propriedade 1: A probabilidade do acontecimento impossível é igual a zero, $P(\emptyset)=0$.

Propriedade 2: A probabilidade *P(A)* de qualquer acontecimento *A* é tal que $0\leq P(A)\leq 1$. Esta propriedade é imediata tendo em conta que *A* é constituído por alguns resultados do espaço dos resultados e a soma das probabilidades de todos os resultados é igual a 1.

Propriedade 3: A probabilidade do acontecimento contrário de $A, \overline{A}$, é igual a $1-P(A)$.

$P(\overline{A})=1-P(A)$

Propriedade 4: Dados dois acontecimentos *A* e *B*, a probabilidade de *A* ou *B* se realizarem, $P(A\cup B)$, é igual a soma das probabilidades de *A* e de *B* se realizarem menos a probabilidade de *A* e *B* se realizarem conjuntamente: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Resolução de exercícios:

Exercício 1: Seja *S* um conjunto de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória. Sejam *A* e *B* dois acontecimentos (*A* e *B* são, portanto, subconjuntos de *S*). Sabe-se que:

$P(A)=2P(B)$

$P(A\cup B)=3P(B)$ (em que *P* designa probabilidade).

Prove que os acontecimentos *A* e *B* são incompatíveis.

Exercício 2: Seja *S* o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam *A* e *B* dois acontecimentos (*A* e *B* são, portanto, subconjuntos de *S*). Prove que

$P(A)+P(B)+P(\overline{A}\cap\overline{B})=1+P(A\cap B)$

(*P* designa probabilidade e $\overline{A}$ e $\overline{B}$ designam os acontecimentos contrários de *A* e de *B*).

Exercício 3: Numa caixa há 30 chocolates embrulhados em prata vermelha e 15 chocolates em prata branca.

3.1 Retira-se, ao acaso um chocolate da caixa. Determine, sob a forma de fração irredutível, a probabilidade do chocolate estar embrulhado em prata vermelha.

3.2 Se tirarmos ao acaso dois chocolates da caixa, qual é a probabilidade dos chocolates estarem embrulhados em pratas de cores diferentes? Apresente o resultado sob a forma de fração irredutível.

Exercício 4: Uma Senhora tem três blusas (uma azul, uma verde, e uma branca), duas saias (uma azul e uma verde) e dois casacos (um azul e outro verde). Admita que a senhora escolhe ao acaso, para se vestir, uma blusa, uma saia e um casaco. Qual a probabilidade de a Senhora ficar vestida:

4.1 Toda de azul?

4.2 Toda de uma só cor?

Exercício 5: Considere duas caixas, uma em que existem duas bolas brancas e três bolas vermelhas, e outra em que existem quatro bolas brancas e duas bolas vermelhas. Escolhe-se, ao acaso, uma das caixas e retira-se também ao acaso uma bola.

5.1 Qual a probabilidade de:

a) Ser escolhida a caixa I?

b) Se retirar uma bola vermelha, sabendo que se escolheu a caixa II?

c) Se retirar uma bola branca e ter-se escolhido a caixa I?

d) A bola a retirar ser branca?

Exercício 6: Num jogo, dispomos de três caixas aparentemente idênticas. As caixas contêm respetivamente um, dois e três papéis. Em todas as caixas existe um papel azul, os restantes, quando existem, são brancos. Este jogo consiste em escolher, ao acaso, uma caixa e tirar, igualmente ao acaso, um papel dessa caixa. Qual a probabilidade de o papel retirado ser azul?

3

Liliana Pinho

B.9. Ficha de Avaliação de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

Escola Secundária de D. Duarte

5º Teste de Avaliação – 11º Ano – MACS

24 de maio de 2016

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não for pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente, sempre que recorrer:

- às potencialidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos ou mínimos);
- a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- a estatísticas obtidas na calculadora (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

Formulário

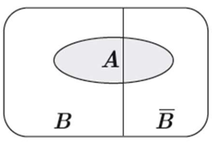
Modelos de Grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

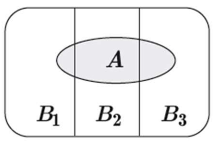
Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Tst 05 Pág. 1

Intervalos de Confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

Fórmula para determinação da prestação constante para amortização de um empréstimo		
$a = C \times \dfrac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$	$a =$	Mensalidade a pagar
	$C =$	Capital total a pagar
	$i =$	Taxa de juro mensal
	$n =$	Número de meses

O Luís é o irmão do meio de uma família com três filhos: ele próprio, o seu irmão mais velho, o Honorato, e a irmã mais nova, a Ritinha. Vivem com os pais em Amarante, localidade onde o pai do Luís trabalha como vendedor de máquinas agrícolas numa conceituada firma do ramo, com sede naquela cidade e filiais em Braga, Lamego, Porto e Viseu.

1. O pai do Luís necessita visitar as quatro filiais. A viagem iniciar-se-á e terminará em Amarante, não importando a ordem pela qual as filiais são visitadas, pois a partir de cada uma delas é possível ir diretamente para qualquer uma das outras.
Na tabela estão indicadas as distâncias, em quilómetros, entre as cidades referidas.

	Braga	Porto	Lamego	Viseu
Amarante	74	61	71	107
Braga	___	70	117	130
Porto	___	___	106	75
Lamego	___	___	___	62

O Luís pretende aplicar uma das opções seguintes para determinar um percurso com início e fim em Amarante e no qual nenhuma cidade seja repetida.

Opção 1
Passo 1: ordenam-se as distâncias entre cada par de cidades por ordem crescente, indicando-se, para cada valor, o par de cidades que lhe corresponde. Passo 2: selecionam-se, sucessivamente, as distâncias menores, tendo em conta que: • uma cidade nunca poderá aparecer três vezes; • nunca se fecha um circuito enquanto houver cidades por visitar. Passo 3: ordena-se a solução de acordo com a cidade de partida (Amarante).

Opção 2
Passo 1: define-se a cidade de Amarante como ponto de partida. Passo 2: seleciona-se a cidade mais próxima, tendo em conta que, se houver duas cidades à mesma distância, a seleção é aleatória. Passo 3 e seguintes: procede-se como foi indicado no passo anterior, não se repetindo nenhuma cidade, e regressando-se ao ponto de partida depois de visitadas todas as cidades.

O Luís considera que a opção 1 dá um percurso cujo número total de quilómetros é inferior ao dado pela opção 2.
Verifique se o Luís tem, ou não, razão.
Na sua resposta, deve:

- Apresentar um grafo ponderado que represente a situação;
- Aplicar cada uma das opções;
- Indicar o número total de quilómetros percorridos em cada uma das duas opções;
- Apresentar uma conclusão.

2. O Luís tem família em duas das freguesias do concelho de Amarante, Lufrei e Mancelos.

   Admita que a partir do dia 1 de janeiro de 2000, o número de habitantes da freguesia de Lufrei é dado por

$$L(t) = 1800 \times e^{0,05t} \quad (t \geq 0)$$

   e o número de habitantes da freguesia Mancelos por

$$M(t) = 2000 + 1000.\ln(2t+5) \quad (t \geq 0).$$

   Considere que $t = 0$ corresponde ao dia 1 de janeiro de 2000, para os dois modelos, e que t é expresso em anos.

   2.1. Calcule a diferença entre o número de habitantes nas duas freguesias, de acordo com os modelos apresentados, no dia 1 de janeiro de 2016.

   2.2. Determine o ano e mês em que o número de habitantes de Lufrei duplicou, relativamente à população existente em 1 de janeiro de 2000.

   Caso opte pela resolução analítica desta questão e proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

   2.3. Determine, recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora, quantos anos terão de decorrer (após 1 de janeiro de 2000) para que o número de habitantes de Lufrei ultrapasse o de Mancelos.

   Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

3. Na escola secundária que o Luís frequenta, verificou-se que 60% dos alunos de MACS são raparigas. Das raparigas, 25% são loiras, 50% têm cabelo castanho e as restantes têm cabelo preto. Dos rapazes 12,5% têm cabelo loiro, 50% têm cabelo castanho e os restantes têm cabelo preto. Escolheu-se, ao acaso, uma pessoa, de entre os alunos e as alunas de MACS, da Escola Secundária de Amarante.

   3.1. Calcule a probabilidade de a pessoa escolhida não ter o cabelo loiro.

   3.2. Calcule a probabilidade de a pessoa escolhida, na população indicada, ser rapaz, sabendo-se que tem cabelo castanho.

4. O Honorato frequenta uma sala de jogo *online* em que se joga xadrez. A entrada de um jogador na sala é condicionada pelo gestor do *site*, com probabilidade fixa igual a 0,8 em cada tentativa de entrada na sala de jogo. Com base neste número, calcule:

   4.1. O valor exato da probabilidade de um candidato conseguir entrar na sala de jogo apenas à terceira tentativa.

   4.2. Num dia em que o Honorato efetuou 4 tentativas para entrar na sala de jogo, ter tido sucesso em exatamente 3 delas.

Tst 05 Pág. 4

5. Em Amarante foram disputados os campeonatos regionais de salto em altura.
   Seja X a variável aleatória que representa a distribuição das alturas, em metros, atingidas no salto em altura pelos participantes masculinos da prova.

   A partir dos dados relativos a 35 dos saltos efetuados, selecionados aleatoriamente, obteve-se uma média $\bar{x} = 1{,}6$ e um desvio padrão $s = 0{,}12$.

   5.1. Construa um intervalo de confiança de 99% para o valor médio μ da totalidade dos saltos realizados.
   Apresente os extremos do intervalo com arredondamento às centésimas.
   Se em cálculos intermédios proceder a arredondamentos conserve, no mínimo, 4 casas decimais.

   5.2. Determine o número de observações necessárias (dimensão da amostra) para que, com um nível de confiança de 95%, a margem de erro seja inferior a 0,03.

   5.3. De entre os atletas que participaram nos campeonatos, selecionaram-se 40 e concluiu-se que 24 eram do sexo feminino.
   Com um nível de confiança de 90%, estime o número máximo de atletas do sexo feminino presentes no evento, sabendo que participaram na competição, no total, 674 atletas.

   Sugestão: comece por construir um intervalo de confiança de 90% para a proporção de atletas do sexo feminino que participaram no evento (extremos do intervalo arredondados às centésimas).

6. O pai do Luís decidiu comprar móveis para o quarto da Ritinha, no valor de 3000 €, IVA incluído.

   6.1. Sabendo que o valor dos móveis inclui IVA à taxa de 23%, calcule o montante total de IVA.

   6.2. Para aquisição dos móveis, decidiu fazer um crédito ao consumo no valor de 2500 €. Consultou dois bancos, o Banco Geral de Lufrei (BGL), e o Banco Internacional de Mancelos (BIM).
   No BGL o prazo de pagamento seria de quatro anos; no início de cada um dos quatro anos seriam pagos 8% do valor do crédito inicial e no final dos quatro anos far-se-ia o pagamento do montante total do empréstimo.
   No BIM foram-lhe apresentadas as seguintes condições:
   - Reembolso através de prestações mensais constantes de capital e juro (ver formulário);
   - Prazo de reembolso: 3 anos;
   - Taxa de juro líquida: 12% ao ano.

   Em qual das instituições bancárias o pai do Luís gasta menos dinheiro?

Cotações

Questões	1	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	4.1	4.2	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	Total
Cotações	24	15	20	15	10	14	10	14	12	20	14	12	20	200

B.10. Critérios de Correção de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Escola Secundária de D. Duarte

Ficha Individual n.º 5 – 11º C – MACS – Critérios de Correcção

24 de maio de 2016

Cotações

1. ---24

2. ---50
   - 2.1. --- 15
   - 2.2. --- 20
   - 2.3. --- 15

3. ---24
   - 3.1. --- 10
   - 3.2. --- 14

4. ---24
   - 4.1. --- 10
   - 4.2. --- 14

5. ---46
   - 5.1. --- 12
   - 5.2. --- 20
   - 5.3. --- 14

6. ---32
   - 6.1. --- 12
   - 6.2. --- 20

TOTAL: --200 Pontos

Tst05 – CC

Pág. 1

Critérios específicos de classificação

1. -- 24

Apresenta o grafo ponderado -- 2
Ordena corretamente as dez arestas -- 2
Seleciona corretamente os primeiros quatro caminhos (A-P; L-V; B-P; L-A)-------------- 4
Seleciona corretamente a última aresta (B-V) -- 2
Calcula devidamente o total de km (371) --- 2
Seleciona as cinco arestas com menor distância --- 8
Calcula o total de km (417) --- 2
Apresenta a conclusão--- 2

2. -- 50

2.1. --15

Calcular *M(16)*---5
Calcular L(16)--5
Calcular a diferença entre os dois valores --5

2.2. --20

Apresenta o gráfico *L(t)* no domínio correto ---3
Calcula *L(0)* --2
Calcula o dobro de *L(0)* (3600)--2
Apresenta a reta *y=3600*--6
Apresenta o ponto de interseção corretamente identificado --------------------------4
Converte a abcissa do ponto em anos e meses--3
Apresenta a resposta (Novembro de 2013) --3

2.3. --15

Apresenta o gráfico *L(t)* no domínio correto ---4
Apresenta o gráfico *M(t)* no domínio correto --4
Apresenta o ponto de interseção corretamente identificado --------------------------4
Apresenta a resposta (24 meses) ---3

3. -- 24

3.1. --10

Identificar o pedido, $P(\bar{L})$--2
$P(\bar{L}) = 1 - P(L)$ ---3
Calcular $P(L) = 0.2$--2
Concluir $P(\bar{L}) = 0.8$ ---3

3.2. --14

Identificar o pedido $P(M|C)$---4
Escrever $P(M|C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)}$--3
Identificar $P(M \cap C) = 0.2$---2
Identificar $P(C) = 0.5$---2
Calcular $P(M|C) = 0.4$---3

Tst05 – CC Pág. 2

4. -- 24

4.1. -- 10

Identificar o pedido, P({($\bar{E}, \bar{E}, E$)}) -- 3
Indicar $P(E) = 0.8$ -- 1
Calcular $P(\bar{E}) = 0.2$ -- 2
Concluir P({($\bar{E}, \bar{E}, E$)})= $0.2^2 \times 0.8 = 0.032$ -- 4

4.2. -- 14

Identificar o pedido, P({($E, E, E, \bar{E}$),($E, E, \bar{E}, E$), ($E, \bar{E}, E, E$),($\bar{E}, E, E, E$)}) -- 4
Indicar $P = 4 \times P(E)^3 \times P(\bar{E})$ -- 4
Indicar $P(E) = 0.8$ -- 1
Calcular $P(\bar{E}) = 0.2$ -- 2
Calcular $P = 0.4096$ -- 3

5. -- 46

5.1. -- 12

Identificar que o pedido é $\left]\bar{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$ -- 2
Indicar que $\bar{x} = 1.6$ -- 2
Indicar que para uma confiança de 99% $z = 2.576$ -- 2
Indicar que $s = 0.12$ -- 2
Indicar que $n = 35$ -- 2
Calcular o intervalo]1.55; 1.65[-- 2

5.2. -- 20

$E = z \times \frac{s}{\sqrt{n}}$ -- 3
Indicar que para uma confiança de 95% $z = 1.960$ -- 1
Indicar que $s = 0.12$ -- 2
Substituir $0.1 = 1.960 \times \frac{0.12}{\sqrt{n}}$ -- 6
Calcular $n = 5.5$ -- 6
Concluir $n =$ -- 2

5.3. -- 14

Identificar o pedido $\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$ -- 2
Indicar que para uma confiança de 90% $z = 1.645$ -- 2
Calcular $\hat{p} = 0.6$ -- 3
Substituir $\left]0.6 - 1.645\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{40}}; 0.6 + 1.645\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{40}}\right[$ -- 2
Obter]0.47; 0.73[-- 2
Concluir] [-- 3

Tst05 – CC Pág. 3

6. -- 32

6.1. -- 12

Calcular $V = \frac{3000}{1.23} = 2439.02$-- 5

$IVA = 3000 - 239.02 = 560.98$-- 5

Concluir--- 2

6.2. -- 20

Calcular 8% do total em empréstimo (200€)-- 3

Calcular o total em pagamento no BGL (2500€+800€=3300€) ------------------------ 3

Indicar o pedido no BIM ($a = C \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$) -- 2

Calcular $i = 0.01$--- 2

Calcular $n = 36$ --- 2

Calcular a=83.04€-- 3

Calcular o total a pagar pelo empréstimo no BIM (2989.29€) ------------------------ 3

Concluir--- 2

TOTAL: --200 Pontos

Apêndice C

Anexos - Animação Sociocultural

C.1. Prova de Recuperação de Animação Sociocultural

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

Escola Secundária de D. Duarte
Curso Profissional de Animador Sociocultural – 1º ASC/RFA
Ano Letivo: 2015/2016
Matemática
Módulo 2: A7 – Probabilidade

PROVA DE RECUPERAÇÃO– MÓDULO A7 –15/03/2016

Nome: ____ N.º _____

Classificação: ____

Rubrica do Professor: ____________________

Primeira Parte

Para cada uma das quatro questões da primeira parte, selecione a resposta correta de entre as alternativas que lhe são apresentadas. Se a resposta for ambígua ou apresentar mais que uma resposta, a questão será anulada. Cada resposta certa é cotada com 10 pontos. Uma questão não respondida ou anulada é cotada com 0 pontos.

1. Uma turma é constituída por 3 indivíduos do sexo masculino e 9 do sexo feminino. Ao selecionar aleatoriamente um dos alunos, qual a probabilidade de ser uma rapariga?

   (A) $0,75$ **(B)** $0,333$ **(C)** $0,667$ **(D)** $0,25$

2. Uma urna contém nove bolas indistinguíveis ao tato, sete brancas e duas verdes.
   Tirou-se uma bola da urna e verificou-se que era verde.
   Essa bola **não foi reposta** na urna.
   Tirando, ao acaso, outra bola da urna, a probabilidade de ser branca é

   (A) $0,778$ **(B)** $0,875$ **(C)** $0,222$ **(D)** $0,25$

3. A tabela de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X é:
   Qual a probabilidade de a variável tomar um valor maior que 1?

x_i	1	2	3	4
$P(X =$	**0,3**	***a***	***a***	**0,5**

   (A) $0,3$ **(B)** $0,2$ **(C)** $0,5$ **(D)** $0,7$

4. Admita que a variável peso, em quilogramas, dos rapazes de 15 anos, de uma certa escola, segue uma distribuição normal, de valor médio 60.
   Escolhe-se, ao acaso, um rapaz de 15 anos dessa escola. Relativamente a esse rapaz, qual dos seguintes acontecimentos tem maior probabilidade ocorrer?

   (A) O seu peso é inferior a 55 kg. **(B)** O seu peso é superior a 65 kg.
   (C) O seu peso é inferior a 63 kg. **(D)** O seu peso é superior a 58 kg.

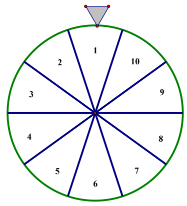
1 | O Formador:
Paulo Carvalho

Cofinanciado por:
POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

Segunda Parte

Em todas as questões propostas, deve indicar todos os cálculos efetuados e apresentar todas as justificações que entender necessárias

1. Considere a experiência aleatória que consiste em rodar uma roleta com 10 setores de igual amplitude, **numerados de um a dez**, e <u>registo da pontuação do setor selecionado</u>.



   1.1. Indique o espaço de resultados.

   $\Omega =$

   1.2. Considere os acontecimentos:

   A: "sair número primo"; $C = \quad 7;9 \quad ;$

   B: "sair um quadrado perfeito"; $D = \quad 9 \quad .$

   Represente, sob a forma de conjunto, cada um dos acontecimentos seguintes:

   1.2.1. $A =$

   1.2.2. $B =$

   1.2.3. $C \cap \quad =$

   1.2.4. $C \cup \quad =$

   1.2.5. $D - \quad =$

   1.2.6. $\overline{D} =$

   1.3. Represente, sob a forma de conjunto, um acontecimento composto ***E***, que seja incompatível, mas não contrário, com o acontecimento *C*.

   $E =$

   1.4. Relativamente à experiência aleatória descrita, indique, **sem utilizar qualquer dos acontecimentos referidos em 1.2**, um acontecimento:

   Impossível ______________________________

   Elementar ______________________________

   Certo ______________________________

2. Durante um torneio de xadrez, todos os jogadores disputaram duas partidas. As regras estabelecidas pela organização decretam que em cada partida pode ocorrer vitória (V), empate (E) e derrota (D). Cada jogador, em cada partida, tem igual probabilidade de vencer, perder ou empatar.

   2.1. Defina o espaço amostral desta experiência aleatória.

   $\Omega =$

2

2.2. Determine, sob a forma de dízima, as seguintes probabilidades (quando necessário efetuar arredondamentos, mantenha 3 casas decimais):
(Este espaço foi deixado propositadamente livre, para poder elaborar um esquema que o auxilie no cálculo das probabilidades pedidas)

2.2.1. P (o jogador vencer a primeira partida) =

2.2.2. P (vencer a primeira partida e perder a segunda) =

2.2.3. P (empatar as duas partidas) =

2.2.4. P (ter o mesmo resultado nas duas partidas, sabendo que a perdeu a primeira) =

3. A Margarida e o Miguel são um jovem casal que pensa vir a ter três filhos. Considere a experiência aleatória, X, que consiste no registo do número de filhos do sexo masculino que o casal pode vir a ter. Considere que há igual probabilidade de o filho ser do sexo masculino ou feminino.
Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X. Apresente as probabilidades na forma de fração irredutível.

x_i				
$P(X =$				

4. Perguntou-se a um grupo de pessoas se gostavam ou não de café. Obtiveram-se os seguintes dados:

	Gosta de café	Não gosta de café
Homens	170	130
Mulheres	180	120

Escolhido ao acaso um dos inquiridos, determine, sob a forma de percentagem com arredondamento às unidades, a probabilidade de:

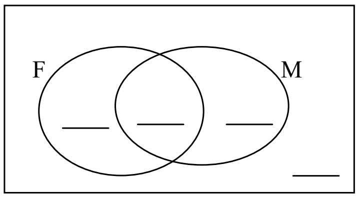
4.1. Ser do sexo feminino

4.2. Ser do sexo feminino e ter gostar de café

4.3. Gostar de café, sabendo que é do sexo masculino

4.4. Ser do sexo feminino, sabendo que não gosta de café

5. Dos 37 alunos do 12º ano, 18 estão matriculados na disciplina de Física (F), 20 na de Matemática (M) e 10 não estão matriculados em qualquer daquelas disciplinas.



5.1. Complete o diagrama de Venn, de forma a ilustrar a situação descrita.

5.2. Escolhendo um dos alunos ao acaso, determine, na forma de percentagem com arredondamento às unidades, as seguintes probabilidades:

5.2.1. Não estar matriculado em Matemática nem em Física.

5.2.2. Ele estar matriculado em Matemática, sabendo que não está matriculado em Física.

6. Um grupo de 5 amigos foi ao cinema, e compraram bilhetes para a mesma fila em lugares consecutivos. De quantos maneiras diferentes se podem sentar?

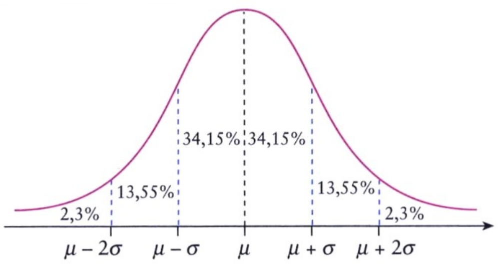
7. Numa escola, a variável aleatória X: "peso, em quilogramas, das raparigas" segue uma distribuição aproximadamente normal de média 42 e desvio padrão 3.

   7.1. Indique a percentagem de raparigas da escola que têm:

      7.1.1. Um peso inferior a 39 *kg*.

      7.1.2. Entre 36 e 42 *kg* de peso.

   7.2. Sabendo que frequentam a escola 429 raparigas, quantas é de esperar que pesem mais de 45 *kg*?



FIM

Cotações – Grupo II

Questão	1.1	1.2.1	1.2.2	1.2.3	1.2.4	1.2.5	1.2.6	1.3	1.4	2.1	2.2.1	2.2.2	2.2.3	
Cotação	6	3	3	4	4	4	3	8	6	8	4	5	5	
Questão	2.2.4	3	4.1	4.2	4.3	4.4	5.1	5.2.1	5.2.2	6	7.1.1	7.1.2	7.2	**Total**
Cotação	5	15	3	4	6	6	12	4	6	8	8	8	12	**160**

C.2. Prova sobre o Tangram Chinês

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

Escola Secundária de D. Duarte
Curso Profissional de Animador Sociocultural – 1º ASC/RFA
Ano Letivo: 2015/2016
Matemática
Módulo 3: B5– Jogos e Matemática

TRABALHO INDIVIDUAL – TANGRAM

Nome: ____ N.º _____

Classificação: ______________________________________

Rubrica do Professor: ____________________

Primeira Parte

Para cada uma das quatro questões da primeira parte, selecione a resposta correta de entre as alternativas que lhe são apresentadas. Se a resposta for ambígua ou apresentar mais que uma resposta, a questão será anulada. Cada resposta certa é cotada com 5 pontos. Uma questão não respondida ou anulada é cotada com 0 pontos.

1. Quantas peças constituem o Tangram Chinês?

   (A) 5
   (B) 6
   (C) 7
   (D) 8

2. Segundo o perito americano, Samuel Loyd quem criou o tangram?

   (A) O deus Tan.
   (B) Um homem chamado Tan quando tentava reunir as peças de um azulejo.
   (C) O imperador Tang.
   (D) Um artista enviado pelo imperador para retratar as coisas mais belas que encontrasse.

1 O Formador:

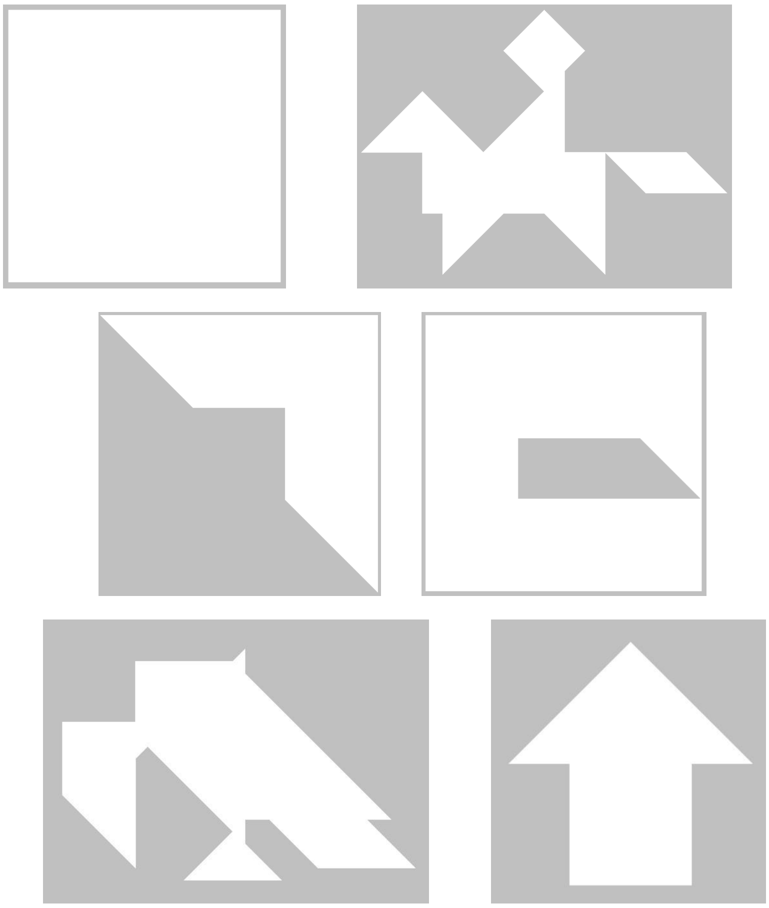
Paulo Carvalho

Cofinanciado por: POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

Segunda Parte

Em todas as figuras propostas, deve indicar todas as peças na posição que as constituem. Cada imagem corretamente construída será cotada com 15 pontos.

Forme, utilizando as **sete** peças do tangram, sem as sobrepor, cada uma das seguintes figuras:



Cofinanciado por:

C.3. Desafios Lógicos, Geométricos e Numéricos

Oeste Coimbra Agrupamento de Escolas

Escola Secundária de D. Duarte
Curso Profissional de Animador Sociocultural – 1º ASC/RFA
Ano Letivo: 2015/2016
Matemática
Módulo 3: B5– Jogos e Matemática

DESAFIOS

1. Ao medir a cintura da Marta com uma fita métrica, Dona Célia observou que as marcas de 23 *cm* e 77 *cm* ficaram sobrepostas, como na figura. Qual é a medida da cintura da Marta?

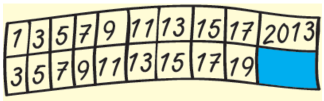
(A) 23 *cm* (B) 50 *cm* (C) 54 *cm* (D) 77 *cm* (E) 100 *cm*

2. O Joãozinho subtraiu o menor número de três algarismos diferentes do maior número de três algarismos diferentes. Que resultado obteve?

(A) 882 (B) 883 (C) 885 (D) 886 (E) 888

3. O Caetano fez cinco cartões, cada um com uma letra na frente e um número atrás. As letras formam a palavra POBRE e os números 1, 2, 3, 4 e 5. Observe a figura e responda: qual é o número atrás do cartão com a letra R?

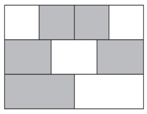
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5



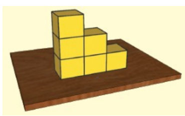
4. Na tabela há um número escondido na casa azul e a soma dos números da primeira linha é igual à soma dos números da segunda linha. Qual é o número escondido?

(A) 1995 (B) 1997 (C) 1999 (D) 2001 (E) 2005

5. A figura representa um retângulo de área 36 m^2, dividido em três faixas da mesma largura. Cada uma das faixas está dividida em partes iguais: uma em quatro partes, outra em três e a terceira em duas. Qual é a área total das partes sombreadas?



(A) 18 m^2 (B) 20 m^2 (C) 22 m^2 (D) 24 m^2 (E) 26 m^2



6. A Elisa empilhou seis dados em uma mesa, como na ilustração, e depois anotou a soma dos números de todas as faces que consegue ver quando dá uma volta em redor da mesa. As faces de cada dado são numeradas de 1 a 6 e a soma dos números de duas faces opostas é sempre 7. Qual é a maior soma que Elisa pode obter?

(A) 89 (B) 95 (C) 97 (D) 100 (E) 108

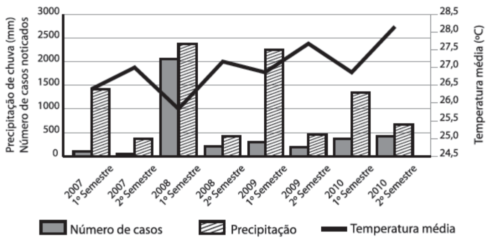
7. Quantos sinais de adição foram utilizados na expressão

$$2 + 0 + 1 + 3 + 2 + 0 + 1 + 3 + 2 + 0 + 1 + 3 + \ldots + 2 + 0 + 1 = 2013?$$

(A) 503 (B) 1342 (C) 2012 (D) 2013 (E) 2016

Cofinanciado por: POCH PORTUGAL 2020 UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

8. O gráfico mostra o número de casos notificados de dengue, a precipitação de chuva e a temperatura média, por semestre, dos anos de 2007 a 2010 numa cidade brasileira. Podemos afirmar que:

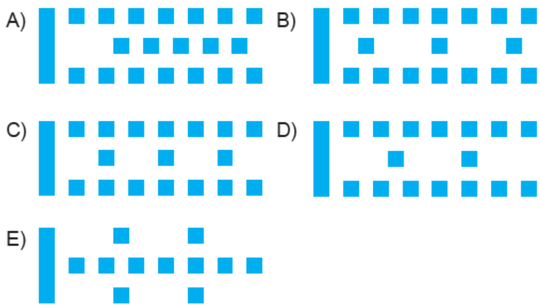


(A) O período de maior precipitação foi o de maior temperatura média e com o maior número de casos de dengue notificados.
(B) O período com menor número de casos de dengue notificados também foi o de maior temperatura média.
(C) O período de maior temperatura média foi também o de maior precipitação.
(D) O período de maior precipitação não foi o de maior temperatura média e teve o maior número de casos de dengue notificados.
(E) Quanto maior a precipitação em um período, maior o número de casos de dengue notificados.

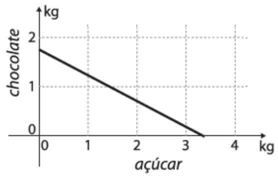
9. Durante a aula, dois telemóveis tocaram ao mesmo tempo. A professora, de imediato, perguntou aos alunos: “De quem são os telemóveis que tocaram?” Gustavo disse: “O meu não tocou”, Carlos disse: “O meu tocou” e Bernardo disse: “O do Gustavo não tocou”. Sabe-se que um dos meninos disse a verdade e os outros dois mentiram. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) O telemóvel do Carlos tocou e o do Gustavo não tocou.
(B) O Bernardo mentiu.
(C) Os telemóveis do Gustavo e do Carlos não tocaram.
(D) O Carlos mentiu.
(E) O Gustavo falou verdade.

10. O Gabriel passou com seu triciclo sobre uma faixa de tinta fresca pintada no chão. O diâmetro da roda dianteira do triciclo é 50 *cm* e o das rodas traseiras é 20 *cm*. Qual das alternativas a seguir melhor representa as marcas deixadas no chão após a passagem do triciclo?

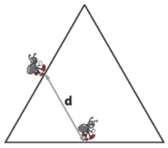


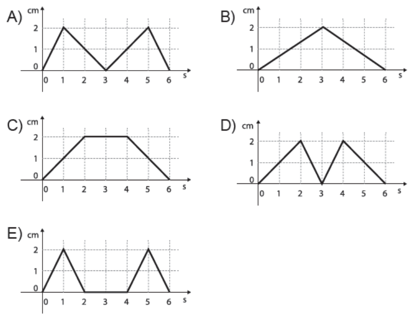
11. A Lara gastou 5,00 € para comprar açúcar e chocolate. A relação entre as quantidades desses ingredientes que podem ser compradas com essa quantia é dada pelo gráfico. Qual das seguintes afirmações é verdadeira, independentemente das quantidades compradas?



(A) A Lara comprou mais açúcar do que chocolate.
(B) A Lara comprou quantidades diferentes de açúcar e de chocolate.
(C) A Lara gastou mais em chocolate do que em açúcar.
(D) A Lara comprou duas vezes mais chocolate do que de açúcar.
(E) O preço de um quilo de chocolate é maior que o preço de um quilo de açúcar.

12. Duas formiguinhas partiram ao mesmo tempo e em direções diferentes de um mesmo vértice de um triângulo equilátero de lado 2 *cm*. Elas andaram sobre os lados do triângulo à velocidade de 1 *cm/s*, até retornar ao vértice inicial. Qual dos gráficos abaixo descreve a distância *d* entre as duas formiguinhas em função do tempo?





Questões adaptadas de OBMEP 2013.

Equipa N.º _____

Nome: ________________________________ **N.º** _____

Nome: ________________________________ **N.º** _____

Nome: ________________________________ **N.º** _____

Pontuação: _______ **/200**

Rubrica do Professor: ____________________

Apêndice D

Adoção de Manuais

D.1. Ata do Departamento Curricular de Matemática e Informática

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

DEPARTAMENTO CURRICULAR DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

ATA Nº 19

Aos dezoito dias do mês de maio de dois mil e dezasseis, pelas 17 horas e 15 minutos, reuniu, na sala 12 da Escola Secundária D. Duarte, o Departamento Curricular de Matemática e Informática do Agrupamento de Escolas Coimbra Oeste (AECO), sob a presidência do respetivo Coordenador, Paulo Carvalho, com a seguinte Ordem de Trabalhos: --

----

1 – Informações; ---

2 – Adoção dos manuais da disciplina de Matemática, 5º ano de escolaridade; -------------------------

3 – Adoção dos manuais das disciplinas de Matemática A e MACS, 11º ano de escolaridade. --------

----

1 – Informações ---

Foram transmitidas as seguintes informações relativas à reunião do Conselho Pedagógico de 20 de abril de 2016: ---

a) Realizou-se, em 13/04/2016, o "Encontro Regional de Educação" que incluiu, na parte da tarde, uma reunião sobre exames. Ressalta a intenção de implementar um programa de formação contínua para a promoção do sucesso escolar e de dotar, por recurso a fundos comunitários, as escolas de meios facilitadores de tal objetivo; ------------------------------------

b) Foi divulgado um conjunto de projetos da iniciativa da DGE; o coordenador de departamento solicitou, à coordenadora da área disciplinar de informática, o envio aos elementos da sua área disciplinar do documento que elenca alguns daqueles projetos; -----

c) Realizou-se uma reunião para definição inicial da rede para o próximo ano letivo, sendo de prever, para o ano letivo 2016-17, a constituição das seguintes turmas: ------------------------

   i. EPE – 9 grupos; --

   ii. 1º CEB – 34 turmas; --

   iii. 5º ano – 2 turmas na EB2,3 de Taveiro e 3 turmas na EB2,3 Inês de Castro, sendo uma do ensino articulado; --

   iv. 6º ano – 1 turma na EB2,3 de Taveiro e 3 turmas na EB2,3 Inês de Castro, sendo uma do ensino articulado; --

   v. 7º ano – 2 turmas na EB2,3 de Taveiro, 3 turmas na EB2,3 Inês de Castro, sendo uma do ensino articulado, e 1 turma na ES D. Duarte; ------------------------------------

   vi. 8º ano – 2 turmas na EB2,3 de Taveiro e 3 turmas na EB2,3 Inês de Castro, sendo uma do ensino articulado; --

   vii. 9º ano – 2 turmas na EB2,3 de Taveiro, 3 turmas na EB2,3 Inês de Castro, sendo uma mista e outra PCA, e 1 turma na ES D. Duarte; --

Página 1 de 4

viii. 10º ano – 3 turmas (2 Ciências e Tecnologia (CT) e 1 de Línguas e Humanidades (LH)); --
ix. 11º ano – 3 turmas (2 CT e 1 LH); --
x. 12º ano – 3 turmas (2 CT e 1 LH); --
xi. Cursos Profissionais – 12 turmas (4 do 1º ano, 4 do 2º ano e 4 do 3º ano).------------

d) Está já definida a constituição dos secretariados de exames/provas finais, a saber: EB 2,3 de Taveiro - Isabel Araújo, Fernando Oliveira e Alcina Pires; EB 2,3 Inês de Castro - Maria João Gomes, Teresa Loja e José Avelino Pereira; ES D. Duarte (Cursos Científico-Humanísticos) - António Carecho, Amélia Barrocas, Luís Bonito, Antónia Marina Santos, Manuel Tavares e Eduarda Carvalho; ES D. Duarte (Cursos Profissionais) - Graça Sousa, Paulo Carvalho e Maria José Pires. ---
e) Foi decidida a realização de provas de aferição nos 2.º, 5.º e 8.º anos de escolaridade; estas provas, a nível nacional, serão objeto de correção nos agrupamentos de exames, não existindo a afixação de pautas, mas a elaboração de 2 relatórios: Relatório individual da prova de aferição (RIPA) e Relatório de Escola da prova de aferição (REPA). --------------------
f) Foram indicados os nomes das professoras Vanda Pereira e Esmeralda Gomes para integrarem uma equipa encarregue da eventual revisão dos descritores para a classificação qualitativa do aproveitamento e do comportamento das turmas do Ensino secundário. ----
g) Recorda-se o interesse em fazer chegar ao Jornal AECO informação relativa a atividades desenvolvidas; realça-se o dinamismo do jornal em contraste com o estaticismo da página do agrupamento. ---
h) Aprovadas as Informações-Prova Final a Nível de Escola. --
i) Aprovadas as Informações-Exame a Nível de Escola. ---
j) Aprovadas as Informações-Prova de Equivalência à Frequência de disciplinas terminais não sujeitas a Prova Final/Exame Nacional. ---

----

Foram ainda transmitidas as seguintes informações adicionais: --

k) Já foi divulgada a Informação-Prova relativa às provas de aferição dos 2º, 5º e 8º anos de escolaridade, ano de 2016 (mail 117/15_16);
l) Foi recebida informação relativa à utilização de calculadoras gráficas no Ensino Secundário: Exames finais nacionais de Física e Química A, de Matemática A, Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais 2015-2016;--
m) Foi publicado o "Guia para a realização das Provas de Aferição – 2016" (mail 121/15_16) cuja leitura atenta se recomenda a todos os envolvidos.---

----

----

2 – Adoção dos manuais da disciplina de Matemática, 5º ano de escolaridade--------------------------

Relativamente aos manuais de Matemática para o 5º ano de escolaridade, foram auscultados os fundamentos que conduziram à apresentação, por parte da equipa que analisou os 9 projetos certificados à luz dos critérios enunciados na Circular nº. S-DGE/2016/1421 (DSDC/DMDDE), da proposta de adoção que recaiu sobre um dos projetos da Areal Editores, SA. ----------------------------

A proposta foi ratificada por unanimidade, pelo que foi decidido propor ao Conselho Pedagógico a adoção, para a disciplina de Matemática, 5º ano de escolaridade, o seguinte manual:-----------------

----

Matemática - 5º ano: --

Título – "NOVO MSI 5";---

ISBN – 978-989-767-110-4; --

Editora – Areal Editores, S.A.; --

Autores – Alexandra Conceição, Isabel Castanheira, Matilde Almeida, Valter Cebolo. -------------------

----

3 – Adoção dos manuais das disciplinas de Matemática A e MACS, 11º ano de escolaridade-------

Relativamente aos manuais de Matemática A (6 projetos) e de Matemática Aplicada às Ciências Sociais - MACS (3 projetos), 11º ano de escolaridade, foi seguida uma metodologia de trabalho análoga à descrita no ponto 2, tendo sido ratificadas, por unanimidade, as propostas a ser submetidas ao Conselho Pedagógico para adoção dos seguintes manuais: --------------------------------

----

Matemática A - 11º ano: ---

Título – "NOVO IPSÍLON 11"; --

ISBN – 978-989-744-288-9;--

Editora – Lisboa Editora, S.A. / Raiz Editora; ---

Autores – Carlos Andrade, Paula Pinto Pereira e Pedro Pimenta. --

----

MACS – 11º Ano: --

Título – "MÁXIMO 11";--

ISBN - 978-972-0-42902-5; --

Editora - Porto Editora, S.A.; ---

Autores - Maria Augusta Ferreira Neves, Luísa Faria e Bruno Ribeiro. ---------------------------------------

----

Após o cumprimento dos pontos 2 e 3 da ordem de trabalhos, procedeu-se ao preenchimento dos "Registos de Apreciação e Adoção" de novos manuais, quer no caso dos manuais certificados, os de

Matemática, 5º ano, e os de Matemática A, 11º ano, quer dos manuais não certificados, os de MACS, 11º ano. --

----

E nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata que vai ser assinada nos termos da lei: ----

----

O Presidente: Paulo Amílcar Carvalho

A Secretária: Liliana Carolina Pinho

Apêndice E

Peddy Matemática

E.1. Informações sobre o Peddy Matemática

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

IX Academia DD.
Ano Letivo 2015/2016
27.Junho.2016
75 minutos

Peddy Matemática

Postos de Paragem:

Em cada posto serão apresentadas as regras de cada Desafio e o tempo disponível para o executarem. No fim cada professor responsável deve classificar o desempenho do grupo segundo os padrões previamente definidos e assinalar na grelha das pontuações de cada equipa.

1. **Tangram (sala 3):** Um dos puzzles mais conhecido pelos estudantes é o **Tangram Chinês**, um puzzle com sete peças (cinco triângulos, um paralelogramo e um quadrado) que permite construir muitas e muitas imagens, entre elas, animais, pessoas, casas, letras, números, e muitas mais. Cada imagem deve ser construída com recurso a todas as peças do puzzle.

   Neste posto de paragem os alunos terão de construir duas imagens utilizando as peças do tangram. Tem o tempo limite de 10 minutos para encontrar a solução para as duas imagens a construir.

   Cada uma das imagens pode ser considerada certa ou errada, sendo a pontuação atribuída a cada de 15 ou 0 pontos, respetivamente.

2. **Quadrado Mágico (sala 10):** Quadrado Mágico é uma tabela quadrada de números em que a soma de cada coluna, de cada linha e das duas diagonais são iguais.

   Neste posto é proposto aos alunos a resolução de dois quadrados mágicos, tendo para essa tarefa um tempo máximo de 10 minutos.

1

			21
			21
	7		21
6	5		21
21	21	21	21

	7		-9	-2
-1	1	8	10	-8
-7				11
12		-4	3	
6	13			4

A classificação dos quadrados efetua-se célula a célula. Cada número corretamente inscrito vale 1 ponto. Logo o primeiro quadrado vale 6 pontos enquanto que o segundo vale um total de 9 pontos.

3. **Calcula (sala 14):** Quantos sinais de adição foram utilizados na expressão

   2 + 0 +1+ 6 + 2 + 0 +1+ 6 + 2 + 0 + 1+ 6 + … + 2 + 0 + 1+ 6 = 2016?

   A resposta correta receberá uma pontuação de 10 pontos. O tempo limite pra a execução da atividade é de 5 minutos.

4. **Descobre (sala 26):** São apresentadas duas situações aos alunos em que terão de descobrir o valor secreto num limite de tempo de 10 minutos.

A resposta correta a cada uma das situações deverá ser pontuada com 15 pontos.

5. **Sudoku (sala 19):** Sudoku é um quebra-cabeça baseado na colocação lógica de números. O objetivo do jogo é a colocação de números de 1 a 9 em cada uma das células vazias numa grade de 9x9, constituída por 3x3 subgrades chamadas regiões. O quebra-cabeça contém algumas pistas iniciais, que são números inseridos em algumas células, de maneira a permitir uma indução ou dedução dos números em células que estejam vazias. Cada coluna, linha e região só pode ter um número de cada um dos 1 a 9.

   No último posto cada grupo terá de resolver dois sudoku de grau fácil. Para essa tarefa terão um tempo limite de 15 minutos.

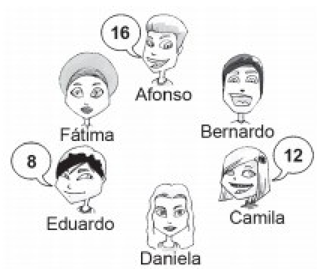
4		1		2	6		3	7
7		3	4		8			
				3			4	5
9	1						2	
3		4				7		8
	6						5	1
1	7			6				
			1		7	4		9
6	4		5	9		1		3

1	5	3		2		4		9
		6	4		1	3		8
							1	
9			1		8		3	
4		2		3		9		7
	3		9		2			1
	4							
3		9	7		4	8		
5		1		8		6	7	4

   A cada sudoku corretamente resolvido deverá ser atribuída a pontuação de 15 pontos.

6. **Chegada:** O grupo deve resolver a charada apresentada a seguir, podendo utilizar no máximo 3 minutos, com uma pontuação de 15 pontos:

   Seis crianças fizeram uma roda e cada uma, em voz baixa, disseram o seu número favorito para os colegas do lado. Em seguida, cada criança disse em voz alta a soma dos dois números que ouviu; a figura mostra o que o Afonso, a Camila e o Eduardo disseram em voz alta. Qual é o número favorito da Fátima?



   a. 5
   b. 6
   c. 7
   d. 8
   e. 9

3

Passagem entre posto:

Após a equipa responder às questões, ou se esgotar o tempo de execução da tarefa terá acesso a uma equação ou expressão numérica. A resposta à equação ou à expressão numérica será a sala para a qual se deverão dirigir.

Serão criados 5 tipos diferentes de percursos para tentar que os alunos não estejam uns à espera dos outros.

Percurso 1: 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6
Percurso 2: 2 – 4 – 5 – 3 – 1 - 6
Percurso 3: 3 – 1 – 4 – 5 – 2 - 6
Percurso 4: 4 – 5 – 1 – 2 – 3 – 6
Percurso 5: 5 – 3 – 2 – 1 – 4 - 6

Questões Numéricas:

Sala 3: $10: \left[2 + \left[\left(\sqrt{16} + 2^3\right) - 4\right]\right] \times 3 = ?$
Sala 10: $2(4^2 - 11) = ?$
Sala 14: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{7+2x}{3}\,?$
Sala 26: $5^2 — [-2 + 6 + (-4 - 1)] = ?$
Sala 19: $\frac{\mathbf{2^3 \times 3^3}}{\mathbf{6^2}} \times \mathbf{3} + \mathbf{5^0} = ?$

Final:

No fim da prova cada equipa entrega a tabela de pontuações de modo que se possam apurar os vencedores.

E.2. Guião das Equipas

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

IX Academia DD
27 de Junho de 2016

Peddy Matemática

Equipa ___: ______________________________

Elementos:

____

____

____

____

____

Resultados:

Jogos/Atividades	**Pontuação**
Tangram	
Quadrado Mágico	
Calcula	
Descobre	
Sudoku	
Prova Final	
Total	

Início: ___h ___min

Tempo Gasto: ___________

Oeste Coimbra
Agrupamento de Escolas

IX Academia DD
27 de Junho de 2016

Regulamento:

1. O Peddy Matemática é constituído por vários Desafios que vos levam as salas onde enfrentarão os desafios.
2. Todos os Desafios decorrerão no recinto da escola;
3. Em cada Desafio o desempenho da equipa será avaliado pelo docente presente segundo os critérios previamente definidos pela organização;
4. Em cada estação a pontuação obtida pela equipa no Desafio será devidamente assinalada no guião entregue a cada equipa no início da prova;

Jogos/Atividades	**Pontuação Máxima**
Tangram	30
Quadrado Mágico	15
Calcula	10
Descobre	30
Sudoku	30
Prova Final	15
Total	130

5. No final, a equipa vencedora será a que tiver obtido o maior número de pontos;
6. Em caso de equipas com o mesmo número de pontos, o tempo de execução dos desafios servirá de desempate;
7. Uma equipa será desclassificada nos seguintes casos:
   a. Não passar por todas as estações;
   b. Não preservar o guião entregue a cada equipa no início da prova;
   c. A não comparência de todos os elementos nas estações;
8. Os resultados do Peddy Matemática serão divulgados após todas as equipas se apresentarem na chegada.
9. O júri do Peddy Matemática é composto pelos elementos do Núcleo de Estágio de Matemática que será soberano nas decisões necessárias.