

# **Testes de ajustamento baseados na função característica ponderada**

Luísa Maria Ribeiro de Freitas





# Testes de ajustamento baseados na função característica ponderada

Luísa Maria Ribeiro de Freitas

Dissertação para a obtenção do Grau de **Mestre em Matemática**  
Área de Especialização em **Estatística, Otimização e Matemática Financeira**

## Júri

**Presidente:** Doutora Maria de Nazaré Mendes Lopes  
**Orientador:** Doutor Carlos Tenreiro da Cruz  
**Vogal:** Doutora Maria da Graça Neves Mendes

**Data:** Julho de 2016



# Resumo

Em 2014, Meintanis, Swanepoel e Allison propuseram um teste de ajustamento baseado numa nova função por eles introduzida e a que chamaram função característica ponderada por ser uma generalização da função característica. Este é o teste que estudamos nesta dissertação. Começamos assim por estabelecer as principais propriedades da nova função, passando a seguir ao estudo do teste de ajustamento nela baseado. Como ponto de partida, analisamos o caso particular do teste de ajustamento a uma distribuição fixa, generalizando de seguida a uma família de distribuições. Para ambos os casos, definimos a estatística de teste envolvente, determinamos a sua distribuição assintótica sob a hipótese nula e analisamos a convergência do teste. Por último, apresentamos os resultados de um estudo de simulação realizado para analisar a potência do teste de ajustamento a uma família de distribuições, tomando como referência um teste recomendado na literatura.

**Palavras Chave:** Função característica ponderada, teste de ajustamento, distribuição assintótica, convergência, potência empírica.

# Abstract

In 2014, Meintanis, Swanepoel e Allison proposed a goodness-of-fit test based on a new function introduced by them and called probability weighted characteristic function because it is a generalization of the usual characteristic function. The study of this test is the main goal of this dissertation. We start by establishing the main properties of the new function and then we examine in detail the goodness-of-fit test that depends on it. The starting point is to study the simple goodness-of-fit test and then the composite goodness-of-fit test. For both, the corresponding test statistics, limiting null distributions and consistency results are presented. Finally, we show the results of a simulation study carried out to analyze the power of the composite goodness-of-fit test and compare it with other well-known test.

**Keywords:** Probability weighted characteristic function, goodness-of-fit test, asymptotic null distribution, consistency, empirical power.



# Agradecimentos

*Ao Professor Doutor Carlos Tenreiro, meu orientador nesta dissertação, agradeço pela motivação no estudo desta matéria, pela paciência, dedicação e apoio incansável desde o início deste trabalho, por todo o conhecimento que me transmitiu, bem como pelas suas sugestões e críticas que em muito contribuíram para a concretização deste trabalho.*

*Um agradecimento à minha família, em especial, aos meus pais e aos meus irmãos, pois sem eles não teria chegado até aqui. Agradeço por estarem sempre presentes e atentos ao meu percurso e pelo constante incentivo e preocupação demonstrados. São, sem dúvida, a minha grande força e a prova de que é preciso e vale a pena trabalhar e lutar até ao fim.*

*Aos meus amigos de Guimarães, àqueles que estiveram sempre comigo, mesmo com a distância a separar-nos, agradeço pela amizade e compreensão nos momentos ao longo deste trabalho em que não foi possível estar presente.*

*Aos meus colegas de Coimbra pela partilha de conhecimentos e experiências. Em especial ao Nuno, por toda a ajuda, companheirismo e paciência, sempre constantes.*





# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Função característica ponderada</b>	<b>5</b>
2.1	Definições . . . . .	5
2.2	Propriedades . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Teste de ajustamento a uma distribuição fixa</b>	<b>9</b>
3.1	Estatística de teste $T_{n,\beta}$ . . . . .	9
3.2	Distribuição assintótica de $T_{n,\beta}$ sob $H_0$ . . . . .	11
3.3	Convergência do teste . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Teste de ajustamento a uma família de distribuições</b>	<b>17</b>
4.1	Nova estatística de teste $T_{n,\beta}$ . . . . .	17
4.1.1	Invariância de $T_{n,\beta}$ . . . . .	18
4.1.2	Expressões alternativas para $T_{n,\beta}$ . . . . .	19
4.2	Comportamento assintótico de $T_{n,\beta}$ sob $H_0$ . . . . .	20
4.3	Distribuição assintótica de $T_{n,\beta}$ sob $H_0$ . . . . .	27
4.4	Convergência do teste . . . . .	29
4.5	A família das distribuições Logísticas . . . . .	32
4.5.1	Observações . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Estudo de simulação</b>	<b>37</b>
5.1	Testes incluídos no estudo . . . . .	37
5.2	Distribuições alternativas . . . . .	38
5.3	Resultados de potência . . . . .	41
5.4	Discussão dos resultados e conclusão . . . . .	47
<b>A</b>	<b>Tabelas</b>	<b>49</b>
<b>B</b>	<b>Códigos para a simulação em R</b>	<b>51</b>
B.1	Estimação dos quantis . . . . .	51
B.2	Estimação da potência . . . . .	55



# Capítulo 1

## Introdução

Os testes de ajustamento são procedimentos da estatística inferencial que permitem testar se a distribuição  $F$  de uma variável aleatória real  $X$ , da qual observamos  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) cópias independentes  $X_1, \dots, X_n$ , que supomos definidas sobre um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , pode ser bem descrita por uma dada distribuição ou família de distribuições fixa à partida. Sendo assim  $\mathfrak{F}_0$  um conjunto de funções de distribuição em  $\mathbb{R}$  indexado por um subconjunto  $\Theta$  de  $\mathbb{R}^k$ , com  $k \geq 1$ , ou seja,

$$\mathfrak{F}_0 = \{F_\theta, \theta \in \Theta\},$$

pretendemos testar as hipóteses

$$H_0 : F \in \mathfrak{F}_0 \quad vs \quad H_1 : F \in \mathfrak{F}_1,$$

onde  $\mathfrak{F}_1$  é um outro conjunto de funções de distribuição sobre  $\mathbb{R}$  tal que  $\mathfrak{F}_0 \cap \mathfrak{F}_1 = \emptyset$ . Em particular, podemos ter  $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_0$ , onde  $\mathfrak{F}$  é o conjunto de todas as funções de distribuição em  $\mathbb{R}$ .

No âmbito dos testes de ajustamento, as estatísticas de teste baseadas na discrepância entre a função de distribuição de  $X$  sob a hipótese nula e a sua versão empírica são clássicas na literatura (ver, a título de exemplo, D'Agostino e Stephens, 1986, Capítulo 4 ou Shorack e Wellner, 1986, Capítulo 5). Em alternativa, também é comum o recurso à função característica de  $X$ , caso que é abordado por diferentes autores tais como Epps e Pulley (1983), Gürtler e Henze (2000), Matsui e Takemura (2008) e ainda Jiménez-Gamero *et al.* (2009). Estes consideram uma estatística de teste baseada no desvio quadrático ponderado entre a função característica empírica associada à amostra aleatória  $X_1, \dots, X_n$ , que designemos por  $\phi_n$ , e a função característica de  $X$  sob a hipótese nula, que designemos por  $\phi_0$ , ou seja, a estatística de teste toma a forma

$$n \int |\phi_n(t) - \phi_0(t)|^2 w_\beta(t) dt, \tag{1.1}$$

onde o integral relativamente à medida de Lebesgue é estendido a  $\mathbb{R}$  e  $w_\beta$  representa uma determinada função de peso integrável que depende de um parâmetro real  $\beta > 0$ .

A escolha da função  $w_\beta$  e principalmente do parâmetro  $\beta$  associado não é uma tarefa trivial tal como atestam os trabalhos de Henze e Wagner (1997) e Tenreiro (2009) no caso do teste duma hipótese de normalidade. Estes trabalhos revelam que a potência empírica do teste baseado em (1.1) depende fortemente da escolha do parâmetro  $\beta$ . Tal facto, motivou Meintanis, Swanepoel e Allison (2014) a introduzir uma estatística de teste alternativa à definida em (1.1) no sentido de simplificar essa tarefa. Para tal, definem versões ponderadas  $\varphi_n$  e  $\varphi_0$  de  $\phi_n$  e  $\phi_0$  respetivamente e consideram uma estatística de teste dada por

$$T_{n,\beta} = n \int |\varphi_n(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta)|^2 dt, \quad (1.2)$$

a qual está bem definida pelo facto de  $\varphi_n(\cdot; \beta)$  e  $\varphi_0(\cdot; \beta)$  serem, como veremos, funções de quadrado integrável (relativamente à medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}$ ). Assim, deixa de ser necessário considerar a ponderação  $w_\beta$  que surge em (1.1), cujo papel principal é garantir a integrabilidade da função integranda.

No trabalho que apresentamos nesta dissertação, no qual consideramos  $X$  como uma variável aleatória real absolutamente contínua e  $X_1, \dots, X_n$   $n$  cópias independentes de  $X$ , estudamos o teste de ajustamento baseado na estatística  $T_{n,\beta}$ , bem como a influência do parâmetro  $\beta$  na sua potência empírica.

Sendo esta estatística de teste baseada em versões ponderadas da função característica e da função característica empírica, dedicamos o Capítulo 2 à definição das mesmas bem como ao estudo das suas principais propriedades.

Apesar do teste proposto baseado em  $T_{n,\beta}$  ter sido introduzido para um problema de ajustamento a uma família de distribuições, achámos também oportuno estudar o caso em que  $\Theta$  é singular, isto é, o teste de ajustamento das hipóteses

$$H_0 : F = F_0 \quad vs \quad H_1 : F \neq F_0, \quad (1.3)$$

onde  $F_0$  é uma função de distribuição completamente conhecida em  $\mathbb{R}$ . Este estudo é apresentado no Capítulo 3, no qual, depois de definirmos a estatística de teste associada, obtemos a sua distribuição assintótica sob a hipótese nula e estudamos a convergência do teste.

No Capítulo 4, principal capítulo desta dissertação, interessamo-nos pelo teste de

ajustamento às famílias de distribuições da forma

$$\mathfrak{F}_0 = \left\{ F_0 \left( \frac{\cdot - \theta_1}{\theta_2} \right) : \theta_1 \in \mathbb{R} \text{ e } \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \right\}, \quad (1.4)$$

ou

$$\mathfrak{F}_0 = \left\{ F_0 \left( \frac{\cdot}{\theta_2} \right) : \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \right\}, \quad (1.5)$$

onde  $F_0$  é uma função de distribuição em  $\mathbb{R}$  completamente conhecida. Este capítulo é desenvolvido pela mesma ordem de ideias do capítulo anterior.

O quinto e último capítulo é dedicado à apresentação dum estudo de simulação, desenvolvido no software R, que tem como principal objetivo analisar a potência empírica do teste apresentado no quarto capítulo, comparando-a com a de um teste de referência existente na literatura, mas também estudar a forma como essa potência depende do parâmetro  $\beta$ . Para tal, vamos concentrar-nos no caso do teste de ajustamento a uma família de distribuições Logísticas.

No decorrer desta dissertação, denotaremos por  $\xrightarrow{d}$ ,  $\xrightarrow{P}$  e  $\xrightarrow{q.c.}$  as convergências em distribuição, em probabilidade e quase certa, respetivamente, quando  $n \rightarrow +\infty$ . Além disso, denotaremos por  $o_P(1)$  uma sucessão de variáveis ou vetores aleatórios reais que converge para zero em probabilidade e por  $O_P(1)$  uma sucessão de variáveis ou vetores aleatórios reais limitada em probabilidade. Sobre as propriedades dos símbolos estocásticos  $o_P(1)$  e  $O_P(1)$ , seguimos de perto Monfort (1996).



## Capítulo 2

# Função característica ponderada

Este capítulo é dedicado ao estudo da nova função introduzida por Meintanis, Swanepoel e Allison (2014), que designamos por função característica ponderada. Naturalmente, também estudamos a sua versão empírica.

### 2.1. Definições

**Definição 2.1** Dado  $\beta > 0$ , chama-se função característica ponderada de  $X$ , ou de  $F$ , à aplicação  $\varphi$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}$  definida, para  $t \in \mathbb{R}$ , por

$$\varphi(t; \beta) = E(W(X, t\beta)e^{itX}) = \int W(x, t\beta)e^{itx} dF(x),$$

onde, para todo o  $x, \delta \in \mathbb{R}$ ,  $W$  é uma função real que satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $W(x, 0) = 1$ ;
- (ii)  $\delta \mapsto W(x, \delta)$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;
- (iii)  $W(x, \delta) = W(x, -\delta)$ ;
- (iv)  $|W(x, \delta)| \leq r^{|\delta|}$ , para algum  $0 < r < 1$ .

A aplicação  $\varphi$  está bem definida. Com efeito, para todo o  $t \in \mathbb{R}$  e para todo o  $\beta > 0$ , a parte real e a parte imaginária de  $W(X, t\beta)e^{itX}$ , isto é,  $W(X, t\beta) \cos(tX)$  e  $W(X, t\beta) \sin(tX)$ , respetivamente, são variáveis aleatórias reais que admitem esperança matemática, visto serem limitadas.

**Definição 2.2** Dado  $\beta > 0$ , a função característica ponderada empírica associada à amostra aleatória  $X_1, \dots, X_n$  de  $X$  é definida, para  $t \in \mathbb{R}$ , por

$$\varphi_n(t; \beta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W(X_j, t\beta)e^{itX_j}.$$

Notemos que tomar  $\beta = 0$  em ambas as definições, conduziria-nos às definições de função característica e função característica empírica, respetivamente.

## 2.2. Propriedades

As funções acabadas de definir gozam de determinadas propriedades enumeradas na proposição que se segue.

**Proposição 2.3** *Sendo  $\varphi$  a função característica ponderada de  $X$  e  $\varphi_n$  a função característica ponderada empírica associada a  $(X_1, \dots, X_n)$ , tem-se:*

- a)  $\forall \beta > 0, \varphi(0; \beta) = \varphi_n(0; \beta) = 1.$
- b)  $\forall \beta > 0, t \mapsto \varphi(t; \beta)$  e  $t \mapsto \varphi_n(t; \beta)$  são contínuas em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}.$
- c)  $\forall t \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0, \overline{\varphi(t; \beta)} = \varphi(-t; \beta)$  e  $\overline{\varphi_n(t; \beta)} = \varphi_n(-t; \beta).$
- d)  $\forall t \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0, |\varphi(t; \beta)| \leq r^{\beta|t|}$  e  $|\varphi_n(t; \beta)| \leq r^{\beta|t|}$ , com  $0 < r < 1.$
- e)  $\forall \beta > 0, t\varphi(\cdot; \beta)$  e  $\varphi_n(\cdot; \beta)$  são funções de quadrado integrável e verificam  $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} |\varphi(t; \beta)| = \lim_{|t| \rightarrow +\infty} |\varphi_n(t; \beta)| = 0.$
- f) *Se para todo o  $x, \delta \in \mathbb{R}, W(x, \delta) = W(-x, \delta)$  e  $X$  é simétrica, então  $\varphi$  é real.*
- g)  $\forall t \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0, \varphi_n(t; \beta) \xrightarrow{q.c.} \varphi(t; \beta).$

*Demonstração.* As condições (i), (ii), (iii) e (iv) a que fazemos referência a seguir são as estabelecidas na Definição 2.1.

- a) Basta ter em conta que para todo o  $x \in \mathbb{R}, W(x, 0) = 1$ , pela condição (i).
- b) Fazemos a prova apenas para a função  $\varphi$  pois para a função  $\varphi_n$  decorre diretamente da condição (ii). Vejamos então que para todo o  $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t; \beta) = \varphi(t_0; \beta).$$

Usando as condições (ii) e (iv), pelo teorema do limite sob o sinal de integral, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \int W(x, t\beta) e^{itx} dF(x) &= \int \lim_{t \rightarrow t_0} W(x, t\beta) e^{itx} dF(x) \\ &= \int W(x, t_0\beta) e^{it_0x} dF(x) = \varphi(t_0; \beta). \end{aligned}$$

- c) Para  $t \in \mathbb{R}$  e  $\beta > 0$ , atendendo à condição (iii), vem

$$\overline{\varphi(t; \beta)} = E(W(X, t\beta) e^{-itX}) = E(W(X, -t\beta) e^{-itX}) = \varphi(-t; \beta)$$

e

$$\overline{\varphi_n(t; \beta)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W(X_j, t\beta) e^{-itX_j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W(X_j, -t\beta) e^{-itX_j} = \varphi_n(-t; \beta).$$

- d) Para  $t \in \mathbb{R}$  e  $\beta > 0$  temos, usando a condição (iv), que

$$|\varphi(t; \beta)| = |E(W(X, t\beta) e^{itX})| \leq E(|W(X, t\beta) e^{itX}|) \leq r^{\beta|t|}$$



e

$$|\varphi_n(t; \beta)| = \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W(X_j, t\beta) e^{itX_j} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |W(X_j, t\beta) e^{itX_j}| \leq r^{\beta|t|}.$$

e) Atendendo às desigualdades obtidas na alínea anterior e ao facto da função  $t \mapsto r^{\beta|t|}$  ser de quadrado integrável, uma vez que  $0 < r < 1$ , podemos inferir que  $t \mapsto \varphi(t; \beta)$  e  $t \mapsto \varphi_n(t; \beta)$  são funções de quadrado integrável. Por outro lado, como  $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} r^{\beta|t|} = 0$ , concluímos que  $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} |\varphi(t; \beta)| = \lim_{|t| \rightarrow +\infty} |\varphi_n(t; \beta)| = 0$ .

f) Basta provar que a parte imaginária de  $\varphi$  é 0. Dada a simetria de  $X$ , pelo teorema da mudança de variável (ver Proposição 2.6.5 de Cohn, 1980), vem

$$\begin{aligned} \int W(x, t\beta) \sin(tx) dF(x) &= \int W(-x, t\beta) \sin(-tx) dF(x) \\ &= - \int W(x, t\beta) \sin(tx) dF(x), \end{aligned}$$

de onde concluímos que  $\int W(x, t\beta) \sin(tx) dF(x) = 0$ .

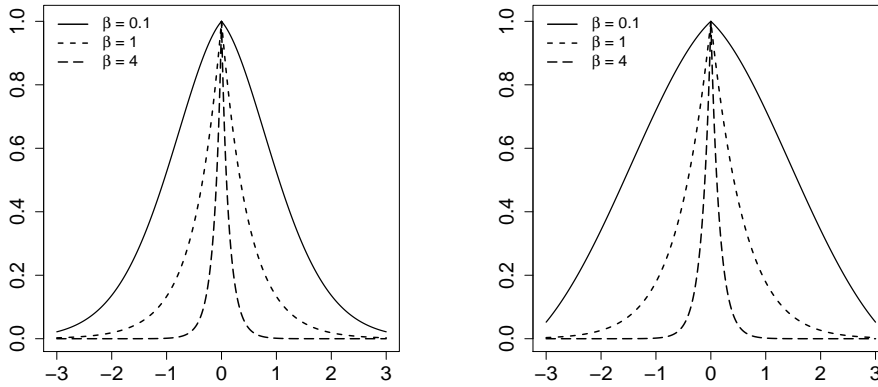
g) Decorre da aplicação da lei forte dos grandes números. ■

Apesar das propriedades anteriores terem sido estabelecidas para uma qualquer função de peso satisfazendo as condições (i) a (iv) da Definição 2.1, nos capítulos seguintes, e no âmbito dos testes de ajustamento que vamos estudar, vamos admitir, com base na sugestão de Meintanis, Swanepoel e Allison (2014), que a função  $W$  é dada, para  $x, \delta \in \mathbb{R}$ , por

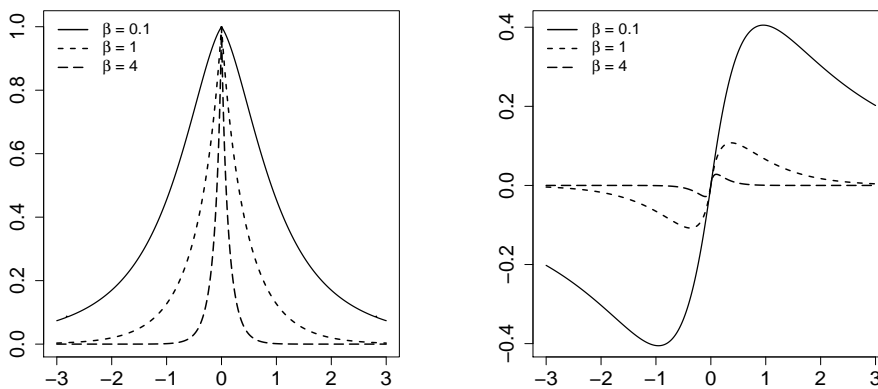
$$W(x, \delta) = \begin{cases} [F_0(x)(1 - F_0(x))]^{|\delta|} & \text{se } \delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{se } \delta = 0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

onde  $F_0$  é a função de distribuição que surge em (1.3), (1.4) ou (1.5). Esta função  $W$  satisfaz as condições estabelecidas na Definição 2.1, com  $r = \frac{1}{4}$ .

Por forma a apresentarmos exemplos de funções características ponderadas, vamos considerar a função  $W$  definida por (2.1), tomando para  $F_0$  a função de distribuição Normal centrada e reduzida. Na Figura 2.1 representamos as funções características ponderadas de duas variáveis simétricas, uma com distribuição Normal standard e outra Uniforme sobre o intervalo  $] - 1, 1[$  (funções reais de acordo com a alínea f) da Proposição 2.3). Representamos ainda na Figura 2.2 a parte real e imaginária da função característica ponderada da variável Exponencial de parâmetro 1. Para cada caso tomamos diferentes valores do parâmetro  $\beta$ , nomeadamente, 0.1, 1 e 5.



**Figura 2.1.** Função característica ponderada das distribuições  $\mathcal{N}(0, 1)$  (à esquerda) e  $\mathcal{U}(-1, 1)$  (à direita).



**Figura 2.2.** Parte real (à esquerda) e imaginária (à direita) da função característica ponderada da distribuição  $\mathcal{E}(1)$ .

Antes de encerrarmos este capítulo, notemos que, contrariamente à função característica, a função característica ponderada com a função de peso (2.1) associada, regra geral, não caracteriza a lei. A título de exemplo, se tomarmos  $F_0$  como a função de distribuição Uniforme sobre o intervalo  $]0, 1[$  e duas variáveis aleatórias reais de distribuição também Uniforme mas com diferentes suportes entre si e ambos disjuntos de  $]0, 1[$ , temos que as suas funções características ponderadas são ambas iguais a

$$\varphi(t; \beta) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases} .$$

Ainda assim, Meintanis e Ushakov (2016) mostram que, sob certas condições, a função característica ponderada, definida com uma função de peso  $W$  alternativa a (2.1), caracteriza a lei.

## Capítulo 3

# Teste de ajustamento a uma distribuição fixa

Como ponto de partida para o trabalho que vamos desenvolver no próximo capítulo, estudamos agora o teste de ajustamento a uma distribuição fixa baseado no desvio quadrático entre a função característica ponderada empírica e a função característica ponderada sob a hipótese nula. Depois de apresentarmos a estatística de teste a ser utilizada, estabelecemos a sua distribuição assintótica sob a hipótese nula e analisamos a convergência do teste.

### 3.1. Estatística de teste $T_{n,\beta}$

Sendo  $F_0$  uma função de distribuição em  $\mathbb{R}$  fixa à partida, para testar as hipóteses

$$H_0 : F = F_0 \quad vs \quad H_1 : F \neq F_0, \quad (3.1)$$

vamos considerar a estatística de teste definida em (1.2), ou seja,

$$T_{n,\beta} = n \int |\varphi_n(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta)|^2 dt, \quad (3.2)$$

com

$$\varphi_n(t; \beta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W(X_j, t\beta) e^{itX_j}$$

e

$$\varphi_0(t; \beta) = \int W(x, t\beta) e^{itx} dF_0(x),$$

onde  $W$  é a função definida em (2.1) com  $F_0$  a função de distribuição presente em (3.1).

A estatística  $T_{n,\beta}$  assim definida é finita uma vez que, para  $\beta > 0$ ,  $\varphi_n(\cdot; \beta)$  e  $\varphi_0(\cdot; \beta)$  são funções de quadrado integrável, tal como foi estabelecido na alínea e) da Proposição 2.3.

Antes de mais, apresentamos uma expressão alternativa de  $T_{n,\beta}$  que será útil para o seu cálculo numérico, bem como para obter uma outra representação alternativa de  $T_{n,\beta}$  que apresentaremos no início da próxima secção.

Partindo de (3.2), temos

$$\begin{aligned}
 T_{n,\beta} &= n \int \left( \varphi_n(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta) \right) \overline{\left( \varphi_n(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta) \right)} dt \\
 &= n \int \varphi_n(t; \beta) \overline{\varphi_n(t; \beta)} dt - n \int \left( \varphi_n(t; \beta) \overline{\varphi_0(t; \beta)} + \varphi_0(t; \beta) \overline{\varphi_n(t; \beta)} \right) dt \\
 &\quad + n \int \varphi_0(t; \beta) \overline{\varphi_0(t; \beta)} dt \\
 &= n \int |\varphi_n(t; \beta)|^2 dt - n \int \left( \varphi_n(t; \beta) \overline{\varphi_0(t; \beta)} + \varphi_0(t; \beta) \overline{\varphi_n(t; \beta)} \right) dt \\
 &\quad + n \int |\varphi_0(t; \beta)|^2 dt \\
 &=: A_n + B_n + C_n,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde, recorrendo à fórmula

$$\int_0^{+\infty} u^{\beta t} \cos(tv) dt = \frac{-\beta \log(u)}{v^2 + \beta^2 \log^2(u)}, \text{ para } 0 < u < 1, v \in \mathbb{R} \text{ e } \beta > 0,$$

temos

$$\begin{aligned}
 A_n &= n \int \left[ \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W(X_j, t\beta) \cos(tX_j) \right)^2 + \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W(X_j, t\beta) \sin(tX_j) \right)^2 \right] dt \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \int W(X_j, t\beta) W(X_k, t\beta) (\cos(tX_j) \cos(tX_k) + \sin(tX_j) \sin(tX_k)) dt \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \int [F_0(X_j)(1 - F_0(X_j))F_0(X_k)(1 - F_0(X_k))]^{\beta|t|} \cos(t(X_j - X_k)) dt \\
 &= \frac{2}{n} \sum_{j,k=1}^n \frac{-\beta \log(F_0(X_j)(1 - F_0(X_j))F_0(X_k)(1 - F_0(X_k)))}{(X_j - X_k)^2 + \beta^2 \log^2(F_0(X_j)(1 - F_0(X_j))F_0(X_k)(1 - F_0(X_k)))}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 B_n &= -2n \int \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W(X_j, t\beta) \cos(tX_j) \left( \int W(x, t\beta) \cos(tx) dF_0(x) \right) dt \\
 &\quad - 2n \int \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W(X_j, t\beta) \sin(tX_j) \left( \int W(x, t\beta) \sin(tx) dF_0(x) \right) dt \\
 &= -2 \sum_{j=1}^n \iint W(X_j, t\beta) W(x, t\beta) \cos(tX_j) \cos(tx) dt dF_0(x) \\
 &\quad - 2 \sum_{j=1}^n \iint W(X_j, t\beta) W(x, t\beta) \sin(tX_j) \sin(tx) dt dF_0(x) \\
 &= -2 \sum_{j=1}^n \iint [F_0(X_j)(1 - F_0(X_j))F_0(x)(1 - F_0(x))]^{\beta|t|} \cos(t(X_j - x)) dt dF_0(x) \\
 &= 4 \int \sum_{j=1}^n \frac{\beta \log(F_0(X_j)(1 - F_0(X_j))F_0(x)(1 - F_0(x)))}{(X_j - x)^2 + \beta^2 \log^2(F_0(X_j)(1 - F_0(X_j))F_0(x)(1 - F_0(x)))} dF_0(x).
 \end{aligned}$$

Quanto à parcela  $C_n$ , ela é dada por

$$C_n = n \int \left( \int W(x, t\beta) \cos(tx) dF_0(x) \right)^2 dt + n \int \left( \int W(x, t\beta) \sin(tx) dF_0(x) \right)^2 dt.$$

### 3.2. Distribuição assintótica de $T_{n,\beta}$ sob $H_0$

No sentido de facilitar a determinação da distribuição assintótica de  $T_{n,\beta}$  vamos começar por deduzir uma sua representação alternativa. Para o efeito, para  $x, y \in \mathbb{R}$ , defina-se

$$h(x, y) = \int (g_c(x, t)g_c(y, t) + g_s(x, t)g_s(y, t)) dt, \quad (3.4)$$

onde

$$g_c(y, t) = W(y, t\beta) \cos(ty) - \int W(x, t\beta) \cos(tx) dF_0(x) \quad (3.5)$$

e

$$g_s(y, t) = W(y, t\beta) \sin(ty) - \int W(x, t\beta) \sin(tx) dF_0(x). \quad (3.6)$$

Para  $\ell = c, s$ , temos que

$$\int g_\ell^2(y, t) dt \leq 4 \int \left(\frac{1}{4}\right)^{2\beta|t|} dt < +\infty, \quad (3.7)$$

o que permite garantir que a função  $h$  está bem definida, e ainda que, sob  $H_0$ ,

$$E(g_\ell(X, t)) = 0. \quad (3.8)$$

**Lema 3.1** *A estatística de teste  $T_{n,\beta}$  é dada por*

$$T_{n,\beta} = (n-1)U_{n,\beta} + V_{n,\beta},$$

onde

$$U_{n,\beta} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq j < k \leq n} h(X_j, X_k)$$

e

$$V_{n,\beta} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n h(X_j, X_j),$$

sendo  $h$  a função definida em (3.4).

*Demonstração.* Começemos por desenvolver a expressão  $(n-1)U_{n,\beta} + V_{n,\beta}$ :

$$\begin{aligned} & (n-1)U_{n,\beta} + V_{n,\beta} \\ &= \frac{2}{n} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \int (g_c(X_j, t)g_c(X_k, t) + g_s(X_j, t)g_s(X_k, t)) dt \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int (g_c^2(X_j, t) + g_s^2(X_j, t)) dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int g_c^2(X_j, t) dt + \frac{2}{n} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \int g_c(X_j, t)g_c(X_k, t) dt \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int g_s^2(X_j, t) dt + \frac{2}{n} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \int g_s(X_j, t)g_s(X_k, t) dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \int g_c(X_j, t) g_c(X_k, t) dt + \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \int g_s(X_j, t) g_s(X_k, t) dt. \quad (3.9)$$

Agora desenvolvemos apenas a primeira parcela uma vez que para a segunda o desenvolvimento é análogo. Vem então

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \int g_c(X_j, t) g_c(X_k, t) dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \int W(X_j, t\beta) W(X_k, t\beta) \cos(tX_j) \cos(tX_k) dt \\ & \quad - \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \int W(X_j, t\beta) \cos(tX_j) \left( \int W(x, t\beta) \cos(tx) dF_0(x) \right) dt \\ & \quad - \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \int W(X_k, t\beta) \cos(tX_k) \left( \int W(x, t\beta) \cos(tx) dF_0(x) \right) dt \\ & \quad + \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \int \left( \int W(x, t\beta) \cos(tx) dF_0(x) \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \int W(X_j, t\beta) W(X_k, t\beta) \cos(tX_j) \cos(tX_k) dt \\ & \quad - 2 \sum_{j=1}^n \int W(X_j, t\beta) \cos(tX_j) \left( \int W(x, t\beta) \cos(tx) dF_0(x) \right) dt \\ & \quad + n \int \left( \int W(x, t\beta) \cos(tx) dF_0(x) \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Para concluir a demonstração basta agora notar que a soma (3.9) é exatamente igual a (3.3). ■

**Teorema 3.2** *Sob  $H_0$ , tem-se*

$$T_{n,\beta} \xrightarrow{d} T_\beta := U_\beta + E(h(X_1, X_1)),$$

com

$$U_\beta = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j (Z_j^2 - 1),$$

onde  $Z_j$ ,  $j \geq 1$ , são variáveis aleatórias reais i.i.d. com a lei Normal standard e  $\lambda_j$ ,  $j \geq 1$ , são os valores próprios associados ao operador  $A_h$  de  $L^2(\mathbb{R}, F_0)$  em  $L^2(\mathbb{R}, F_0)$  definido, para  $g \in L^2(\mathbb{R}, F_0)$ , por

$$A_h g(x) = \int h(x, y) g(y) dF_0(y), \text{ com } x \in \mathbb{R},$$

onde  $h$  é a função definida em (3.4) e  $L^2(\mathbb{R}, F_0)$  é o espaço das funções  $g$ , reais de variável real, tais que  $\int g^2(y) dF_0(y) < +\infty$ .

*Demonstração.* Primeiramente, observemos que a função  $h$  definida em (3.4) satisfaz as propriedades seguintes:

- (i)  $h$  é simétrica, isto é,  $h(x, y) = h(y, x)$ ;
- (ii)  $E(h^2(X_1, X_2)) < +\infty$ ;
- (iii) Para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ ,  $E(h(x, X_2)) = 0$ .

De facto:

- (i) Decorre diretamente da expressão (3.4);
- (ii) Atendendo a (3.7), decorre que, para  $\ell = c, s$ ,

$$E\left(\int g_\ell^2(X_1, t) dt\right) < +\infty$$

e, conseqüentemente,  $E(h^2(X_1, X_2)) < +\infty$ ;

- (iii) Uma vez que, por (3.8),

$$E(g_c(X_2, t)) = E(g_s(X_2, t)) = 0,$$

temos, pelo teorema de Fubini, que

$$E(h(x, X_2)) = \int (g_c(x, t)E(g_c(X_2, t)) + g_s(x, t)E(g_s(X_2, t))) dt = 0.$$

O facto de  $h$  satisfazer estas propriedades permite concluir que

$$U_{n,\beta} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq j < k \leq n} h(X_j, X_k)$$

é uma U-estatística degenerada e a sua distribuição assintótica pode ser obtida por aplicação do Teorema 5.5.2 de Serfling (1980). Assim,

$$nU_{n,\beta} \xrightarrow{d} U_\beta, \tag{3.10}$$

com

$$U_\beta = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j (Z_j^2 - 1).$$

Para concluir a demonstração, e atendendo ao Lema 3.1, basta agora mostrar que

$$V_{n,\beta} \xrightarrow{q.c.} E(h(X_1, X_1)). \tag{3.11}$$

Usando novamente o facto de, por (3.7),  $E\left(\int g_\ell^2(X_1, t) dt\right) < +\infty$ , decorre que

$$E(|h(X_1, X_1)|) < +\infty,$$

o que permite concluir (3.11) por aplicação da lei forte dos grandes números.

O resultado enunciado é agora consequência de (3.10) e (3.11). ■

### 3.3. Convergência do teste

Atendendo à expressão (3.2) de  $T_{n,\beta}$  é natural esperar que, no caso da veracidade da hipótese nula, o seu valor seja próximo de zero, tendo em conta a alínea g) da Proposição 2.3. Assim, para valores pequenos de  $T_{n,\beta}$  teremos tendência a aceitar a hipótese nula enquanto para valores elevados seremos conduzidos à rejeição desta hipótese. Esta observação é tida em conta na definição da região crítica do teste como o conjunto

$$\{T_{n,\beta} > c_{n,\beta}(\alpha)\}, \quad (3.12)$$

onde, para  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $c_{n,\beta}(\alpha)$  representa o quantil de ordem  $1 - \alpha$  da estatística de teste  $T_{n,\beta}$  sob  $H_0$ , isto é,  $c_{n,\beta}(\alpha) = F_{T_{n,\beta}}^{-1}(1 - \alpha)$ , onde

$$F_{T_{n,\beta}}^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_{T_{n,\beta}}(x) \geq t\}, \text{ para } 0 < t < 1,$$

e  $F_{T_{n,\beta}}$  é a função de distribuição de  $T_{n,\beta}$  sob  $H_0$ .

**Proposição 3.3** *O teste de região crítica (3.12) é um teste com nível de significância inferior ou igual  $\alpha$ , isto é,*

$$P_{F_0}(T_{n,\beta} > c_{n,\beta}(\alpha)) \leq \alpha.$$

Além disso, o teste é de nível assintótico  $\alpha$ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{F_0}(T_{n,\beta} > c_{n,\beta}(\alpha)) = \alpha,$$

onde  $P_{F_0}$  denota a probabilidade calculada sob  $H_0$ .

*Demonstração.* Atendendo a que

$$\begin{aligned} P_{F_0}(T_{n,\beta} > c_{n,\beta}(\alpha)) &= 1 - P_{F_0}(T_{n,\beta} \leq c_{n,\beta}(\alpha)) \\ &= 1 - F_{T_{n,\beta}}(c_{n,\beta}(\alpha)) \\ &= 1 - F_{T_{n,\beta}}(F_{T_{n,\beta}}^{-1}(1 - \alpha)), \end{aligned} \quad (3.13)$$

das propriedades da função quantil (ver Lema 21.1 de van der Vaart, 2000), decorre que

$$P_{F_0}(T_{n,\beta} > c_{n,\beta}(\alpha)) \leq 1 - (1 - \alpha) = \alpha.$$



Por outro lado, tendo-se que  $T_{n,\beta} \xrightarrow{d} T_\beta$  sob  $H_0$  (ver Teorema 3.2) e que a função de distribuição  $F_{T_\beta}$  é contínua e estritamente crescente, decorre que  $F_{T_\beta}^{-1}$  é uma função contínua em  $]0, 1[$ , verificando-se

$$c_{n,\beta}(\alpha) = F_{T_{n,\beta}}^{-1}(1 - \alpha) \longrightarrow F_{T_\beta}^{-1}(1 - \alpha), \quad n \rightarrow +\infty$$

e

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{T_{n,\beta}}(x) - F_{T_\beta}(x)| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

(ver Lemas 21.2 e 2.11 de van der Vaart, 2000).

Assim, da igualdade (3.13) deduzimos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{F_0}(T_{n,\beta} > c_{n,\beta}(\alpha)) = 1 - F_{T_\beta}(F_{T_\beta}^{-1}(1 - \alpha)) = 1 - (1 - \alpha) = \alpha. \quad \blacksquare$$

**Teorema 3.4** *O teste de região crítica (3.12) é convergente, isto é,*

$$P_F(T_{n,\beta} > c_{n,\beta}(\alpha)) \longrightarrow 1, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty,$$

para qualquer distribuição  $F \neq F_0$  com função característica ponderada  $\varphi$  tal que  $\varphi(\cdot; \beta) \neq \varphi_0(\cdot; \beta)$ .

*Demonstração.* Consideremos uma amostra aleatória  $X_1, \dots, X_n$  proveniente de uma v.a.r. com distribuição  $F \neq F_0$  e função característica ponderada  $\varphi(\cdot; \beta) \neq \varphi_0(\cdot; \beta)$ . Pela alínea *g*) da Proposição 2.3, sabemos que

$$\varphi_n(t; \beta) \xrightarrow{q.c.} \varphi(t; \beta).$$

Além disso, sendo

$$|\varphi_n(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta)|^2 \leq 4 \left(\frac{1}{4}\right)^{2\beta|t|},$$

pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, decorre que

$$\frac{T_{n,\beta}}{n} = \int |\varphi_n(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta)|^2 dt \xrightarrow{q.c.} \int |\varphi(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta)|^2 dt.$$

Ora, uma vez que  $\varphi(\cdot; \beta) \neq \varphi_0(\cdot; \beta)$  e, além disso, pela alínea *b*) da Proposição 2.3,  $\varphi(\cdot; \beta) - \varphi_0(\cdot; \beta)$  é uma função contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , temos que

$$\int |\varphi(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta)|^2 dt > 0.$$

Logo,

$$T_{n,\beta} \xrightarrow{q.c.} +\infty,$$

de onde deduzimos a convergência enunciada, uma vez que, como vimos na demonstração da Proposição 3.3,  $c_{n,\beta}(\alpha) \longrightarrow F_{T_\beta}^{-1}(1 - \alpha)$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .  $\blacksquare$



## Capítulo 4

# Teste de ajustamento a uma família de distribuições

No âmbito do teste de ajustamento a uma família de distribuições, pretende-se, em analogia ao capítulo anterior, definir a estatística de teste, estabelecer a sua distribuição assintótica sob a hipótese nula e analisar a convergência do teste. No entanto, como veremos, são agora necessárias algumas condições e vários resultados auxiliares.

### 4.1. Nova estatística de teste $T_{n,\beta}$

Nesta secção apresentamos a estatística de teste associada ao teste das hipóteses

$$H_0 : F \in \mathfrak{F}_0 \quad vs \quad H_1 : F \in \mathfrak{F}_1,$$

onde

$$\mathfrak{F}_0 = \left\{ F_0 \left( \frac{x - \theta_1}{\theta_2} \right) : \theta_1 \in \mathbb{R} \text{ e } \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (4.1)$$

ou

$$\mathfrak{F}_0 = \left\{ F_0 \left( \frac{x}{\theta_2} \right) : \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \right\}, \quad (4.2)$$

sendo  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta$  o vetor dos parâmetros de localização e escala da família (4.1),  $\theta = \theta_2 \in \Theta$  o parâmetro de escala da família (4.2) e  $F_0$  uma função de distribuição em  $\mathbb{R}$  completamente conhecida.

Deste modo, se  $F \in \mathfrak{F}_0$  então tem-se que  $F(x) = F_\theta(x) = F_0(\tau(x, \theta))$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$  e para algum  $\theta \in \Theta$ , onde  $\tau(x, \theta)$  é uma transformação afim em  $\mathbb{R}$  da forma  $\tau(x, \theta) = \frac{x - \theta_1}{\theta_2}$  no caso (4.1) ou da forma  $\tau(x, \theta) = \frac{x}{\theta_2}$  no caso (4.2).

Em qualquer um dos casos tem-se que

$$F \in \mathfrak{F}_0 \text{ se e só se } F_{\tau(X, \theta)} = F_0, \quad (4.3)$$

para algum  $\theta \in \Theta$ , sendo  $F_{\tau(X, \theta)}$  a função de distribuição da variável aleatória real  $\tau(X, \theta)$ .

Assim, atendendo a (4.3), e relembrando a estatística de teste considerada aquando do estudo do teste de ajustamento a uma distribuição fixa, é natural agora definirmos uma estatística de teste análoga à definida em (3.2) mas com  $Y_j = \tau(X_j, \theta)$  no lugar de  $X_j$ , para  $j = 1, \dots, n$ . No entanto, sendo o parâmetro  $\theta$  desconhecido, em vez de  $Y_j$ , tomamos

$$\hat{Y}_j = \tau(X_j, \hat{\theta}),$$

sendo  $\hat{\theta}$  um estimador de  $\theta$ . Por outro lado, definindo a estatística de teste desta forma é garantida, sob certas condições relativamente a  $\hat{\theta}$ , a sua invariância, como veremos de seguida.

Por outras palavras, vamos considerar neste capítulo a estatística de teste  $T_{n,\beta}$  (com a mesma notação do capítulo anterior) dada por

$$T_{n,\beta} = n \int |\varphi_n(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta)|^2 dt, \quad (4.4)$$

com

$$\varphi_n(t; \beta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W(\hat{Y}_j, t\beta) e^{it\hat{Y}_j}$$

e

$$\varphi_0(t; \beta) = \int W(x, t\beta) e^{itx} dF_0(x),$$

onde  $W$  é a função definida em (2.1) com  $F_0$  a função de distribuição em (4.1) ou (4.2).

Tal como para  $T_{n,\beta}$ , usamos ao longo deste capítulo uma notação semelhante à do capítulo anterior sempre que tal faça sentido.

#### 4.1.1. Invariância de $T_{n,\beta}$

Nas proposições que se seguem estabelecemos a invariância de  $T_{n,\beta}$  sob determinadas condições sobre  $\hat{\theta}$ .

**Proposição 4.1** *Seja  $\mathfrak{F}_0$  a família definida em (4.1) e  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  um estimador de  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  tal que, para todo o  $a \in \mathbb{R}^+$  e  $b \in \mathbb{R}$ ,*

$$\hat{\theta}_1(aX_1 + b, \dots, aX_n + b) = a\hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n) + b$$

e

$$\hat{\theta}_2(aX_1 + b, \dots, aX_n + b) = a\hat{\theta}_2(X_1, \dots, X_n).$$

*Nestas condições,  $T_{n,\beta}$  é invariante para transformações de localização e escala dos dados, isto é, para todo o  $a \in \mathbb{R}^+$  e  $b \in \mathbb{R}$ ,*

$$T_{n,\beta}(aX_1 + b, \dots, aX_n + b) = T_{n,\beta}(X_1, \dots, X_n).$$

*Demonstração.* Uma vez que  $T_{n,\beta}$  depende da amostra através de  $\hat{Y}_j = \tau(X_j, \hat{\theta})$ , para  $j = 1, \dots, n$ , por forma a estabelecer a invariância de  $T_{n,\beta}$  basta mostrar que

$$\tau(aX_j + b, \hat{\theta}(aX_1 + b, \dots, aX_n + b)) = \tau(X_j, \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)).$$

De facto, atendendo a que

$$\hat{\theta}(aX_1 + b, \dots, aX_n + b) = (a\hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n) + b, a\hat{\theta}_2(X_1, \dots, X_n)),$$

temos

$$\begin{aligned} & \tau(aX_j + b, \hat{\theta}(aX_1 + b, \dots, aX_n + b)) \\ &= \tau(aX_j + b, (a\hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n) + b, a\hat{\theta}_2(X_1, \dots, X_n))) \\ &= \frac{aX_j + b - a\hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n) - b}{a\hat{\theta}_2(X_1, \dots, X_n)} \\ &= \frac{X_j - \hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n)}{\hat{\theta}_2(X_1, \dots, X_n)} \\ &= \tau(X_j, \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos a invariância de  $T_{n,\beta}$  para transformações de escala dos dados no caso da família  $\mathfrak{F}_0$  definida por (4.2).

**Proposição 4.2** *Seja  $\mathfrak{F}_0$  a família definida em (4.2) e  $\hat{\theta}$  um estimador de  $\theta$  que verifica, para todo o  $a \in \mathbb{R}^+$ ,*

$$\hat{\theta}(aX_1, \dots, aX_n) = a\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n).$$

*Então,  $T_{n,\beta}$  é invariante para transformações de escala dos dados, isto é,*

$$T_{n,\beta}(aX_1, \dots, aX_n) = T_{n,\beta}(X_1, \dots, X_n),$$

*para todo o  $a \in \mathbb{R}^+$ .*

#### 4.1.2. Expressões alternativas para $T_{n,\beta}$

A expressão obtida em (3.3) no caso de hipótese nula simples para a estatística (3.2) mantém-se válida neste capítulo para a estatística (4.4), tomando  $\tau(X_j, \hat{\theta})$  no lugar de  $X_j$ , para  $j = 1, \dots, n$ , a qual é importante para o seu cálculo numérico no estudo de simulação que apresentamos no capítulo final, bem como na proposição que se segue. Esta estabelece uma outra representação para a estatística de teste  $T_{n,\beta}$  em (4.4),

que nos vai ser útil na próxima secção. Para o efeito, vamos considerar novamente as funções  $g_c$  e  $g_s$  definidas em (3.5) e (3.6), as quais verificam para  $\ell = c, s$  e  $x \in \mathbb{R}$

$$\int g_\ell^2(\tau(x, \theta_0), t) dt < +\infty \quad (4.5)$$

e, para  $Y_{j0} = \tau(X_j, \theta_0)$ , com  $j = 1, \dots, n$ ,

$$E_{\theta_0}(g_\ell(Y_{j0}, t)) = 0, \quad (4.6)$$

onde denotamos por  $\theta_0$  o verdadeiro valor de  $\theta$  sob  $H_0$  e  $E_{\theta_0}$  a esperança matemática calculada sob  $H_0$ .

**Proposição 4.3** *A estatística de teste  $T_{n,\beta}$  pode ser escrita na forma*

$$T_{n,\beta} = \|Z_{n,c}\|^2 + \|Z_{n,s}\|^2,$$

onde, para  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$Z_{n,c}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n g_c(\hat{Y}_j, t)$$

e

$$Z_{n,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n g_s(\hat{Y}_j, t).$$

*Demonstração.* Para  $\ell = c, s$  temos

$$\|Z_{n,\ell}\|^2 = \int Z_{n,\ell}^2(t) dt = \frac{1}{n} \int \sum_{j,k=1}^n g_\ell(\hat{Y}_j, t) g_\ell(\hat{Y}_k, t) dt.$$

Assim, reparemos que  $\|Z_{n,c}\|^2 + \|Z_{n,s}\|^2$  é precisamente a soma (3.9) que surge na demonstração do Lema 3.1 com  $\tau(X_j, \hat{\theta})$  no lugar de  $X_j$ , para  $j = 1, \dots, n$ , pelo que, em analogia ao que concluímos nessa demonstração, basta agora notar que  $\|Z_{n,c}\|^2 + \|Z_{n,s}\|^2$  é exatamente igual a (3.3), tomando  $\tau(X_j, \hat{\theta})$  no lugar de  $X_j$ . ■

## 4.2. Comportamento assintótico de $T_{n,\beta}$ sob $H_0$

Para obtermos o comportamento assintótico da estatística de teste  $T_{n,\beta}$  sob a hipótese nula é necessário supor as condições seguintes sobre  $\hat{\theta}$  e sobre as funções  $g_c$  e  $g_s$  definidas em (3.5) e (3.6). De relembrar que denotamos por  $\theta_0$  o verdadeiro valor de  $\theta$  sob  $H_0$  e por  $k$  a sua dimensão.

(C1) Sob  $H_0$ , tem-se

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0)_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \Psi_i(X_j, \theta_0) + o_P(1),$$

onde, para  $i = 1, \dots, k$ ,  $(\hat{\theta} - \theta_0)_i$  representa a  $i$ -ésima coordenada do vetor  $\hat{\theta} - \theta_0$  e  $\Psi_i$  a  $i$ -ésima coordenada de uma função vetorial mensurável  $\Psi$ , tal que

$$E_{\theta_0}(\Psi_i(X_1, \theta_0)) = 0 \text{ e } E_{\theta_0}(\Psi_i^2(X_1, \theta_0)) < +\infty.$$

Esta condição estabelece que sendo  $\theta_0$  o verdadeiro valor de  $\theta$  sob  $H_0$ , o estimador  $\hat{\theta}$  é um estimador convergente em probabilidade de  $\theta_0$  e, além disso,  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0)$  é assintoticamente normal. Sob certas condições de regularidade, esta hipótese é satisfeita pelo estimador dos momentos e pelo estimador da máxima verosimilhança (ver a este propósito van der Vaart, 2000, Teorema 5.41).

(C2) Para  $\ell = c, s$  e  $i = 1, \dots, k$  as derivadas parciais

$$q_{\ell i}(x, \theta, t) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} g_{\ell}(\tau(x, \theta), t)$$

existem para todo o  $x, t \in \mathbb{R}$  e são contínuas uniformemente relativamente a  $x$ , isto é,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \|\theta - \theta_0\| < \delta \Rightarrow \|q_{\ell i}(x, \theta, \cdot) - q_{\ell i}(x, \theta_0, \cdot)\| < \varepsilon.$$

Denotaremos o vetor destas derivadas por  $q_{\ell}$ .

(C3) Para  $\ell = c, s$  e  $i = 1, \dots, k$ ,

$$\|q_{\ell i}(x, \theta_0, \cdot)\|^2 < +\infty,$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$  e, além disso,

$$E_{\theta_0}(\|q_{\ell i}(X_1, \theta_0, \cdot)\|^2) < +\infty.$$

Estamos agora em condições de estabelecer os resultados que se seguem nesta secção, para os quais admitimos estar sob a hipótese nula.

**Lema 4.4** *Nas condições (C1) e (C2), para  $t \in \mathbb{R}$  e  $\ell = c, s$ , é válida a igualdade*

$$Z_{n,\ell}(t) = Z'_{n,\ell}(t) + \varepsilon_{1n}(t),$$

onde  $Z_{n,\ell}$  é definida na Proposição 4.3,

$$Z'_{n,\ell}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n g_{\ell}(Y_{j0}, t) + \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_{\ell}(X_j, \theta_0, t) \right)^T \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0),$$

e

$$\|\varepsilon_{1n}\| = o_P(1).$$

*Demonstração.* Usando o teorema do valor médio para funções reais de variável vetorial sabemos que existe  $\tilde{\theta} \in ]\theta_0, \hat{\theta}[$  tal que

$$g_\ell(\hat{Y}_j, t) = g_\ell(\tau(X_j, \hat{\theta}), t) = g_\ell(\tau(X_j, \theta_0), t) + q_\ell(X_j, \tilde{\theta}, t)^T (\hat{\theta} - \theta_0),$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned} Z_{n,\ell}(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n g_\ell(\hat{Y}_j, t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n g_\ell(Y_{j0}, t) + \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_\ell(X_j, \tilde{\theta}, t) \right)^T \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n g_\ell(Y_{j0}, t) + \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_\ell(X_j, \theta_0, t) \right)^T \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \\ &\quad + \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (q_\ell(X_j, \tilde{\theta}, t) - q_\ell(X_j, \theta_0, t)) \right)^T \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \\ &= Z'_{n,\ell}(t) + \varepsilon_{1n}(t), \end{aligned}$$

sendo

$$\varepsilon_{1n}(t) = \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (q_\ell(X_j, \tilde{\theta}, t) - q_\ell(X_j, \theta_0, t)) \right)^T \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0).$$

Resta assim provar que, de facto,  $\|\varepsilon_{1n}\| = o_P(1)$ . Para tal, comecemos por mostrar que

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) = O_P(1). \quad (4.7)$$

Pela hipótese **(C1)** sabemos que  $E_{\theta_0}(\Psi_i(X_1, \theta_0)) = 0$  e  $E_{\theta_0}(\Psi_i^2(X_1, \theta_0)) < +\infty$ , para  $i = 1, \dots, k$ . Além disso, sendo  $X_1, \dots, X_n$  variáveis aleatórias reais i.i.d, temos

$$E_{\theta_0} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \Psi_i(X_j, \theta_0) \right)^2 \right] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E_{\theta_0}(\Psi_i^2(X_j, \theta_0)) = E_{\theta_0}(\Psi_i^2(X_1, \theta_0)) < +\infty,$$

o que permite concluir que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \Psi_i(X_j, \theta_0) = O_P(1).$$

Atendendo à hipótese **(C1)**, fica assim provado (4.7).

Por forma a concluir que  $\|\varepsilon_{1n}\| = o_P(1)$ , basta agora mostrar que para qualquer  $\varepsilon > 0$ , se tem

$$P \left( \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (q_{\ell i}(X_j, \tilde{\theta}, \cdot) - q_{\ell i}(X_j, \theta_0, \cdot)) \right\| \geq \varepsilon \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (4.8)$$



Pela hipótese **(C2)** sabemos que, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para  $\|\theta - \theta_0\| < \delta$ , se tem

$$\|q_{\ell i}(x, \theta, \cdot) - q_{\ell i}(x, \theta_0, \cdot)\| < \varepsilon, \quad (4.9)$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Mais, como  $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta_0$  e  $\|\tilde{\theta} - \theta_0\| \leq \|\hat{\theta} - \theta_0\|$ , sabemos que para qualquer  $\delta_0 > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq n_0$  se tem  $P(\|\tilde{\theta} - \theta_0\| \geq \delta) < \delta_0$ .

Assim,

$$\begin{aligned} & P\left(\left\|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (q_{\ell i}(X_j, \tilde{\theta}, \cdot) - q_{\ell i}(X_j, \theta_0, \cdot))\right\| \geq \varepsilon\right) \\ & \leq P\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|q_{\ell i}(X_j, \tilde{\theta}, \cdot) - q_{\ell i}(X_j, \theta_0, \cdot)\| \geq \varepsilon\right) \\ & = P\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|q_{\ell i}(X_j, \tilde{\theta}, \cdot) - q_{\ell i}(X_j, \theta_0, \cdot)\| \geq \varepsilon, \|\tilde{\theta} - \theta_0\| < \delta\right) \\ & \quad + P\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|q_{\ell i}(X_j, \tilde{\theta}, \cdot) - q_{\ell i}(X_j, \theta_0, \cdot)\| \geq \varepsilon, \|\tilde{\theta} - \theta_0\| \geq \delta\right) \\ & \leq P(\|\tilde{\theta} - \theta_0\| \geq \delta) < \delta_0, \end{aligned}$$

uma vez que, de acordo com (4.9),

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|q_{\ell i}(X_j, \tilde{\theta}, \cdot) - q_{\ell i}(X_j, \theta_0, \cdot)\| \geq \varepsilon, \|\tilde{\theta} - \theta_0\| < \delta\right) = 0,$$

ficando assim provado (4.8). ■

**Lema 4.5** *Nas condições **(C1)** e **(C3)**, para  $t \in \mathbb{R}$  e  $\ell = c, s$ , é válida a igualdade*

$$Z'_{n,\ell}(t) = Z''_{n,\ell}(t) + \varepsilon_{2n}(t),$$

com  $Z'_{n,\ell}$  definida no Lema 4.4,

$$Z''_{n,\ell}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n g_{\ell}(Y_{j0}, t) + E_{\theta_0}(q_{\ell}(X_1, \theta_0, t))^T \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0)$$

e

$$\|\varepsilon_{2n}\| = o_P(1).$$

*Demonstração.* Partindo da expressão de  $Z'_{n,\ell}(t)$ , temos

$$Z'_{n,\ell}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n g_{\ell}(Y_{j0}, t) + \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_{\ell}(X_j, \theta_0, t)\right)^T \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n g_\ell(Y_{j0}, t) + (E_{\theta_0}(q_\ell(X_1, \theta_0, t)))^T \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \\
 &\quad + \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_\ell(X_j, \theta_0, t) - E_{\theta_0}(q_\ell(X_1, \theta_0, t)) \right)^T \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \\
 &= Z''_{n,\ell}(t) + \varepsilon_{2n}(t),
 \end{aligned}$$

sendo

$$\varepsilon_{2n}(t) = \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_\ell(X_j, \theta_0, t) - E_{\theta_0}(q_\ell(X_1, \theta_0, t)) \right)^T \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0).$$

Seguindo o mesmo raciocínio da demonstração do Lema 4.4 e atendendo a que  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) = O_P(1)$ , para mostrar que  $\|\varepsilon_{2n}\| = o_P(1)$  basta provar que, para  $i = 1, \dots, k$ ,

$$\|D_{i,n}\| = o_P(1), \tag{4.10}$$

onde

$$D_{i,n}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (q_{\ell i}(X_j, \theta_0, t) - E_{\theta_0}(q_{\ell i}(X_1, \theta_0, t))).$$

Usando o teorema de Fubini e atendendo a que as variáveis aleatórias reais  $X_1, \dots, X_n$  são i.i.d., temos

$$E_{\theta_0}(\|D_{i,n}\|^2) = \frac{1}{n} \int E_{\theta_0} \left( (q_{\ell i}(X_1, \theta_0, t) - E_{\theta_0}(q_{\ell i}(X_1, \theta_0, t)))^2 \right) dt.$$

Atendendo ainda à hipótese **(C3)**, vem

$$\begin{aligned}
 E_{\theta_0}(\|D_{i,n}\|^2) &\leq \frac{1}{n} \int E_{\theta_0}(q_{\ell i}^2(X_1, \theta_0, t)) dt \\
 &= \frac{1}{n} E_{\theta_0} \int q_{\ell i}^2(X_1, \theta_0, t) dt \\
 &= \frac{1}{n} E_{\theta_0}(\|q_{\ell i}(X_1, \theta_0, \cdot)\|^2) = o_P(1),
 \end{aligned}$$

o que permite concluir (4.10). ■

**Lema 4.6** *Nas condições (C1) e (C3), para  $t \in \mathbb{R}$  e  $\ell = c, s$ , é válida a igualdade*

$$Z''_{n,\ell}(t) = W_{n,\ell}(t) + \varepsilon_{3n}(t),$$

com

$$W_{n,\ell}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n W_\ell(X_j, t),$$

e

$$\|\varepsilon_{3n}\| = o_P(1),$$

onde, para  $x, t \in \mathbb{R}$ ,

$$W_\ell(x, t) = g_\ell(\tau(x, \theta_0), t) + (E_{\theta_0}(q_\ell(X_1, \theta_0, t)))^T \Psi(x, \theta_0). \tag{4.11}$$

*Demonstração.* Da hipótese **(C1)** temos que

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \Psi(X_j, \theta_0) + \varepsilon_n,$$

onde

$$\varepsilon_n = o_P(1).$$

Assim, substituindo  $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$  na expressão de  $Z''_{n,\ell}(t)$ , vem

$$\begin{aligned} Z''_{n,\ell}(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n g_\ell(Y_{j0}, t) + (E_{\theta_0}(q_\ell(X_1, \theta_0, t)))^T \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \Psi(X_j, \theta_0) + \varepsilon_n \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \left( g_\ell(Y_{j0}, t) + (E_{\theta_0}(q_\ell(X_1, \theta_0, t)))^T \Psi(X_j, \theta_0) \right) \\ &\quad + (E_{\theta_0}(q_\ell(X_1, \theta_0, t)))^T \varepsilon_n \\ &= W_{n,\ell}(t) + \varepsilon_{3n}(t), \end{aligned}$$

com

$$\varepsilon_{3n}(t) = \sum_{i=1}^k E_{\theta_0}(q_{\ell i}(X_1, \theta_0, t)) \varepsilon_{ni},$$

onde  $\varepsilon_{ni}$  é a  $i$ -ésima componente de  $\varepsilon_n$ .

Atendendo à hipótese **(C3)**

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_{3n}\| &\leq \sum_{i=1}^k |\varepsilon_{ni}| \|E_{\theta_0}(q_{\ell i}(X_1, \theta_0, \cdot))\| \\ &\leq \sum_{i=1}^k |\varepsilon_{ni}| (E_{\theta_0}(\|q_{\ell i}(X_1, \theta_0, \cdot)\|^2))^{\frac{1}{2}} = o_P(1), \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Antes de enunciarmos o principal resultado desta secção verifiquemos que a função  $W_\ell$  definida em (4.11) satisfaz as propriedades seguintes:

$$\|W_\ell(x, \cdot)\|^2 < +\infty, \tag{4.12}$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$E_{\theta_0}(\|W_\ell(X_1, \cdot)\|^2) < +\infty \tag{4.13}$$

e ainda

$$E_{\theta_0}(W_\ell(X_1, t)) = 0. \tag{4.14}$$

Para verificar (4.12) basta atender a (4.5) e ainda a que

$$\int E_{\theta_0}^2(q_{\ell i}(X_1, \theta_0, t)) dt < +\infty,$$

o que é verdade, uma vez que, pelo teorema de Fubini e pela condição **(C3)**,

$$\begin{aligned} \int E_{\theta_0}^2(q_{\ell i}(X_1, \theta_0, t)) dt &\leq \int E_{\theta_0}(q_{\ell i}^2(X_1, \theta_0, t)) dt \\ &= E_{\theta_0}\left(\int q_{\ell i}^2(X_1, \theta_0, t) dt\right) \\ &= E_{\theta_0}(\|q_{\ell i}(X_1, \theta_0, \cdot)\|^2) < +\infty. \end{aligned}$$

A propriedade (4.13) decorre das condições **(C1)** e **(C3)**, em particular, do facto de  $E_{\theta_0}(\Psi_i^2(X_j, \theta_0)) < +\infty$  e  $E_{\theta_0}(\|q_{\ell i}(X_1, \theta_0, \cdot)\|^2) < +\infty$ .

Por último, por (4.6) e atendendo ainda a **(C1)** e **(C3)**, temos

$$\begin{aligned} E_{\theta_0}(W_{\ell}(X_j, t)) &= E_{\theta_0}(g_{\ell}(Y_{j0}, t)) + E_{\theta_0}(E_{\theta_0}(q_{\ell}(X_1, \theta_0, t))^T \Psi(X_j, \theta)) \\ &= E_{\theta_0}(g_{\ell}(Y_{j0}, t)) + (E_{\theta_0}(q_{\ell}(X_1, \theta_0, t)))^T E_{\theta_0}(\Psi(X_j, \theta)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

verificando-se assim (4.14).

**Teorema 4.7** *Nas condições **(C1)**, **(C2)** e **(C3)**, a estatística de teste  $T_{n,\beta}$  pode ser representada na forma*

$$T_{n,\beta} = \|W_{n,c}\|^2 + \|W_{n,s}\|^2 + o_P(1),$$

onde  $W_{n,\ell}$  é a função definida no Lema 4.6.

*Demonstração.* Pelos lemas anteriores, temos que, para  $\ell = c, s$ ,

$$Z_{n,\ell}(t) = W_{n,\ell}(t) + \varepsilon_{4n}(t),$$

onde

$$\varepsilon_{4n}(t) = \varepsilon_{1n}(t) + \varepsilon_{2n}(t) + \varepsilon_{3n}(t)$$

é tal que

$$\|\varepsilon_{4n}\| = o_P(1). \tag{4.15}$$

Ora,

$$\begin{aligned} \|Z_{n,\ell}\|^2 &= \|W_{n,\ell} + \varepsilon_{4n}\|^2 \\ &= \|W_{n,\ell}\|^2 + \|\varepsilon_{4n}\|^2 + 2 \int W_{n,\ell}(t) \varepsilon_{4n}(t) dt \\ &= \|W_{n,\ell}\|^2 + 2 \int W_{n,\ell}(t) \varepsilon_{4n}(t) dt + o_P(1), \end{aligned} \tag{4.16}$$

tendo-se, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int W_{n,\ell}(t)\varepsilon_{4n}(t) dt \right| \leq \|W_{n,\ell}\| \|\varepsilon_{4n}\|. \quad (4.17)$$

Atendendo a (4.13), usando o teorema de Fubini, e uma vez que, para  $j = 1, \dots, n$ , as variáveis aleatórias reais  $W_\ell(X_j, t)$  são independentes e, por (4.14), possuem média zero, temos

$$\begin{aligned} E_{\theta_0}(\|W_{n,\ell}\|^2) &= \int E_{\theta_0} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n W_\ell(X_j, t) \right)^2 dt \\ &= \int E_{\theta_0}(W_\ell^2(X_1, t)) dt \\ &= E_{\theta_0}(\|W_\ell(X_1, \cdot)\|^2) < +\infty, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|W_{n,\ell}\| = O_P(1).$$

Aplicando agora (4.15), (4.16) e (4.17), decorre imediatamente que

$$\|Z_{n,\ell}\|^2 = \|W_{n,\ell}\|^2 + o_P(1).$$

Assim, relembrando a expressão para  $T_{n,\beta}$  obtida na Proposição 4.3, tem-se

$$T_{n,\beta} = \|W_{n,c}\|^2 + \|W_{n,s}\|^2 + o_P(1). \quad \blacksquare$$

### 4.3. Distribuição assintótica de $T_{n,\beta}$ sob $H_0$

No sentido de simplificar a determinação da distribuição assintótica de  $T_{n,\beta}$  vamos reescrevê-la na forma como é apresentada no próximo lema. Para o efeito, defina-se agora a função  $h$ , para  $x, y \in \mathbb{R}$ , como sendo

$$h(x, y) = \int \left( W_c(x, t)W_c(y, t) + W_s(x, t)W_s(y, t) \right) dt, \quad (4.18)$$

com  $W_\ell$  definida em (4.11), para  $\ell = c, s$ . Esta função está bem definida atendendo a (4.12).

**Lema 4.8** *Nas condições do Teorema 4.7, a estatística de teste  $T_{n,\beta}$  pode ser escrita na forma*

$$T_{n,\beta} = (n-1)U_{n,\beta} + V_{n,\beta} + o_P(1),$$

onde

$$U_{n,\beta} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq j < k \leq n} h(X_j, X_k)$$

e

$$V_{n,\beta} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n h(X_j, X_j).$$

*Demonstração.* Já vimos no Teorema 4.7 que  $T_{n,\beta} = \|W_{n,c}\|^2 + \|W_{n,s}\|^2 + o_P(1)$ .

Assim, provando que  $\|W_{n,c}\|^2 + \|W_{n,s}\|^2 = (n-1)U_{n,\beta} + V_{n,\beta}$ , obtemos o pretendido.

Ora, para  $\ell = c, s$  temos

$$\begin{aligned} \|W_{n,\ell}\|^2 &= \int W_{n,\ell}^2(t) dt = \frac{1}{n} \int \left( \sum_{j=1}^n W_\ell(X_j, t) \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int (W_\ell(X_j, t))^2 dt + \frac{2}{n} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \int W_\ell(X_j, t) W_\ell(X_k, t) dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\|W_{n,c}\|^2 + \|W_{n,s}\|^2 \\ &= \frac{2}{n} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \int \left( W_c(X_j, t) W_c(X_k, t) + W_s(X_j, t) W_s(X_k, t) \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int \left( W_c^2(X_j, t) + W_s^2(X_j, t) \right) dt \\ &= (n-1) \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq j < k \leq n} h(X_j, X_k) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n h(X_j, X_j) \\ &= (n-1)U_{n,\beta} + V_{n,\beta}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorema 4.9** *Sob  $H_0$ , tem-se*

$$T_{n,\beta} \xrightarrow{d} T_\beta := U_\beta + E_{\theta_0}(h(X_1, X_1))$$

com

$$U_\beta = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j (Z_j^2 - 1),$$

onde  $Z_j$ ,  $j \geq 1$ , são variáveis aleatórias reais i.i.d. com a lei Normal standard e  $\lambda_j$ ,  $j \geq 1$ , são os valores próprios associados ao operador  $A_h$  de  $L^2(\mathbb{R}, F_0)$  em  $L^2(\mathbb{R}, F_0)$  definido, para  $g \in L^2(\mathbb{R}, F_0)$ , por

$$A_h g(x) = \int h(x, y) g(y) dF_0(y), \text{ com } x \in \mathbb{R},$$

onde  $h$  é a função definida em (4.18).

*Demonstração.* De forma análoga ao que fizemos na demonstração do Teorema 3.2, verifica-se que a função  $h$  definida em (4.18) satisfaz as condições seguintes:

- (i)  $h$  é simétrica, isto é,  $h(x, y) = h(y, x)$  (decorre da definição de  $h$ );
- (ii)  $E_{\theta_0}(h^2(X_1, X_2)) < +\infty$  (decorre de **(C1)**, **(C3)** e ainda de (4.5));

(iii) Para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ ,  $E_{\theta_0}(h(x, X_2)) = 0$ .

Para verificar (iii), notemos que, por **(C1)**,

$$E_{\theta_0}(g_c(Y_{20}, t)) = E_{\theta_0}(g_s(Y_{20}, t)) = 0 \text{ e } E_{\theta_0}(\Psi(X_2, \theta_0)) = 0,$$

pelo que, usando o teorema de Fubini, temos, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} & E_{\theta_0}(h(x, X_2)) \\ &= \int h(x, X_2) dF_{\theta_0}(x_2) \\ &= \iint W_c(x, t)W_c(x_2, t) dt dF_{\theta_0}(x_2) + \iint W_s(x, t)W_s(x_2, t) dt dF_{\theta_0}(x_2) \\ &= \int E_{\theta_0}(W_c(x, t)W_c(X_2, t)) dt + \int E_{\theta_0}(W_s(x, t)W_s(X_2, t)) dt \\ &= \int W_c(x, t)E_{\theta_0}(W_c(X_2, t)) dt + \int W_s(x, t)E_{\theta_0}(W_s(X_2, t)) dt \\ &= \int W_c(x, t)E_{\theta_0}(g_c(Y_{20}, t) + (E_{\theta_0}(q_c(X_1, \theta_0, t)))^T \Psi(X_2, \theta_0)) dt \\ &\quad + \int W_s(x, t)E_{\theta_0}(g_s(Y_{20}, t) + (E_{\theta_0}(q_s(X_1, \theta_0, t)))^T \Psi(X_2, \theta_0)) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$U_{n,\beta} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq j < k \leq n} h(X_j, X_k)$$

é uma U-estatística degenerada e podemos inferir pelo Teorema 5.5.2 de Serfling (1980) que

$$nU_{n,\beta} \xrightarrow{d} U_\beta,$$

com

$$U_\beta = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j (Z_j^2 - 1).$$

Além disso, por (4.13),

$$E_{\theta_0}(|h(X_1, X_1)|) < +\infty,$$

pelo que

$$V_{n,\beta} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n h(X_j, X_j) \xrightarrow{d} E_{\theta_0}(h(X_1, X_1)).$$

Portanto, pelo lema anterior, conclui-se o pretendido. ■

## 4.4. Convergência do teste

Analogamente ao que foi feito no caso do teste de ajustamento a uma distribuição fixa, vamos considerar o teste de região crítica

$$\{T_{n,\beta} > c_{n,\beta}(\alpha)\},$$

onde  $c_{n,\beta}(\alpha)$  é o quantil de ordem  $1 - \alpha$  da distribuição de  $T_{n,\beta}$  sob a hipótese nula. Tal como provámos na Subsecção 4.1.1, a estatística  $T_{n,\beta}$  é invariante sob certas condições relativamente a  $\hat{\theta}$ , as quais supomos agora verdadeiras, pelo que  $c_{n,\beta}(\alpha)$  não depende da distribuição considerada sob  $H_0$ .

Supomos ainda que, sob  $H_1$ , para algum  $\theta_1 \in \Theta$ , as condições **(C2)** e **(C3)** descritas no início da Secção 4.2 permanecem válidas e ainda que  $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta_1$ .

**Proposição 4.10** *O teste de região crítica (3.12) é um teste com nível de significância inferior ou igual  $\alpha$ , isto é, para todo o  $F \in \mathfrak{F}_0$*

$$P_F(T_{n,\beta} > c_{n,\beta}(\alpha)) \leq \alpha.$$

Além disso, o teste é de nível assintótico  $\alpha$ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_F(T_{n,\beta} > c_{n,\beta}(\alpha)) = \alpha,$$

para todo o  $F \in \mathfrak{F}_0$ .

*Demonstração.* Atendendo à invariância de  $T_{n,\beta}$ , para  $F \in \mathfrak{F}_0$ , temos

$$P_F(T_{n,\beta} > c_{n,\beta}(\alpha)) = P_{F_0}(T_{n,\beta} > c_{n,\beta}(\alpha)),$$

pelo que a demonstração segue os mesmos passos do caso de hipótese nula simples (ver Proposição 3.3). ■

**Lema 4.11** *Sendo  $F \in \mathfrak{F}_1$  e  $\varphi(\cdot; \beta)$  a sua função característica ponderada, tem-se que*

$$\frac{T_{n,\beta}}{n} = \int |\varphi_n(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta)|^2 dt \xrightarrow{P} \int |\varphi(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta)|^2 dt.$$

*Demonstração.* Sob  $H_1$ , aplicando a lei forte dos grandes números, temos

$$\varphi_{n1}(t; \beta) \xrightarrow{q.c.} \varphi_1(t; \beta),$$

com

$$\varphi_{n1}(t; \beta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W(Y_{j1}, t\beta) e^{itY_{j1}},$$

onde  $Y_{j1} = \tau(X_j, \theta_1)$ .

Assim, como  $|\varphi_{n1}(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta)|^2 \leq 4\left(\frac{1}{4}\right)^{2\beta|t|}$ , decorre, por aplicação do teorema da convergência dominada de Lebesgue, que

$$\int |\varphi_{n1}(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta)|^2 dt \xrightarrow{q.c.} \int |\varphi(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta)|^2 dt.$$



Basta agora mostrar que

$$\frac{T_{n,\beta}}{n} = \int |\varphi_n(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta)|^2 dt = \int |\varphi_{n1}(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta)|^2 dt + o_P(1).$$

Pela Proposição 4.3, temos que

$$\frac{T_{n,\beta}}{n} = \left\| \frac{Z_{n,c}}{\sqrt{n}} \right\|^2 + \left\| \frac{Z_{n,s}}{\sqrt{n}} \right\|^2,$$

onde  $Z_{n,\ell}$  é a função definida nessa mesma proposição, para  $\ell = c, s$ .

Usando o mesmo raciocínio da respectiva demonstração, também se prova que

$$\int |\varphi_{n1}(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta)|^2 dt = \left\| \frac{Z_{n,c}^*}{\sqrt{n}} \right\|^2 + \left\| \frac{Z_{n,s}^*}{\sqrt{n}} \right\|^2,$$

onde, para  $\ell = c, s$ ,

$$Z_{n,\ell}^*(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n g_\ell(Y_{j1}, t)n$$

sendo  $g_\ell$  para  $\ell = c, s$  as funções definidas em (3.5) e (3.6).

Aplicando agora o teorema do valor médio para funções reais de variável vetorial, sabemos que existe  $\tilde{\theta} \in ]\theta_1, \hat{\theta}[$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{Z_{n,\ell}(t)}{\sqrt{n}} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_\ell(\hat{Y}_j, t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_\ell(Y_{j1}, t) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_\ell(X_j, \tilde{\theta}, t)^T (\hat{\theta} - \theta_1) \\ &= \frac{Z_{n,\ell}^*(t)}{\sqrt{n}} + \varepsilon_n(t), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_n\| &\leq \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (q_\ell(X_j, \tilde{\theta}, \cdot) - q_\ell(X_j, \theta_1, \cdot))^T (\hat{\theta} - \theta_1) \right\| \\ &\quad + \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_\ell(X_j, \theta_1, \cdot)^T (\hat{\theta} - \theta_1) \right\|. \end{aligned}$$

Como, sob  $H_1$ ,  $\hat{\theta} - \theta_1 = o_P(1)$ , por um raciocínio análogo ao efetuado no final da demonstração do Lema 4.4 temos

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (q_\ell(X_j, \tilde{\theta}, \cdot) - q_\ell(X_j, \theta_1, \cdot))^T (\hat{\theta} - \theta_1) \right\| = o_P(1).$$

Por outro lado, por **(C3)**, temos

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_{\ell i}(X_j, \theta_1, \cdot) \right\| = O_P(1),$$

o que permite concluir que

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_{\ell i}(X_j, \theta_1, \cdot)^T (\hat{\theta} - \theta_1) \right\| = o_P(1).$$

e, conseqüentemente, que  $\|\varepsilon_n\| = o_P(1)$ .

Além disso,

$$\frac{Z_{n,\ell}^*}{\sqrt{n}} \xrightarrow{q.c.} E_{\theta_1}(g_\ell(Y_{11}, t)) = 0,$$

onde  $E_{\theta_1}$  denota a esperança matemática calculada sob  $H_1$  e, portanto,

$$\frac{Z_{n,\ell}^*}{\sqrt{n}} = o_P(1).$$

Assim, e atendendo à desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se

$$\left\| \frac{Z_{n,\ell}}{\sqrt{n}} \right\|^2 = \left\| \frac{Z_{n,\ell}^*}{\sqrt{n}} \right\|^2 + \|\varepsilon_n\|^2 + 2 \int \frac{Z_{n,\ell}^*}{\sqrt{n}}(t) \varepsilon_n(t) dt,$$

com

$$\left| \int \frac{Z_{n,\ell}^*}{\sqrt{n}}(t) \varepsilon_n(t) dt \right| \leq \left\| \frac{Z_{n,\ell}^*}{\sqrt{n}} \right\| \|\varepsilon_n\| = o_P(1).$$

Fica assim provado que

$$\left\| \frac{Z_{n,\ell}}{\sqrt{n}} \right\|^2 = \left\| \frac{Z_{n,\ell}^*}{\sqrt{n}} \right\|^2 + o_P(1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{T_{n,\beta}}{n} &= \left\| \frac{Z_{n,c}}{\sqrt{n}} \right\|^2 + \left\| \frac{Z_{n,s}}{\sqrt{n}} \right\|^2 \\ &= \left\| \frac{Z_{n,c}^*}{\sqrt{n}} \right\|^2 + \left\| \frac{Z_{n,s}^*}{\sqrt{n}} \right\|^2 + o_P(1) \\ &= \int |\varphi_{n1}(t; \beta) - \varphi_0(t; \beta)|^2 dt + o_P(1), \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ■

**Teorema 4.12** *O teste de região crítica (3.12) é convergente para qualquer distribuição alternativa  $F \in \mathfrak{F}_1$  cuja função característica ponderada  $\varphi$  é tal que  $\varphi(\cdot; \beta) \neq \varphi_0(\cdot; \beta)$ , isto é,*

$$P_F(T_{n,\beta} > c_{n,\beta}(\alpha)) \longrightarrow 1, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

*Demonstração.* A demonstração é consequência do lema anterior e segue os mesmos passos do caso de hipótese nula simples (ver Teorema 3.4). ■

## 4.5. A família das distribuições Logísticas

A família das distribuições Logísticas de parâmetros  $\mu$  e  $\lambda$  dada por

$$\mathfrak{F}_0 = \left\{ F_0 \left( \frac{\cdot - \mu}{\lambda} \right) : \mu \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^+ \right\}, \quad (4.19)$$

onde, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$F_0(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}},$$

é alvo de interesse para o estudo de simulação que apresentamos no próximo capítulo.

Para esta família, as condições descritas no início da Secção 4.2 são válidas.

No que diz respeito à condição **(C1)** prova-se que ela é satisfeita tomando para estimadores de  $\mu$  e  $\lambda$  os estimadores obtidos pelo método de estimação dos momentos, ou seja,  $(\hat{\mu}, \hat{\lambda}) = (\bar{X}_n, \frac{\sqrt{3}}{\pi} S_n)$ , ou pelo método de estimação da máxima verosimilhança. Para tal, começamos por apresentar alguns detalhes dessa verificação no caso do método dos momentos. Sendo  $\theta_0 = (\mu_0, \lambda_0)$  o verdadeiro valor de  $\theta$  sob  $H_0$ , temos

$$\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu_0) = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \Psi_1(X_i, \theta_0),$$

onde, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\Psi_1(x, \theta_0) = x - \mu_0$$

é tal que

$$E_{\theta_0}(\Psi_1(X_1, \theta_0)) = 0 \text{ e } E_{\theta_0}(\Psi_1^2(X_1, \theta_0)) < +\infty.$$

Por outro lado, atendendo a que

$$S_n^2 - \sigma_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - \sigma_0^2 - \mu_0(2X_i - \mu_0)) - (\bar{X}_n - \mu_0)^2.$$

e

$$S_n - \sigma_0 = \frac{S_n^2 - \sigma_0^2}{2\sigma_0} \frac{2\sigma_0}{S_n + \sigma_0},$$

é possível verificar que

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda_0) = \sqrt{n} \frac{\sqrt{3}}{\pi} (S_n - \sigma_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \Psi_2(X_i, \theta_0) + o_P(1)$$

onde, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\Psi_2(x, \theta_0) = \frac{\lambda_0}{2} \left( \frac{3}{\pi^2} \left( \frac{x - \mu_0}{\lambda_0} \right)^2 - 1 \right)$$

é tal que

$$E_{\theta_0}(\Psi_2(X_1, \theta_0)) = 0 \text{ e } E_{\theta_0}(\Psi_2^2(X_1, \theta_0)) < +\infty.$$

Quanto ao método da máxima verosimilhança, os estimadores  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\lambda}$  por ele obtidos verificam **(C1)** para

$$\Psi_1(x, \theta_0) = 3\lambda_0 \frac{1 - e^{-\frac{x-\mu_0}{\lambda_0}}}{1 + e^{-\frac{x-\mu_0}{\lambda_0}}}$$

e

$$\Psi_2(x, \theta_0) = \frac{9\lambda_0}{\pi^2 + 3} \left( \frac{x - \mu_0}{\lambda_0} \frac{\left(1 - e^{-\frac{x-\mu_0}{\lambda_0}}\right)}{1 + e^{-\frac{x-\mu_0}{\lambda_0}}} - 1 \right).$$

Por forma a verificar a condição **(C2)** vamos, sem perda de generalidade, tomar  $\ell = c$ , sendo as funções  $q_{ci}$ ,  $i = 1, 2$ , dadas para  $x, t \in \mathbb{R}$  por

$$q_{c1}(x, \theta, t) = \frac{\partial}{\partial \mu} \left( g_c \left( \frac{x - \mu}{\lambda}, t \right) \right) = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial g_c}{\partial y} \left( \frac{x - \mu}{\lambda}, t \right) \quad (4.20)$$

e

$$q_{c2}(x, \theta, t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( g_c \left( \frac{x - \mu}{\lambda}, t \right) \right) = -\frac{x - \mu}{\lambda^2} \frac{\partial g_c}{\partial y} \left( \frac{x - \mu}{\lambda}, t \right), \quad (4.21)$$

onde  $g_c$  é a função definida em (3.5).

Para tal, basta mostrar que para  $\theta$  numa vizinhança de  $\theta_0$ ,

$$|q_{ci}(x, \theta, t) - q_{ci}(x, \theta_0, t)| \leq C(t) \|\theta - \theta_0\|, \quad (4.22)$$

com  $\int C^2(t) dt < +\infty$ .

Pelo teorema do valor médio para funções reais de variável vetorial sabemos que existe  $\bar{\theta} \in ]\theta, \theta_0[$ , tal que

$$\begin{aligned} |q_{ci}(x, \theta, t) - q_{ci}(x, \theta_0, t)| &= \left| \frac{\partial q_{ci}}{\partial \mu}(x, \bar{\theta}, t) \cdot (\mu - \mu_0) + \frac{\partial q_{ci}}{\partial \lambda}(x, \bar{\theta}, t) \cdot (\lambda - \lambda_0) \right| \\ &\leq \left( \left| \frac{\partial q_{ci}}{\partial \mu}(x, \bar{\theta}, t) \right| + \left| \frac{\partial q_{ci}}{\partial \lambda}(x, \bar{\theta}, t) \right| \right) \|\theta - \theta_0\| \end{aligned}$$

Efetuada alguns cálculos auxiliares, temos

$$\frac{\partial q_{c1}}{\partial \mu}(x, \bar{\theta}, t) = \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \left( g_c \left( \frac{x - \bar{\mu}}{\bar{\lambda}}, t \right) \right) = \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \frac{\partial^2 g_c}{\partial y^2} \left( \frac{x - \bar{\mu}}{\bar{\lambda}}, t \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{c1}}{\partial \lambda}(x, \bar{\theta}, t) &= \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \frac{\partial g_c}{\partial y} \left( \frac{x - \bar{\mu}}{\bar{\lambda}}, t \right) - \frac{1}{\bar{\lambda}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial g_c}{\partial y} \left( \frac{x - \bar{\mu}}{\bar{\lambda}}, t \right) \right) \\ &= \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \frac{\partial g_c}{\partial y} \left( \frac{x - \bar{\mu}}{\bar{\lambda}}, t \right) + \frac{x - \bar{\mu}}{\bar{\lambda}^3} \frac{\partial^2 g_c}{\partial y^2} \left( \frac{x - \bar{\mu}}{\bar{\lambda}}, t \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial q_{c2}}{\partial \mu}(x, \bar{\theta}, t) = \frac{\partial q_{c1}}{\partial \lambda}(x, \bar{\theta}, t) \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{c2}}{\partial \lambda}(x, \bar{\theta}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left( g_c \left( \frac{x - \bar{\mu}}{\bar{\lambda}}, t \right) \right) \\ &= 2 \frac{x - \bar{\mu}}{\bar{\lambda}^3} \frac{\partial g_c}{\partial y} \left( \frac{x - \bar{\mu}}{\bar{\lambda}}, t \right) - \frac{x - \bar{\mu}}{\bar{\lambda}^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial g_c}{\partial y} \left( \frac{x - \bar{\mu}}{\bar{\lambda}}, t \right) \right) \\ &= 2 \frac{x - \bar{\mu}}{\bar{\lambda}^3} \frac{\partial g_c}{\partial y} \left( \frac{x - \bar{\mu}}{\bar{\lambda}}, t \right) + \frac{(x - \bar{\mu})^2}{\bar{\lambda}^4} \frac{\partial^2 g_c}{\partial y^2} \left( \frac{x - \bar{\mu}}{\bar{\lambda}}, t \right), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g_c}{\partial y}(y, t) \\ &= -t \sin(ty)W(y, t\beta) + \cos(ty)\beta|t|(F_0(y)(1 - F_0(y)))^{\beta|t|-1}f_0(y)(1 - 2F_0(y)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 g_c}{\partial y^2}(y, t) \\ &= -t^2 \cos(ty)W(y, t\beta) - 2t \sin(ty)\beta|t|(F_0(y)(1 - F_0(y)))^{\beta|t|-1}f_0(y)(1 - 2F_0(y)) \\ & \quad + \cos(ty)\beta|t|(\beta|t| - 1)(F_0(y)(1 - F_0(y)))^{\beta|t|-2}(f_0(y)(1 - 2F_0(y)))^2 \\ & \quad + \cos(ty)\beta|t|(F_0(y)(1 - F_0(y)))^{\beta|t|-1}(1 - 2F_0(y))f_0'(y) \\ & \quad - 2 \cos(ty)\beta|t|(F_0(y)(1 - F_0(y)))^{\beta|t|-1}f_0(y)^2. \end{aligned}$$

No caso da distribuição Logística de parâmetros 0 e 1 tem-se, para todo o  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{f_0(y)}{F_0(y)(1 - F_0(y))} = 1,$$

e

$$|f_0'(y)| = f_0(y) \left| \frac{e^{-y} - 1}{e^{-y} + 1} \right| \leq f_0(y) \quad \text{e} \quad f_0(y) \leq 1,$$

pelo que

$$\left| \frac{\partial g_c}{\partial y}(y, t) \right| \leq |t| \left( \frac{1}{4} \right)^{\beta|t|} + \beta|t| \left( \frac{1}{4} \right)^{\beta|t|} \quad (4.23)$$

e

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 g_c}{\partial y^2}(y, t) \right| & \leq t^2 \left( \frac{1}{4} \right)^{\beta|t|} + 2\beta t^2 \left( \frac{1}{4} \right)^{\beta|t|} + \beta|t|(|\beta|t| - 1) \left( \frac{1}{4} \right)^{\beta|t|} \\ & \quad + \beta|t| \left( \frac{1}{4} \right)^{\beta|t|} + 2\beta|t| \left( \frac{1}{4} \right)^{\beta|t|}. \end{aligned}$$

Logo, para  $i = 1, 2$ , as funções  $\frac{\partial q_{ci}}{\partial \mu}(x, \bar{\theta}, \cdot)$  e  $\frac{\partial q_{ci}}{\partial \lambda}(x, \bar{\theta}, \cdot)$  são em módulo limitadas por funções de  $t$  de quadrado integrável, ficando assim provado (4.22).

Atendendo a (4.20), (4.21) e (4.23) é fácil verificar que a condição **(C3)** é também ela válida.

#### 4.5.1. Observações

No trabalho desenvolvido por Meintanis, Swanepoel e Allison (2014) é exigida apenas a continuidade das funções  $q_c$  e  $q_s$  em  $\theta_0$  para cada  $x \in \mathbb{R}$  e não uniformemente relativamente a  $x$ . Contudo, esta condição revelou-se no decorrer deste trabalho

insuficiente para avançar na obtenção dos resultados assintóticos para  $T_{n,\beta}$ , em particular, na obtenção de (4.9) que surge na demonstração do Lema 4.4. Como tal, tivemos necessidade de impôr uma condição alternativa mais forte, aquela que é estabelecida em **(C2)**.

Por esta razão, esta condição surge como principal obstáculo para que o teste de ajustamento estudado neste capítulo seja usado para importantes famílias de distribuições como a Normal e a Exponencial. De facto, não conseguimos provar que a condição **(C2)** é válida para estas.

# Capítulo 5

## Estudo de simulação

Esta dissertação culmina com um estudo de simulação exploratório com o intuito principal de avaliar a potência empírica do teste em estudo no capítulo anterior para diferentes valores do parâmetro  $\beta$ , inspecionando uma possível influência deste parâmetro na potência do teste. Para tal, concentramo-nos no caso da família das distribuições Logísticas.

### 5.1. Testes incluídos no estudo

No seguimento da última secção do capítulo anterior, incluímos neste estudo o teste de ajustamento a uma família das distribuições Logísticas dada por (4.19), pelo que  $F_0$  representa daqui em diante a função de distribuição Logística de parâmetros  $\mu = 0$  e  $\lambda = 1$ . Sendo este teste baseado na estatística de teste dada por (4.4), ou seja, baseado na função Característica Ponderada, atribuímos-lhe a designação de teste CP.

Os valores tomados para o parâmetro  $\beta$  basearam-se nas escolhas de Meintanis, Swanepoel e Allison (2014) para o mesmo. No entanto, estendemos a gama de valores por eles considerada quer para valores à esquerda quer para valores à direita, ou seja, tomamos o conjunto

$$\{0.05, 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

para valores possíveis de  $\beta$ .

Atendendo à expressão da região crítica (3.12), uma vez que a que a distribubuição exata de  $T_{n,\beta}$  sob a hipótese nula é desconhecida, foi necessário primeiramente estimar os valores dos quantis  $c_{n,\beta}(\alpha)$ . Para o efeito, considerámos os níveis de significância habituais 0.01 e 0.05, tomámos diferentes tamanhos de amostras  $n$

$$\{10, 25, 50, 100, 200, 300\},$$

calculámos o valor da estatística  $T_{n,\beta}$  para  $10^5$  amostras desses tamanhos, geradas com distribuição  $F_0$ , e determinámos uma aproximação de  $c_{n,\beta}(\alpha)$  através da função

`quantile(.,type=7)`. A estimação dos parâmetros  $\mu$  e  $\lambda$  foi feita com recurso a dois métodos de estimação, nomeadamente, o método dos momentos e o método da máxima verosimilhança.

Posto isto, foram geradas  $10^4$  amostras de tamanho  $n$  de cada umas das alternativas, apresentadas na próxima secção, por forma a estimar a potência. Com  $10^4$  repetições a margem de erro para os intervalos de confiança a 99% e 95% para a proporção de rejeições não ultrapassa 1,5% e 1%, respetivamente.

Como referência, incluímos ainda no nosso estudo um teste de ajustamento baseado na estatística de teste proposta por Anderson e Darling (1952), que designaremos por teste AD, o qual foi estudado por Stephens (1979) no caso do teste de ajustamento a uma família de distribuições Logísticas. Este é também o teste que proporcionou, de um modo geral, melhores resultados no trabalho desenvolvido por Meintanis (2004), sendo esta a razão para o considerarmos neste estudo. Sendo  $F_0$  a função de distribuição Logística de parâmetros  $\mu = 0$  e  $\lambda = 1$  e  $F_n$  a função de distribuição empírica associada à amostra alatória  $(\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_n)$  definida por

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{]-\infty, x[}(\hat{Y}_j),$$

a estatística de teste proposta por Anderson e Darling ( $A^2$ ) é baseada na diferença quadrática ponderada entre  $F_n$  e  $F_0$ , mais precisamente,

$$A^2 = n \int (F_n(x) - F_0(x))^2 \frac{1}{F_0(x)(1 - F_0(x))} dF_0(x).$$

Em analogia ao teste CP, estimámos, para o teste AD, os quantis e a potência para cada tamanho  $n$  e para cada um dos métodos de estimação considerados. Os valores dos quantis empíricos obtidos tanto para o teste CP como para o teste AD encontram-se tabelados no Apêndice A.

Para os programas criados no software R, apresentados no Apêndice B, fizemos uso das packages `fitdistrplus`, para a estimação dos parâmetros através do método da máxima verosimilhança, `goftest`, no âmbito do teste AD, e ainda `ExtDist` e `triangle`, associadas às distribuições Laplace e Triangular (por serem duas das alternativas que consideramos).

## 5.2. Distribuições alternativas

O conjunto de distribuições alternativas escolhido teve por base as escolhas de Meintanis (2004), uma vez que este também considera um teste de ajustamento a uma família de distribuições Logísticas.



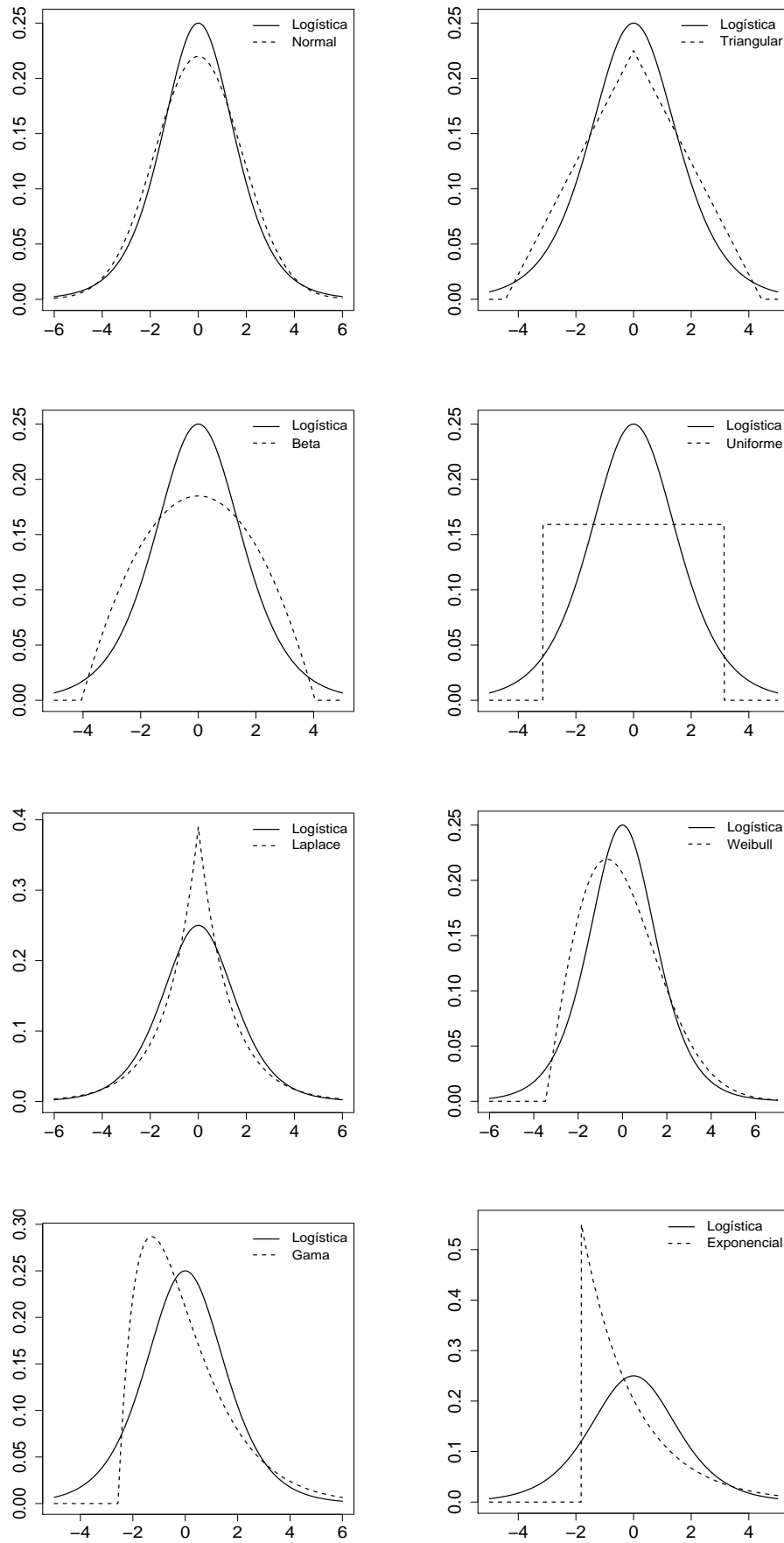


Figura 5.1. Distribuições alternativas consideradas no estudo de simulação.

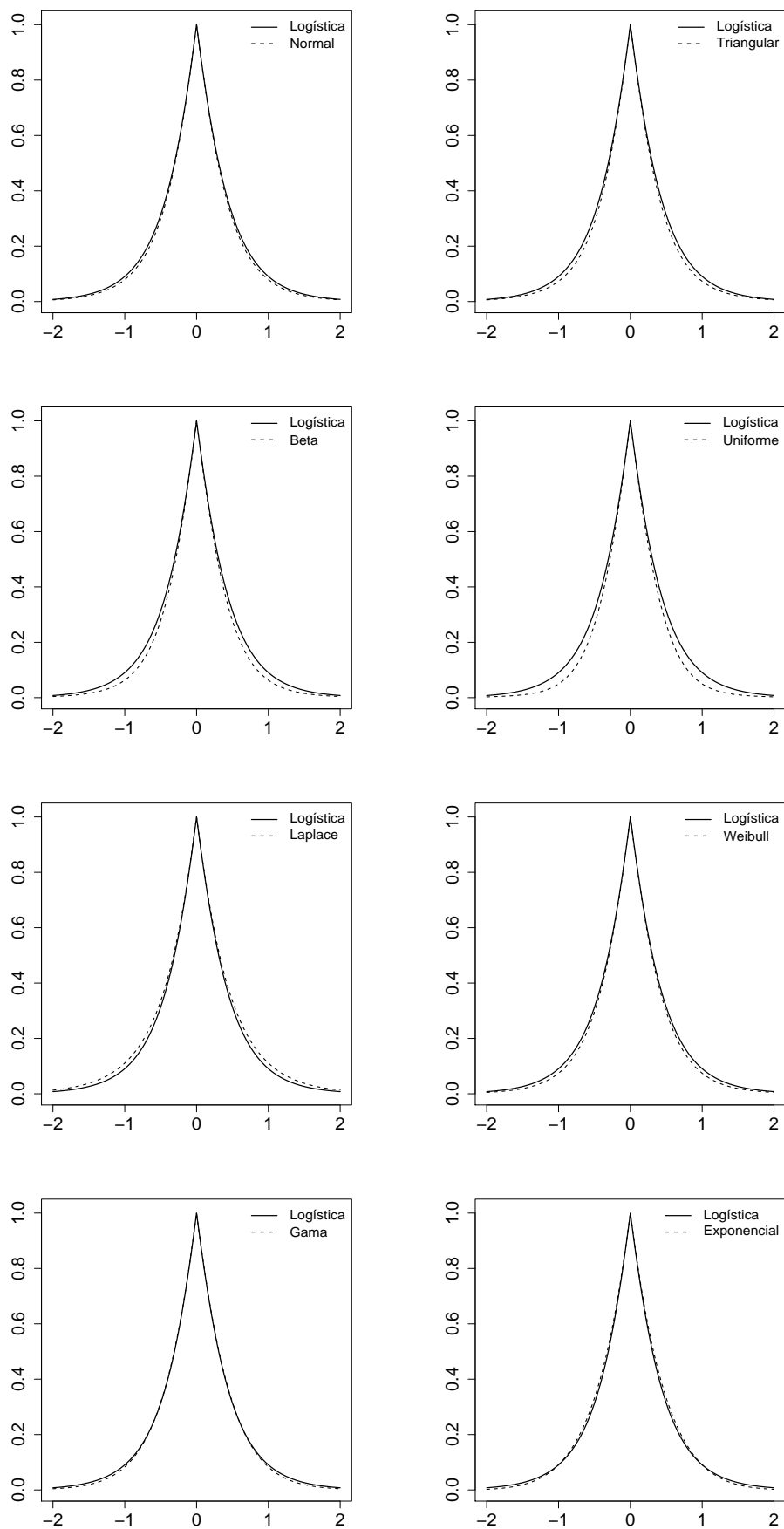


Figura 5.2. Funções características ponderadas das alternativas para  $\beta = 1$ .

Assim incluímos no nosso estudo, por um lado, distribuições simétricas como a Normal, Uniforme, Triangular, Laplace e Beta, esta última com ambos os parâmetros de forma iguais a 2, e, por outro, distribuições assimétricas como a Exponencial, Gama e Weibull, as duas últimas com parâmetro de forma igual a 2. A distribuição Laplace tem caudas mais pesadas do que a Logística, enquanto as distribuições Normal, Uniforme, Weibull, Beta e Triangular são de caudas mais leves. As restantes possuem caudas mistas.

A função densidade de cada uma destas alternativas está representada na Figura 5.1 em sobreposição com a de  $F_0$ . Notemos, no entanto, que as funções densidade apresentadas são aquelas que possuem a mesma média e o mesmo desvio padrão que  $F_0$ . Por exemplo, denotando por  $\mu_1$  e  $\sigma_1$ , a média e o desvio padrão da alternativa em causa, respetivamente, a função densidade legendada como “Exponencial”, é a da variável aleatória real  $\frac{X-\mu_1}{\frac{\sqrt{3}}{\pi}\sigma_1} = \frac{X-1}{\frac{\sqrt{3}}{\pi}}$ .

No que diz respeito às funções características ponderadas de cada uma das alternativas, elas diferem em pelo menos um ponto da função característica ponderada de  $F_0$ , para qualquer um dos valores de  $\beta$  fixados, o que permite garantir a convergência do teste para o conjunto das alternativas considerado (ver Teorema 4.12). Pela Figura 5.2, na qual estão representadas cada uma das funções características ponderadas das alternativas em sobreposição com a de  $F_0$  para  $\beta = 1$ , podemos confirmar esta afirmação para esse valor de  $\beta$ . Para os restantes valores, embora os gráficos não estejam aqui representados, verificámos que a diferença em mais do que um ponto é também perceptível.

### 5.3. Resultados de potência

Os resultados apresentados nas Figuras 5.3 a 5.10 são referentes ao caso em que  $\alpha = 0.05$ . Apesar de não estarem apresentados, foram também obtidos os gráficos correspondentes a  $\alpha = 0.01$ , para os quais as conclusões a retirar são análogas. Cada uma das figuras diz respeito a uma alternativa considerada e é composta por seis gráficos correspondentes aos seis valores tomados para  $n$ . Cada gráfico indica-nos a evolução da potência empírica do teste CP em função do valor de  $\beta$  e marca como referência, numa linha horizontal, a potência do teste AD. Além disso, para cada um dos testes, a linha a tracejado corresponde aos valores de potência no caso do método de estimação dos momentos e a cheio no caso do método de estimação da máxima verosimilhança. As Figuras 5.3 a 5.7 dizem respeito às alternativas simétricas.

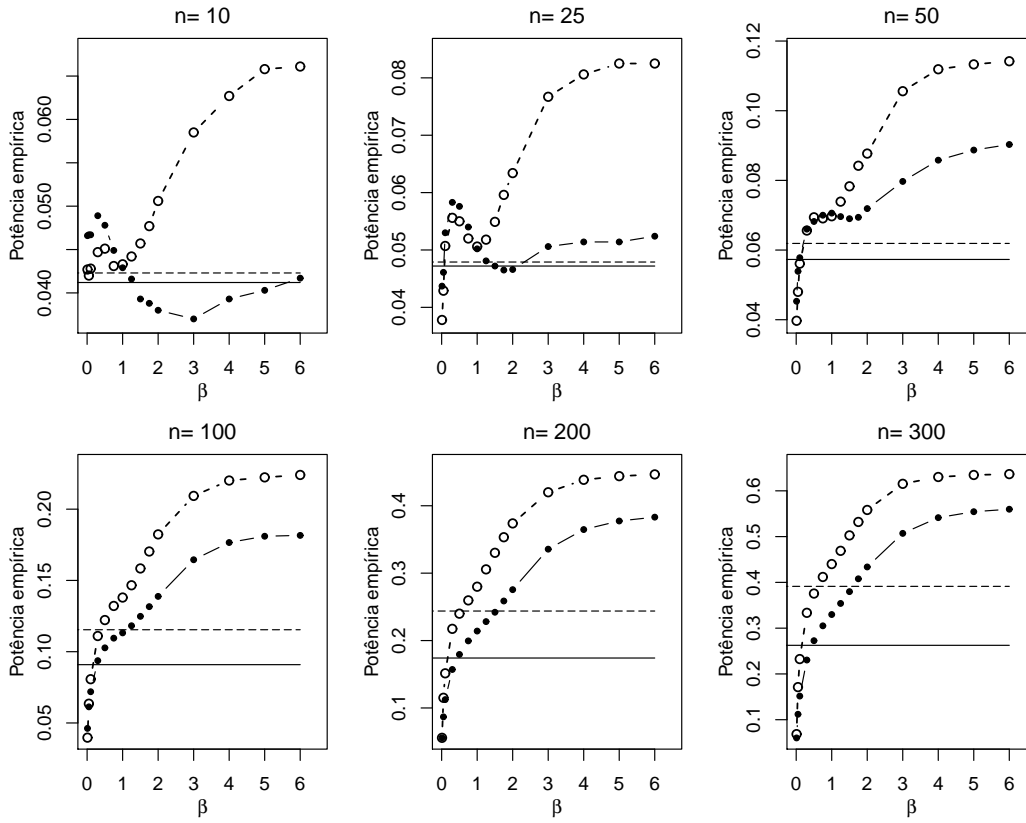


Figura 5.3. Distribuição alternativa Normal.

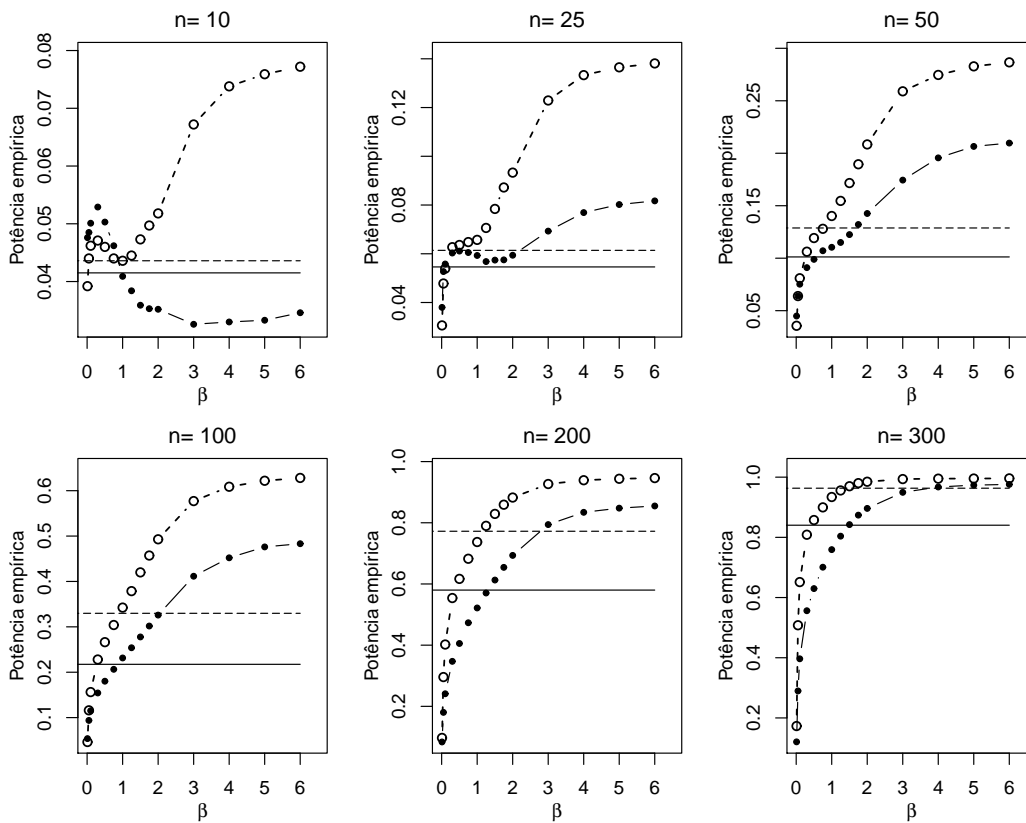


Figura 5.4. Distribuição alternativa Triangular.

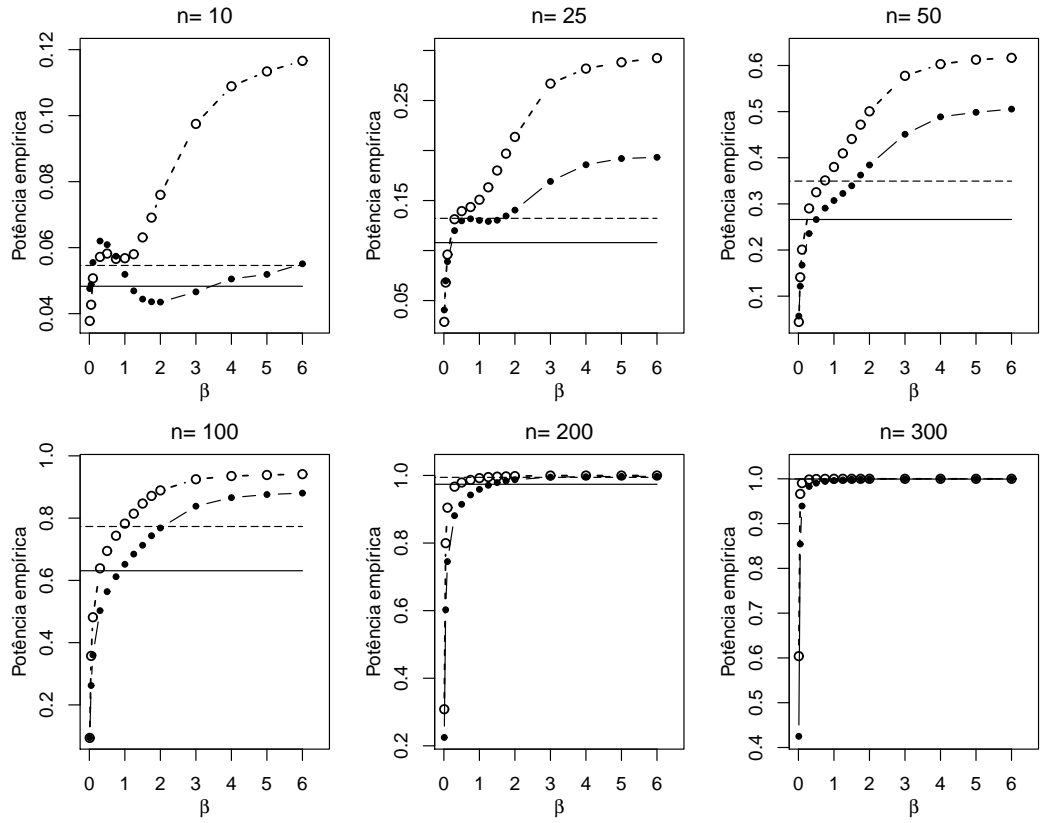


Figura 5.5. Distribuição alternativa Beta.

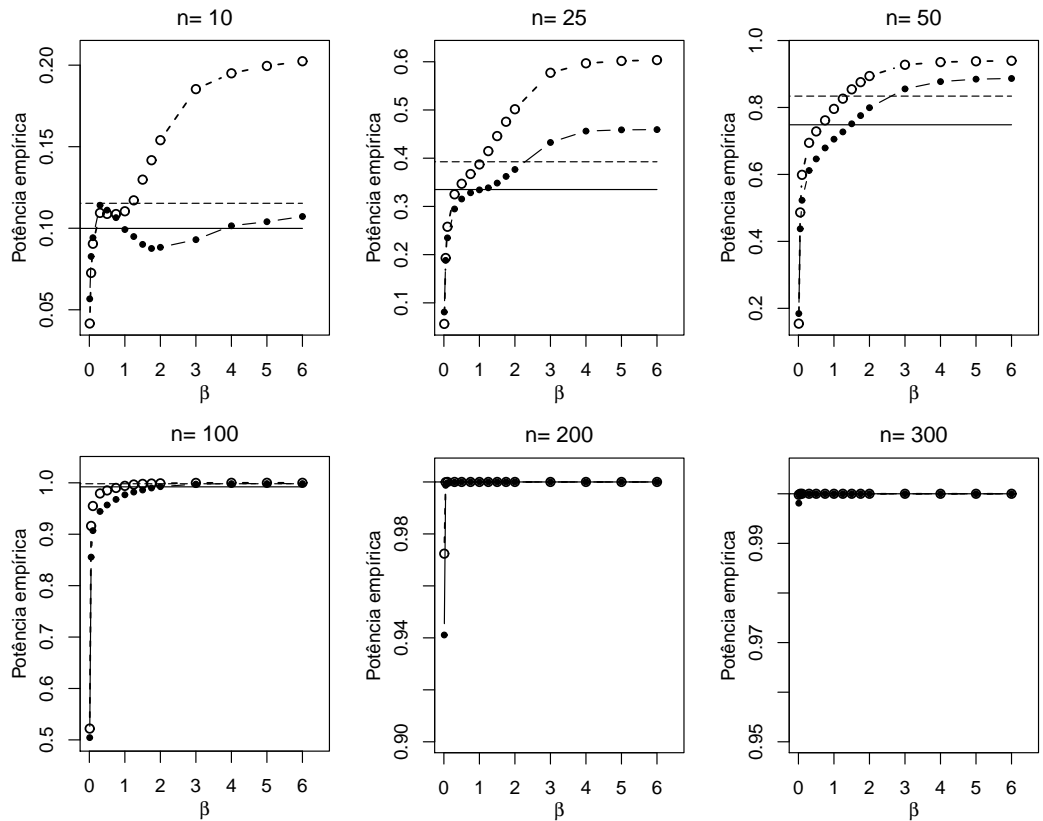


Figura 5.6. Distribuição alternativa Uniforme.

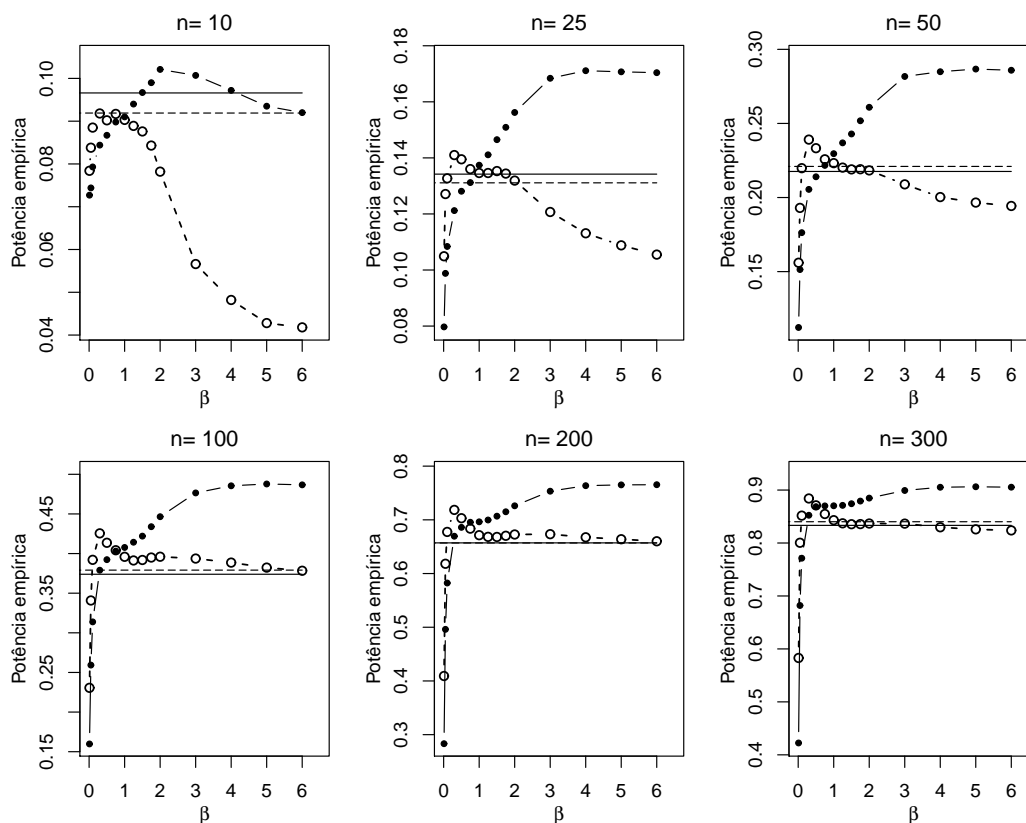


Figura 5.7. Distribuição alternativa Laplace.

Por observação da Figura 5.3, relativa à distribuição alternativa Normal, nota-se alguma diferença em termos dos valores empíricos de potência conforme o método de estimação usado. Embora essa diferença não seja significativa, é, regra geral, o método dos momentos que revela melhores resultados. Ainda assim, no caso do teste CP, independentemente do método utilizado, os gráficos são indicadores de que à medida que o valor de  $\beta$  aumenta, o valor da potência empírica do teste também aumenta, parecendo estabilizar a partir dos valores de  $\beta$  mais elevados dentro da gama de valores considerada. Este comportamento torna-se mais evidente à medida que aumentamos o tamanho da amostra.

Claro que, sendo esta uma distribuição alternativa muito próxima da Logística, os valores de potência empírica atingidos não são muito elevados, tendo-se, por exemplo, para  $n = 50$ , um valor a rondar os 12% que, ainda assim, é praticamente o dobro do valor atingido pelo teste AD. Aliás, de um modo geral, é o teste CP que apresenta melhores resultados para esta alternativa comparativamente ao teste AD.

No caso das Figuras 5.4, 5.5 e 5.6, que correspondem, respetivamente, às distribuições alternativas Triangular, Beta e Uniforme, o comportamento da potência empírica para o teste CP é muito semelhante ao caso da distribuição Normal na me-

dida em que, de um modo geral, valores mais elevados de  $\beta$  pressupõem valores mais atrativos de potência. Relativamente ao método de estimação usado, bem como à comparação com a potência empírica do teste AD, mantém-se o que foi observado no caso da distribuição Normal. O que se diferencia nestas distribuições em relação à distribuição Normal é o facto de, por se tratarem de distribuições mais afastadas da distribuição Logística, já conseguirmos observar valores de potência bastante mais elevados. Aliás, à medida que avançamos da Figura 5.4 até à Figura 5.6, tal já acontece para tamanhos de amostra cada vez mais pequenos.

Quanto à distribuição alternativa Laplace, a evolução da potência empírica do teste CP difere das anteriores no caso do método de estimação dos momentos. Ainda assim, para qualquer um dos métodos, ela parece tender a estabilizar a partir de  $\beta = 3$  ou  $\beta = 4$ .

As Figuras 5.8 a 5.10 dizem respeito às distribuições alternativas assimétricas Weibull, Gama e Exponencial, respetivamente.

Relativamente à distribuição Weibull, observamos que um valor de  $\beta$  entre 1 e 2 é aquele para o qual, de um modo geral, a potência empírica é mais elevada.

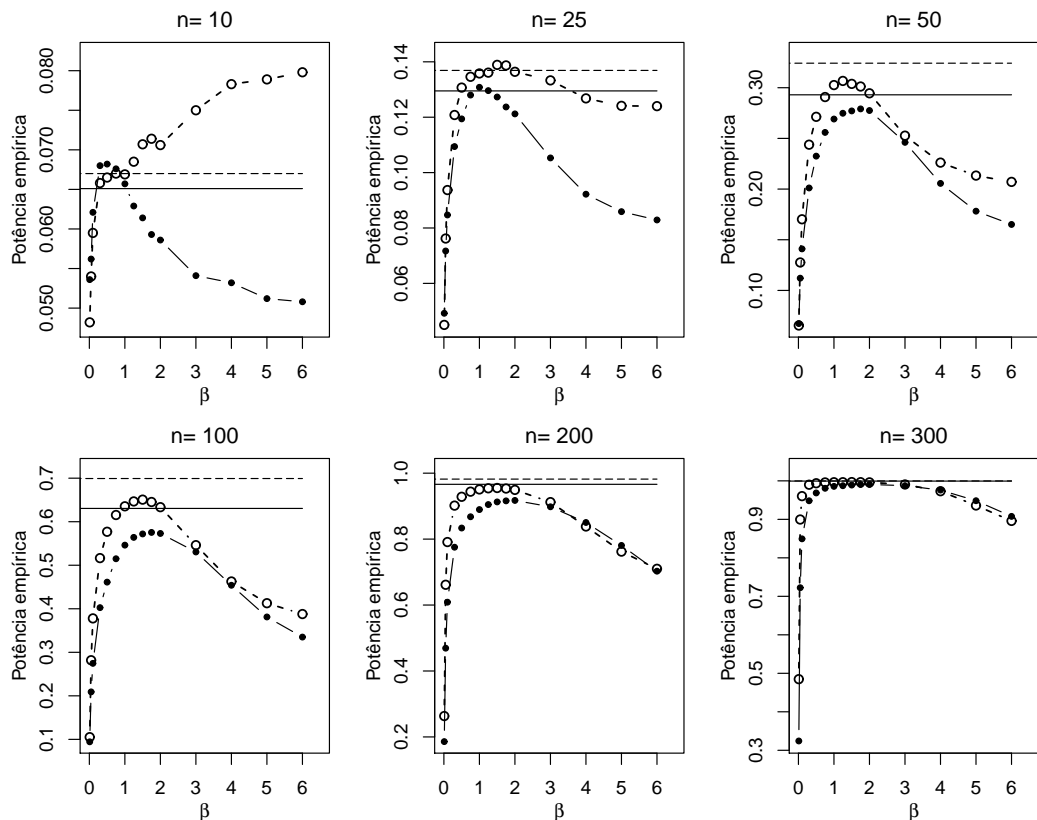


Figura 5.8. Distribuição alternativa Weibull.

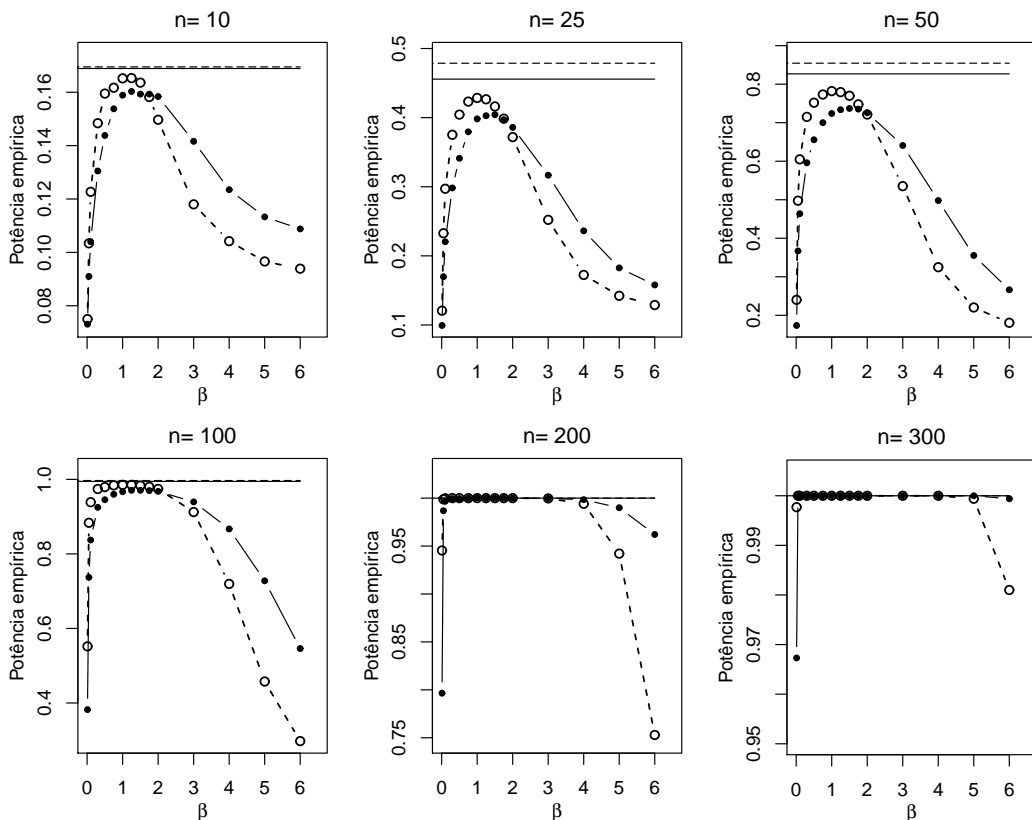


Figura 5.9. Distribuição alternativa Gama.

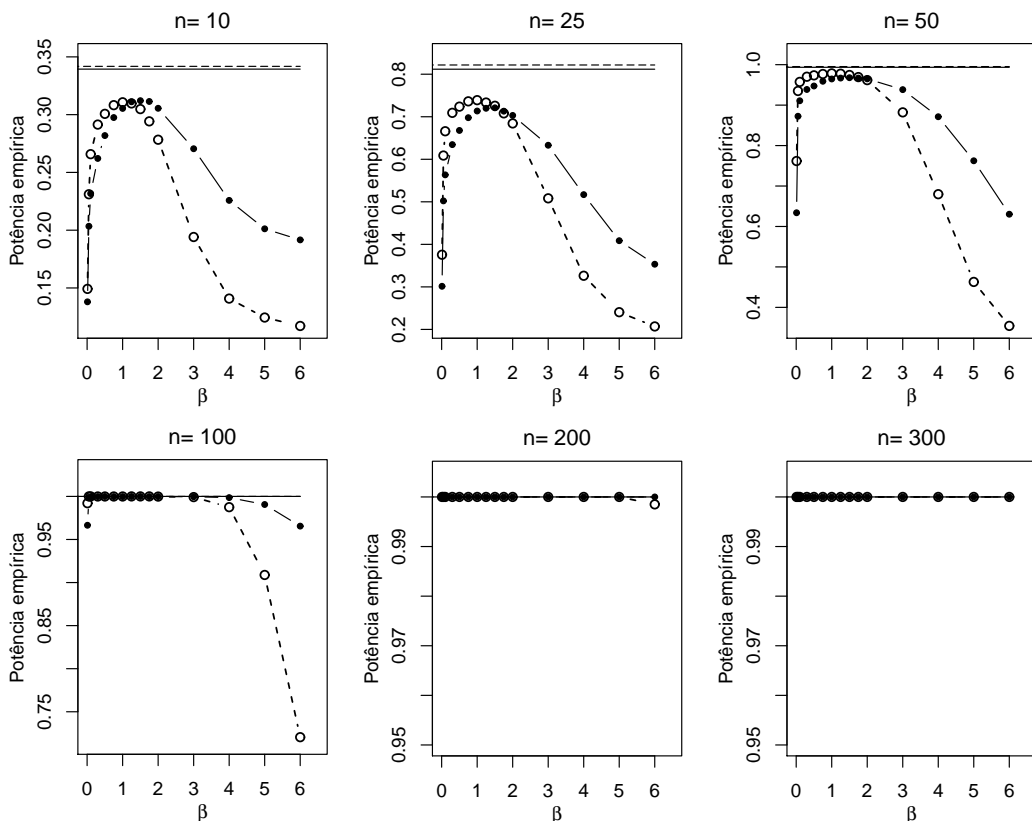


Figura 5.10. Distribuição alternativa Exponencial.



No que toca à distribuição alternativa Gama, verificamos que, até  $n = 100$ , a potência empírica atinge o seu maior valor para  $\beta = 1$  ou  $\beta = 1.25$  no caso do método dos momentos e para  $\beta = 1.25$  ou  $\beta = 1.5$  no caso do método da máxima verosimilhança. A partir de  $n = 200$ , ignorando os valores extremos de  $\beta$ , temos ótimos resultados.

No caso da distribuição alternativa Exponencial, relativamente ao teste CP, para os tamanhos de amostra 10, 25 e 50, o maior valor da potência empírica é alcançado para  $\beta = 1$  no caso do método dos momentos e  $\beta = 1.5$  no caso do método da máxima verosimilhança.

Em comum, as distribuições alternativas Weibull, Gama e Exponencial, têm o facto de, uma vez atingido o pico da potência empírica, a tendência é esta decrescer à medida que o valor de  $\beta$  aumenta. Além disso, contrariamente às distribuições simétricas, o teste AD é o que mostra para estas alternativas, regra geral, melhores resultados.

## 5.4. Discussão dos resultados e conclusão

Observando os resultados obtidos constatamos que, de um modo geral, não há predominância de nenhum dos métodos de estimação para o conjunto das distribuições alternativas considerado.

Em termos do teste CP, a primeira conclusão evidente a retirar é o facto da potência empírica depender claramente do valor do parâmetro  $\beta$ , o que significa que a escolha deste parâmetro continua a ser um problema em aberto. Aliás, esta dependência já tinha sido observada no trabalho elaborado na cadeira de Seminário (2015/2016) no âmbito do teste que estudámos no Capítulo 3, em particular, no caso do teste de ajustamento a uma distribuição Normal standard.

Os resultados obtidos neste estudo mostram também que não há vantagem em considerar valores de  $\beta$  demasiado pequenos para qualquer uma das alternativas. Regra geral, para  $\beta = 0.01$  e  $\beta = 0.05$  os valores da potência empírica são demasiado baixos, até mesmo, em alguns casos, para tamanhos de amostra bastante elevados.

Além disso, este estudo parece ainda indicar que a melhor solução seria escolher valores de  $\beta$  elevados no caso das alternativas simétricas e valores de  $\beta$  mais baixos (mas não demasiado baixos) no caso das alternativas assimétricas, não parecendo, por outro lado, que o peso das caudas das distribuições alternativas tenha grande influência em termos de potência.

Em suma, apesar das limitações do estudo que apresentamos, este parece indicar que, pretendendo um valor de  $\beta$  que seja razoável para o conjunto de todas as alternativas consideradas, então um valor entre 1 e 2 seria o mais indicado.

# Apêndice A

## Tabelas

As tabelas que se seguem contêm os quantis empíricos correspondentes aos testes CP e AD para ambos os valores de  $\alpha$  (0.01 e 0.05) e ambos os métodos de estimação, para  $10^5$  repetições. Denotamos por **MM** o método dos momentos e **MV** o método da máxima verossimilhança.

$\beta \backslash n$	10	25	50	100	200	300
<b>MM</b>						
0.01	76.5124	76.0598	75.5399	75.6096	74.9626	74.8821
0.05	18.0926	18.4770	18.7008	18.7753	18.8528	18.8703
0.1	9.4321	9.7673	9.9121	10.0324	10.0728	10.0869
0.3	2.5033	2.6183	2.6944	2.7411	2.7712	2.7869
0.5	1.0052	1.0783	1.1142	1.1367	1.1485	1.1512
0.75	0.4103	0.4490	0.4693	0.4774	0.4852	0.4868
1	0.1995	0.2239	0.2370	0.2415	0.2457	0.2476
1.25	0.1112	0.1282	0.1368	0.1404	0.1434	0.1446
1.5	0.0687	0.0816	0.0877	0.0903	0.0930	0.0936
1.75	0.0465	0.0564	0.0613	0.0635	0.0656	0.0658
2	0.0335	0.0414	0.0456	0.0476	0.0494	0.0496
3	0.0143	0.0189	0.0213	0.0226	0.0237	0.0240
4	0.0090	0.0122	0.0138	0.0149	0.0155	0.0159
5	0.0066	0.0090	0.0104	0.0111	0.0116	0.0119
6	0.0052	0.0072	0.0083	0.0089	0.0094	0.0096
<b>MV</b>						
0.01	77.1026	75.8802	74.8243	74.4134	74.3125	74.4051
0.05	17.5032	17.7487	17.6551	17.7668	17.8204	17.7899
0.1	8.6643	8.9198	8.9361	8.9788	8.9993	9.0158
0.3	1.9539	2.0200	2.0145	2.0438	2.0454	2.0502
0.5	0.6976	0.7164	0.7155	0.7198	0.7277	0.7278
0.75	0.2483	0.2575	0.2588	0.2576	0.2635	0.2609
1	0.1110	0.1150	0.1154	0.1150	0.1172	0.1161
1.25	0.0582	0.0602	0.0604	0.0602	0.0612	0.0609
1.5	0.0344	0.0357	0.0358	0.0357	0.0363	0.0360
1.75	0.0224	0.0232	0.0233	0.0232	0.0235	0.0233
2	0.0157	0.0162	0.0163	0.0162	0.0165	0.0163
3	0.0061	0.0063	0.0063	0.0063	0.0064	0.0064
4	0.0036	0.0038	0.0037	0.0038	0.0038	0.0038
5	0.0026	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027
6	0.0020	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021

**Tabela B.1.** Quantis empíricos para o teste CP para  $\alpha = 0.01$ .

Apêndice A Tabelas

$\beta \backslash n$	10	25	50	100	200	300
<b>MM</b>						
0.01	66.0968	67.3918	67.6023	67.8618	67.7838	67.8480
0.05	14.4742	14.9383	15.2215	15.2816	15.2709	15.3426
0.1	7.1725	7.4499	7.5984	7.6797	7.6630	7.6932
0.3	1.7833	1.8417	1.8820	1.8985	1.9005	1.9097
0.5	0.7117	0.7407	0.7564	0.7629	0.7673	0.7711
0.75	0.2886	0.3048	0.3129	0.3162	0.3199	0.3219
1	0.1408	0.1516	0.1563	0.1589	0.1614	0.1627
1.25	0.0788	0.0865	0.0899	0.0921	0.0934	0.0946
1.5	0.0492	0.0547	0.0577	0.0591	0.0601	0.0610
1.75	0.0334	0.0377	0.0401	0.0412	0.0420	0.0427
2	0.0242	0.0277	0.0296	0.0306	0.0312	0.0317
3	0.0103	0.0121	0.0133	0.0139	0.0143	0.0145
4	0.0064	0.0076	0.0084	0.0089	0.0092	0.0094
5	0.0047	0.0056	0.0062	0.0066	0.0068	0.0070
6	0.0037	0.0045	0.0050	0.0052	0.0054	0.0056
<b>MV</b>						
0.01	66.4746	67.2151	67.1405	67.1604	67.1665	67.2572
0.05	14.0707	14.3707	14.4410	14.4564	14.4997	14.5774
0.1	6.6816	6.8364	6.8531	6.8994	6.8981	6.9373
0.3	1.3963	1.4069	1.4119	1.4181	1.4172	1.4174
0.5	0.4857	0.4852	0.4862	0.4876	0.4900	0.4855
0.75	0.1715	0.1717	0.1715	0.1719	0.1732	0.1718
1	0.0755	0.0759	0.0758	0.0760	0.0769	0.0761
1.25	0.0391	0.0396	0.0396	0.0397	0.0400	0.0398
1.5	0.0228	0.0233	0.0233	0.0235	0.0237	0.0235
1.75	0.0146	0.0151	0.0151	0.0153	0.0154	0.0153
2	0.0100	0.0105	0.0105	0.0107	0.0107	0.0107
3	0.0035	0.0039	0.0039	0.0040	0.0040	0.0041
4	0.0020	0.0022	0.0022	0.0023	0.0023	0.0023
5	0.0013	0.0015	0.0016	0.0016	0.0016	0.0016
6	0.0010	0.0012	0.0012	0.0012	0.0012	0.0013
6	0.0020	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021

Tabela B.2. Quantis empíricos para o teste CP para  $\alpha = 0.05$ .

Método \ n	10	25	50	100	200	300
MM	1.0870	1.2051	1.2483	1.2622	1.2786	1.2714
MV	0.8714	0.8948	0.8974	0.9039	0.8932	0.9003

Tabela B.3. Quantis empíricos para o teste AD para  $\alpha = 0.01$ .

Método \ n	10	25	50	100	200	300
MM	0.8220	0.8732	0.8920	0.9096	0.9155	0.9145
MV	0.6490	0.6586	0.6613	0.6629	0.6600	0.6673

Tabela B.4. Quantis empíricos para o teste AD para  $\alpha = 0.05$ .

# Apêndice B

## Códigos para a simulação em R

Neste apêndice apresentamos os códigos criados para o estudo de simulação.

### B.1. Estimação dos quantis

#### 1. Estimação dos quantis para o teste CP

```
1 library(MASS)
2 library(fitdistrplus)
3
4 ##### Cálculo da estatística de teste  $T_{\{n,\beta\}}$  #####
5
6 # A função Cn calcula o termo  $C_n$  de  $T_{\{n,\beta\}}$ 
7
8 Cn <- function(beta,n)
9 {
10   fcp2 <-function(t)
11   {
12     fcp <- function(t)
13     {
14       fcp.aux <- function(x)
15       {
16         (plogis(x)*(1-plogis(x)))^(beta*abs(t))*cos(t*x)*dlogis(x)
17       }
18       integrate(fcp.aux,lower=-Inf,upper=Inf)$value
19     }
20     fcp.value <- sapply(t,fcp)
21     fcp.value^2
22   }
23   n*integrate(fcp2,lower=-Inf,upper=Inf)$value
24 }
25
26 # A função Snbeta calcula  $A_n+B_n$ 
27
28 Snbeta <- function(s,beta,n)
29 {
30   ps <- plogis(s)*(1-plogis(s))
31   blps <- beta*log(outer(ps,ps,"*"))
32   ss <- outer(s,s,"-")
33
34   An <- -2*sum(1/(ss^2/blps + blps))/n
35 }
```

## Apêndice B Códigos para a simulação em R

```
36 g <- function(x)
37 {
38   g.aux <- function(x)
39   {
40     px <- plogis(x)*(1-plogis(x))
41     blpx <- beta*log(ps*px)
42     sum(dlogis(x)/((s-x)^2/blpx + blpx))
43   }
44   sapply(x,g.aux)
45 }
46
47 Bn <- 4*integrate(g,lower=-Inf,upper=Inf)$value
48
49 An+Bn
50 }
51
52 ##### Valores da estatística sob H0 #####
53
54 # Método dos momentos
55
56 valoresMM = function(n,M=10^5) #M=número de amostras
57 {
58   b <- c(0.01,0.05,0.1,0.3,0.5,0.75,1,1.25,1.5,1.75,2,3,4,5,6)
59   lb <- length(b)
60
61   A <- array(dim=lb)
62
63   for (k in 1:lb)
64     A[k] <- Cn(beta=b[k],n)
65
66   AA <- matrix(rep(A,times=M),nc=lb,byrow=TRUE)
67
68   val <- array(dim=c(M,lb))
69
70   for (i in 1:M)
71   {
72     s <- rlogis(n)
73     y <- (s-mean(s))/(sqrt((n-1)/n)*sqrt(3)*sd(s)/pi)
74     for(k in 1:lb)
75     {
76       val[i,k] <- Snbeta(y,beta=b[k],n)
77     }
78   }
79
80   val <- val+AA
81
82   if (n<100) nn <- paste(0,n,sep="") else nn <- n
83   escrever<-paste("valores_MM_n",nn,".txt",sep="")
84   write.table(format(val,scientific=TRUE,digits=10),file=escrever,col.
85               names=FALSE,row.names=FALSE)
86 }
87 # Método da máxima verosimilhança
```

```

88
89 valoresMV = function(n,M=10^5) #M=número de amostras
90 {
91   b <- c(0.01,0.05,0.1,0.3,0.5,0.75,1,1.25,1.5,1.75,2,3,4,5,6)
92   lb <- length(b)
93
94   A <- array(dim=lb)
95
96   for (k in 1:lb)
97     A[k] <- Cn(beta=b[k],n)
98
99   AA <- matrix(rep(A,times=M),nc=lb,byrow=TRUE)
100
101   val <- array(dim=c(M,lb))
102
103   for (i in 1:M)
104   {
105     s <- rlogis(n)
106     hat <- fitdist(data=s, distr="logis", method="mle")$estimate
107     y <- (s-hat[1])/hat[2]
108     for(k in 1:lb)
109     {
110       val[i,k] <- Snbeta(y,beta=b[k],n)
111     }
112   }
113
114   val <- val+AA
115
116   if (n<100) nn <- paste(0,n,sep="") else nn <- n
117   escrever<-paste("valores_MV_n",nn,".txt",sep="")
118   write.table(format(val,scientific=TRUE,digits=10),file=escrever,col.
119               names=FALSE,row.names=FALSE)
120 }
121 ##### Estimação dos quantis para o teste CP #####
122
123 quantisCP = function(teste=c("MM","MV"))
124 {
125   ns=c(10,25,50,100,200,300)
126   lns <- length(ns)
127   b <- c(0.01,0.05,0.1,0.3,0.5,0.75,1,1.25,1.5,1.75,2,3,4,5,6)
128   lb <- length(b)
129   alfas <- c(0.05,0.01)
130   lalfas <- length(alfas)
131
132   q5 <- array(dim=c(lns,lb))
133   q1 <- array(dim=c(lns,lb))
134
135   for (i in 1:lns)
136   {
137     if (ns[i]<100) nn <- paste(0,ns[i],sep="") else nn <- ns[i]
138     valores <- read.table(paste("valores_",teste,"_n",nn,".txt",sep="")
139                          ))

```

```

139
140   for (k in 1:lb)
141   {
142     q <- quantile(valores[,k],1-alfas,names=FALSE)
143     q5[i,k] <- q[1]
144     q1[i,k] <- q[2]
145   }
146 }
147
148 write.table(q5,file=paste("quantis5_",teste, ".txt",sep=""),col.names
149             =FALSE,row.names=FALSE)
150 write.table(q1,file=paste("quantis1_",teste, ".txt",sep=""),col.names
151             =FALSE,row.names=FALSE)
152 }

```

### 2. Estimação dos quantis para o teste AD

```

1 library(goftest)
2 library(fitdistrplus)
3
4 ##### Valores da estatística de teste de AD sob H0 #####
5
6 # Método dos momentos
7
8 valoresMMAD = function(n,M=10^5)
9 {
10  valAD <- array(dim=M)
11
12  for (i in 1:M)
13  {
14    s <- rlogis(n)
15    y <- (s-mean(s))/(sqrt((n-1)/n)*sqrt(3)*sd(s)/pi)
16    valAD[i] <- ad.test(y,"plogis",location=0,scale=1)$statistic
17  }
18
19  if (n<100) nn <- paste(0,n,sep="") else nn <- n
20  escrever<-paste("valores_MM_AD_n",nn, ".txt",sep="")
21  write.table(format(valAD,scientific=TRUE,digits=10),file=escrever,
22             col.names=FALSE,row.names=FALSE)
23 }
24 # Método da máxima verosimilhança
25
26 valoresMVAD = function(n,M=10^5)
27 {
28  valAD <- array(dim=M)
29
30  for (i in 1:M)
31  {
32    s <- rlogis(n)
33    hat <- fitdist(data=s, distr="logis", method="mle")$estimate
34    y <- (s-hat[1])/hat[2]
35    valAD[i] <- ad.test(y,"plogis",location=0,scale=1)$statistic

```



```

36 }
37
38 if (n<100) nn <- paste(0,n,sep="") else nn <- n
39 escrever<-paste("valores_MV_AD_n",nn,".txt",sep="")
40 write.table(format(valAD,scientific=TRUE,digits=10),file=escrever,
41             col.names=FALSE,row.names=FALSE)
42 }
43 ns <- c(10,25,50,100,200,300)
44
45 for (i in 1:length(ns))
46 {
47   valoresMMAD(ns[i])
48   valoresMVAD(ns[i])
49 }
50
51 ##### Estimação dos quantis para o teste AD #####
52
53 quantisAD = function(teste=c("MM","MV"))
54 {
55   ns=c(10,25,50,100,200,300)
56   lns <- length(ns)
57   alfas <- c(0.05,0.01)
58   lalfas <- length(alfas)
59
60   q5 <- array(dim=lns)
61   q1 <- array(dim=lns)
62
63   for (i in 1:lns)
64   {
65
66     if (ns[i]<100) nn <- paste(0,ns[i],sep="") else nn <- ns[i]
67     valores <- read.table(paste("valores_",teste,"_AD_n",nn,".txt",sep
68                               =""))
69
70     q <- quantile(valores[,1],1-alfas,names=FALSE)
71     q5[i] <- q[1]
72     q1[i] <- q[2]
73   }
74   write.table(q5,file=paste("quantis5_",teste,"_AD.txt",sep=""),col.
75               names=FALSE,row.names=FALSE)
76   write.table(q1,file=paste("quantis1_",teste,"_AD.txt",sep=""),col.
77               names=FALSE,row.names=FALSE)
78 }

```

## B.2. Estimação da potência

### 3. Estimação da potência para o teste CP

```

1 library(MASS)
2 library(fitdistrplus)

```

## Apêndice B Códigos para a simulação em R

```
3 library(ExtDist)
4 library(triangle)
5
6 ##### Cálculo da estatística de teste  $T_{\{n,\beta\}}$  #####
7
8 # A função Cn calcula o termo  $C_n$  de  $T_{\{n,\beta\}}$ 
9
10 Cn <- function(beta,n)
11 {
12   fcp2 <-function(t)
13   {
14     fcp <- function(t)
15     {
16       fcp.aux <- function(x)
17       {
18         (plogis(x)*(1-plogis(x))^(beta*abs(t))*cos(t*x)*dlogis(x)
19       }
20       integrate(fcp.aux,lower=-Inf,upper=Inf)$value
21     }
22     fcp.value <- sapply(t,fcp)
23     fcp.value^2
24   }
25   n*integrate(fcp2,lower=-Inf,upper=Inf)$value
26 }
27
28 # A função Snbeta calcula  $A_n+B_n$ 
29
30 Snbeta <- function(s,beta,n)
31 {
32   ps <- plogis(s)*(1-plogis(s))
33   blps <- beta*log(outer(ps,ps,"*"))
34   ss <- outer(s,s,"-")
35
36   An <- -2*sum(1/(ss^2/blps + blps))/n
37
38   g <- function(x)
39   {
40     g.aux <- function(x)
41     {
42       px <- plogis(x)*(1-plogis(x))
43       blpx <- beta*log(ps*px)
44       sum(dlogis(x)/((s-x)^2/blpx + blpx))
45     }
46     sapply(x,g.aux)
47   }
48
49   Bn <- 4*integrate(g,lower=-Inf,upper=Inf)$value
50
51   An+Bn
52 }
53
54 ##### Estimaco da potência para o teste CP #####
55
```

```

56 #teste 1 = MM / teste 2 = MV
57
58 potenciaCP = function(d,n,teste=c(1,2),rep=10^4)
59 {
60   if (d==0) alternativa <- function(n){rlogis(n)}
61   if (d==1) alternativa <- function(n){rnorm(n)}
62   if (d==2) alternativa <- function(n){runif(n)}
63   if (d==3) alternativa <- function(n){rexp(n)}
64   if (d==4) alternativa <- function(n){rgamma(n,2)}
65   if (d==5) alternativa <- function(n){rweibull(n,2)}
66   if (d==6) alternativa <- function(n){rbeta(n,2,2)}
67   if (d==7) alternativa <- function(n){rtriangle(n)}
68   if (d==8) alternativa <- function(n){rLaplace(n)}
69
70   b <- c(0.01,0.05,0.1,0.3,0.5,0.75,1,1.25,1.5,1.75,2,3,4,5,6)
71   lb <- length(b)
72
73   if (n<100) nn <- paste(0,n,sep="") else nn <- n
74   if (d<10) dd <- paste(0,d,sep="") else dd <- d
75
76   if (teste==1)
77   {
78     q5 <- read.table(paste("quantis5_MM.txt",sep=""))
79     q1 <- read.table(paste("quantis1_MM.txt",sep=""))
80     escrever <- paste("potencia_MM_d",dd,"n",nn,".txt",sep="")
81   } else if (teste==2)
82   {
83     q5 <- read.table(paste("quantis5_MV.txt",sep=""))
84     q1 <- read.table(paste("quantis1_MV.txt",sep=""))
85     escrever <- paste("potencia_MV_d",dd,"n",nn,".txt",sep="")
86   }
87
88   ns=c(10,25,50,100,200,300)
89   ind = 1
90   while (ns[ind] != n) ind <- ind + 1
91
92   q5n <- q5[ind,]
93   q1n <- q1[ind,]
94
95   A <- array(dim=lb)
96
97   for (k in 1:lb)
98     A[k] <- Cn(beta=b[k],n)
99
100  T <- array(dim=lb)
101  rejeicao5 <- array(dim=c(rep,lb))
102  rejeicao1 <- array(dim=c(rep,lb))
103
104  set.seed(2000,kind=NULL)
105
106  for (i in 1:rep)
107  {
108    s <- alternativa(n)

```

```

109   if (teste==1)
110     y <- (s-mean(s))/(sqrt((n-1)/n)*sqrt(3)*sd(s)/pi)
111     else if (teste==2)
112       {
113         hat <- fitdist(data=s, distr="logis", method="mle")$estimate
114         y <- (s-hat[1])/hat[2]
115       }
116
117   for (k in 1:lb)
118     T[k] <- Snbeta(y,beta=b[k],n)
119
120   T <- T + A
121
122   rejeicao5[i,] <- 1*(T>q5n)
123   rejeicao1[i,] <- 1*(T>q1n)
124 }
125
126 potencia5 <- apply(rejeicao5,MARGIN=c(2),mean)
127 potencia1 <- apply(rejeicao1,MARGIN=c(2),mean)
128
129 potencia <- matrix(c(potencia5,potencia1),ncol=lb,byrow=TRUE)
130 write.table(format(potencia,scientific=TRUE),file=escrever,col.names
131             =FALSE,row.names=FALSE)

```

#### 4. Estimação da potência para o teste AD

```

1 library(MASS)
2 library(fitdistrplus)
3 library(goftest)
4 library(ExtDist)
5 library(triangle)
6
7 ##### Estimação da potência para o teste AD #####
8
9 potenciaAD = function(d,n,teste=c("MM","MV"),rep=10^4)
10 {
11   if (d==1) alternativa <- function(n){rnorm(n)}
12   if (d==2) alternativa <- function(n){runif(n)}
13   if (d==3) alternativa <- function(n){rexp(n)}
14   if (d==4) alternativa <- function(n){rgamma(n,2)}
15   if (d==5) alternativa <- function(n){rweibull(n,2)}
16   if (d==6) alternativa <- function(n){rbeta(n,2,2)}
17   if (d==7) alternativa <- function(n){rtriangle(n)}
18   if (d==8) alternativa <- function(n){rLaplace(n)}
19
20   q5 <- read.table(paste("quantis5_",teste,"_AD.txt",sep=""))
21   q1 <- read.table(paste("quantis1_",teste,"_AD.txt",sep=""))
22
23   ns=c(10,25,50,100,200,300)
24   ind = 1
25   while (ns[ind] != n) ind <- ind + 1
26

```

```
27 q5n <- q5[ind,1]
28 q1n <- q1[ind,1]
29
30 rejeicao5 <- array(dim=rep)
31 rejeicao1 <- array(dim=rep)
32
33 set.seed(2000,kind=NULL)
34
35 for (i in 1:rep)
36 {
37   s <- alternativa(n)
38   if (teste=="MM")
39   {
40     y <- (s-mean(s))/(sqrt((n-1)/n)*sqrt(3)*sd(s)/pi)
41     Tad <- ad.test(y, "plogis", location=0, scale=1)$statistic
42     rejeicao5[i] <- 1*(Tad>q5n)
43     rejeicao1[i] <- 1*(Tad>q1n)
44   } else
45   {
46     hat <- fitdist(data=s, distr="logis", method="mle")$estimate
47     y <- (s-hat[1])/hat[2]
48     Tad <- ad.test(y, "plogis", location=0, scale=1)$statistic
49     rejeicao5[i] <- 1*(Tad>q5n)
50     rejeicao1[i] <- 1*(Tad>q1n)
51   }
52 }
53
54 potencia5 <- mean(rejeicao5)
55 potencia1 <- mean(rejeicao1)
56
57 if (n<100) nn <- paste(0,n,sep="") else nn <- n
58 if (d<10) dd <- paste(0,d,sep="") else dd <- d
59 escrever <- paste("potencia_",teste,"_AD_d",dd,"n",nn,".txt",sep="")
60 potencia <- matrix(c(potencia5,potencia1))
61 write.table(format(potencia,scientific=TRUE),file=escrever,col.names
62             =FALSE,row.names=FALSE)
63 }
```



# Bibliografia

- [1] Carnell, R. (2016). *triangle: Provides the standard distribution functions for the triangle distribution*. R package version 0.10.
- [2] Cohn, D. L. (1980). *Measure theory*. Birkhäuser. Boston.
- [3] D'Agostino, R. B. e Stephens, M. A. (1986). *Goodness-of-fit techniques*. Marcel Dekker. New York.
- [4] Delignette-Muller, M. e Dutang, C. (2015). *fitdistrplus: An R package for fitting distributions*. R package version 1.0-6.
- [5] Epps, T. W. e Pulley, L. B. (1983). A test for normality based on the empirical characteristic function. *Biometrika* 70, 723–726.
- [6] Faraway, J., Marsaglia, G., Marsaglia, J. e Baddeley, A. (2015). *goftest: Classical goodness-of-fit tests for univariate distributions*. R package version 1.0-3.
- [7] Gürtler, N. e Henze, N. (2000). Goodness-of-fit tests for the Cauchy distribution based on the empirical characteristic function. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 52, 267–286.
- [8] Henze, N. e Wagner, T. (1997). A new approach to the BHEP tests for multivariate normality. *Journal of Multivariate Analysis* 62, 1–23.
- [9] Jiménez-Gamero, M. D., Alba-Fernandéz, V., Muñoz-García, J. e Chalco-Cano, Y. (2009). Goodness-of-fit tests based on empirical characteristic functions. *Computational Statistics and Data Analysis* 53, 3957–3931.
- [10] Matsui, M. e Takemura, A. (2008). Goodness-of-fit tests for symmetric stable distributions - Empirical characteristic function approach. *Test* 17, 546–566.
- [11] Meintanis, S. G. (2004). Goodness-of-fit tests for the logistic distribution based on empirical transforms. *The Indian Journal of Statistics* 66, 306–326.

- [12] Meintanis, S. G. e Swanepoel, J. (2007). Bootstrap goodness-of-fit tests with estimated parameters based on empirical transforms. *Statistics and Probability Letters* 77, 1004–1013.
- [13] Meintanis, S. G., Swanepoel, J. e Allison, J. (2014). The probability weighted characteristic function and goodness-of-fit testing. *Journal of Statistical Planning and Inference* 146, 122–132.
- [14] Meintanis, S. G., Ushakov, N. G. (2016). Nonparametric probability weighted empirical characteristic function and applications. *Statistics and Probability Letters* 108, 52–61.
- [15] Monfort, A. (1996). *Cours de probabilités*. Economica. Paris.
- [16] R Core Team (2016). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Viena, Áustria. URL <https://www.R-project.org/>.
- [17] Serfling, R. J. (1980). *Approximation theorems of mathematical statistics*. John Wiley & Sons. New York.
- [18] Shorack, G. R. e Wellner, J. A. (1986). *Empirical processes with applications to statistics*. John Wiley & Sons. New York.
- [19] Stephens, M. A. (1979). Tests of fit for the logistic distribution based on the empirical distribution function. *Biometrika Trust* 66, 591–595.
- [20] Tenreiro, C. (2009). On the choice of the smoothing parameter for the BHEP goodness-of-fit test. *Computational Statistics and Data Analysis* 53, 1038–1053.
- [21] van der Vaart, A. W. (2000). *Asymptotic statistics*. Cambridge University Press. Cambridge.
- [22] Wu, H., Godfrey, A., Govindaraju, K., Pirikahu, S. (2015). *ExtDist: Extending the range of functions for probability distributions*. R package version 0.6-3.