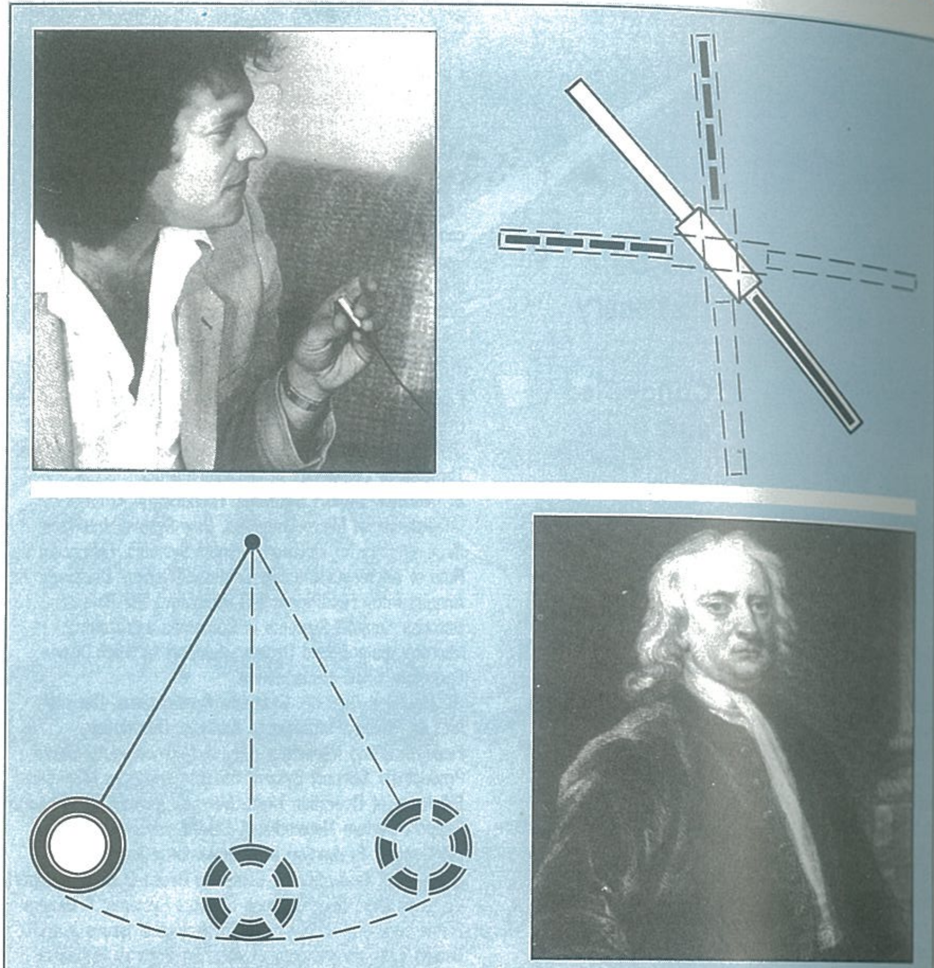
FÍSICA MODERNA PROCURA PÔR ORDEM... NO CAOS

Carlos Fiolhais

Departamento de Física da Universidade de Coimbra.



Do jovem investigador Feigenbaum (foto à esquerda, em cima) ao «pai» da mecânica clássica, Newton (gravura à direita, em baixo). Caos & ordem em questão no movimento pendular...

A ASSOCIAÇÃO do caos com a física parece à primeira vista paradoxal. A física consiste na descrição da regularidade dos acontecimentos naturais e o caos, pelo contrário, equivale à ausência de qualquer regularidade. No entanto, os físicos, confrontados com os fenómenos que ocorrem em sistemas complexos, têm demonstrado um interesse crescente pelo estudo do caos. Descobriram recentemente que a irregularidade pode aparecer de uma forma regular e que nesse caminho da ordem para o caos há aspectos que são universais, isto é, que são independentes do sistema considerado.

Caos e ordem podem coexistir e interpenetrar-se. Não existe afinal um caos separado em absoluto da ordem, mas sim um jogo dialéctico entre os dois.

Importa, antes de tudo, tornar mais precisa a noção de caos ou de aleatoridade. O caos está relacionado com a ausência de previsibilidade. Numa situação caótica, tudo pode acontecer. Um protótipo simples de um sistema com um comportamento caótico é uma moeda que se lança ao ar. Embora essa moeda seja um sistema mecânico, sujeito a leis da física bem definidas (as leis de Newton da mecânica clássica), o elevado número possível de condições iniciais no lançamento da moeda, assim como os diferentes resultados (cara ou coroa) associados a condições bastante próximas, fazem com que na prática a moeda possa servir como exemplo de impossibilidade de previsão.

Já J. C. Maxwell, físico escocês do século XIX, tinha afirmado que era necessário rever a noção de causalidade, geralmente considerada em relação com a mecânica de Newton. De acordo com o princípio de causalidade, designado por fraco, as mesmas causas produzem os mesmos efeitos (ver Fig. 1, posição 1). Num mundo onde as condições iniciais só são possíveis ser especificadas e concretizadas com maior ou menor aproximação, é necessário substituir o princípio da causalidade fraca por outro mais realista: condições iniciais semelhantes conduzem a resultados semelhantes (Fig. 1, posição 2). Vejamos a este propósito o que escreveu Maxwell em 1873: «É uma doutrina metafísica, que causas iguais produzem efeitos iguais. Ninguém pode duvidar dela. A sua utilidade é, no entanto, bastante pequena num mundo como o nosso, no qual causas iguais jamais se repetem e nada acontece segunda vez. O axioma físico baseado nesse facto diz pois: causas semelhantes produzem efeitos semelhantes».

Contudo a moeda lançada ao ar ilustra a possibilidade de violação desta última formulação: condições iniciais semelhantes conduzem a resultados muito diferentes. Diz-se então que se está em presença de uma situação caótica (ver Fig. 1, posição 3).

Os dados de poker, as bolas do totoloto, a roleta do casino são tudo exemplos de sistemas caóticos. A falta de previsibilidade constitui o principal atractivo dos chamados jogos de sorte (ou de azar). Nunca se sabe o que vai acontecer. Pode-se eventualmente ganhar, embora se perca na maior parte das vezes.

Deve-se aqui chamar a atenção para o facto de alguns físicos terem concluído que a moeda não é um sistema tão caótico como se poderia esperar, e que, em regra, para alterações muito pequenas das condições iniciais, obtém-se sempre o mesmo resultado. Esta conclusão foi alcançada com o recurso a uma simulação em computador do lançamento de uma moeda e publicada na *Physical Review* (1), a revista mais importante da Sociedade Americana de Física. No entanto, não é por causa disso que a escolha do campo no início dum jogo de futebol deixa de se fazer por moeda ao ar. Para todos os efeitos práticos, a moeda funciona aleatoriamente, a menos que se tenha uma mão excepcionalmente treinada e hábil para a batota...

A moeda é um dispositivo experimental pelo qual, efectuando lançamentos repetidos, podemos obter uma sucessão aleatória de zeros e uns (caras e coroas) e obter assim um número ao acaso, escrito na base 2. Os computadores possuem também, incorporados na linguagem de programação que utilizam, meios de obter números aleatórios. No entanto, esses números resultam de algoritmos, isto é, de processos de cálculo bem estabelecidos. Se for aplicada a mesma entrada no mesmo algoritmo, obtém-se sempre a mesma saída. Não devem, por isso, esses números ser chamados aleatórios, mas sim *pseudo-aleatórios*. Existe um processo determinístico de os obter (nada é afinal mais determinístico do que um computador digital...).

Será então que não podemos falar de números perfeitamente aleatórios? Que o acaso não existe em absoluto? A definição de acaso não é, na verdade, fácil e tem preocupado os matemáticos do nosso século. A melhor definição que eles nos podem dar recorre ao computador: uma sequência diz-se aleatória se o menor algoritmo computacional para a especificar tem de incluir necessariamente a própria sequência, sendo portanto um algoritmo trivial. Esta definição não é considerada por muitos completamente satisfatória. Os caos corresponde à ausência de ordem, de organização, de modelo. Mas como a ordem, a organização, o modelo, são noções subjectivas, que dependem do observador, não se pode definir uma ordem absoluta.

Por outro lado, também não há uma desordem absoluta. Por exemplo a sequência 3.141592654..., apesar de poder parecer aleatória para alguns, não o é de modo algum. Trata-se da sequência dos primeiros dígitos do número *pi* (π), existindo portanto um algoritmo muito simples que permite obter num computador essa sequência com uma precisão grande. Essa precisão não pode ser arbitrariamente grande, pois ela depende das características do computador e do tempo de cálculo (convém notar que os limites da computabilidade são estabelecidos pelas leis da física). Hoje, conhecem-se 2^{23} dígitos de *pi*, não se tendo encontrado qualquer repetição periódica (não se virá a encontrar nunca, pois o *pi* é um número irracional; não passa de ficção o romance *Contacto* de Carl Sagan, onde o *pi* encerra uma mensagem inteligível). Assim, o homem está limitado a criar números, mais ou menos aleatórios, nunca aleatórios de todo. Já alguém disse, em tom de anedota, que uma boa definição de uma lista de números aleatórios é o facto de prescindir de errata. Desde que o dactilógrafo se engane desordenadamente, a lista está sempre correcta...

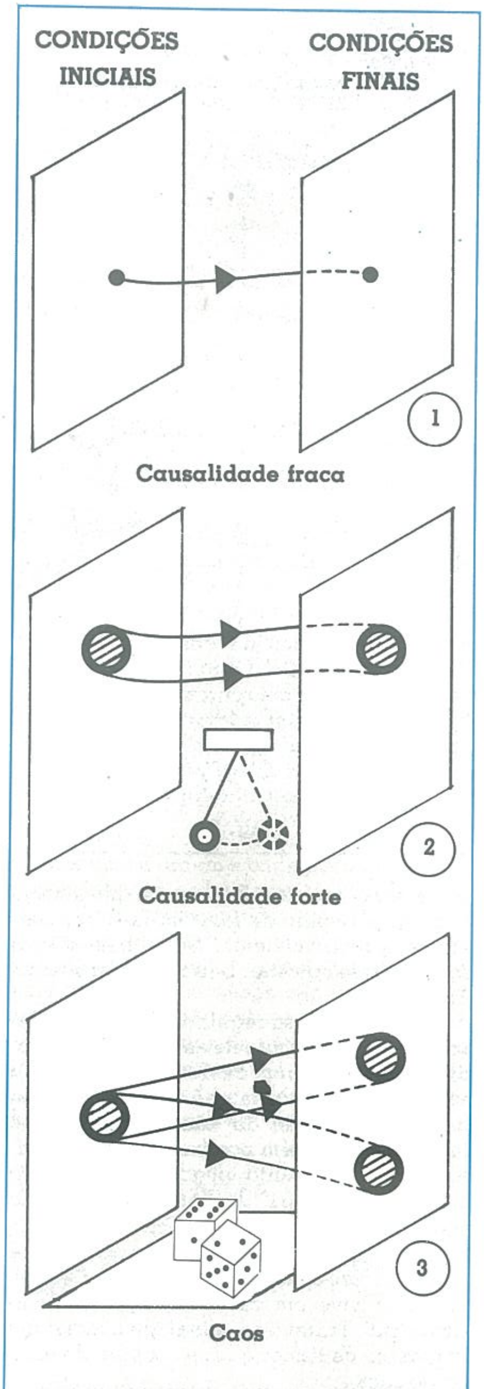
A noção de caos é muito importante do ponto de vista prático. Por exemplo, a criptologia fornece códigos muito elaborados que servem na actividade económica (bancos, por exemplo), na defesa, etc... Seria por exemplo extremamente perigoso se os sistemas computacionais de lançamento de mísseis nucleares não estivessem devidamente protegidos de modo a poder-se distinguir uma mensagem aleatória de uma mensagem ordenada, ou seja, de uma decisão para lançamento dos mísseis! Como se devem sentir hoje frustrados os matemáticos que estudam teoria dos números, se acaso julgavam estar a fazer ciência pura...

Vejamos, então, como os físicos se começaram a interessar pelo caos e a pôr alguma ordem nele. Pode-se dizer que a física nasceu no século XVII, com Newton, que estabeleceu as leis (sob a forma matemática, traduzidas por equações diferenciais) que regulam o movimento dos corpos mecânicos. Durante muito tempo acreditou-se na existência de um determinismo absoluto. As coisas são o que são porque houve uma causa precisa para que o fossem. A repetição da mesma causa nas mesmas circunstâncias produz sempre os mesmos efeitos. Assim, uma partícula colocada num certo sítio, com uma certa velocidade, e sujeita a uma certa força, está ao fim de um certo tempo num certo sítio, absolutamente previsível. O determinismo chegou até a ser evocado para caracterizar a cientificidade de qualquer disciplina do conhecimento humano, embora na biologia a variedade de formas dos seres vivos pareça dar margem a um certo «livre arbítrio».

Laplace, físico, matemático e astrónomo francês do tempo de Napoleão, escreveu um tratado de *Mecânica Celeste* onde se sublimava a ideia do determinismo. Se um demónio (note-se que o autor lhe chamava demónio e não deus...) pudesse saber numa dada altura a posição e a velocidade de todas as partículas do universo, nada lhe seria desconhecido. Poderia com a mesma facilidade conhecer o passado e antever o futuro. A história do universo ser-lhe-ia pois completamente transparente. Hoje, duzentos anos depois, sabemos quão distantes estamos desse universo laplaciano: é intelectualmente difícil conceber como é que a forma actual de um minúsculo grão de ervilha, por exemplo, estava já contida no «Big Bang» inicial. Ao universo da ordem absoluta, contrapomos hoje um universo onde a desordem pode ocorrer e onde há interacção entre as duas.

A primeira «pedra no sapato» no determinismo mecanicista de Newton e Laplace, exemplificado pela mecânica celeste, deveu-se ao grande matemático francês Poincaré. Ele dedicou-se a estudo do problema dos três corpos — por exemplo o Sol, um planeta e uma lua, ou uma estrela dupla e um planeta —, tendo constatado em 1889 que certas condições iniciais podem conduzir a situações caóticas, a órbitas não periódicas, que não se fecham. Pelo contrário, outras condições já conduzem a órbitas estáveis. Este problema dos três corpos não pode ser resolvido analiticamente, apesar do pequeno número de constituintes do sistema e do facto de as forças em questão serem bem conhecidas (força da gravidade). Estudos computacionais revelaram, já bastante depois de Poincaré, que muita coisa diferente pode acontecer. Por exemplo, se considerarmos um planeta à volta de uma estrela dupla — estas estrelas existem mesmo na realidade! (ver Fig. 2) — é impossível prever com exactidão em que dia e hora o planeta vai passar no plano das órbitas das estrelas. Essa impossibilidade radica na dependência muito sensível do acontecimento em causa do valor da velocidade inicial, que nunca é conhecido com uma exactidão absoluta.

Nesta ordem de ideias, pode-se colocar a questão da estabilidade do nosso sistema solar. O registo fóssil, geológico e biológico, encontrado na Terra, indica que esta se mantém a girar na mesma órbita à volta do Sol há milhões de anos. Por outro lado, as nossas previsões de acontecimentos astronómicos (efemérides) são efectuadas com grande precisão e nunca têm falhado. Será que apesar disso o sistema solar é instável? Podemos dizer que não há provas de uma grande instabilidade ao nível dos planetas principais, embora cálculos numéricos, assim como a observação directa por sondas espaciais, nos indiquem que alguns pequenos satélites de certos planetas têm um com-

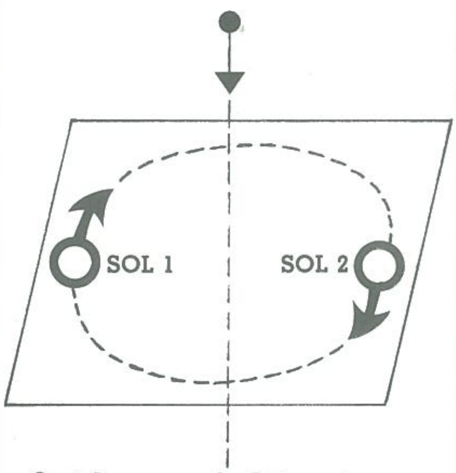


A noção de causalidade relacionada com as leis de Newton da mecânica clássica postulava que as mesmas causas produzem os mesmos efeitos. Designou-se esta situação por causalidade fraca (posição 1).

Maxwell, físico escocês do séc. XIX, afirmou dever-se rever aquela noção, por ser desprovida de utilidade real. Substituiu-a pela noção de causalidade forte: causas semelhantes produzem efeitos semelhantes (posição 2). Exemplo: o pêndulo simples.

Contudo, há muitos exemplos que violam o estipulado por Maxwell. Condições iniciais semelhantes podem conduzir a resultados distintos. Fala-se, então, de caos (posição 3). Exemplos do nosso quotidiano: dados de poker, bolas de totoloto, roleta de casino.

Fig. 1



Os três corpos de Poincaré — uma estrela dupla (Sol 1 e Sol 2) e um planeta A. Estudos computacionais actuais já demonstraram a impossibilidade de prever, com exactidão, em que dia e hora o Planeta A vai passar no plano das órbitas da estrela dupla.

Fig. 2

portamento errático. Felizmente que a nossa Lua vai passando de fase em fase, regularmente, previsivelmente. Seria bem menos romântico se houvesse o risco de cair sobre a Terra.

No entanto, essa regularidade da Lua deve-se apenas ao facto de as respectivas condições iniciais terem caído num domínio de estabilidade. Pode também acontecer que haja instabilidade da Lua a muito longo prazo. Não é porém possível efectuar previsões seguras a muito longo prazo. O *Diário de Notícias* de 31 de Janeiro deste ano transcrevia um artigo do *New York Times*, com um título sensacionalista: «Sondas e computadores desmentem Newton. O sistema solar vive em caos e completa desordem» (sic). Tratava-se, afinal, de noticiar um congresso de físicos que se ocupam do estudo do caos...

POINCARÉ em 1903 colocava em causa a descrição mecanicista tradicional: «Pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam diferenças muito grandes nos fenómenos finais. Um pequeno erro nas primeiras produz um erro enorme nos últimos. A previsão torna-se impossível e estamos perante fenómenos fortuitos».

A ideia de caos foi introduzida em física pelo já atrás referido Maxwell, e por Boltzmann, físico austríaco fundador da mecânica estatística, nos fins do século XIX. Boltzmann, quando procurava estabelecer uma equação que permitisse distinguir passado do futuro, propôs uma hipótese de «caos molecular», numa altura em que a própria existência de moléculas era um assunto polémico. A irreversibilidade no tempo surgiu em física com a equação de Boltzmann, já que a dinâmica de Newton era reversível. O tempo adquiriu então um sentido, passando a ser possível falar de «seta do tempo». A partir do momento que existem caos e falta de previsibilidade num determinado sistema, torna-se forçoso recorrer à noção de probabilidade (note-se que Laplace, o maior dos deterministas, foi por ironia da história também um dos iniciadores do cálculo matemático das probabilidades...).

Uma maneira de medir a distribuição de probabilidade de um sistema complexo é através da «entropia» ou grau de desordem. A direcção do passado para o futuro num sistema isolado corresponde, de acordo com a equação de Boltzmann, necessariamente ao aumento de entropia. Um sistema fora do equilíbrio, tem tendência a evoluir para o equilíbrio, até que a sua entropia atinja o máximo valor possível. No equilíbrio a desordem é pois máxima (ver Fig. 3). Esta situação é chamada «hipótese ergódica», e foi formulada por Maxwell em 1871 do seguinte modo: «A única suposição necessária para uma demonstração directa do equilíbrio termodinâmico é que o sistema, se abandonado ao seu estado de movimento, passará mais tarde ou mais cedo por todo o espaço de fase compatível com a equação da energia».

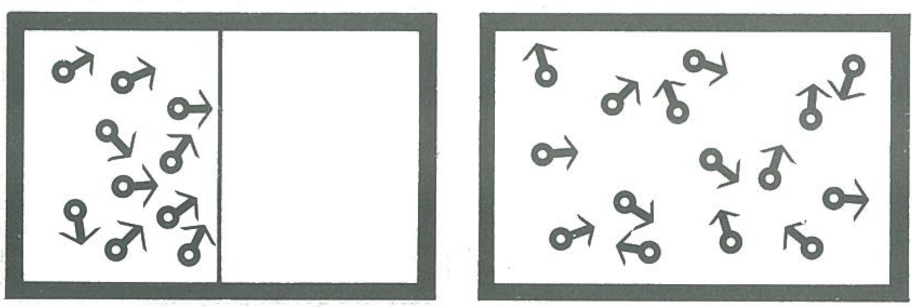
É curioso referir que Poincaré, que como dissemos conhecia a possibilidade de ocorrência de caos num sistema tão simples como o dos três corpos celestes, tem a ver com uma objecção importante levantada à hipótese do «caos molecular» de Boltzmann. É o chamado paradoxo da recorrência, que diz que se as equações de Newton são reversíveis no tempo, então um sistema, ainda que formado por muitas moléculas e por muito esquisitas que sejam as forças, tem de mais tarde ou mais cedo voltar a ser o que foi, isto é, tem de regressar às condições iniciais. Boltzmann, confrontado com esta e com outras objecções, viu-se em sérias dificuldades para entender a sua própria teoria. Suicidou-se em 1906, estando a sua campa no cemitério central de Viena assinalada pela equação que relaciona entropia e probabilidade.

As ideias de Maxwell e Boltzmann foram do outro lado do Atlântico continuadas por J. W. Gibbs, para alguns o primeiro físico americano (a física tinha sido até aí uma ciência europeia). Com base na hipótese ergódica, ele estabeleceu as bases da mecânica estatística do equilíbrio, bases essas que ainda hoje se mantêm inalteradas e cujo domínio de aplicação é constituído pelos sistemas físico-químicos com um certo grau de complexidade.

Vimos que o caos pode existir em sistema simples (3 corpos) ou em sistemas complexos (recipiente contendo um gás). Será que todos os sistemas complexos têm um comportamento caótico, isto é, será que a hipótese ergódica é universalmente válida para todos os sistemas suficientemente complicados?

A resposta a esta pergunta só foi possível depois de os cientistas terem passado a dispôr de computadores para poderem efectuar simulações de fenómenos físicos. É conhecido que os primeiros computadores digitais surgiram, tal como o radar, com as necessidades da guerra, e que os primeiros «monstros de válvulas», como o ENIAC, tiveram principalmente aplicações militares. No entanto terminada a 2.° Guerra Mundial, começaram a aparecer as primeiras aplicações civis na investigação científica. Coube a E. Fermi (o maior físico experimental deste século), a S. Ulam (um dos maiores matemáticos do nosso tempo) e a um italiano menos conhecido, J. Pasta, a descoberta em 1955, por via da experimentação numérica num computador, que um sistema complexo nem sempre ergodiza a sua energia, isto é, nem sempre a espalha por todos os graus de liberdade possíveis.

O modelo estudado correspondia a uma simplificação de uma rede de um sólido (ver Fig. 4). Os iões de um cristal estão ligados uns aos outros por forças, de tal modo que se afastarmos um da sua posição de equilíbrio essa perturbação propaga-se como uma onda (som) a todo o cristal. As forças entre os iões podem ser comparadas à acção de molas, mais ou menos elásticas. Fermi e colaboradores consideraram o modelo de uma longa cadeia de molas não perfeitamente elásticas e constataram que algumas condições iniciais eram muito particulares, no sentido em que a partir delas a energia não se distribuía uniformemente. Esta possibilidade de comportamento coerente de siste-



S_1
Entropia inicial

S_2
Entropia final

$S_2 > S_1$

O CAOS MOLECULAR DE BOLTZMANN

Fig. 3

mas não-lineares, como é o caso do sistema de molas, passou a ser estudada em pormenor por vários físicos.

Mas já um ano antes do artigo de Fermi e colaboradores, o matemático soviético Kolmogoroff, tinha chegado à conclusão de que sistemas complexos podiam ter um comportamento simples. Por exemplo, no caso de haver um certo número de condições iniciais conducentes a um comportamento periódico ou quase periódico no tempo, é possível para certos tipos de sistemas acrescentar uma pequena perturbação sem que o movimento deixe de ser periódico ou quase periódico. Há pois «ilhas» de estabilidade, ou comportamento previsível, no meio de «oceanos» de instabilidade, ou comportamento imprevisível. Os matemáticos soviéticos Arnold e Moser completaram e demonstraram rigorosamente nos anos de 1962 e 1963 a afirmação de Kolmogoroff, estabelecendo aquilo que é hoje conhecido por Teorema KAM (o nome provém das iniciais dos seus autores). Atendendo à validade deste teorema, alguns sistemas complexos podem ter afinal um movimento muito simples!

Note-se porém que o teorema KAM é complicado de demonstrar...

O aparecimento de novos computadores, cada vez mais sofisticados, levou a que os cientistas procurassem tirar deles o melhor partido. Os franceses Henon e Heiles, do Observatório Astronómico de Nice, estudaram em 1964 com o auxílio de um computador um sistema ainda mais simples que a cadeia de molas de Fermi. Tratava-se de um sistema formado por duas molas apenas, não elásticas, ligadas uma à outra. Do ponto de vista matemático, a dinâmica deste sistema é descrita por duas equações diferenciais de segunda ordem acopladas. Henon e Heiles verificaram que, conforme o valor da energia, se podia ter tanto uma situação ordenada (em que havia repetição periódica do movimento) como desordenada (caos, em que não há repetição nenhuma, e que é caracterizado pelo facto de pequenas diferenças nas condições iniciais darem origem a diferenças desmesuradas nas condições finais). Mas, mais importante do que esses dois casos extremos, é a circunstância de existir toda uma possibilidade de transição gradual da ordem para o caos. Para um certo valor de energia, certas condições iniciais resultam em órbitas periódicas, enquanto outras dão origem a órbitas irregulares. O caos pode pois coexistir com a ordem! A proporção de caos e ordem depende de um modo sensível do valor da energia.

O meteorologista norte-americano Edward Lorenz, que trabalhava no MIT (Massachussets Institute of Technology) em Boston (EUA), descobriu mais ou menos na mesma altura os chamados «atractores estranhos», quando estudava um modelo simplificado de um fluido viscoso (ver Fig. 5). Um fluido viscoso é um sistema dissipativo, isto é, um sistema em que a energia mecânica pode ser transformada em calor. Até essa altura, sabia-se que os sistemas dissipativos atingiam com o decorrer do tempo uma situação terminal, que correspondia a um movimento periódico ou quase-periódico numa região restrita de todo o espaço das configurações possíveis.

Lorenz concluiu que o seu sistema tinha a possibilidade de apresentar órbitas irregulares, mas confinadas a certas regiões do espaço. Essas regiões limitadas onde o caos é manifesto são chamadas «atractores estranhos». Uma característica muito curiosa dos atractores estranhos é a de apresentarem «simetria de escala». Isto quer dizer que, se se ampliar uma porção de um atractor estranho, a parte é semelhante ao todo. Se se ampliar ainda mais, a parte é pequena e é ainda semelhante à parte anterior e ao todo, e assim sucessivamente, *ad infinitum*. Ou melhor: embora se acredite que essa semelhança se repete infinitamete, na prática o muito pequeno está limitado pela precisão do computador utilizado. Os atractores estranhos são um exemplo dos objectos que os matemáticos chamam «fractais», e cuja aplicação na física é cada vez mais generalizada (as más-línguas dizem até que artigos que refiram fractais têm aceitação mais fácil na *Physical Review Letters*, uma das revistas mais prestigiadas que publica contribuições originais curtas.

As pessoas deveriam ser falimiarizadas bastante cedo com as equações não lineares na sua educação matemática. O que enriqueceria a intuição do cidadão comum. Os sistemas não lineares são úteis, não só na investigação como no mundo quotidiano, da política à gestão. Em todos há uma ligação fecunda entre acaso e necessidade, entre caos e ordem, que a física moderna explora... procurando pôr alguma ordem no caos.

LORENZ foi, de facto, o autor da famosa expressão «efeito borboleta», que designa um fenómeno em que uma causa minúscula tem um efeito descomunal (ver, de novo, Fig. 5). Pequenas alterações de um parâmetro podem de facto influenciar gigantescamente um sistema macroscópico. Assim, se uma borboleta abanar tranquilamente as asas sobre o anticiclone dos Açores, pode fazer chover daí a dois dias em Lisboa. Ou em Washington. Ou em Moscovo.

Os sistemas de Henon-Heiles e de Lorenz são exemplos que mostram a coexistência do caos com a ordem e onde podemos seguir a transição da ordem para o caos e vice-versa. Todos os exemplos, que têm sido sucessivamente estudados quer de um ponto de vista experimental quer de um ponto de vista teórico, de sistemas não lineares confirmam essa ligação entre ordem e caos. Ela é uma característica da não linearidade das equações que descrevem o sistema (por não linearidade entende-se o facto de a soma de duas soluções já não ser uma solução). Hoje

O SISTEMA DE MOLAS DE FERMI, ULAM E PASTA

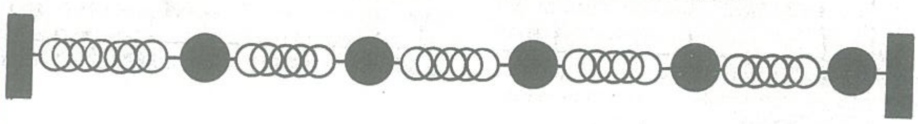


Fig. 4

O EFEITO BORBOLETA DE LORENZ

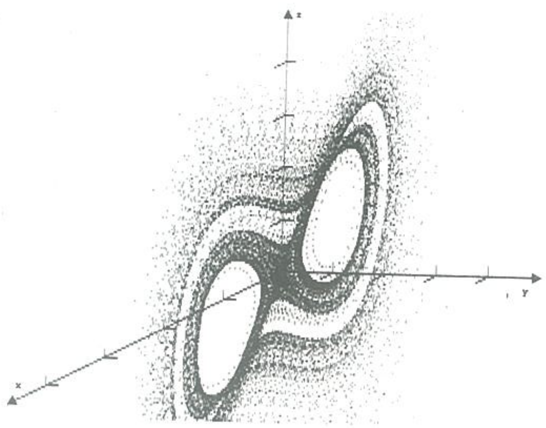


Fig. 5

O «atractor» de Lorenz. Esta figura foi obtida resolvendo num computador as equações diferenciais $x' = a\,(y - x)$, $y' = bx - y - xz$, $z' = -rz + xy$, para $a = 10$, $b = 2.66$ e $r = 130$, obtidas por Lorenz ao estudar um modelo simplificado de um fluido viscoso. (Figura e legenda da responsabilidade da Redacção).

sabe-se que a esmagadora maioria dos sistemas naturais são não lineares, pelo que a transição da ordem para o caos é essencial para a compreensão da natureza. Estudar apenas os sistemas lineares, como era, não há muito tempo, costume em física, é como que, perante toda uma variedade de fruta, escolher apenas figos... Em particular, os sistemas biológicos, os sistema humanos, são essencialmente não lineares, podendo neles verificar-se toda a riqueza de metamorfoses e interpenetração da ordem e do caos.

Em 1978, Feigenbaum, físico norte-americano do Centro de Estudos Não-Lineares de Los Alamos, nos Estados Unidos, publicou um artigo no *Journal of Statistical Physics* (depois de algumas dificuldades noutras revistas com os revisores científicos, que decidem sobre a publicação), onde apresentava resultados, obtidos com o auxílio de uma vulgar calculadora de bolso, para uma equação não linear a uma dimensão, com um único parâmetro ajustável. Tratava-se da seguinte equação A (que me perdoem os leigos em matemática, não os vou maçar muito, pois esta é a única equação deste escrito):

(A) $$x_{i+1} = r\,(x_i - x_i^2)$$

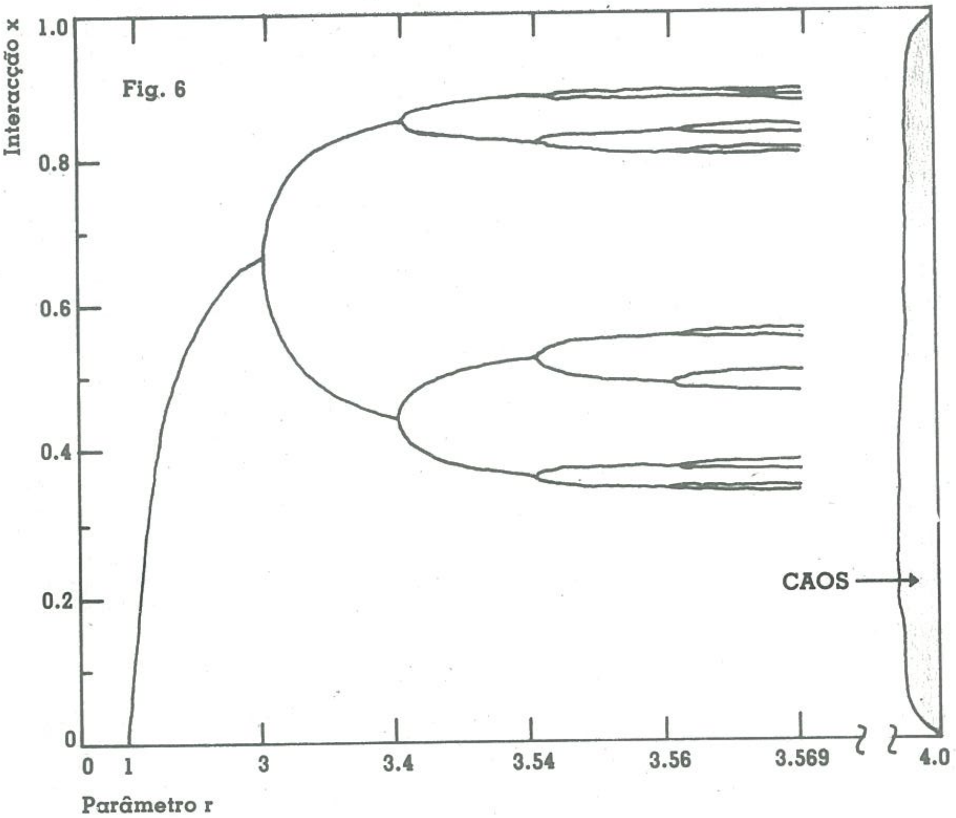
onde x_i designa uma dada iteracção e x_{i+1} a iteracção seguinte de uma certa variável real compreendida entre 0 e 1. O parâmetro r é fixado entre 0 e 4 (ver Fig. 6). Ora acontece que, variando r entre esses valores externos, se obtém toda uma gama de situações que vão da ordem extrema (se $r = 0$, as iteracções dão sempre 0) até ao caos mais completo (para $r = 4$, pode-se obter por aquela equação qualquer valor entre 0 e 1, pelo que se está então em presença de um bom gerador de números aleatórios). Entre $r = 0$ e $r = 3$, qualquer que seja o valor inicial de x, obtém-se sempre um valor fixo final. Para r entre 3 e 3,4, obtêm-se 2 valores de x (isto é, há um ciclo limite). Em $r = 3$ há pois uma bifurcação. Em $r = 3{,}4$ dá-se uma nova bifurcação. Passam agora a haver quatro valores finais possíveis. E à medida que r cresce vão acontecendo bifurcações sucessivas. Até que para um certo valor crítico de r, $r_c = 3{,}57$, o infinito de linhas dá origem a um infinito de bandas de valores contínuos de x, isto é, começa-se a instalar o caos (a sombreado na Fig. 6).

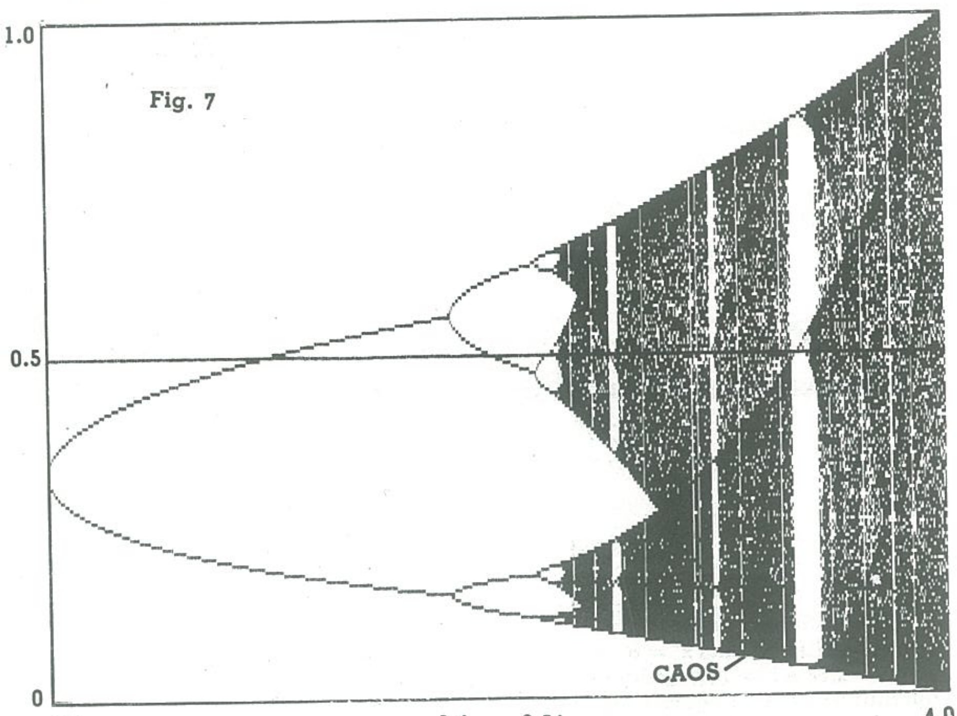
Esse caos não é absoluto. Se se verificar com cuidado, constata-se que há zonas proibidas. Coexistem pois zonas localizadas, onde é possível obter qualquer valor e outras que são inalcançáveis pelo algoritmo proposto. A situação é semelhante à obtida por Lorentz. Se aplicarmos a janela de valores de x para r entre 3,57 e 4, reencontramos padrões de bifurcações sucessivas (ver Fig. 7). A parte reproduz o todo, pelo que estamos em presença de um «atractor estranho», embora a uma dimensão! Finalmente, para $r = 4$, a situação é perfeitamente caótica, no sentido em que se pode obter qualquer valor de x, todos os valores tendo igual probabilidade de aparecerem num determinado intervalo de tempo.

O que há de novo no trabalho de Feigenbaum não é tanto a descoberta do caminho periódico para o caos e da ocorrência de atractores estranhos. É mais o facto de a aproximação para o caos ser formalmente a mesma para todos os sistemas não lineares. Assim, se em vez de x^2 se puser x^3, se em vez de $x_i - x^2$ se puser o seno de π x_i, obtém-se a mesma aproximação do caos por bifurcações sucessivas. Mais do que isso: também é quantitativamente possível descrever a aproximação para o caos por números que são universais. Por exemplo, Feigenbaum introduziu um número, que tem hoje o seu nome, $\delta = 4{,}6692016$ e que caracteriza a razão de distâncias entre bifurcações sucessivas. Trata-se de um número universal, tal como o *pi* (este aplica-se a todos os círculos, o δ aplica-se a todas as aplicações não lineares). Tal como o *pi*, também o δ de Feigenbaum foi descoberto por via empírica.

Note-se que a equação discutida pode ser interpretada como a discretização de uma dada equação diferencial não linear. Ora como muitos fenómenos físicos, químicos,

AS BIFURCAÇÕES SUCESSIVAS DE FEIGENBAUM





biológicos, sociais, podem ser descritos por equações diferenciais não lineares, aquilo que dissemos para essa equação é válido para a descrição de muitos fenómenos naturais, nas suas variadas facetas. Um biólogo, R. May, escrevia assim na revista inglesa *Nature*, em 1976: «Sou do parecer que as pessoas devem ser familiarizadas com a equação (A) bastante cedo na sua educação matemática. Esta equação pode ser estudada de uma forma fenomenológica, por iteracção numa calculadora ou mesmo à mão. O seu estudo não envolve tanta sofisticação conceptual como o cálculo elementar. Esse estudo enriqueceria a intuição do estudante sobre sistemas não lineares. É que não apenas na investigação, mas também no mundo quotidiano da política e da economia, seria útil para todos se tomassemos consciência que sistemas não-lineares simples não têm necessariamente propriedades dinâmicas simples».

Assim, a turbulência das águas de um rio, a mudança de cor numa dada reacção química, a população de um nicho ecológico, a evolução de um produto no mercado, tudo isso são sistemas que mostram ou podem mostrar evolução da ordem para o caos, e que podem portanto ser mais ou menos caóticos. Todos eles têm algo de semelhante entre si: a união fecunda entre caos e ordem, entre acaso e necessidade, para a qual os físicos, esses eternos quantificadores da natureza, já começaram a estabelecer regras. Cumprem afinal a sua função, que é a de pôr (alguma) ordem no caos.

Notas:

(1) *Physical Review, 1986, volume A33, págs. 576 e segs.*

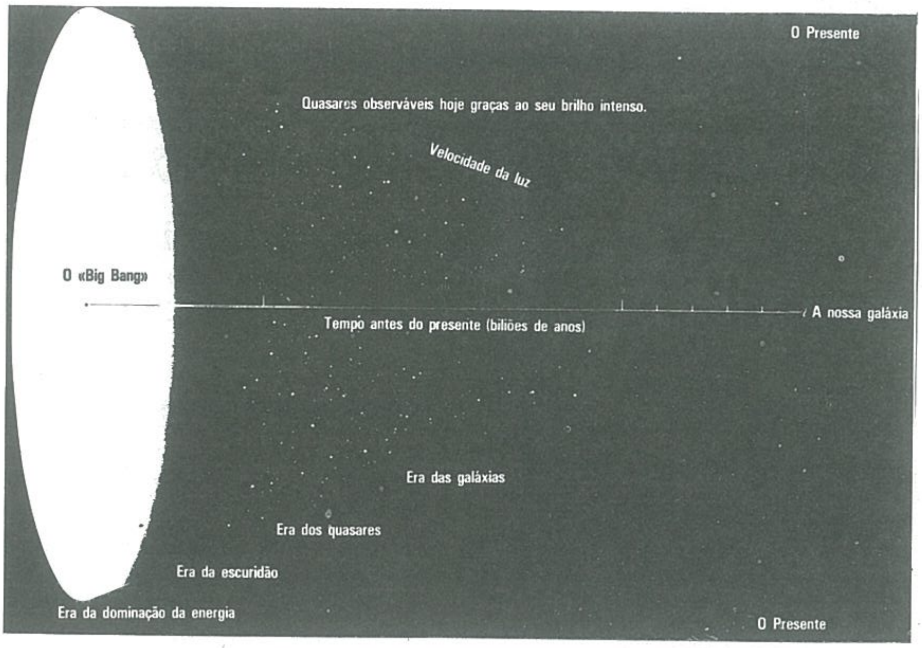
Para saber mais

Bibliografia elementar:

- «Chaos», *Scientific American*, 1986, Dezembro.
- «L'Ordre Chaotique», *La Recherche*, 1986, Fevereiro, pp. 190-204.
- «The Orderly Pursuit of Pure Disorder», *Discover*, 1987, Janeiro, p. 72.

Bibliografia para estudo:

- *Nature*, n.° 261 (1976), p. 459, artigo de R. May.
- *Physics Today*, 1983, Abril, artigo de J. Ford.
- *Physics Today*, 1983, Dezembro, «Roads to Chaos», L. Kadanoff.



GLOSSÁRIO

BIG-BANG — Conceito que pretende definir a gigantesca explosão que caracterizou o instante zero do universo. Concebido nos anos 30 pelos astrónomos Lemaitre (belga), Friedman (soviético) e Gramov (americano). Contudo, para os cosmologistas o instante zero «não tem sentido». O interesse desenvolve-se sobre as primeiras fracções de segundo após, tentando-se «reconstituir» o início do universo, estudando as partículas mais elementares e suas interacções.

ENIAC — Electronic Numerical Integrator and Computer. J. P. Eckert (engenheiro-chefe) e John Mauchly (consultor principal) do projecto ENIAC deram à luz o primeiro computador electrónico digital de grande porte em 1946. A História do ENIAC vem de 1943 quando as Forças Armadas norte-americanas assinaram um contrato de 400 mil dólares com a Moore School para construir um tal computador que apoiasse o esforço de guerra de então. O ENIAC tinha 5 metros de altura e 24 de comprimento.

ENTROPIA — Degradação da energia mecânica; a energia cinética transforma-se e perde-se em energia calórica e esta, por sua vez, degrada-se ao desvanecer-se no ambiente.

ISAAC NEWTON (1642-1727) — Inglês, professor de Matemática em Cambridge; físico, matemático e astrónomo, lançou as bases da Física clássica. Estabeleceu as leis — Leis de Newton — que definem com rigor matemático os movimentos mecânicos dos corpos. A repetição da mesma causa nas mesmas circunstâncias produz sempre os mesmos efeitos, eis o axioma-base da previsibilidade absoluta.

PIERRE SIMON LAPLACE (1749-1827) — Francês, professor de Matemática na Real Escola Militar (desde os 19 anos). Napoleão fê-lo ministro e conde, e Luís XIV elevou-o a marquês. Físico, matemático e astrónomo. Reforçou a axiomática determinista da Mecânica Clássica.

JAMES CLERK MAXWELL (1831-1879) — Escocês, professor das Universidades de Aberdeen e de Londres. Físico. Afirmou que era necessário rever o axioma da Mecânica Clássica — em que causas iguais jamais se repetem — considerando-o inadequado à realidade. Atribui-se-lhe ter «introduzido» a ideia de caos na Física, conjuntamente com Boltzmann.

LUDWIG BOLTZMANN (1844-1906) — Austríaco. Físico. Tal como Maxwell equacionou o caos. Atribui-se-lhe a definição de «caos molecular», relacionando entropia com probabilidade.

HENRI POINCARÉ (1854-1912) — Francês, físico, matemático, astrónomo, professor da Sorbonne desde 1881. Definiu com clareza: pequenas diferenças nas condições iniciais produzem por vezes diferenças gigantescas nos fenómenos finais. A previsão torna-se impossível.

J. WILLARD GIBBS (1839-1903) — Norte-americano, físico. Estabeleceu as bases da mecânica estatística do equilíbrio.

ENRICO FERMI (1901-1954) — Italiano, Prémio Nobel da Física em 1938. Radicou-se nos EUA nos anos 40.

STANISLAW ULAM — Polaco, doutorado em matemática pelo Instituto Politécnico de Lwow no início dos anos 30. Radicou-se em Los Alamos, nos Estados Unidos, desde os anos 40.

EDWARD LORENZ — Norte-americano, meteorologista do Massachussets Institute of Technology dos Estados Unidos. Procurava em 1963 compreender as razões da imprevisibilidade do comportamento meteorológico. Teve a ideia (e audácia) de simplificar as equações que regem os ventos, ciclones, depressões, etc., para as poder tornar calculáveis nos computadores dos anos 60. A surpresa foi que as soluções das suas três equações se revelaram tão irregulares e imprevisíveis... tal como o tempo que procurava modelizar.

MITCHELL FEIGENBAUM — Norte-americano, físico e matemático, investigador no Los Alamos National Laboratory desde os anos 70. É encarado como um dos fundadores da moderna teoria sobre o caos.