



**FCTUC DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

# **Instabilidade lateral por flexão-torção de vigas com contraventamentos discretos**

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil na  
Especialidade de Estruturas

Autor

**Ana Sara Valente Cardoso**

Orientadores

**Doutor Anísio Alberto Martinho de Andrade**

**Doutor Paulo Manuel Mendes Pinheiro da Providência e Costa**

Esta dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor, não tendo sofrido correções após a defesa em provas públicas. O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer responsabilidade pelo uso da informação apresentada

**Coimbra, Fevereiro, 2016**

## AGRADECIMENTOS

Com a presente dissertação encerro um capítulo muito importante da minha vida, ao longo do qual tive a oportunidade de conviver e trabalhar com um elevado número de pessoas, que de certa forma contribuíram para que tudo isto, hoje, fosse possível. Assim, quero deixar um especial agradecimento:

Ao Professor Doutor Anísio Andrade pelo apoio, paciência, dedicação e inteira disponibilidade demonstrada ao longo de todo este trabalho, e pelos conhecimentos transmitidos. A sua ajuda foi, sem dúvida, fundamental e muito importante para mim.

Ao Professor Doutor Paulo Providência por toda a paciência e dedicação na orientação deste trabalho, principalmente pelo grande empenho em ajudar na utilização do *software* MatLab e também pela inteira disponibilidade demonstrada.

Aos meus pais, Madalena e Luís Cardoso, pelo amor incondicional, por estarem sempre presentes, apoiando as minhas escolhas e dando todo o apoio necessário para que hoje fosse possível concluir esta e tão importante etapa. Ao meu irmão, João, que está de igual modo, incondicionalmente do meu lado. Aos meus avós e restante família que sempre me incentivaram para concluir este curso.

À enorme família que Coimbra me deu e que sem dúvida levo no meu coração. Em especial à Susana Almeida, pela amizade, compreensão e calma nesta última fase, à Nélia Carreira, Patrícia Fernandes e Andreia Vieira, igualmente pela amizade, paciência e por terem sempre uma palavra amiga e confortante nas alturas mais difíceis. Obrigada, acima de tudo, por estarem comigo do início ao fim. Ao Diogo Bazenga, Vasco Silva e Antony Gonçalves por toda a ajuda e disponibilidade demonstrada ao longo de todo o curso.

A todos, um muito obrigada por estarem sempre presentes e disponíveis para mim, contribuindo para o meu crescimento enquanto pessoa.

## RESUMO

Uma viga sujeita a um carregamento de flexão, pode apresentar um modo de encurvadura combinando torção com flexão transversal ao plano de carga, caso não esteja suficientemente contraventada e as suas rigidezes de torção e flexão transversal forem reduzidas. Assim, o risco de ocorrência deste fenómeno pode ser elevado para peças lineares de seção aberta de paredes finas, uma vez que a sua rigidez de torção é reduzida. Trata-se de um fenómeno de instabilidade bifurcacional, o qual é matematicamente descrito por um problema generalizado de valores próprios linear. Os valores próprios são os parâmetros de carga de bifurcação e os vectores próprios definem os modos de encurvadura correspondentes. O menor parâmetro de carga de bifurcação positivo recebe o qualificativo de crítico e conduz à definição do momento crítico da viga, o qual se define como sendo o momento máximo que a viga pode suportar sem encurvar lateralmente.

O objetivo central desta dissertação, que surge no seguimento de duas outras realizadas em 2015, consiste em formular, implementar computacionalmente em MatLab e verificar um elemento finito de barra (unidimensional) que permita realizar análises lineares de estabilidade (cálculo de cargas de bifurcação e dos correspondentes modos de encurvadura), em regime elástico, de vigas com contraventamentos discretos. Serão consideradas vigas isostáticas ideais (isto é, sem imperfeições) com seção aberta de paredes finas duplamente simétrica, dotadas de contraventamentos laterais e/ou torsionais discretos, perfeitamente rígidos ou elásticos, e sujeitas à actuação, no seu plano de maior inércia, de um sistema proporcional de forças exteriores conservativas. O efeito da curvatura de pré-encurvadura é desprezado. Pretende-se obter uma ferramenta versátil que permita estudar (1) a eficácia de diferentes tipos e posições dos contraventamentos, assim como (2) a influência da sua rigidez.

São apresentados dois exemplos práticos, que diferem nas condições de apoio e de carregamento, bem como no tipo, posição e rigidez dos contraventamentos usados. O objetivo é triplo: (1) verificar o elemento finito formulado (por comparação com resultados analíticos e numéricos disponíveis na literatura e por utilização do *freeware* LTBeam), (2) ilustrar as suas potencialidades e (3) evidenciar alguns aspectos da instabilidade lateral por flexão-torção de vigas com contraventamentos discretos.

## ABSTRACT

A beam under a bending loading may show a buckling mode combining twist and out-of-loading plane bending, in case of insufficient bracing and small torsional and out-of-plane bending stiffnesses. The risk of such a buckling occurring may therefore be quite high for open section thin walled linear members. This is a bifurcation phenomenon usually known by lateral-torsional buckling. In this dissertation, its occurrence is investigated for prismatic members with thin walled double-symmetric open section with discrete restraints, under simple isostatic support conditions, in the linear elastic regime, subject to a simple quasi-static loading along the symmetry plane of the cross section, proportional to a single load parameter.

Usually the bifurcation load parameter values and corresponding instability modes are determined disregarding the effects of prebuckling deformations, an assumption that leads to a linear generalized eigenproblem. The resistance of a beam to lateral-torsional buckling depends mainly on the critical moment, which is defined as the maximum moment that the beam can withstand without bending.

In this dissertation, a finite element is developed and implemented in MatLab, making it possible to consider the influence of discrete restraints in the analysis of the lateral-torsional buckling behaviour of discretely braced beams.

Two examples confirm the correctness of the finite element model and its MatLab implementation, and illustrate their capabilities. Moreover, they also illuminate some particular aspects of the behaviour of braced beams.

## ÍNDICE

SIMBOLOGIA .....	v
Letras latinas minúsculas .....	v
Letras latinas maiúsculas .....	vi
Letras gregas minúsculas .....	vii
Letras gregas maiúsculas .....	vii
1    INTRODUÇÃO .....	1
1.1    Enquadramento geral .....	1
1.2    Objetivos e âmbito da dissertação .....	2
1.3    Organização da dissertação .....	2
2    TORÇÃO NÃO UNIFORME .....	4
3    DEFINIÇÃO DA CLASSE DE PROBLEMAS A ANALISAR .....	16
3.1    Geometria e propriedades materiais .....	16
3.2    Carregamento .....	16
3.3    Condições de Apoio .....	17
3.4    Contraventamentos discretos .....	18
3.5    Objetivos da análise .....	18
4    DO CONTÍNUO AO DISCRETO – O MODELO DE ELEMENTOS FINITOS .....	19
4.1    O critério de Trefftz e a segunda variação da energia potencial total .....	19
4.2    Aproximação do campo de deslocamentos .....	22
4.3    Matrizes de rigidez elementares, material e geométrica .....	26
4.4    Montagem das matrizes de rigidez globais .....	27
4.5    Problema algébrico de valores e vectores próprios .....	30
5    EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO E APLICAÇÃO .....	31
5.1    Exemplo 1 – Viga de secção I duplamente simétrica, simplesmente apoiada e com contraventamento lateral a meio-vão, submetida a flexão uniforme .....	31
5.2    Exemplo 2 – Consola com Secção Duplamente Simétrica, com Carga Pontual aplicada na Extremidade Livre .....	38
6    CONCLUSÃO .....	50
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	52

## SIMBOLOGIA

### Letras latinas minúsculas

$a, b$  – Graus de liberdade globais

$a_i$  – Coeficientes constantes associados às funções polinomiais cúbicas  $v_{\Delta}^{(e)}$

$b_i$  – Coeficientes constantes associados às funções polinomiais cúbicas  $\varphi_{\Delta}^{(e)}$

$c_i$  – Constante de integração

$\mathbf{d}$  – Vector global de deslocamentos nodais

$\mathbf{d}^{(e)}$  – Vector elementar de deslocamentos nodais

$d_i^{(e)}$  – Deslocamentos nodais elementares

$(e)$  – Número de ordem de um elemento finito genérico

$h$  – Altura da secção transversal de um perfil em I, medida entre as linhas médias dos banzos

$k_{l,i}$  – Rigidez de um contraventamento lateral

$k_{t,i}$  – Rigidez de um contraventamento torsional

$n$  – Número de elementos finitos

$nQ$  – Número de cargas concentradas

$nc$  – Número de secções contraventadas

$q$  – Força transversal (segundo  $z$ ) distribuída

$q_{ref}$  – Valor de referência da força transversal distribuída

$v$  – Deslocamento segundo  $y$  do centro de gravidade

$v_f$  – Deslocamento segundo  $y$  da linha média dos banzos de um perfil em I

$v_{\Delta}^{(e)}$  – Aproximação de  $v$  no elemento finito  $(e)$ , de comprimento  $\Delta$  (função polinomial cúbica)

$x, y, z$  – Sistema de eixos Cartesiano fixo

$x_i$  – Abcissa da secção de aplicação da força concentrada  $Q_i$

$x_{c,i}$  – Abcissa de uma secção contraventada

$z_q$  – Cota de aplicação da força transversal distribuída

$z_{Q,i}$  – Cota de aplicação da força concentrada  $Q_i$

$z_{l,i}$  – Cota de colocação de um contraventamento lateral

## Letras latinas maiúsculas

$B$  – Bimomento

$B_L$  – Bimomento aplicado na extremidade  $x = L$

$D$  – Rigidez de flexão de cada banzo em relação ao seu eixo de maior inércia

$\mathbf{D}^{(e)}$  – Matriz de operadores diferenciais

$E$  – Módulo de elasticidade

$\mathbf{E}_1^{(e)}$  – Matriz constitutiva

$\mathbf{E}_2^{(e)}$  – Matriz interveniente na definição de  $\mathbf{G}^{(e)}$

$G$  – Módulo de distorção

$\mathbf{G}$  – Matriz de rigidez geométrica global

$\mathbf{G}^{(e)}$  – Matriz de rigidez geométrica elementar

$I_y$  – Momento de inércia de uma seção em relação ao eixo principal central de maior inércia  $y$

$I_z$  – Momento de inércia de uma seção em relação ao eixo principal central de menor inércia  $z$

$I_w$  – Constante de empenamento

$J$  – Constante de Saint-Venant

$\mathbf{K}$  – Matrizes de rigidez material (elástica) global

$\mathbf{K}^{(e)}$  – Matrizes de rigidez material (elástica) elementar

$L$  – Comprimento de uma barra; Comprimento do vão de uma viga simplesmente apoiada ou do balanço de uma consola

$M_{cr}$  – Momento crítico

$M_{cr,0}$  – Momento crítico da viga não contraventada

$M_{2,0}$  – Momento correspondente ao segundo modo de encurvadura da viga não contraventada

$M_f$  – Momento flector num banzo

$M_y$  – Distribuição de momentos fletores

$M_{y,ref}$  – Distribuição de momentos fletores associada aos valores de referência das forças exteriores

$N_i^{(e)}$  – Funções de forma cúbicas de Hermite

$\mathbf{N}^{(e)}$  – Matriz de funções de forma de Hermite

$Q_{cr}$  – Valor crítico da carga concentrada

$Q_{cr,0}$  – Valor crítico da carga concentrada na viga não contraventada

$Q_{2,0}$  – Valor da carga concentrada correspondente ao segundo modo de encurvadura da viga não contraventada

$Q_{ref}$  – Valor de referência da carga concentrada

$T$  – Momento torsor total

$T_t$  – Momento torsor de Saint-Venant

$T_w$  – Momento torsor associado à restrição do empenamento

$V_2$  – Segunda variação da energia potencial total na vizinhança de um estado de equilíbrio fundamental

$V_{2,\Delta}$  – Aproximação de  $V_2$  correspondente a uma malha uniforme de elementos finitos com comprimento  $\Delta$

$V_f$  – Força de corte num banzo

### Letras gregas minúsculas

$\alpha$  – Parâmetro que define a posição de um contraventamento ao longo do vão

$\beta$  – Bimomento adimensionalizado

$\kappa = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI_w}{GJ}}$  – Parâmetro adimensional de torção não uniforme

$\varphi$  – Rotação de torção

$\tilde{\varphi}$  – Rotação de torção adimensionalizada

$\varphi_{\Delta}^{(e)}$  – Aproximação de  $\varphi$  no elemento finito ( $e$ ), de comprimento  $\Delta$  (função polinomial cúbica)

$\eta^{(e)}$  – Coordenada local de um elemento finito

$\lambda$  – Parâmetro de carga

$\lambda_{cr}$  – Valor crítico do parâmetro de carga

$\lambda_{cr,0}$  – Valor crítico do parâmetro de carga para a viga não contraventada

$\lambda_{2,0}$  – Valor do parâmetro de carga correspondente ao segundo modo de encurvadura da viga não contraventada

$\xi$  – Abcissa normalizada

### Letras gregas maiúsculas

$\Delta$  – Comprimento de um elemento finito

$\bar{\Omega}^{(e)}$  – Domínio de um elemento finito



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Enquadramento geral

O colapso de uma estrutura pode ocorrer, essencialmente, por dois modos (Bazant e Cedolin, 1991): (1) rotura do material ou (2) instabilidade estrutural. Mais especificamente, no que diz respeito à conceção de estruturas metálicas, as propriedades físicas e mecânicas dos aços disponíveis no mercado permitem produzir estruturas com esbelteza considerável, às quais estão associados os objetivos de (1) maior economia e (2) qualidade arquitetónica. Contudo, o dimensionamento de estruturas com elevada esbelteza está naturalmente condicionado pela verificação da estabilidade e/ou deformabilidade global da mesma, cuja natureza é intrinsecamente *não linear*.

Nas vigas, uma vez que não estão sujeitas a esforço axial, a instabilidade global está associada à encurvadura por flexão-torção, que, como o nome indica, combina torção com a flexão em torno do eixo de menor inércia. Em vigas não contraventadas, este fenómeno tende a ocorrer quando a rigidez de torção do elemento é baixa, como é o caso dos elementos constituídos por secções abertas de paredes finas (Reis e Camotim, 2001; Trahair, 1993).

Uma viga está muitas vezes ligada a elementos que participam no efeito de encurvadura e que, por sua vez, influenciam de forma significativa a sua resistência a esse fenómeno. Mais concretamente, um sistema de contraventamento tem por objectivo restringir os deslocamentos que ocorrem na encurvadura, de modo a aumentar a estabilidade global do sistema. No caso da encurvadura por flexão torção, podem ser considerados dois tipos de contraventamento, lateral e torsional, estando o desempenho da estrutura associado ao número, tipo, posição e rigidez dos elementos de contraventamento (Trahair e Nethercot, 1984; Yura, 2001). Os elementos de contraventamento lateral são aplicados a uma dada cota e, conforme o nome indica, restringem o deslocamento lateral do ponto onde são aplicados. Por sua vez, os elementos de contraventamento torsional restringem a rotação de torção da secção transversal. Os dois tipos de contraventamento podem aparecer combinados na mesma secção, restringindo em simultâneo o deslocamento lateral como a rotação de torção.

## 1.2 Objetivos e âmbito da dissertação

O objetivo central desta dissertação consiste em formular, implementar computacionalmente e verificar um elemento finito de barra (unidimensional) que permita realizar análises lineares de estabilidade (cálculo de cargas de bifurcação e dos correspondentes modos de encurvadura), em regime elástico, de vigas com contraventamentos discretos. Serão consideradas vigas isostáticas ideais (isto é, sem imperfeições) com seção aberta de paredes finas duplamente simétrica, dotadas de contraventamentos laterais e/ou torsionais discretos, perfeitamente rígidos ou elásticos, e sujeitas à actuação, no plano de maior inércia, de um sistema proporcional de forças exteriores conservativas. O efeito da curvatura de pré-encurvadura é desprezado. Pretende-se obter uma ferramenta versátil que permita estudar (1) a eficácia de diferentes tipos e posições dos contraventamentos, assim como (2) a influência da sua rigidez.

No seguimento de dissertações de mestrado anteriores (Bica, 2015; Cristino, 2015), a implementação computacional é realizada com o *software* MatLab (MathWorks 2015), para o qual a Universidade de Coimbra possui uma licença de *campus*.

## 1.3 Organização da dissertação

A presente dissertação encontra-se dividida em seis capítulos, o primeiro dos quais é a presente Introdução.

No segundo capítulo, com o intuito de introduzir e clarificar as ideias base, aborda-se, de forma sucinta, os aspetos mais relevantes da torção não uniforme, em regime material e geometricamente linear, de barras com seção aberta de paredes finas, dando maior destaque ao caso de perfis em I, onde é facilmente visualizado este fenómeno.

No terceiro capítulo descreve-se em pormenor a classe de problemas a analisar, nomeadamente em termos de geometria da estrutura, das suas condições de apoio, das características do material e do carregamento que se encontra aplicado. Descrevem-se ainda os tipos de contraventamentos discretos considerados.

O quarto capítulo descreve o modelo matemático (contínuo) adotado nesta dissertação e a sua discretização por elementos finitos. Neste capítulo é ainda discutida a implementação dos elementos finitos em MatLab.

No quinto capítulo são apresentados dois exemplos práticos, que diferem nas condições de apoio e de carregamento, bem como no tipo, localização e rigidez dos contraventamentos

usados. O objectivo é triplo: (1) verificar o elemento finito formulado no capítulo anterior, (2) ilustrar as suas potencialidades e (3) evidenciar alguns aspectos da instabilidade lateral por flexão-torção de vigas contraventadas.

No sexto e último capítulo da presente dissertação são apresentadas as principais conclusões retiradas deste trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

## 2 TORÇÃO NÃO UNIFORME

Quando uma barra prismática com secção aberta de parede fina é submetida a um momento torsor  $T$ , as suas secções transversais rodam em torno do eixo longitudinal dos centros de corte e empenam, ou seja, não permanecem planas. O comportamento da barra é marcadamente diferente consoante o empenamento esteja ou não restringido.

Quando o empenamento é livre – os apoios não restringem o empenamento e o momento torsor é constante –, o elemento encontra-se sujeito a torção uniforme ou torção de Saint-Venant (Figura 2.1a). Em cada secção existem apenas tensões tangenciais cuja distribuição, ilustrada na Figura 2.2 para o caso de uma secção em I, pode ser facilmente visualizada recorrendo à analogia da membrana de Prandtl (Dias da Silva, 2013). Neste caso, o momento torsor é proporcional ao ângulo de rotação por unidade de comprimento ( $d\varphi/dx$ ):

$$T = T_t = GJ \frac{d\varphi}{dx}, \quad (1)$$

onde  $GJ$  é a rigidez de torção uniforme da secção ( $G$  é o módulo de distorção do material e  $J$  a constante de Saint-Venant<sup>1</sup>).

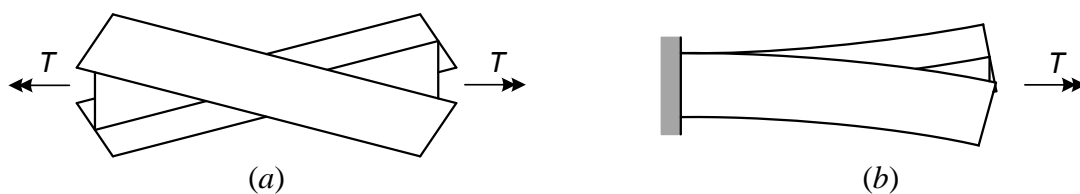


Figura 2.1 – Peça de secção em I submetida a (a) torção uniforme e (b) torção não uniforme.

<sup>1</sup> Para uma secção aberta de paredes finas, a constante de Saint-Venant  $J$  pode ser calculada através da expressão

$$J = \frac{C}{3} \sum_{i=1}^n l_i e_i^3,$$

onde os  $l_i$  são os comprimentos dos  $n$  troços que compõem a secção, os  $e_i$  são as respectivas espessuras (com  $e_i \ll l_i$ ) e  $C$  é um coeficiente um pouco superior à unidade através do qual se tem em conta o acréscimo de rigidez devido às ligações e concordâncias entre troços (Dias da Silva, 2013).

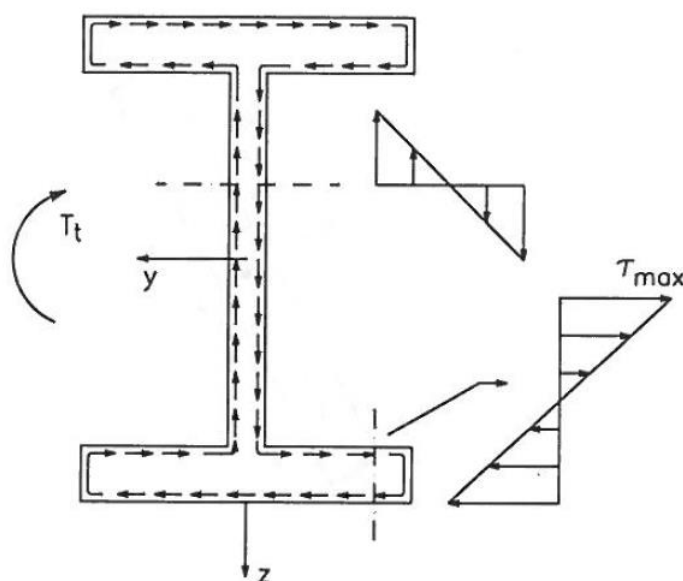


Figura 2.2 – Torção uniforme – Distribuição de tensões tangenciais numa secção em I (retirada de Reis e Camotim, 2001).

Por outro lado, a torção não uniforme (Figura 2.1b) ocorre quando o empenamento varia ao longo do comprimento da barra, provocando extensões e tensões normais na direção longitudinal. A variação ao longo da barra destas tensões normais é equilibrada por tensões tangenciais adicionais, as quais são estaticamente equivalentes a um momento torsor. Assim, o momento torsor é dado pela soma de duas parcelas, o momento torsor de Saint-Venant,  $T_t$ , dado novamente por (1), e o momento torsor associado à restrição do empenamento,  $T_w$ .

A fim de apresentar as ideias base e definir a parcela  $T_w$ , considera-se o exemplo de uma barra em consola com secção em I duplamente simétrica, submetida a um momento torsor  $T$  (Figura 2.3). Pode estabelecer-se, por considerações de simetria, que as secções transversais rodam em torno do eixo baricêntrico (eixo  $x$  na figura). Os deslocamentos transversais (segundo  $y$ ) dos banzos são então dados por

$$v_f = \pm \frac{h}{2} \varphi, \quad (2)$$

onde  $h$  corresponde à altura da secção transversal, medida entre as linhas médias dos banzos e  $\varphi(x)$  é a rotação da secção de abcissa  $x$ .

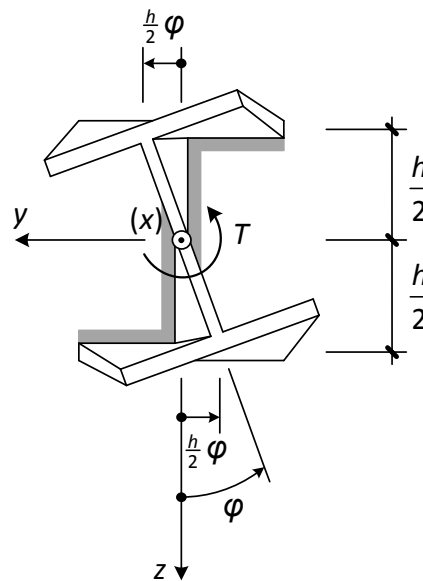


Figura 2.3 – Barra em consola com secção em I duplamente simétrica, submetida a um momento torsor  $T$ .

Considerando os bantos, individualmente, como vigas de Euler-Bernoulli, as curvaturas

$$\frac{d^2 v_f}{dx^2} = \pm \frac{h}{2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \quad (3)$$

que estes adquirem devido à restrição do empenamento estão associadas aos momentos fletores

$$M_f = \pm \frac{D h}{2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \quad (4)$$

e às forças de corte

$$V_f = \frac{dM_f}{dx} = \pm \frac{D h}{2} \frac{d^3 \varphi}{dx^3}, \quad (5)$$

onde  $D$  designa a rigidez de flexão de cada banto em relação ao seu eixo central de maior inércia (eixo  $z$ ). As forças de corte nos dois bantos são iguais em módulo e têm sentidos contrários, formando um binário

$$T_w = - \frac{D h^2}{2} \frac{d^3 \varphi}{dx^3}, \quad (6)$$

Posto isto, o momento torsor total é dado por

$$T = T_t + T_w = GJ \frac{d\varphi}{dx} - \frac{D h^2}{2} \frac{d^3 \varphi}{dx^3}, \quad (7)$$

A propriedade mecânica definida por  $\frac{Dh^2}{2}$  é habitualmente designada por rigidez de empenamento da secção transversal e representada por  $EI_w$  ( $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $I_w$  uma propriedade geométrica da secção transversal chamada constante de empenamento). Usando uma definição adequada para  $I_w$ , as expressões (6) e (7) permanecem válida para secções abertas de paredes finas com geometria arbitrária, mesmo que não exibam dupla simetria.<sup>2</sup>

É ainda habitual definir uma nova resultante de tensões, autoequilibrada, que Vlasov (1961) designou por bimomento:

$$B = -EI_w \frac{d^2\varphi}{dx^2}. \quad (8)$$

No caso de uma barra em I duplamente simétrica, o bimomento corresponde, em valor absoluto, ao produto do momento fletor em cada banzo pela distância entre linhas médias dos banzos (Figura 2.4), ou seja

$$|B| = |M_f| h = \frac{Dh^2}{2} \left| \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right|. \quad (9)$$

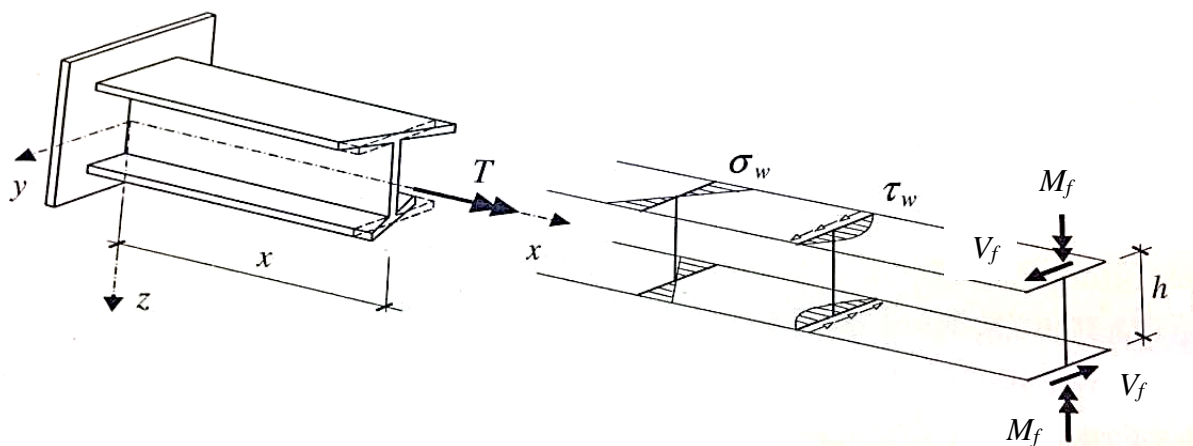


Figura 2.4 – Barra em I duplamente simétrica em torção não uniforme: tensões e resultantes de tensões devidas à flexão dos banzos (adaptada de Simões, 2014).

<sup>2</sup> As constantes de empenamento  $I_w$  de um conjunto de secções de utilização corrente encontram-se tabeladas em Oden e Ripperger (1981), por exemplo.

Considere-se agora o equilíbrio do troço infinitesimal de barra representado na Figura 2.5, onde  $m_T$  representa o momento distribuído aplicado com a direcção e sentido do eixo longitudinal  $x$ , definido por unidade de comprimento. Conclui-se que a taxa de variação do momento torsor,  $\frac{dT}{dx}$ , é igual a  $-m_T$ . Obtém-se assim a equação da torção não uniforme de uma peça prismática de paredes finas em regime elástico:

$$GJ \frac{d^2\varphi}{dx^2} - EI_w \frac{d^4\varphi}{dx^4} = -m_T. \quad (10)$$

No Quadro 2.1 encontram-se indicadas as condições de fronteira mais comuns (duas em cada extremidade) que complementam esta equação diferencial ordinária. Julgam-se pertinentes as seguintes observações:

- 1) Quando o empenamento se encontra impedido numa extremidade da barra (casos *a* e *c*), tem-se nessa extremidade  $\frac{d\varphi}{dx} = 0$  (refira-se que  $\frac{d\varphi}{dx}$  representa a amplitude do empenamento – em particular, com referência às Figuras 2.3 e 2.4, note-se que a rotação de flexão dos banzos é  $\frac{dv_f}{dx} = \pm \frac{h}{2} \frac{d\varphi}{dx}$ ). O momento torsor de Saint-Venant,  $T_t = GJ \frac{d\varphi}{dx}$ , é igualmente nulo, pelo que o momento torsor total é apenas  $T = T_w = -EI_w \frac{d^3\varphi}{dx^3}$ .
- 2) Quando o empenamento é livre numa extremidade (casos *b* e *d*), tem-se  $-EI_w \frac{d^2\varphi}{dx^2}$  igual ao bimomento aplicado nessa extremidade. Segue-se Gjelsvik (1981) na representação de um bimomento aplicado por intermédio de uma seta longitudinal com cabeça tripla.

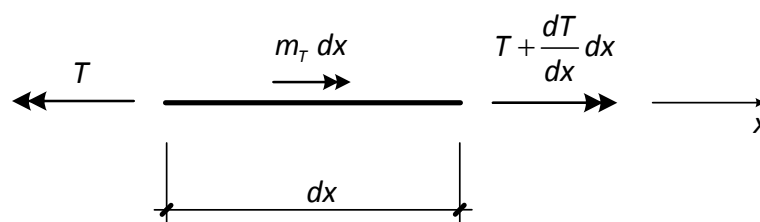

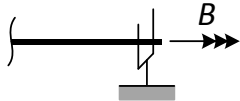
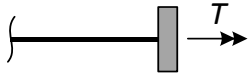
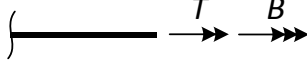


Figura 2.5 – Equilíbrio de um troço infinitesimal de barra.



Quadro 2.1 – Condições de Fronteira (adaptado de Gjelsvik, 1981)

Descrição	Condições de Fronteira Cinemáticas	Condições de Fronteiras Estáticas	Caso
 <p>Rotação e empenamento impedidos</p>	$\varphi = 0$ $\frac{d\varphi}{dx} = 0$	<p style="text-align: center;">–</p>	<p style="text-align: center;"><i>a</i></p>
 <p>Rotação impedida e empenamento livre</p>	$\varphi = 0$	$-EI_w \frac{d^2\varphi}{dx^2} = B$	<p style="text-align: center;"><i>b</i></p>
 <p>Rotação livre e empenamento impedido</p>	$\frac{d\varphi}{dx} = 0$	$-EI_w \frac{d^3\varphi}{dx^3} = T$	<p style="text-align: center;"><i>c</i></p>
 <p>Rotação e empenamento livres</p>	<p style="text-align: center;">–</p>	$GJ \frac{d\varphi}{dx} - EI_w \frac{d^3\varphi}{dx^3} = T$ $-EI_w \frac{d^2\varphi}{dx^2} = B$	<p style="text-align: center;"><i>d</i></p>

Com o intuito de ilustrar a aplicação dos conceitos anteriores, apresenta-se agora a análise do comportamento torsional de uma barra em consola com secção em I, submetida a um bimomento  $B_L$  aplicado na extremidade livre (Figura 2.6). A barra tem comprimento  $L$ , rigidez de empenamento  $EI_w$  e rigidez de Saint-Venant  $GJ$ . Na secção de encastramento, a rotação em torno do eixo longitudinal e o empenamento encontram-se impedidos.

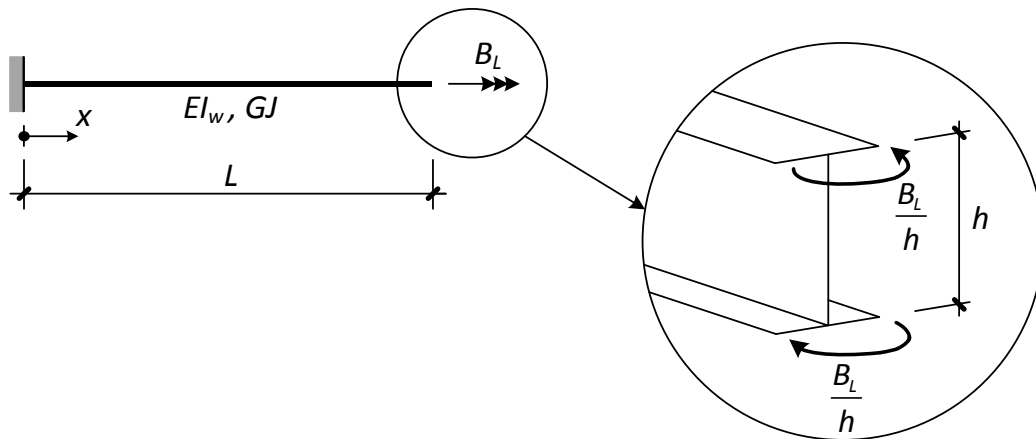


Figura 2.6 – Barra em consola submetida a um bimomento  $B_L$  aplicado na extremidade livre.

Pretende-se, portanto, determinar a solução do problema de valores na fronteira

$$GJ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - EI_w \frac{d^4 \varphi}{dx^4} = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (11)$$

$$\varphi(0) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = 0 \quad (13)$$

$$-EI_w \frac{d^2 \varphi}{dx^2}(L) = B_L \quad (14)$$

$$GJ \frac{d\varphi}{dx}(L) - EI_w \frac{d^3 \varphi}{dx^3}(L) = 0, \quad (15)$$

onde  $\varphi(x)$  representa a rotação de torção da secção transversal que dista  $x$  da extremidade encastrada.<sup>3</sup>

Este problema pode ser adimensionalizado através da introdução da abcissa normalizada  $\xi = \frac{x}{L}$  e da função  $\tilde{\varphi}$ , definida no intervalo  $[0,1]$  por  $\tilde{\varphi}(\xi) = \varphi(\xi L)$ . Tendo em conta que, pela regra de derivação da função composta, se tem

$$\frac{d^n \varphi}{dx^n} = \frac{1}{L^n} \frac{d^n \tilde{\varphi}}{d\xi^n}, \quad (16)$$

a equação (11) é transformada em

$$\frac{d^2 \tilde{\varphi}}{d\xi^2} - \frac{k^2}{\pi^2} \frac{d^4 \tilde{\varphi}}{d\xi^4} = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (17)$$

<sup>3</sup> As condições de fronteira (12)-(15) correspondem aos casos (a) e (d) do Quadro 2.1.

onde

$$\kappa = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI_w}{GJ}} \quad (18)$$

é um parâmetro adimensional. De acordo com Kitipornchai e Trahait (1980), o parâmetro  $\kappa$  dos perfis I usados em vigas metálicas varia entre 0,1 e 2,5 – valores reduzidos de  $\kappa$  correspondem a vãos grandes e/ou secções compactas; valores elevados de  $\kappa$  estão associados a vãos pequenos e/ou secções esbeltas.<sup>4</sup>

As condições de fronteira, por sua vez, tomam a seguinte forma:

$$\tilde{\varphi}(0) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{d\xi}(0) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}}{d\xi^2}(1) = -\beta \quad (21)$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{d\xi}(1) - \frac{\kappa^2}{\pi^2} \frac{d^3\tilde{\varphi}}{d\xi^3}(1) = 0, \quad (22)$$

com

$$\beta = \frac{B_L L^2}{EI_w}. \quad (23)$$

A equação (17) tem como solução geral

$$\tilde{\varphi}(\xi) = c_1 + c_2 \xi + c_3 \sinh\left(\frac{\pi\xi}{\kappa}\right) + c_4 \cosh\left(\frac{\pi\xi}{\kappa}\right), \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (24)$$

As constantes de integração  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$  são determinadas a partir das condições de fronteira (19)-(22), obtendo-se

---

<sup>4</sup> Pode ainda escrever-se

$$\kappa = \pi \frac{d}{L}$$

onde

$$d = \sqrt{\frac{EI_w}{GJ}}$$

é uma propriedade mecânica da secção transversal habitualmente designada por comprimento característico (Gjelsvik, 1981).

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_4 = 0 \\ c_2 + \frac{\pi}{\kappa} c_3 = 0 \\ c_3 \frac{\pi^2}{\kappa^2} \sinh\left(\frac{\pi}{\kappa}\right) + c_4 \frac{\pi^2}{\kappa^2} \cosh\left(\frac{\pi}{\kappa}\right) = -\beta \\ c_2 + \frac{\pi}{\kappa} c_3 \cosh\left(\frac{\pi}{\kappa}\right) + \frac{\pi}{\kappa} c_4 \sinh\left(\frac{\pi}{\kappa}\right) - \frac{\kappa^2}{\pi^2} \left[ \frac{\pi^3}{\kappa^3} c_3 \cosh\left(\frac{\pi}{\kappa}\right) + \frac{\pi^3}{\kappa^3} c_4 \sinh\left(\frac{\pi}{\kappa}\right) \right] = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{\kappa^2}{\pi^2} \frac{\beta}{\cosh\left(\frac{\pi}{\kappa}\right)} \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = -\frac{\kappa^2}{\pi^2} \frac{\beta}{\cosh\left(\frac{\pi}{\kappa}\right)} \end{array} \right. . \quad (25)$$

Assim, resulta finalmente

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \frac{\kappa^2}{\pi^2} \frac{\beta}{\cosh\left(\frac{\pi}{\kappa}\right)} \left[ 1 - \cosh\left(\frac{\pi\xi}{\kappa}\right) \right], \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (26)$$

Esta função está representada graficamente na Figura 2.7 para três valores distintos do parâmetro  $\kappa$ , a saber:  $\kappa = 0,5$ ,  $\kappa = 1,0$  e  $\kappa = 2,0$ . São também apresentadas, para os mesmos valores de  $\kappa$ , as seguintes distribuições normalizadas de bimomento, momento torsor de Saint-Venant e momento torsor associado à restrição do empenamento (Figuras 2.8, 2.9 e 2.10, respetivamente):

$$\frac{B(\xi L)}{B_L} = -\frac{1}{\beta} \frac{d^2 \tilde{\varphi}}{d\xi^2} = \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{\kappa}\right)} \cosh\left(\frac{\pi\xi}{\kappa}\right) \quad (27)$$

$$\frac{EI_W T_t(\xi L)}{L G J B_L} = \frac{1}{\beta} \frac{d\tilde{\varphi}}{d\xi} = -\frac{\kappa}{\pi} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{\kappa}\right)} \sinh\left(\frac{\pi\xi}{\kappa}\right) \quad (28)$$

$$\frac{EI_W T_w(\xi L)}{L G J B_L} = -\frac{\kappa^2}{\beta \pi^2} \frac{d^3 \tilde{\varphi}}{d\xi^3} = \frac{\kappa}{\pi} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{\kappa}\right)} \sinh\left(\frac{\pi\xi}{\kappa}\right), \quad (29)$$

sendo de notar que as duas últimas são simétricas. Da análise dos gráficos apresentados, pode constatar-se que:

- 1) Existe torção (não uniforme), apesar da acção aplicada consistir num sistema com resultante e momento resultante nulos. Os banzos flectem em sentidos opostos e, para assegurar a compatibilidade dos deslocamentos, verifica-se em simultâneo a rotação das secções em torno do eixo longitudinal. Para  $\xi \neq 0$ , os valores absolutos de  $\tilde{\varphi}(\xi)$  crescem com o parâmetro  $\kappa$ .
- 2) O decréscimo do bimomento (e, conseqüentemente, das tensões normais longitudinais que lhe estão associadas) da extremidade livre, onde assume o valor máximo, para o apoio,

onde é mínimo, é tanto mais rápida quanto menor for o valor do parâmetro  $\kappa$ . Para  $\kappa = 0,5$ , o bimomento no apoio é praticamente nulo; para  $\kappa = 2,0$ , o bimomento no apoio ainda é significativo.

- 3) O princípio de Saint-Venant, segundo o qual os efeitos produzidos num corpo pela aplicação, numa pequena região da sua superfície, de um sistema de forças com resultante e momento resultante nulos são desprezáveis a distâncias superiores à maior dimensão da região de aplicação das forças (Love, 1944), não é válido neste caso. Como observa Fung (1965), para que o princípio de Saint-Venant seja válido, é necessário que as forças internas possam estabelecer trajetórias de forma a anularem-se entre si a uma pequena distância daquela região. Ora, como explica Murray (1986), no problema em análise, o sistema de forças aplicado na secção terminal está dividido em dois subsistemas, um em cada banzo, separados pela alma de reduzida espessura, e que, individualmente considerados, não são auto-equilibrados.
- 4) Como não podia deixar de ser, verifica-se

$$T(x) = T_t(x) + T_w(x) = 0, \quad \forall x \in [0, L], \quad (30)$$

(isto é, as distribuições de  $T_t$  e  $T_w$  são simétricas em relação ao eixo das abcissas), mas tem-se

$$T_t(x) = T_w(x) = 0 \quad (31)$$

apenas para  $x = 0$ .

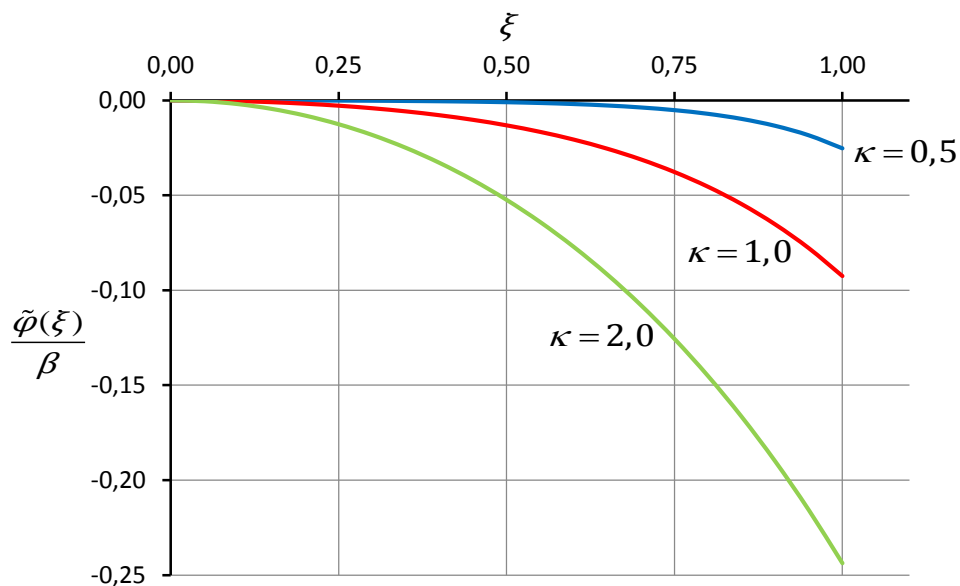


Figura 2.7 – Rotação de torção,  $\tilde{\varphi}(\xi)$ .

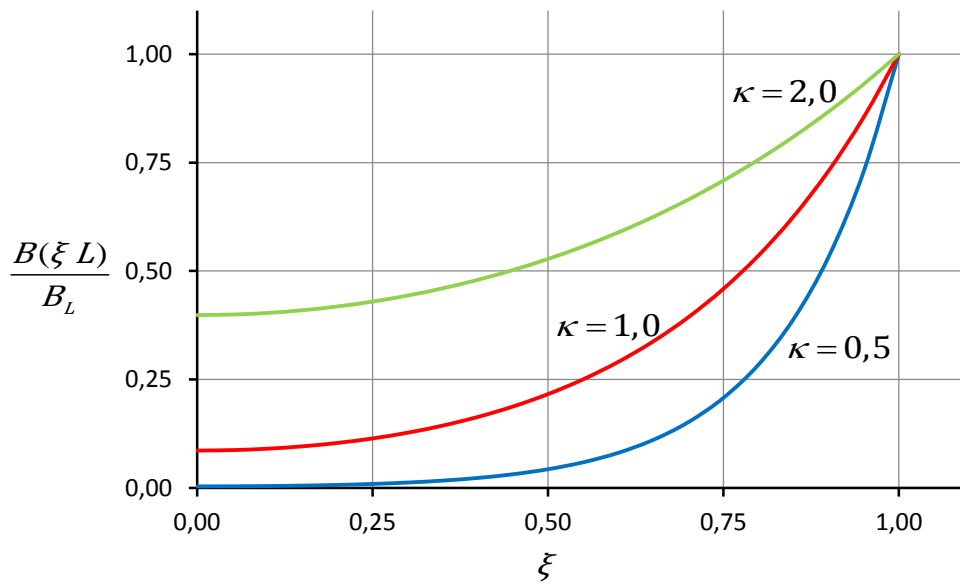


Figura 2.8 – Distribuição normalizada do bimomento,  $\frac{B(\xi L)}{B_L}$ .

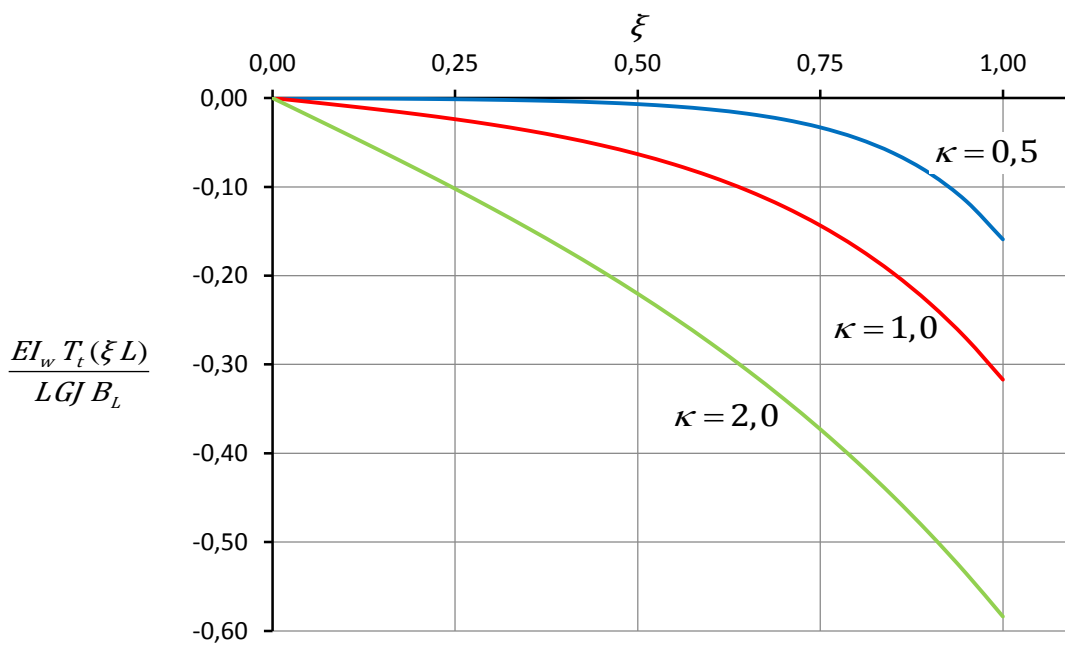


Figura 2.9 – Distribuição normalizada do momento torsor de Saint-Venant,  $\frac{EI_w T_t(\xi L)}{L G J B_L}$ .

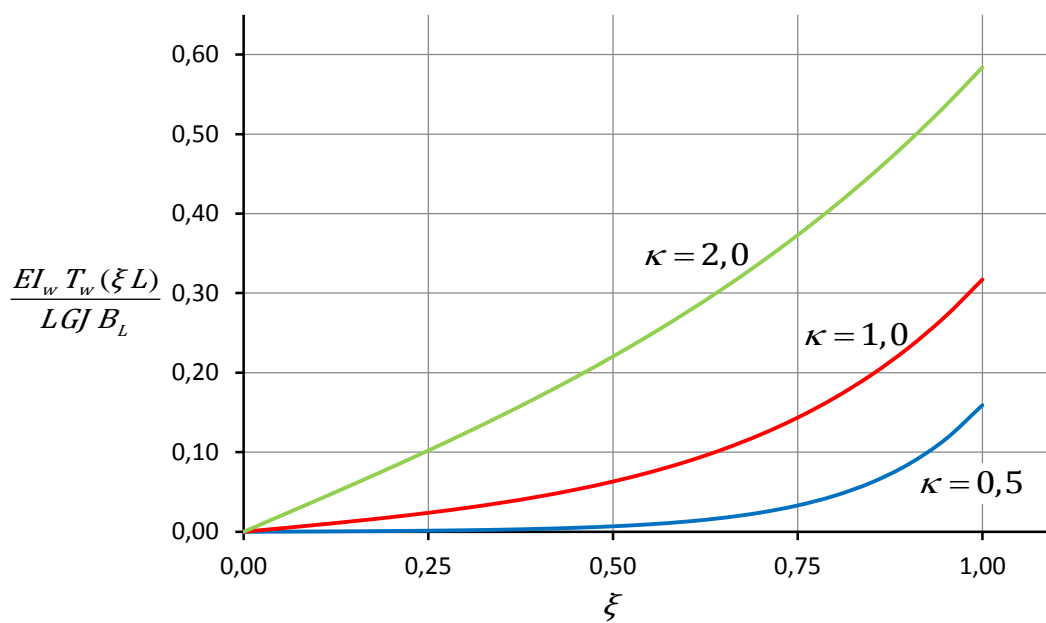


Figura 2.10 – Distribuição normalizada do momento torsor associado à restrição do empenamento,  $\frac{EI_w T_w(\xi L)}{L G J B_L}$ .

### 3 DEFINIÇÃO DA CLASSE DE PROBLEMAS A ANALISAR

#### 3.1 Geometria e propriedades materiais

As vigas em estudo nesta dissertação são prismáticas, com secção aberta de paredes finas duplamente simétrica e sem quaisquer imperfeições (*i.e.*, “ideais”). Apresenta-se na Figura 3.1 a configuração indeformada de um elemento com as características descritas anteriormente. Adota-se um sistema de eixos fixo, ortogonal e direto, de modo que, na configuração indeformada, (1) o eixo  $x$  coincida com o eixo baricêntrico da viga e (2) os eixos  $y$  e  $z$  correspondam, respectivamente, aos eixos principais centrais de maior e menor inércia da secção transversal. O comprimento da viga é representado por  $L$ .

O material considerado é linearmente elástico, homogéneo e isotrópico, caracterizado pelo módulo de elasticidade  $E$  e pelo módulo de distorção  $G$ .

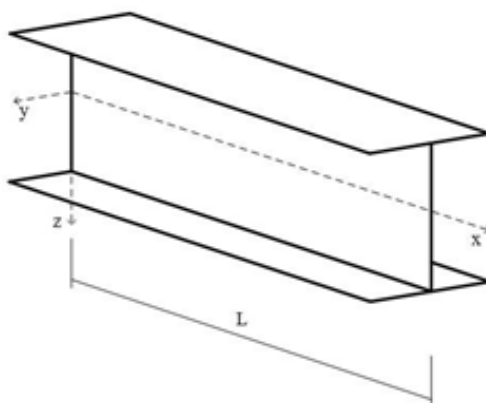


Figura 3.1 – Configuração de uma viga com secção aberta de paredes finas duplamente simétrica. Referencial adotado.

#### 3.2 Carregamento

Ao longo de toda a trajetória de equilíbrio fundamental, considera-se que a viga se encontra submetida ao sistema de forças (generalizadas) exteriores conservativas constituído por:



- 1) Força transversal distribuída  $q$  com a direcção e sentido do eixo  $z$ , que inicialmente actua no plano de simetria  $(x, z)$ , a uma cota  $z_q$  constante.
- 2) Forças concentradas  $Q_i$ , com  $i = 1, \dots, nQ$ , aplicadas nas secções de abcissa  $x_i$ . Estas forças têm igualmente a direcção e sentido do eixo  $z$  e actuam inicialmente no plano de simetria  $(x, z)$ , às cotas  $z_{Q_i}$ .
- 3) Momentos concentrados nas extremidades da barra. Com intuito de contornar algumas questões delicadas relacionadas com a definição de momentos conservativos (Simites e Hodges, 2006), apenas é considerada a ação destes momentos quando a rotação de torção da secção em que estão aplicados se encontrar impedida.

Todas as forças aplicadas são proporcionais a um único parâmetro de carga,  $\lambda$ . Pode portanto escrever-se, por exemplo,  $q = \lambda q_{ref}$ , onde  $q_{ref}$  é um valor de referência não negativo, e de igual forma para as restantes forças. Assim, ao longo da trajetória de equilíbrio fundamental, parametrizada por  $\lambda$ , o campo de momentos flectores também se pode escrever na forma

$$M_y(x, \lambda) = \lambda M_{y,ref}(x), \quad (32)$$

onde  $M_{y,ref}$  representa a distribuição de momentos flectores associada aos valores de referência das forças exteriores e é uma função de  $x$  apenas.

### 3.3 Condições de Apoio

É importante fazer a distinção entre (1) condições de apoio para a flexão no plano  $(x, z)$ , as quais serão designadas daqui para a frente por “condições de apoio no plano”, e (2) condições de apoio para a flexão no plano  $(x, y)$  e para a torção, incluindo empenamento, designadas por “condições de apoio fora do plano”.

As condições de apoio no plano intervêm na análise da trajetória de equilíbrio fundamental, ou seja, na determinação do campo de momentos  $M_{y,ref}$ . Na presente dissertação, esta análise é trivial, porque se consideram apenas vigas “isostáticas no plano”. Por igual motivo, a rigidez dos elementos de apoio é irrelevante. São considerados os tipos de apoios correntes: (1) articulações fixas e móveis e (2) encastramentos fixos e móveis.

Por outro lado, as condições de apoio fora do plano intervêm na análise linear de estabilidade e podem incluir qualquer combinação consistente (*i.e.*, que não dê origem a um mecanismo) de restrições rígidas ou elásticas seguintes deslocamentos de uma secção: (1) deslocamento

segundo  $y$  do centro de gravidade, (2) rotação em torno do eixo  $x$ , (3) rotação em torno do eixo  $z$  e (4) empenamento.

### 3.4 Contraventamentos discretos

No âmbito desta dissertação, convencionou-se designar por sistema de contraventamento um dispositivo que realize ligações externas apenas “fora do plano”. Um apoio, pelo contrário, realiza ligações externas “no plano” e, eventualmente, também “fora do plano”, como descrito na secção anterior. Como referido na Introdução, consideram-se dois tipos de contraventamento, lateral e torsional. Uma secção contraventada é identificada pela sua abcissa,  $x_{c,i}$ . O contraventamento lateral nessa secção é caracterizado pela sua rigidez  $k_{l,i}$  (com  $0 \leq k_{l,i} \leq +\infty$ ) e, se  $k_{l,i} \neq 0$ , pela sua cota de actuação  $z = z_{l,i}$ . O contraventamento torsional, por sua vez, é caracterizado apenas pela sua rigidez  $k_{t,i}$  (também com  $0 \leq k_{t,i} \leq +\infty$ ) – ver Figura 3.2. O número total de secções contraventadas é designado por  $n_c$ .

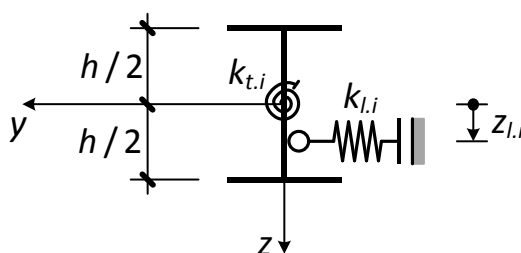


Figura 3.2 – Definição dos contraventamentos lateral e torsional na secção de abcissa  $x_{c,i}$ .

### 3.5 Objetivos da análise

Na presente dissertação pretende-se desenvolver uma ferramenta de análise que permita identificar os pontos de bifurcação por flexão-torção, isto é, que determine os valores de bifurcação do parâmetro de carga  $\lambda$  e, se pretendido, também a forma dos modos de encurvadura a estes associados.

## 4 DO CONTÍNUO AO DISCRETO – O MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

### 4.1 O critério de Trefftz e a segunda variação da energia potencial total

Vigas solicitadas à flexão no seu plano de maior inércia são susceptíveis ao fenómeno de encurvadura lateral por flexão-torção (ou bambeamento, de acordo com a NP 761), particularmente quando a sua rigidez torsional é baixa (como acontece nas vigas de secção aberta de paredes finas). Trata-se de um tipo de instabilidade bifurcacional, em que (1) a trajectória fundamental corresponde à flexão no plano de maior inércia e (2) o modo de instabilidade envolve, simultaneamente, flexão no plano de menor inércia e torção (Reis & Camotim, 2001).

Os pontos de bifurcação podem ser determinados pela condição de estacionaridade da segunda variação da energia potencial na vizinhança de um estado de equilíbrio fundamental, critério que na literatura é habitualmente atribuído a Trefftz (Reis & Camotim, 2001).

Admitem-se as seguintes hipóteses clássicas:

- 1) As secções transversais não se deformam no seu plano.<sup>5</sup>
- 2) Na superfície média da barra, as distorções  $\gamma_{xs}$  (que traduzem a variação de ângulo, inicialmente recto, entre as geratrizes da superfície média e as linhas médias das secções transversais) são desprezáveis.

---

<sup>5</sup> Esta hipótese permite considerar cada secção transversal como um disco rígido, para efeitos de descrição do movimento no seu plano; não permite a consideração de fenómenos de instabilidade local e/ou distorcional, matérias que se encontram fora do âmbito da dissertação. Para que a hipótese seja legítima, pode ser necessário prever reforços transversais (“stiffeners”) nas secções de apoio, contraventamento e aplicação de forças concentradas (Yura, 2001).

3) As deformações de pré-encurvadura são desprezáveis.<sup>6</sup>

Nestas condições, e na ausência de contraventamentos elásticos, a segunda variação da energia potencial total em torno de um estado de equilíbrio fundamental é definida por (e.g., Pi *et al.*, 1992)

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EI_z \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 + EI_w \left( \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right)^2 + GJ \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right] dx + \\ + \lambda \left[ \int_0^L M_{y.ref} \varphi \frac{d^2v}{dx^2} dx + \frac{z_q}{2} \int_0^L q_{ref} \varphi^2 dx + \sum_{i=1}^{nQ} \frac{z_{Q_i}}{2} Q_{i.ref} \varphi(x_i)^2 \right], \quad (33)$$

onde as funções  $v$  e  $\varphi$  designam o deslocamento lateral (segundo  $y$ ) do eixo baricêntrico da viga e a rotação de torção das secções transversais.

Podem distinguir-se três contributos distintos para  $V_2$  (Pignataro *et al.*, 1991):

- 1) O primeiro integral na expressão (33) representa a energia de deformação da viga submetida a flexão no plano  $(x, y)$  e torção não uniforme, tal como dada pela teoria linear.
- 2) O segundo integral corresponde ao trabalho realizado pelas tensões no estado de equilíbrio fundamental,

$$\sigma = \frac{\lambda M_{y.ref}}{I_y} z, \quad (34)$$

na parcela de segunda ordem da extensão longitudinal, dada por (Pi *et al.*, 1992)

$$\varepsilon_x^{II} = \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + y \varphi \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2. \quad (35)$$

- 3) O último integral e o somatório são o simétrico da parcela de segunda ordem do trabalho das forças exteriores (como se ilustra na Figura 4.1 para o caso de uma força concentrada).

---

<sup>6</sup> A aceitação desta hipótese tem a grande vantagem de conduzir a um problema de valores próprios *linear* (Bica, 2015; Cristino, 2015).

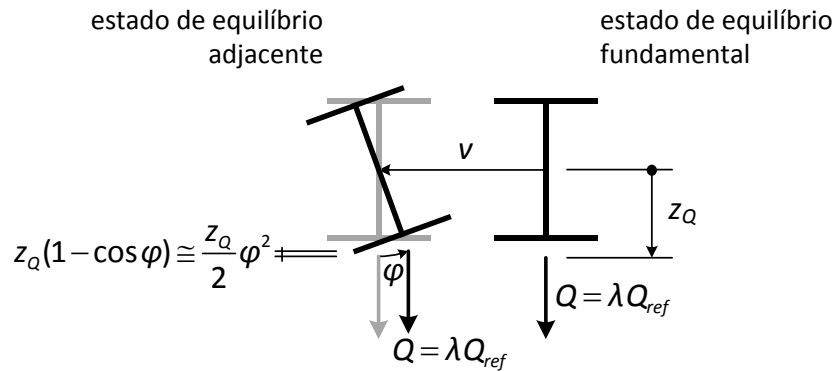


Figura 4.1 – Influência da posição do ponto de aplicação das forças transversais.

Para ter em consideração a presença de contraventamentos elásticos, tal como descritos no capítulo anterior, adiciona-se à expressão (33) o somatório

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nc} \{k_{t,i} \varphi(x_{c,i})^2 + k_{l,i} [v(x_{c,i}) - z_{l,i} \varphi(x_{c,i})]^2\}, \quad (36)$$

que definem a energia de deformação armazenada nos contraventamentos na encurvadura (ver Figura 4.2).

O caso de  $m > 1$  contraventamentos laterais numa dada secção (de abcissa  $x = x_{c,i}$ ), colocados às cotas  $z = z_{l,i}^{(j)}$  e com rigidezes  $k_{l,i}^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , eventualmente combinados com um contraventamento torsional de rigidez  $k_{t,i}$ , pode sempre ser reduzido a um único contraventamento lateral, com rigidez  $k_{l,i}^*$  e colocado à cota  $z = z_{l,i}^*$ , combinado com um contraventamento torsional de rigidez  $k_{t,i}^*$  (Andrade *et al.*, 2010).

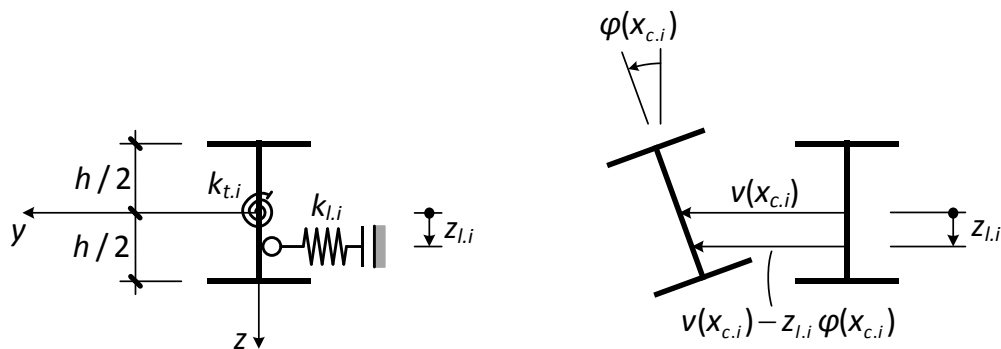


Figura 4.2 – Definição da energia de deformação armazenada nos contraventamentos elásticos na encurvadura.

1) Se nenhum dos contraventamentos laterais for rígido, então

$$k_{l,i}^* = \sum_{j=1}^m k_{l,i}^{(j)} \quad (37)$$

$$z_{l,i}^* = \frac{\sum_{i=1}^m z_{l,i}^{(j)} k_{l,i}^{(j)}}{\sum_{j=1}^m k_{l,i}^{(j)}} = \frac{\sum_{i=1}^m z_{l,i}^{(j)} k_{l,i}^{(j)}}{k_{l,i}^*} \quad (38)$$

$$k_{t,i}^* = k_{t,i} + \sum_{j=1}^m (z_{l,i}^{(j)} - z_{l,i}^*) z_{l,i}^{(j)} k_{l,i}^{(j)} . \quad (39)$$

De facto, desta forma garante-se a igualdade

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m k_{l,i}^{(j)} (v - z_{l,i}^{(j)} \varphi)^2 + \frac{1}{2} k_{t,i} \varphi^2 = \frac{1}{2} k_{l,i}^* (v - z_{l,i}^* \varphi)^2 + \frac{1}{2} k_{t,i}^* \varphi^2 , \quad (40)$$

quaisquer que sejam  $v$  e  $\varphi$ .

2) Se um, e apenas um, dos contraventamentos laterais for perfeitamente rígido (por exemplo,  $k_{l,i}^{(p)} = +\infty$ ), então, adoptando as habituais convenções algébricas na recta acabada (Campos Ferreira, 1987), a equação (37) fornece  $k_{l,i}^* = +\infty$  e, depois de levantada a indeterminação  $\frac{\infty}{\infty}$ , a equação (38) fornece  $z_{l,i}^* = z_{l,i}^{(p)}$ . Já a rigidez  $k_{t,i}^*$  é dada por

$$k_{t,i}^* = k_{t,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^m (z_{l,i}^{(j)} - z_{l,i}^*)^2 k_{l,i}^{(j)} . \quad (41)$$

3) Se dois (ou mais) contraventamentos laterais forem rígidos, então tem-se  $k_{l,i}^* = +\infty$  e  $k_{t,i}^* = +\infty$ , sendo  $z_{l,i}^*$  irrelevante.

## 4.2 Aproximação do campo de deslocamentos

O domínio do problema – o intervalo  $[0, L]$  – é dividido em  $n$  subintervalos (elementos) da forma

$$\Omega^{(e)} = ]x_1^{(e)}, x_2^{(e)}[ = ](e-1)\Delta, e\Delta[ , \quad (42)$$

onde  $e = 1, \dots, n$  e  $\Delta = L/n$  (Figura 4.3). Observe-se que

$$\Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)} = \emptyset, i \neq j \quad (43)$$

$$\cup_{e=1}^n \bar{\Omega}^{(e)} = [0, L] , \quad (44)$$

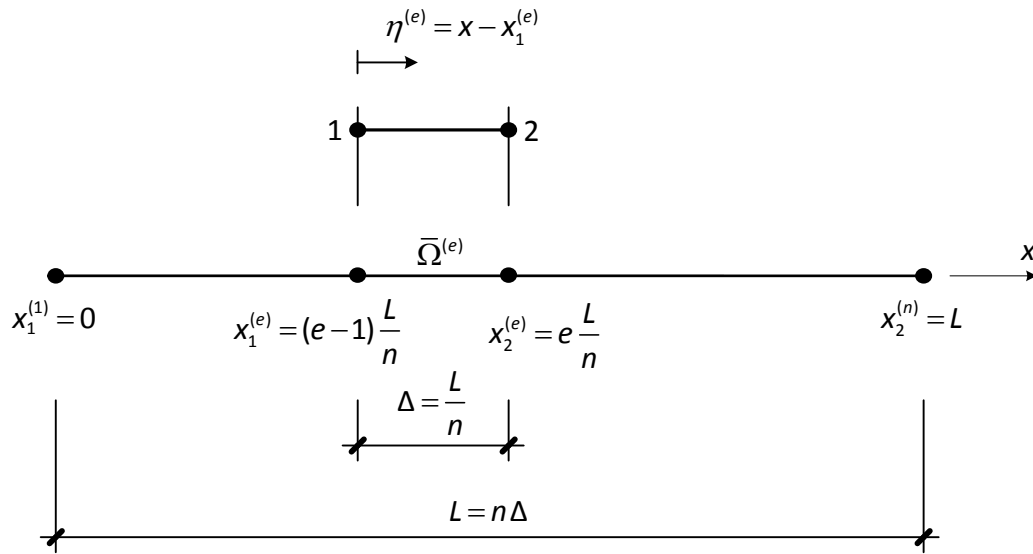


Figura 4.3 – Partição do domínio e definição da coordenada local.

onde a barra superior em  $\bar{\Omega}^{(e)}$  significa o fecho do intervalo. Secções de apoio/contraventamento e de aplicação de forças concentradas deverão obrigatoriamente coincidir com um extremo de um elemento. Em cada elemento define-se a coordenada local

$$\eta^{(e)} = x - x_1^{(e)}, \quad (45)$$

a qual varia entre 0 e  $\Delta$ .

Uma vez que nos integrais da segunda variação da energia potencial (equação (33)+(36)) figuram segundas derivadas de  $v$  e  $\varphi$ , variáveis dependentes do problema, a aproximação destas funções deverá ser contínua em  $[0, L]$ , com primeira derivada contínua neste intervalo (continuidade  $C^1$ ). Assim, em cada elemento  $\bar{\Omega}^{(e)}$ , adoptam-se os polinómios cúbicos

$$v_{\Delta}^{(e)}(\eta^{(e)}) = a_0 + a_1\eta^{(e)} + a_2\eta^{(e)2} + a_3\eta^{(e)3} \quad (46)$$

$$\varphi_{\Delta}^{(e)}(\eta^{(e)}) = b_0 + b_1\eta^{(e)} + b_2\eta^{(e)2} + b_3\eta^{(e)3}, \quad (47)$$

onde os coeficientes  $a_0, \dots, a_3$  e  $b_0, \dots, b_3$  dependem unicamente dos valores que  $v_{\Delta}^{(e)}$ ,  $\varphi_{\Delta}^{(e)}$  e a primeira derivada de cada uma destas funções assumem nas extremidades (nós) do elemento. De facto, considerando os deslocamentos nodais elementares representados na Figura 4.4, tem-se

$$v_{\Delta}^{(e)}(0) = a_0 = d_1^{(e)} \quad (48)$$

$$\frac{dv_{\Delta}^{(e)}}{d\eta^{(e)}}(0) = a_1 = d_2^{(e)} \quad (49)$$

$$v_{\Delta}^{(e)}(\Delta) = a_0 + a_1\Delta + a_2\Delta^2 + a_3\Delta^3 = d_5^{(e)} \quad (50)$$

$$\frac{dv_{\Delta}^{(e)}}{d\eta^{(e)}}(\Delta) = a_1 + 2a_2\Delta + 3a_3\Delta^2 = d_6^{(e)} \quad (51)$$

$$\varphi_{\Delta}^{(e)}(0) = b_0 = d_3^{(e)} \quad (52)$$

$$\frac{d\varphi_{\Delta}^{(e)}}{d\eta^{(e)}}(0) = b_1 = d_4^{(e)} \quad (53)$$

$$\varphi_{\Delta}^{(e)}(\Delta) = b_0 + b_1\Delta + b_2\Delta^2 + b_3\Delta^3 = d_7^{(e)} \quad (54)$$

$$\frac{d\varphi_{\Delta}^{(e)}}{d\eta^{(e)}}(\Delta) = b_1 + 2b_2\Delta + 3b_3\Delta^2 = d_8^{(e)}, \quad (55)$$

de onde se obtém

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = d_1^{(e)} \\ a_1 = d_2^{(e)} \\ a_2 = -\frac{3}{\Delta^2}(d_1^{(e)} - d_5^{(e)}) - \frac{1}{\Delta}(2d_2^{(e)} + d_6^{(e)}) \\ a_3 = \frac{2}{\Delta^3}(d_1^{(e)} - d_5^{(e)}) + \frac{1}{\Delta^2}(d_2^{(e)} + d_6^{(e)}) \end{array} \right. \quad (56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = d_3^{(e)} \\ b_1 = d_4^{(e)} \\ b_2 = -\frac{3}{\Delta^2}(d_3^{(e)} - d_7^{(e)}) - \frac{1}{\Delta}(2d_4^{(e)} + d_8^{(e)}) \\ b_3 = \frac{2}{\Delta^3}(d_3^{(e)} - d_7^{(e)}) + \frac{1}{\Delta^2}(d_4^{(e)} + d_8^{(e)}) \end{array} \right. \quad (57)$$

Assim, as equações (46)-(47) podem ser escritas na forma compacta



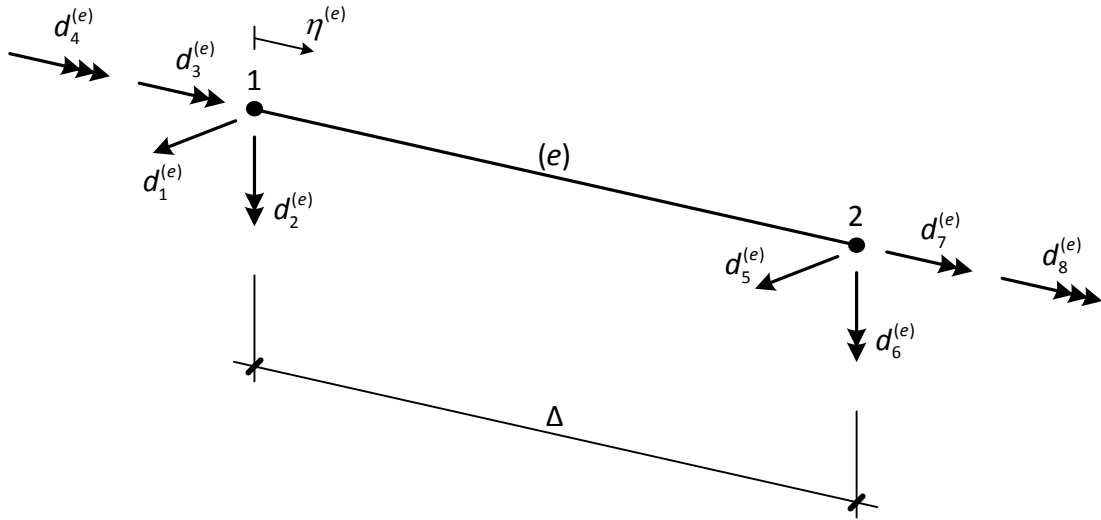


Figura 4.4 – Deslocamentos nodais elementares (a amplitude do empenamento, dada pela derivada da rotação de torção, é representada por uma seta tripla)

$$\begin{bmatrix} v_{\Delta}^{(e)} \\ \varphi_{\Delta}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & N_2^{(e)} & 0 & 0 & N_3^{(e)} & N_4^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(e)} & N_2^{(e)} & 0 & 0 & N_3^{(e)} & N_4^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(e)} \\ d_2^{(e)} \\ d_3^{(e)} \\ d_4^{(e)} \\ d_5^{(e)} \\ d_6^{(e)} \\ d_7^{(e)} \\ d_8^{(e)} \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)}, \quad (58)$$

onde  $N_1^{(e)}$ ,  $N_2^{(e)}$ ,  $N_3^{(e)}$  e  $N_4^{(e)}$  são as funções de forma cúbicas de Hermite (*e.g.*, Becker *et al.*, 1981), representadas na Figura 4.5 e definidas por

$$N_1^{(e)} = 1 - 3 \left( \frac{\eta^{(e)}}{\Delta} \right)^2 + 2 \left( \frac{\eta^{(e)}}{\Delta} \right)^3 \quad (59)$$

$$N_2^{(e)} = \eta^{(e)} \left( \frac{\eta^{(e)}}{\Delta} - 1 \right)^2 \quad (60)$$

$$N_3^{(e)} = 3 \left( \frac{\eta^{(e)}}{\Delta} \right)^2 - 2 \left( \frac{\eta^{(e)}}{\Delta} \right)^3 \quad (61)$$

$$N_4^{(e)} = \eta^{(e)} \left[ \left( \frac{\eta^{(e)}}{\Delta} \right)^2 - \frac{\eta^{(e)}}{\Delta} \right], \quad (62)$$

e  $\mathbf{d}^{(e)}$  é o vector que agrupa os deslocamentos nodais.

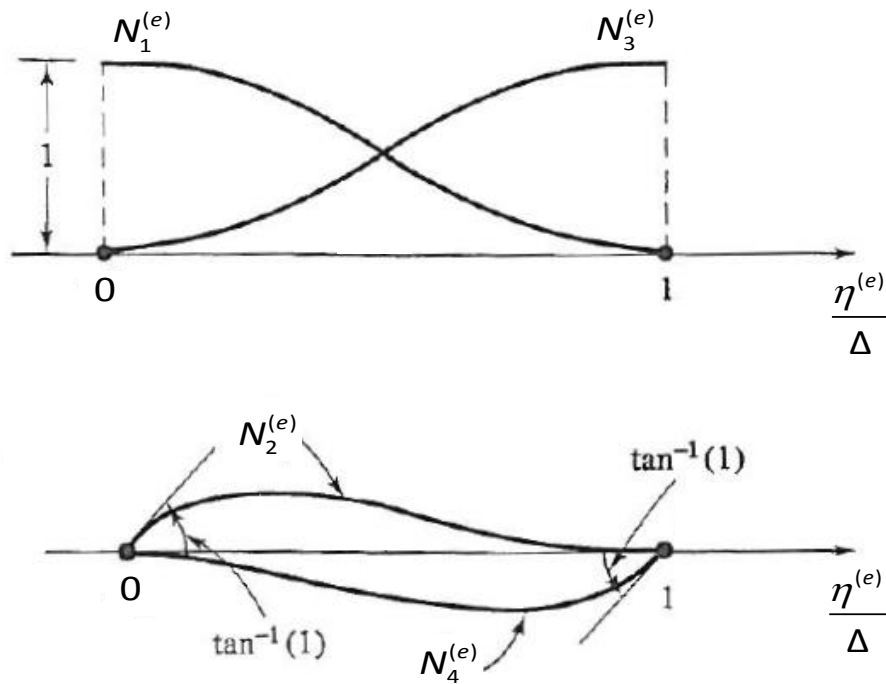


Figura 4.5 – Funções de forma cúbicas de Hermite (adaptada de Becker *et al.*, 1981).

### 4.3 Matrizes de rigidez elementares, material e geométrica

Considerando a aproximação das variáveis dependentes descrita anteriormente, a contribuição dos elementos para a segunda variação da energia potencial total (33) vem dada por

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^n V_{2,\Delta}^{(0)} = & \frac{1}{2} \sum_{e=1}^n \int_0^\Delta (\mathbf{D}^{(e)} \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)})^T \mathbf{E}_1^{(e)} (\mathbf{D}^{(e)} \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)}) d\eta^{(e)} + \\ & + \frac{\lambda}{2} \left[ \sum_{e=1}^n \int_0^\Delta (\mathbf{D}^{(e)} \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)})^T \mathbf{E}_2^{(e)} (\mathbf{D}^{(e)} \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)}) d\eta^{(e)} \right], \end{aligned} \quad (63)$$

onde

$$\mathbf{D}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{(d\eta^{(e)})^2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \frac{d}{d\eta^{(e)}} \\ 0 & \frac{d^2}{(d\eta^{(e)})^2} \end{bmatrix} \quad (64)$$

é uma matriz de operadores diferenciais,

$$\mathbf{E}_1^{(e)} = \begin{bmatrix} EI_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI_w \end{bmatrix} \quad (65)$$

é uma matriz constitutiva (elástica linear) e, finalmente,

$$\mathbf{E}_2^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & M_{y,ref}(x(\eta^{(e)})) & 0 & 0 \\ M_{y,ref}(x(\eta^{(e)})) & Z_q q_{ref} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (66)$$

com  $x(\eta^{(e)}) = \eta^{(e)} + x_1^{(e)} = \eta^{(e)} + (e - 1)\Delta$  representando a transformação inversa de (45).

Visto que as entradas dos vectores  $\mathbf{d}^{(e)}$  são constantes, isto é, não dependem de  $\eta^{(e)}$ , os mesmos podem ser passados para fora dos integrais presentes em (63). Assim, a contribuição  $V_{2,\Delta}^{(e)}$  de cada elemento finito para a aproximação da segunda variação da energia potencial total pode ser escrita, de forma compacta, como

$$V_{2,\Delta}^{(e)} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^{(e)T} (\mathbf{K}^{(e)} + \lambda \mathbf{G}^{(e)}) \mathbf{d}^{(e)}, \quad (67)$$

onde  $\mathbf{K}^{(e)}$  representa a matriz de rigidez material (elástica) elementar e  $\mathbf{G}^{(e)}$  a matriz de rigidez geométrica elementar, definidas por

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_0^\Delta [(\mathbf{D}^{(e)} \mathbf{N}^{(e)})^T \mathbf{E}_1^{(e)} (\mathbf{D}^{(e)} \mathbf{N}^{(e)})] d\eta^{(e)} \quad (68)$$

$$\mathbf{G}^{(e)} = \int_0^\Delta [(\mathbf{D}^{(e)} \mathbf{N}^{(e)})^T \mathbf{E}_2^{(e)} (\mathbf{D}^{(e)} \mathbf{N}^{(e)})] d\eta^{(e)}. \quad (69)$$

São matrizes quadradas, com dimensão 8, e simétricas.

#### 4.4 Montagem das matrizes de rigidez globais

Descreve-se agora o processo de montagem das matrizes de rigidez da viga (mais corretamente, da malha de elementos finitos em que a mesma foi discretizada). As contribuições elementares são agregadas conforme esquematizado na Figura 4.6. Os blocos

representados a tracejado nesta figura têm dimensão  $8 \times 8$  e representam as matrizes de rigidez dos sucessivos elementos finitos. São desta forma obtidas as matrizes de rigidez material e geométrica da malha de elementos finitos, designadas por  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{G}$ , respectivamente. Estas matrizes são quadradas e simétricas, com dimensão  $4(n + 1)$ , sendo importante lembrar que  $n$  designa o número de elementos finitos constituintes da malha e, portanto,  $n + 1$  é o número total de nós.<sup>7</sup>

Suponha-se agora que no nó  $x_i^{(e)}$ , com  $i = 1$  ou  $i = 2$  e  $1 \leq e \leq n$  (recorde-se a Figura 4.3), existe um contraventamento lateral, com rigidez  $0 \leq k_l < +\infty$  e colocado à cota  $z = z_l$ , e um contraventamento torsional com rigidez  $0 \leq k_t < +\infty$ .<sup>8</sup> O deslocamento lateral e a rotação de torção no referido nó correspondem aos graus de liberdade globais

$$a = 4(e - 1) + 4(i - 1) + 1 \quad (70)$$

$$b = 4(e - 1) + 4(i - 1) + 3 = a + 2 \quad , \quad (71)$$

respectivamente. As entradas  $K_{aa}$ ,  $K_{bb}$ ,  $K_{ab}$  e  $K_{ba}$  da matriz de rigidez material global  $\mathbf{K}$  são modificadas da seguinte forma:

$$K_{aa} \leftarrow K_{aa} + k_l \quad (72)$$

$$K_{bb} \leftarrow K_{bb} + k_t + k_l z_l^2 \quad (73)$$

$$K_{ab} \leftarrow K_{ab} - k_l z_l \quad (74)$$

$$K_{ba} \leftarrow K_{ba} - k_l z_l \quad , \quad (75)$$

onde o símbolo “ $\leftarrow$ ” significa “atribuição”. Este procedimento é repetido para todos os nós com contraventamentos não rígidos.

Considere-se novamente o nó genérico  $x_i^{(e)}$ , com  $i = 1$  ou  $i = 2$  e  $1 \leq e \leq n$ , e suponha-se que nesse nó está aplicada, à cota  $z = z_Q \neq 0$ , uma força concentrada  $\lambda Q_{ref}$  com a direcção e sentido do eixo  $z$ . A entrada  $G_{bb}$  da matriz de rigidez geométrica global, com  $b$  definido por (71), é então modificada da seguinte forma:

$$G_{bb} \leftarrow G_{bb} + z_Q Q_{ref} \cdot \quad (76)$$

Este procedimento é repetido para todos os nós com forças concentradas aplicadas fora do centro de corte.

<sup>7</sup> Em virtude da simetria, a parte triangular inferior destas matrizes não necessita de ser explicitamente construída.

<sup>8</sup> Trata-se de contraventamentos não rígidos, portanto.

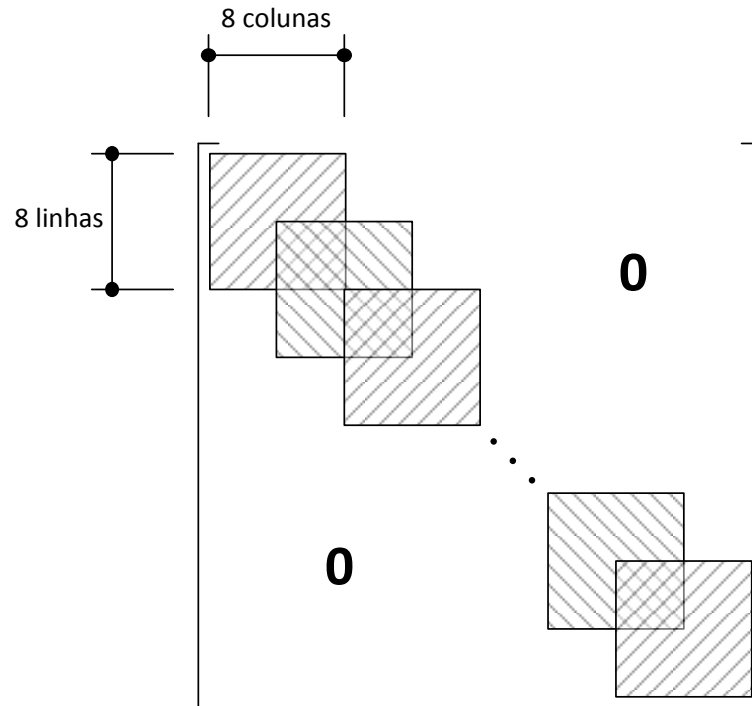


Figura 4.6 – Representação esquemática da agregação das matrizes de rigidez elementares (adaptado de Becker *et al.*, 1981)

Para concluir a descrição da montagem das matrizes de rigidez globais, resta discutir a imposição das condições de fronteira cinemáticas, que estão associadas aos apoios rígidos fora do plano e aos contraventamentos rígidos. Considere-se então a existência de um contraventamento rígido no nó genérico  $x_i^{(e)}$ , com  $i = 1$  ou  $i = 2$  e  $1 \leq e \leq n$ . Sejam  $a$  e  $b$  os graus de liberdade globais definidos em (70)-(71), correspondentes ao deslocamento lateral e à rotação de torção nesse nó. São possíveis três situações distintas:

- 1) Apenas contraventamento lateral, colocado à cota  $z = z_l$ .

Para  $j = 1, \dots, 4(n + 1)$  e  $j \neq a$ , procede-se à modificação

$$K_{jb} \leftarrow K_{jb} + z_l K_{ja} \text{ e } K_{bj} \leftarrow K_{bj} + z_l K_{aj} \tag{77}$$

$$G_{jb} \leftarrow G_{jb} + z_l G_{ja} \text{ e } G_{bj} \leftarrow G_{bj} + z_l G_{aj} , \tag{78}$$

que preserva a simetria das matrizes, e à posterior eliminação da linha e coluna  $a$  das matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{G}$ . Se  $z_l = 0$ , este procedimento resume-se à eliminação da linha e coluna  $a$  das matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{G}$ .

2) Apenas contraventamento torsional.

Procede-se à eliminação da linha e coluna  $b$  das matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{G}$ .

3) Contraventamentos lateral e torsional em simultâneo.

Procede-se à eliminação das linhas e colunas  $a$  e  $b$  das matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{G}$ . Note-se que a cota  $z_l$  do contraventamento lateral é irrelevante.

#### 4.5 Problema algébrico de valores e vectores próprios

A estacionarização da segunda variação da energia potencial total conduz, no modelo discreto de elementos finitos, a um problema algébrico de valores e vectores próprios, dito generalizado. De facto, em virtude da simetria de  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{G}$ , tem-se

$$\text{grad} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{K} + \lambda \mathbf{G}) \mathbf{d} \right] = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{K} + \lambda \mathbf{G}) \mathbf{d} = \mathbf{0} . \quad (79)$$

Este problema é resolvido em MatLab com o comando “eig”.

O menor valor próprio positivo, de fundamental importância do ponto de vista estrutural, recebe o nome de parâmetro de carga crítica e é representado pelo símbolo  $\lambda_{cr}$ .

## 5 EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO E APLICAÇÃO

Com o triplo objetivo de (1) verificar o modelo de elementos finitos formulado no capítulo anterior, (2) ilustrar as suas potencialidades e (3) evidenciar alguns aspectos da instabilidade lateral por flexão-torção de vigas contraventadas, são agora apresentados alguns resultados numéricos relativos a vigas com diferentes condições de apoio e de contraventamento, submetidas a carregamentos diversos. Sempre que possível, os resultados obtidos são comparados com os disponíveis na literatura e com os fornecidos pelo *software* LTBeam (CTICM, 2010).

### 5.1 Exemplo 1 – Viga de secção I duplamente simétrica, simplesmente apoiada e com contraventamento lateral a meio-vão, submetida a flexão uniforme

Como primeiro exemplo, considera-se uma viga de secção I duplamente simétrica, simplesmente apoiada no plano e apresentando, fora do plano, as condições de apoio ditas “padrão” (nas duas extremidades, o deslocamento segundo  $y$  e a rotação em torno de  $x$  estão impedidos, enquanto a rotação em torno do eixo  $z$  e o empenamento são livres). Como se representa na Figura 5.1, esta viga dispõe ainda de um contraventamento lateral a meio-vão, com rigidez  $k_l$  e colocado à cota  $z_l$ . Está submetida a flexão uniforme.

#### Viga não contraventada ( $k_l = 0$ )

Na ausência de contraventamento lateral intermédio (isto é, para  $k_l = 0$ ), o momento crítico é dado analiticamente por (*e.g.*, Trahair, 1993)

$$M_{cr.0} = M_{ref} \lambda_{cr.0} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GJ \left(1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GJ}\right)} \quad (80)$$

ou, em formato adimensional,

$$\frac{M_{cr.0} L}{\sqrt{EI_z GJ}} = \pi \sqrt{1 + \kappa^2}, \quad (81)$$

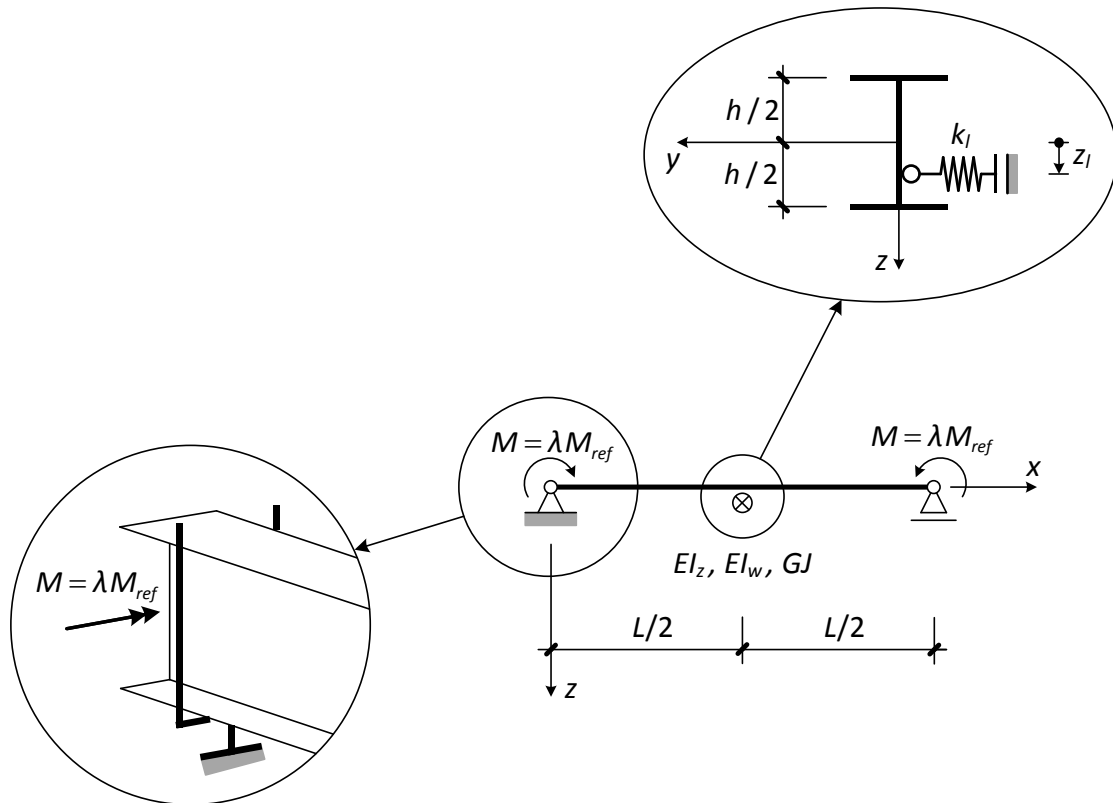


Figura 5.1 – Exemplo 1 – Viga de secção I duplamente simétrica, simplesmente apoiada e submetida a flexão uniforme, com contraventamento lateral a meio-vão.

com  $\kappa$  definido por (18).<sup>9</sup> O momento correspondente ao segundo modo de encurvadura,  $M_{2,0}$ , pode ser obtido de (80) substituindo o vão  $L$  por  $L/2$ :

$$M_{2,0} = M_{ref} \lambda_{2,0} = 2 \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GJ \left(1 + \frac{4\pi^2 EI_w}{L^2 GJ}\right)} \quad (82)$$

e, portanto,

$$\frac{M_{2,0} L}{\sqrt{EI_z GJ}} = 2\pi \sqrt{1 + 4\kappa^2} . \quad (83)$$

Tal como em estudos anteriores (Bica, 2015; Cristino, 2015), verifica-se que os resultados numéricos obtidos com o modelo de elementos finitos convergem rapidamente para os valores

<sup>9</sup> Utiliza-se o índice “0” para indicar que a grandeza em causa se refere à situação em que  $k_l = 0$  (viga não contraventada).



exactos à medida que a malha é progressivamente refinada. A convergência faz-se sempre por valores superiores, já que o modelo de elementos finitos é mais rígido do que o modelo contínuo.

#### Contraventamento colocado a meia altura ( $k_l > 0$ e $z_l = 0$ )

A Figura 5.2 apresenta graficamente, para valores seleccionados do parâmetro  $\kappa$ , a relação  $\frac{M_{cr}}{M_{cr,0}}$  versus  $\frac{k_l L^3}{EI_z}$  obtida numericamente quando o contraventamento é colocado a meia altura ( $k_l > 0$  e  $z_l = 0$ ). Utilizou-se sempre uma malha uniforme de 16 elementos finitos, que estudos preliminares de convergência mostraram ser plenamente adequada. O *software* LTBeam forneceu resultados idênticos.

Verifica-se existir um valor limite para a rigidez do contraventamento, que será designado por  $k_{l,lim}$ , tal que:

- 1) Para  $k_l < k_{l,lim}$ , o modo crítico de encurvadura é simétrico (como se exemplifica na Figura 5.3); o momento crítico  $M_{cr}$  cresce com  $k_l$ , sendo sempre inferior ao momento correspondente ao segundo modo de encurvadura da viga análoga não contraventada,  $M_{2,0}$ .
- 2) Para  $k_l \geq k_{l,lim}$ , o modo crítico de encurvadura é antissimétrico (Figura 5.4), tendo-se em particular  $v_{cr}\left(\frac{L}{2}\right) = 0$  e  $\varphi_{cr}\left(\frac{L}{2}\right) = 0$ ; o momento crítico  $M_{cr}$  é constante e igual a  $M_{2,0}$ .

O valor de  $k_{l,lim}$  depende de  $\kappa$ , podendo ser aproximado por (Nethercot, 1973; Trahair, 1993)

$$\frac{k_l L^3}{EI_z} \cong \frac{153(1+5\kappa^2)}{1+0,74\kappa^2}. \quad (84)$$

Para  $k_l \leq k_{l,lim}$ , o *ratio*  $\frac{M_{cr}}{M_{cr,0}}$  é praticamente independente de  $\kappa$ , podendo ser aproximado por (Trahair, 1993)

$$\frac{M_{cr}}{M_{cr,0}} \cong \sqrt{\frac{2400+51\frac{k_l L^3}{EI_z}}{2400+\frac{k_l L^3}{EI_z}}}. \quad (85)$$

Nos casos analisados, os erros relativos nas aproximações (84) e (85) não ultrapassaram os 4,5% e 1,0%, respectivamente.

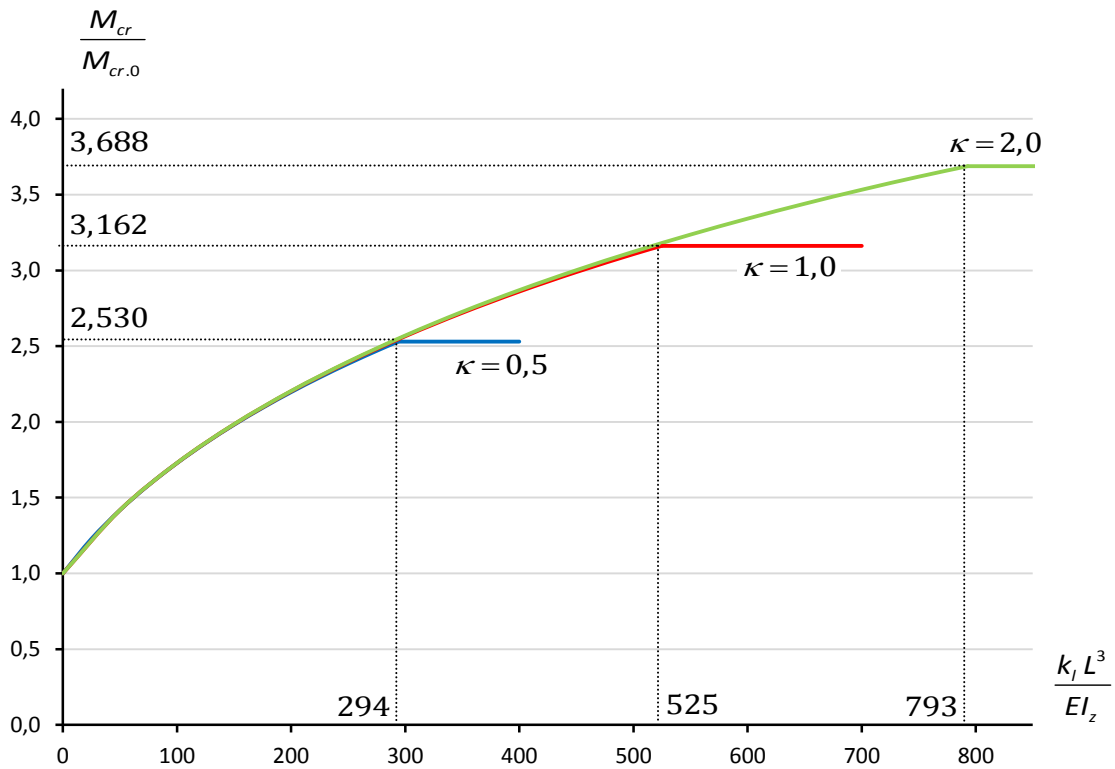


Figura 5.2 – Exemplo 1, com contraventamento colocado a meia-altura ( $z_l = 0$ ) – Variação do ratio  $\frac{M_{cr}}{M_{cr,0}}$  em função de  $\frac{k_l L^3}{EI_z}$ , para valores seleccionados de  $\kappa$ .

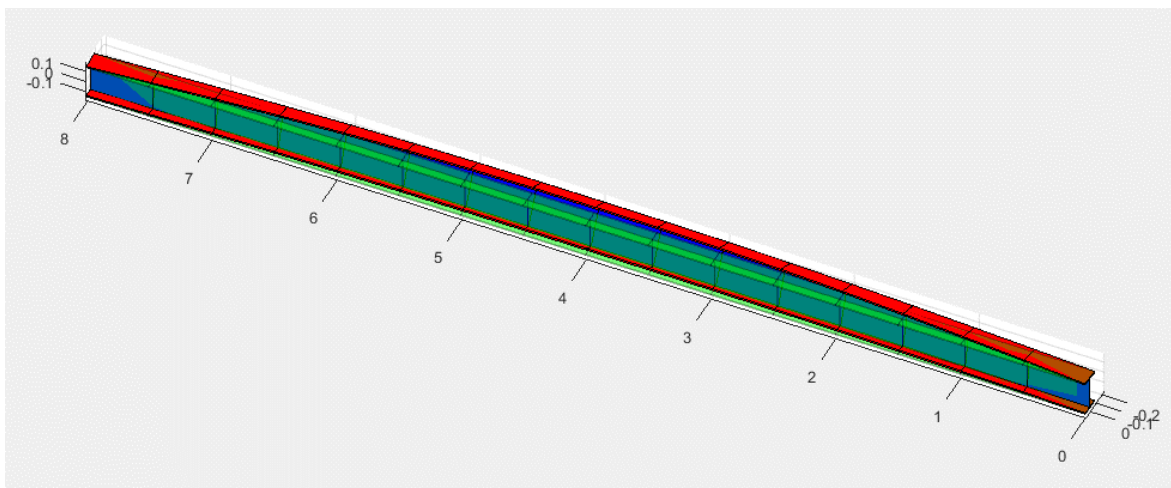


Figura 5.3 – Exemplo 1, com contraventamento colocado a meia-altura ( $z_l = 0$ ) – Modo crítico de encurvadura para  $\kappa = 0,5$  e  $\frac{k_l L^3}{EI_z} = 100$  (simétrico).

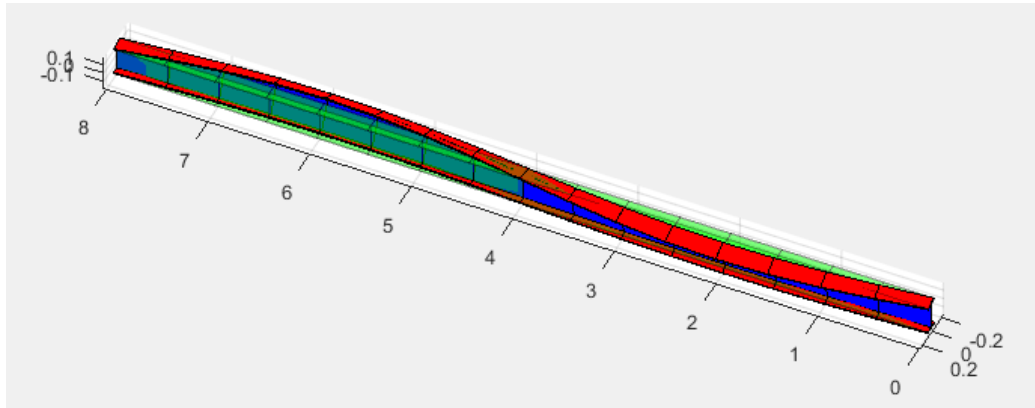


Figura 5.4 – Exemplo 1, com contraventamento colocado a meia-altura ( $z_l = 0$ ) – Modo crítico de encurvadura para  $\kappa = 0,5$  e  $\frac{k_l L^3}{EI_z} = 350$  (antissimétrico).

#### Contraventamento colocado no banco comprimido ( $k_l > 0$ e $z_l = -\frac{h}{2}$ )

Coloca-se agora o contraventamento ao nível da linha média do banco superior (comprimido), isto é, faz-se  $k_l > 0$  e  $z_l = -\frac{h}{2}$ . Os resultados obtidos numericamente para valores seleccionados do parâmetro  $\kappa$  estão representados na Figura 5.5, novamente sob a forma de gráfico  $\frac{M_{cr}}{M_{cr,0}}$  versus  $\frac{k_l L^3}{EI_z}$ . Tal como no caso anterior, utilizou-se uma malha uniforme de 16 elementos finitos e os resultados foram confirmados com o LTBeam.

Verifica-se novamente a existência de um valor limite  $k_{l,lim}$  para a rigidez do contraventamento com as seguintes características:

- 1) Para  $k_l < k_{l,lim}$ , o modo crítico de encurvadura é simétrico (Figura 5.6); o momento crítico  $M_{cr}$  cresce com  $k_l$ , sendo sempre inferior a  $M_{2,0}$ .
- 2) Para  $k_l \geq k_{l,lim}$ , o modo crítico de encurvadura é antissimétrico (Figura 5.7), tendo-se  $M_{cr}$  constante e igual a  $M_{2,0}$ .

No entanto, no caso presente, o valor de  $k_{l,lim}$  é praticamente independente de  $\kappa$  e consideravelmente inferior ao obtido quando  $z_l = 0$ . Pode assim dizer-se que a eficácia do contraventamento lateral é mais elevada quando este é colocado ao nível do banco superior (comprimido) do que quando é colocado a meia altura – em ambos os casos se atinge  $M_{cr} = M_{2,0}$ , mas a rigidez mínima  $k_{l,lim}$  necessária para tal é inferior quando  $z_l = -\frac{h}{2}$ . Verifica-se ainda que, para  $k_l \leq k_{l,lim}$ , o ratio  $\frac{M_{cr}}{M_{cr,0}}$  varia de forma praticamente linear com  $\frac{k_l L^3}{EI_z}$ .

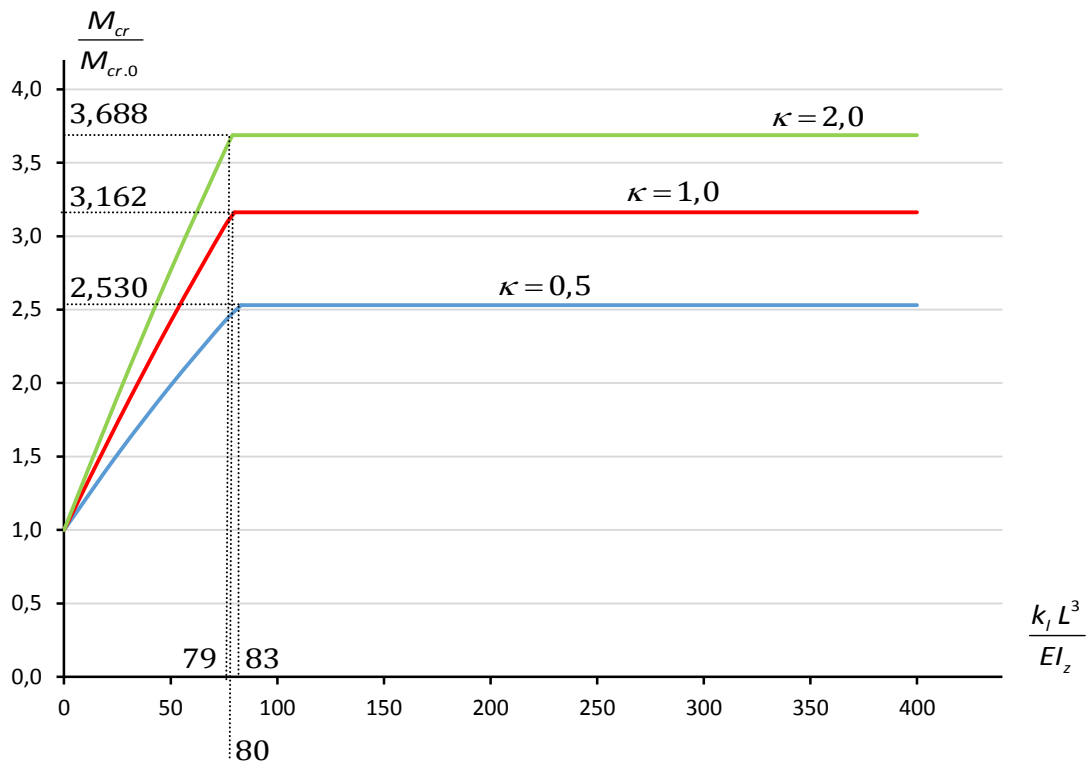


Figura 5.5 – Exemplo 1, com contraventamento colocado no banço superior ( $z_l = -\frac{h}{2}$ ) –  
 Variação do ratio  $\frac{M_{cr}}{M_{cr,0}}$  em função de  $\frac{k_l L^3}{EI_z}$ , para valores seleccionados de  $\kappa$ .

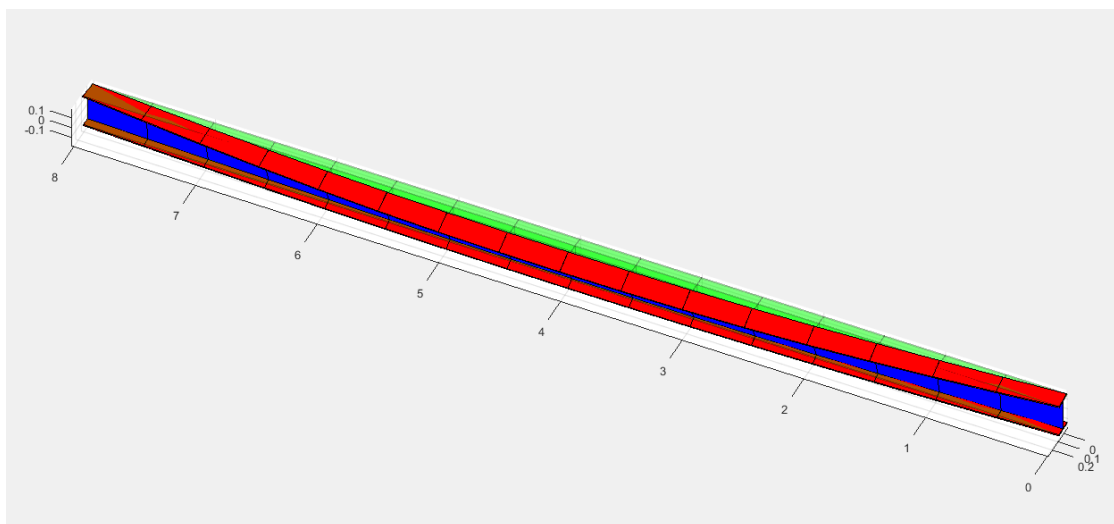


Figura 5.6 – Exemplo 1, com contraventamento colocado no banço superior ( $z_l = -\frac{h}{2}$ ) –  
 Modo crítico de encurvadura para  $\kappa = 0,5$  e  $\frac{k_l L^3}{EI_z} = 50$  (simétrico).

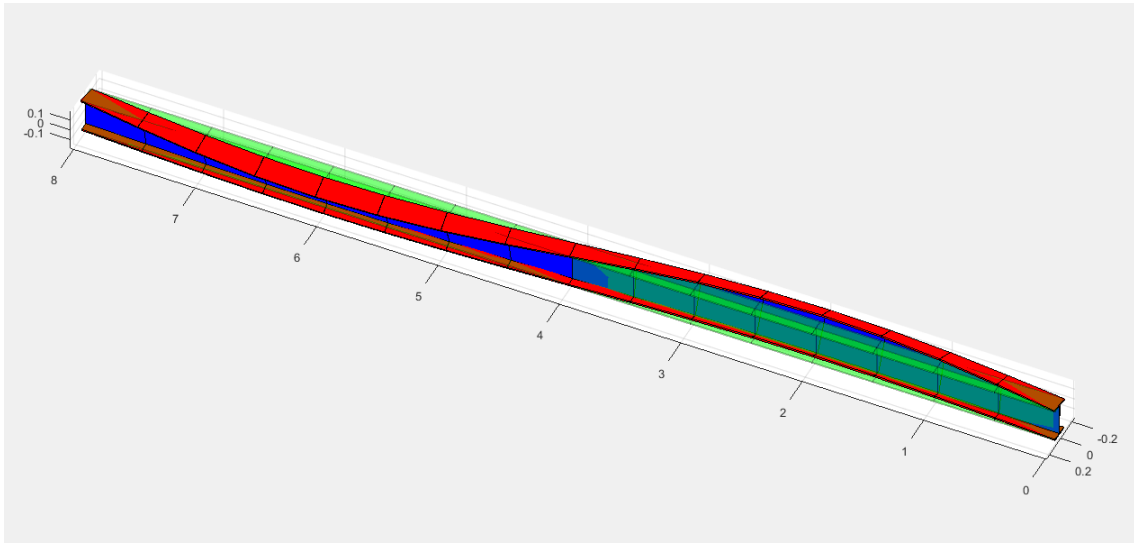


Figura 5.7 – Exemplo 1, com contraventamento colocado no banzo superior ( $z_l = -\frac{h}{2}$ ) –  
 Modo crítico de encurvadura para  $\kappa = 0,5$  e  $\frac{k_l L^3}{EI_z} = 250$  (antissimétrico).

Contraventamento colocado no banzo traccionado ( $k_l > 0$  e  $z_l = \frac{h}{2}$ )

O comportamento altera-se radicalmente quando o contraventamento é colocado ao nível da linha média do banzo inferior (traccionado), isto é, quando  $k_l > 0$  e  $z_l = \frac{h}{2}$ :

- 1) O modo crítico de encurvadura é sempre simétrico, qualquer que seja a rigidez  $k_l$  do contraventamento lateral.
- 2) Para cada valor de  $\kappa$  considerado, o gráfico  $\frac{M_{cr}}{M_{cr.0}}$  versus  $\frac{k_l L^3}{EI_z}$  é estritamente crescente (Figura 5.8), com uma assíntota horizontal, assinalada na figura a traço interrompido, que corresponde à situação de contraventamento perfeitamente rígido. O momento crítico é sempre consideravelmente inferior ao momento  $M_{2,0}$  correspondente ao segundo modo de encurvadura da viga análoga não contraventada.
- 3) A eficácia do contraventamento, medida pelo quociente  $\frac{M_{cr}}{M_{cr.0}}$  para um valor fixo de  $\frac{k_l L^3}{EI_z}$ , é tanto menor quanto mais elevado for  $\kappa$ . Verifica-se, aliás, que a eficácia do contraventamento é praticamente nula para  $\kappa = 2,0$ , já que se tem sempre  $\frac{M_{cr}}{M_{cr.0}} \cong 1$ .

Estes resultados estão de acordo com as observações de McCann (2012).

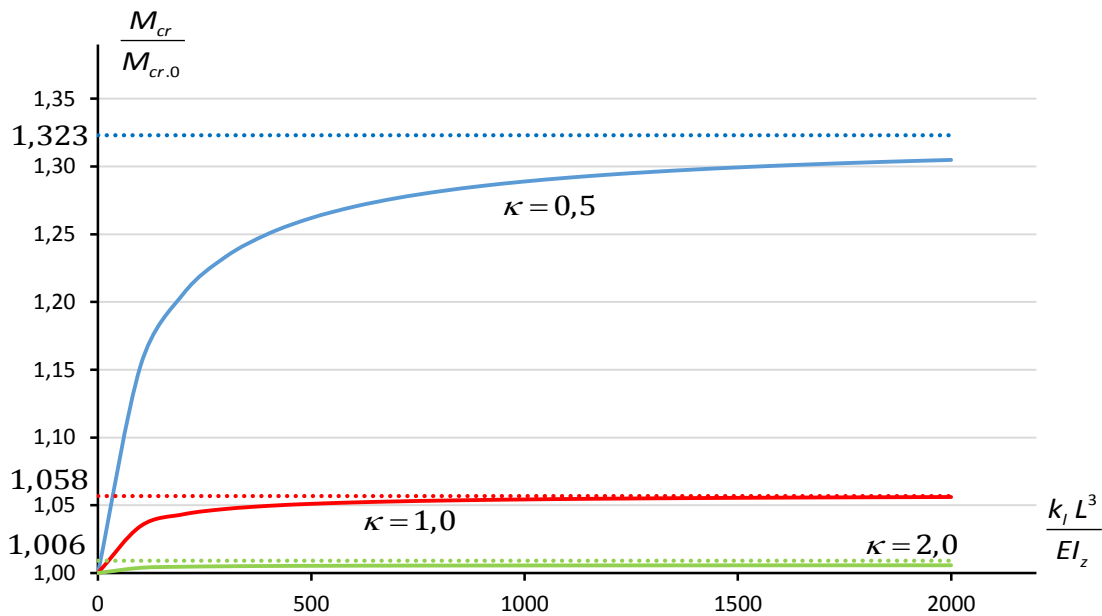


Figura 5.8 – Exemplo 1, com contraventamento colocado no banzo inferior ( $z_l = \frac{h}{2}$ ) –

Variação do *ratio*  $\frac{M_{cr}}{M_{cr,0}}$  em função de  $\frac{k_l L^3}{EI_z}$ , para valores seleccionados de  $\kappa$ .

## 5.2 Exemplo 2 – Consola com Secção Duplamente Simétrica, com Carga Pontual aplicada na Extremidade Livre

Considere-se agora a consola de secção I duplamente simétrica e balanço  $L$  representada na Figura 5.9, actuada por uma força concentrada aplicada na extremidade livre à cota  $z = z_Q$ . No encastramento fixo, todos os deslocamentos e rotações relevantes, assim como o empenamento, estão impedidos. A consola dispõe ainda de contraventamentos lateral e torsional rígidos na secção que dista  $\alpha L$  do encastramento fixo, com  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Tal como no primeiro exemplo, os resultados numéricos que se apresentam de seguida dizem respeito a consolas com  $\kappa = 0,5$ ,  $\kappa = 1,0$  e  $\kappa = 2,0$ . Consideraram-se ainda três valores distintos para o parâmetro adimensional  $\frac{2z_Q}{h}$ , onde  $h$  é a altura da secção transversal medida entre linhas médias dos banzos:  $\frac{2z_Q}{h} = 0$  (a força concentrada na extremidade livre é aplicada a meia altura),  $\frac{2z_Q}{h} = -1$  (força aplicada no centro de gravidade do banzo superior) e  $\frac{2z_Q}{h} = 1$  (força aplicada no centro de gravidade do banzo inferior). Utilizou-se malha uniforme de  $n = 32$

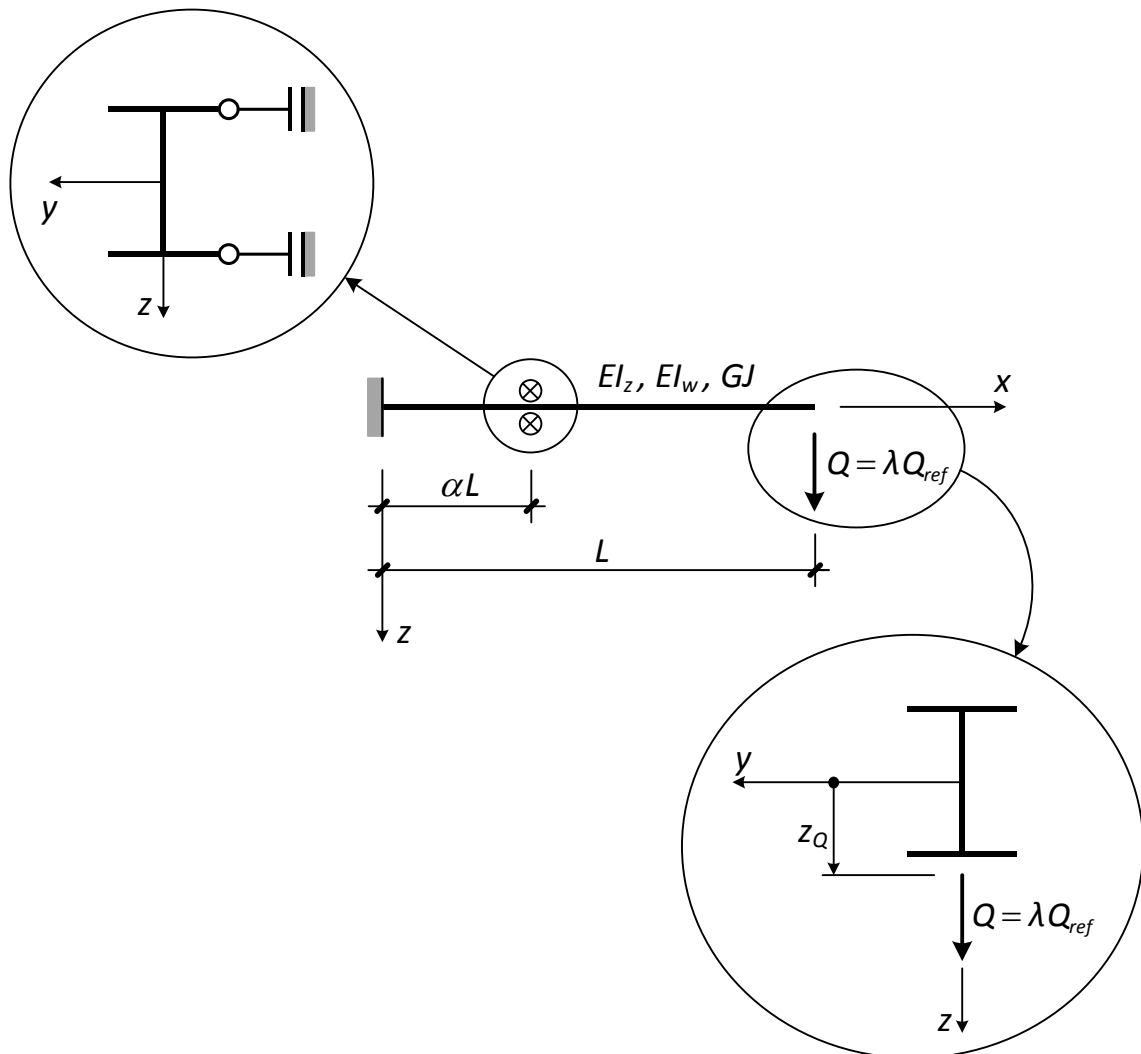


Figura 5.9 – Exemplo 2 – Consola de secção I duplamente simétrica, actuada por carga pontual aplicada na extremidade livre e com contraventamentos lateral e torsional rígidos.

elementos finitos. Este elevado número de elementos justifica-se pela intenção de variar o parâmetro  $\alpha$  com um passo pequeno,<sup>10</sup> e não por motivos de convergência. Os resultados obtidos foram confirmados com o *software* LTBeam; estão também de acordo com os apresentados por Kitipornchai *et al.* (1984).

<sup>10</sup> Como referido no início da secção 4.2, no programa desenvolvido as secções com contraventamento(s) têm obrigatoriamente de coincidir com um nó da malha de elementos finitos.

Consola não contraventada ( $\alpha = 0$ )

As cargas críticas  $Q_{cr.0} = \lambda_{cr.0} Q_{ref}$  e as cargas  $Q_{2.0} = \lambda_{2.0} Q_{ref}$  correspondentes ao segundo modo de encurvadura estão indicadas no Quadro 5.1 em formato adimensional.<sup>11</sup> É de salientar que, para  $z_Q = -\frac{h}{2}$  (carga aplicada no centro de gravidade do banzo superior),  $\frac{Q_{cr.0} L^2}{\sqrt{EI_z GJ}}$  decresce (se bem que apenas ligeiramente) com um aumento de  $\kappa$ . Pelo contrário, para  $z_Q = 0$  (carga aplicada a meia altura) e  $z_Q = \frac{h}{2}$  (carga aplicada no centro de gravidade do banzo inferior),  $\frac{Q_{cr.0} L^2}{\sqrt{EI_z GJ}}$  é função estritamente crescente de  $\kappa$ .

A aproximação proposta por Trahair (1983) para este caso,

$$\frac{Q_{cr.0} L^2}{\sqrt{EI_z GJ}} \cong 11 \left( 1 + \frac{1,2 \varepsilon}{\sqrt{1+1,44 \varepsilon^2}} \right) + 4(\kappa - 2) \left[ 1 + \frac{1,2(\varepsilon-0,1)}{\sqrt{1+1,44 (\varepsilon-0,1)^2}} \right], \quad (86)$$

com  $\kappa$  definido por (18) e

$$\varepsilon = \frac{z_Q}{L} \sqrt{\frac{EI_z}{GJ}} = \frac{2z_Q \kappa}{h \pi}, \quad (87)$$

conduz a estimativas bastante precisas (erros relativos que não excedem 4%) quando a carga está aplicada a meia altura ( $z_Q = 0$ ) ou no centro de gravidade do banzo inferior ( $z_Q = \frac{h}{2}$ ). A precisão é bastante menor quando a carga está aplicada no centro de gravidade do banzo superior ( $z_Q = -\frac{h}{2}$ ); nesta situação, os erros relativos chegam a atingir 29%.

Na Figura 5.10 apresenta-se um modo crítico de encurvadura típico. Pode observar-se que o banzo com maior deslocamento lateral é o banzo superior, ou seja, o banzo tracionado. Por razões que se tornarão claras mais à frente, apresenta-se igualmente um exemplo típico de segundo modo de encurvadura (Figura 5.11), verificando-se que a rotação de torção  $\varphi$  se anula em uma, e apenas uma, secção intermédia do vão, ao passo que o deslocamento lateral  $v$  nunca se anula no interior do vão.

<sup>11</sup> À semelhança do primeiro exemplo, utiliza-se o índice “0” para indicar que a grandeza em causa se refere à situação em que  $\alpha = 0$  (consola não contraventada).

<sup>12</sup> Refira-se que  $I_w = \frac{h^2}{4} I_z$ .



Quadro 5.1 – Exemplo 2, com  $\alpha = 0$  (consola não contraventada) – Cargas críticas e cargas correspondentes ao segundo modo.

	$\frac{Q_{cr.0} L^2}{\sqrt{EI_z GJ}}$			$\frac{Q_{2.0} L^2}{\sqrt{EI_z GJ}}$		
	$\kappa = 0,5$	$\kappa = 1,0$	$\kappa = 2,0$	$\kappa = 0,5$	$\kappa = 1,0$	$\kappa = 2,0$
$z_Q = -\frac{h}{2}$	4,278	3,774	3,485	13,27	16,30	26,43
$z_Q = 0$	5,700	7,634	11,34	17,34	26,07	44,13
$z_Q = \frac{h}{2}$	6,638	10,22	18,42	19,48	32,91	62,25

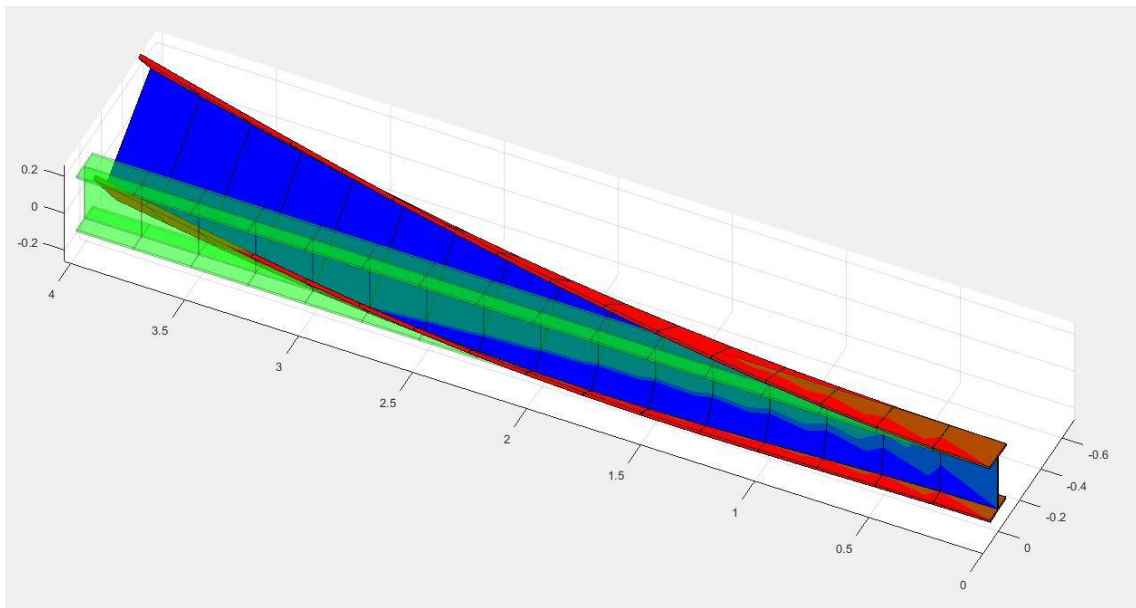


Figura 5.10 – Exemplo 2, com  $\alpha = 0$  (consola não contraventada) – Modo crítico de encurvadura para  $\kappa = 1,0$  e  $z_Q = 0$ .

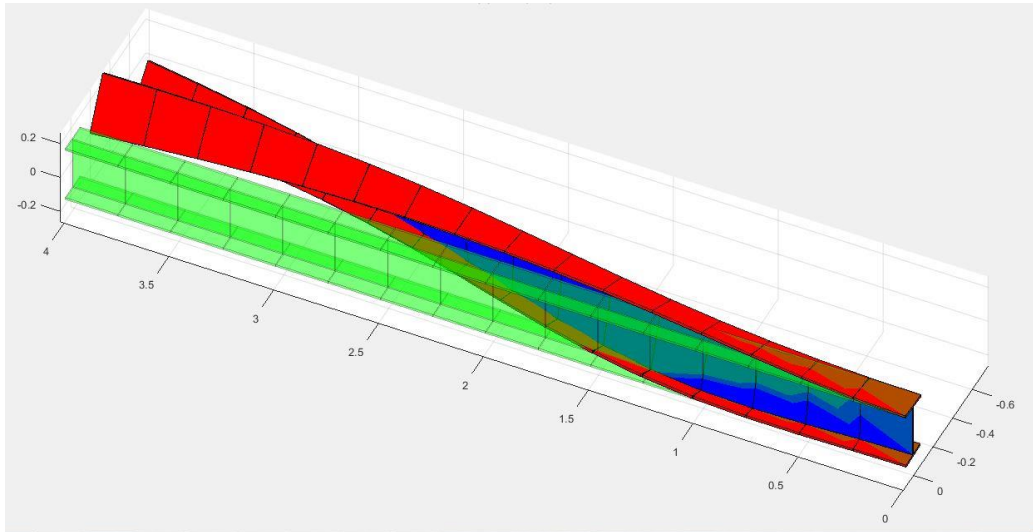


Figura 5.11 – Exemplo 2, com  $\alpha = 0$  (consola não contraventada) – Segundo modo de encurvadura para  $\kappa = 1,0$  e  $z_Q = 0$ .

Consola contraventada com carga aplicada a meia altura da secção ( $0 < \alpha \leq 1$  e  $z_Q = 0$ )

Com a carga aplicada a meia altura da secção extrema ( $z_Q = 0$ ), faz-se agora variar a posição dos contraventamentos rígidos (lateral e torsional) ao longo do comprimento da consola, isto é, faz-se variar o parâmetro  $\alpha$  entre 0 e 1. Os resultados obtidos para cada um dos três valores de  $\kappa$  considerados estão representados na Figura 5.12, sob a forma de gráfico  $\frac{Q_{cr}}{Q_{cr,0}}$  versus  $\alpha$ .

Constata-se que:

- 1) Existe um valor óptimo de  $\alpha$  (isto é, uma posição óptima para colocação dos contraventamentos), para o qual o *ratio*  $\frac{Q_{cr}}{Q_{cr,0}}$  atinge um máximo absoluto. Este valor óptimo de  $\alpha$  depende de  $\kappa$ , variando entre 0,5 e 0,6 nos casos analisados. Assim, a posição óptima dos contraventamentos encontra-se no interior do vão e não na extremidade da consola.
- 2) O valor  $\left(\frac{Q_{cr}}{Q_{cr,0}}\right)_{máx}$  é superior a  $\frac{Q_{2,0}}{Q_{cr,0}}$ . Este resultado pode ser explicado comparando os modos críticos de consolas contraventadas (Figuras 5.13-5.15), nos quais se tem necessariamente  $v(\alpha L) = 0$  e  $\varphi(\alpha L) = 0$ , com o segundo modo de encurvadura de consolas análogas não contraventadas (Figura 5.11), onde, como já referido, o deslocamento lateral  $v$  não se anula no interior do vão.
- 3) Para  $\alpha \leq 0,4$ , o *ratio*  $\frac{Q_{cr}}{Q_{cr,0}}$  praticamente não depende de  $\kappa$ .

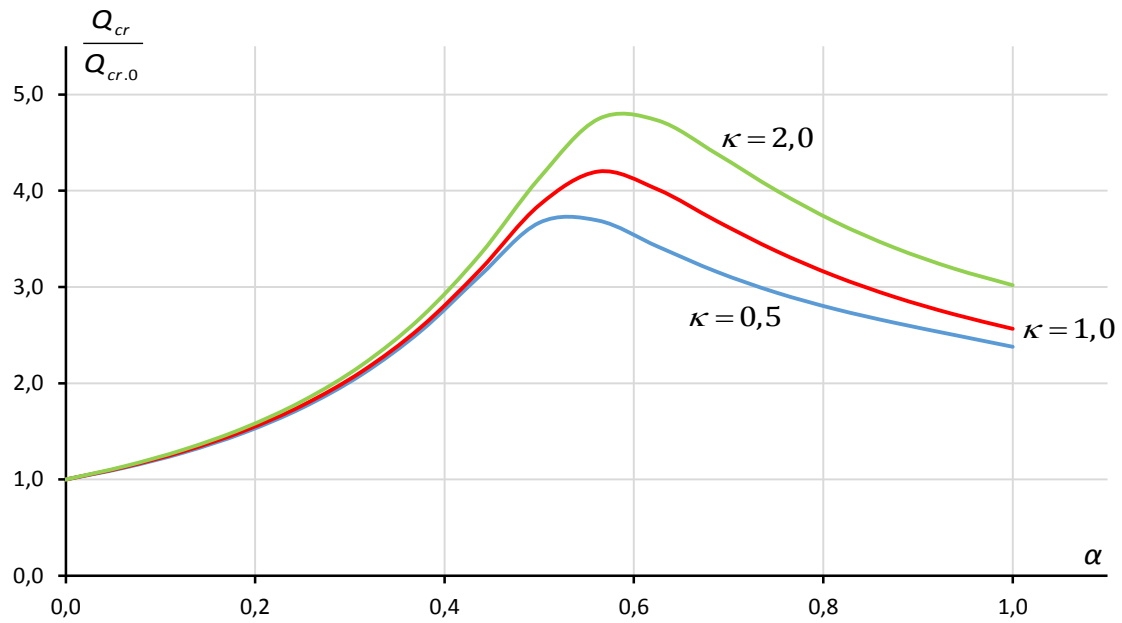


Figura 5.12 – Exemplo 2, com carga aplicada a meia altura da secção ( $z_Q = 0$ ) – Variação do ratio  $\frac{Q_{cr}}{Q_{cr,0}}$  em função da posição dos contraventamentos, para valores seleccionados de  $\kappa$ .

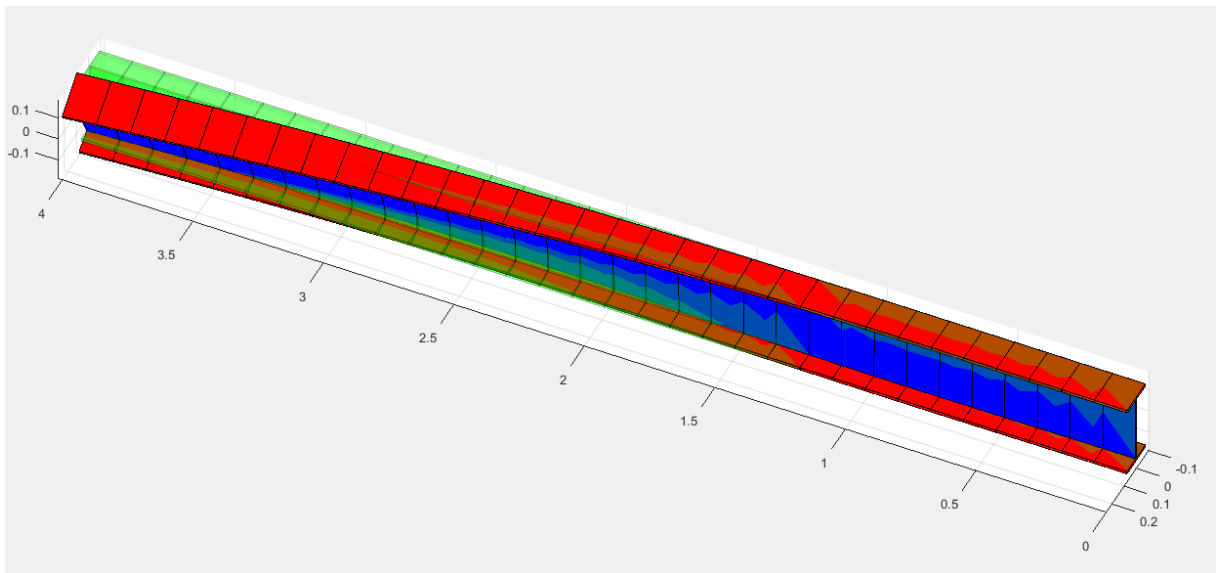


Figura 5.13 – Exemplo 2, com  $\kappa = 1,0$ ,  $z_Q = 0$  e  $\alpha = \frac{5}{16}$  – Modo crítico de encurvadura.

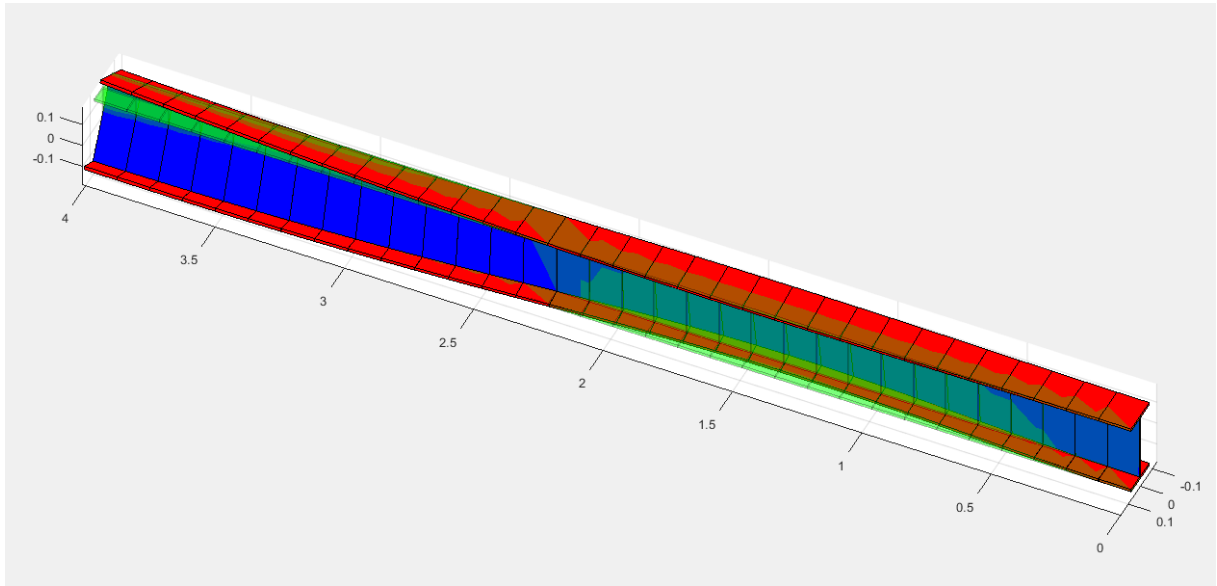


Figura 5.14 – Exemplo 2, com  $\kappa = 1,0$ ,  $z_Q = 0$  e  $\alpha = \frac{9}{16}$  ( $\cong \alpha_{\text{ótimo}}$ ) – Modo crítico de encurvadura.

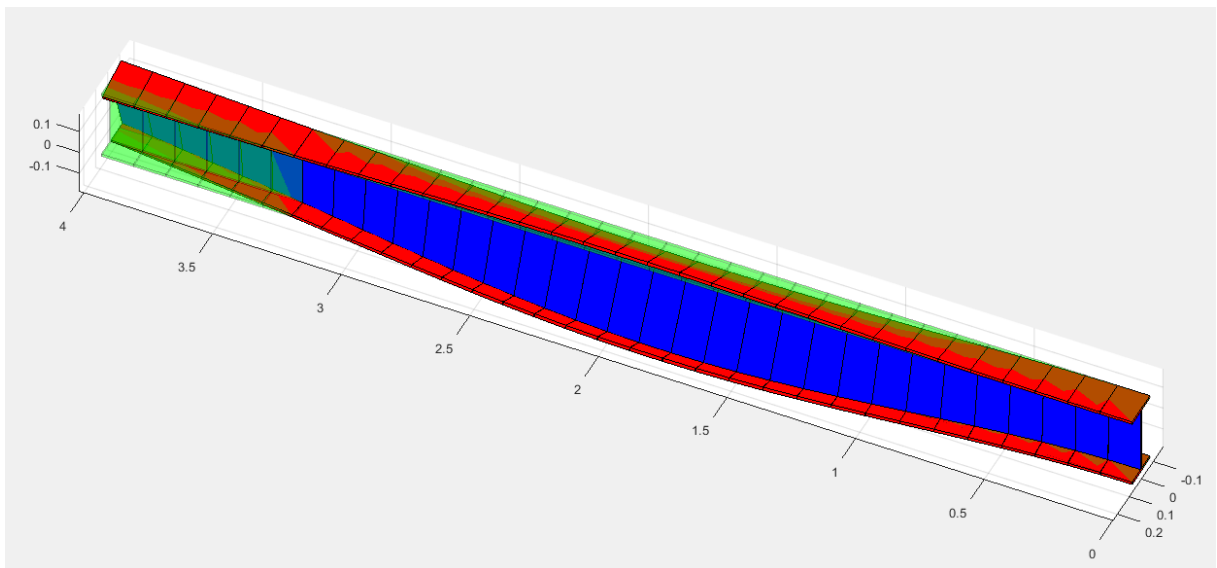


Figura 5.15 – Exemplo 2, com  $\kappa = 1,0$ ,  $z_Q = 0$  e  $\alpha = \frac{13}{16}$  – Modo crítico de encurvadura.

Consola contraventada com carga aplicada no banzo superior ( $0 < \alpha \leq 1$  e  $z_Q = -\frac{h}{2}$ )

Com a carga agora aplicada no centro de gravidade do banzo superior da secção extrema ( $z_Q = -\frac{h}{2}$ ), faz-se novamente variar a posição dos contraventamentos rígidos (lateral e torsional) ao longo do comprimento da consola, isto é, faz-se variar o parâmetro  $\alpha$  entre 0 e 1. As cargas críticas obtidas para cada um dos três valores de  $\kappa$  considerados estão representadas na Figura 5.16, mais uma vez sob a forma de gráfico  $\frac{Q_{cr}}{Q_{cr,0}}$  versus  $\alpha$ . As Figuras 5.17-5.19 apresentam os modos críticos de algumas consolas contraventadas (com  $\alpha < \alpha_{\text{ótimo}}$ ,  $\alpha \cong \alpha_{\text{ótimo}}$  e  $\alpha > \alpha_{\text{ótimo}}$ ), os quais devem ser contrastados com o segundo modo de encurvadura característico de uma consola não contraventada (Figura 5.11).

Os três comentários feitos a propósito do caso anterior mantêm-se genericamente válidos, com excepção do seguinte ponto: O valor óptimo de  $\alpha$  é mais elevado do que no caso anterior (varia agora entre 0,65 e 0,85) – por outras palavras, a posição óptima dos contraventamentos encontra-se agora mais próxima da extremidade livre do que anteriormente.

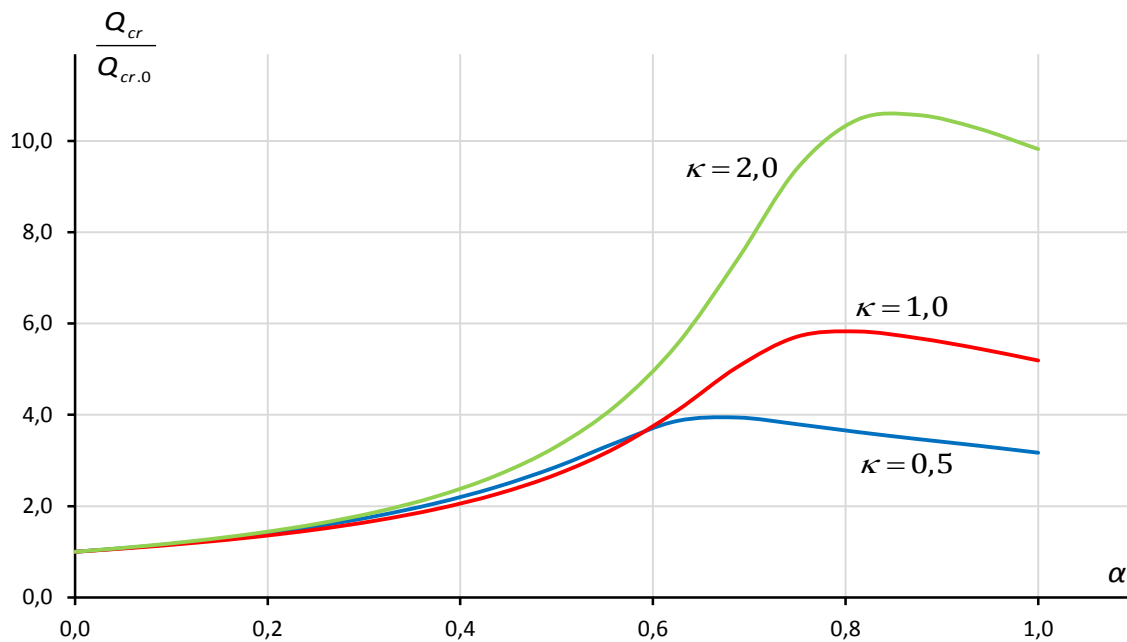


Figura 5.16 – Exemplo 2, com carga aplicada no banzo superior ( $z_Q = -\frac{h}{2}$ ) – Variação do  $\text{ratio } \frac{Q_{cr}}{Q_{cr,0}}$  em função da posição dos contraventamentos, para valores selecionados de  $\kappa$ .

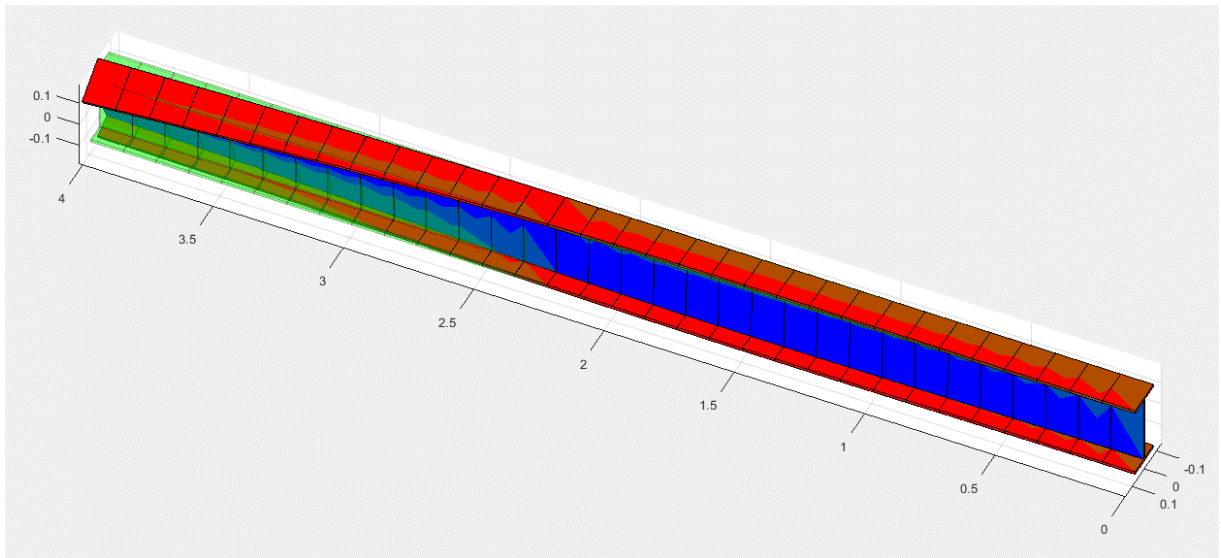


Figura 5.17 – Exemplo 2, com  $\kappa = 1,0$ ,  $z_Q = -\frac{h}{2}$  e  $\alpha = \frac{9}{16}$  – Modo crítico de encurvadura.

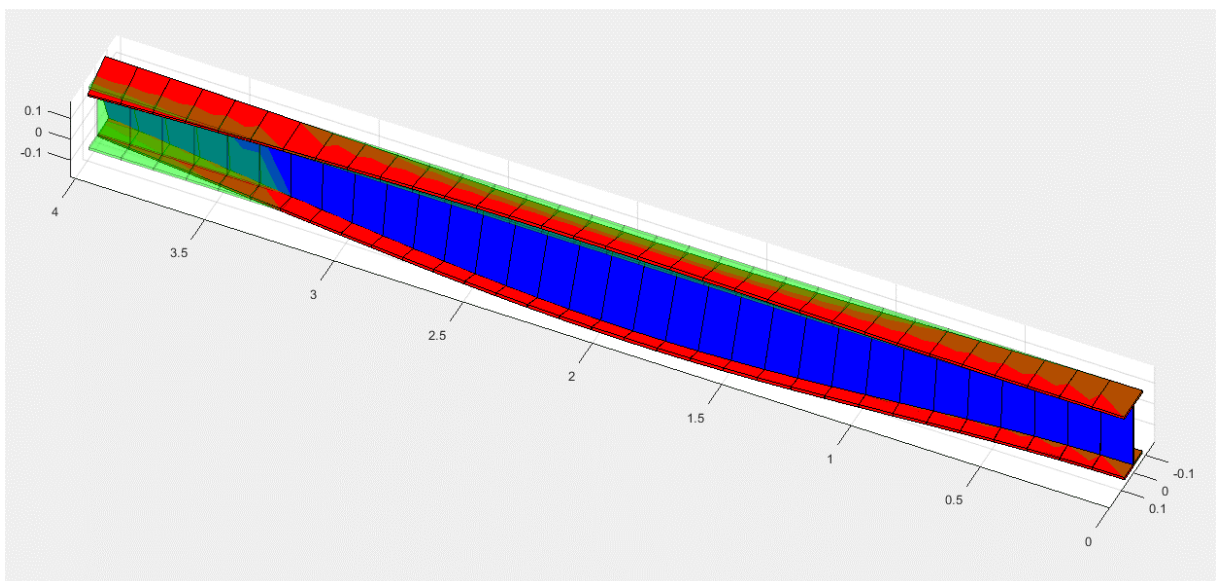


Figura 5.18 – Exemplo 2, com  $\kappa = 1,0$ ,  $z_Q = -\frac{h}{2}$  e  $\alpha = \frac{13}{16}$  ( $\cong \alpha_{\text{ótimo}}$ ) – Modo crítico de encurvadura.

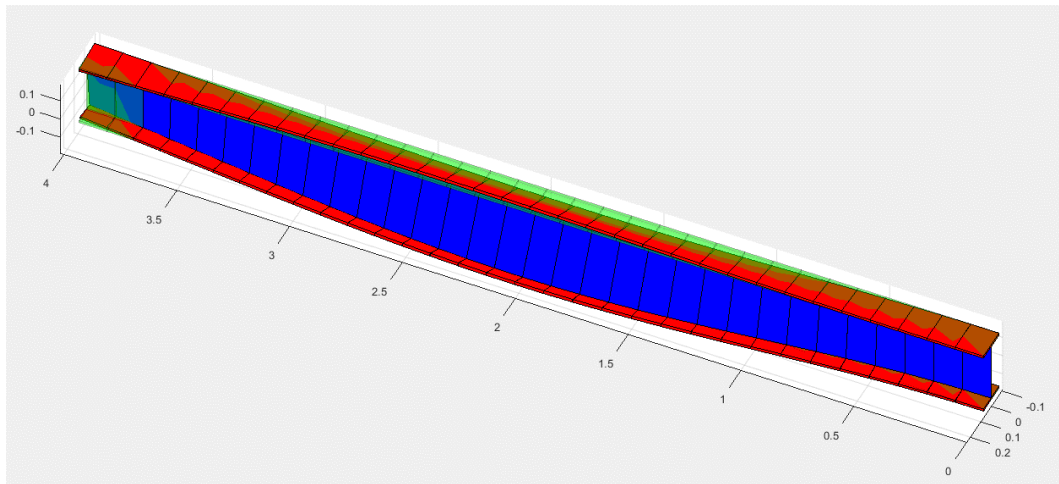


Figura 5.19 – Exemplo 2, com  $\kappa = 1,0$ ,  $z_Q = -\frac{h}{2}$  e  $\alpha = \frac{15}{16}$  – Modo crítico de encurvadura.

Consola contraventada com carga aplicada no banzo inferior ( $0 < \alpha \leq 1$  e  $z_Q = \frac{h}{2}$ )

Quando a carga é aplicada no centro de gravidade da secção extrema ( $z_Q = \frac{h}{2}$ ) e se faz variar  $\alpha$  entre 0 e 1, obtém-se os *ratios*  $\frac{Q_{cr}}{Q_{cr,0}}$  apresentados na Figura 5.20 e os modos críticos exemplificados nas Figuras 21-23. Face aos dois casos anteriores, interessa apenas salientar que o valor óptimo de  $\alpha$  é agora praticamente independente de  $\kappa$  e aproximadamente igual a 0,5.

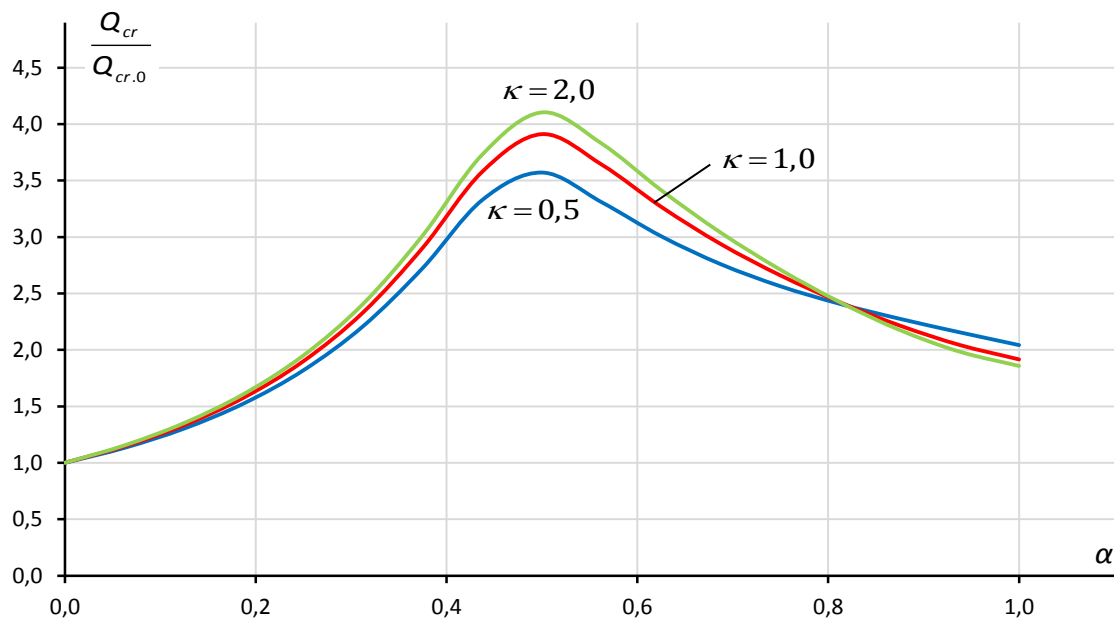


Figura 5.20 – Exemplo 2, com carga aplicada no banzo inferior ( $z_Q = \frac{h}{2}$ ) – Variação do *ratio*  $\frac{Q_{cr}}{Q_{cr,0}}$  em função da posição dos contraventamentos, para valores seleccionados de  $\kappa$ .

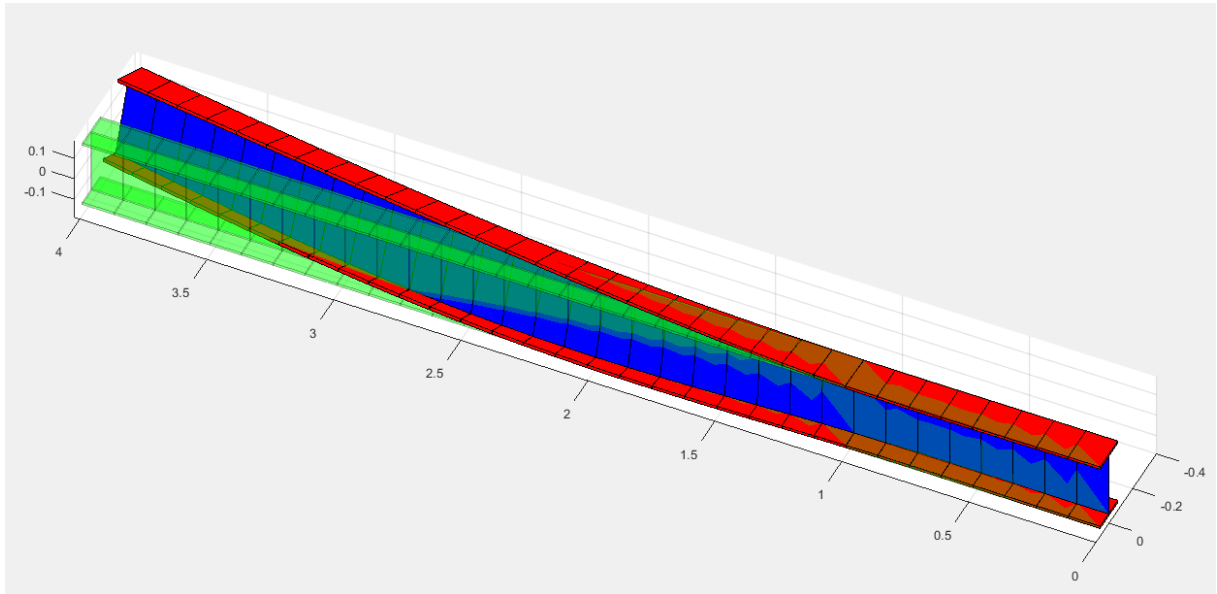


Figura 5.21 – Exemplo 2, com  $\kappa = 1,0$ ,  $z_Q = \frac{h}{2}$  e  $\alpha = \frac{1}{4}$  – Modo crítico de encurvadura.

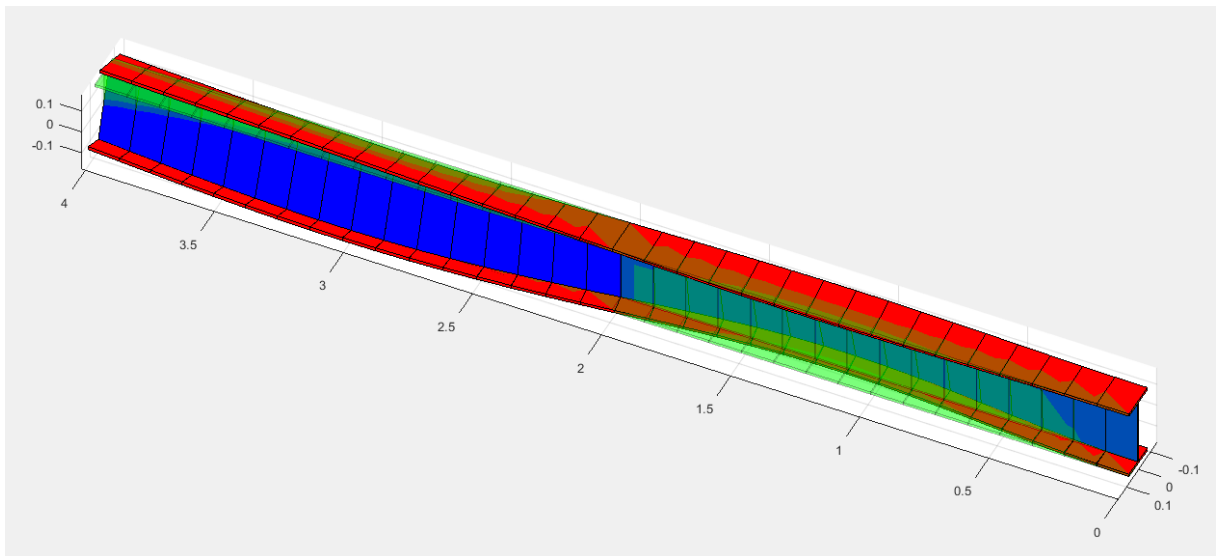


Figura 5.22 – Exemplo 2, com  $\kappa = 1,0$ ,  $z_Q = \frac{h}{2}$  e  $\alpha = \frac{1}{2}$  ( $\cong \alpha_{\text{optimo}}$ ) – Modo crítico de encurvadura.



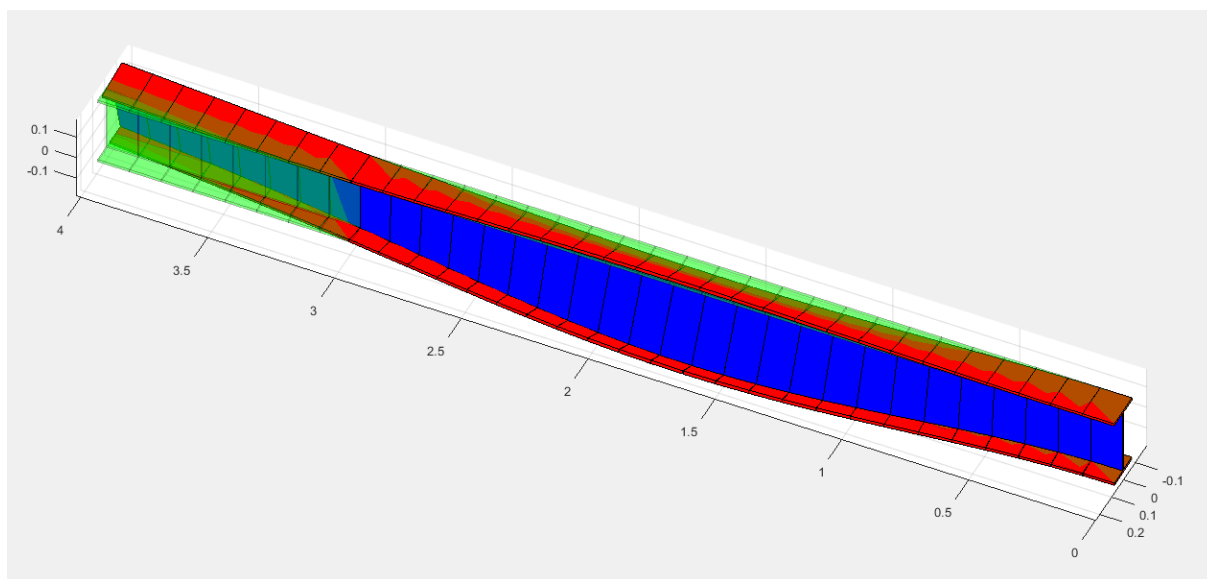


Figura 5.23 – Exemplo 2, com  $\kappa = 1,0$ ,  $z_Q = \frac{h}{2}$  e  $\alpha = \frac{3}{4}$  – Modo crítico de encurvadura.

## 6 CONCLUSÃO

Nesta dissertação procedeu-se à formulação de um elemento finito para a análise, em regime elástico, da instabilidade lateral por flexão-torção de vigas com secção transversal aberta de paredes finas duplamente simétrica e contraventamentos discretos, os quais podem ser laterais e/ou torsionais, rígidos ou elásticos.

O elemento finito desenvolvido foi implementado no *software* MatLab e testado em dois exemplos de aplicação. Verificou-se uma excelente concordância com os resultados, analíticos e numéricos, disponíveis na literatura e também com os resultados numéricos fornecidos pelo *freeware* LTBeam.

Os dois exemplos de aplicação permitiram ainda ilustrar a importância de factores como as condições de apoio e de carregamento, o parâmetro de torção  $\kappa$ , assim como o tipo, rigidez e posição (ao longo do vão e na secção transversal) dos contraventamentos utilizados.

Para uma viga simplesmente apoiada em flexão uniforme e com um contraventamento lateral elástico a meio vão, constatou-se que:

- 1) Quando o contraventamento lateral é colocado a meia altura da secção ou ao nível da linha média do banzo comprimido, verifica-se existir um valor limite para a rigidez do contraventamento,  $k_{l.lim}$ , caracterizado pelas seguintes propriedades:
  - Para  $k_l < k_{l.lim}$ , o modo crítico de encurvadura é simétrico e o momento crítico  $M_{cr}$  cresce com a rigidez do contraventamento sendo sempre inferior ao momento correspondente ao segundo modo de encurvadura da viga análoga não contraventada,  $M_{2.0}$ .
  - Para  $k_l \geq k_{l.lim}$ , o modo crítico de encurvadura é antissimétrico e tem-se  $M_{cr} = M_{2.0}$ .

A eficácia do contraventamento lateral é mais elevada quando este é colocado ao nível do banzo comprimido do que quando é colocado a meia altura.

- 2) A eficácia do contraventamento lateral colocado ao nível da linha média do banzo traccionado é diminuta: o momento crítico é consideravelmente inferior a  $M_{2,0}$ , mesmo no limite de um contraventamento perfeitamente rígido. Neste caso, o modo crítico de encurvadura é sempre simétrico.

Para uma consola com uma carga concentrada na extremidade livre e contraventamentos lateral e torsional rígidos, constatou-se que:

- 1) Existe posição óptima no interior do vão para posicionar os contraventamentos. Nesta posição óptima, o *ratio*  $\frac{Q_{cr}}{Q_{cr,0}}$  atinge um máximo absoluto, que é superior a  $\frac{Q_{2,0}}{Q_{cr,0}}$ .
- 2) A referida posição óptima depende em geral do parâmetro de torção  $\kappa$  e da cota de aplicação da força concentrada na secção extrema da consola.

A concluir esta dissertação, apresentam-se as seguintes sugestões para futuros trabalhos de pesquisa:

- 1) Prosseguir os testes de verificação da ferramenta desenvolvida, nomeadamente com outras condições de apoio, carregamento e contraventamento. Em particular, a análise de vigas com um número de secções contraventadas superior a um poderá constituir um problema interessante.
- 2) Generalizar os elementos finitos desenvolvidos para o caso de vigas com seção monossimétrica e contraventamentos contínuos.
- 3) Análise de vigas hiperestáticas no plano (vigas contínuas, por exemplo) e sua automatização.
- 4) Estudo da instabilidade lateral de vigas contraventadas considerando o efeito das deformações de pré-encurvadura.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andrade, A., Providência, P., Camotim, D. (2010). “Elastic Lateral-Torsional Buckling of Restrained Web-Tapered I-Beams”. *Computers & Structures*, Vol. 88, Issue 21-22, pp. 1179–1196.
- Bazant, Z.P., Cedolin, L. (1991). “Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture and Damaged Theories”. Oxford University Press, Nova Iorque.
- Becker, E.B., Carey, G.F., Oden, J.T. (1981). “Finite Elements – Volume 1: An Introduction”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Bica, N.M.S. (2015). “Encurvadura por Flexão-Torção de Colunas-Viga Elásticas com Secção Aberta de Parede Fina – Avaliação dos Efeitos da Deformação de Pré-Encurvadura”. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.
- Campos Ferreira, J. (1987). “Introdução à Análise Matemática”. Fundação Calouste Gulbenkian.
- Cristino, V.G. (2015). “Encurvadura Lateral por Flexão-Torção de Vigas Elásticas com Secção Aberta de Parede Fina – Estudo do Efeito da Deformação de Pré-Encurvadura”. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.
- CTICM (2010). “LTBeam version 1.0.11”.
- Dias da Silva, V. (2013). “Mecânica e Resistência dos Materiais” (4ª ed.). Coimbra.
- Fung, Y.C. (1965). “Foundations of Solid Mechanics”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Gjelsvik, A. (1981). “The Theory of Thin Walled Bars”. Wiley, Nova Iorque.
- Kitipornchai, S., Trahair, N.S. (1980). “Buckling Properties of I-Beams”. *Journal of the Structural Division – ASCE*, Vol. 106, Issue 5, pp. 941-957.
- Kitipornchai, S., Dux, P.F., Richter, N.J. (1984). “Buckling and Bracing of Cantilevers”. *Journal of Structural Engineering – ASCE*, Vol. 110, Issue 9, pp. 2250-2262.
- Love, A.E.H. (1944). “A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (4ª ed.)”. Dover, Nova Iorque.

- MathWorks (2015). “MatLab R2015a”.
- McCann, F. (2012). “Stability of Beams with Discrete Lateral Restraints”. Tese de Doutoramento, Imperial College of Science, Technology and Medicine, Londres.
- Murray, N.W. (1986). “Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures”. Oxford University Press, Oxford.
- Nethercot, D.A. (1973). “Buckling of Laterally and Torsionally Restrained Beams”. Journal of the Engineering Mechanics Division – ASCE, Vol. 99, Issue 4, pp. 773-791.
- NP 761 (1969). “Teoria das Estruturas. Vocabulário”. Instituto Português da Qualidade.
- Oden, J.T., Ripperger, E.A. (1981). “Mechanics of Elastic Structures” (2<sup>a</sup> ed.). Hemisphere Publishing Corporation, Washington.
- Pi, Y.L., Trahair, N.S., Rajasekaran, S. (1992). “Energy Equation for Beam Lateral Buckling”. Journal of Structural Engineering – ASCE, Vol. 118, Issue 6, pp. 1462-1479.
- Pignataro, M., Rizzi, N., Luongo, A. (1991). “Stability, Bifurcation and Postcritical Behaviour of Elastic Structures”. Elsevier, Amesterdão.
- Reis, A., Camotim, D. (2001). “Estabilidade Estrutural”. McGraw-Hill, Lisboa.
- Simitses, G.J., Hodges, D.H. (2006). “Fundamentals of Structural Stability”. Elsevier, Amesterdão.
- Simões, R.A.D. (2014). “Manual de Dimensionamento de Estruturas Metálicas” (3<sup>a</sup> ed.). CMM – Associação Portuguesa de Construção Metálica e Mista.
- Trahair, N.S. (1983). “Lateral Buckling of Overhanging Beams”. Instability and Plastic Collapse of Steel Structures, L.J. Morris (Ed.), Granada, Londres, pp. 503-518.
- Trahair, N.S. (1993). “Flexural-Torsional Buckling of Structures”. E&FN Spon, Londres.
- Trahair, N.S., Nethercot, D.A. (1984). “Bracing Requirements in Thin-Walled Structures”. Developments in Thin-Walled Structures 2, J. Rhodes e A.C. Walker (Eds.), Elsevier, Amesterdão, pp. 93–130.
- Yura, J.A. (2001). “Fundamentals of beam bracing”. Engineering Journal – American Institute of Steel Construction, Vol. 38, Issue 1, pp. 11-26.