



FCTUC DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Encurvadura por Flexão-Torção de Colunas-Viga Elásticas com Secção Aberta de Parede Fina – Avaliação dos Efeitos da Deformação de Pré-Encurvadura

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil
na Especialidade de Estruturas

Autor

Nádia Maria dos Santos Bica

Orientador

Anísio Alberto Martinho de Andrade

Paulo Manuel Mendes Pinheiro da Providência e Costa

Esta dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor, não tendo sofrido correcções após a defesa em provas públicas. O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer responsabilidade pelo uso da informação apresentada

Coimbra, Julho, 2015

RESUMO

O colapso de uma estrutura pode ocorrer, essencialmente, de dois modos (1) rotura material ou (2) instabilidade estrutural. No caso particular das estruturas metálicas, o facto de os aços disponíveis no mercado possuírem resistências cada vez mais elevadas tem conduzido à concepção e construção de estruturas progressivamente mais esbeltas. No entanto, isto pode conduzir à ocorrência de fenómenos de instabilidade (ou de encurvadura). Assim, a análise e dimensionamento deste tipo de estruturas são fortemente condicionados pela necessidade de ter em consideração este tipo de fenómenos.

Uma barra esbelta sujeita a flexão em torno do eixo de maior inércia (viga ou coluna-viga) pode instabilizar por flexão-torção se a sua zona comprimida não estiver adequadamente contraventada.

Trata-se de um fenómeno de instabilidade bifurcacional em que (1) a trajectória de equilíbrio fundamental corresponde à flexão no plano de maior inércia e (2) o modo de instabilidade envolve, simultaneamente, flexão em torno do eixo de menor inércia e torção. Este tipo de instabilidade é particularmente relevante em barras com secção aberta de paredes finas, visto que estas apresentam, em geral, uma rigidez de torção reduzida.

O objectivo central deste trabalho consiste em formular, implementar computacionalmente e verificar um elemento finito de barra que permita considerar a influência dos deslocamentos de pré-encurvadura na análise da bifurcação por flexão-torção, em regime elástico, de colunas-viga prismáticas com secção aberta de paredes finas duplamente simétrica.

ABSTRACT

The collapse of a structure may occur due to two different modes (1) material failure and (2) structural instability. In the particular case of the steel structures, the fact the steels available on the market have a higher tensile strength leads to slender conceptions. Nonetheless, this may also lead to structural instability (buckling). Thus, the analysis and conception of these type of structures have to take in consideration this sort of occurrence.

A slender bar member that is bent about its axis of greatest flexural rigidity (beam or beam-column) may suffer flexural-torsional buckling if the area under compression isn't rightly restraint.

This refers to a phenomenon of bifurcational instability where (1) the fundamental trajectory of equilibrium is due to bending in-plane of strong inertia and (2) the failure mode involves bending about its axis of greatest flexural rigidity and twisting, simultaneously. This type of failure has a major relevance on thin-walled open sections since they have very low torsional rigidity.

The point of this thesis consists on develop, test and check a finite element that allows to consider the influence of pre-buckling deformation in the analysis of the bifurcation by flexural-torsional, in elastic regime, of prismatic beam-columns with thin-walled open sections and doubly symmetric cross section.

ÍNDICE

1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Enquadramento Geral.....	2
1.2 Objectivo e Âmbito da Dissertação.....	3
1.3 Organização da Dissertação.....	3
2 TORÇÃO NÃO-UNIFORME.....	5
3 DEFINIÇÃO DA CLASSE DE PROBLEMAS A ANALISAR	13
4 MODELO MATEMÁTICO UNIDIMENSIONAL ADOPATADO.....	16
4.1 Trajectória de equilíbrio fundamental.....	18
4.2 Pontos de bifurcação.....	20
5 DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS.....	22
6 EXEMPLOS DE VEIFICAÇÃO.....	30
6.1 Generalidades.....	30
6.2 Coluna-Viga Simplesmente Apoiada.....	30
6.3 Coluna-Viga em Consola.....	36
7 CONCLUSÃO.....	39
8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	41

1 INTRODUÇÃO

1.1 Enquadramento geral

O colapso de uma estrutura pode ocorrer, essencialmente, de dois modos (Bazant e Cedolin, 1991): (1) rotura material ou (2) instabilidade estrutural. No caso particular das estruturas metálicas, o facto de os aços disponíveis no mercado possuírem resistências cada vez mais elevadas tem conduzido à concepção e construção de estruturas progressivamente mais esbeltas, às quais estão associados os objectivos de (1) economia e/ou (2) qualidade arquitectónica (ou, pelo menos, maior impacto estético). No entanto, como a palavra esbelteza é também sinónimo de “susceptibilidade à ocorrência de fenómenos de instabilidade (ou de encurvadura)”, a análise e dimensionamento deste tipo de estruturas são fortemente condicionados pela necessidade de ter em consideração este tipo de fenómenos, cuja natureza é intrinsecamente não linear.

Uma barra esbelta sujeita a flexão em torno do eixo de maior inércia (viga ou coluna-viga) pode instabilizar por flexão-torção se a sua zona comprimida não estiver adequadamente contraventada (Reis e Camotim, 2001, Trahair, 1993). Trata-se de um fenómeno de instabilidade bifurcacional em que (1) a trajectória de equilíbrio fundamental corresponde à flexão no plano de maior inércia (deslocamento w representado na figura 1.1) e (2) o modo de instabilidade envolve, simultaneamente, flexão em torno do eixo de menor inércia e torção (deslocamento v e rotação ϕ na mesma figura). Este tipo de instabilidade é particularmente relevante em barras com secção aberta de paredes finas, visto que estas apresentam, em geral, uma rigidez de torção reduzida.

Constata-se, no entanto, que é habitual determinar os valores de bifurcação do parâmetro de carga e os correspondentes modos de instabilidade admitindo que o elemento estrutural permanece indeformado até se desencadear a encurvadura ($w=0$). Por outras palavras, desprezam-se os deslocamentos de pré-encurvadura. Esta simplificação tem a enorme vantagem de conduzir a um problema de valores próprios *linear* (Pignataro *et al.*, 1991).

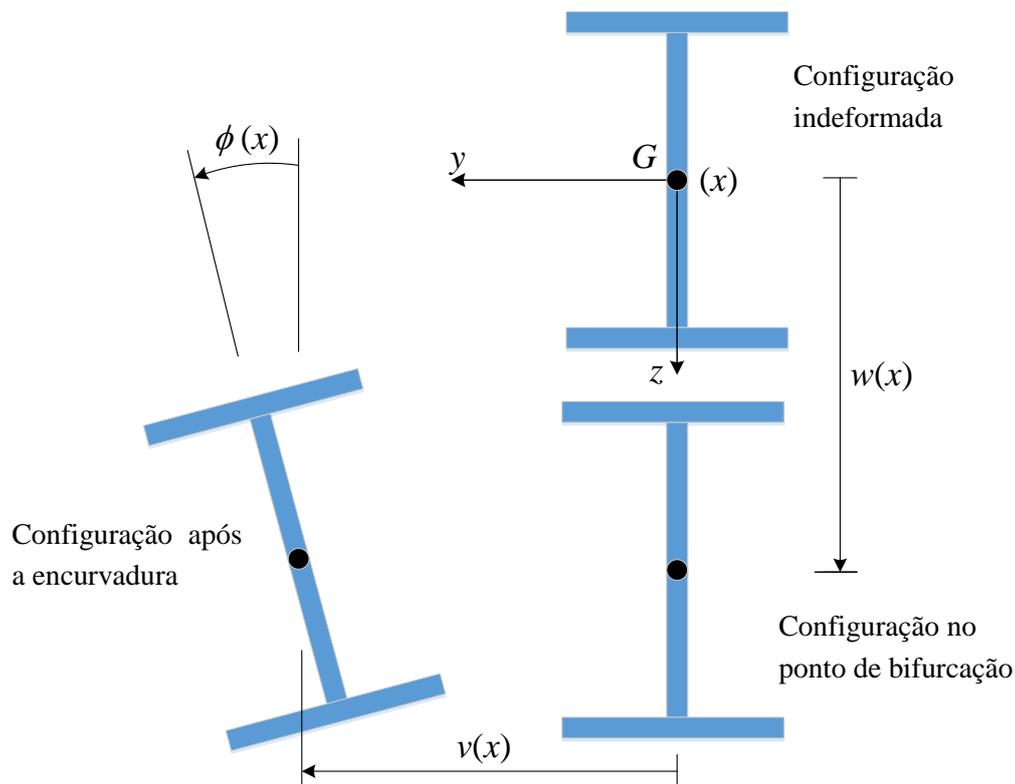


Figura 1.1 – Instabilidade por flexão-torção – Deslocamentos de uma secção genérica

No caso de colunas-viga, a consideração dos deslocamentos de pré-encurvadura torna a análise de bifurcação consideravelmente mais complexa. De facto, obriga a ter em conta (1) a amplificação dos deslocamentos e momentos flectores primários por acção da força de compressão e (2) a influência da curvatura na resistência à encurvadura, já que, no ponto de bifurcação, a coluna-viga se apresenta com a configuração de uma arco (eventualmente invertido) muito abatido. Como se verá mais adiante, o problema de valores próprios resultante é *não linear*.

O número de trabalhos de investigação sobre a influência dos deslocamentos de pré-encurvadura na instabilidade por flexão-torção de colunas-viga é relativamente escasso. Destacam-se, em primeiro lugar, os estudos de Trahair e Woolcock (1973) e Vacharajittiphon *et al.* (1974), que incidiram exclusivamente sobre perfis em I de banzos iguais (com secção duplamente simétrica, portanto). A generalização para perfis de secção mono-simétrica foi posteriormente realizada por Pi e Trahair (1992a,b), num trabalho em que apresentam também uma formulação por elementos finitos.

1.2 Objectivo e âmbito da dissertação

O objectivo central deste trabalho consiste em formular, implementar computacionalmente e verificar um elemento finito de barra que permita considerar a influência dos deslocamentos de pré-encurvadura na análise da bifurcação por flexão-torção, em regime elástico, de colunas-viga prismáticas com secção aberta de paredes finas duplamente simétrica. Pretende-se, acima de tudo, obter uma ferramenta (1) susceptível de desenvolvimentos com vista ao alargamento do seu campo de aplicação e (2) que permita, no futuro, efectuar estudos paramétricos destinados a avaliar a importância de factores tais como as condições de apoio e de carregamento, bem como a forma da secção transversal.

Por razões de simplicidade de utilização e de eficiência (uma linha de código em MatLab pode substituir várias linhas necessárias noutras linguagens), a implementação computacional foi realizada com o software MatLab (MathWorks 2015), para o qual a Universidade de Coimbra possui uma licença de *campus*.

1.3 Organização da dissertação

A dissertação encontra-se organizada em sete capítulos, o primeiro dos quais é a presente Introdução.

No segundo capítulo, recordam-se, de uma forma muito breve, os aspectos mais importantes da torção não uniforme, em regime material e geometricamente linear, de barras com secção aberta de paredes finas com dupla simetria. Dá-se uma especial atenção ao caso de perfis em I de banzos iguais, nos quais é possível visualizar facilmente o fenómeno e, assim, adquirir uma indispensável compreensão física.

No terceiro capítulo, descreve-se em pormenor a classe de problemas que se pretende analisar, nomeadamente em termos de geometria da estrutura e das suas condições de apoio, das características do material e do carregamento actuante.

O quarto capítulo apresenta o modelo matemático (contínuo) adoptado nesta dissertação para descrever o comportamento geometricamente não linear de barras prismáticas com secção aberta de paredes finas. Houve uma especial preocupação em identificar claramente as principais hipóteses simplificativas. O modelo geral é depois particularizado para duas análises a efectuar de modo consecutivo: (1) análise da trajectória de equilíbrio fundamental e (2) identificação dos pontos de bifurcação. Indicam-se todas as expressões necessárias para os desenvolvimentos subsequentes.

O quinto capítulo aborda a discretização por elementos finitos do modelo contínuo. De facto, foram desenvolvidos dois elementos finitos. No primeiro, mais simples, o efeito dos deslocamentos de pré-encurvadura são desprezados. No segundo, significativamente mais complexo, aquele efeito é tido em consideração. A implementação em MatLab destes dois elementos finitos é também discutida.

No sexto capítulo, são apresentados alguns exemplos práticos, os quais foram utilizados para verificar os elementos finitos e sua implementação computacional por comparação com resultados disponíveis na literatura.

No sétimo e último capítulo, são apresentadas as principais conclusões retiradas deste trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

2 TORÇÃO NÃO-UNIFORME

O estudo da torção não-uniforme foi abordado pela primeira vez por S.P. Timoshenko em Göttingen (Alemanha), em 1905. Timoshenko observou que barras de secção em I duplamente simétricas sujeitas a um momento torsor uniforme apresentavam comportamentos bastante diferentes consoante o empenamento fosse ou não livre. No caso do empenamento ser livre, estamos perante torção uniforme. Pelo contrário, se houver restrições ao empenamento (numa das extremidades da barra, por exemplo), estamos perante torção não-uniforme, como esquematizado na figura 2.1. Neste segundo caso, a torção é acompanhada da flexão dos banzos em sentidos opostas e a viga é mais rígida do que o previsto pela teoria de Saint-Venant.

Assim, Timoshenko (1913) constatou que para a torção não-uniforme o momento torsor é resultante de duas parcelas, T_{SV} e T_w . O momento torsor T_{SV} é proporcional à derivada da rotação de torção ϕ , isto é,

$$T_{SV} = GJ\phi', \quad (1)$$

em que GJ é a rigidez de torção de Saint-Venant da secção transversal. Para definir a segunda parcela, Timoshenko estabeleceu, atendendo à simetria da secção, que cada secção transversal roda em torno do eixo baricêntrico da barra. Os deslocamentos transversais da linha média dos banzos são portanto

$$y = \pm \frac{1}{2}h\phi, \quad (2)$$

em que h é a distancia entre as linhas médias dos banzos. Se os banzos forem considerados, individualmente, como vigas de Euler-Bernoulli, então as curvaturas $\pm \frac{1}{2}h\phi''$ que adquirem devido às restrições ao empenamento estão associadas aos momentos flectores

$$M_f = \pm \frac{1}{2}Dh\phi'' \quad (3)$$

e às forças de corte

$$V_f = M'_f = \pm \frac{1}{2}Dh\phi''', \quad (4)$$

em que D representa rigidez de flexão de cada banzo em relação ao seu eixo de maior inércia. As forças de corte nos dois banzos têm a mesma grandeza, mas sentidos opostos. Como tal, formam um binário (veja-se a figura figura 2.2)

$$T_w = -\frac{1}{2} Dh^2 \phi''' \tag{5}$$

A equação final que se obtém para a torção não-uniforme de uma viga de secção em I duplamente simétrica é então

$$T = T_{sv} + T_w = GJ \phi' - \frac{1}{2} Dh^2 \phi''' \tag{6}$$

Actualmente, a propriedade mecânica $\frac{1}{2} Dh^2$ é designada por rigidez de empenamento da secção transversal e representada pelo símbolo EI_w . É ainda habitual definir uma nova resultante de tensões, autoequilibrada, que Vlasov (1961) designou por bimomento:

$$B = -EI_w \phi'' \tag{7}$$

No caso da barra em I duplamente simétrica, o bimomento corresponde, em valor absoluto, ao produto do momento flector em cada banzo pela distância entre linhas médias dos banzos:

$$|B| = |M_f| h \tag{8}$$

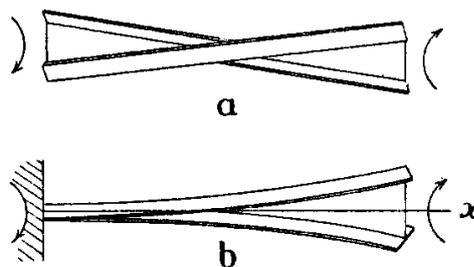


Figura 2.1 – Torção uniforme e não-uniforme de uma barra em I duplamente simétrica (Timoshenko, 1913)

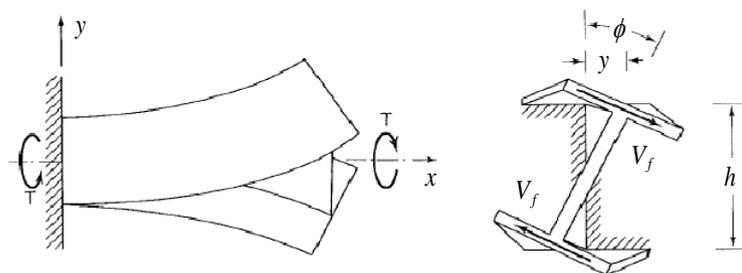
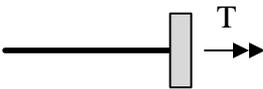


Figura 2.2 – Torção em secção não circular com empenamento restringido (Chajes, 1974)

No Quadro 2.1 estão indicadas as condições de fronteira mais comuns que complementam a equação diferencial ordinária (6). Se o empenamento estiver impedido numa extremidade da barra, tem-se, nessa extremidade, $\phi' = 0$ (refira-se que ϕ' representa a amplitude do empenamento). Consequentemente, o momento torsor de Saint-Venant, T_{SV} , é igualmente zero e como tal o momento torsor total é apenas $T = T_w = -EI_w\phi'''$ (isto é visível no caso *c* do Quadro 2.1). Se, pelo contrário, o empenamento for livre na extremidade, o bimomento $B = -EI_w\phi''$ anula-se nessa extremidade (casos *b* e *d* do Quadro 2.1).

Quadro 2.1 – Condições Fronteira

Descrição	Condições de fronteira cinemáticas	Condições de fronteira estáticas	Caso
 Rotação de torção e empenamento impedidos	$\phi = 0$ $\phi' = 0$	—	a
 Rotação de torção impedida; empenamento livre	$\phi = 0$	$EI_w\phi'' = 0$	b
 Rotação de torção livre; empenamento impedido	$\phi' = 0$	$-EI_w\phi''' = T$	c
 Rotação de torção e	—	$GJ\phi' - EI_w\phi''' = T$ $EI_w\phi'' = 0$	d

empenamento livres

De seguida, e com o intuito de ilustrar a aplicação dos conceitos abordados anteriormente, apresenta-se uma análise do comportamento da barra representada na figura 2.3, solicitada, na direcção e sentido do seu eixo longitudinal, por um momento uniformemente distribuído t_0 . A barra tem um comprimento L , rigidez de Saint-Venant GJ e rigidez de empenamento EI_w ¹. Nas extremidades da barra, a rotação em torno do eixo longitudinal está impedida e o empenamento é livre.

Por equilíbrio de um troço de barra com comprimento infinitesimal dx , como o representado na figura 2.4, conclui-se que $T' + t_0 = 0$, isto é, que a taxa de variação do momento torsor (total) ao longo da barra é igual a $-t_0$. Obtém-se assim a equação diferencial ordinária

$$EI_w \phi^{(4)} - GJ \phi'' = t_0. \tag{9}$$

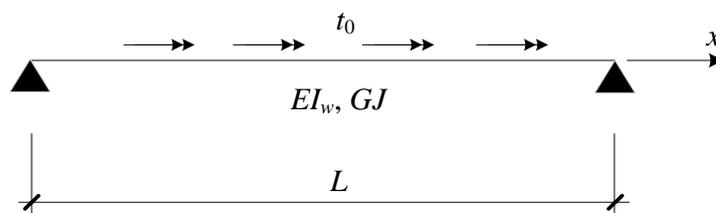


Figura 2.3 – Barra sujeita a momento uniformemente distribuído t_0

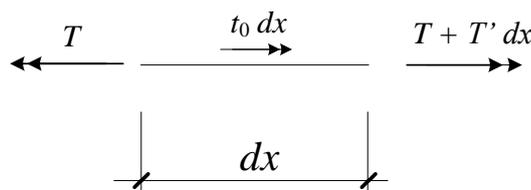


Figura 2.4 – Equilíbrio de um troço de barra com comprimento infinitesimal

¹ Para uma secção aberta de paredes finas, a rigidez de Saint-Venant pode ser calculada através de (Dias da Silva, 2013):

$$GJ = Gk \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n l_i e_i^3$$

em que os l_i são os comprimentos dos diversos roços que compõem a secção, os e_i são as respectivas espessuras e k é um coeficiente pouco superior à unidade, através do qual se em conta o acréscimo de rigidez devido às ligações e concordâncias entre troços.

As constantes de empenamento de um conjunto de secções de utilização corrente encontra-se tabelada em Oden e Ripperger (1981).

A rotação de torção ϕ pode então ser obtida integrando a equação (9) com as condições de fronteira (caso *b* do Quadro 2.1 nas duas extremidades)

$$\phi(0) = \phi(L) = 0 \quad (10)$$

$$\phi''(0) = \phi''(L) = 0. \quad (11)$$

Este problema pode ser adimensionalizado através da introdução da abcissa normalizada $\xi = x/L$ e da função $\tilde{\phi}$ definida no intervalo $[0,1]$ por $\tilde{\phi}(\xi) = \phi(\xi L)$. Tendo em atenção que

$$\phi^{(n)}(x) = \tilde{\phi}^{(n)}(\xi) \frac{d^n \xi}{dx^n} = \frac{1}{L^n} \tilde{\phi}^{(n)}(\xi), \quad (12)$$

resulta da equação (9)

$$\tilde{\phi}''(\xi) - K^2 \tilde{\phi}^{(4)}(\xi) = \frac{t_0 L^2}{GJ}, \quad (13)$$

em que $K = \sqrt{EI_w / L^2 GJ}$ é um parâmetro adimensional.² Por sua vez, as condições de fronteira (11) e (12) escrevem-se agora na forma

$$\tilde{\phi}(0) = \tilde{\phi}(1) = 0 \quad (14)$$

$$\tilde{\phi}''(0) = \tilde{\phi}''(1) = 0. \quad (15)$$

A equação (14) tem como solução geral

$$\tilde{\phi}(\xi) = C_1 + C_2 \xi + C_3 \sinh\left(\frac{\xi}{K}\right) + C_4 \cosh\left(\frac{\xi}{K}\right) - \frac{t_0}{2} \frac{L^2}{GJ} \xi^2. \quad (16)$$

As constantes de integração C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são determinadas a partir das quatro condições de fronteira. Obtém-se

$$C_1 = -K^2 \frac{t_0 L^2}{GJ} \quad (17)$$

² Pode ainda escrever-se $K = d/L$, em que $d = \sqrt{EI_w / GJ}$ é uma propriedade da secção transversal habitualmente designada por comprimento característico (Gjelsvik, 1981, Kollbrunner e Basler, 1969). De acordo com Kitipornchai e Trahair (1980), o parâmetro K dos perfis habitualmente utilizados em vigas e colunas-viga varia entre os valores 0,03 e 0,80.

$$C_2 = \frac{t_0 L^2}{2GJ} \quad (18)$$

$$C_3 = K^2 \frac{t_0 L^2}{GJ} \left(\cosh\left(\frac{1}{K}\right) - \coth\left(\frac{1}{K}\right) \right) \quad (19)$$

$$C_4 = K^2 \frac{t_0 L^2}{GJ} \quad (20)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\xi) = & -K^2 \frac{t_0 L^2}{GJ} + \frac{t_0 L^2}{2GJ} \xi + K^2 \frac{t_0 L^2}{GJ} \left(\cosh\left(\frac{1}{K}\right) - \coth\left(\frac{1}{K}\right) \right) \sinh\left(\frac{\xi}{K}\right) + \\ & + K^2 \frac{t_0 L^2}{GJ} \cosh\left(\frac{\xi}{K}\right) - \frac{t_0 L^2}{2GJ} \xi^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Esta função está representada graficamente na figura 2.5 para dois valores de K , $K = 0,1$ (moderadamente reduzido) e $K = 0,5$ (moderadamente elevado). Representa-se ainda, para os mesmos valores de K , as seguintes versões adimensionalizadas das distribuições de bimomento, momento torsor de Saint-Venant e momento torsor de empenamento (figuras 2.6, 2.7 e 2.8, respectivamente):

$$\begin{aligned} \tilde{B}(\xi) = \frac{B(\xi L)}{GJ} = -\frac{EI_w}{L^2 GJ} \tilde{\phi}''(\xi) = -K^2 \tilde{\phi}''(\xi) = \\ = -C_3 \sinh\left(\frac{\xi}{K}\right) - C_4 \cosh\left(\frac{\xi}{K}\right) - K^2 \frac{t_0 L^2}{GJ} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\tilde{T}_{sv}(\xi) = \frac{LT_{sv}(\xi L)}{GJ} = \tilde{\phi}'(\xi) = C_2 + \frac{C_3}{K} \cosh\left(\frac{\xi}{K}\right) + \frac{C_4}{K} \sinh\left(\frac{\xi}{K}\right) - \frac{t_0 L^2}{GJ} \xi \quad (23)$$

$$\tilde{T}_w(\xi) = \frac{LT_w(\xi L)}{GJ} = -\frac{EI_w}{L^2 GJ} \tilde{\phi}'''(\xi) = -K^2 \tilde{\phi}'''(\xi) = -\frac{C_3}{K} \cosh\left(\frac{\xi}{K}\right) - \frac{C_4}{K} \sinh\left(\frac{\xi}{K}\right). \quad (24)$$

Em todos os gráficos, o eixo das ordenadas está normalizado pelo factor $GJ / (t_0 L^2)$.

Verifica-se que a influência da restrição do empenamento é muito mais importante para $K = 0,5$ do que para $K = 0,1$, sendo que para este segundo caso aquela influência apenas se faz sentir junto às extremidades apoiadas.

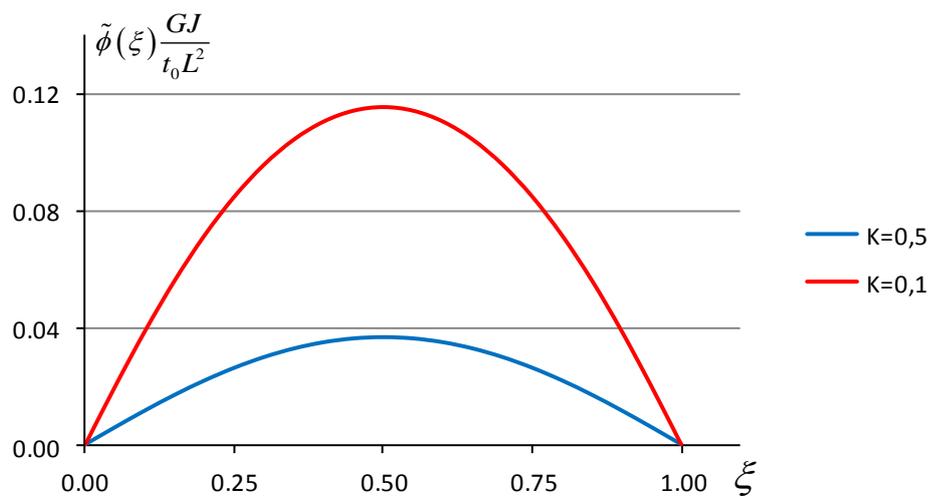


Figura 2.5 – Rotação de torção, $\tilde{\phi}(\xi)$

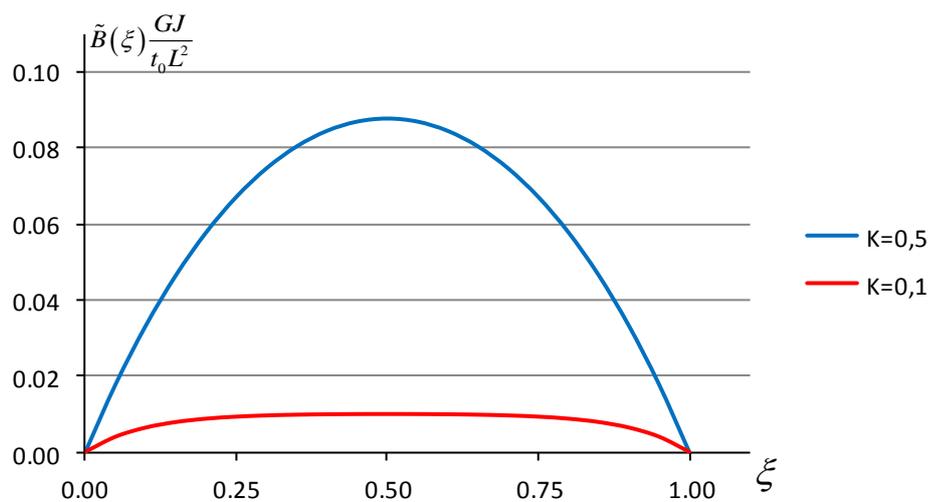


Figura 2.6 – Bimomento (adimensionalizado), $\tilde{B}(\xi)$

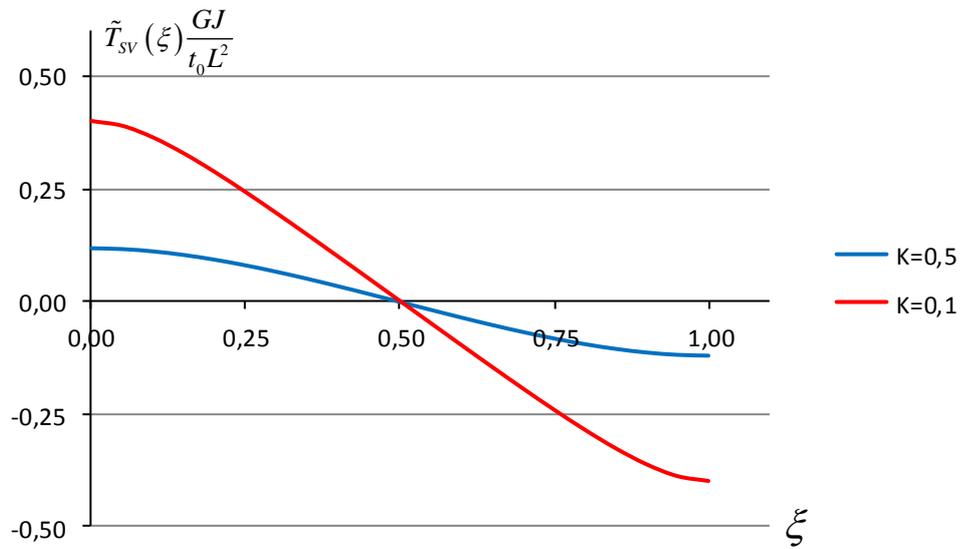


Figura 2.7 – Momento torsor de Saint-Venant (adimensionalizado), $\tilde{T}_{sv}(\xi)$

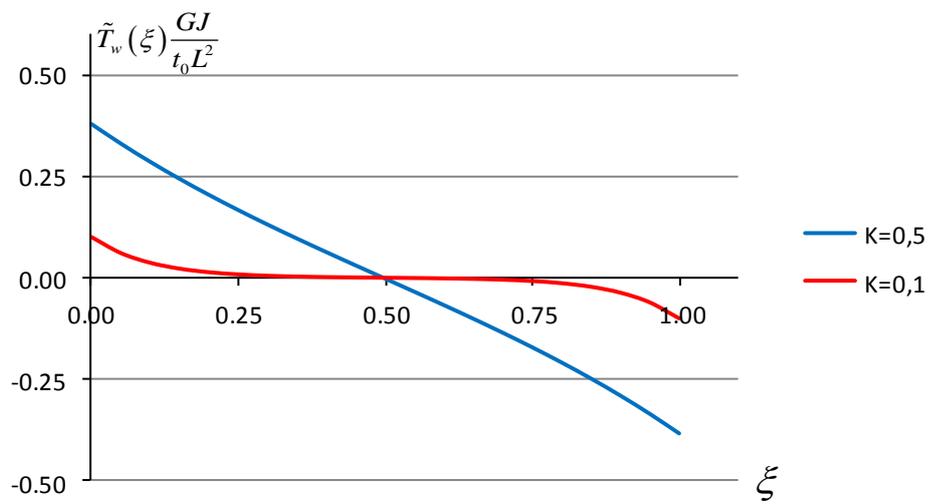


Figura 2.8 – Momento torsor de empenamento (adimensionalizado), $\tilde{T}_w(\xi)$

3 DEFINIÇÃO DA CLASSE DE PROBLEMAS A ANALISAR

Geometria e propriedades materiais

As colunas-viga tratadas neste trabalho são prismáticas e com secção aberta de paredes finas duplamente simétrica, sem imperfeições (*i.e.*, “ideais”). A figura 3.1 representa a configuração indeformada de um elemento genérico com estas características. Adopta-se um sistema de eixos fixo, ortogonal e directo, tal que, na configuração indeformada, (1) o eixo x coincide com o eixo baricêntrico (e eixo dos centros de corte) da coluna-viga, (2) os eixos y e z correspondem aos eixos forte (eixo principal central de maior inércia) e fraco (eixo principal central de menor inércia) da secção transversal, respectivamente, e (3) o banzo superior está associado a valores negativos de z . O comprimento da coluna-viga é designado por L .

Considera-se um material linearmente elástico, homogéneo e isotrópico, caracterizado pelo módulo de elasticidade E e pelo módulo de distorção G .

Carregamento

Ao longo da trajectória de equilíbrio fundamental, considera-se que a coluna-viga se encontra sujeita ao seguinte sistema de forças (generalizadas) exteriores conservativas (figura 3.2):

- (1) Força transversal uniformemente distribuído q , actuando no plano de maior inércia (x, z), inicialmente a uma cota z_q .

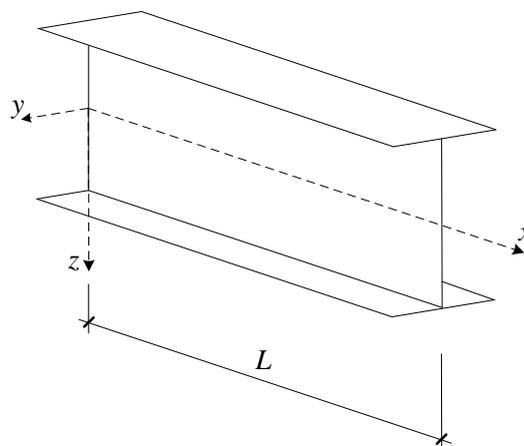


Figura 3.1 – Configuração indeformada de uma coluna-viga duplamente simétrica e referencial adoptado

- (2) Forças concentradas nas extremidades, Q_0 e Q_L , actuando no plano de maior inércia (x, z) , inicialmente às cotas z_{Q0} e z_{QL} .
- (3) Força axial P de compressão perfeitamente centrada (considera-se $P > 0$ em compressão, convenção usual em trabalhos de estabilidade estrutural).
- (4) Momentos concentrados nas extremidades esquerda e direita, designados por M_{y0} e M_{yL} , respectivamente. Para evitar algumas questões delicadas relacionadas com a definição de momentos conservativos (Simitse e Hodges, 2006), apenas se considera a acção destes momentos quando a rotação de torção da secção em que estão aplicados está impedida.

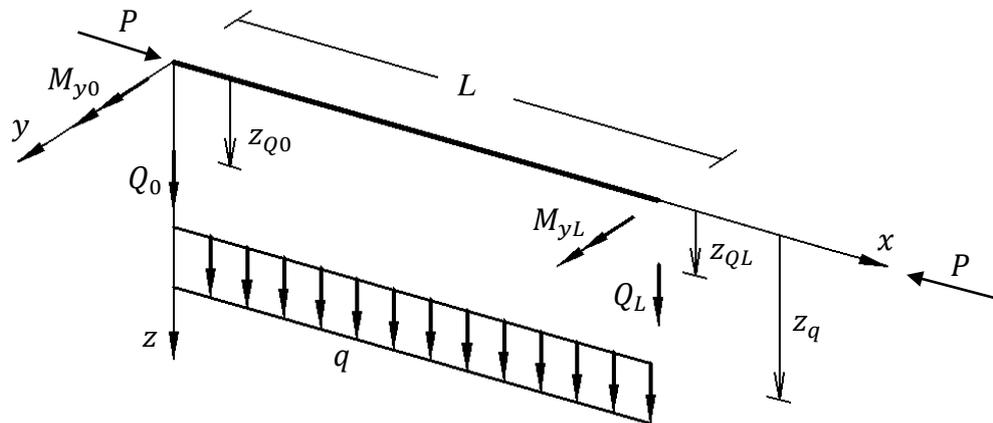


Figura 3.2 – Sistema de forças exteriores (forças aplicadas e/ou reacções), para condições de apoio arbitrárias

Com excepção da força axial P , que se considera fixa, todas as forças são proporcionais a um único parâmetro de carga λ . Pode portanto escrever-se, por exemplo, $q = q_{ref} \lambda$, onde q_{ref} é um valor de referência não negativo, e de igual forma para as restantes forças. Assim, ao longo do percurso de equilíbrio fundamental, o campo de momentos flectores primários é dado por

$$M_y = - \left(M_{0.ref} + Q_{0.ref} x + q_{ref} \frac{x^2}{2} \right) \lambda = M_{y.ref} \lambda, \quad (25)$$

em que $M_{y.ref} = - \left(M_{0.ref} + Q_{0.ref} x + q_{ref} \frac{x^2}{2} \right)$ representa a distribuição de momentos flectores primários associada aos valores de referência das forças exteriores.

Condições de apoio

É conveniente distinguir entre (1) condições de apoio para a flexão no plano principal de maior inércia (daqui em diante designadas por “condições de apoio no plano”) e (2) condições de apoio para a flexão no plano principal de menor inércia e para a torção, incluindo empenamento (designadas por “condições de apoio fora do plano”).

As condições de apoio no plano intervêm na análise da trajectória de equilíbrio fundamental, mais concretamente na determinação dos deslocamentos no plano principal de maior inércia e do campo de momentos M_y , primários e secundários, correspondente. Consideram-se os tipos de apoio correntes: articulações fixas e móveis, encastramentos fixos e móveis. No sistema genérico de forças exteriores representado na figura 3.2, estas condições de apoio determinam quais das forças de extremidade são acções (eventualmente com valor nulo) e quais são reacções.

As condições de apoio fora do plano intervêm na análise de bifurcação e podem incluir qualquer combinação consistente (*i.e.*, que não dê origem a um mecanismo) de restrições rígidas dos seguintes deslocamentos nas secções extremas da viga:

- (1) Deslocamento segundo y do centro de gravidade.
- (2) Rotação em torno do eixo x .
- (3) Rotação em torno do eixo z .
- (4) Empenamento.

Objectivos da análise

Como se referiu na Introdução, colunas-viga como as atrás descritas – solicitadas à flexão (composta com compressão) no plano principal de maior inércia e com reduzida rigidez torsional – são susceptíveis de encurvar por flexão-torção quando não dotadas de um contraventamento adequado.

Pretende-se desenvolver ferramentas de análise para identificar os pontos de bifurcação por flexão-torção, isto é, para determinar os valores de bifurcação do parâmetro de carga λ e, se desejado, também a forma dos modos de instabilidade que lhes estão associados. Pretende-se ainda que as ferramentas desenvolvidas permitam a possibilidade de considerar ou não os efeitos dos deslocamentos de pré-encurvadura, nomeadamente (1) a amplificação dos deslocamentos e momentos flectores primários por acção da força de compressão e (2) a influência da curvatura na resistência à encurvadura.

4. MODELO MATEMÁTICO UNIDIMENSIONAL ADOPTADO

De acordo com a definição dada por Antman (2005), um modelo unidimensional pretende caracterizar os aspectos relevantes (para uma determinada aplicação) do comportamento mecânico de uma classe de barras por intermédio de um número finito de equações com uma única variável independente espacial. Desejavelmente, as variáveis dependentes terão uma interpretação física relativamente simples.

Para a descrição do comportamento geometricamente não linear de barras prismáticas com secção aberta de parede fina, adopta-se nesta dissertação o modelo unidimensional desenvolvido por Attard (1986). Trata-se, no essencial, de um modelo de casca (bidimensional), ao qual são impostos os seguintes constrangimentos internos com o objectivo de efectuar a redução dimensional:

- (5) As secções transversais não se deformam no seu plano.
- (6) Na superfície média da barra, as distorções $\gamma_{,x3}$ (que traduzem a variação de ângulo, inicialmente recto, entre as geratrizes da superfície média e as linhas médias das secções transversais) são desprezáveis.
- (7) As fibras inicialmente normais à superfície média da barra permanecem rectas e normais àquela superfície após a deformação, sem alteração de comprimento.

Os dois primeiros constrangimentos internos correspondem às hipóteses clássicas de Wagner (1929) e Vlasov (1961). Em particular, o constrangimento (1) permite considerar cada secção transversal como um disco rígido para efeitos da descrição do movimento no seu plano. Em contrapartida, não permite a consideração de fenómenos de instabilidade local e/ou distorcional, os quais se encontram fora do âmbito da dissertação.

O constrangimento (3) é conhecido como hipótese de Kirchhoff-Love (Love, 1944). Permite tomar em consideração o empenamento dito secundário, isto é, o empenamento na espessura da parede, relativamente à linha média da secção (Gjelsvik, 1981). O efeito do empenamento secundário assume uma particular relevância no caso de secções que não exibem empenamento primário (ou seja, empenamento da linha média), como por exemplo secções retangulares finas,

cantoneiras, secções em T e cruciformes (Attard e Lawther, 1989). Para secções em I, no entanto, não é particularmente importante.

O modelo matemático de Attard não é geometricamente exacto, isto é, não é válido para deslocamentos e rotações arbitrariamente grandes nem exactamente invariante sob deslocamentos de corpo rígido. É portanto fundamental referir que este modelo está limitado a (1) pequenos deslocamentos axiais (isto é, a derivada do deslocamento axial – grandeza adimensional – é considerada muito pequena em comparação com a unidade) e (2) rotações de flexão moderadas. Já as rotações de torção podem ser grandes. Ghobarah e Tso (1971) justificam esta disparidade no tratamento cinemático da flexão e da torção com a baixa rigidez de torção, em face da rigidez de flexão, que as barras com secção aberta de parede fina geralmente apresentam.

Finalmente, refira-se que, no desenvolvimento do seu modelo matemático, Attard adopta uma abordagem variacional, baseada no princípio da estacionaridade da energia potencial total. Como refere Fung (1965), uma tal abordagem apresenta as seguintes vantagens:

- (1) Considera o sistema mecânico na sua globalidade, e não as partes individuais que o compõem.
- (2) Permite obter, de uma forma consistente, as equações diferenciais e as condições de fronteira que regem o problema.
- (3) Inclui automaticamente os efeitos dos constrangimentos, sem que seja necessário conhecer as reacções correspondentes.
- (4) O método directo do cálculo de variações é uma ferramenta poderosa para obter soluções numéricas, nomeadamente através do método dos elementos finitos.

O processo de análise desenvolve-se em duas fases sucessivas. Numa primeira fase, determina-se a trajectória de equilíbrio fundamental, a qual envolve apenas flexão no plano principal de maior inércia, composta com compressão. Seguidamente, identificam-se sobre esta os pontos de bifurcação por flexão-torção.

4.1 Trajectória de equilíbrio fundamental

Num estado de equilíbrio fundamental, a coluna-viga está submetida apenas a compressão e a flexão no plano de maior inércia, isto é, o deslocamento segundo y e a rotação de torção são identicamente nulos ($v = 0$ e $\phi = 0$).

Considere-se, em primeiro lugar, que se pretende ter em conta a amplificação dos momentos e deslocamentos primários por efeito da força axial de compressão. Quando o nível de compressão P é conhecido *a priori*, como acontece em estruturas isostáticas, a determinação do deslocamento segundo z , designado por w , pode ser feita integrando a equação diferencial (Timoshenko e Gere, 1961)

$$EI_y w^{(4)} + Pw'' = q, \quad (26)$$

em que EI_y designa a rigidez de flexão de eixo forte e q é a força transversal (segundo z) aplicada. Quando P é fixo, esta equação é linear. Para $P > 0$ (compressão) a solução geral desta equação tem a forma:

$$w(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + C_3 x + C_4 + w_p(x), \quad (27)$$

em que $k = \sqrt{\frac{P}{EI_y}}$ e w_p é uma solução particular. As constantes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são determinadas

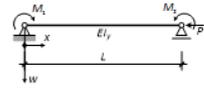
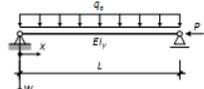
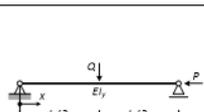
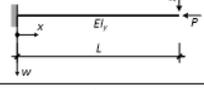
a partir de quatro condições de fronteira. Nos Quadros 4.1 e 4.2 apresentam-se, para algumas situações típicas, (1) as condições fronteira a considerar, (2) uma solução particular w_p e (3) os valores correspondentes das constantes de integração. A distribuição de momentos flectores (de segunda ordem) é dada por

$$M = -EI_y w'' = P (C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)) - EI_y w_p''(x). \quad (28)$$

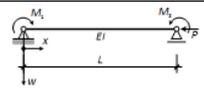
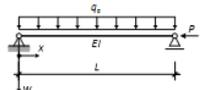
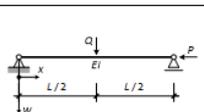
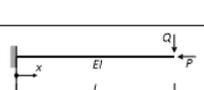
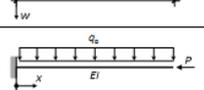
Outras situações podem ser facilmente analisadas por aplicação do princípio da sobreposição dos efeitos.

Caso se pretenda desprezar a amplificação referida no parágrafo anterior, torna-se apenas necessário ter em consideração o diagrama de momentos primários, cuja determinação é trivial (resulta de uma análise linear).

Quadro 4.1 – Análise da trajectória de equilíbrio fundamental – Condições de fronteira

	<u>Condições de fronteira</u>			
	$w(0)=0$	$-EI_y w'(0)=M_1$	$w(L)=0$	$-EI_y w'(L)=M_2$
	$w(0)=0$	$w'(0)=0$	$w(L)=0$	$w''(L)=0$
	$w(0)=0$	$w'(0)=0$	$w'(\frac{1}{2}L)=0$	$-EI_y w''(\frac{1}{2}L)=\frac{1}{2}Q$
	$w'(\frac{1}{2}L)=0$	$-EI_y w''(\frac{1}{2}L)=-\frac{1}{2}Q$	$w(L)=0$	$w''(L)=0$
	$w(0)=0$	$w'(0)=0$	$w''(L)=0$	$-EI_y w''(L)=Q+P w'(L)$
	$w(0)=0$	$w'(0)=0$	$w''(L)=0$	$-EI_y w''(L)=P w'(L)$

Quadro 4.2 – Análise da trajectória de equilíbrio fundamental – Solução particular e constantes de integração

	w_p	C_1	C_2	C_3	C_4
	0	$\frac{M_1}{P}$	$\frac{M_2 - M_1 \cos(kL)}{P \sin(kL)}$	$\frac{M_1 - M_2}{PL}$	$-\frac{M_1}{P}$
	$\frac{q_z}{2P} x^2$	$\frac{q_z}{Pk^2}$	$\frac{q_z}{Pk^2} \tan\left(\frac{kL}{2}\right)$	$-\frac{q_z L}{2P}$	$-\frac{q_z}{Pk^2}$
	0	0 if $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$	$\frac{Q}{2Pk} \sec\left(\frac{kL}{2}\right)$ if $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$	$-\frac{Q}{2P}$ if $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$	0 if $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$
		$\frac{Q}{Pk} \sin\left(\frac{kL}{2}\right)$ if $\frac{L}{2} < x \leq L$	$-\frac{Q}{2Pk} \sec\left(\frac{kL}{2}\right) \cos(kL)$ if $\frac{L}{2} < x \leq L$	$\frac{Q}{2P}$ if $\frac{L}{2} < x \leq L$	$-\frac{QL}{2P}$ if $\frac{L}{2} < x \leq L$
	0	$-\frac{Q}{Pk} \tan(kL)$	$\frac{Q}{Pk}$	$-\frac{Q}{P}$	$\frac{Q}{Pk} \tan(kL)$
	$\frac{q_z}{2P} x^2$	$\frac{q_z}{Pk^2} \sec(kL)(1 - kL \sin(kL))$	$\frac{q_z L}{Pk}$	$-\frac{q_z L}{P}$	$\frac{q_z}{Pk^2} \sec(kL)(kL \sin(kL) - 1)$

4.2 Pontos de bifurcação

Depois de definida a trajectória de equilíbrio fundamental, identificam-se sobre esta os pontos de bifurcação por flexão-torção. Para tal, utiliza-se o critério de Trefftz (Reis e Camotim, 2001). De acordo com este critério, os pontos de bifurcação correspondem à estacionarização da segunda variação da energia potencial total em torno de um estado de equilíbrio fundamental.

Resulta do modelo de Attard (1986) que a segunda variação da energia potencial total em torno de um estado de equilíbrio fundamental é, no caso de barras duplamente simétricas, dada por

$$\begin{aligned}
 V_2 = & \frac{1}{2} \int_0^L [EI_z (v'' + w''\phi)^2 + GJ(\phi')^2 + EI_w (\phi'')^2] dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L M_y (2v''\phi + w''\phi^2) dx - \\
 & - \frac{P}{2} \int_0^L [(v')^2 + r_0^2 (\phi')^2] dx + \\
 & + \frac{z_q}{2} \int_0^L q \phi^2 dx + \frac{z_{Q0}}{2} Q_0 \phi(0)^2 + \frac{z_{QL}}{2} Q_L \phi(L)^2, \quad (29)
 \end{aligned}$$

em que r_0 é o raio de giração polar da secção transversal em relação ao seu centro de gravidade, v e ϕ representam as duas componentes do modo de instabilidade, w'' é a curvatura no estado de equilíbrio fundamental e M_y é a distribuição de momentos flectores de segunda ordem definida em (28). Note-se que, nesta fase, as funções w e M_y já são conhecidas. Observe-se ainda que $v''\phi + \frac{1}{2} w''\phi^2$ representa a variação de segunda ordem da curvatura no plano (x, z) . De forma análoga, $v'' + w''\phi$ representa a variação de primeira ordem da curvatura no plano (x, y) . Finalmente, as três últimas parcelas da equação (29) traduzem a influência da localização do ponto de aplicação das forças transversais, em relação ao centro de corte C da secção onde actuam (coincidente com o centro de gravidade G , em virtude da dupla simetria). Conforme se intui facilmente (figura 4.1), uma força aplicada “abaixo” do centro de corte ($z_q > 0$ ou $z_Q > 0$) produz, na configuração de equilíbrio após encurvadura (configuração adjacente), um momento torsor adicional que “contraria a deformação” (*i.e.*, tem um efeito *estabilizante*) e faz aumentar o valor crítico do parâmetro de carga. Se, pelo contrário, o ponto de aplicação da força estiver localizado “acima” do centro de corte ($z_q < 0$ ou $z_Q < 0$), o efeito é *instabilizante* e, por consequência, faz diminuir o valor crítico do parâmetro de carga.

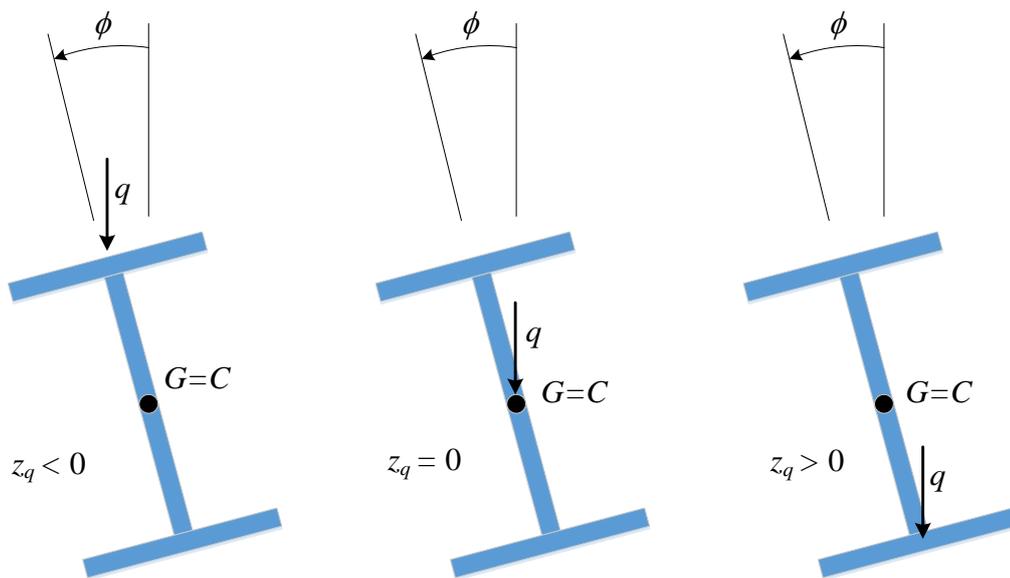


Figura 4.1 – Influência da posição do ponto de aplicação das forças transversais

Quando os efeitos da curvatura de flexão no estado de equilíbrio fundamental são desprezados – isto é, quando se admite que a coluna-viga permanece recta até atingir o estado crítico –, a segunda variação da energia potencial total reduz-se a

$$\begin{aligned}
 V_2 = & \frac{1}{2} \int_0^L [EI_z (v'')^2 + GJ (\phi')^2 + EI_w (\phi'')^2] dx + \\
 & + \int_0^L M_y v'' \phi dx - \frac{P}{2} \int_0^L [(v')^2 + r_0^2 (\phi')^2] dx + \\
 & + \frac{z_q}{2} \int_0^L q \phi^2 dx + \frac{z_{Q0}}{2} Q_0 \phi(0)^2 + \frac{z_{QL}}{2} Q_L \phi(L)^2, \quad (30)
 \end{aligned}$$

em que M_y representa agora a distribuição de momentos flectores primários (isto é, resultantes de uma análise linear), sem considerar a sua amplificação pela força axial de compressão.

5 DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo, desenvolvem-se duas formulações de elementos finitos para a análise de bifurcação de colunas-viga. Na mais simples, o efeito dos deslocamentos de pré-encurvadura é desprezado. A formulação mais complexa permite ter em consideração aquele efeito. Nesta última, utilizam-se as soluções exactas obtidas no capítulo anterior (secção 4.1) para a trajectória de equilíbrio fundamental.

As secções 5.1, relativa à aproximação do campo de deslocamentos, e a secção 5.4, que descreve o procedimento de agregação das matrizes de rigidez da malha de elementos finitos a partir das matrizes de rigidez elementares, são comuns às duas formulações.

5.1 Aproximação do campo de deslocamentos

Considere-se a partição do intervalo $[0, L]$, domínio do problema, em n subintervalos da forma

$$\bar{\Omega}^{(e)} = [x_1^{(e)}, x_2^{(e)}] = [(e-1)\Delta, e\Delta], \quad (31)$$

com $\Delta = L/n$ e $e = 1, \dots, n$ (figura 5.1). Em cada um deles, define-se a coordenada local $\eta = x - x_1^{(e)} = x - (e-1)\Delta$, que varia entre 0 e Δ .

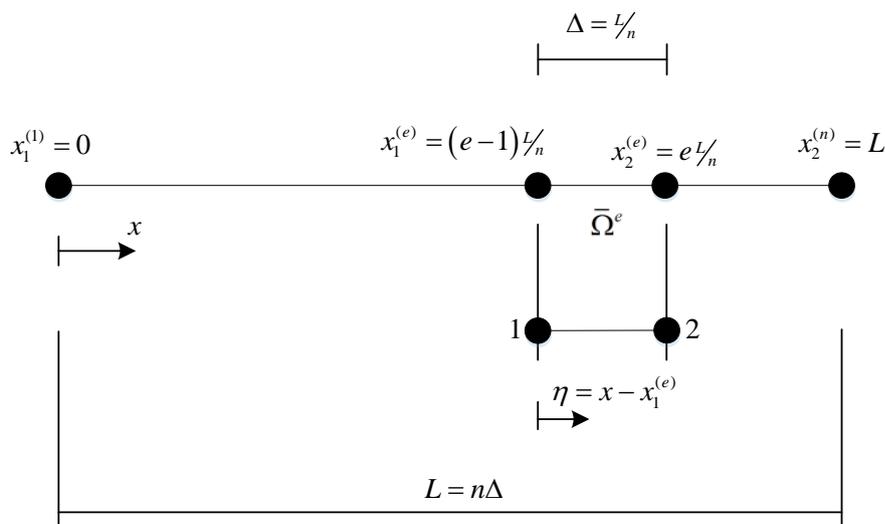


Figura 5.1 – Partição do domínio e definição da coordenada local

Uma vez que nos integrais da energia potencial (equações (29) e (30)) figuram segundas derivadas de v e ϕ , variáveis dependentes do problema, a aproximação destas funções deverá ser contínua com primeira derivada contínua (continuidade C^1). Assim, em cada subintervalo $\bar{\Omega}^{(e)}$, adoptam-se os polinómios cúbicos

$$v_h^{(e)}(\eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 \quad (32)$$

$$\phi_h^{(e)}(\eta) = b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + b_3\eta^3, \quad (33)$$

onde os coeficientes a_0, \dots, a_3 e b_0, \dots, b_3 dependem unicamente dos valores que $v_h^{(e)}$, $\phi_h^{(e)}$ e a primeira derivada de cada uma destas funções assumem nas extremidades do subintervalo ($\eta = 0$ e $\eta = \Delta$). Pode assim escrever-se (32) e (33) na forma

$$v_h^{(e)}(\eta) = N_1(\eta)v_h^{(e)}(0) + N_2(\eta)v_h^{\prime(e)}(0) + N_3(\eta)v_h^{(e)}(\Delta) + N_4(\eta)v_h^{\prime(e)}(\Delta) \quad (34)$$

$$\phi_h^{(e)}(\eta) = N_1(\eta)\phi_h^{(e)}(0) + N_2(\eta)\phi_h^{\prime(e)}(0) + N_3(\eta)\phi_h^{(e)}(\Delta) + N_4(\eta)\phi_h^{\prime(e)}(\Delta), \quad (35)$$

em que N_1 , N_2 , N_3 e N_4 são as funções de forma cúbicas de Hermite (*e.g.*, Reddy, 1993)

$$N_1(\eta) = 1 - 3\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^2 + 2\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^3 \quad (36)$$

$$N_2(\eta) = \eta\left(1 - \frac{\eta}{\Delta}\right)^2 \quad (37)$$

$$N_3(\eta) = 3\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^2 - 2\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^3 \quad (38)$$

$$N_4(\eta) = \eta\left[\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^2 - \frac{\eta}{\Delta}\right], \quad (39)$$

representadas na figura 5.2.

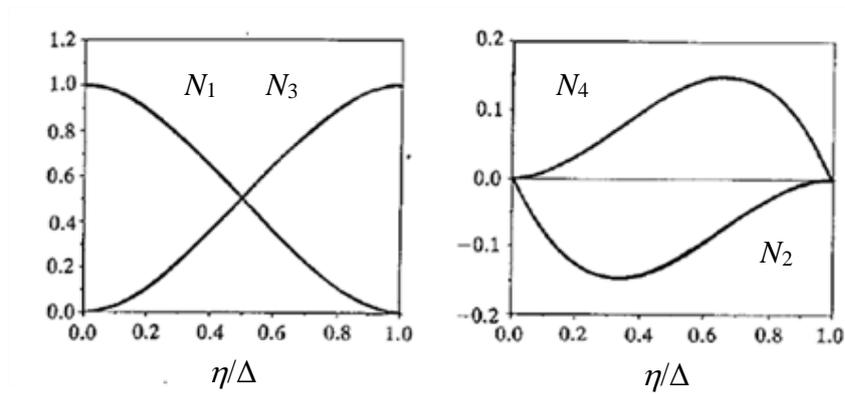


Figura 5.2 – Funções de forma cúbicas de Hermite (adaptado de Reddy, 1993)

Agrupando as funções de forma na matriz

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (40)$$

e definindo o vector de deslocamentos nodais (figura 5.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{(e)} &= [d_1^{(e)} \quad d_2^{(e)} \quad d_3^{(e)} \quad d_4^{(e)} \quad d_5^{(e)} \quad d_6^{(e)} \quad d_7^{(e)} \quad d_8^{(e)}]^T = \\ &= [v_h^{(e)}(0) \quad v_h^{\prime(e)}(0) \quad \phi_h^{(e)}(0) \quad \phi_h^{\prime(e)}(0) \quad v_h^{(e)}(\Delta) \quad v_h^{\prime(e)}(\Delta) \quad \phi_h^{(e)}(\Delta) \quad \phi_h^{\prime(e)}(\Delta)]^T, \end{aligned} \quad (41)$$

as equações (34) e (35) podem ainda ser colocadas na forma matricial

$$\begin{bmatrix} v_h^{(e)} \\ \phi_h^{(e)} \end{bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}^{(e)}. \quad (42)$$

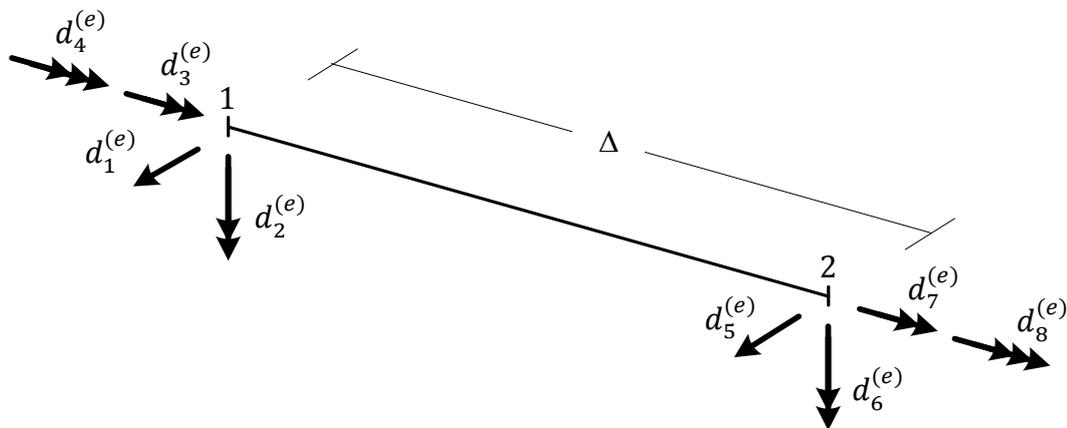


Figura 5.3 – Deslocamentos nodais elementares (a amplitude do empenamento, dada pela derivada da rotação de torção, está representada por uma seta tripla)

5.2 Matrizes de rigidez elementares – Caso em que se despreza o efeito dos deslocamentos de pré-encurvadura

Considerando a aproximação das variáveis dependentes que acaba de ser definida, a segunda variação da energia potencial total (30) vem aproximada por

$$\begin{aligned}
 V_{2,h} = \sum_{e=1}^n V_{2,h}^{(e)} = & \frac{1}{2} \sum_{e=1}^n \int_0^\Delta (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}^{(e)})^T \cdot \mathbf{E}_1 \cdot (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}^{(e)}) d\eta + \\
 & - \frac{P}{2} \sum_{e=1}^n \int_0^\Delta (\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)})^T \cdot \mathbf{E}_2^{(e)} \cdot (\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)}) d\eta \\
 & + \frac{\lambda}{2} \sum_{e=1}^n \int_0^\Delta (\mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)})^T \cdot \mathbf{E}_3^{(e)} \cdot (\mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)}) d\eta , \quad (43)
 \end{aligned}$$

em que

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{d\eta^2} & 0 \\ 0 & \frac{d}{d\eta} \\ 0 & \frac{d^2}{d\eta^2} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} \frac{d}{d\eta} & 0 \\ 0 & \frac{d}{d\eta} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{d\eta^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

são matrizes de operadores diferenciais que estabelecem a relação entre deformações generalizadas e deslocamentos,

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} EI_z & 0 & 0 \\ 0 & GJ & 0 \\ 0 & 0 & EI_w \end{bmatrix} \quad (47)$$

é uma matriz constitutiva e

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_0^2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{E}_3^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & M_{y.ref}(x(\eta)) \\ M_{y.ref}(x(\eta)) & z_q q \end{bmatrix}, \quad (49)$$

com $x(\eta) = \eta + x_1^e = \eta + (e-1)\Delta$.

Uma vez que as entradas dos vectores $\mathbf{d}^{(e)}$ são constantes (*i.e.*, não dependem de η), podem ser passados para fora dos integrais que figuram na expressão (43). Assim, a contribuição $V_{2,h}^{(e)}$ de cada elemento finito para $V_{2,h}$ pode ser escrita, de uma forma muito compacta, como

$$V_{2,h}^{(e)} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^{(e)T} \cdot (\mathbf{K}_1^{(e)} - P\mathbf{K}_2^{(e)} + \lambda\mathbf{K}_3^{(e)}) \cdot \mathbf{d}^{(e)}, \quad (50)$$

sendo as matrizes de rigidez elementares dadas por

$$\mathbf{K}_1^{(e)} = \int_0^\Delta (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}^{(e)})^T \cdot \mathbf{E}_1 \cdot (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}^{(e)}) d\eta \quad (51)$$

$$\mathbf{K}_2^{(e)} = \int_0^\Delta (\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)})^T \cdot \mathbf{E}_2^{(e)} \cdot (\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)}) d\eta \quad (52)$$

$$\mathbf{K}_3^{(e)} = \int_0^\Delta (\mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)})^T \cdot \mathbf{E}_3^{(e)} \cdot (\mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)}) d\eta. \quad (53)$$

5.3 Matrizes de rigidez elementares – Caso em que se inclui o efeito dos deslocamentos de pré-encurvadura

Neste caso, a contribuição de cada elemento para a aproximação segunda variação da energia potencial total (29) é dada por

$$V_{2,h}^{(e)} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^{(e)T} \cdot \left(\mathbf{K}_1^{(e)} - P\mathbf{K}_2^{(e)} + \lambda \left(\mathbf{K}_3^{(e)} + P\mathbf{K}_{3P}^{(e)} + \mathbf{K}_4^{(e)} \right) + \lambda^2 \left(\mathbf{K}_5^{(e)} + \mathbf{K}_6^{(e)} + P\mathbf{K}_{6P}^{(e)} \right) \right) \cdot \mathbf{d}^{(e)}, \quad (54)$$

em que $\mathbf{K}_1^{(e)}$, $\mathbf{K}_2^{(e)}$ e $\mathbf{K}_3^{(e)}$ são as matrizes de rigidez elementares definidas na secção anterior, $\mathbf{K}_4^{(e)}$, $\mathbf{K}_5^{(e)}$ e $\mathbf{K}_6^{(e)}$ são matrizes de rigidez elementares adicionais associadas à encurvadura de pré encurvadura e $P\mathbf{K}_{3P}^{(e)}$ e $P\mathbf{K}_{6P}^{(e)}$ são também matrizes de rigidez elementares adicionais que complementam respetivamente $\mathbf{K}_3^{(e)}$ e $\mathbf{K}_6^{(e)}$ na medida em que refletem os momentos fletores de

pré-encurvadura associados à combinação do esforço axial com as flechas de primeira ordem de referência, $Pw_{ref}(x(\eta))$.

$$\mathbf{K}_{3P}^{(e)} = \int_0^\Delta (\mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)})^T \cdot \mathbf{E}_{3P}^{(e)} \cdot (\mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)}) d\eta, \quad (55)$$

$$\mathbf{K}_4^{(e)} = \int_0^\Delta (\mathbf{D}_4 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)})^T \cdot \mathbf{E}_4^{(e)} \cdot (\mathbf{D}_4 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)}) d\eta, \quad (56)$$

$$\mathbf{K}_5^{(e)} = \int_0^\Delta (\mathbf{D}_5 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)})^T \cdot \mathbf{E}_5^{(e)} \cdot (\mathbf{D}_5 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)}) d\eta, \quad (57)$$

$$\mathbf{K}_6^{(e)} = \int_0^\Delta (\mathbf{D}_6 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)})^T \cdot \mathbf{E}_6^{(e)} \cdot (\mathbf{D}_6 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)}) d\eta, \quad (58)$$

$$\mathbf{K}_{6P}^{(e)} = \int_0^\Delta (\mathbf{D}_6 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)})^T \cdot \mathbf{E}_{6P}^{(e)} \cdot (\mathbf{D}_6 \cdot \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{d}^{(e)}) d\eta, \quad (59)$$

com

$$\mathbf{E}_{3P}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & w_{ref}(x(\eta)) \\ w_{ref}(x(\eta)) & 0 \end{bmatrix}, \quad (60)$$

$$\mathbf{E}_4^{(e)} = EI_z \begin{bmatrix} 0 & w_{ref}''(x(\eta)) \\ w_{ref}''(x(\eta)) & 0 \end{bmatrix}, \quad (61)$$

$$\mathbf{E}_5^{(e)} = EI_z [w_{ref}''(x(\eta))], \quad (62)$$

$$\mathbf{E}_6^{(e)} = [M_{y.ref}(x(\eta)) \cdot w_{ref}''(x(\eta))], \quad (63)$$

$$\mathbf{E}_{6P}^{(e)} = [w_{ref}(x(\eta)) \cdot w_{ref}''(x(\eta))], \quad (64)$$

5.4 Agregação das matrizes de rigidez da coluna-viga

O passo seguinte no procedimento de análise consiste na agregação das matrizes de rigidez da coluna-viga (mais correctamente, da malha de elementos finitos em que foi discretizada a coluna-viga) a partir das contribuições elementares (51)-(53). Esta agregação é efectuada da forma habitual, como se esquematiza na figura 5.4. Os blocos representados a tracejado nesta figura tem dimensão 8×8 e representam as matrizes de rigidez dos sucessivos elementos. Obtêm-se desta forma as várias matrizes de rigidez da malha de elementos finitos, designadas por \mathbf{K}_i ($i=1,2,3$ quando se despreza o efeito dos deslocamentos de pré-encurvadura e $i=1,\dots,5$ quando aquele efeito é incluído na análise), todas elas quadradas e de dimensão

$4(n+1)$ (recorde-se que n designa o número de elementos finitas constituintes da malha e, portanto, $n+1$ é o número total de nós).

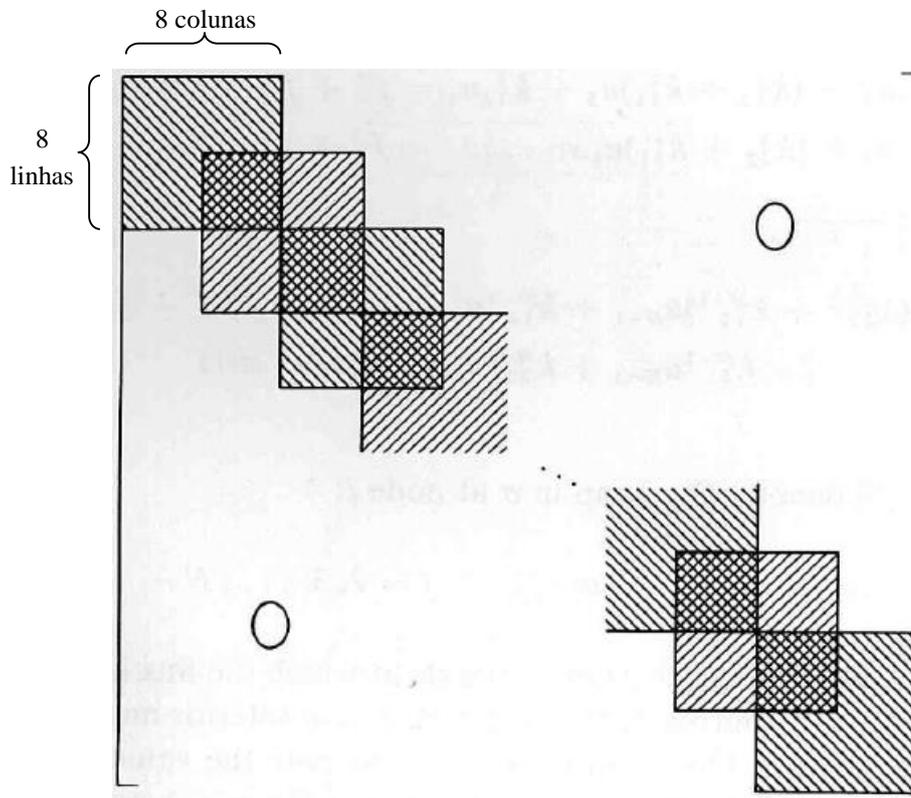


Figura 5.4 – Representação esquemática da agregação das matrizes de rigidez da malha de elementos finitos a partir das matrizes de rigidez elementares (adaptado de Becker *et al.*, 1981)

As condições de fronteira cinemáticas (todas necessariamente homogêneas) são depois incorporadas através da eliminação das linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade cujo deslocamento (generalizado) está impedido.

5.5 Problema algébrico de valores e vectores próprios – Caso em que se despreza o efeito dos deslocamentos de pré-encurvadura

A estacionarização de $V_{2,h}$ conduz neste caso a um problema linear (em λ) de valores e vectores próprios, com a forma

$$(\mathbf{K}_1 - P\mathbf{K}_2 + \lambda \mathbf{K}_3) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0} . \tag{65}$$

(Uma vez mais, é importante recordar que, nesta dissertação, a força de compressão P é sempre fixada *a priori*). Este problema linear é resolvido no MatLab com o comando “eig”.

Ao menor valor próprio positivo, de fundamental importância do ponto de vista estrutural, dá-se o nome de parâmetro de carga crítico; como é obtido desprezando o efeito dos deslocamentos de pré-encurvadura, acrescenta-se o qualificativo “clássico” e representa-se, assim, pelo símbolo $\lambda_{cr}^{clássico}$.

5.6 Problema algébrico de valores e vectores próprios – Caso em que se inclui o efeito dos deslocamentos de pré-encurvadura

A discretização por elementos finitos conduz agora a um problema quadrático (em λ) de valores e vectores próprios, com a forma

$$\left[\mathbf{K}_1 - P\mathbf{K}_2 + \lambda(\mathbf{K}_3 + P\mathbf{K}_{3P} + \mathbf{K}_4) + \lambda^2(\mathbf{K}_5 + \mathbf{K}_6 + P\mathbf{K}_{6P}) \right] \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0} . \quad (66)$$

Este problema quadrático é resolvido no MatLab com o comando “polyeig”.

Ao menor valor próprio positivo, dá-se novamente o nome de parâmetro de carga crítico, agora com qualificativo “não linear”, de forma a indicar que o efeito dos deslocamentos de pré-encurvadura foi tido em conta. Representa-se então pelo símbolo $\lambda_{cr}^{não\ linear}$.

6 EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO

6.1 Generalidades

Neste ponto, e para o elemento finito referido anteriormente, através da resolução do problema de valores próprios, obtém-se $\lambda = Q_{cr0}^{classic}$, que é o parâmetro de carga pelo qual as cargas aplicadas na estrutura devem ser multiplicadas para obter a carga elástica crítica, ou seja, aquela que provoca a encurvadura por flexão-torção.

Os valores apresentados variam entre $P = 0$ e $P = P_z = \pi^2 EI_z / (2l)^2$, estes valores extremos correspondem a uma viga e uma coluna, respectivamente. A carga crítica da coluna de Euler P_z e a carga crítica de encurvadura lateral da viga $Q_{cr0}^{classic}$ foram utilizadas na normalização dos eixos horizontais e verticais, respectivamente.

6.2 Coluna-viga Simplesmente Apoiada

No caso da coluna-viga simplesmente apoiada com uma secção aberta de parede fina duplamente simétrica com as seguintes características geométricas e materiais: $A = 58.84\text{cm}^2$, $I_y = 4566\text{cm}^4$, $I_z = 1540\text{cm}^4$, $I_w = 142.2 \times 10^3\text{cm}^6$, $J = 22.23\text{cm}^4$, $L_{tot} = 12.00\text{m}$, $E = 206.85\text{GPa}$ e $G = 82.74\text{GPa}$, correspondentes a um perfil 8UC31 (Pi e Trahair, 1992b) e sujeita a dois momentos concentrados de igual valor ($M_y = 1$) na zona dos apoios, veja-se a figura 6.1, obtêm-se os valores apresentados no Quadro 6.1

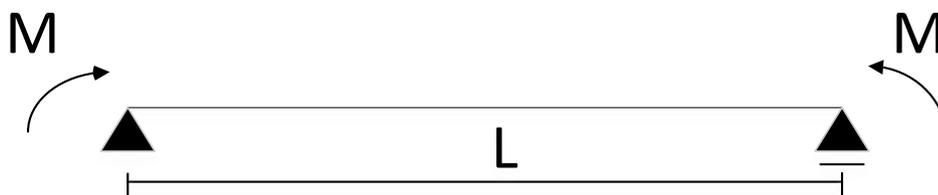


Figura 6.1 – Coluna-viga simplesmente apoiada sujeita a M na zona dos apoios

Quadro 6.1 - Resultados para $M_{cr}^{classic}$ (KNm) para um perfil 8UC31

	$M_{cr,classic}$			$M_{cr,classic}$	
	P/P _z			P/P _z	
n _{elem} =1	0	74,38	n _{elem} =2	0	67,03
	0,2	67,25		0,2	54,34
	0,4	59,59		0,4	50,88
	0,6	51,18		0,6	41,18
	0,8	41,57		0,8	29,04
	1	0,000		1	0,000
n _{elem} =4	0	66,77	n _{elem} =8	0	66,75
	0,2	59,06		0,2	59,04
	0,4	50,56		0,4	50,54
	0,6	40,82		0,6	40,78
	0,8	28,53		0,8	28,49
	1	0,000		1	0,000

Na figura 6.2, através da adimensionalização, pode-se observar que para valores de P próximos de P_z o efeito benéfico da curvatura no plano e a não consideração do efeito da amplificação dos momentos provocados pelos deslocamentos sofridos antes da encurvadura anulam-se praticamente um ao outro.

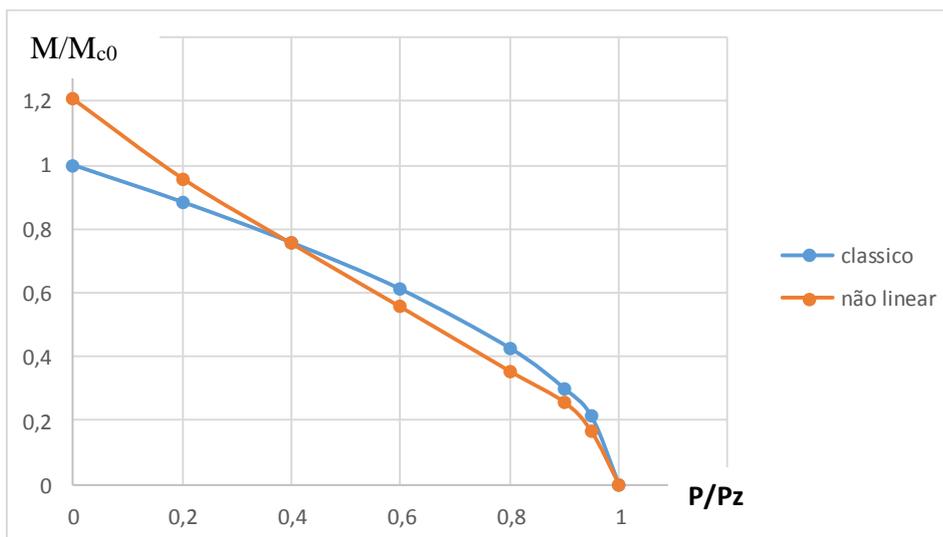


Figura 6.2 – Relação $M_{cr}^{classic} / M_{cr0}^{classic}$ para $n_{elem} = 8$ considerando a pré-encurvadura e sem o efeito desta.

No caso em que se considera a pré-encurvadura tem-se uma boa concordância quando comparada com os valores obtidos por Pi e Trahair, 1992b.

Considere-se agora um perfil mais actual com as seguintes características: $A = 28.50\text{cm}^2$, $I_y = 1943\text{cm}^4$, $I_z = 142.0\text{cm}^4$, $I_w = 13.00 \times 10^3\text{cm}^6$, $J = 6.980\text{cm}^4$, $L_{tot} = 12.00\text{m}$, $E = 210.0\text{GPa}$ e $G = 81.00\text{GPa}$, correspondente a um IPE200.

De igual forma ao que foi feito para a situação anterior com o outro perfil, foram obtidos os valores de momento crítico indicados no Quadro 6.2.

Quadro 6.2 - Resultados para $M_{cr}^{classic}$ (KNm) para um perfil IPE200

		P/P _z	M _{cr,classic}			P/P _z	M _{cr,classic}
n _{elem} = 1		0	12,08	n _{elem} = 2		0	10,96
		0,2	11,02			0,2	9,794
		0,4	9,852			0,4	8,473
		0,6	8,538			0,6	6,921
		0,8	6,997			0,8	4,926
		1	0,000			1	0,000
n _{elem} = 4		0	10,92	n _{elem} = 8		0	10,92
		0,2	9,751			0,2	9,747
		0,4	8,423			0,4	8,420
		0,6	6,861			0,6	6,857
		0,8	4,842			0,8	4,836
		1	0,000			1	0,000

Este caso em particular pode ser comparado com o valor de momento crítico obtido pelo “caso-padrão”, viga simplesmente apoiada sujeita a M_y e constituída por uma secção aberta de parede fina duplamente simétrica:

$$M_{cr}^E = \frac{\pi}{L} \sqrt{GI_t EI_z \left(1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t} \right)} \quad (67)$$

na qual L é o comprimento entre secções contraventadas, ou seja, no caso da viga simplesmente apoiada sem quaisquer outro tipo de travamentos corresponde ao comprimento total de 12,00m.

Por resolução da equação 73 com as propriedades materiais e geométricas do perfil IPE200 vem $M_{cr}^E = 10.92KNm$.

Isto corrobora a hipótese de que o modelo desenvolvido proporciona valores correctos.

Atendendo à precisão de valores que o modelo desenvolvido apresenta, foram testados vários casos para condições de carregamento diferentes e para coordenadas do ponto de aplicação da carga e do centro de corte, em relação ao centro de gravidade da secção. Estes últimos, podem tomar valores positivos se localizados no banzo superior e valores negativos se localizados no banzo inferior, isto para um momento flector com sentido positivo.

É de referir, que para a situação da carga situada no banzo inferior tem um efeito estabilizador, o qual é preferível ao contrário do que ocorre se a carga estiver aplicada no acima do centro de gravidade.

O primeiro caso apresentado é para uma viga simplesmente apoiada sujeita a uma carga distribuída de sentido descendente $q_0 = 1$ e a qual se considera estar aplicada no centro de gravidade da secção ($a = 0,00m$), vejam-se as figuras 6.3 e 8.4 e o Quadro 6.3.

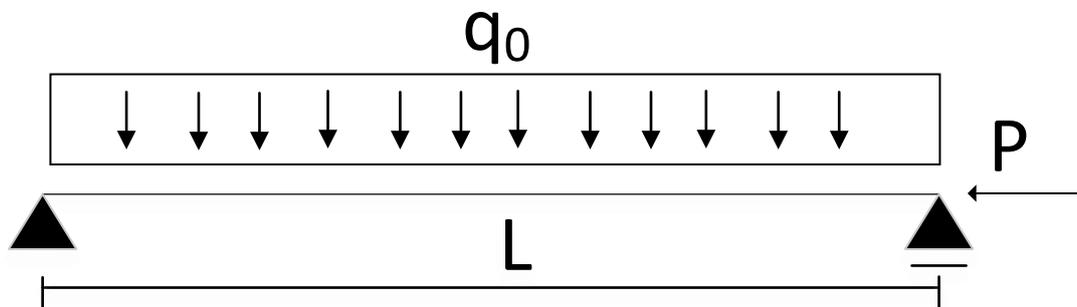


Figura 6.3 – Carregamento aplicado na viga

Quadro 6.3 - Resultados para $q_{cr}^{classic}$ (KN / m) para um perfil IPE200

n_{elem}	$q_{cr}^{classic}$		n_{elem}	$q_{cr}^{classic}$	
	P/P _z	q_{cr}		P/P _z	q_{cr}
1	0	0,839	2	0	0,686
	0,2	0,765		0,2	0,614
	0,4	0,684		0,4	0,533
	0,6	0,593		0,6	0,436
	0,8	0,486		0,8	0,311
	1	0,000		1	0,000
4	0	0,685	8	0	0,684
	0,2	0,613		0,2	0,612
	0,4	0,532		0,4	0,531
	0,6	0,434		0,6	0,434
	0,8	0,307		0,8	0,307
	1	0,000		1	0,000

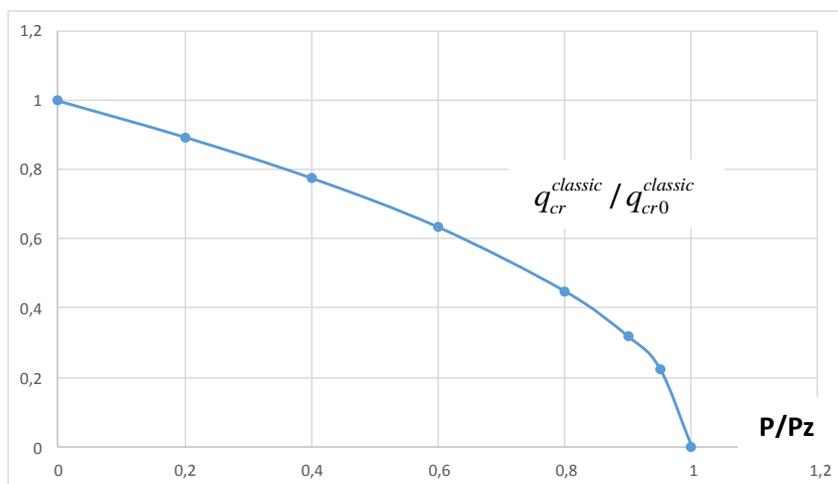


Figura 6.4 – Relação $q_{cr}^{classic} / q_{cr0}$ para $n_{elem} = 8$

O segundo caso apresentado é para uma viga simplesmente apoiada sujeita a uma carga distribuída de sentido descendente $q_0 = 1$ e mas agora considera-se estar aplicada no acima do centro de gravidade da secção ($a = h/2 = 0.200/2 - 0.1m$), veja-se a figuras 6.5 e o Quadro 6.4.

Quadro 6.4 - Resultados para $q_{cr}^{classic}$ (KN / m) para um perfil IPE200

n_{elem}	P/P_z	$q_{cr}^{classic}$	n_{elem}	P/P_z	$q_{cr}^{classic}$
		0		0,757	
1	0,2	0,697	2	0,2	0,568
	0,4	0,628		0,4	0,498
	0,6	0,551		0,6	0,413
	0,8	0,457		0,8	0,299
	1	0,000		1	0,000

n_{elem}	P/P_z	$q_{cr}^{classic}$	n_{elem}	P/P_z	$q_{cr}^{classic}$
		0		0,629	
4	0,2	0,568	8	0,2	0,567
	0,4	0,497		0,4	0,497
	0,6	0,411		0,6	0,411
	0,8	0,296		0,8	0,295
	1	0,000		1	0,000

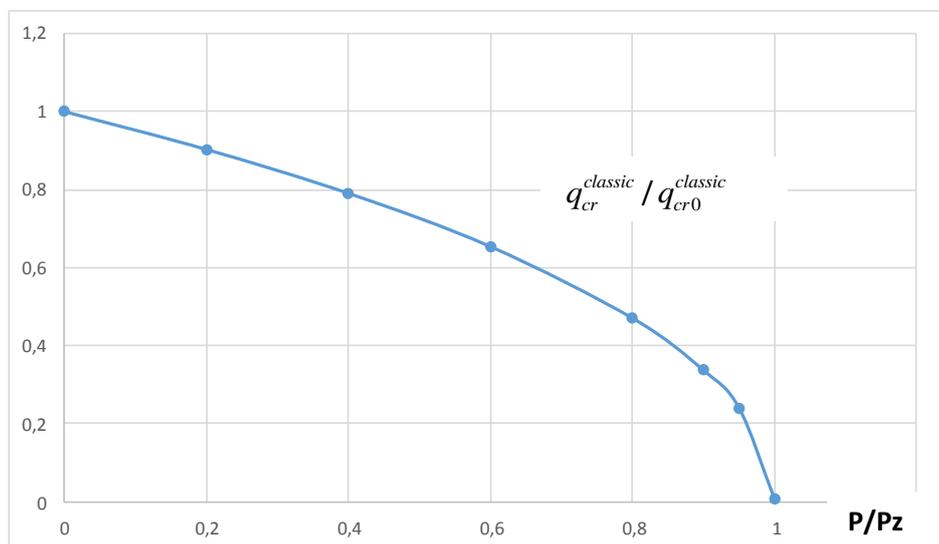


Figura 6.5 – Relação $q_{cr}^{classic} / q_{cr0}^{classic}$ para $n_{elem} = 8$

Por comparação dos resultados dos Quadros 6.3 e 6.4 pode-se ver facilmente o efeito nefasto que tem a localização da carga quando aplicada acima do centro de gravidade. O M_{cr} é inferior

àquele que se obtém para o caso da carga aplicado no centro de gravidade. Analogamente, no caso em que a carga está localizada no banzo inferior o M_{cr} que se obteria seria maior em relação às duas situações exemplificadas anteriormente.

6.3 Coluna-viga em Consola

No caso de uma coluna-viga em consola para uma secção aberta de parede fina duplamente simétrica novamente com as seguintes características geométricas e materiais: $A = 58.84\text{cm}^2$, $I_y = 4566\text{cm}^4$, $I_z = 1540\text{cm}^4$, $I_w = 142.2 \times 10^3\text{cm}^6$, $J = 22.23\text{cm}^4$, $L_{tot} = 4.20\text{m}$, $E = 206.85\text{GPa}$ e $G = 82.74\text{GPa}$, correspondentes a um perfil 8UC31 (Pi e Trahair 1992b).

É de ressaltar que os resultados apresentados não têm em conta os deslocamentos sofridos antes da encurvadura.

De seguida, no Quadro 6.5 são apresentados os resultados obtidos para o caso de uma coluna-viga em consola sujeita a uma carga axial de compressão P , que varia entre o intervalo de valores indicados anteriormente, e $M_{esq} = Q \times 4.2\text{m}$ resultante do diagrama de momentos flectores, como se pode observar nas figura 6.6 e 6.7.



Figura 6.6 – Consola sob efeito do carregamento P e Q

Qx4.2m

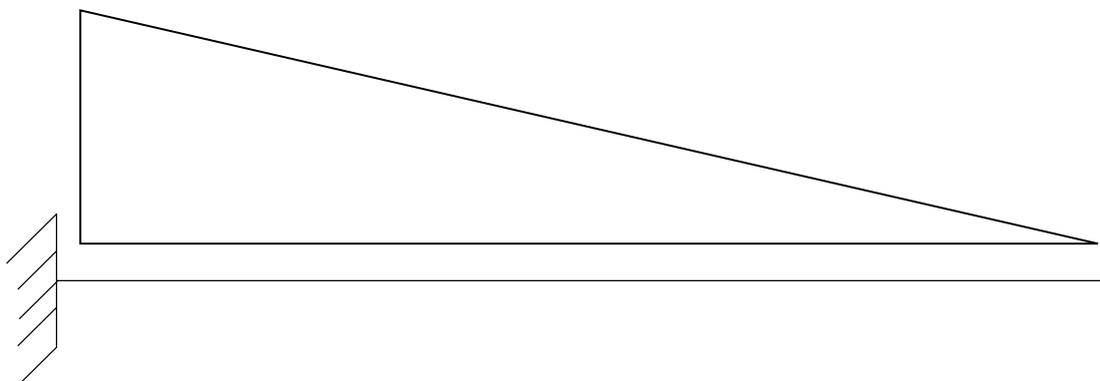


Figura 6.7 – Diagrama de Momentos Flectores na Consola

Quadro 6.5 – Resultados para $Q_{cr}^{classic}$ (KN) numa coluna-viga em consola

	$n_{elem}=1$		$n_{elem}=2$	
	P/P _z	Q _{cr,classic}	P/P _z	Q _{cr,classic}
	0	133,7	0	103,1
	0,2	122,1	0,2	94,35
	0,4	108,4	0,4	83,95
	0,6	91,26	0,6	70,81
	0,8	67,32	0,8	52,08
	1	0,000	1	0,000

	$n_{elem}=4$		$n_{elem}=8$	
	P/P _z	Q _{cr,classic}	P/P _z	Q _{cr,classic}
	0	102,0	0	101,9
	0,2	93,26	0,2	93,16
	0,4	82,85	0,4	82,76
	0,6	69,72	0,6	69,64
	0,8	51,11	0,8	51,04
	1	0,000	1	0,000

A figura 6.8 é a síntese dos resultados referidos anteriormente. Quanto mais elementos finitos forem definidos na análise mais a carga crítica se aproxima do valor realmente suportado pela consola.

Também para valores de P mais próximos da carga crítica de Euler menor é a capacidade de carga da estrutura em si, levando à instabilização da mesma e eventual colapso.

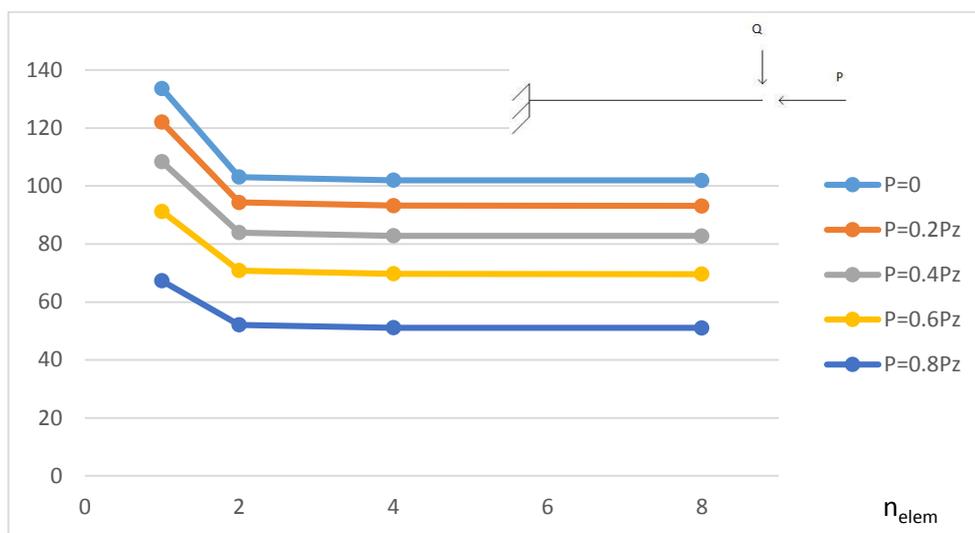


Figura 6.8 – Variação de $Q_{cr}^{classic}$ (KN) consoante o n_{elem} utilizados na análise

7 CONCLUSÃO

Nesta dissertação, procedeu-se à formulação de dois elementos finitos para a análise de bifurcação por flexão-torção, em regime elástico, de colunas-viga prismáticas com secção aberta de paredes finas duplamente simétrica. A primeira formulação, mais simples, despreza o efeito dos deslocamentos de pré-encurvadura. A segunda, consideravelmente mais complexa, permite ter em conta aquele efeito, o qual se faz sentir por duas vias: (1) a amplificação dos deslocamentos e momentos flectores de primeira ordem por acção da força de compressão e (2) a influência da curvatura no plano principal de maior inércia na resistência à encurvadura. É importante referir que, em ambas as formulações, a força de compressão é considerada fixa, sendo as restantes forças proporcionais a um único parâmetro de carga.

Os dois elementos finitos desenvolvidos foram implementados no software MatLab. Para efeitos de verificação e ilustração, analisaram-se alguns exemplos práticos (infelizmente ainda em número reduzido) e os resultados foram comparados com valores disponíveis na literatura, tendo-se verificado uma boa concordância.

Os exemplos analisados permitiram observar que, para valores elevados de compressão P , o efeito total dos deslocamentos de pré-encurvadura é diminuto: o efeito benéfico da curvatura no plano de maior inércia é contrabalançado pelo efeito desfavorável da amplificação dos momentos flectores. Para valores reduzidos da força de compressão, o efeito total dos deslocamentos de pré-encurvadura é benéfico – conduz a um aumento do parâmetro de carga crítico, aumento esse que pode ser significativo.

Como desenvolvimentos futuros, sugere-se:

- (1) Prosseguir os testes de verificação da ferramenta computacional desenvolvida, nomeadamente com outras condições de apoio e de carregamento.
- (2) Validar o modelo adoptado por comparação com modelos de dimensão superior (por exemplo, modelos bidimensionais de casca).

- (3) Generalizar os elementos finitos desenvolvidos para o caso de colunas-viga com secção mono-simétrica.
- (4) Desenvolver um procedimento numérico automático para a análise da trajectória de equilíbrio fundamental, que permita substituir a utilização das soluções exactas utilizadas nesta dissertação.
- (5) Realização de estudos paramétricos para avaliar a importância das condições de apoio e de carregamento, bem como a forma da secção transversal (por exemplo, relação entre inércias).
- (6) Em resultado dos estudos paramétricos referidos no número anterior, produzir recomendações práticas que permitam facilmente identificar as situações em que é legítimo desprezar o efeito dos deslocamentos de pré-encurvadura e aquelas em que, pelo contrário, a consideração deste efeito é indispensável para um dimensionamento seguro e económico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Antman, S.S. (2005). “Nonlinear Problems of Elasticity” (2ª edição), Springer, Nova York.
- Attard, M.M. (1986). “Nonlinear Theory of Non-Uniform Torsion of Thin-Walled Open Beams”. *Thin-Walled Structures*, Vol. 4, Issue 2, pp. 101-134.
- Attard M.M., Lawther R. (1989). “Effect of Secondary Warping on Lateral Buckling”. *Engineering Structures*, Vol. 11, Issue 2, pp. 112-118.
- Bazant, Z.P., Cedolin, L. (1991). “Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories”. Oxford University Press, Nova York.
- Becker, E.B., Carey, G.F., Oden, J.T. (1981). “Finite Elements – Volume 1: An Introduction”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Chajes, A. (1974). “Principles of Structural Stability Theory”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Dias da Silva, V. (2013). “Mecânica e Resistência dos Materiais” (4ª edição). Coimbra.
- Fung, Y.C. (1965). “Foundations of Solid Mechanics”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Ghobarah, A.A. Tso, W.K. (1971). “A Non-Linear Thin-Walled Beam Theory”. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 13, Issue 12, pp. 1025-1038.
- Gjelsvik, A. (1981). “The Theory of Thin Walled Bars”. Wiley, Nova York.
- Kitipornchai, S., Trahair, N.S. (1980). “Buckling Properties of I-Beams”. *ASCE–Journal of the Structural Division*, Vol. 106, Issue 5, pp. 941-957.
- Kollbrunner, C.F., Basler, K. (1969). “Torsion in Structures – An Engineering Approach”. Springer, Berlim.
- Love, A.E.H. (1944). “A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity” (4ª edição). Dover, Nova York.
- MathWorks (2015). “MatLab R2015a”.
- Oden, J.T., Ripperger, E.A. (1981). “Mechanics of Elastic Structures” (2ª edição). Hemisphere Publishing Corporation, Washington.

- Pi, Y.-L., Trahair, N.S. (1992a). "Prebuckling Deflections and Lateral Buckling – Part I: Theory". ASCE–Journal of Structural Engineering, Vol. 118, Issue 11, pp. 2949-2966.
- Pi, Y.-L., Trahair, N.S. (1992b), "Prebuckling Deflections and Lateral Buckling – Part II: Applications". ASCE–Journal of Structural Engineering, Vol. 118, Issue 11, pp. 2967-2985.
- Pignataro, M., Rizzi, N., Luongo, A. (1991). "Stability, Bifurcation and Postcritical Behaviour of Elastic Structures". Elsevier, Amsterdão.
- Reddy, J.N. (1993). "An Introduction to the Finite Element Method" (2ª edição). McGraw-Hill, Nova York.
- Reis, A., Camotim, D. (2001). "Estabilidade Estrutural". McGraw-Hill, Lisboa.
- Simitses, G.J., Hodges, D.H. (2006). "Fundamentals of Structural Stability". Elsevier, Amsterdão.
- Timoshenko, S.P. (1913). "Sur la Stabilité des Systèmes Élastiques". Annales des Ponts et Chaussées, 9^e Série, Tome XV, Vol. 3, pp. 496-566; Tome XVI, Vol. 4, pp. 73-132; Tome XVII, Vol. 5, pp. 372-412. Reeditado em "The Collected Papers of Stephen P. Timoshenko", 1953. McGraw-Hill, New York, pp. 92-224.
- Timoshenko, S. P., Gere, J. (1961). "Theory of Elastic Stability". McGraw-Hill, Nova York.
- Trahair, N.S. (1993). "Flexural-Torsional Buckling of Structures". E&FN Spon, Londres.
- Trahair, N.S., Woolcock, S.T. (1973). "Effect of Major Axis Curvature on I-Beam Stability". ASCE–Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 99, Issue 1, pp. 85-98.
- Vacharajittiphan, P., Woolcock, S.T., Trahair, N.S. (1974). "Effect of In-Plane Deformation on Lateral Buckling". Journal of Structural Mechanics, Vol. 3, Issue 1, pp. 29-60.
- Vlasov, V. (1961). "Thin-Walled Elastic Beams". Israel Program for Scientific Translation, Jerusalém.
- Wagner, H. (1929). "Torsion and Buckling of Open Sections". Technical Memorandum n.807, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA).