



FCTUC DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Ferramentas Numéricas para Determinação da Forma e Análise de Estabilidade de Cascas Reticuladas

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil
na Especialidade de Mecânica Estrutural

Autor

Paula Cristina Mascate Moço

Orientador

Vítor Dias da Silva

Esta dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor, não tendo sofrido correções após a defesa em provas públicas. O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer responsabilidade pelo uso da informação apresentada

Coimbra, Julho, 2015

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Doutor Vítor Dias da Silva, um sincero obrigada pela sua incansável disponibilidade, empenho e excelente orientação na realização desta dissertação. Agradeço não só os ensinamentos que adquiri no domínio da presente dissertação mas também os conhecimentos que me transmitiu no domínio geral da Informática.

Aos meus pais, Manuel António Duarte Moço e Domingas Pires Mascate Moço, por todo o esforço e apoio incondicional ao longo deste percurso, um eterno obrigada.

Ao meu irmão, António Manuel Mascate Moço, por todo o apoio incondicional, por todos os conselhos e auxílio ao longo desta etapa, um profundo obrigada.

Ao João Viana, um sincero obrigada por todo o apoio nos bons e nos maus momentos, pelo auxílio, paciência e incentivo. Obrigada por todas as vivências partilhadas.

À Joana Campos, Margarida Santos, Vanessa Cardoso e Vanessa Cristino, pelo apoio, incentivo e momentos partilhados, um obrigada por tudo.

Aos restantes amigos, colegas e professores que de algum modo contribuíram para o meu percurso académico, um sincero obrigada.

RESUMO

A crescente complexidade das estruturas de engenharia e a grande necessidade de otimização da fase de análise estrutural de um projeto levou ao desenvolvimento, ao longo dos tempos, de diversas ferramentas computacionais de análise numérica de comportamento de estruturas. Estas ferramentas vieram permitir dar solução a problemas matemáticos que, devido à sua dimensão e complexidade, não são passíveis de serem resolvidos por métodos analíticos.

Hoje em dia, existem ainda poucas soluções estruturais que utilizem estruturas em casca reticuladas comparativamente com a quantidade de soluções tradicionais que podem ser encontradas. Um dos fatores mais relevantes para a sua reduzida aplicação prende-se com a complexidade das formas a utilizar. Sabe-se, no entanto, que as estruturas em casca são das estruturas mais eficientes alguma vez construídas, uma vez que conseguem suportar cargas muito superiores ao seu peso próprio sendo muito eficazes na transmissão de cargas.

Neste contexto, surge então a presente dissertação com o objetivo de desenvolver duas ferramentas de análise numérica: uma para determinação da forma geométrica e outra para análise de estabilidade e determinação de esforços de cascas reticuladas. Estas ferramentas foram desenvolvidas nas linguagens de programação *Octave* e *Matlab* com base em duas ferramentas já existentes em linguagem *Fortran*.

Além do desenvolvimento das duas ferramentas numéricas, a presente dissertação tem também como objetivo aferir as capacidades de cálculo e vantagens de utilização das várias linguagens de programação na resolução deste tipo de problemas. Deste modo, a par com o seu desenvolvimento, procede-se também à aplicação das ferramentas desenvolvidas a alguns casos de estudo para determinação da forma e análise de estabilidade de estruturas.

Optou-se pela utilização das linguagens de programação *Octave* e *Matlab* porque apresentam como pontos fortes uma iniciação rápida e uma grande simplicidade e eficácia em operações matriciais. A linguagem *Octave* segue ainda a sintaxe da vertente numérica do *software Matlab*, sendo bastante similar o desenvolvimento das ferramentas através das duas linguagens. A grande e principal vantagem de utilização da linguagem *Octave* prende-se com o facto de ser amplamente acessível e de utilização livre.

ABSTRACT

The increasing complexity of the engineering structures and the great need of optimization the structural analysis phase of a project, in order to answer quickly and efficiently to the structures being analysed, led to the development over time of the several computational tools of numerical analysis of the behaviour of structures. These tools made possible to answer mathematic problems which due to their dimension and complexity cannot be solved using analytic methods.

Nowadays, there are still few structural solutions which apply grid shell structures against the large quantity of traditional solutions that can be found. One of the most relevant factors for their reduced application is the complexity of the forms to be used. However, it is known that shell structures are one of the most efficient ever built, since they can support loads much higher than their own weight being extremely effective in load transmission.

In this context arises the present dissertation with the goal of developing two numerical analysis tools, one for determining the geometric shape and another for stability analysis and efforts determination of reticulated shells. These tools were developed in the programming languages Octave and MATLAB based in two tools already existing in Fortran language.

Besides the development of these numeric tools, the present dissertation aim is to assess the calculation capacities and advantages of using each programming languages in solving this kind of problems. This way, along with their development, occurs the application of the developed tools to some study cases in order to determine the shape and analyse the structures stability.

Octave and MATLAB languages were chosen because they present as strengths a quick start as well as a great simplicity and efficiency in matrix operations. Octave language follows the syntax of numerical aspects of MATLAB software, being quite similar the tools development through the two languages. The main advantage of using the Octave language is due to the fact of being widely accessible and of free use.

ÍNDICE

ÍNDICE.....	iv
SIMBOLOGIA.....	vi
ABREVIATURAS.....	viii
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Enquadramento.....	1
1.2. Objetivos.....	1
1.3. Estrutura do documento.....	4
2. ENQUADRAMENTO GERAL.....	5
2.1. Estruturas em casca.....	5
2.1.1. Cascas reticuladas.....	6
2.1.2. Determinação da forma geométrica.....	6
2.2. Linguagens de programação.....	8
2.2.1. Linguagem <i>Fortran</i>	8
2.2.2. Linguagem <i>Octave</i>	9
2.2.3. Linguagem <i>MATLAB</i>	10
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	11
4. FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	15
4.1. Determinação da Forma Geométrica.....	15
4.1.1. Método dos Deslocamentos.....	17
4.1.2. Método de Newton-Raphson.....	23
4.2. Análise de Estabilidade e Determinação de Esforços.....	24
4.2.1. Teoria Base.....	25
4.2.2. Rigidez de flexão de um elemento barra.....	26
4.2.3. Linearização da matriz de rigidez.....	28
4.2.4. Definição do Sistema de eixos local do elemento barra.....	30
5. DESCRIÇÃO DAS FERRAMENTAS NUMÉRICAS.....	34
5.1. Algoritmos de cálculo.....	35
5.1.1. Entrada de dados.....	35
5.1.2. Ferramenta numérica 1: Determinação da forma geométrica.....	41
5.1.3. Ferramenta numérica 2: Análise de estabilidade e determinação de esforços.....	45

5.1.4. Sub-rotinas auxiliares	48
5.2. Adaptação das ferramentas para linguagem <i>MATLAB</i>	51
6. CASOS DE ESTUDO	52
6.1. Torre.....	53
6.2. Malha A	56
6.3. Malha B.....	60
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS	65
7.1. Desempenho das ferramentas numéricas	65
7.2. Análise de estabilidade para estruturas em casca reticulada.....	66
7.3. Sugestões para trabalhos futuros.....	66
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67
REFERÊNCIAS DE IMAGENS.....	69

SIMBOLOGIA

Letras minúsculas latinas

l – Comprimento deformado da barra

l_0 – Comprimento inicial da barra

l_x – Dimensão da barra segundo a dimensão x

l_y – Dimensão da barra segundo a dimensão y

l_z – Dimensão da barra segundo a dimensão z

l_{v_1} – Cosseno diretor do vetor \vec{v}_1 correspondente ao eixo x do sistema de eixos global

l_{v_2} – Cosseno diretor do vetor \vec{v}_2 correspondente ao eixo x do sistema de eixos global

$l_{x'}$ – Cosseno diretor do eixo x' local correspondente ao eixo x do sistema de eixos global

$l_{y'}$ – Cosseno diretor do eixo y' local correspondente ao eixo x do sistema de eixos global

$l_{z'}$ – Cosseno diretor do eixo z' local correspondente ao eixo x do sistema de eixos global

m_{v_1} – Cosseno diretor do vetor \vec{v}_1 correspondente ao eixo y do sistema de eixos global

m_{v_2} – Cosseno diretor do vetor \vec{v}_2 correspondente ao eixo y do sistema de eixos global

$m_{x'}$ – Cosseno diretor do eixo x' local correspondente ao eixo y do sistema de eixos global

$m_{y'}$ – Cosseno diretor do eixo y' local correspondente ao eixo y do sistema de eixos global

$m_{z'}$ – Cosseno diretor do eixo z' local correspondente ao eixo x do sistema de eixos global

n_{v_1} – Cosseno diretor do vetor \vec{v}_1 correspondente ao eixo z do sistema de eixos global

n_{v_2} – Cosseno diretor do vetor \vec{v}_2 correspondente ao eixo z do sistema de eixos global

$n_{x'}$ – Cosseno diretor do eixo x' local correspondente ao eixo z do sistema de eixos global

$n_{y'}$ – Cosseno diretor do eixo y' local correspondente ao eixo z do sistema de eixos global

$n_{z'}$ – Cosseno diretor do eixo z' local correspondente ao eixo x do sistema de eixos global

nb – Número de barras

nn – Número de nós / Número do nó bloqueado

$n1_i$ – Nó relativo à extremidade 1 da barra i

$n2_i$ – Nó relativo à extremidade 2 da barra i

u_0 – Deslocamento da extremidade A da barra deformada relativamente à extremidade A da barra indeformada segundo o eixo x

u_1 – Deslocamento da extremidade B da barra deformada relativamente à extremidade B da barra indeformada segundo o eixo x

v_0 – Deslocamento da extremidade A da barra deformada relativamente à extremidade A da barra indeformada segundo o eixo y

- v_1 – Deslocamento da extremidade B da barra deformada relativamente à extremidade B da barra indeformada segundo o eixo y
 \vec{v}_1 – Vetor auxiliar que corresponde a um vetor horizontal perpendicular ao plano vertical que contém a barra
 \vec{v}_2 – Vetor do plano vertical que contém a barra
 w_0 – Deslocamento da extremidade A da barra deformada relativamente à extremidade A da barra indeformada segundo o eixo z
 w_1 – Deslocamento da extremidade B da barra deformada relativamente à extremidade B da barra indeformada segundo o eixo z
 x_0 – Coordenada da extremidade A da barra indeformada segundo o eixo x
 x_1 – Coordenada da extremidade B da barra indeformada segundo o eixo x
 y_0 – Coordenada da extremidade A da barra indeformada segundo o eixo y
 y_1 – Coordenada da extremidade B da barra indeformada segundo o eixo y
 z_0 – Coordenada da extremidade A da barra indeformada segundo o eixo z
 z_1 – Coordenada da extremidade B da barra indeformada segundo o eixo z

Letras maiúsculas latinas

- A – Área da secção transversal
 A – Matriz de incidência da estrutura
 A_0 – Versão-base da matriz de incidência da estrutura
 A_b – Matriz de incidência para cada barra
 A_{b0} – Matriz auxiliar para determinação da matriz de incidência da estrutura
 C – Matriz de coordenadas
 D – Deslocamentos na configuração deformada da estrutura
 D – Vetor de deslocamentos globais da estrutura
 D_b – Vetor de deslocamentos para cada barra
 D_{bg} – Vetor de deslocamentos globais para cada barra
 D_d – Vetor de deslocamentos da estrutura desmontada
 E – Módulo de elasticidade
 E_t – Módulo de elasticidade tangente
 F – Vetor de forças de fixação
 F_b – Vetor de forças de fixação para cada barra
 F_d – Vetor de forças de fixação da estrutura desmontada
 I – Momento de inércia
 J – Momento de inércia à torção
 K – Matriz de rigidez

- K_b – Matriz de rigidez para cada barra
 K_{bg} – Matriz de rigidez geométrica para cada barra
 K_{bm} – Matriz de rigidez material para cada barra
 K_{dg} – Matriz de rigidez geométrica da estrutura desmontada
 K_{dm} – Matriz de rigidez material da estrutura desmontada
 K_g – Matriz de rigidez geométrica
 K_i – Matriz de rigidez da barra i referida à suas coordenadas locais
 K_m – Matriz de rigidez material
 N – Esforço axial na barra
 P – Carga aplicada
 \mathbf{P} – Vetor de carga
 \mathbf{P}_0 – Vetor auxiliar para determinação de carga
 X_0 – Força de fixação da extremidade A da barra indeformada segundo o eixo x
 X_l – Força de fixação da extremidade B da barra indeformada segundo o eixo x
 Y_0 – Força de fixação da extremidade A da barra indeformada segundo o eixo y
 Y_l – Força de fixação da extremidade B da barra indeformada segundo o eixo y
 Z_0 – Força de fixação da extremidade A da barra indeformada segundo o eixo z
 Z_l – Força de fixação da extremidade B da barra indeformada segundo o eixo z

Letras minúsculas gregas

- α – Ângulo medido entre o eixo local x do elemento barra e o plano vertical que contém a barra
 \mathcal{E}_E – Extensão de engenharia
 \mathcal{E}_G – Extensão de Green
 λ – Fator de carga crítica da estrutura
 σ – Tensão normal

ABREVIATURAS

- Fortran - *IBM Mathematical FORMula TRANslation System*
MATLAB - *MATrix LABoratory*
MIT - *Massachusetts Institute of Technology*
GNU - *GNU is Not Unix*
GPL - *General Public License*
IBM - *International Business Machines*
LAPACK - *Linear Algebra PACKage*
-

1. INTRODUÇÃO

1.1. Enquadramento

A fase de análise estrutural de um projeto de engenharia corresponde a uma das fases mais importantes, dado que é nesta fase que são quantificadas as variáveis que definem a estrutura, com vista ao cálculo dos efeitos das ações atuantes sobre a mesma. Pretende-se, nesta fase, determinar a deformação da estrutura, tensões, esforços internos, reações de apoio, análise de estabilidade, entre outros parâmetros relevantes, de modo a caracterizar o comportamento da estrutura com vista à otimização da solução desejada.

Devido à crescente complexidade das estruturas e à grande necessidade de otimização da fase de análise estrutural, hoje em dia existem já diversas ferramentas computacionais de análise numérica de comportamento de estruturas que permitem dar solução a problemas matemáticos de grande dimensão e complexidade que não são passíveis de ser resolvidos de modo analítico. O conhecimento e utilização de linguagens de programação é bastante vantajoso na resolução de problemas que envolvam um grande volume de cálculos, permitindo assim uma maior eficiência e otimização da fase de análise estrutural de um projeto.

Neste contexto, surgem as estruturas em casca reticulada, as quais devido à sua complexidade são ainda pouco aplicadas como solução estrutural. Embora sejam ainda poucas as construções em todo mundo onde podem ser vistas aplicações deste tipo de estruturas, existem já algumas soluções aplicadas a edifícios, mais especificamente a coberturas e pontes pedonais. Este facto deve-se principalmente à complexidade das formas a utilizar e consequentemente à dificuldade na fase de conceção do projeto. No entanto, este tipo de estruturas tem a grande vantagem de conseguir suportar cargas muito superiores ao seu peso próprio sendo muito eficientes na transmissão de cargas. São, por isso, consideradas as estruturas mais eficientes construídas até agora.

1.2. Objetivos

A presente dissertação tem como objetivo o desenvolvimento de duas ferramentas de análise numérica de cascas reticuladas nas linguagens de programação *Octave* e *MATLAB*, ambas traduzidas e adaptadas a partir de duas ferramentas numéricas já existentes em linguagem

Fortran. Posteriormente são aplicadas as ferramentas desenvolvidas para análise de três casos de estudo.

A primeira ferramenta numérica desenvolvida destina-se à determinação da forma geométrica de cascas reticuladas através de uma análise de estruturas reticuladas constituídas por elementos sem rigidez de flexão em que os deslocamentos, rotações e deformações podem tomar valores finitos, com comportamento não linear. A grande vantagem desta ferramenta é permitir a determinação de um anti funicular das cargas atuantes e reações de apoio da casca, de modo a determinar a forma geométrica que permite que a ação das cargas exteriores seja equilibrada apenas pelos esforços axiais.

A segunda ferramenta numérica destina-se à análise global de estabilidade elástica e determinação de esforços de estruturas reticuladas tridimensionais constituídas por materiais de comportamento elástico linear. A determinação de esforços é feita com base no método dos deslocamentos e para a análise de estabilidade da estrutura é utilizada a formulação linearizada da relação entre o esforço axial e a rigidez de flexão de peças lineares comprimidas, permitindo assim a resolução do problema através de um algoritmo de valores próprios. Na presente dissertação o principal foco de interesse, depois do desenvolvimento das ferramentas, consiste na análise de estabilidade deste tipo de estruturas.

Pretende-se também analisar a capacidade de resolução de problemas relativos a cascas reticuladas com recurso a estas novas ferramentas, traduzidas para as linguagens *Octave* e *MATLAB*, de modo a aferir a sua eficiência na resolução desse tipo de problemas. A capacidade de cálculo da linguagem *Fortran* neste tipo de aplicações é já conhecida. Esta possui uma grande capacidade de armazenamento de dados e apresenta uma grande rapidez de cálculo na resolução deste tipo de problemas sendo esperada uma maior eficiência na utilização desta linguagem aquando da sua comparação com as duas linguagens aqui utilizadas. No entanto, o objetivo é tornar as ferramentas desenvolvidas o mais eficazes possível, de modo a ser passível a sua utilização neste tipo de problemas. A análise da eficiência destas linguagens é de grande interesse uma vez que estas têm uma iniciação fácil e rápida para os utilizadores que pretendam iniciar a sua aprendizagem na área da programação, sendo também de salientar que a linguagem *Octave* é de utilização livre. Para utilização do *software MATLAB* no âmbito da presente dissertação foi utilizada uma licença de campus fornecida pela Universidade de Coimbra.

Nesta dissertação, serão então apresentadas as conclusões obtidas com desenvolvimento das ferramentas através das várias linguagens de programação, de modo a aferir até que ponto é

vantajosa a utilização das linguagens *Octave* e *MATLAB* comparativamente à linguagem *Fortran*.

Para aferição do correto funcionamento das duas ferramentas desenvolvidas, para determinação da forma geométrica e para análise de estabilidade e determinação de esforços, são apresentados dois casos de estudo, um relativo a uma torre reticulada e outro a uma malha plana de geometria irregular, que já se encontravam analisados através de métodos analíticos e pelas ferramentas já existentes em linguagem *Fortran*, respetivamente. Além dos casos de estudo utilizados para validação das novas ferramentas é também apresentada a análise de mais um caso de estudo relativo a uma malha plana pentagonal, o qual se pretende que seja analisado com recurso às novas ferramentas de modo a determinar uma solução em casca reticulada para a configuração de malha fornecida.

O primeiro caso referido diz respeito a uma torre reticulada para a qual se pretende efetuar a análise de estabilidade e determinação de esforços. A análise desta estrutura teve como objetivo validar o correto funcionamento da segunda ferramenta numérica aqui desenvolvida, uma vez que eram já conhecidos os valores das cargas de instabilidade para a mesma, calculados através da expressão de *Euler*.

O segundo caso corresponde a uma malha de contorno curvo irregular, aqui denominada por Malha A, para a qual se pretende determinar uma solução em casca reticulada com recurso às novas ferramentas, de modo a comparar com os resultados obtidos através das ferramentas já existentes em *Fortran*. Para tal aplicou-se igualmente o valor de todos os dados já definidos para a resolução com ferramentas em *Fortran*, nomeadamente propriedades de secções, cargas aplicadas e condições de apoio.

O último caso de estudo aqui apresentado corresponde à aplicação das duas ferramentas numéricas desenvolvidas para determinação de uma solução em casca partindo da configuração de malha fornecida. Pretende-se assim determinar a forma a adotar para a estrutura em casca reticulada, a qual é encontrada com recurso à primeira ferramenta, sendo posteriormente analisada a secção a aplicar à estrutura resultante, e feita a análise de estabilidade através da segunda ferramenta desenvolvida.

Importa referir que embora seja possível a análise de esforços através das ferramentas numéricas desenvolvidas estes não serão objeto de análise uma vez que o objetivo da presente dissertação consiste no desenvolvimento das ferramentas e a sua aplicação em casos de estudo para determinação da forma e análise de estabilidade.

1.3. Estrutura do documento

O presente documento encontra-se dividido em sete capítulos sendo estes discretizados em secções e subsecções.

No capítulo 1 é efetuada uma pequena contextualização da temática abordada na presente dissertação bem como os objetivos a atingir com a realização da mesma. Ainda neste capítulo, é também especificada a abordagem utilizada para a resolução do problema em estudo.

No capítulo 2 é feito um enquadramento geral à temática da presente dissertação de modo a introduzir alguns conceitos teóricos necessários para a compreensão do trabalho desenvolvido nos capítulos seguintes. Assim sendo, neste capítulo é feita uma breve introdução às estruturas em casca e às linguagens de programação *Fortran*, *Octave* e *MATLAB*.

No capítulo 3 é apresentado um breve enquadramento histórico sobre a evolução das estruturas em casca na sua generalidade, bem como as estruturas em casca reticulada, e os métodos habitualmente utilizados para a sua análise.

O capítulo 4 contém todos os fundamentos teóricos que serviram de base ao desenvolvimento das duas ferramentas numéricas aqui objetivadas sendo apresentados em secções distintas os fundamentos teóricos relativos a cada ferramenta.

No capítulo 5 é abordado o processo de tradução e adaptação das ferramentas já existentes em linguagem *Fortran* para as linguagens *Octave* e *MATLAB*. Neste é feita uma descrição do funcionamento dos algoritmos de cálculo utilizados para cada ferramenta.

O capítulo 6 contém a informação relativa aos vários casos de estudo analisados bem como os resultados obtidos através da sua análise com recurso às ferramentas numéricas desenvolvidas. Neste capítulo é também feita a análise dos resultados obtidos nomeadamente no que diz respeito à estabilidade das cascas reticuladas analisadas.

Por fim, o capítulo 7 diz respeito às considerações finais onde são sintetizadas as conclusões do trabalho desenvolvido. São apresentadas conclusões relativas ao desempenho das ferramentas numéricas desenvolvidas, à análise de estabilidade de estruturas em casca reticulada e são também sugeridas algumas propostas de assuntos a desenvolver em trabalhos futuros.

2. ENQUADRAMENTO GERAL

Neste capítulo é apresentado um breve enquadramento aos vários assuntos abordados ao longo da presente dissertação, de modo a contextualizar e introduzir alguns conceitos teóricos necessários para uma melhor compreensão do trabalho desenvolvido.

Primeiramente será feita uma breve introdução sobre estruturas em casca, e em particular sobre estruturas em cascas reticuladas, as quais são objeto de estudo nesta dissertação, de modo a apresentar as várias vertentes deste tipo de solução e algumas vantagens da sua aplicação. Por último, é feita uma pequena contextualização sobre as linguagens de programação aqui abordadas, *Fortran*, *Octave* e *MATLAB*, uma vez que é com base nelas que se desenvolve todo o trabalho efetuado.

2.1. Estruturas em casca

Uma estrutura em casca é uma superfície curva tridimensional, podendo ou não ser contínua, onde a espessura é muito menor do que as restantes dimensões e as cargas atuantes são resistidas através de esforços predominantemente de tração e compressão. Neste tipo de estruturas, a forma geométrica é determinante para resistir às ações externas, podendo o seu comportamento ser analisado segundo duas teorias: teoria da membrana ou teoria de flexão.

A teoria da membrana considera que a casca não resiste a flexão ou forças de corte, suportando apenas esforços de tração ou compressão, ou seja, diz-se que as forças de membrana são independentes da flexão. As propriedades do material não são utilizadas nesta análise sendo esta aplicável a qualquer casca independentemente do material, uma vez que as forças de membrana são definidas pelas condições de equilíbrio estático.

A análise de cascas segundo a teoria de flexão, tal como o nome indica, inclui os efeitos de flexão permitindo considerar os efeitos de descontinuidades nos valores das tensões em determinadas zonas da casca. Contrariamente ao que acontece na teoria da membrana, para efetuar a análise de cascas segundo a teoria de flexão é necessário conhecer as propriedades do material a utilizar, devido a pressupostos cinemáticos a considerar para o cálculo da sua deformação.

Na prática, quando as estruturas em casca apresentam uma espessura muito menor do que as restantes dimensões, a sua rigidez de flexão terá também valores muito pequenos podendo ser considerada nula. Neste tipo de situações, as estruturas podem ser estudadas com recurso à teoria da membrana considerando que as cargas exteriores aplicadas à estrutura são resistidas apenas através de esforços normais de compressão e tração. Contudo, importa referir que em alguns casos pode não ser possível obter soluções compatíveis com as condições reais de deformação ou não ser possível prever o estado de tensão em determinadas zonas da casca através desta teoria. Nestas situações, pode utilizar-se a teoria de flexão uma vez que esta, além das forças de membrana, permite considerar também as forças de corte e de flexão.

2.1.1. Cascas reticuladas

Os conceitos introduzidos anteriormente relativos a estruturas em casca referem-se a esse tipo de estruturas na sua generalidade, no entanto, no âmbito da presente dissertação são abordadas mais especificamente as estruturas em casca reticulada. Assim sendo, de seguida são apresentadas as particularidades deste tipo de estruturas.

As estruturas em casca reticulada trianguladas apresentam a mesma geometria e o mesmo comportamento estrutural que as estruturas em casca contínua, contudo, a casca deixa de ser uma superfície contínua e passa a ser definida por uma grelha idealizada com recurso a peças lineares. Outra característica própria deste tipo de estruturas prende-se com o modo como é feita a transmissão de cargas, enquanto numa casca definida por superfície contínua existe um número infinito de caminhos possíveis que as cargas podem descrever, numa casca reticulada a transmissão de cargas faz-se apenas através dos elementos da área de influência do ponto de aplicação da carga, limitando assim as possibilidades de caminhos para transmissão de cargas.

2.1.2. Determinação da forma geométrica

De modo a completar esta breve introdução às estruturas em casca, é ainda necessário abordar um último assunto de grande importância na utilização deste tipo de estruturas: a determinação da sua forma geométrica. Uma das grandes adversidades deste tipo de solução passa pela conceção da estrutura a construir, uma vez que existe uma grande variedade de possíveis formas que podem ser adotadas.

Existem essencialmente dois métodos para definição da forma geométrica da casca: o desenvolvimento de formas livres ou o desenvolvimento de formas de equilíbrio.

O desenvolvimento de formas livre para estruturas em casca consiste em utilizar apenas elementos geométricos simples, tais como: linhas retas, parábolas, círculos, elipses, etc. Este tipo de cascas são idealizadas independentemente do fluxo de transmissão de cargas, o que faz com que venha a ser necessário a aplicação de possíveis reforços em determinadas zonas. Embora este método seja bastante eficaz leva, no entanto, a um mau aproveitamento do material, uma vez que a estrutura terá de se adaptar aos esforços que as cargas exteriores produzirão.

Este tipo de solução foi essencialmente utilizada até finais dos anos 60 em que as formas de estruturas em casca eram apenas feitas com base em elementos geométricos descritíveis por formulações matemáticas como é o caso da cobertura do auditório *Kresge* pertencente ao MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) em Cambridge, nos Estados Unidos da América, projectada pelo arquitecto Eero Saarinen em 1953, a qual foi definida com base na forma de uma calote polar retirada de uma esfera, Figura 2.1.



Figura 2.1 - Auditório Kresge projetado pelo arquitecto Eero Saarinen pertencente ao MIT-Cambridge

O segundo método referido, o desenvolvimento de estruturas em casca com base em formas geométricas de equilíbrio, consiste em adotar uma configuração estrutural com base na configuração de forças a que a estrutura estará sujeita de modo a obter um comportamento estrutural eficiente. Importa referir que a ferramenta numérica para determinação da forma desenvolvida no âmbito desta dissertação tem como teoria base este mesmo método.

O termo “forma de equilíbrio” é frequentemente associado a uma malha de cabos. Uma estrutura constituída por uma malha de cabos, ao ser solicitada por uma determinada configuração de cargas exteriores e dependendo das condições de apoio a que esta está sujeita, irá sofrer deformação de modo a adaptar-se às cargas que lhe são aplicadas, ficando assim

sujeita a um estado de tensão puramente de tração, uma vez que a rigidez de flexão é desprezável. Sabendo a configuração deformada que resiste a determinado carregamento, se for utilizada uma malha de barras com a configuração inversa à obtida para a malha de cabos, esta ficará sujeita maioritariamente a tensões produzidas por esforço axial de compressão, existindo, no entanto, uma parcela residual de esforços de flexão que resultam de ter sido atribuída uma rigidez de flexão aos elementos constituintes da malha. Neste tipo de configuração de cascas, irão sempre verificar-se deformações, que embora pequenas, levam a que a compatibilização de deslocamentos seja respondida por esforços de flexão, porque ainda que o valor dos momentos fletores seja muito reduzido, este depende da relação entre as rigidezes de flexão e axial dos elementos.

À medida que foram sendo desenvolvidas ferramentas numéricas computacionais como alternativa aos modelos físicos até então utilizados, passou a ser possível a análise de estruturas utilizando diversos tipos de materiais, passando a ser possível deter um maior controlo sobre os parâmetros de cálculo considerados.

2.2. Linguagens de programação

2.2.1. Linguagem *Fortran*

A linguagem *Fortran* é uma das linguagens de programação mais antigas, tendo sido desenvolvida pela IBM (*International Business Machines*) a partir de 1950 com o objetivo de ser utilizada em aplicações científicas e de engenharia. Esta teve a sua primeira publicação em 1957.

Após a sua criação, a linguagem *Fortran* passou a ser utilizada em grande escala nas mais diversas áreas científicas, nomeadamente em previsão meteorológica numérica, análise de elementos finitos e nas áreas da dinâmica de fluidos, física e química computacional devido à sua grande capacidade numérica. Tornou-se assim numa das linguagens de programação mais utilizada na área da linguagem de programação de alto nível sendo inclusive utilizada em programas para *benchmark*¹ na grande maioria dos supercomputadores.

Esta linguagem foi idealizada inicialmente como uma linguagem de programação estruturada, a qual tem como base o conceito de que qualquer programa pode ser reduzido a três

¹Benchmark – (em linguagem de computação) é nome dado ao ato de executar um programa de computador, conjunto de programas ou operações com o objetivo de realizar testes que permitem avaliar o desempenho de um programa ou algoritmo.

estruturas: sequência, decisão e iteração ou repetição, sendo o desenvolvimento dos programas feito com base em estruturas simples, rotinas e funções. No entanto, hoje em dia, existem já versões de *Fortran* que suportam a programação orientada a objetos, a qual tem vindo a substituir a anterior no contexto das aplicações modernas devido ao seu maior desenvolvimento na área da segurança e reaproveitamento de código. A programação orientada a objetos é um modelo de programação baseado na composição e interação entre diversas unidades de *software* chamadas de objetos.

Em suma, as grandes vantagens de utilização desta linguagem prendem-se com a grande velocidade e precisão no tratamento de dados, o grande número de programas e rotinas já existentes e a grande eficiência dos seus compiladores.

2.2.2. Linguagem Octave

A linguagem *Octave* surgiu no âmbito do projeto *GNU (GNU is Not Unix)* sob licença *GPL (General Public License)*, o qual tem como objetivo a criação de *software* livre.

O objetivo inicial do *GNU/Octave* centrava-se no desenvolvimento de uma ferramenta que permitisse determinar soluções para problemas relativos a reatores químicos, de modo a complementar um curso sobre esta matéria que decorria na Universidade do Texas, em Austin. Contudo, devido a algumas limitações técnicas relativas à aproximação dos resultados obtidos, optou-se por tornar a ferramenta mais flexível, de modo a permitir a sua utilização de forma mais ampla. Os primeiros e principais desenvolvimentos na criação do *GNU/Octave* foram da responsabilidade de um então professor na Universidade de Texas, John W. Eaton, por volta do ano de 1992. A linguagem *Octave* tornou-se assim numa linguagem de programação de alto nível, desenvolvida para computação matemática permitindo a resolução de problemas numéricos, lineares e não-lineares.

A linguagem *Octave*, tal como referido anteriormente, é uma linguagem de programação livre, de rápida iniciação e de grande simplicidade e eficácia na resolução de operações matriciais. Apresenta ainda outras vantagens, nomeadamente: os cálculos são feitos com precisão dupla, possui uma grande compatibilidade com o *MATLAB*, apresenta uma grande capacidade para resolução de problemas numéricos lineares e não lineares, e é também bastante eficaz no cálculo aproximado de raízes de equações não-lineares, de funções ordinárias e de polinómios. Além disso, permite também a determinação de integrais, e integração numérica de equações diferenciais ordinárias e diferenciais algébricas.

Outra grande vantagem do *Octave* é o facto de ser possível expandi-lo e adaptá-lo através de funções definidas pelo utilizador, podendo inclusive serem utilizados módulos escritos com recurso a outras linguagens como *C++*, *C* e *Fortran*.

2.2.3. Linguagem *MATLAB*

O *MATLAB* (*MATrix LABoratory*) é uma linguagem de programação de alto nível que possui um ambiente de trabalho interativo desenvolvido para computação numérica, visualização e programação, sendo utilizada por engenheiros e cientistas das mais diversas áreas de saber. (MathWorks, 2015)

A linguagem *MATLAB* surgiu em 1970 com o intuito de auxiliar os cursos de Teoria Matricial, Álgebra Linear e Análise Numérica, tendo sido criado por Cleve Moler, o então presidente do departamento de ciência da computação da Universidade do Novo México. Em 1984, Jack Little, formado em engenharia eletrotécnica e ciência computacional, e Steve Bangert, consultor de engenharia, juntaram-se a Cleve Moler para fundar a MathWorks, tendo reescrito *MATLAB* em *C*.

Atualmente o *MATLAB* dispõe de uma vasta biblioteca de funções matemáticas, geração de gráficos e manipulação de dados permitindo ainda ao utilizador escrever as suas próprias bibliotecas em *MATLAB*.

O *MATLAB* permite fazer análises de dados, desenvolver algoritmos, criar modelos de cálculo e aplicações ou pode ainda ser utilizado como algo tão simples como uma calculadora. Hoje em dia, existe já uma grande variedade de aplicações nas quais o *MATLAB* é utilizado como por exemplo: processamento do sinal e comunicações, processamento de imagem e vídeo, sistemas de controlo, teste e medição, tratamento de dados a nível financeiro e biologia computacional. À semelhança da linguagem *Octave*, em linguagem *MATLAB* os cálculos são efetuados com precisão dupla. (MathWorks, 2015)

Enquanto linguagem de programação é mais eficiente na resolução da maioria dos problemas numéricos do que as linguagens *Fortran*, *Basic* ou *C* uma vez que tem como elementos básicos da linguagem vetores e matrizes, sem necessidade de dimensionamento. Isto permite reduzir o número de linhas de programa e acelerar o processo de cálculo.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A construção é umas das ocupações mais antigas da espécie Humana. (Berger, *Structural Form in Architecture*, 2007) Já na antiguidade o Homem construía abrigos por razões de sobrevivência devido a questões climáticas ou para proteção em relação a outros seres vivos.

Por volta do ano de 1996 foram encontrados vestígios de abrigos de antigas civilizações com alguns milhares de anos, mais especificamente da era da espécie *Homo heidelbergensis*, numa praia nos arredores de Nice, no sul de França, tendo posteriormente sido feito desse local um lugar arqueológico chamado Terra Amata. O processo de construção desses antigos abrigos consistia em cravar ramos de árvores diretamente no solo de forma a criar um plano oval ao nível do solo. Posteriormente, era erguido um elemento mais rígido, que faria o papel de uma viga central, sendo seguro por dois elementos igualmente resistentes, que teriam a função de pilares, onde posteriormente seriam ligados os ramos cravados no solo. Estes ramos eram fletidos de modo a serem ligados à viga central formando assim arcos em toda a largura do abrigo. (Berger, *Structural Form in Architecture*, 2007)

Com base em alguns estudos realizados sobre as construções encontradas apurou-se que a tipologia de construção dos abrigos apresentava algumas diferenças consoante a parte do mundo onde se localizava e a geração que a construía. Embora o procedimento previamente descrito fosse a base das construções analisadas, são evidentes algumas diferenças no engenho da construção. Em todas elas é notória a preocupação de fazer com que a malha formada pela estrutura fosse tanto ortogonal quanto o permitido pela geometria e pela flexibilidade do material, no entanto, em alguns locais, ao invés de se formar um plano oval ao nível do solo optara-se por uma forma radial, fazendo conseqüentemente com que os ramos da estrutura concorressem num só ponto.

O desenvolvimento da construção consistiu num processo evolutivo de tentativa-erro por parte do Homem, na busca pela melhor forma das soluções a adotar e dos materiais a utilizar. A utilização da interseção dos arcos neste tipo de construções levou a que fosse definido um sistema estrutural extremamente eficiente. Se a sua eficiência for medida através do rácio entre o peso próprio da estrutura e a resistência a cargas exteriores aplicadas, estamos perante umas das estruturas mais eficientes alguma vez construídas, uma vez que a sua geometria permite suportar cargas muito superiores ao seu peso próprio. (Berger, *Structural Form in Architecture*, 2007)

Sabe-se hoje que a forma mais eficiente do ponto de vista estrutural é a forma funicular que esteja em equilíbrio com a carga que lhe é aplicada, ou seja, a forma geométrica de equilíbrio para o carregamento aplicado e respetivas condições de apoio sem necessidade de esforços de flexão. Foi com base neste conceito, que em 1975 foi concebida aquela que é considerada por muitos autores "a mãe das estruturas de casca reticulada", a *Multihalle* representada nas Figura 3.1.



Figura 3.1 - Vista aérea e vista interior, respetivamente, da *Multihalle*, em Mannheim na Alemanha

A *Multihalle* é uma estrutura em casca reticulada concebida em madeira para acolher a *Federal Garden Exhibition* em Mannheim, na Alemanha, tendo sido desenvolvida por um dos grandes arquitetos alemães da época, *Frei Otto*, em conjunto com o engenheiro britânico, *Ted Happold*. Em ocasião da realização da exibição, a estrutura de madeira foi inicialmente pensada e construída com carácter provisório e como tal não haviam sido considerados todos os requisitos regulamentares de segurança e capacidade de carga que seriam exigíveis no caso de uma estrutura permanente. No entanto, o seu comportamento estrutural veio a revelar-se excepcionalmente bom, encontrando-se a estrutura ainda hoje em ótimas condições, razão pela qual foi mais tarde reconhecida com a categoria de edifício monumental.

Aquando da conceção desta estrutura, não existiam ainda ferramentas numéricas com capacidade para desenvolver e analisar a solução idealizada. A determinação da forma da estrutura a conceber foi feita por intermédio de modelos físicos à escala 1:100, com recurso a malhas de cabos com rigidez de flexão desprezável sujeitos a determinados casos de carga. Procurou-se assim o desenvolvimento de formas de equilíbrio para várias situações de carregamento, tendo sido adotada a configuração geométrica que desse melhor resposta aos diversos casos de carga testados. A estrutura final conta com aproximadamente 72 metros de comprimento, 35 metros de largura, 15,5 metros de altura e uma área total de

aproximadamente 3600 m². A Figura 3.2 mostra o modelo físico utilizado na determinação da forma geométrica da *Multihalle*.

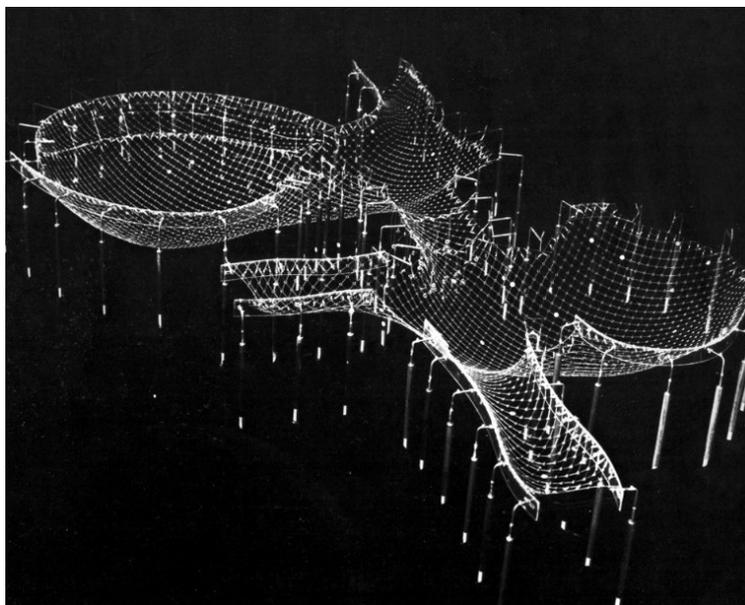


Figura 3.2 - Modelo físico, à escala 1:100, utilizado na determinação da forma geométrica da Multihalle

Outro exemplo de eficácia na aplicação deste tipo de estruturas foi o Pavilhão do Japão construído no âmbito da Feira Internacional de Hanôver em 2000, "Expo 2000", igualmente localizado na Alemanha.

Nesse ano de 2000, o tema da feira tinha como principal foco o desenvolvimento sustentável com o intuito de mostrar como as pessoas e a tecnologia podem interagir de forma a melhorar o meio ambiente. No âmbito deste tema, a organização idealizou para o evento uma estrutura de design aberto, livre de colunas e completamente constituído por materiais reciclados e recicláveis, o que levou à materialização de uma estrutura em casca reticulada com cerca de 72 metros de comprimento, 25 metros de largura e 16 metros de altura constituída por tubos de cartão, como representado na Figura 3.3. Contudo, foi necessária a construção de uma estrutura secundária de suporte, feita em madeira, uma vez que as leis alemãs não contemplam o projeto de estruturas com materiais reciclados.

O projeto da estrutura de suporte em madeira foi realizado pelos arquitetos *Shigeru Ban e Frei Otto*, tendo sido realizado em apenas três semanas e mantido íntegro durante toda a feira. No entanto, após o evento a estrutura foi desmantelada tendo as fundações de aço e os tubos de

cartão sido comprados e reciclados por uma empresa alemã, respeitando assim a temática da feira.



Figura 3.3 - Vista exterior e vista interior do Pavilhão do Japão - Expo 2000 Hanôver

4. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

No presente capítulo serão apresentados os fundamentos teóricos que serviram de base ao desenvolvimento das ferramentas numéricas em estudo, mais especificamente ao desenvolvimento do cálculo principal das ferramentas. As teorias base aqui apresentadas são separadas em duas secções, as quais dizem respeito às duas ferramentas desenvolvidas, de modo a melhor explicitar as teorias subjacentes a cada uma delas.

4.1. Determinação da Forma Geométrica

Um dos maiores problemas na conceção de estruturas em casca reticulada prende-se com a determinação da forma geométrica ideal a adotar para a estrutura em estudo. Contudo, com o desenvolvimento da capacidade de cálculo do computador foram surgindo ferramentas numéricas com grande capacidade de cálculo que permitem a utilização de métodos numéricos computacionais para determinar formas geométricas de equilíbrio sem ser necessário a utilização de modelos físicos. Estes métodos vieram permitir a simulação das características reais dos materiais tornando o processo mais rápido e rigoroso comparativamente à utilização do método experimental. Até então, a determinação da forma consistia na utilização do método experimental com a utilização de modelos físicos, o qual apresenta grandes desvantagens, nomeadamente: a dificuldade de execução em condições ideais, o elevado custo associado à execução dos modelos físicos e a dificuldade em fazer variar os parâmetros uma vez que são utilizados materiais reais para construção dos modelos físicos, levando a que seja restringido o uso das características reais dos próprios materiais. Embora seja menos eficiente comparado com as ferramentas que se encontram disponíveis hoje em dia para a resolução deste tipo de problemas, este método pode ainda ser utilizado sempre que assim se justifique.

Segundo *Veenendal & Block* (2011), os métodos numéricos existentes nos dias de hoje para determinação da forma geométrica de estruturas em casca reticulada podem ser divididos em três categorias: o Método da Densidade das Forças, o Método de Relaxação Dinâmica e “Métodos de Matriz de Rigidez”.

O Método da Densidade das Forças utiliza como unidade principal de cálculo o rácio da força pelo comprimento de cada barra, enquanto o Método da Relaxação Dinâmica utiliza a

analogia com movimento, considerando assim que as forças desequilibradas e a massa dos nós determinam a aceleração. A última categoria das três mencionadas, “Métodos da Matriz de Rigidez”, utiliza, tal como o nome indica, uma matriz de rigidez nos cálculos correspondentes aos materiais utilizados. Esta categoria é a menos bem definida até ao momento, não existindo ainda um consenso entre os autores em relação ao nome destes métodos, sendo frequentemente designados de "Computação de Malha Não-Linear", "Análise de Deslocamentos Não-Lineares" ou "Rigidez Transiente". Contudo, a qualquer um destes nomes estão associados métodos cujo cálculo é baseado numa formulação do método dos deslocamentos que utiliza uma matriz de rigidez.

Na presente dissertação, a determinação da forma é feita com recurso ao Método dos Deslocamentos, que se insere na última categoria referida, por ser genericamente o que mais se adequa à análise não-linear de estruturas. Tal como descrito no documento Dias da Silva, “Introdução à Análise Não-Linear de Estruturas” (2002), a sua adequação à análise não-linear de estruturas prende-se com as seguintes características:

- não ser necessário considerar condições de compatibilidade de deformações, uma vez que se as funções deslocamento forem contínuas as deformações serão sempre compatíveis;
- um campo de deslocamentos define univocamente e a nível local, todas as grandezas que intervêm no problema, ou seja, conhecidos os deslocamentos podem determinar-se as extensões por derivação, a partir destas (e de eventuais parâmetros de estado do material) podem determinar-se as tensões e, finalmente, as forças interiores que equilibram as exteriores.

A última característica referida confere-lhe grandes possibilidades de sistematização, uma vez que todas estas operações são feitas a nível local, o que as torna independentes da geometria do corpo ou estrutura, tornando fácil a formulação do problema em termos de deslocamentos.

Embora este método seja aqui apresentado como teoria base à determinação da forma geométrica, que corresponde à primeira ferramenta numérica, importa referir que é também aplicado ao nível da segunda ferramenta desenvolvida, mais especificamente na análise de estabilidade e determinação de esforços, sendo apenas apresentado ao nível desta ferramenta de modo a não repetir informação.

Outro método também utilizado no desenvolvimento da primeira ferramenta é o método de Newton-Raphson, o qual foi integrado na aplicação do Método dos Deslocamentos de modo a permitir uma maior rapidez de convergência. Este método permite a resolução das equações e sistemas de equações não lineares, uma vez que estas, de uma maneira geral, tem que ser

resolvidas iterativamente permitindo assim uma maior rapidez de convergência aliada ao processo iterativo.

4.1.1. Método dos Deslocamentos

Tal como foi aferido no capítulo 2 deste documento, a forma geométrica de equilíbrio para uma estrutura de casca reticulada sujeita a determinadas ações está diretamente relacionada com a configuração deformada de uma malha de elementos sem rigidez de flexão, ou seja, sujeita a esforço axial puro.

Os fundamentos teóricos relativos ao cálculo da deformação de elementos com estas características através do Método dos Deslocamentos serão apresentados de seguida com base no documento Dias da Silva, “Introdução à Análise Não-Linear de Estruturas” (2002).

Para o cálculo de uma estrutura constituída por peças sujeitas a esforço axial puro através do método dos deslocamentos é necessário desenvolver as expressões que permitem calcular as forças de fixação e a matriz de rigidez de uma barra biarticulada numa dada situação deformada. Assim sendo, considere-se a barra representada na Figura 4.1, cuja posição na situação indeformada é definida pelas coordenadas x_0 e y_0 na extremidade A e x_1 e y_1 na extremidade B.

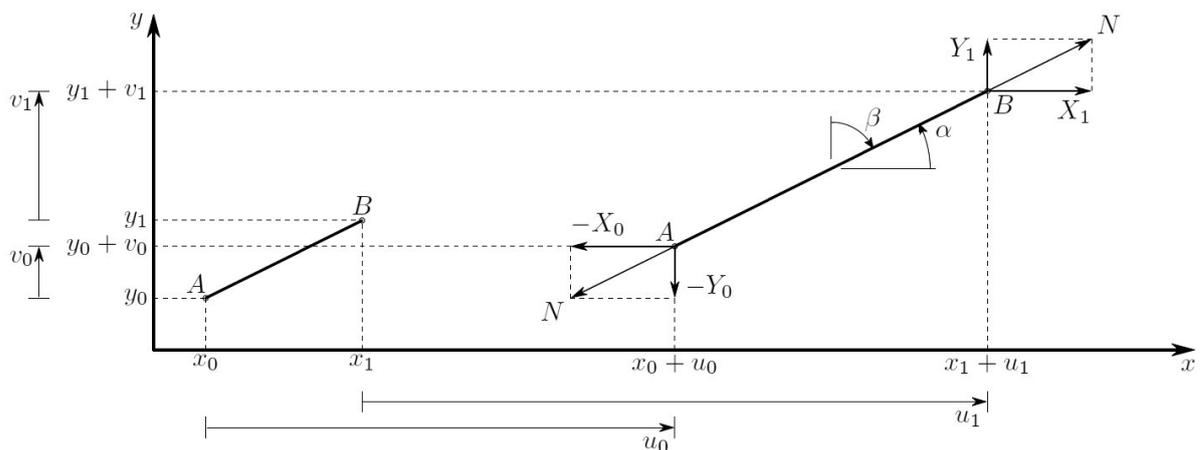


Figura 4.1 - Configurações indeformada e deformada de uma barra biarticulada sujeita a deformação finita

Na situação deformada as coordenadas das extremidades desta barra são definidas por (4.1) e (4.2).

$$A: \begin{cases} x_0 + u_0 \\ y_0 + v_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$B: \begin{cases} x_1 + u_1 \\ y_1 + v_1 \end{cases} \quad (4.2)$$

De acordo com a convenção assumida na Figura 4.1, os comprimentos inicial (l_0) e deformado (l) da barra são definidos pelas expressões (4.3) e (4.4) respetivamente.

$$l_0 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \quad (4.3)$$

$$l = \sqrt{(x_1 + u_1 - x_0 - u_0)^2 + (y_1 + v_1 - y_0 - v_0)^2} \quad (4.4)$$

Sempre que é usada uma formulação lagrangeana na análise de deformações finitas é quase sempre utilizada a extensão de Green, ao invés da habitual extensão de engenharia, pelo facto de conduzir a expressões matematicamente mais simples. As expressões (4.5) e (4.6) correspondem ao cálculo das extensões de engenharia e de Green respeitantes à configuração deformada:

$$\varepsilon_E = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_G = \frac{1}{2} \times \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} \quad (4.6)$$

A expressão (4.7) é então a expressão de cálculo da extensão de Green que resulta da substituição das expressões de l e l_0 em função de x, y, u e v . Tal como referido anteriormente, é possível constatar que a expressão (4.5) levaria a uma forma mais complexa da expressão de cálculo para a extensão.

$$\varepsilon_G = \frac{1}{2} \times \frac{(u_1 - u_0)^2 + 2(x_1 - x_0)(u_1 - u_0) + (v_1 - v_0)^2 + 2(y_1 - y_0)(v_1 - v_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \quad (4.7)$$

Também de acordo com a convenção anterior, os cossenos dos ângulos α e β são dados pelas expressões (4.8) e (4.9).

$$\cos \alpha = \frac{l_x}{l} \quad (4.8)$$

$$\cos \beta = \frac{l_y}{l} \quad (4.9)$$

Com:

$$\begin{cases} l_x = x_1 + u_1 - x_0 - u_0 \\ l_y = y_1 + v_1 - y_0 - v_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Considerando o esforço axial N de tração positivo, as forças de extremidade da barra são dadas por (4.11) e (4.12).

$$\begin{cases} X_0 = -N \cos \alpha = -N \frac{l_x}{l} \\ Y_0 = -N \cos \beta = -N \frac{l_y}{l} \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} X_1 = -N \cos \alpha = -N \frac{l_x}{l} \\ Y_1 = -N \cos \beta = -N \frac{l_y}{l} \end{cases} \quad (4.12)$$

A matriz de rigidez da barra pode então ser obtida por derivação das forças X e Y em relação aos deslocamentos u e v . Para evitar repetições de demonstrações, consideram-se aqui apenas as forças atuantes da extremidade B sendo a matriz (4.13) a matriz de rigidez correspondente às duas coordenadas desta extremidade.

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} = \frac{\partial N}{\partial u_1} \cos \alpha + N \frac{\partial}{\partial u_1} (\cos \alpha) & \frac{\partial X_1}{\partial v_1} = \frac{\partial N}{\partial v_1} \cos \alpha + N \frac{\partial}{\partial v_1} (\cos \alpha) \\ \frac{\partial Y_1}{\partial u_1} = \frac{\partial N}{\partial u_1} \cos \beta + N \frac{\partial}{\partial u_1} (\cos \beta) & \frac{\partial Y_1}{\partial v_1} = \frac{\partial N}{\partial v_1} \cos \beta + N \frac{\partial}{\partial v_1} (\cos \beta) \end{array} \right] \quad (4.13)$$

Considerando que o esforço axial N é determinado através do produto da tensão pela área da secção transversal da barra na situação indeformada, expressão (4.14), e assumindo que E_t

corresponde ao módulo de elasticidade tangente, as derivadas de N em ordem a u e v são dadas pelas expressões (4.15) e (4.16).

$$N = \sigma \times A \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial N}{\partial u_1} = A \frac{\partial \sigma}{\partial u_1} = A \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} = AE_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial N}{\partial v_1} = A \frac{\partial \sigma}{\partial v_1} = A \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_1} = AE_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_1} \quad (4.16)$$

Deste modo, utilizando as expressões (4.8), (4.9) e (4.10) obtém-se:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} = \frac{x_1 + u_1 - x_0 - u_0}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \frac{l_x}{l_0^2} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial v_1} = \frac{l_y}{l_0^2} \quad (4.18)$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u_1} (\cos \alpha) = \frac{l - l_x \frac{\partial l}{\partial u_1}}{l^2} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} (\cos \beta) = \frac{-l_y \frac{\partial l}{\partial u_1}}{l^2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial v_1} (\cos \alpha) = \frac{-l_x \frac{\partial l}{\partial v_1}}{l^2} \\ \frac{\partial}{\partial v_1} (\cos \beta) = \frac{l - l_y \frac{\partial l}{\partial v_1}}{l^2} \end{array} \right] \quad (4.19)$$

As derivadas do comprimento l em ordem a u e v são dadas pelas expressões (4.20) e (4.21). Sendo estas substituídas nas expressões da matriz (4.13) obtém-se a matriz de rigidez para a extremidade B da barra em função de A , E_t , l_0 , l , l_x e l_y , expressão (4.22).

$$\frac{\partial l}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} (\sqrt{l^2}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_1} (l^2) = \frac{l_x}{l} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial l}{\partial v_1} = \frac{l_y}{l} \quad (4.21)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} = AE_t \frac{l_x l_x}{l_0^2 l} + N \frac{l^2 - l_x^2}{l^3} & \frac{\partial X_1}{\partial v_1} = AE_t \frac{l_y l_x}{l_0^2 l} - N \frac{l_x l_y}{l^3} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial u_1} = AE_t \frac{l_y l_x}{l_0^2 l} - N \frac{l_x l_y}{l^3} & \frac{\partial Y_1}{\partial v_1} = AE_t \frac{l_y l_y}{l_0^2 l} + N \frac{l^2 - l_y^2}{l^3} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Contudo, como mencionado anteriormente, esta matriz de rigidez corresponde apenas a uma das extremidades da barra. A generalização desta matriz às duas extremidades da barra, ou seja às quatro coordenadas da barra, pode ser feita por analogia, obtendo-se a matriz de rigidez \mathbf{K} indicada em (4.23) correspondente ao sistema de quatro coordenadas representado na Figura 4.2.

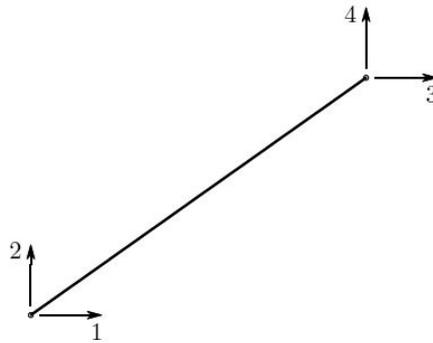


Figura 4.2 - Barra com quatro graus de liberdade

$$\mathbf{K} = \frac{AE_t}{l_0^2 l} \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y & -l_x^2 & -l_x l_y \\ l_x l_y & l_y^2 & -l_x l_y & -l_y^2 \\ -l_x^2 & -l_x l_y & l_x^2 & l_x l_y \\ -l_x l_y & -l_y^2 & l_x l_y & l_y^2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$+ \frac{N}{l^3} \begin{bmatrix} l^2 - l_x^2 & -l_x l_y & -l^2 + l_x^2 & l_x l_y \\ -l_x l_y & l^2 - l_y^2 & l_x l_y & -l^2 + l_y^2 \\ -l^2 + l_x^2 & l_x l_y & l^2 - l_x^2 & -l_x l_y \\ l_x l_y & -l^2 + l_y^2 & -l_x l_y & l^2 - l_y^2 \end{bmatrix}$$

No caso de um sistema tridimensional (seis coordenadas), como o que está representado na Figura 4.3., a respetiva matriz de rigidez \mathbf{K} , definida em (4.23), pode facilmente ser obtida por generalização da matriz apresentada para um sistema de quatro coordenadas. Importa referir

que o elemento utilizado na primeira ferramenta corresponde a este mesmo elemento, representado na Figura 4.3.

A extensão da matriz de rigidez ao espaço tridimensional é feita através da consideração das parcelas que dizem respeito às coordenadas z_0 e z_1 e aos deslocamentos w_0 e w_1 na direção z .

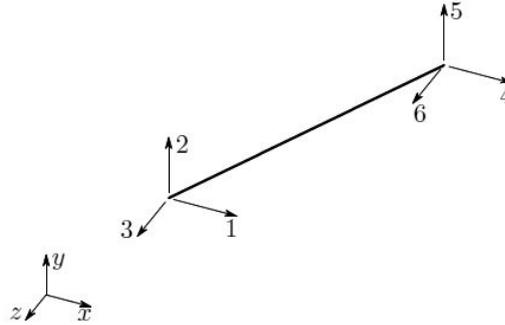


Figura 4.3 - Coordenadas da barra no caso tridimensional

$$\mathbf{K} = \frac{AE_t}{l_0^2 l} \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y & l_x l_z & -l_x^2 & -l_x l_y & -l_x l_z \\ l_x l_y & l_y^2 & l_y l_z & -l_x l_y & -l_y^2 & -l_y l_z \\ l_x l_z & l_y l_z & l_z^2 & -l_x l_z & -l_y l_z & -l_z^2 \\ -l_x^2 & -l_x l_y & -l_x l_z & l_x^2 & l_x l_y & l_x l_z \\ -l_x l_y & -l_y^2 & -l_y l_z & l_x l_y & l_y^2 & l_y l_z \\ -l_x l_z & -l_y l_z & -l_z^2 & l_x l_z & l_y l_z & l_z^2 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$+ \frac{N}{l^3} \begin{bmatrix} l^2 - l_x^2 & -l_x l_y & -l_x l_z & -l^2 + l_x^2 & l_x l_y & l_x l_z \\ -l_x l_y & l^2 - l_y^2 & -l_y l_z & l_x l_y & -l^2 + l_y^2 & l_y l_z \\ -l_x l_z & -l_y l_z & l^2 - l_z^2 & l_x l_z & l_y l_z & -l^2 + l_z^2 \\ -l^2 + l_x^2 & l_x l_y & l_x l_z & l^2 - l_x^2 & -l_x l_y & -l_x l_z \\ l_x l_y & -l^2 + l_y^2 & l_y l_z & -l_x l_y & l^2 - l_y^2 & -l_y l_z \\ l_x l_z & l_y l_z & -l^2 + l_z^2 & -l_x l_z & -l_y l_z & l^2 - l_z^2 \end{bmatrix}$$

Com:

$$l_z = z_1 + w_1 - z_0 - w_0 \quad (4.25)$$

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2} \quad (4.26)$$

Finalmente, as forças de fixação, no caso tridimensional são definidas pelas expressões (4.27) e (4.28).

$$\begin{cases} X_0 = -N \frac{l_x}{l} \\ Y_0 = -N \frac{l_y}{l} \\ Z_0 = -N \frac{l_z}{l} \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\begin{cases} X_1 = N \frac{l_x}{l} \\ Y_1 = N \frac{l_y}{l} \\ Z_1 = N \frac{l_z}{l} \end{cases} \quad (4.28)$$

4.1.2. Método de Newton-Raphson

Tal como descrito no documento Dias da Silva, “Introdução à Análise Não-Linear de Estruturas” (2002), o Método de Newton-Raphson apresenta a grande vantagem de na sua utilização permitir que haja sempre convergência desde que os valores de partida das incógnitas – os deslocamentos nas coordenadas cinemáticas – se encontrem suficientemente próximos da solução.

No caso de a estrutura ter apenas um grau de liberdade, o método de Newton-Raphson toma a forma apresentada na expressão (4.29):

$$D_{i+1} = D_i + \left(\frac{dF}{dD} \right)_i^{-1} [P - F(D_i)] \Rightarrow \left(\frac{dF}{dD} \right)_i (D_{i+1} - D_i) = P - F(D_i) \quad (4.29)$$

sendo que a quantidade $\left(\frac{dF}{dD} \right)_i$ representa a rigidez tangente da estrutura na configuração deformada definida por D_i .

No caso de uma estrutura com n graus de liberdade, como é o caso das estruturas em análise, o método de Newton-Raphson segue o algoritmo apresentado em (4.31) sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez tangente da estrutura, relativa às n coordenadas cinemáticas consideradas.

$$\mathbf{D}_{i+1} = \mathbf{D}_i + [\mathbf{K}]_i^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{F}_i) \quad (4.30)$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix}_i + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial D_1} & \frac{\partial F_1}{\partial D_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial D_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial D_1} & \frac{\partial F_2}{\partial D_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial D_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial D_1} & \frac{\partial F_n}{\partial D_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial D_n} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}_i \right) \quad (4.31)$$

4.2. Análise de Estabilidade e Determinação de Esforços

Depois de apresentadas as bases teóricas para o desenvolvimento da primeira ferramenta, bem como a exposição do Método dos Deslocamentos comum às duas, é agora necessário aprofundar os conceitos que serviram de base ao desenvolvimento da segunda ferramenta no que diz respeito à análise global de estabilidade elástica e cálculo de esforços de estruturas reticuladas tridimensionais constituídas por materiais de comportamento elástico linear.

O cálculo da carga crítica de instabilidade elástica desempenha um papel muito importante na verificação da segurança de estruturas reticulada, principalmente em estruturas esbeltas ou constituídas por elementos esbeltos. Os conceitos teóricos descritos de seguida dizem respeito ao cálculo da carga crítica global de uma estrutura reticulada tridimensional em que o material se encontra em fase elástica linear.

A análise de estabilidade aqui desenvolvida é feita com base na formulação linearizada da relação entre o esforço axial e a rigidez de flexão de peças lineares comprimidas, de modo a permitir a resolução do problema através de um algoritmo de valores próprios.

Também aqui são descritos os conceitos base considerados para o elemento barra utilizado no desenvolvimento da ferramenta, sendo explicitadas as considerações efetuadas para definição da sub-rotina relativa aos cossenos diretores dos elementos.

Importa referir que as quatro secções apresentadas de seguida baseiam-se no documento Dias da Silva, “Cálculo de cargas críticas globais e deslocamentos de segunda ordem em estruturas tridimensionais” (2007).

4.2.1. Teoria Base

A carga crítica de uma estrutura é a carga para a qual a estrutura atinge uma fase de transição entre a situação estável e a situação instável de deformação. Nesta fase é possível fazer variar a deformação da estrutura sem que seja necessário alterar os esforços internos que equilibram as forças exteriores aplicadas. Nesta fase diz-se que ocorre uma situação de equilíbrio indiferente, a qual é definida pelo chamado modo de instabilidade. A carga crítica da estrutura é a carga que corresponde à menor das cargas, para as quais se verifica equilíbrio indiferente.

Numa estrutura discretizada para análise pelo método dos deslocamentos, a relação entre um acréscimo infinitesimal do campo de deslocamentos e o correspondente acréscimo das forças nas coordenadas cinemáticas é definido pela matriz de rigidez tangente da estrutura, ou seja:

$$dF = K dD. \quad (4.32)$$

De acordo com o indicado no início desta subsecção, na situação crítica é possível ter um valor dD diferente de zero sem que haja alteração dos esforços internos, ou seja, com $dD = 0$. Sendo assim, com elementos não nulos no vetor dD , na situação crítica verifica-se que:

$$K dD = 0. \quad (4.33)$$

Conclui-se então que a matriz de rigidez é singular na situação crítica dado que esta última condição não poderia ser obedecida com elementos não nulos no vetor dD . Consequentemente a determinação da carga crítica pelo método dos deslocamentos pode ser efetuada determinando o menor valor das cargas aplicadas que torna singular a matriz de rigidez.

As cargas exteriores aplicadas têm influência na matriz de rigidez de duas formas: diretamente através das tensões, fazendo com que o material saia do regime linear alterando assim o seu módulo de elasticidade tangente, através da influência dos esforços internos na componente geométrica da rigidez. Para a presente análise considera-se que o material não sai do regime elástico linear, pelo que a determinação da carga crítica basear-se-á no cálculo da influência dos esforços axiais na matriz de rigidez tangente da estrutura.

4.2.2. Rigidez de flexão de um elemento barra

De um ponto de vista teórico teria todo o interesse considerar os modos de instabilidade por torção localizada de um elemento, podendo estes resultar da interação entre o esforço axial e o momento torsor, ou da deformação axial pura. No entanto sabe-se que, a relevância prática destes modos de instabilidade é muito reduzida. Pelo contrário, a instabilidade lateral (bambeamento) apresenta uma grande relevância prática, apresentando habitualmente um carácter local. Este tipo de instabilidade resulta da interação entre o momento fletor e a rigidez de torção. Conclui-se então, que a determinação da carga crítica global de uma estrutura reticulada pode ser feita com boa aproximação considerando apenas a influência do esforço axial na componente geométrica da rigidez de flexão.

Considere-se um elemento barra, com quatro graus de liberdade, Figura 4.4, com rigidez de flexão EI e sujeito a um esforço axial de compressão N . A matriz de rigidez correspondente resultante da interação entre o esforço axial e a deformação por flexão é dada pela expressão (4.34).



Figura 4.4 – Graus de liberdade de flexão plana de um elemento barra

$$\mathbf{K} = \frac{N}{2 - 2 \cos(kl) - kl \sin(kl)} \times \quad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix}
 k \sin(kl) & \cos(kl) - 1 & k \sin(kl) & \cos(kl) - 1 \\
 \cos(kl) - 1 & \frac{\sin(kl) - kl \cos(kl)}{k} & \cos(kl) - 1 & \frac{kl - \sin(kl)}{k} \\
 k \sin(kl) & \cos(kl) - 1 & k \sin(kl) & \cos(kl) - 1 \\
 \cos(kl) - 1 & \frac{kl - \sin(kl)}{k} & \cos(kl) - 1 & \frac{\sin(kl) - kl \cos(kl)}{k}
 \end{bmatrix}$$

Com:

$$k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

Para um cálculo mais rigoroso da carga crítica é também necessário contabilizar o efeito benéfico das trações na estabilidade da estrutura. No caso de o esforço axial ser de tração, a expressão (4.35) é substituída por:

$$\mathbf{K} = \frac{N}{2 - 2 \cosh(kl) - kl \sinh(kl)} \times \quad (4.35)$$

$$\begin{bmatrix} k \sinh(kl) & 1 - \cosh(kl) & k \sinh(kl) & 1 - \cosh(kl) \\ 1 - \cosh(kl) & \frac{kl \cosh(kl) - \sinh(kl)}{k} & \cos(kl) - 1 & \frac{\sinh(kl) - kl}{k} \\ k \sinh(kl) & 1 - \cosh(kl) & k \sinh(kl) & 1 - \cosh(kl) \\ 1 - \cosh(kl) & \frac{\sinh(kl) - kl}{k} & 1 - \cosh(kl) & \frac{kl \cosh(kl) - \sinh(kl)}{k} \end{bmatrix}.$$

Importa referir que as expressões (4.34) e (4.35) só são válidas se as rotações forem suficientemente pequenas para poderem ser consideradas infinitesimais, ou mais concretamente, enquanto o valor do ângulo de rotação se mantiver próximo do valor do seu seno. Em termos práticos, o limite de aplicabilidade destas expressões é bastante alto, podendo considerar-se como seguro um limite de rotação de 30°.

O valor da carga crítica de uma estrutura pode ser calculado analisando o valor do determinante da matriz de rigidez da estrutura para valores crescentes das forças aplicadas, identificando assim o valor da carga que a anula. O correspondente modo de instabilidade pode ser calculado adotando um valor arbitrário d para o deslocamento no grau de liberdade i da estrutura e resolvendo o sistema de equações apresentado de seguida.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1i} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \cdots & K_{ii} & \cdots & K_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{ni} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ d \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Com: } K_{ii} = 1 \text{ e } K_{ij} = 0 \text{ (} j \neq i \text{)}$$

Embora este método seja exato a sua utilização só é viável para um número relativamente pequeno de graus de liberdade. Dado que as funções contidas na expressão (4.34) são descontínuas, passando de $-\infty$ para $+\infty$ quando o denominador passa por zero, os incrementos

de carga tem que ser muito pequenos para detetar efetivamente a primeira passagem por zero do determinante de \mathbf{K} e não uma subsequente. Além disso, o determinante da matriz de rigidez de uma estrutura com muitos graus de liberdade facilmente excede o valor máximo que pode ser tratado pelo computador ("overflow").

Os problemas de instabilidade podem ser formulados como um problema algébrico de valores próprios quando: (1) o material tem comportamento elástico linear, (2) os deslocamentos são suficientemente pequenos para poderem ser considerados infinitesimais e (3) o deslocamento num ponto qualquer da estrutura é função linear dos deslocamentos nas coordenadas cinemáticas. Nestas condições a rigidez material é constante e a geométrica é proporcional à carga. No entanto, para o problema em estudo na presente dissertação, a última condição enunciada não é verificada o que se reflete na forma das expressões (4.34) e (4.35), em que não é possível identificar as parcelas material e geométrica. Este problema pode ser contornado linearizando as funções contidas nas expressões (4.34) e (4.35).

4.2.3. Linearização da matriz de rigidez

Tal como referido, a análise de estabilidade aqui desenvolvida é feita com base na formulação linearizada da relação entre o esforço axial e a rigidez de flexão de peças lineares comprimidas. De modo a obter uma formulação de valores próprios para o problema da determinação das cargas e modos de instabilidade, as funções que definem os elementos da matriz de rigidez em função do esforço axial são substituídas por retas tangentes à curva nos pontos de abcissa nula, ou seja, onde o esforço axial é nulo. As expressões (4.34) e (4.35) são substituídas pela expressão (4.37), sendo o valor do esforços axial positivo em tração.

$$\mathbf{K} = EI \mathbf{K}_m + N \mathbf{K}_g \quad (4.36)$$

$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} + N \begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{30}{l} \\ \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{30}{l} & -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

A matriz de rigidez divide-se assim em duas parcelas: rigidez material e rigidez geométrica. A parcela correspondente à rigidez material é independente do valor da carga aplicada enquanto a rigidez geométrica caracteriza-se por ser proporcional ao esforço axial e independente do módulo de elasticidade do material. A determinação dos fatores λ , pelos quais deve ser multiplicada a carga atuante para se obter situações de equilíbrio indiferente e correspondentes modos de deformação, pode ser feita pela última das seguintes expressões:

$$\mathbf{K} \, d\mathbf{D} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{K}_m + \lambda \mathbf{K}_g) \, d\mathbf{D} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_m \, d\mathbf{D} = -\lambda \mathbf{K}_g \, d\mathbf{D} \quad (4.38)$$

em que \mathbf{K}_m representa a rigidez material e \mathbf{K}_g representa a rigidez geométrica da estrutura. A última das expressões (4.38) pode facilmente ser colocada na forma correspondente ao problema algébrico de valores próprios simétrico generalizado definido pela expressão (4.39) em que as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são simétricas e \mathbf{B} é positiva definida.

$$\mathbf{A} \, \mathbf{z} = \lambda' \mathbf{B} \, \mathbf{z} \quad (4.39)$$

Rearranjando a última das expressões (4.38), pode dar-se-lhe uma forma correspondente à expressão (4.39).

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{K}_g \\ \mathbf{B} = \mathbf{K}_m \\ \mathbf{z} = d\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{K}_g \, d\mathbf{D} = -\frac{1}{\lambda} \mathbf{K}_m \, d\mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{A} \, \mathbf{z} = \lambda' \mathbf{B} \, \mathbf{z} \\ \lambda' = -\frac{1}{\lambda} \end{cases} \quad (4.40)$$

Na versão original em *Fortran* da ferramenta numérica aqui reprogramada em *Octave* e *MATLAB*, a resolução do problema algébrico de valores próprios, bem como a do sistema de equações correspondente à determinação dos esforços na estrutura pelo método dos deslocamentos, são efetuadas recorrendo diretamente à biblioteca LAPACK². Esta biblioteca encontra-se também na base de muitas das funções algébricas incluídas no *Octave* e *MATLAB*.

A linearização da matriz de rigidez introduz erros na solução, os quais podem, no entanto, ser minimizados até um valor desprezável subdividindo as barras da estrutura. Desta maneira garante-se que os elementos da matriz de rigidez de cada barra só são utilizados numa gama

² Biblioteca LAPACK – Biblioteca de sub-rotinas para solução de problemas de álgebra linear.

de esforços axiais de compressão muito inferior ao valor crítico da barra. Nesta gama de esforços axiais as curvas exatas e as correspondentes retas de aproximação são praticamente coincidentes.

4.2.4. Definição do Sistema de eixos local do elemento barra

O sistema de eixos global da malha plana ou estrutura em casca, consoante a ferramenta em causa, nomeadamente, x, y, z apresenta o eixo y na direção vertical. No programa de análise de estruturas reticuladas, ou seja, na segunda ferramenta numérica, o sistema de eixos do elemento barra, x', y', z' apresenta o eixo z' segundo o eixo da barra, sendo o sentido do eixo definido pelos pontos nodais da extremidade da barra, Figura 4.5.

Os eixos x' e y' dos elementos barra são os eixos principais de inércia da secção transversal da peça, sendo a orientação do eixo x' definida pelo ângulo α entre o eixo x' e o plano vertical que contém a barra. Este ângulo é medido entre o semieixo x' positivo e o plano vertical acima da barra, sendo considerado positivo no sentido retrógrado quando observado segundo o sentido positivo de z' , Figura 4.5.

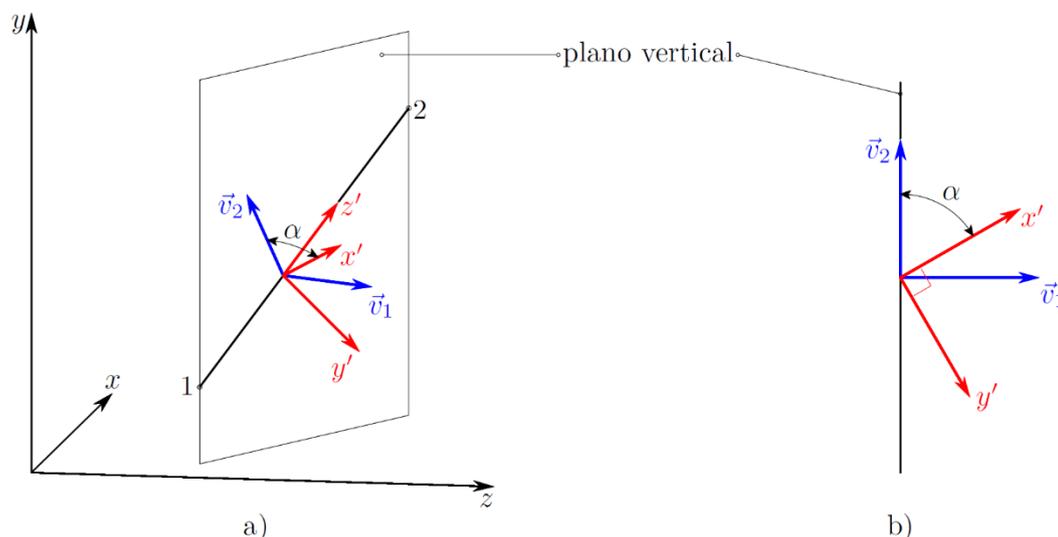


Figura 4.5 – Sistema de eixos do elemento barra: a) Perspetiva b) Projeção no plano perpendicular a z'

Os vetores auxiliares \vec{v}_1 e \vec{v}_2 correspondem a um vetor horizontal perpendicular ao plano vertical que contém a barra e um vetor do plano vertical, perpendicular a z' , respetivamente, como pode ser visualizado na Figura 4.6.

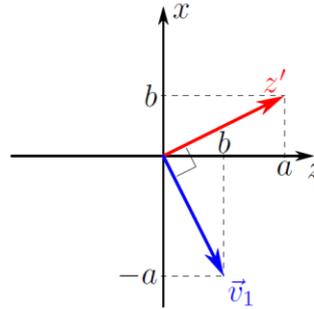


Figura 4.6 - Projeção horizontal dos vetores z' e \vec{v}_1

Os cossenos diretores do vetor \vec{v}_1 são facilmente determinados através da projeção normalizada de z' no plano zx , em que l , m e n representam os cossenos diretores de cada vetor no sistema de eixos global, expressões (4.41), (4.42) e (4.43).

$$l_{v_1} = -\frac{n_{z'}}{\sqrt{l_{z'}^2 + n_{z'}^2}} \quad (4.41)$$

$$m_{v_1} = 0 \quad (4.42)$$

$$n_{v_1} = -\frac{l_{z'}}{\sqrt{l_{z'}^2 + n_{z'}^2}} \quad (4.43)$$

Efetuando o produto vetorial dos vetores \vec{v}_1 e z' , obtém-se o vetor \vec{v}_2 definido pelos cossenos diretores apresentados nas expressões (4.44), (4.45) e (4.46).

$$l_{v_2} = -m_{z'}n_{v_1} \quad (4.44)$$

$$m_{v_2} = -l_{v_1}n_{z'} + l_{z'}n_{v_1} \quad (4.45)$$

$$n_{v_2} = l_{v_1}m_{z'} \quad (4.46)$$

Os cossenos diretores do eixo x' podem ser calculados através da definição de produto escalar, através da qual é possível definir o sistema de equações (4.47) que permiti obter $l_{x'}$, $m_{x'}$ e $n_{x'}$ através da sua resolução.

$$\begin{bmatrix} l_{z'} & m_{z'} & n_{z'} \\ l_{v_1} & m_{v_1} & n_{v_1} \\ l_{v_2} & m_{v_2} & n_{v_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_{x'} \\ m_{x'} \\ n_{x'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

Finalmente, os cossenos diretores do eixo y' são calculados através do produto vetorial dos vetores z' e x' , expressões (4.48), (4.49) e (4.50).

$$l_{y'} = m_{z'}n_{x'} - m_{x'}n_{z'} \quad (4.48)$$

$$m_{y'} = -l_{z'}n_{x'} + l_{x'}n_{z'} \quad (4.49)$$

$$n_{y'} = l_{z'}m_{x'} - l_{x'}m_{z'} \quad (4.50)$$

No entanto, no caso particular em que a barra tem eixo vertical o método descrito não pode ser utilizado. Nesta situação, o eixo z' é paralelo ao eixo global y . Então, a orientação do eixo principal de inércia da secção x' é definida pelo ângulo α entre os semieixos positivos x e x' , como se esquemmatiza na Figura 4.7.

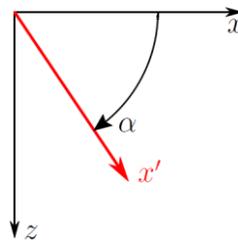


Figura 4.7- Definição do sistema de eixos no caso das barras verticais

Este ângulo é considerado positivo quando progride de x para z , pelo que os cossenos diretores de x' tomam os valores correspondentes às expressões (4.51), (4.52) e (4.53) e os cossenos diretores y' valores iguais aos das expressões (4.48), (4.49) e (4.50).

$$l_{x'} = \cos \alpha \quad (4.51)$$

$$m_{x'} = 0 \quad (4.52)$$

$$n_{x'} = \sin \alpha \quad (4.53)$$

A Figura 4.8 corresponde ao elemento barra utilizado na segunda ferramenta sendo caracterizado por seis graus de liberdade em cada extremidade, três de translação (representados por setas simples) e três de rotação (representados por setas duplas).

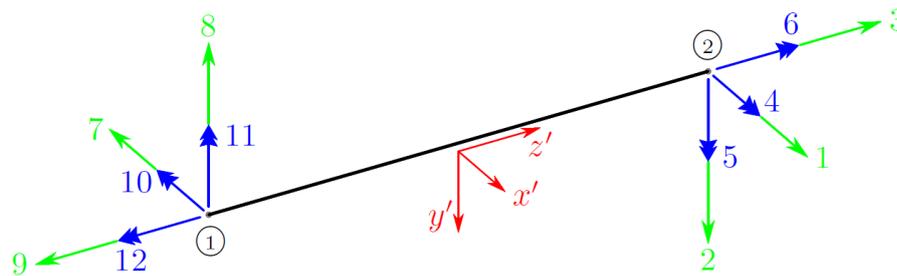


Figura 4.8 - Graus de liberdade do elemento barra.

5. DESCRIÇÃO DAS FERRAMENTAS NUMÉRICAS

Depois de apresentados os fundamentos teóricos que serviram de base ao desenvolvimento das ferramentas numéricas em estudo, no presente capítulo será apresentado de forma resumida o funcionamento das mesmas, nomeadamente no que diz respeito à entrada de dados (número de elementos, número de nós, as suas coordenadas, secções transversais, forças aplicadas e graus de liberdade bloqueados), lei constitutiva utilizada, processos de cálculo, entre outros aspetos relevantes para a compreensão do funcionamento das ferramentas numéricas.

Ambas as ferramentas de cálculo iniciam-se com a entrada de dados onde são atribuídos os valores dos parâmetros relativos aos elementos constituintes da malha plana ou da estrutura em casca. A malha plana aqui mencionada é utilizada ao nível da primeira ferramenta, na qual é iniciado o processo de cálculo através da configuração indeformada dessa mesma malha para obtenção da forma geométrica de equilíbrio a adotar para a casca reticulada resultante. Através da segunda ferramenta essa mesma casca reticulada é então analisada de modo a determinar os fatores de carga crítica da estrutura e respetivos esforços.

As ferramentas numéricas em estudo começaram por ser desenvolvidas primeiramente em linguagem *Octave* sendo posteriormente, após o seu correto funcionamento nesta linguagem, adaptadas para a linguagem *MATLAB*. O processo de adaptação das ferramentas à segunda linguagem foi relativamente simples uma vez que o *Octave* segue a vertente numérica do *MATLAB* sendo bastante similar o modo de formulação dos programas de cálculo. De modo a simplificar a compreensão do funcionamento das ferramentas numéricas e os procedimentos utilizados ao longo de cada uma delas, estas serão descritas de modo genérico, sendo no final deste capítulo efetuada uma breve comparação entre as diferenças na definição dos programas para as duas linguagens aqui consideradas.

A secção seguinte deste capítulo divide-se em três subsecções. A primeira contém uma breve explicação do funcionamento da entrada de dados, a qual é praticamente similar em ambas as ferramentas numéricas sendo por este motivo explicada numa única subsecção. As duas subsecções seguintes dizem respeito a cada uma das ferramentas numéricas de modo a descrever o algoritmo de cálculo constituinte de cada uma isoladamente, uma vez que apresentam processos de cálculo diferentes.

5.1. Algoritmos de cálculo

5.1.1. Entrada de dados

O programa de cálculo é iniciado com a introdução dos dados relativos ao número de nós, coordenadas dos mesmos, número de elementos barra, nós correspondentes a cada elemento, secções transversais, forças aplicadas e graus de liberdade bloqueados, os quais caracterizam as condições de apoio da estrutura. Todos estes dados são conhecidos inicialmente sendo apenas necessário o seu tratamento de modo a serem inseridos no programa de cálculo sob a forma de matrizes de modo facilitar a sua utilização ao longo do mesmo.

A informação relativa às coordenadas dos nós é armazenada numa matriz de dimensão $nn \times 3$, designada matriz \mathbf{C} , representada na expressão (5.1), em que nn corresponde ao número de nós sendo definidas para cada um deles as coordenadas x , y e z correspondentes.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{nn} & y_{nn} & z_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Para a primeira ferramenta numérica as coordenadas dos nós são conhecidas inicialmente, definindo a malha plana a analisar. No entanto, para a segunda ferramenta as coordenadas dos nós a introduzir correspondem às coordenadas obtidas para a configuração deformada de equilíbrio da malha, a qual corresponde à casca reticulada analisada na segunda ferramenta. Assim sendo, as coordenadas dos nós da configuração deformada da malha são armazenadas num ficheiro separado do programa de cálculo, com o formato da matriz \mathbf{C} , para posteriormente ser utilizado na segunda ferramenta numérica.

A informação relativa aos nós constituintes de cada barra, ao ângulo α que permite definir a orientação do elemento em relação aos eixos globais, bem como as propriedades da secção transversal, nomeadamente área da secção, A , e os momentos de inércia de flexão e torção, I e J respetivamente, é introduzida através de uma matriz denominada **bar**. Esta matriz tem dimensão $nb \times 5$, onde nb corresponde ao número de barras. Na expressão (5.2) é indicado formato da matriz **bar**.

A matriz **bar** indicada na expressão (5.2) corresponde à matriz utilizada na segunda ferramenta numérica. Para a primeira ferramenta esta matriz é definida apenas com as três

colunas respeitantes aos números de nós das barras, $n1$ e $n2$, e respetiva área da secção transversal, A , formando uma matriz de $nb \times 3$.

$$\mathbf{bar} = \begin{bmatrix} n1_1 & n2_1 & \alpha_1 & A_1 & I_1 & J_1 \\ n1_2 & n2_2 & \alpha_2 & A_2 & I_2 & J_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n1_{nb} & n2_{nb} & \alpha_{nb} & A_{nb} & I_{nb} & J_{nb} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

As propriedades das secções a inserir para a primeira ferramenta são apenas a área da secção transversal, uma vez que estamos na presença de esforço axial puro, e o módulo de elasticidade, para caracterização do material. Importa referir que a área da secção e o módulo de elasticidade são apenas fictícios de modo a poder ser determinada a configuração deformada da malha reticulada. Na segunda ferramenta, a forma geométrica da secção tem obviamente influência na análise estrutural. Nos dois exemplos de casca reticulada apresentados mais à frente foi utilizada uma secção transversal circular oca, para a qual além da área de secção transversal foram introduzidos os parâmetros relativos à inercia de flexão e torção da mesma. A escolha deste tipo de secção prende-se com o facto de as secções circulares ocas apresentarem um melhor comportamento à torção, principalmente a fenómenos de instabilidade por flexão-torção. O processo de determinação da secção transversal e os valores dos parâmetros necessários são indicados no capítulo 6 para cada caso de estudo.

A definição do carregamento aplicado é feita através de uma matriz denominada **cargas** de dimensão $ncargas \times 3$, em que $ncargas$ corresponde ao número de graus de liberdade segundo os quais estão aplicadas cargas e que apresenta a forma indicada na expressão (5.3) sendo nn o número do nó bloqueado, gdl o grau de liberdade bloqueado relativo aos eixos globais da estrutura e P o valor da carga aplicada.

$$\mathbf{cargas} = \begin{bmatrix} nn & gdl & P \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

A indicação dos apoios da estrutura, ou seja, dos graus de liberdade bloqueados é feita com recurso a uma matriz $nblock \times 2$ em que $nblock$ corresponde ao número de graus de liberdade bloqueados sendo a matriz denominada por **apoios**, como indicado na expressão (5.4), com nn correspondente ao número do nó bloqueado e gdl o grau de liberdade bloqueado relativo aos eixos globais da barra.

$$\mathbf{apoios} = \begin{bmatrix} nn & gdl \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

A determinação da matriz de rigidez referente às coordenadas globais da estrutura é calculada recorrendo à matriz de incidência, aqui denominada por matriz \mathbf{A} , tal como indicado na expressão (5.5), sendo \mathbf{K}_d a matriz de rigidez da estrutura desmontada. Esta última matriz é definida pelas sub-matrizes \mathbf{K}_i , com $i = 1, \dots, n_b$, que correspondem às matrizes de rigidez de cada barra, referentes às suas coordenadas locais, expressão (5.6).

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_d \mathbf{A} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & & & \\ & \mathbf{K}_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \mathbf{K}_{n_b} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Para a primeira ferramenta o sistema de eixos local das barras é paralelo ao sistema de eixos global levando assim à definição de uma matriz de incidência constituída apenas por 0 e 1.

Os elementos da matriz de incidência correspondentes à barra i são representados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Matriz de incidência correspondente à barra i

	$j_1 + 1$	$j_1 + 2$	$j_1 + 3$	$j_2 + 1$	$j_2 + 2$	$j_2 + 3$
$i_0 + 1$	1	0	0			
$i_0 + 2$	0	1	0			
$i_0 + 3$	0	0	1			
$i_0 + 4$				1	0	0
$i_0 + 5$				0	1	0
$i_0 + 6$				0	0	1

Sendo $n1$ o nó correspondente à extremidade 1 da barra e $n2$ o nó relativo à extremidade 2 da mesma, $i_0 = 6 \times (i - 1)$, $j_1 = (n1 - 1) \times 3$ e $j_2 = (n2 - 1) \times 3$.

Para definição destas matrizes na ferramenta numérica 1 foi definida uma matriz auxiliar \mathbf{A}_{b0} , indicada na expressão (5.7), de modo a construir uma versão-base da matriz de incidência da

estrutura, aqui denominada de \mathbf{A}_0 a qual inclui também os graus de liberdade que posteriormente serão eliminados pelos apoios. Esta matriz é construída através de um ciclo em que são calculadas as matrizes de incidência para cada barra e agrupadas na matriz de incidência da estrutura \mathbf{A}_0 , conforme a Tabela 5.1 e as expressões (5.8).

$$\mathbf{A}_{b_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 (i_0+1: i_0+3, j_1+1: j_1+3) &= \mathbf{A}_{b_0} \\ \mathbf{A}_0 (i_0+4: i_0+6, j_1+4: j_1+6) &= \mathbf{A}_{b_0} \end{aligned} \quad (5.8)$$

A nomenclatura utilizada para definição da matriz \mathbf{A}_0 em (5.8), e posteriormente utilizada ao longo do presente capítulo, indica que, admitindo um caso genérico, $\mathbf{X}_{(a:b, c:d)} = \mathbf{Y}$, os valores da matriz \mathbf{X} desde a linha a à linha b e da coluna c à coluna d , $(a:b, c:d)$, tomam os valores da matriz \mathbf{Y} . O mesmo acontece para a definição de vetores, por exemplo: $\mathbf{F}_{(a:b)} = \mathbf{G}$ os valores do vetor \mathbf{F} desde a linha a à linha b , $(a:b)$, tomam os valores do vetor \mathbf{G} .

Para a segunda ferramenta, a determinação da matriz de incidência da estrutura é feita de modo análogo à primeira com a diferença de que o elemento barra utilizado corresponde ao elemento representado na Figura 4.8, em que o ângulo α determina os valores dos cossenos diretores dos eixos locais da barra, sendo utilizada uma sub-rotina para cálculo dos mesmos baseada nos conceitos enunciados no ponto 4.2.4.

Os elementos da matriz de incidência correspondentes à barra i são representados na Tabela 5.2.

Para a segunda ferramenta numérica foi igualmente definida uma matriz auxiliar \mathbf{A}_{b_0} , indicada na expressão (5.9), de modo a construir a matriz de incidência da estrutura, \mathbf{A}_0 . Esta matriz é construída igualmente através de um ciclo em que são calculadas as matrizes de incidência para cada barra e agrupadas na matriz de incidência \mathbf{A}_0 como indicado em (5.10), de acordo com a Tabela 5.2.

Tabela 5.2 - Matriz de incidência correspondente à barra i

	$j_1 + 1$	$j_1 + 2$	$j_1 + 3$	$j_1 + 4$	$j_1 + 5$	$j_1 + 6$	$j_2 + 1$	$j_2 + 2$	$j_2 + 3$	$j_2 + 4$	$j_2 + 5$	$j_2 + 6$
$i_0 + 1$							$l_{x'}$	$m_{x'}$	$n_{x'}$			
$i_0 + 2$							$l_{y'}$	$m_{y'}$	$n_{y'}$			
$i_0 + 3$							$l_{z'}$	$m_{z'}$	$n_{z'}$			
$i_0 + 4$										$l_{x'}$	$m_{x'}$	$n_{x'}$
$i_0 + 5$										$l_{y'}$	$m_{y'}$	$n_{y'}$
$i_0 + 6$										$l_{z'}$	$m_{z'}$	$n_{z'}$
$i_0 + 7$	$-l_{x'}$	$-m_{x'}$	$-n_{x'}$									
$i_0 + 8$	$-l_{y'}$	$-m_{y'}$	$-n_{y'}$									
$i_0 + 9$	$-l_{z'}$	$-m_{z'}$	$-n_{z'}$									
$i_0 + 10$				$-l_{x'}$	$-m_{x'}$	$-n_{x'}$						
$i_0 + 11$				$-l_{y'}$	$-m_{y'}$	$-n_{y'}$						
$i_0 + 12$				$-l_{z'}$	$-m_{z'}$	$-n_{z'}$						

Sendo n_1 o nó correspondente à extremidade 1 da barra e n_2 o nó relativo à extremidade 2 da mesma, $i_0 = 12 \times (i - 1)$, $j_1 = (n_1 - 1) \times 6$ e $j_2 = (n_2 - 1) \times 6$.

$$\mathbf{A}_{b_0} = \begin{bmatrix} l_{x'} & m_{x'} & n_{x'} \\ l_{y'} & m_{y'} & n_{y'} \\ l_{z'} & m_{z'} & n_{z'} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{A}_{0(i_0+1: i_0+3, j_2+1: j_2+3)} = \mathbf{A}_{b_0} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{A}_{0(i_0+4: i_0+6, j_2+4: j_2+6)} = \mathbf{A}_{b_0}$$

$$\mathbf{A}_{0(i_0+7: i_0+9, j_1+1: j_1+3)} = -\mathbf{A}_{b_0}$$

$$\mathbf{A}_{0(i_0+10: i_0+12, j_1+4: j_1+6)} = -\mathbf{A}_{b_0}$$

Antes de iniciar o cálculo principal em cada ferramenta é necessário eliminar as colunas da matriz de incidência relativas aos graus de liberdade restringidos e também os elementos do vetor de cargas correspondentes aos mesmos graus. Para o vetor de carga \mathbf{P} é definido primeiro um vetor auxiliar \mathbf{P}_0 com o número de linhas igual ao número total de graus de liberdade da estrutura, incluindo os que serão posteriormente bloqueados pelos apoios ($nn \times 3$ na primeira ferramenta e $nn \times 6$ na segunda), no qual é indicado o valor da carga no grau de liberdade respectivo. Este vetor é construído com recurso a um ciclo, repetido tantas vezes quanto o número de graus de liberdade com carga aplicada, como definido em (5.11),

sendo $j = (cargas(i, 1) - 1) \times 3 + cargas(i, 2)$ e i o índice relativo à linha da matriz cargas indicada em (5.3).

$$P_0(j) = cargas(i, 3) \quad (5.11)$$

De modo a permitir a obtenção da matriz de incidência e do vetor de cargas relativos apenas aos graus de liberdade não bloqueados da estrutura é construído um vetor *sblock* que contém os números correspondentes a todos os graus de liberdade bloqueados, ordenados por ordem decrescente. Estes, no caso da segunda ferramenta, são determinados segundo a operação indicada em (5.12) correspondendo i ao número do grau de liberdade bloqueado, antes da introdução dos apoios.

$$sblock(i) = (apoio(i, 1) - 1) \times 6 + apoio(i, 2) \quad (5.12)$$

Na primeira ferramenta o 6 é substituído por 3. O valor *sblock* é seguidamente ordenado por ordem decrescente dos seus elementos.

A determinação da matriz de incidência da estrutura, denominada por \mathbf{A} , e do vetor de cargas, denominado \mathbf{P} , é feita retirando as colunas da matriz de incidência \mathbf{A}_0 e os elementos do vetor de cargas \mathbf{P}_0 relativos aos graus de liberdade restringidos. Ao retirar uma coluna da matriz de incidência relativa a um grau de liberdade restringido todas as colunas posteriores ocuparão uma posição -1 relativamente à posição anterior. O mesmo acontece para o vetor cargas relativamente aos elementos correspondentes aos graus de liberdade restringidos: ao retirar uma linha correspondente a um grau de liberdade restringido, as linhas posteriores passarão a ocupar uma posição -1 em relação à posição anterior. O processo descrito é definido pelas expressões (5.13) e (5.14), em que j o número do grau de liberdade bloqueado, $j = sblock(i)$, $nla = nb \times 12$ ($nb \times 6$ na primeira ferramenta), $ngl0 = nn \times 6$ ($nn \times 3$ na primeira ferramenta) e $ngl = ngl0 - nblock$,

$$\mathbf{A}_{0(1:nla, j:ngl0-1)} = \mathbf{A}_{0(1:nla, j+1:ngl0)} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{0(1:nla, 1:ngl)}$$

$$\mathbf{P}_{0(j:ngl0-1)} = \mathbf{P}_{0(j+1:ngl0)} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{0(1:ngl)}$$

Além da inserção de dados foi também necessário para a definição dos principais cálculos constituintes das ferramentas a construção de sub-rotinas aquando do início do programa de cálculo de modo a serem posteriormente utilizados quando necessário. As sub-rotinas são definidas com recurso à instrução “function” existente em ambas as linguagens de programação, sendo indicado o seu algoritmo na subsecção respetiva a cada ferramenta.

5.1.2. Ferramenta numérica 1: Determinação da forma geométrica

Tal como referido, antes do início do cálculo principal é necessário definir as sub-rotinas necessárias para efetuar os cálculos pretendidos ao nível do corpo principal do programa. Para a primeira ferramenta numérica é necessário a definição de uma sub-rotina que permite a determinação da matriz de rigidez \mathbf{K} , dada pela expressão (4.24), e o vetor de forças de fixação \mathbf{F} , dado pelas expressões (4.27) e (4.28) à qual se deu o nome de “Ciclo das Barras”. Os cálculos efetuados com recurso a esta sub-rotina são indicados ao longo da apresentação da formulação da ferramenta, de modo a facilitar a compreensão da mesma.

Definidas todas as informações necessárias iniciais é então dado início ao cálculo principal do programa. Este cálculo consiste num processo iterativo onde são determinadas a matriz de rigidez e as forças de fixação que permitem posteriormente o cálculo dos deslocamentos através da expressão (4.29). O processo iterativo aqui mencionado repete-se tantas vezes quanto necessário para que seja atingida a convergência e conseqüentemente a solução para o valor dos deslocamentos, que definem a configuração deformada correspondente à forma geométrica de equilíbrio para a carga atuante.

Aquando do início do processo iterativo são calculados os deslocamentos da estrutura desmontada \mathbf{D}_d com recurso à matriz de incidência \mathbf{A} e ao vetor deslocamentos globais da estrutura \mathbf{D} como indicado na expressão (5.15).

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{A} \mathbf{D} \quad (5.15)$$

Posto isto é dado início a um novo ciclo de iterações integrado no processo iterativo já em curso, o qual corresponde à sub-rotina indicada no início da presente subsecção, denominado “Ciclo das Barras”, onde são calculados os comprimentos, extensões, rigidez e forças de fixação para cada barra através do Método dos Deslocamentos. O ciclo é repetido tantas vezes quanto o número de elementos (barras) da estrutura.

De modo a determinar a matriz de rigidez \mathbf{K} e os vetores de forças de fixação \mathbf{F} , é primeiro determinado para cada barra o respetivo vetor de deslocamentos \mathbf{D}_b , como indicado na expressão (5.16), em que $i_0 = (i - 1) \times 6$, com i respeitante ao número de barras.

$$\mathbf{D}_b = \mathbf{D}_{d(i_0+1: i_0+6)} \quad (5.16)$$

Posteriormente é efetuado o cálculo dos comprimentos para cada barra como indicado na subsecção 4.11 sendo definidos pelas expressões (5.17), (5.18) e (5.19) e o respetivo valor da extensão de Green, ε_G (5.20)

$$l_x = x_1 + u_1 - x_0 - u_0 \quad (5.17)$$

$$l_y = y_1 + v_1 - y_0 - v_0$$

$$l_z = z_1 + w_1 - z_0 - w_0$$

$$l_0 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \quad (5.18)$$

$$l = \sqrt{(x_1 + u_1 - x_0 - u_0)^2 + (y_1 + v_1 - y_0 - v_0)^2 + (z_1 + w_1 - z_0 - w_0)^2} \quad (5.19)$$

$$\varepsilon_G = \frac{1}{2} \times \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} \quad (5.20)$$

A determinação da matriz de rigidez \mathbf{K} é dada pela expressão (4.24) e o vetor de forças de fixação \mathbf{F} pelas expressões (4.27) e (4.28), os quais são definidos com recurso a uma lei constitutiva linear, seguindo assim a expressão de Hooke, em que a tensão é resultado do produto entre o módulo de elasticidade E e a extensão de Green ε_G , como se indica na expressão (5.21).

$$\sigma = E \varepsilon_G \quad (5.21)$$

Durante o “Ciclo das Barras”, a matriz de rigidez e as forças de fixação para cada barra vão sendo armazenadas numa só matriz \mathbf{K}_d e num só vetor \mathbf{F}_d respetivamente, como indicado nas expressões (5.22) e (5.23), correspondentes à estrutura desmontada, em que $i_0 = (i - 1) \times 6$, com i respeitante ao número de barras.

$$\mathbf{F}_{d(i_0+1: i_0+6)} = \mathbf{F}_b \quad (5.22)$$

$$\mathbf{K}_{d(i_0+1:i_0+6, i_0+1:i_0+6)} = \mathbf{K}_b \quad (5.23)$$

Terminado o “Ciclo das Barras” a matriz de rigidez e as forças de fixação são "assembladas" numa só matriz \mathbf{K} e num só vetor \mathbf{F} através da matriz de incidência \mathbf{A} , tal como indicado respetivamente nas expressões (5.24) e (5.25).

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_d \mathbf{A} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}^T \mathbf{F}_d \quad (5.25)$$

Os deslocamentos são calculados através do Método de Newton-Raphson indicado na expressão (5.26), em que \mathbf{K} corresponde à matriz de rigidez tangente da estrutura, sendo posteriormente efetuado o respetivo teste de convergência.

$$\mathbf{D} = \mathbf{D} + \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{P} - \mathbf{F}) \quad (5.26)$$

A convergência do processo iterativo é definida pelo valor da norma do vetor de forças desequilibradas, $(\mathbf{P} - \mathbf{F})$, sendo o processo terminado quando este valor for inferior a 10^{-8} . Se a convergência se confirmar, então foi atingida a solução, caso contrário o processo é repetido admitindo desta vez os deslocamentos obtidos no final da iteração anterior como deslocamentos iniciais, sendo novamente reinicializados a matriz de rigidez \mathbf{K} e o vetor de forças de fixação \mathbf{F} .

Uma vez que a matriz de rigidez de uma malha plana, em que as barras têm apenas rigidez axial, com capacidade de deformação para fora do plano, é singular, é necessária uma rigidez inicial para dar início ao processo de cálculo. Esta rigidez pode ser obtida através de um campo de deslocamentos inicial. No entanto, dado o elevado número de barras das estruturas aqui consideradas, é mais simples uma alternativa que consiste em considerar um valor de esforço axial inicial que irá provocar uma rigidez geométrica inicial fictícia que permite dar início ao processo iterativo.

No final de todo o processo de cálculo o valor das coordenadas dos nós respeitantes à configuração deformada de equilíbrio determinada é armazenado num ficheiro independente para ser posteriormente reutilizado na segunda ferramenta como dados iniciais do problema.

De modo a facilitar a compreensão do algoritmo de cálculo descrito é apresentado na Figura 5.1 um fluxograma ilustrativo do seu funcionamento.

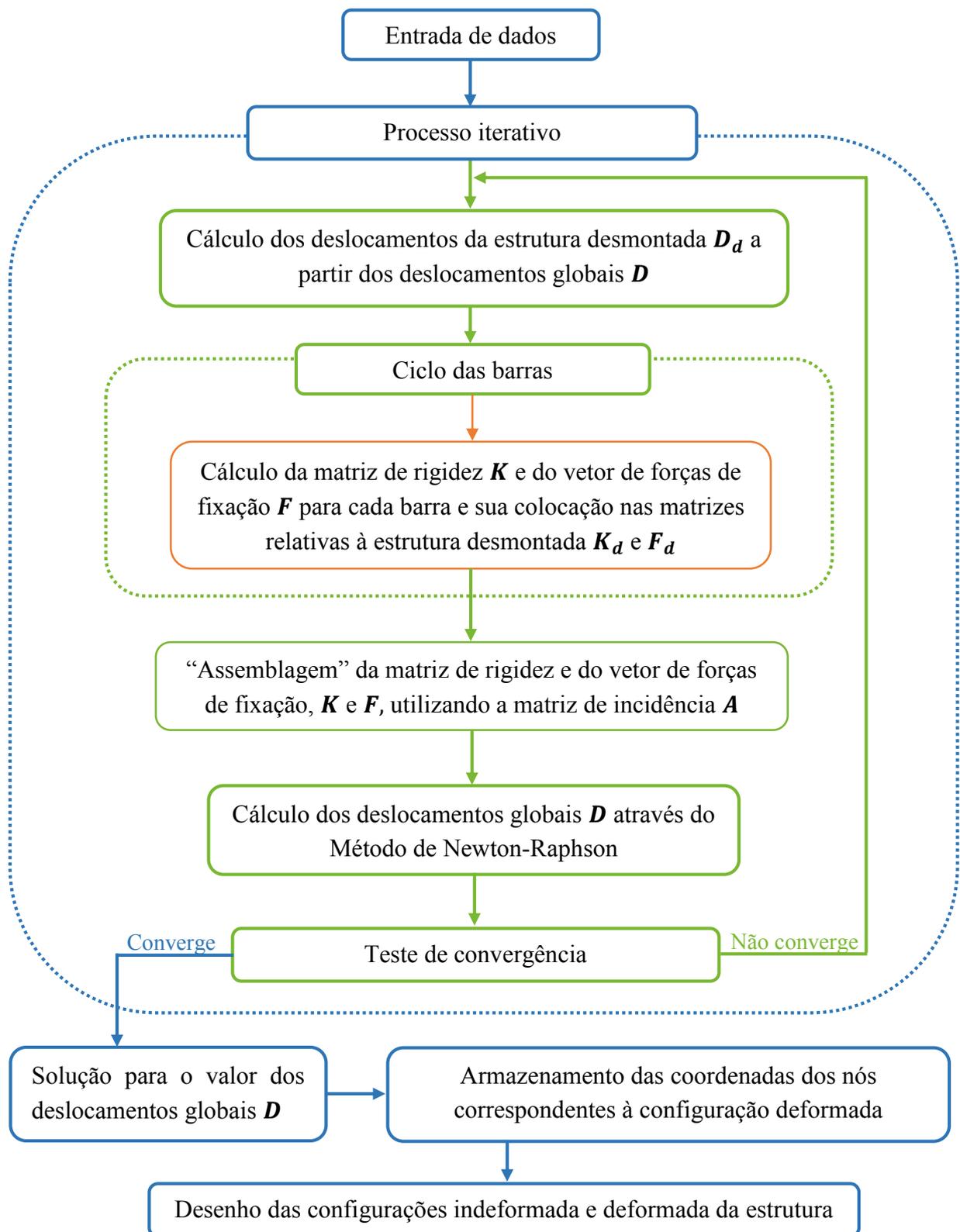


Figura 5.1 - Fluxograma do algoritmo de cálculo utilizado na primeira ferramenta numérica

5.1.3. Ferramenta numérica 2: Análise de estabilidade e determinação de esforços

Antes de iniciar o cálculo principal da segunda ferramenta numérica foi necessário a definição de sub-rotinas para determinação dos cossenos diretores das barras e subdivisão das mesmas.

A sub-rotina criada para determinação dos cossenos diretores foi definida de acordo com a teoria exposta na subsecção 4.2.4. não sendo aqui novamente descritas as equações utilizadas.

A subdivisão das barras, aqui utilizada para minimizar possíveis erros introduzidos pela linearização da matriz de rigidez, foi definida criando um processo que define novos nós nas barras, subdividindo-as em partes iguais, permitindo assim uma maior discretização da estrutura. Este processo é explicado no parágrafo seguinte.

A subdivisão das barras é feita com recurso a um ciclo, repetido tantas vezes quanto o número de barras da estrutura, em que para cada barra é determinado primeiramente o número do novo nó criado, ou números dos novos nós criados caso a subdivisão seja superior a 2, bem como o número da nova barra resultante da subdivisão, ou barras, sendo por fim determinadas as coordenadas dos novos nós. A determinação das coordenadas relativas aos novos nós é feita segundo a interpolação linear representada pela expressão (5.27).

$$\mathbf{C}_{(nn,1:3)} = (1 - \eta) \mathbf{C}_{(n1,1:3)} + \eta \mathbf{C}_{(n2,1:3)} \quad (5.27)$$

Em que \mathbf{C} corresponde à matriz das coordenadas dos nós, nn representa o número do nó da extremidade inicial da barra, $\eta = \eta_0 + \Delta\eta$ sendo $\Delta\eta = 1/ndiv$ (variam ambos entre 0 e 1). $ndiv$ representa o número divisões do elemento e $n1$ e $n2$ são os nós correspondentes às extremidades 1 e 2 da barra, respetivamente. η_0 corresponde ao nó anterior introduzido na barra (no caso da subdivisão em duas, tem-se apenas $\eta_0 = 0$).

Importa referir que a numeração dos novos nós criados, bem como das novas barras, é sempre acrescentada ao número total de nós ou barras já existentes, não havendo renumeração dos mesmos.

Definidos todos os dados iniciais necessários, o cálculo principal do programa inicia-se com a determinação da matriz de rigidez da estrutura e do valor dos esforços axiais correspondentes aos vários elementos constituintes da mesma, sendo este cálculo efetuado em duas fases.

Numa primeira fase considera-se como ponto de partida que o esforço axial nas barras é nulo, sendo o cálculo da matriz de rigidez \mathbf{K} feito através de um ciclo, o qual se repete tantas vezes quanto o número de barras, correspondendo nesta fase apenas à componente material da matriz de rigidez, devido à ausência de esforço axial. Numa segunda fase todo o processo é repetido, com a diferença de que é possível calcular a matriz de rigidez geométrica dado serem já conhecidos os valores do esforço axial. A matriz de rigidez da estrutura é assim determinada somando a componente da matriz de rigidez material com a matriz de rigidez geométrica.

O processo inicia-se então com a determinação das matrizes de rigidez para cada barra, as quais são determinadas com base na matriz indicada em (4.37) sendo calculadas ao nível deste ciclo as componentes material \mathbf{K}_{bm} e geométrica \mathbf{K}_{bg} separadamente. Estas vão sendo armazenadas nas matrizes \mathbf{K}_{dm} e \mathbf{K}_{dg} , como indicado nas expressões (5.28) e (5.29), correspondentes à estrutura desmontada, em que $i_0 = (i - 1) \times 12$ e i corresponde ao número da barra.

$$\mathbf{K}_{dm(i_0+1:i_0+12, i_0+1:i_0+12)} = \mathbf{K}_{bm} \quad (5.28)$$

$$\mathbf{K}_{dg(i_0+1:i_0+12, i_0+1:i_0+12)} = \mathbf{K}_{bg} \quad (5.29)$$

Depois de calculada cada componente da matriz de rigidez da estrutura desmontada estas são "assembladas" numa só matriz para cada componente formando assim as matrizes de rigidez material e geométrica da estrutura, \mathbf{K}_m e \mathbf{K}_g respetivamente, com recurso à matriz de incidência da mesma \mathbf{A} , como indicado nas expressões (5.30) e (5.31). Com base nestas é então possível a determinação da matriz de rigidez global da estrutura \mathbf{K} como indicado na expressão (5.32).

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_{dm} \mathbf{A} \quad (5.30)$$

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_{dg} \mathbf{A} \quad (5.31)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_g \quad (5.32)$$

Definida a matriz de rigidez global calculam-se os deslocamentos globais da mesma \mathbf{D} com recurso à expressão (5.33), ou seja, os deslocamentos correspondentes aos graus de liberdade globais, sendo a partir destes determinados os deslocamentos correspondentes a cada

elemento, ficando assim definidos os deslocamentos da estrutura desmontada \mathbf{D}_d , expressão (5.34).

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} \quad (5.33)$$

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{A} \mathbf{D} \quad (5.34)$$

Terminado o processo de cálculo dos deslocamentos, com base nos deslocamentos da estrutura desmontada, \mathbf{D}_d , efetua-se um ciclo a todos os elementos (barras) que permite a determinação dos esforços axiais de cada barra, \mathbf{N} . Para tal é necessário calcular os deslocamentos, a matriz de rigidez e o vetor de forças de fixação para cada elemento barra, respetivamente \mathbf{D}_b , \mathbf{K}_b e \mathbf{F}_b . Os cálculos efetuados encontram-se indicados nas expressões (5.35), (5.36), (5.37) e (5.38), em que $i_0 = (i - 1) \times 12$, correspondendo i à barra em causa, Figura 4.8.

$$\mathbf{D}_b = \mathbf{D}_d(i_0+1:i_0+12) \quad (5.35)$$

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{K}_{bm} + \mathbf{K}_{bg} \quad (5.36)$$

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{K}_b \mathbf{D}_b \quad (5.37)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{F}_b(3) = \mathbf{F}_b(9) \quad (5.38)$$

Conhecida a matriz de rigidez da estrutura global, bem como os valores para as matrizes de rigidez material e geométrica separadamente, pode então ser efetuado o cálculo dos fatores de carga crítica.

A determinação dos valores dos fatores de carga crítica da estrutura é feita através da resolução do problema de valores próprios simétrico generalizado, enunciado no ponto 4.2.3. Pretende-se a determinação do fator λ pelo qual é necessário multiplicar a carga atuante, para que o determinante da matriz de rigidez se anule. Este cálculo é facilmente efetuado com recurso a uma instrução denominada *eigs* a qual é utilizada tanto pela linguagem *Octave* como pela linguagem *MATLAB*. A instrução *eigs* permite determinar os valores próprios e vetores próprios correspondentes à resolução da equação (5.39) a partir da qual se determina os valores correspondentes a λ' que permitem posteriormente a determinação do fator de carga crítica λ através da expressão (5.40).

$$\mathbf{B} \mathbf{z} = \lambda' \mathbf{z} \quad \text{com} \quad \mathbf{B} = \mathbf{K}_m^{-1} \mathbf{K}_g \quad (5.39)$$

$$\lambda = -\frac{1}{\lambda'} \quad (5.40)$$

Determinados os fatores de carga crítica procedeu-se à sua organização de modo a que o primeiro valor próprio corresponda à menor carga crítica da estrutura, correspondendo esta ao modo fundamental da mesma.

Os modos de instabilidade são determinados com base nos vetores próprios obtidos através da aplicação da instrução *eigs* existente nas linguagens de programação utilizadas. A determinação dos deslocamentos da estrutura desmontada para cada modo de instabilidade, de modo a permitir a sua representação posteriormente, é feita multiplicando a matriz de incidência global da estrutura, \mathbf{A} , pelos vetores próprios obtidos, \mathbf{V}_p , expressão (5.41), com i_{mod} o número do modo para o qual se pretende efetuar a representação.

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{A} \mathbf{V}_{p(1:n_{gl}, i_{mod})} \quad (5.41)$$

A representação dos modos de instabilidade foi feita com o auxílio de uma sub-rotina de desenho que será descrita na subsecção 5.1.4, uma vez que esta, além de permitir o desenho dos modos de instabilidade, permite também o desenho das configurações indeformadas e deformadas das estruturas analisadas, apresentando-se assim na subsecção seguinte um processo de cálculo genérico transversal às duas ferramentas.

De modo a facilitar a compreensão do algoritmo de cálculo descrito é apresentado na Figura 5.2 um fluxograma ilustrativo do seu funcionamento.

5.1.4. Sub-rotinas auxiliares

Em ambas as ferramentas existem sub-rotinas de cálculo que permitem o desenho da configuração indeformada e deformada da malha plana ou da estrutura em casca, permitindo assim a observação, através de figuras, do estado de deformação das mesmas. Estas, tal como referido anteriormente apresentando um processo de cálculo genérico sendo transversal às duas ferramentas numéricas.

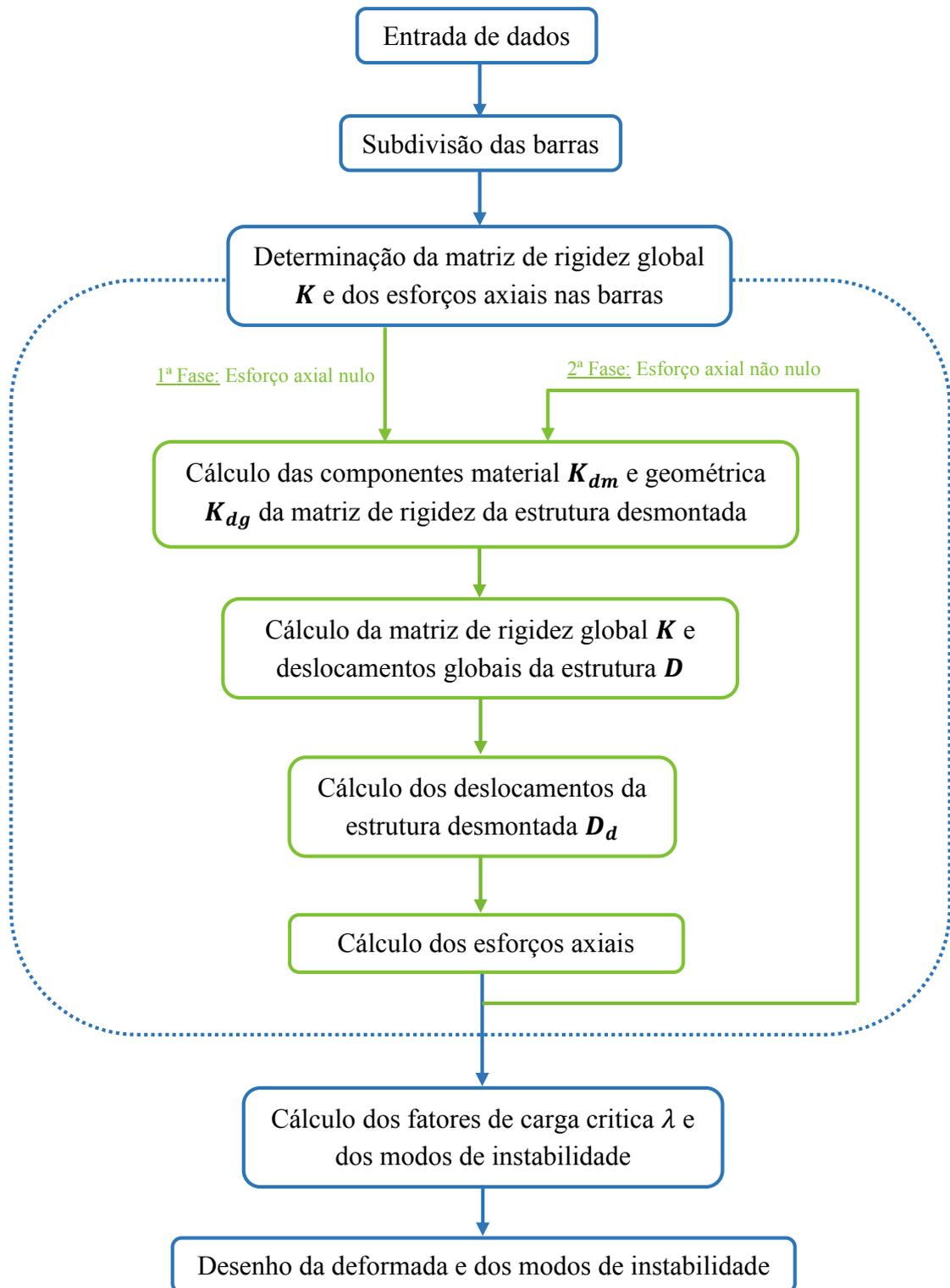


Figura 5.2 - Fluxograma do algoritmo de cálculo utilizado na segunda ferramenta numérica

Os desenhos das figuras baseiam-se no cálculo das coordenadas da configuração deformada dos elementos constituintes da estrutura isoladamente, de modo a permitir o desenho da configuração deformada da mesma. Dado que a rotina utilizada é definida do mesmo modo para o cálculo das configurações indeformadas e deformadas, e por conseguinte para os modos de instabilidade, descreve-se de seguida o processo de cálculo utilizado de modo genérico.

Para a determinação dos deslocamentos dos nós dos vários elementos, de modo a permitir a sua representação, é necessário primeiramente o conhecimento dos valores dos deslocamentos da estrutura desmontada, isto é, os deslocamentos locais das barras.

Para o caso da representação das configurações indeformadas e deformadas da estrutura recorre-se à aplicação da expressão (5.42), mas no caso dos modos de instabilidade o valor dos deslocamentos locais das barras corresponde aos valores próprios, como indicado na expressão (5.41). Este cálculo é feito multiplicando a matriz de incidência global da estrutura A pelos deslocamentos globais da mesma já determinados no cálculo principal do programa.

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{A} \mathbf{D} \quad (5.42)$$

Feito este cálculo, dá-se início a um ciclo, repetido tantas vezes quanto o número de barras, em que são determinados os deslocamentos globais de cada barra isoladamente \mathbf{D}_b de modo a determinar as coordenadas do seus nós e permitir o seu desenho. Para tal é necessário a determinação da matriz de incidência para cada barra \mathbf{A}_b e dos respetivos deslocamentos \mathbf{D}_b , as expressões (5.43) e (5.44) referem-se à primeira ferramenta, enquanto as expressões (5.45) e (5.46) correspondem à segunda ferramenta.

$$\mathbf{A}_{b(1:3, 1:3)} = \mathbf{A}_{b0} \quad (5.43)$$

$$\mathbf{A}_{b(4:6, 4:6)} = \mathbf{A}_{b0}$$

$$\mathbf{D}_b = \mathbf{D}_{d(i_{0+1}: i_{0+6})} \quad (5.44)$$

$$\mathbf{A}_{b(1:3, 7:9)} = \mathbf{A}_{b0} \quad (5.45)$$

$$\mathbf{A}_{b(4:6, 10:12)} = \mathbf{A}_{b0}$$

$$\mathbf{A}_{b(7:9, 1:3)} = -\mathbf{A}_{b0}$$

$$\mathbf{A}_{b(10:12, 4:6)} = -\mathbf{A}_{b0}$$

$$\mathbf{D}_b = \mathbf{D}d_{(i_{0+1}; i_{0+6})} \quad (5.46)$$

Por fim é necessário efetuar o cálculo dos deslocamentos globais para cada barra \mathbf{D}_{bg} segundo o sistema de eixos global de modo a permitir a representação das figuras, expressão (5.47), com $i_0 = (i - 1) \times 6$ e i correspondente ao número da barra. Este cálculo é feito através da multiplicação entre a matriz de incidência para cada elemento barra \mathbf{A}_b e os correspondentes valores dos deslocamentos locais dos nós \mathbf{D}_b .

$$\mathbf{D}_{bg} = \mathbf{A}_b^T \mathbf{D}_b \quad (5.47)$$

Importa referir que a expressão (5.47) apenas se aplica à segunda ferramenta. No caso da primeira ferramenta, dado que o sistema eixos local das barras é paralelo ao sistema de eixos global, esta operação não é necessária, sendo $\mathbf{D}_{bg} = \mathbf{D}_b$

5.2. Adaptação das ferramentas para linguagem *MATLAB*

Tal como referido aquando da introdução à linguagem *Octave*, esta segue a vertente numérica da linguagem *MATLAB*, apresentando uma grande compatibilidade com a última linguagem mencionada. Por este facto a adaptação dos programas de linguagem *Octave* para linguagem *MATLAB* foi relativamente simples, variando apenas alguns pormenores na definição das ferramentas.

Uma diferença relevante ao nível da programação em ambas as linguagens prende-se com a definição de sub-rotinas, embora ambas utilizem a instrução “*function*”, para a linguagem *MATLAB* estas são definidas em ficheiros separados do programa principal, sendo cada uma definida num ficheiro isoladamente, o qual é posteriormente chamado no decorrer do programa principal, enquanto em linguagem *Octave* as sub-rotinas são definidas diretamente dentro do programa principal.

Todas as instruções utilizadas ao longo da definição das ferramentas existem em ambas as linguagens, com a mesma função de cálculo e o mesmo nome.

6. CASOS DE ESTUDO

Neste capítulo procede-se à apresentação dos casos de estudo analisados na presente dissertação.

De modo a validar o correto funcionamento das ferramentas numéricas desenvolvidas recorreu-se à utilização de dois casos de estudo para os quais os resultados eram já conhecidos. O primeiro aqui apresentado diz respeito a uma torre reticulada e o segundo a uma malha plana de geometria irregular, os quais já se encontram analisados através de métodos analíticos e pelas ferramentas existentes em linguagem *Fortran*, respetivamente. Além dos casos de estudo utilizados para validação das novas ferramentas, é também apresentada a análise de mais um caso de estudo relativo a uma malha plana pentagonal, para o qual se pretende que seja efetuada a sua análise com recurso às novas ferramentas de modo a determinar uma solução em casca reticulada para a configuração de malha fornecida.

O primeiro caso de estudo apresentado corresponde a uma torre reticulada para a qual se pretende realizar a análise de estabilidade e determinação de esforços através da segunda ferramenta desenvolvida. A apresentação deste caso de estudo visa comparar os resultados obtidos para os valores das cargas de instabilidade através da segunda ferramenta com a expressão analítica de Euler.

O segundo caso de estudo, aqui denominado por Malha A, tem como objetivo a determinação de uma solução em casca reticulada, com recurso às novas ferramentas, de modo a proceder à análise de estabilidade da solução obtida. A escolha deste caso teve também como critério o facto de já ter sido analisado com recurso às ferramentas em *Fortran* permitindo assim aferir se os resultados obtidos estariam corretos. Para tal aplicou-se igualmente o valor de todos os dados já definidos para a resolução com ferramentas em *Fortran*, nomeadamente propriedades de secções, cargas aplicadas e condições de apoio.

O último caso de estudo aqui apresentado, denominado Malha B, corresponde à aplicação das duas ferramentas numéricas desenvolvidas para determinação de uma solução em casca partindo da configuração de malha fornecida. Pretende-se assim determinar a forma a adotar para a estrutura em casca reticulada com recurso à primeira ferramenta, sendo posteriormente analisada a secção a aplicar à estrutura resultante, e feita a análise de estabilidade através da segunda ferramenta desenvolvida. Este último caso foi analisado segundo as ferramentas desenvolvidas para as duas linguagens de programação, *Octave* e *MATLAB*.

Os dois casos de estudo apresentados relativos a cascas reticuladas, a Malha A e Malha B, tem também como objetivo a análise de estabilidade da sua configuração, nomeadamente verificar a influência que a geometria do seu contorno e condições de apoio têm nos modos de instabilidade e valores de carga crítica obtidos.

6.1. Torre

A apresentação deste caso de estudo teve por base o artigo publicado Dias da Silva, “Cálculo de cargas críticas globais e deslocamentos de segunda ordem em estruturas reticuladas tridimensionais”, 21 Fevereiro 2008.

A torre reticulada analisada tem uma altura de 42 m e é composta por barras verticais (montantes), constituídas por tubos de secção quadrada de 150 mm no exterior e 10 mm de espessura de parede, o que corresponde a uma área de 54,5 cm² e momentos de inercia de 1741 cm⁴, e barras diagonais constituídas por tubos retangulares com dimensões exteriores de 100 mm e 50 mm e espessura de parede de 5 mm, como representado na Figura 6.1 a). Esta encontra-se encastrada na base e livre na extremidade superior e, uma vez que as suas faces laterais são trianguladas, ela comporta-se, aproximadamente, como uma peça linear em consola, com 42m de comprimento, sendo que a sua secção transversal corresponde às quatro secções transversais dos montantes como se encontrada representado na Figura 6.1 b).

Os vários elementos da torre reticulada são constituídos por materiais de comportamento elástico linear para os quais foi adotado um aço com módulo de elasticidade E de 206 MPa e um módulo de distorção G de 79,2 MPa.

Com base nestes dados é então possível determinar os momentos principais de inércia e posteriormente os valores das cargas críticas correspondentes aos primeiros dois modos de instabilidade através da expressão de Euler. Importa ainda referir que considerando as condições de apoio referidas o comprimento de encurvadura considerado corresponde a 84 m, $L_e = 2l = 2 \times 42 \text{ m} = 84 \text{ m}$.

$$I_x = 4 \times (1741 + 54,5 \times 50^2) = 551\,964 \text{ cm}^4 \quad (6.1)$$

$$P_x = \frac{\pi^2 EI_x}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \times 206 \times 10^9 \times 551\,694 \times 10^{-8}}{84^2} = 1\,590\,447 \text{ N} \quad (6.2)$$

$$I_z = 4 \times (1741 + 54,5 \times 75^2) = 1\,233\,124 \text{ cm}^4 \quad (6.3)$$

$$P_z = \frac{\pi^2 EI_z}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \times 206 \times 10^9 \times 1\,233\,214 \times 10^{-8}}{84^2} = 3\,553\,422 \text{ N} \quad (6.4)$$

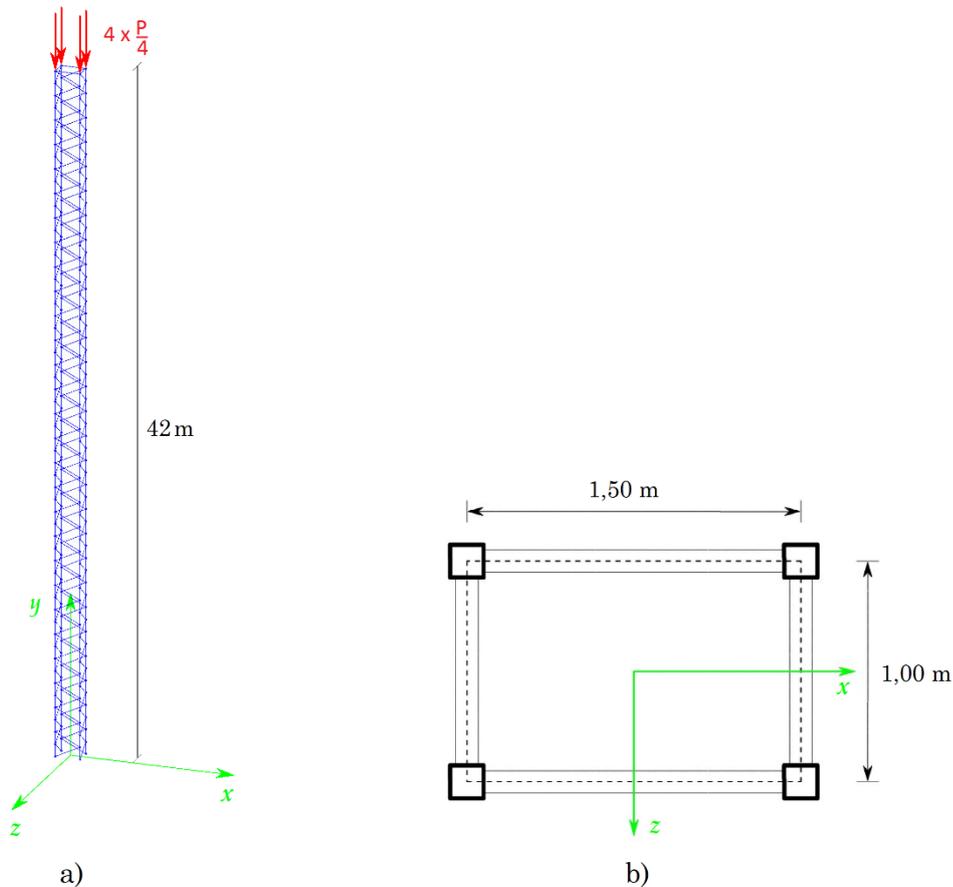


Figura 6.1 – a) Torre reticulada; b) Secção transversal da torre

Conhecidos os valores da carga crítica de Euler foi então utilizada a segunda ferramenta numérica desenvolvida para o cálculo automático dos fatores de carga crítica da estrutura, tendo sido considerado um elemento por barra, o que perfaz um total de 228 nós, 452 barras e 1356 graus de liberdade. A carga aplicada foi de 1MN o que corresponde a $P/4=250\text{kN}$, valor aplicado nas quatro secções dos montantes, como representado nas Figuras 6.2 a) e b).

Os fatores de carga obtidos para os dois primeiros modos de instabilidade calculados através da segunda ferramenta numérica desenvolvida foram de 1,577864 e 3,487173, o que corresponde a valores de carga crítica de 1 577 864 N e 3 487 173 N. Estes valores foram determinados considerando os elementos barra sem subdivisão.

Comparando os valores obtidos através da expressão de Euler e a utilização da ferramenta numérica verifica-se que os valores obtidos através da ferramenta são ligeiramente inferiores aos obtidos através da expressão de Euler. Este facto deve-se à consideração da deformação por esforço transversal da torre, através da deformação das diagonais aquando da análise da mesma através da ferramenta numérica. Os valores obtidos através da expressão de Euler são por isso menos exatos, dado que não consideram a deformação por esforço transversal.

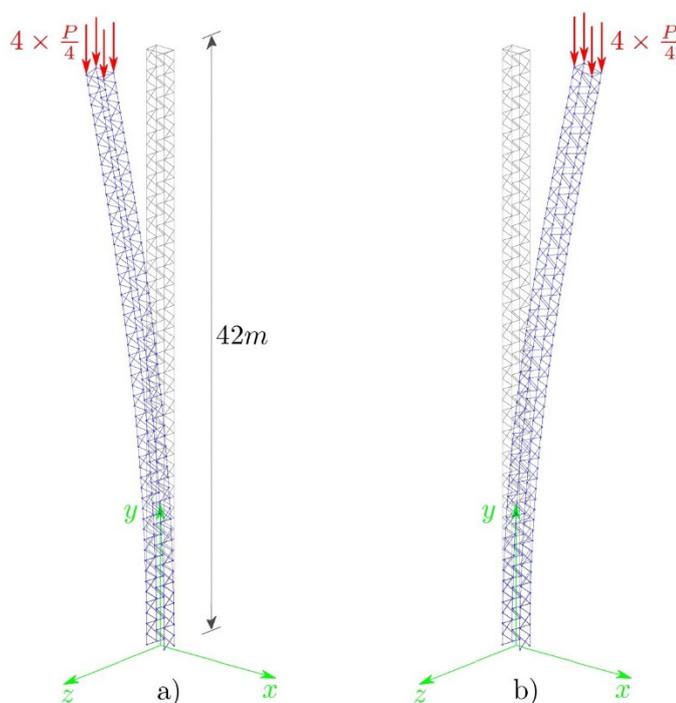


Figura 6.2 – Torre reticulada comprimida: a) 1º modo de instabilidade; b) 2º modo de instabilidade

Outra opção testada consistiu na subdivisão de todos os elementos em dois, uma vez que uma maior discretização dos elementos leva a uma maior aproximação aos valores reais. No entanto, verificou-se que para o caso em estudo, dado os modos de instabilidade serem marcadamente globais, uma maior discretização dos elementos não altera significativamente os valores obtidos para o fator de carga, tendo sido obtidos valores de carga crítica para os

dois primeiros modos de instabilidade similares aos anteriores, sendo eles 1 577 863 N e 3 487 172 N.

De modo a comprovar a influência de considerar a deformação por esforço transversal foi realizado um novo cálculo das cargas críticas em que a área das diagonais foi artificialmente aumentada de modo a não influenciar o cálculo das mesmas, dado que a deformação por esforço transversal da torre corresponde à deformação axial das barras diagonais. Assim sendo, considerou-se a área das diagonais multiplicada por cinco tendo sido obtidos os valores de carga crítica sem subdivisão de 1 586 854 N e 3 535 032 N. Estes valores são então mais próximos dos valores obtidos pelo método analítico tal como seria espectável.

6.2. Malha A

A Malha A caracteriza-se por uma geometria irregular, com contorno curvo, sendo apoiada em todo o seu contorno. Os valores para as maiores dimensões desta, segundo os eixos ortogonais X e Y são de 119,85 e 84,00 metros, respetivamente, sendo a malha reticulada definida com 2756 elementos, ligados por 973 nós dos quais 80 se encontram restringidos no seu contorno exterior no que diz respeito a translações, simulando assim os apoios da mesma. A malha reticulada encontra-se representada na Figura 6.3.

O contorno curvo desta malha permite evitar que a estrutura em casca reticulada resultante apresente zonas de curvatura simples, nomeadamente junto aos apoios. A casca reticulada beneficia assim da forma em dupla curvatura uma vez que as superfícies com esta geometria apresentam maior capacidade para resistir às cargas atuantes.

Tal como referido na subsecção 5.1.1 todos os elementos constituintes da malha reticulada apresentam a mesma secção transversal sendo adotados os valores já considerados na análise da mesma malha através das ferramentas numéricas existentes em *Fortran*.

Uma vez que no âmbito da primeira ferramenta numérica os dados inseridos para caracterização do material e da secção, nomeadamente a área da secção transversal e o módulo de elasticidade, são apenas fictícios de modo a poder ser determinada a configuração deformada, foram adotados os valores para o módulo de elasticidade de 200 e uma área de secção transversal 1,0.

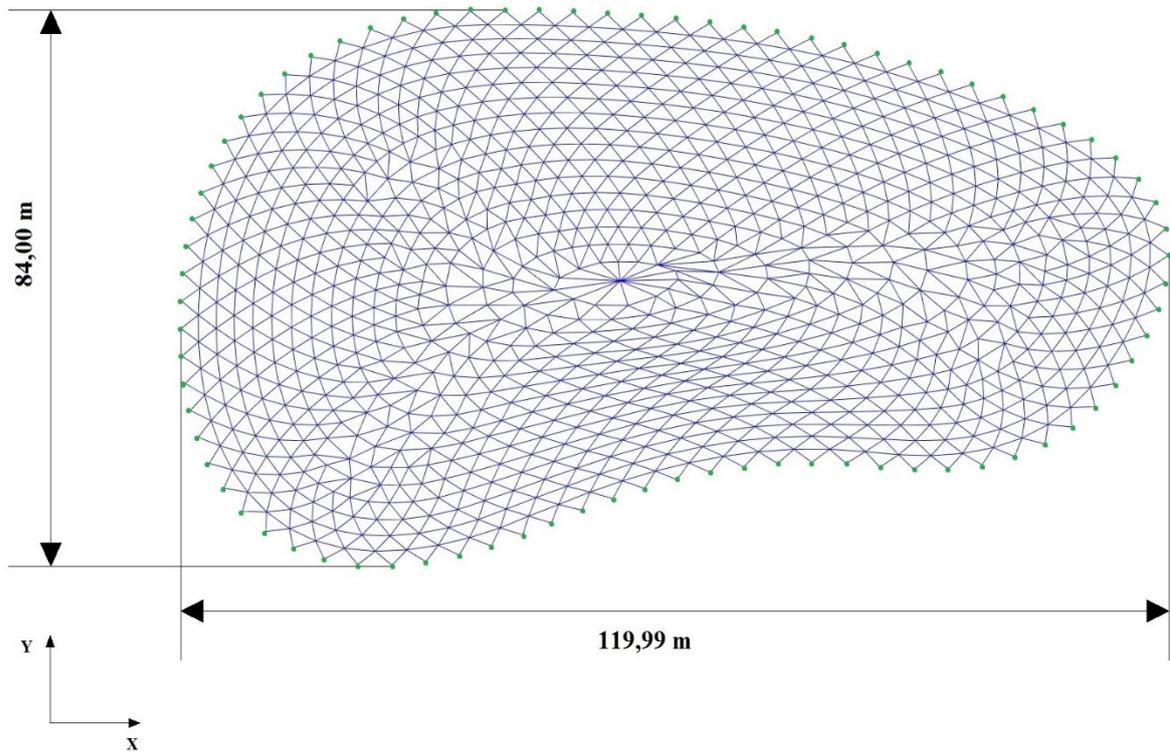


Figura 6.3 – Planta da Malha A - Os nós assinalados a verde representam os apoios da malha

A secção transversal utilizada para a segunda ferramenta caracteriza-se pelas dimensões e propriedades indicadas na Tabela 6.1 sendo considerado que a casca reticulada é composta por elementos constituídos por materiais de comportamento elástico linear para os quais foi adotado um aço com módulo de elasticidade E de 206 MPa e um módulo de distorção G de 79,2 MPa.

Tabela 6.1 – Secção transversal dos elementos da Malha A

	$d = 10,00 \text{ cm}$
	$e = 0,50 \text{ cm}$
	$A = 14,92 \text{ cm}$
	$I = 168,81 \text{ cm}^4$
	$J = 337,62 \text{ cm}^4$

A carga aplicada sobre a malha reticulada plana e a casca reticulada é a mesma para as duas ferramentas numéricas, tendo sido considerada a atuação de uma carga uniformemente distribuída ao longo de toda a superfície da malha, a qual é igualmente aplicada de forma uniforme no plano horizontal sob a estrutura em casca, com um valor de 1 kN/m^2 . A aplicação da carga ao nível do programa de cálculo foi feita nos nós.

Como resultado da primeira ferramenta foi então obtida uma casca reticulada com uma altura máxima de 31,91 m para a qual será feita a análise estrutural.

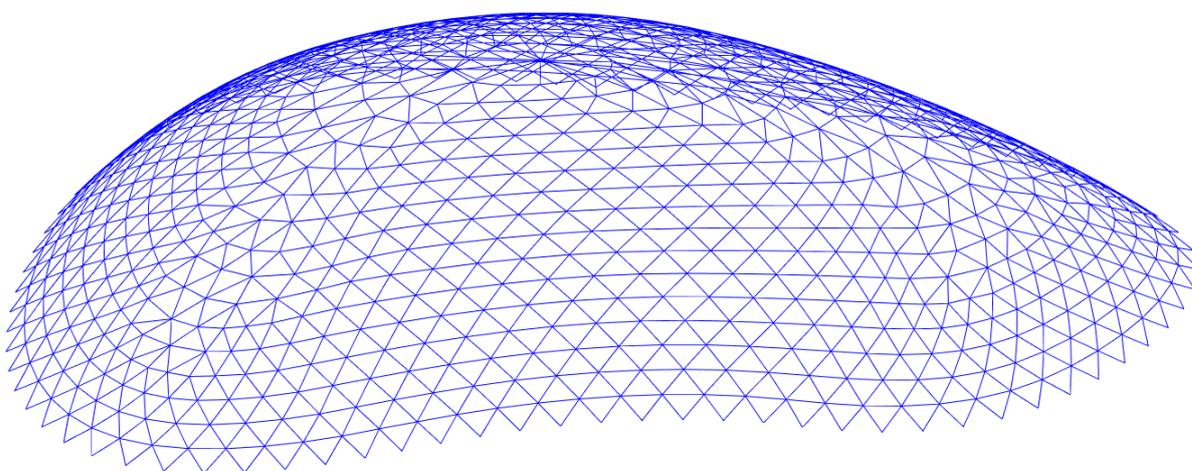


Figura 6.4 – Malha A – Forma geométrica de equilíbrio obtida através da ferramenta 1
(Perspetiva 1)

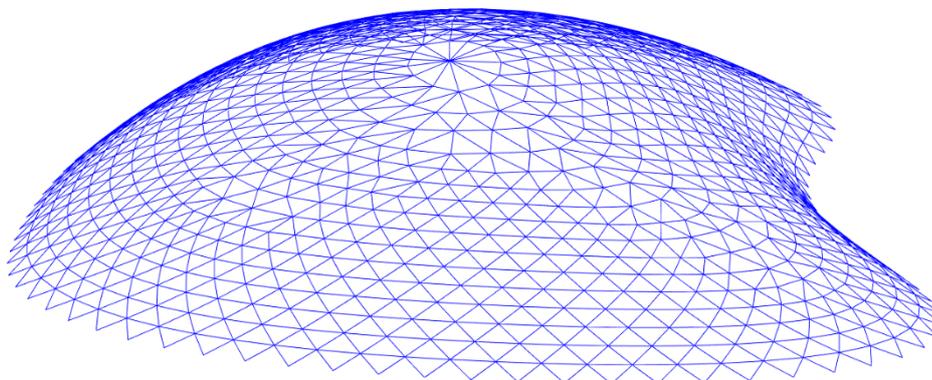


Figura 6.5 - Malha A – Forma geométrica de equilíbrio obtida através da ferramenta 1
(Perspetiva 2)

Utilizando a segunda ferramenta foram então calculados os dois primeiros modos de instabilidade, tendo sido obtidas as cargas críticas de 1 388 959 N para o modo fundamental, ou seja 1º modo de instabilidade, e 1 415 152 N para o 2º modo, sem subdivisão das barras, os quais se encontram representados nas Figuras 6.6 e 6.7.

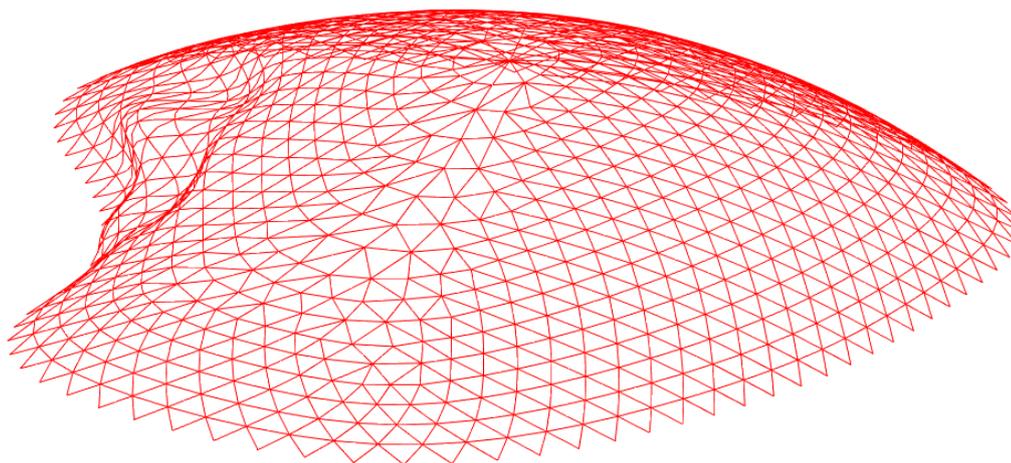


Figura 6.6 – Malha A – Modo fundamental (1º modo de instabilidade)

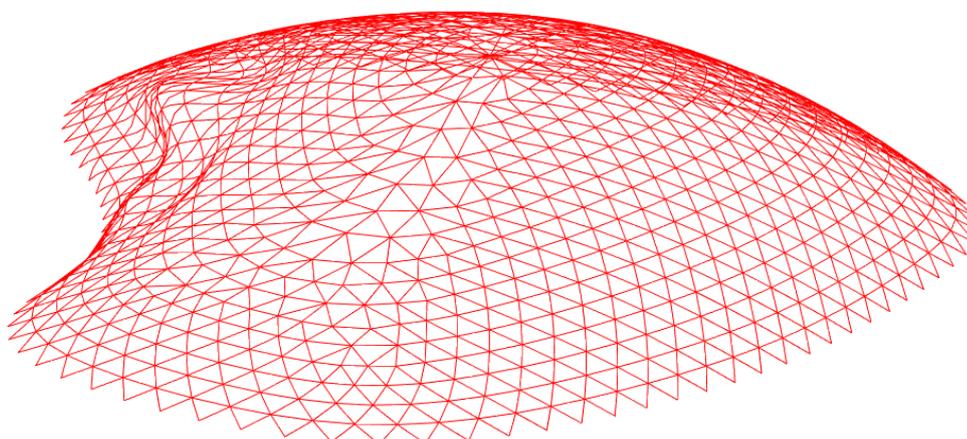


Figura 6.7 – Malha A - 2º modo de instabilidade

Efetuada a mesma análise com a subdivisão de barras igual a dois, foram obtidas as cargas críticas de: 1 379 603 N para o modo fundamental e 1 405 958 N para o 2º modo de instabilidade.

Da análise dos resultados obtidos verifica-se que, para a casca reticulada em estudo, existe uma diferença significativa no valor da carga crítica obtida para a análise sem subdivisão de barras e com subdivisão. O valor da carga crítica, por exemplo para o modo fundamental, sem subdivisão de barras é de 1 388 959 N e com subdivisão igual a dois diminui para 1 379 603 N. A diminuição verificada no valor da carga crítica deve-se ao facto de os fenómenos instabilidade serem marcadamente locais, o que faz com que o aumento da discretização do elemento barra leve a uma diminuição do valor da carga de modo a tornar-se mais próximo do valor real.

6.3. Malha B

O presente caso de estudo, referente à Malha B, foi utilizado para aplicação das ferramentas desenvolvidas de modo a determinar uma solução em casca reticulada para a configuração de malha fornecida. Pretendia-se assim determinar a forma geométrica e efetuar a análise de estabilidade da estrutura em casca reticulada, de modo a analisar os seus modos de instabilidade.

A Malha B apresenta uma forma pentagonal com valores para as maiores dimensões da mesma segundo os eixos ortogonais X e Y de 17,73 e 18,47 metros respetivamente, como se pode verificar pela Figura 6.8. Esta é apoiada apenas nas zonas dos vértices da sua geometria sendo definida por 4380 elementos ligados por 1501 nós, dos quais 25 se encontram restringidos no seu contorno exterior no que diz respeito a translações, correspondendo aos apoios da mesma malha.

Tal como no caso anterior a configuração geométrica da malha permite também evitar que a estrutura em casca reticulada resultante apresente zonas de curvatura simples, nomeadamente junto aos apoios. A existência de dupla curvatura na configuração da casca reticulada confere-lhe uma maior capacidade para resistir às cargas atuantes.

À semelhança dos dois casos de estudo já apresentados foram fornecidos os dados iniciais relativos à configuração da malha a analisar nomeadamente o número de nós, as coordenadas dos mesmos, o número de barras, as condições de apoio e as cargas aplicadas. Contudo, a secção a utilizar para as secções dos elementos constituintes da casca reticulada, resultante da primeira ferramenta, não foi fornecida tendo sido escolhido o tipo de secção de modo a respeitar os valores correntes de esbelteza e cargas críticas para este tipo de estruturas.

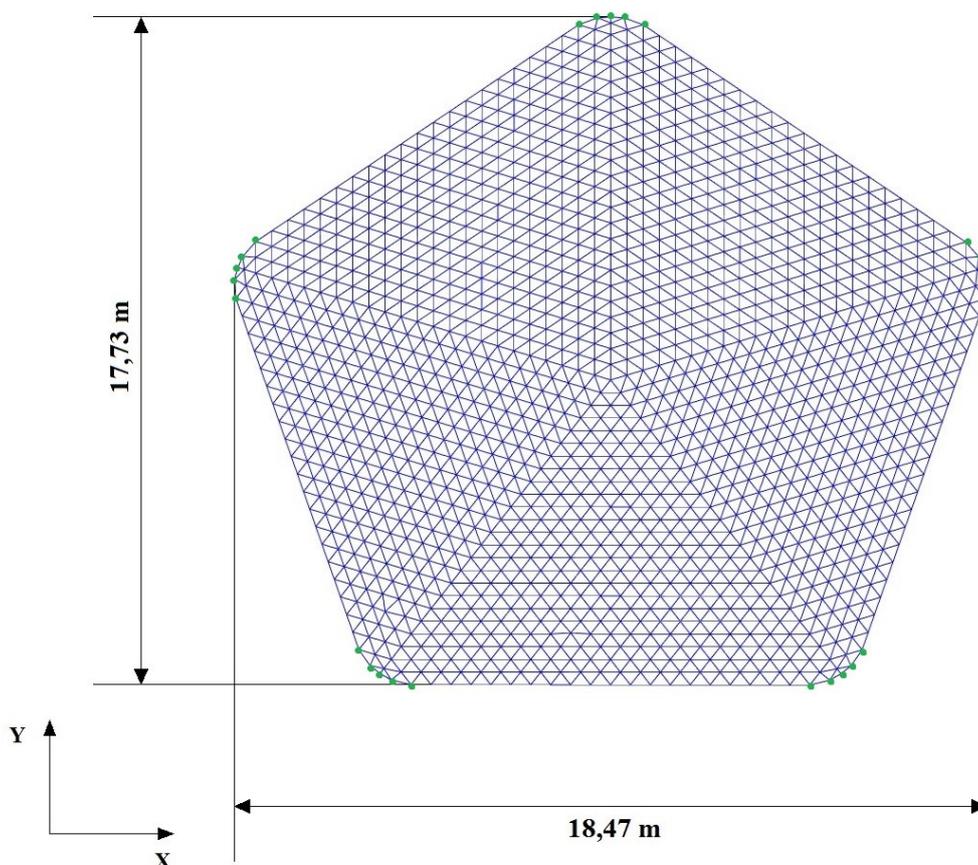


Figura 6.8 – Planta da Malha B - Os nós assinalados a verde representam os apoios da malha

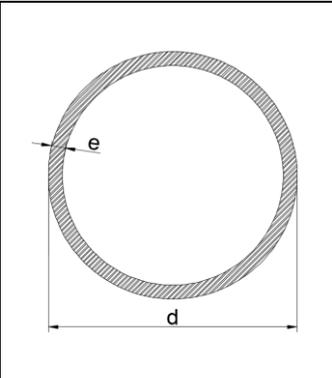
Tal como referido na subsecção 5.1.1 todos os elementos constituintes da malha reticulada apresentam a mesma secção transversal. No âmbito da primeira ferramenta numérica os dados inseridos para caracterização do material e da secção, nomeadamente o módulo de elasticidade e a área da secção transversal, são apenas fictícios de modo a poder ser determinada a configuração deformada, tendo sido adotados os valores para o módulo de elasticidade de 200 e uma área de secção transversal 1,0. Para a segunda ferramenta foi adotada uma secção circular oca uma vez que este tipo de secções apresenta um melhor comportamento à torção, principalmente a fenómenos de instabilidade por flexão-torção. O processo de determinação da secção é descrito no parágrafo seguinte.

Primeiramente importa referir que, de modo a utilizar parâmetros dentro dos valores correntes para estruturas deste tipo, procurou-se adotar secções transversais de modo a obter esbeltezas entre 70 a 90 e valores de fator de carga crítica da ordem de 3 a 4. Para determinar a secção a adotar foi considerada a configuração geométrica de equilíbrio da malha, ou seja a estrutura

em casca reticulada resultante, a partir da qual foi determinado o maior comprimento de entre todos os elementos. Conhecendo o maior comprimento existente é então possível o cálculo do raio de giração, com base nos valores de esbelteza mencionados, que permitem a consulta da secção a utilizar através de uma tabela de perfis metálicos ocios circulares. Tal como referido, procurou-se também que a secção adotada permitisse a obtenção de fatores de carga crítica na ordem dos 3 a 4, sendo por isso a escolha da secção feita de modo iterativo.

As propriedades da secção transversal adaptada para a Malha B encontram-se indicadas na Tabela 6.2 juntamente com as respetivas dimensões.

Tabela 6.2 – Secção transversal dos elementos da Malha B

	$d = 33,70 \text{ mm}$
	$e = 2,50 \text{ mm}$
	$A = 2,45 \text{ cm}^2$
	$I = 3,00 \text{ cm}^4$
	$J = 6,00 \text{ cm}^4$

Relativamente à carga atuante sobre a estrutura, para este caso de estudo foi considerada uma carga uniformemente distribuída no plano horizontal com o valor de 2 kN/m^2 ao longo de toda a superfície da malha ou da estrutura, a qual é aplicada nos nós.

Com o resultado da primeira ferramenta foi então obtida uma casca reticulada com uma altura máxima $6,11 \text{ m}$, encontrando-se a sua configuração geométrica representa nas Figuras 6.9 e 6.10. Determinada a forma para a malha em estudo foi então feita a sua análise de estabilidade.

Utilizando a segunda ferramenta foram calculados os dois primeiros modos de instabilidade, tendo sido obtidos valores de cargas críticas de $3\,220\,091 \text{ N}$ para o modo fundamental (1º modo de instabilidade) e $3\,278\,521 \text{ N}$ para o 2º modo, sem subdivisão das barras. Nas Figuras 6.11 e 6.12 estão representadas as configurações da malha reticulada para o modo fundamental e 2º modo de instabilidade.

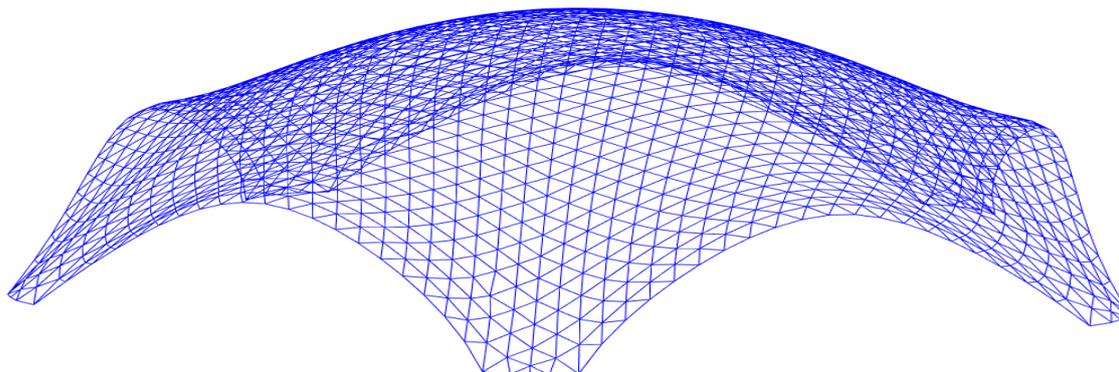


Figura 6.9 - Malha B – Forma geométrica de equilíbrio obtida através da ferramenta 1
(Perspetiva 1)

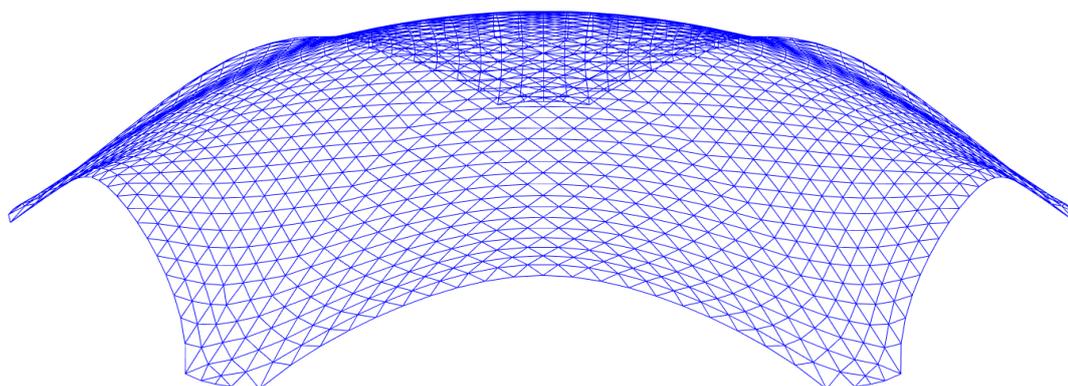


Figura 6.10 - Malha B – Forma geométrica de equilíbrio obtida através da ferramenta 1
(Perspetiva 2)

Efetuada a mesma análise, agora com uma subdivisão das barras igual a dois, obtêm-se valores de carga crítica de 3 204 024 N para o modo fundamental e 3 215 432 N para o 2º modo.

Da análise dos resultados obtidos verifica-se que para a casca reticulada em estudo o valor da carga crítica obtida para a análise sem subdivisão de barras e com subdivisão é semelhante, tendo obtido para o modo fundamental, o valor da carga crítica sem subdivisão de barras de 3 220 091 N e com subdivisão igual a dois de 3 215 432 N. A semelhança entre os valores da carga crítica deve-se ao facto de os fenómenos de instabilidade serem marcadamente globais,

o que faz com que o aumento da discretização do elemento barra não altere significativamente o valor da carga obtida.

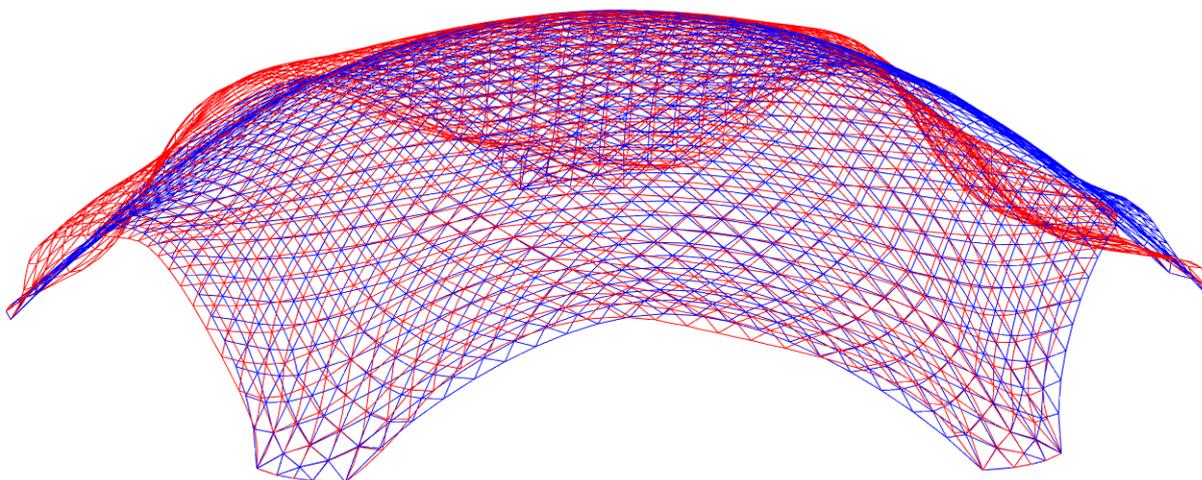


Figura 6.11 – Malha B - Modo Fundamental (1º modo de instabilidade)

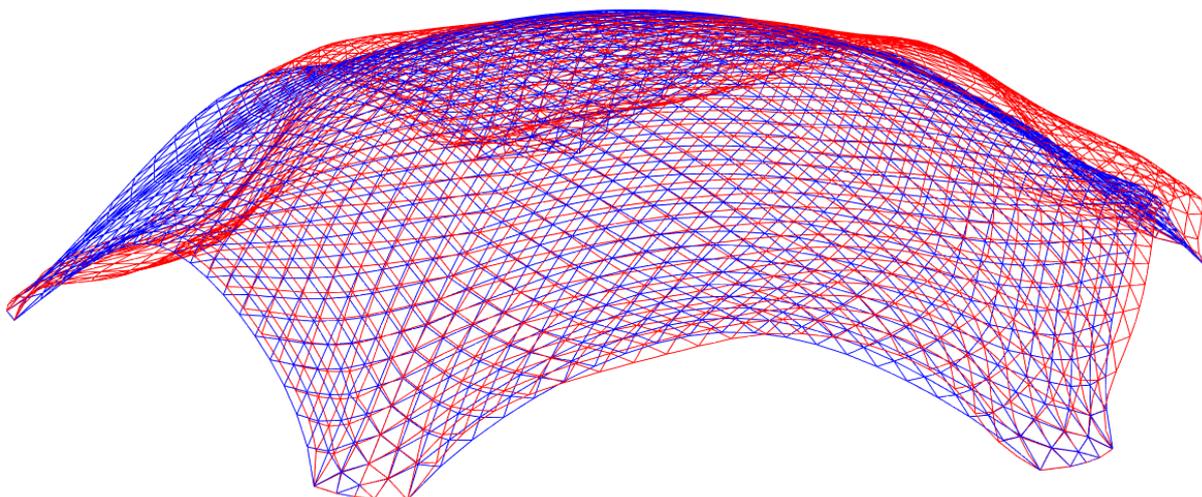


Figura 6.12 – Malha B - 2º modo de instabilidade

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1. Desempenho das ferramentas numéricas

De modo geral conclui-se que as linguagens *Octave* e *MATLAB* são tão eficazes quanto a linguagem *Fortran* no desenvolvimento de ferramentas numéricas para a determinação da forma geométrica e análise de estabilidade de estruturas em casca reticulada.

Um dos principais motivos para a sua eficácia prende-se com o facto de estas linguagens de programação estarem otimizadas para as operações com vetores e matrizes e as abordagens utilizadas no desenvolvimento das ferramentas numéricas apresentadas tirarem partido deste facto.

A explicação apresentada no parágrafo anterior é a principal razão para que estas linguagens de programação se tenham revelado bastantes eficientes na análise de cascas reticuladas uma vez que é possível formular os programas de cálculo para determinação da forma e análise de estabilidade recorrendo ao tratamento de matrizes e vetores.

Outra vantagem das linguagens *Octave* e *MATLAB* é permitir nativamente uma grande capacidade de armazenamento de dados através de funcionalidades disponíveis em ambas as linguagens, como é o caso das matrizes esparsas. A utilização deste tipo de matrizes permite aumentar a velocidade de cálculo dos programas e diminuir o volume de dados a armazenar durante o processo de cálculo, uma vez que as matrizes utilizadas ao longo destes programas são maioritariamente constituídas por valores nulos. De facto, se forem utilizadas matrizes cheias, este tipo de problemas atinge facilmente dimensões que esgotam a memória habitualmente disponível nos computadores correntes.

Pelo mesmo motivo indicado primeiramente, as sub-rotinas de subdivisão de barras desenvolvidas em *Octave* e *MATLAB* revelaram-se mais rápidas do que as já existentes em linguem *Fortran*, dado que se trata de um processo que depende do tratamento de vetores e matrizes.

7.2. Análise de estabilidade para estruturas em casca reticulada

A análise do primeiro caso de estudo apresentado, correspondente à torre reticulada, permitiu aferir que os resultados obtidos através da segunda ferramenta numérica desenvolvida, para os valores de carga crítica correspondem às soluções obtidas através da solução analítica de *Euler*. De facto os resultados obtidos são mais exatos, na medida em que tomam em consideração a deformação por esforço transversal da torre, o que não acontece no caso da sua análise através da expressão de *Euler*.

Da análise das duas cascas reticuladas apresentadas conclui-se que na presença de modos de instabilidade marcadamente locais, o valor da carga crítica obtido é tanto mais próximo do valor real quanto mais discretizados forem os elementos constituintes da estrutura. Pelo contrário, na presença de modos de instabilidade de carácter marcadamente global a discretização dos elementos constituintes da estrutura (subdivisão das barras) não influencia significativamente o valor de carga crítica obtido.

7.3. Sugestões para trabalhos futuros

Para concluir, apresentam-se três sugestões para futuros trabalhos de continuação e/ou complemento no domínio em que se insere a presente dissertação:

- Desenvolvimento de ferramentas numéricas para geração da malha inicial para cascas reticuladas;
- Determinação da forma otimizada de cascas reticuladas para vários casos de carga de projeto, ou seja, de modo a que a forma determinada seja eficiente para vários casos de carga em simultâneo. Por exemplo: para a ação do vento em determinada direção e uma sobrecarga de cobertura, ou, para a ação do vento em determinada direção e para a sobrecarga de neve, etc;
- Desenvolvimento de programas de visualização gráfica mais eficientes, que permitam a representação gráfica da estrutura de modo mais rápido e com menor necessidade de armazenamento de dados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Belytschko, T., Liu, W. K., & Moran, B. (2001). "Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures". Chichester: John Wiley & Sons, LTD.
- Berger, H. (2007). "Structural Form in Architecture". *STRUCTURE Magazine*, 37-41.
- Berger, H. (2008). "Structural Form in Architecture". *STRUCTURE Magazine*, 33-36.
- Dias da Silva, V. (Setembro de 2002). "Introdução à Análise Não-Linear de Estruturas". Coimbra: Secção de Textos do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra.
- Dias da Silva, V. (2004). "Mecânica e Resistência dos Materiais" (3 ed.). Coimbra: ZUARI.
- Dias da Silva, V. (Julho de 2007). "Cálculo de cargas críticas globais e deslocamentos de segunda ordem em estruturas tridimensionais". *rpee - Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas*, 21-35. Obtido de http://rpee.lnec.pt/Ficheiros/pg21_a3.pdf
- Dias da Silva, V. (21 Fevereiro 2008). "Cálculo de cargas críticas globais e deslocamentos de segunda ordem em estruturas reticuladas tridimensionais". *Revista ENG pertencente ao Jornal Construir*, 25 a 27.
- Eaton, J., Bateman, D., Hauberg, S., & Wehbring, R. (Fevereiro de 2011). "*GNU Octave - Free Your Numbers*" (3 ed.). Boston, USA: Free Software Foundation, Inc. Obtido em Fevereiro de 2015, de GNU Operating System: <https://www.gnu.org/software/octave/octave.pdf>
- Gaspar, N. (Julho de 2012). "Utilização de Leis Constitutivas Não-Lineares na Determinação da Forma de Cascas Reticuladas". Coimbra: Dissertação de Mestrado, Secção de Textos do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra.
- MathWorks. (2015). "MATLAB - R2015a". Obtido em Acedido em Junho de 2015 em: http://www.mathworks.com/help/releases/R2015a/pdf_doc/matlab/getstart.pdf

Paoli, C. (2007). "Past and Future of Grid Shell Structures". Massachusetts: Master of Engineering in Civil and Environmental Engineering at the Massachusetts Institute of Technology.

Veenendaal, D., & Block, P. (2011). "A Framework for Comparing Form Finding Methods". *Proceedings of the IABSE-IASS Symposium 2011*.

Wendland, D. (2000). "Model-Based Formfinding Processes: Free Forms in Structural and Architectural Design". *International Seminar, Politecnico di Torino, Turin*.

REFERÊNCIAS DE IMAGENS

Figura 2.1 - Auditório Kresge projetado pelo arquiteto Eero Saarinen pertencente ao MIT-Cambridge, Site STUDYRANGER: <https://www.studyranger.com/en/company/12498> e Site Google Maps: <https://www.google.pt/maps/@42.3581786,-71.0950245,269m/data=!3m1!1e3>, respetivamente (Abril de 2015)

Figura 3.1 - Vista aérea e vista interior, respetivamente, da Multihalle, em Mannheim na Alemanha, Site Fast+Epp: <http://www.fastepp.com/index.php/en/projects-2/current/multihalle-in-mannheim/> (Abril de 2015)

Figura 3.2 - Modelo físico, à escala 1:100, utilizado na determinação da forma geométrica da Multihalle, Wendland, D. (2000). “Model-Based Formfinding Processes: Free Forms in Structural and Architectural Design”. *International Seminar, Politecnico di Torino, Turin*.

Figura 3.3 - Vista exterior e vista interior do Pavilhão do Japão - Expo 2000 Hanôver, Site The Guardian: <http://www.theguardian.com/artanddesign/gallery/2015/mar/11/architect-frei-ottos-best-creations-in-pictures#img-4>, Site ArchDaily: <http://www.archdaily.com.br/br/01-185087/selecao-dos-principais-projetos-de-shigeru-ban> (Abril de 2015)

Figura 4.1 - Configurações indeformada e deformada de uma barra biarticulada sujeita a deformação finita, Dias da Silva, V. (Julho de 2007). “Cálculo de cargas críticas globais e deslocamentos de segunda ordem em estruturas tridimensionais”. *rpee - Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas*

Figura 4.2 - Barra com quatro graus de liberdade, Dias da Silva, V. (Julho de 2007). “Cálculo de cargas críticas globais e deslocamentos de segunda ordem em estruturas tridimensionais”. *rpee - Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas*

Figura 4.3 - Coordenadas da barra no caso tridimensional, Dias da Silva, V. (Julho de 2007). “Cálculo de cargas críticas globais e deslocamentos de segunda ordem em estruturas tridimensionais”. *rpee - Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas*

Figura 4.4 - Graus de liberdade de flexão plana de um elemento barra, Dias da Silva, V. (Setembro de 2002). “Introdução à Análise Não-Linear de Estruturas”. Coimbra: Secção de Textos do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra.

Figura 4.5 - Sistema de eixos do elemento barra: a) Perspetiva b) Projeção no plano perpendicular a z' , Dias da Silva, V. (Julho de 2007). “Cálculo de cargas críticas globais e deslocamentos de segunda ordem em estruturas tridimensionais”. *rpee - Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas*

Figura 4.6 - Projeção horizontal dos vetores z' e \vec{v}_1 , Dias da Silva, V. (Julho de 2007). “Cálculo de cargas críticas globais e deslocamentos de segunda ordem em estruturas tridimensionais”. *rpee - Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas*

Figura 4.7 - Definição do sistema de eixos no caso das barras verticais, Dias da Silva, V. (Julho de 2007). “Cálculo de cargas críticas globais e deslocamentos de segunda ordem em estruturas tridimensionais”. *rpee - Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas*

Figura 4.8 - Graus de liberdade do elemento barra, Dias da Silva, V. (Julho de 2007). “Cálculo de cargas críticas globais e deslocamentos de segunda ordem em estruturas tridimensionais”. *rpee - Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas*

Figura 6.1 – a) Torre reticulada; b) Secção transversal da torre, Dias da Silva, V. (21 Fevereiro 2008). “Cálculo de cargas críticas globais e deslocamentos de segunda ordem em estruturas reticuladas tridimensionais”. *Revista ENG pertencente ao Jornal Construir*, 25 a 27.

Figura 6.2 – Torre reticulada comprimida: a) 1º modo de instabilidade; b) 2º modo de instabilidade, Dias da Silva, V. (21 Fevereiro 2008). “Cálculo de cargas críticas globais e deslocamentos de segunda ordem em estruturas reticuladas tridimensionais”. *Revista ENG pertencente ao Jornal Construir*, 25 a 27.