



**FCTUC** DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

# **Encurvadura Lateral por Flexão-Torção de Vigas Elásticas com Secção Aberta de Parede Fina – Estudo do Efeito da Deformação de Pré-Encurvadura**

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil na Especialidade de Estruturas

Autor

**Vanessa Gil Cristino**

Orientador

**Anísio Alberto Martinho de Andrade**

**Paulo Manuel Mendes Pinheiro da Providência e Costa**

Esta dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor, não tendo sofrido correções após a defesa em provas públicas. O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer responsabilidade pelo uso da informação apresentada

**Coimbra, Julho, 2015**

## AGRADECIMENTOS

Durante este longo percurso tive oportunidade de conviver e trabalhar com um elevado número de pessoas que, de certa maneira, contribuíram para a realização deste trabalho. Quero assim agradecer:

Ao Professor Anísio Andrade por todo o apoio, dedicação e calma que mostrou na orientação deste trabalho, e por toda a disponibilidade oferecida para ajudar em cadeiras fora do âmbito da dissertação.

Ao Professor Paulo Providência por toda a paciência e dedicação na orientação deste trabalho, principalmente pelo grande empenho em ajudar na utilização do *software MatLab* e por toda a disponibilidade demonstrada.

Aos meus pais, José e Fernanda Cristino, que sempre me apoiaram ao longo de todo o meu percurso académico, e que tanto se esforçaram para que eu pudesse concluir este mestrado. Ao meu irmão, André Cristino, que mesmo sem saber, muitas vezes me apoiou. À minha avó, Idalina Correia, que tanto incentivo me deu para concluir este curso.

À Nádia Bica por toda a paciência para me ajudar a trabalhar com o *software MatLab*, e por todas as palavras de compreensão nas horas difíceis.

À Paula Moço e à Carmen Rocha que me aturaram nas horas de maior aflição e que tiveram uma palavra amiga e de conforto quando não via a luz ao fundo do túnel, e por todos os conselhos dados dentro e fora do âmbito académico.

A todos os meus amigos e colegas, e a todas as restantes pessoas que, de certa maneira, ao longo do meu percurso em Coimbra, tocaram a minha vida e a mudaram para que fosse possível chegar a este momento

A todos o meu muito obrigado!

## RESUMO

Uma viga sujeita a um carregamento de flexão, pode apresentar um modo de encurvadura combinando torção com flexão transversal ao plano de carga, se não estiver suficientemente contraventada e as suas rigidezes de torção e de flexão transversal forem reduzidas. Assim, o risco de ocorrência deste fenómeno pode ser elevado para muitas peças lineares de secção aberta de paredes finas porque a sua rigidez de torção é reduzida. Este é um fenómeno de instabilidade bifurcacional, o qual é usualmente designado de encurvadura lateral por flexão-torção, estudando-se neste trabalho a sua ocorrência para perfis prismáticos de secção monossimétrica aberta de paredes finas, com condições de apoio simples (isostáticas), em regime elástico linear e sujeitos a um carregamento quase-estático simples, proporcional a um parâmetro de carga, aplicado segundo o plano de simetria do perfil.

Este fenómeno de instabilidade bifurcacional é matematicamente descrito por um problema generalizado de valores próprios, o qual será linear, ou quadrático, consoante o efeito das deformações de pré-encurvadura for, ou não, desprezado. O menor valor próprio positivo define o valor crítico, em termos da encurvadura lateral por flexão-torção, do referido parâmetro de carga.

Nesta dissertação são desenvolvidos dois elementos finitos para a análise da encurvadura por flexão torção: um, mais complexo, no âmbito de uma formulação que inclui o efeito das deformações de pré-encurvadura e um outro, mais simples, no âmbito de uma formulação que exclui aquele efeito. Estas deformações foram pré-determinadas, para os casos estudados, por solução analítica das equações governativas. Este elemento finito foi seguidamente integrado num programa computacional em *MatLab*, o qual foi aplicado a alguns exemplos práticos.

A análise dos resultados dos exemplos apresentados permite concluir que são consistentes com os resultados analíticos e numéricos apresentados na literatura da especialidade.

## ABSTRACT

A beam under a bending loading may show a buckling mode combining twist and out-of-loading plane bending, in case of insufficient bracing and small torsional and out-of-plane bending stiffnesses. The risk of such a buckling occurring may therefore be quite high for open section thin walled linear members. This is a bifurcation phenomenon usually known by lateral torsional buckling (LTB). In this dissertation, its occurrence is investigated for prismatic members with thin walled monosymmetric open section, under simple isostatic support conditions, in the linear elastic regime, subject to a simple quasi-static loading along the symmetry plane of the cross section, proportional to a loading parameter.

Usually the bifurcation load parameter values and corresponding instability modes are determined disregarding the effects of deformation of prebuckling, this being a problem of eigenvalues. By considering the effects of warping, the problem becomes a nonlinear eigenvalues problem.

In this thesis is developed, with the computational implementation in *MatLab software*, a finite element which makes it possible to consider the influence of deformations of prebuckling in the analysis of bifurcation for bending-twist.

With the study of the presented examples, it is observed that the finite element developed presents results compatible with the ones in the literature, both in cases where the effects of prebuckling, as in cases in which this effect is despised.

## ÍNDICE

SIMBOLOGIA .....	vi
1 INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Enquadramento Geral .....	1
1.2 Objetivos e Âmbito da Dissertação .....	3
1.3 Organização da Dissertação.....	3
2 TORÇÃO NÃO UNIFORME .....	5
3 DEFINIÇÃO DA CLASSE DE PROBLEMAS A ANALISAR.....	14
3.1 Geometria e Propriedades Materiais.....	14
3.2 Carregamento.....	14
3.3 Condições de Apoio.....	15
3.4 Objetivos da Análise.....	16
4 MODELO MATEMÁTICO UNIDIMENSIONAL ADOTADO.....	17
4.1 Trajetória de Equilíbrio Fundamental.....	19
4.2 Pontos de Bifurcação .....	20
5 DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS.....	24
5.1 Aproximação do Campo de Deslocamentos.....	24
5.2 Matrizes de Rigidez Elementares – Caso em que é desprezado o efeito da deformação de pré-encurvadura.....	26
5.3 Matrizes de Rigidez Elementares – Caso em que é considerado o efeito da deformação de pré-encurvadura.....	28
5.4 Agregação das Matrizes de Rigidez .....	29
5.5 Problema Algébrico de Valores e Vetores Próprios – Caso em que é desprezado o efeito das deformações de pré-encurvadura .....	29
5.6 Problema Algébrico de Valores e Vetores Próprios – Caso em que é considerado o efeito das deformações de pré-encurvadura .....	30
6 EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO .....	31
6.1 Exemplo 1 – Viga Simplesmente Apoiada com Secção Duplamente Simétrica, submetida a Flexão Uniforme.....	31

---

6.2 Exemplo 2 – Consola com Secção Duplamente Simétrica, com Carga Pontual aplicada na Extremidade Livre.....	35
6.3 Exemplo 3 – Viga Simplesmente Apoiada, com Secção Monossimétrica, submetida a Carga Uniformemente Distribuída .....	38
7 CONCLUSÃO .....	41
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	43

## SIMBOLOGIA

### Letras latinas minúsculas

$a_i$  - Coeficientes constantes associados às funções polinomiais cúbicas  $v_h^{(e)}$

$b_i$  - Coeficientes constantes associados às funções polinomiais cúbicas  $\phi_h^{(e)}$

$c_i$  - Constante de integração

$\mathbf{d}^{(e)}$  - Vetor de deslocamentos nodais elementares

$d_i^{(e)}$  - Deslocamentos nodais elementares

$e$  - Número do elemento finito

$h$  - Distância entre as linhas médias dos banzos (perfis em I)

$k = \sqrt{\frac{EI_w}{L^2 GJ}}$  - Parâmetro adimensional associado à equação diferencial ordinária

$n$  - Número de elementos finitos

$q$  - Força transversal distribuída

$q_{cr}$  - Valor crítico da força transversal distribuída

$q_{ref}$  - Valor de referência da força transversal distribuída

$v$  - Deslocamento segundo  $y$  do centro de corte

$v_f$  - Deslocamento segundo  $y$  da linha média dos banzos (perfis em I)

$v_{\Delta}^{(e)}$  - Função polinomial cúbica

$w$  - Deslocamento segundo  $z$  do centro de corte

$w_p$  - Solução particular

$x, y, z$  - Sistema de eixos Cartesiano fixo

$z_c$  - Cota do centro de corte

$z_c$  - Distância entre o ponto de aplicação da força  $F_c$  e o centro de corte

$z_t$  - Distância entre o ponto de aplicação da força  $F_t$  e o centro de corte

$z_q$  - Cota de aplicação da força transversal uniformemente distribuída

$z_{Q_0}$  - Cota de aplicação da força concentrada  $Q_0$

$z_{Q_L}$  - Cota de aplicação da força concentrada  $Q_L$

## Letras latinas maiúsculas

$B$  - Bimomento

$\tilde{B}$  - Bimomento adimensionalizado

$C$  - Centro de corte

$D$  - Rigidez de flexão de cada banzo em relação ao eixo de maior inércia

$\mathbf{D}^{(e)}$  - Matriz de operadores diferenciais

$E$  - Módulo de elasticidade

$\mathbf{E}_1^{(e)}$  - Matriz constitutiva

$EI_w$  - Rigidez de empenamento

$F_c$  - Força de compressão

$F_t$  - Força de tração

$G$  - Módulo de distorção; Centro de Gravidade

$GJ$  - Rigidez de torção de Saint-Venant

$I_y$  - Momento de inércia de uma secção em relação ao eixo  $y$

$I_z$  - Momento de inércia de uma secção em relação ao eixo  $z$

$I_w$  - Constante de empenamento

$J$  - Constante de torção uniforme

$\mathbf{K}_i^{(e)}$  - Matrizes de rigidez elementares

$L$  - Comprimento do vão da barra

$M_{cr}^{clássico}$  - Momento crítico quando são desprezados os efeitos da deformação de pré-encurvadura

$M_{cr}^{nãolinear}$  - Momento crítico quando são considerados os efeitos da deformação de pré-encurvadura

$M_y$  - Campo de momentos fletores

$M_{y,ref}$  - Distribuição de momentos fletores primários associados a valores de referência das forças exteriores

$M_{y_0}$  - Momento concentrado aplicado na extremidade  $x = 0$

$M_{y_L}$  - Momento concentrado aplicado na extremidade  $x = L$

$\mathbf{N}_i^{(e)}$  - Matriz de funções de forma de Hermite

$Q_0$  - Força concentrada aplicada na extremidade  $x = 0$

$Q_{cr}^{clássico}$  - Valor crítico da carga concentrada quando são desprezados os efeitos da deformação de pré-encurvadura



$Q_{cr}^{n\grave{a}olinear}$  - Valor crítico da carga concentrada quando são considerados os efeitos da deformação de pré-encurvadura

$Q_L$  - Força concentrada aplicada na extremidade  $x = L$

$T$  - Momento torsor total

$T_{SV}$  - Momento torsor de Saint-Venant

$\tilde{T}_{SV}$  - Momento torsor de Saint-Venant adimensionalizada

$T_w$  - Momento torsor de empenamento

$\tilde{T}_w$  - Momento torsor de empenamento adimensionalizada

$V_2$  - Segunda variação da energia potencial total

$V_{2,\Delta}$  - Aproximação de elementos finitos da segunda variação da energia potencial

$V_f$  - Força de corte no banzo

### Letras gregas minúsculas

$\beta_y$  - Coeficiente de monossimetria

$\phi$  - Rotação de torção

$\phi_{\Delta}^{(e)}$  - Função polinomial cúbica

$\gamma_{xs}$  - Variação de ângulo entre as geratrizes de superfície média e as linhas médias da secção transversal (distorção)

$\eta^{(e)}$  - Coordenada local de um elemento finito

$\lambda$  - Parâmetro de carga

$\lambda_{cr}^{clássico}$  - Valor crítico do parâmetro de carga quando são desprezados os efeitos da deformação de pré-encurvadura

$\lambda_{cr}^{n\grave{a}olinear}$  - Valor crítico do parâmetro de carga quando são considerados os efeitos da deformação de pré-encurvadura

$\xi$  - Abcissa normalizada

### Letras gregas maiúsculas

$\Delta$  - Comprimento do elemento finito

$\bar{\Omega}^{(e)}$  - Domínio de um elemento finito

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Enquadramento Geral

O colapso de uma estrutura pode ocorrer, essencialmente, de dois modos (Bazant & Cedolin, 1991): (1) rotura do material ou (2) instabilidade estrutural. No caso de estruturas metálicas, o facto de os aços disponíveis no mercado possuírem resistências cada vez mais elevadas, tem conduzido à conceção e construção de estruturas cada vez mais esbeltas, às quais estão associados os objetivos de (1) maior economia e/ou (2) qualidade arquitetónica (ou seja, pelo menos maior impacto estético). Por outro lado, a palavra esbelta indica também “susceptibilidade à ocorrência de fenómenos de instabilidade (ou encurvadura)”, sendo a análise e dimensionamento deste tipo de estruturas fortemente condicionado pela necessidade de ter em consideração este tipo de fenómenos, cuja natureza é intrinsecamente *não linear*.

Em vigas, para além da encurvadura devida à flexão, na qual o elemento deforma por flexão segundo um dos eixos principais, pode existir encurvadura por torção ou por combinação de torção com flexão. Estes modos de rotura ocorrem quando a rigidez de torção do elemento é muito baixa, como no caso particular de barras com secção aberta de paredes finas, ou quando a flexão e torção estão relacionadas de modo que a ocorrência de uma provoca necessariamente a outra (Chajes, 1974). No caso de barras esbeltas sujeitas a flexão em torno do eixo de maior inércia, estas podem instabilizar por flexão-torção se esta não se encontrar devidamente contraventada (Reis & Camotim, 2001, Trahair, 1993), sendo este um fenómeno de instabilidade bifurcacional em que (1) a trajetória de equilíbrio fundamental corresponde à flexão no plano de maior inércia (deslocamento  $w$  - Figura 1.1) e (2) o modo de instabilidade envolve, simultaneamente, flexão em torno do eixo de menor inércia e torção (deslocamento  $v$  e rotação  $\phi$  - Figura 1.1).

Nestas situações é habitual que os valores de bifurcação do parâmetro de carga e correspondentes modos de instabilidade, sejam determinados admitindo que o elemento estrutural permaneça indeformado até se desencadear a encurvadura ( $w=0$ ), ou seja, desprezando as deformações de pré-encurvadura. Esta simplificação tem a grande vantagem de conduzir a um problema de valores próprios *linear* (Pignataro *et al.*, 1991).

---

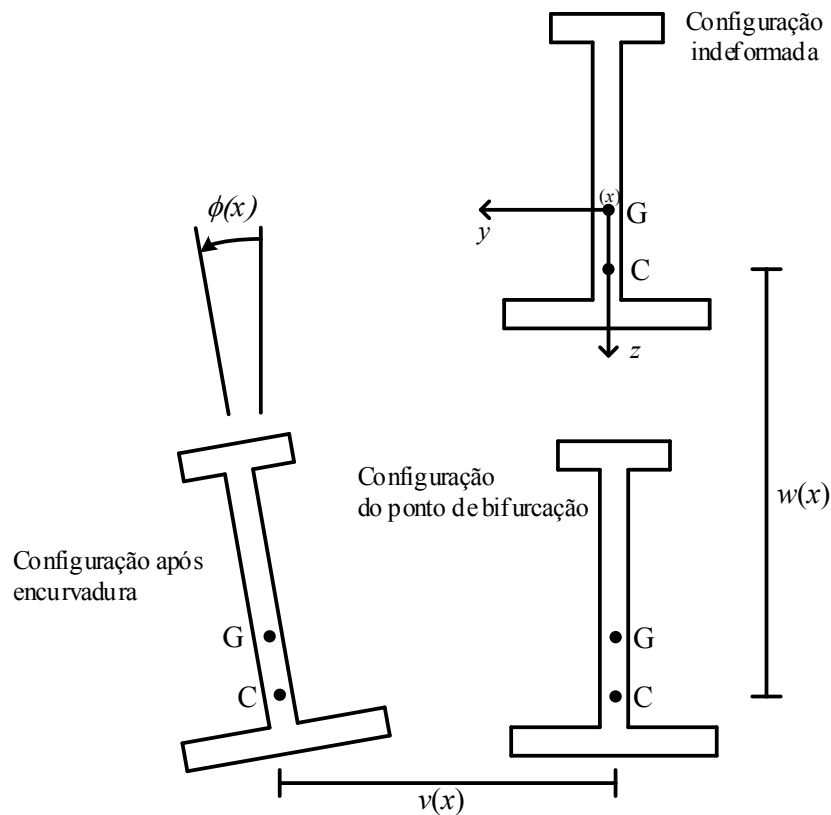


Figura 1.1 – Instabilidade por flexão-torção – Deslocamentos do centro de corte de uma secção genérica

No caso de vigas, a consideração das deformações de pré-encurvadura torna a análise de bifurcação consideravelmente mais complexa, pois obriga a ter em conta a influência da curvatura na resistência à encurvadura, uma vez que, no ponto de bifurcação, a viga apresenta a configuração de um arco (eventualmente invertido) muito abatido. Como mais à frente se verá, o problema de valores próprios é *não linear*.

O número de trabalhos de investigação sobre a influência das deformações de pré-encurvadura na instabilidade por flexão-torção de vigas é relativamente escasso, destacando-se os estudos de Trahair e Woolcock (1973) e Vacharajittiphan *et al.* (1974) que incidem exclusivamente sobre perfis em I de banzos iguais (ou seja, com secção transversal duplamente simétrica). A generalização de perfis de secção monossimétrica é feita posteriormente por Pi e Trahair (1992a,b), num trabalho em que é igualmente apresentada uma formulação por elementos finitos.

## 1.2 Objetivos e Âmbito da Dissertação

O objetivo central desta dissertação consiste em formular, implementar computacionalmente e verificar um elemento finito de barra, que permita considerar a influência das deformações de pré-encurvadura na análise de bifurcação por flexão-torção, em regime elástico, de vigas prismáticas com secção aberta de paredes finas, em que a secção pode ser duplamente simétrica ou monossimétrica, pretendendo-se, acima de tudo, obter uma ferramenta (1) suscetível de desenvolvimentos com vista ao alargamento do seu campo de aplicação e (2) que permita, futuramente, efetuar estudos paramétricos destinados a avaliar a importância de fatores, como as condições de apoio e de carregamento, bem como a forma da secção transversal.

Por razões de simplicidade de utilização e de eficiência, a implementação computacional é realizada com *software MatLab (MathWorks 2015)*, para o qual a Universidade de Coimbra possui uma licença de *campus*.

## 1.3 Organização da Dissertação

A presente dissertação encontra-se organizada em sete capítulos, o primeiro dos quais é a presente Introdução.

No segundo capítulo são recordados, de forma breve, os aspetos mais relevantes da torção não uniforme, em regime material e geometricamente linear, de barras com secção aberta de paredes finas com dupla simetria, dando-se especial atenção ao caso de perfis em I de banzos iguais, nos quais é facilmente visualizado este fenómeno. Adquire-se assim uma indispensável compreensão física do fenómeno.

No terceiro capítulo descreve-se em pormenor a classe de problemas a analisar, nomeadamente em termos de geometria da estrutura e das suas condições de apoio, das características do material e do carregamento atuante.

O quarto capítulo descreve o modelo matemático (contínuo) adotado nesta dissertação, que descreve o comportamento geometricamente não linear de barras prismáticas com secção aberta de paredes finas, havendo uma especial atenção em identificar claramente as principais hipóteses simplificativas. O modelo geral é, posteriormente, particularizado para as duas análises a efetuar: (1) análise da trajetória de equilíbrio fundamental e (2) identificação dos

pontos de bifurcação. Indicam-se todas as expressões necessárias para os desenvolvimentos subsequentes.

O quinto capítulo vem, assim, abordar a discretização por elementos finitos do modelo contínuo, sendo desenvolvidos, na realidade, dois elementos finitos. O primeiro, mais simples, despreza os efeitos das deformações de pré-encurvadura, enquanto o segundo, mais complexo, considera estes mesmos efeitos. Neste capítulo é ainda discutida a implementação dos elementos finitos em *MatLab*.

No sexto capítulo são apresentados quatro exemplos práticos, em que dois destes pretendem mostrar que o elemento finito desenvolvido apresenta convergência para resultados exatos expostos na literatura, considerando para isso duas secções transversais diferentes. Os restantes exemplos pretendem mostrar a existência de convergência dos resultados quando os efeitos das deformações de pré-encurvadura são desprezados ou considerados, para dois casos em que as condições de apoio e carregamento são diferentes.

No sétimo e último capítulo são apresentadas as principais conclusões retiradas deste trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

## 2 TORÇÃO NÃO UNIFORME

O estudo da torção não uniforme teve o seu início em 1905 quando S.P. Timoshenko observou que barras de secção em I duplamente simétricas, sujeitas a um momento torsor constante, apresentavam comportamentos marcadamente diferentes consoante o empenamento estivesse ou não restringido. Quando o empenamento é livre (os apoios não impedem o empenamento e o momento torsor é constante – Figura 2.1a), em cada secção estão instaladas apenas tensões tangenciais, cuja distribuição pode ser facilmente visualizada recorrendo à analogia de membrana de Prandtl (Dias da Silva, 2013). Se existirem restrições ao empenamento (numa das extremidades da barra, por exemplo, como esquematizado na Figura 2.1b), está-se perante torção não-uniforme – a torção é acompanhada da flexão dos banzos em sentidos opostos e a barra é mais rígida do que o previsto pela teoria de Saint-Venant. De facto, quando a torção é não uniforme, desenvolvem-se também tensões normais na secção (com resultante nula), cuja variação ao longo da barra é equilibrada por tensões tangenciais adicionais, as quais são estaticamente equivalentes a um momento torsor.

Desta forma, o momento torsor é dado pela soma de duas parcelas,  $T_{SV}$  e  $T_w$ . O momento torsor de Saint-Venant,  $T_{SV}$ , é proporcional à primeira derivada da rotação de torção  $\phi$ , ou seja,

$$T_{SV} = GJ\phi', \tag{1}$$

onde  $GJ$  é a rigidez de torção de Saint-Venant da secção transversal. Para definir a parcela  $T_w$ , associada à restrição do empenamento, Timoshenko estabeleceu, por considerações de simetria, que cada secção transversal roda em torno do eixo baricêntrico (e dos centros de corte)

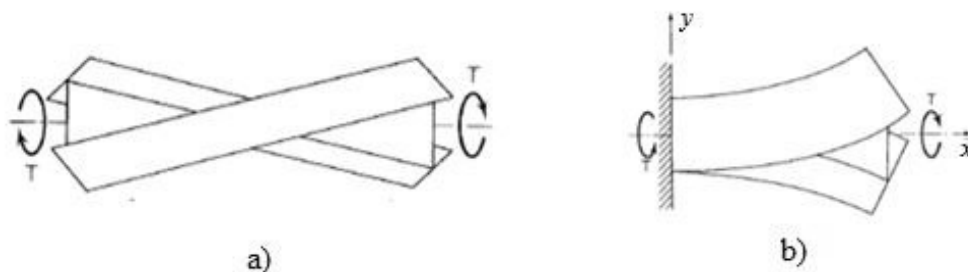


Figura 2.1 - Barra em I com secção duplamente simétrica, que se encontra submetida a a) torção uniforme e b) torção não-uniforme (adaptada de Chajes, 1974)

da barra. Os deslocamentos transversais da linha média dos banzos são, portanto,

$$v_f = \pm \frac{1}{2} h \phi, \quad (2)$$

onde  $h$  é a distância entre as linhas médias dos banzos. Se os banzos são considerados, individualmente, como vigas de Euler-Bernoulli, então as curvaturas  $v_f'' = \pm \frac{1}{2} h \phi''$  que estes adquirem devido à restrição do empenamento estão associadas aos momentos fletores

$$M_f = \pm \frac{1}{2} D h \phi'' \quad (3)$$

e às forças de corte

$$V_f = M_f' = \pm \frac{1}{2} D h \phi''' , \quad (4)$$

onde  $D$  representa a rigidez de flexão de cada banzo em relação ao seu eixo de maior inércia. As forças de corte nos dois banzos têm a mesma grandeza, mas sentidos opostos. Como tal, formam um binário (Figura 2.2)

$$T_w = -\frac{1}{2} D h^2 \phi''' . \quad (5)$$

A equação final que se obtém para a torção não uniforme de uma barra de secção em I duplamente simétrica é então

$$T = T_{SV} + T_w = GJ\phi' - \frac{1}{2} D h^2 \phi''' . \quad (6)$$

Atualmente, a propriedade mecânica  $\frac{1}{2} D h^2$  é designada por rigidez de empenamento da secção transversal e representada pelo símbolo  $EI_w$ . Usando uma definição adequada para  $EI_w$ , a expressão (6) permanece válida para secções abertas de paredes finas com geometria arbitrária, mesmo que não exibam dupla simetria.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Para uma secção aberta de paredes finas, a constante de Saint-Venant  $J$  pode ser calculada através de (Dias da Silva, 2013)

$$J = K \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n l_i e_i^3 ,$$

onde  $l_i$  é o comprimento dos diversos troços que compõem a secção,  $e_i$  são as respetivas espessuras (com  $l_i \gg e_i$ ) e  $K$  é um coeficiente através do qual se tem em conta o acréscimo de rigidez devido às ligações e arredondamentos dos cantos habituais de perfis metálicos (para secções em I tem-se  $K = 1,25$  e para secções em U e T tem-se  $K = 1,10$ ). As constantes de empenamento  $I_w$  de um conjunto de secções de utilização corrente encontram-se tabeladas em Oden e Ripperger (1981), por exemplo.

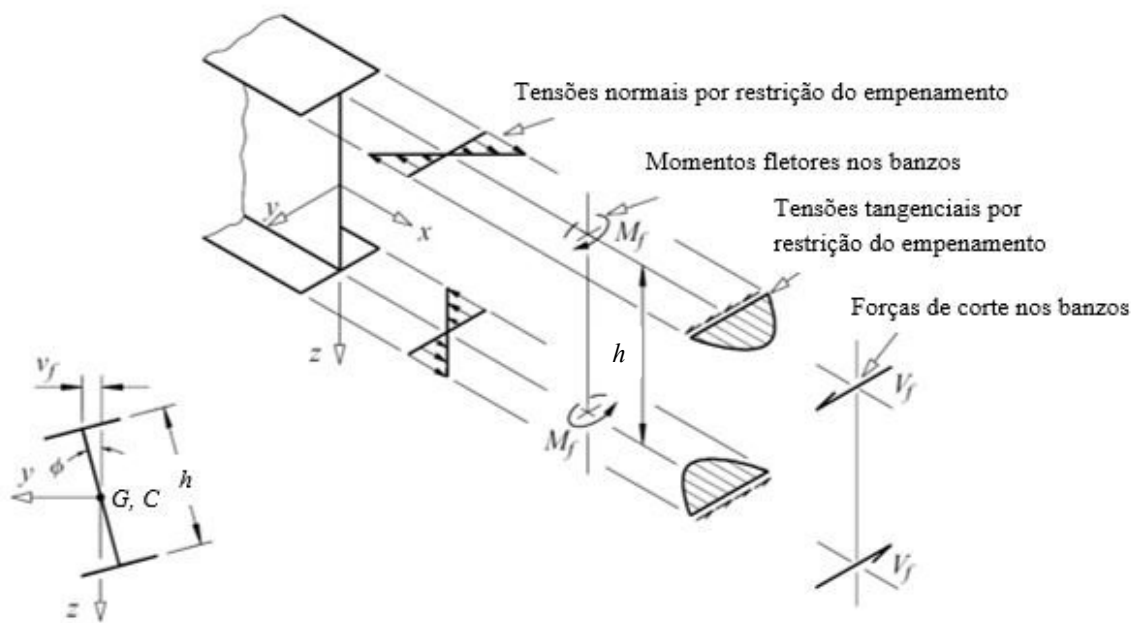


Figura 2.2 – Tensões e resultantes de tensões provocadas pela restrição do empenamento numa barra de secção em I duplamente simétrica (adaptada de Trahair *et al.*, 2008)

É ainda habitual definir uma nova resultante de tensões, autoequilibrada, que Vlasov (1961a) designou por bimomento:

$$B = -EI_w \phi'' . \tag{7}$$

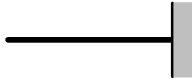
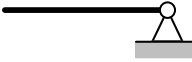
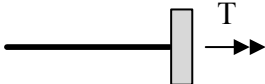

No caso da barra em I duplamente simétrica, o bimomento corresponde, em valor absoluto, ao produto do momento fletor em cada banzo pela distância entre linhas médias dos banzos, dado por

$$|B| = |M_f| h . \tag{8}$$

No Quadro 2.1 encontram-se indicadas as condições de fronteira mais comuns que complementam a equação diferencial ordinária (6), com  $\frac{1}{2} Dh^2$  substituído por  $EI_w$ . Se o empenamento se encontra impedido numa extremidade da barra, tem-se, nessa extremidade  $\phi' = 0$  (refira-se que  $\phi'$  representa a amplitude do empenamento); o momento torsor de Saint-Venant,  $T_{SV}$ , é igualmente nulo e, conseqüentemente, o momento torsor total é dado apenas por  $T = T_w = -EI_w \phi'''$  (isto é patente no caso *c* apresentado no Quadro 2.1). Se o empenamento for livre numa extremidade da barra, o bimomento  $B = -EI_w \phi''$  anula-se nessa mesma extremidade (caso *b* e *d* do Quadro 2.1).



Quadro 2.1 - Condições de Fronteira (adaptado de Gjelsvik, 1981)

Descrição	Condições de fronteira cinemáticas	Condições de fronteira estáticas	Caso
 Rotação de torção e empenamento impedidos	$\phi = 0$ $\phi' = 0$	—	<i>a</i>
 Rotação de torção impedida e empenamento livre	$\phi = 0$	$EI_w \phi'' = 0$	<i>b</i>
 Rotação de torção livre e empenamento impedido	$\phi' = 0$	$-EI_w \phi''' = T$	<i>c</i>
 Rotação de torção e empenamentos livres	—	$GJ \phi' - EI_w \phi''' = T$ $EI_w \phi'' = 0$	<i>d</i>

A fim de ilustrar a aplicação dos conceitos anteriores, apresenta-se agora uma análise do comportamento de uma barra em consola solicitada por um momento torsor  $T_L$  aplicado na extremidade livre (Figura 2.3). A barra tem comprimento  $L$ , rigidez de empenamento  $EI_w$  e rigidez de Saint-Venant  $GJ$ . Na secção de encastramento, a rotação em torno do eixo longitudinal encontra-se impedida, assim como o empenamento.

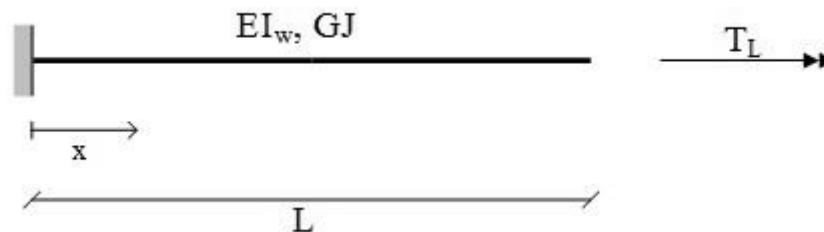


Figura 2.3 - Barra em consola sujeita a momento torsor constante  $T_L$

Sendo o momento torsor

$$T(x) = GJ \phi'(x) - EI_w \phi'''(x) \quad (9)$$

constante ao longo da barra ( $T(x) = T_L$ ,  $0 \leq x \leq L$ ), obtém-se, por derivação,

$$T'(x) = GJ \phi''(x) - EI_w \phi^{(4)}(x) = 0. \quad (10)$$

A rotação de torção  $\phi$  pode assim ser obtida resolvendo a equação diferencial homogénea (10) com as condições de fronteira (casos *a* e *d* do Quadro 2.1)

$$\phi(0) = 0 \quad (11)$$

$$\phi'(0) = 0 \quad (12)$$

$$\phi''(L) = 0 \quad (13)$$

$$GJ \phi'(L) - EI_w \phi'''(L) = T_L. \quad (14)$$

Este problema pode ser adimensionalizado através da introdução da abcissa normalizada  $\xi = \frac{x}{L}$  e da função  $\tilde{\phi}$  definida, no intervalo  $[0,1]$ , por  $\tilde{\phi}(\xi) = \phi(\xi L)$ . Tendo em conta que, pela regra de derivação da função composta, se tem

$$\phi^{(n)}(x) = \tilde{\phi}^{(n)}(\xi) \frac{d^n \xi}{dx^n} = \frac{1}{L^n} \tilde{\phi}^{(n)}(\xi), \quad (15)$$

resulta da equação (10)

$$k^2 \tilde{\phi}^{(4)}(\xi) - \tilde{\phi}''(\xi) = 0, \quad (16)$$

em que  $k = \sqrt{\frac{EI_w}{L^2 GJ}}$  é um parâmetro adimensional.<sup>2</sup> Por sua vez, as condições de fronteira (11)-(14) escrevem-se agora na forma

$$\tilde{\phi}(0) = 0 \quad (17)$$

$$\tilde{\phi}'(0) = 0 \quad (18)$$

$$\tilde{\phi}''(1) = 0 \quad (19)$$

---

<sup>2</sup> Este parâmetro pode ainda ser escrito como  $k = d/L$ , em que  $d = \sqrt{EI_w/GJ}$  é uma propriedade da secção transversal normalmente designada por comprimento característico (Gjelsvik, 1981, Kollbrunner e Basler, 1969). De acordo com Kitipornchai e Trahair (1980), o parâmetro  $k$  dos perfis habitualmente usados em vigas pode variar entre 0,03 e 0,80.

$$\tilde{\phi}'(1) - k^2 \tilde{\phi}'''(1) = \frac{LT_L}{GJ}. \quad (20)$$

A equação (16) tem como solução geral

$$\tilde{\phi}(\xi) = c_1 + c_2 \xi + c_3 \sinh\left(\frac{\xi}{k}\right) + c_4 \cosh\left(\frac{\xi}{k}\right). \quad (21)$$

As constantes de integração  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são determinadas a partir das condições de fronteira (17)-(20). Obtém-se

$$\begin{cases} c_1 + c_4 = 0 \\ c_2 + \frac{c_3}{k} = 0 \\ \frac{c_3}{k^2} \sinh\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{c_4}{k^2} \cosh\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \\ c_2 = \frac{LT_L}{GJ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{kLT_L}{GJ} \tanh\left(\frac{1}{k}\right) \\ c_2 = \frac{LT_L}{GJ} \\ c_3 = -\frac{kLT_L}{GJ} \\ c_4 = \frac{kLT_L}{GJ} \tanh\left(\frac{1}{k}\right) \end{cases} \quad (22)$$

e, portanto, tem-se

$$\tilde{\phi}(\xi) = -\frac{kLT_L}{GJ} \tanh\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{LT_L}{GJ} \xi - \frac{kLT_L}{GJ} \sinh\left(\frac{\xi}{k}\right) + \frac{kLT_L}{GJ} \tanh\left(\frac{1}{k}\right) \cosh\left(\frac{\xi}{k}\right). \quad (23)$$

Esta função está representada graficamente na Figura 2.4 para  $k = 0,1$  (valor moderadamente reduzido) e para  $k = 0,5$  (valor moderadamente elevado). São também apresentadas, para os mesmos valores de  $k$ , as seguintes versões adimensionalizadas das distribuições de bimomento, momento torsor de Saint-Venant e momento torsor de (restrição do) empenamento (Figuras 2.5, 2.6 e 2.7, respetivamente):

$$\tilde{B}(\xi) = \frac{B(\xi L)}{GJ} = -\frac{EI_w}{L^2 GJ} \tilde{\phi}''(\xi) = -k^2 \tilde{\phi}''(\xi) = \quad (24)$$

$$= \frac{kLT_L}{GJ} \left[ \sinh\left(\frac{\xi}{k}\right) - \tanh\left(\frac{1}{k}\right) \cosh\left(\frac{\xi}{k}\right) \right] \quad (25)$$

$$\tilde{T}_{sv}(\xi) = \frac{LT_{sv}(\xi L)}{GJ} = \tilde{\phi}'(\xi) = \frac{LT_L}{GJ} \left[ 1 - \cosh\left(\frac{\xi}{k}\right) + \tanh\left(\frac{1}{k}\right) \sinh\left(\frac{\xi}{k}\right) \right] \quad (26)$$

$$\tilde{T}_w(\xi) = \frac{LT_w(\xi L)}{GJ} = -\frac{EI_w}{L^2 GJ} \tilde{\phi}'''(\xi) = -k^2 \tilde{\phi}'''(\xi) = \frac{LT_L}{GJ} \left[ \cosh\left(\frac{\xi}{k}\right) - \tanh\left(\frac{1}{k}\right) \sinh\left(\frac{\xi}{k}\right) \right]. \quad (27)$$

Em todos os gráficos, o eixo das ordenadas está normalizado pelo fator  $GJ / (LT_L)$ . Constatase que:

- (1) No caso  $k = 0,1$ , a curva  $\tilde{\phi}$  vs.  $\xi$  da Figura 2.4 é praticamente reta para  $\xi > 0,3$ , apresentando curvatura visível apenas na vizinhança de  $\xi = 0$  (ou seja, junto ao apoio). Esta observação é confirmada nas Figuras 2.5 e 2.6, onde se constata que  $\tilde{\phi}'$  é sensivelmente constante e  $\tilde{\phi}''$  é sensivelmente zero para  $\xi > 0,3$ . Pelo contrário, a curva  $\tilde{\phi}$  vs.  $\xi$  relativa a  $k = 0,5$  apresenta uma curvatura evidente ao longo de todo o seu comprimento, se bem que mais pronunciada junto ao apoio.
- (2) O bimomento e o momento torsor de empenamento (proporcionais à segunda e terceira derivadas da rotação de torção, respetivamente) são máximos (em valor absoluto) no encastramento. Para  $k = 0,1$ , estes esforços decaem depois rapidamente, tornando-se praticamente nulos a uma distância relativamente curta do apoio. Já para  $k = 0,5$ , tanto o bimomento como o momento torsor de empenamento decaem mais lentamente, apresentando valores significativos em todo o comprimento da barra.
- (3) Como não podia deixar de ser,

$$\left(\tilde{T}_{sv}(\xi) + \tilde{T}_w(\xi)\right) \frac{GJ}{LT_L} = \left(T_{sv}(\xi L) + T_w(\xi L)\right) \frac{1}{T_L} = 1, \quad \forall \xi \in [0,1]. \quad (28)$$

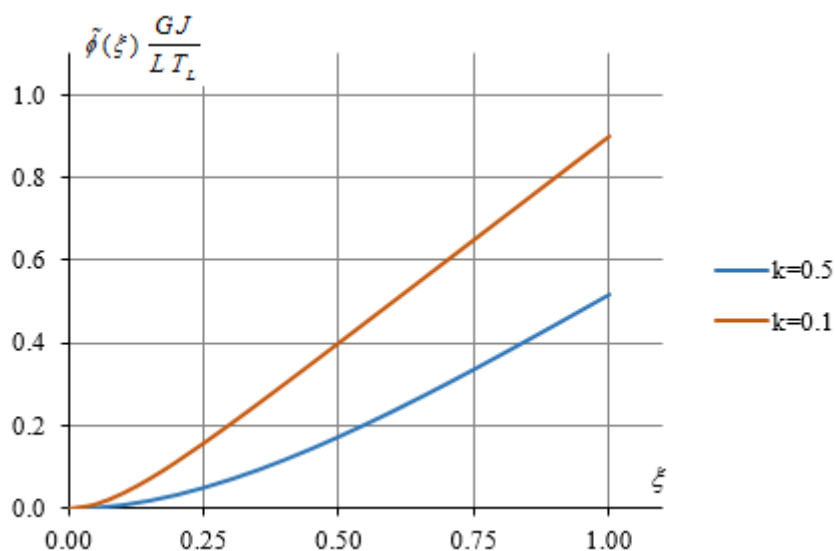


Figura 2.4 - Rotação de torção,  $\tilde{\phi}(\xi)$

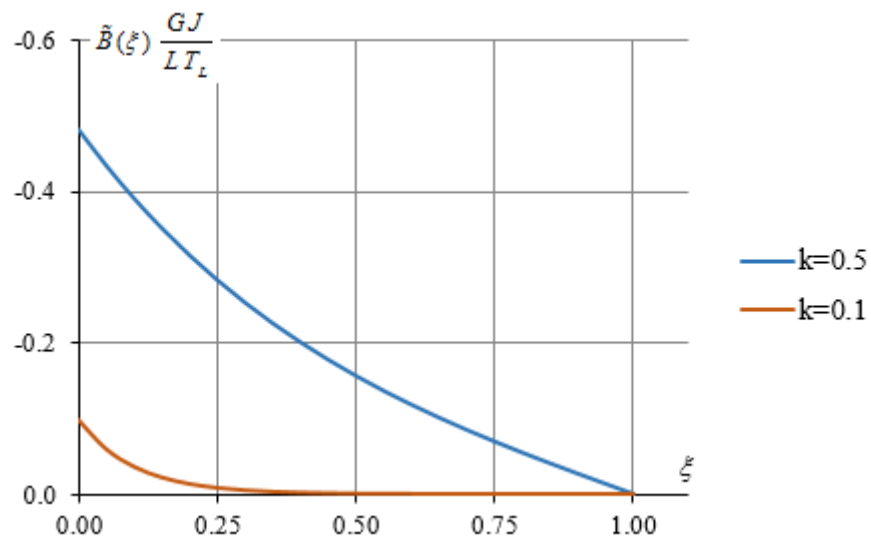


Figura 2.5 - Bimomento (adimensionalizado),  $\tilde{B}(\xi)$

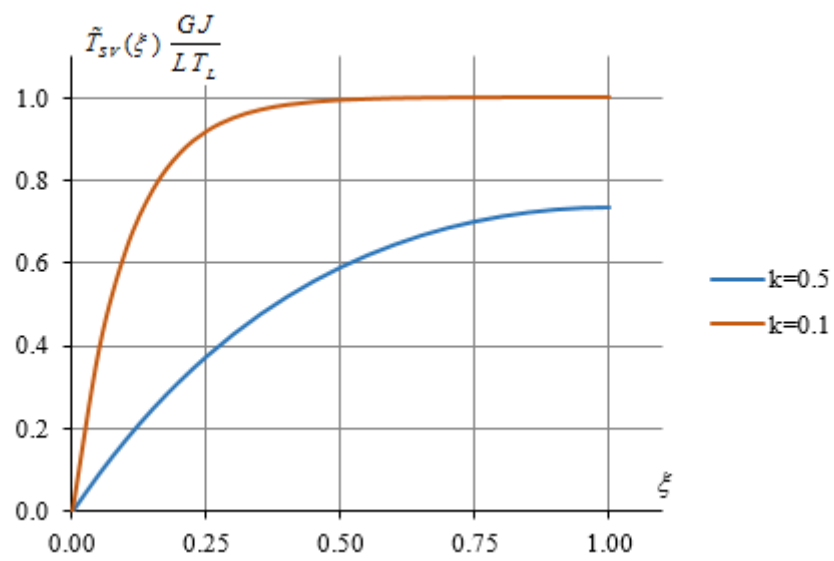


Figura 2.6 - Momento torsk de Saint-Venant (adimensionalizado),  $\tilde{T}_{SV}(\xi)$

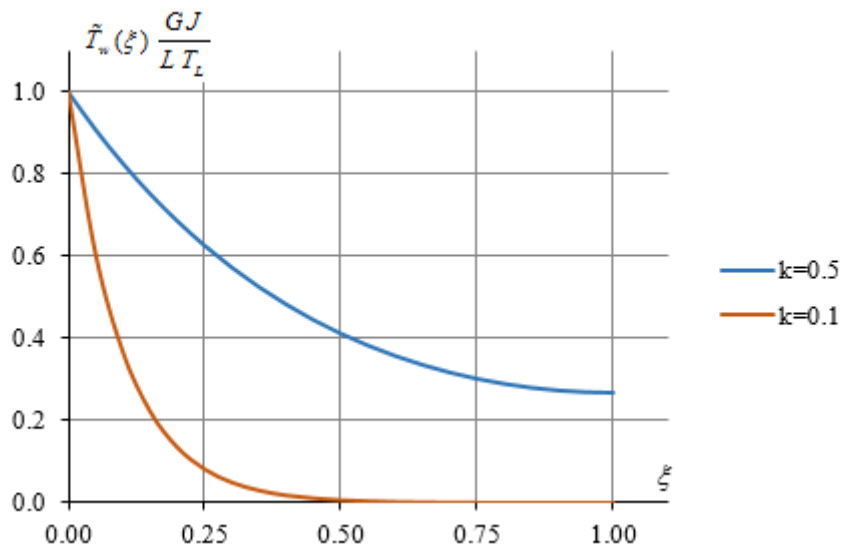


Figura 2.7 - Momento torsor de empenamento (adimensionalizado),  $\tilde{T}_w(\xi)$

### 3 DEFINIÇÃO DA CLASSE DE PROBLEMAS A ANALISAR

#### 3.1 Geometria e Propriedades Materiais

As vigas estudadas nesta dissertação são prismáticas e com secção aberta de paredes finas monossimétrica, sem quaisquer imperfeições (*i.e.*, “ideiais”), encontrando-se representada na Figura 3.1 a configuração indeformada de dois elementos com estas características. Adota-se um sistema de eixos fixos, ortogonal e direto, de modo a que, na configuração indeformada, (1) o eixo  $x$  coincida com o eixo baricêntrico da viga, (2) os eixos  $y$  e  $z$  correspondam aos eixos principais centrais de inércia da secção transversal e (3) o plano  $(x,z)$  seja plano de simetria. O comprimento da viga é designado por  $L$ .

O material considerado é linearmente elástico, homogéneo e isotrópico, caracterizado pelo módulo de elasticidade  $E$  e pelo módulo de distorção  $G$ .

#### 3.2 Carregamento

Ao longo de toda a trajetória de equilíbrio fundamental, considera-se que a viga se encontra submetida ao sistema de forças (generalizadas) exteriores conservativas representado na Figura 3.2:

- (1) Força transversal uniformemente distribuída  $q$ , que atua segundo o plano de simetria  $(x,z)$ , inicialmente a uma cota  $z_q$ .

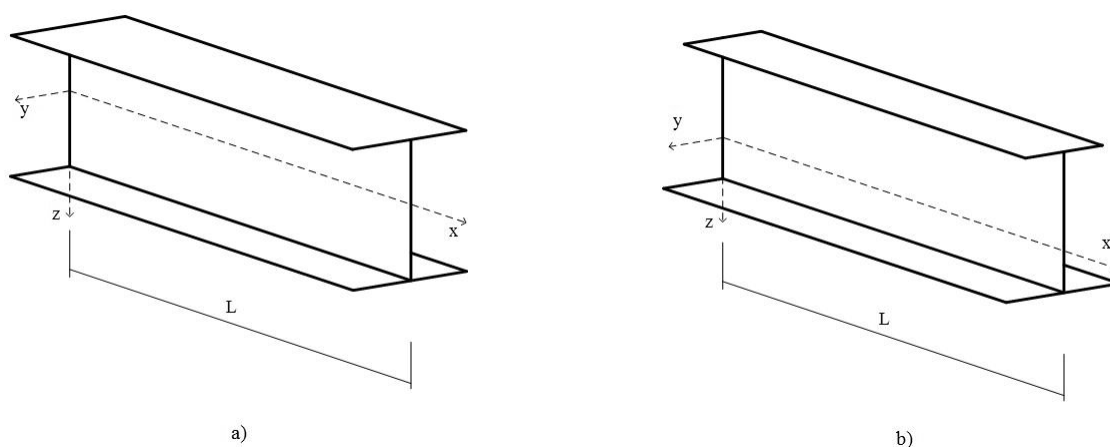


Figura 3.1 – Configuração indeformada de uma viga a) duplamente simétrica e b) monossimétrica. Referencial adotado

- (2) Forças concentradas nas extremidades,  $Q_0$  e  $Q_L$ , que atuam segundo o plano de simetria  $(x,z)$ , inicialmente às cotas  $z_{Q_0}$  e  $z_{Q_L}$ .
- (3) Momentos concentrados nas extremidades esquerda e direita,  $M_{y_0}$  e  $M_{y_L}$ , respetivamente.

Com o intuito de evitar algumas questões delicadas relacionadas com a definição de momentos conservativos (Simitzes e Hodges, 2006), apenas é considerada a ação destes momentos quando a rotação de torção da secção em que estão aplicados se encontrar impedida.

Todas as forças aplicadas são proporcionais a um único parâmetro de carga,  $\lambda$ . Pode portanto escrever-se, por exemplo,  $q = q_{ref} \lambda$ , onde  $q_{ref}$  é um valor de referência não negativo, e de igual forma para as restantes forças. Assim, ao longo da trajetória de equilíbrio fundamental, parametrizada por  $\lambda$ , o campo de momentos flectores é dado por

$$M_y(x, \lambda) = - \left( M_{y_0,ref} + Q_{0,ref} x + q_{ref} \frac{x^2}{2} \right) \lambda = M_{y,ref}(x) \lambda, \tag{29}$$

em que  $M_{y,ref} = - \left( M_{y_0,ref} + Q_{0,ref} x + q_{ref} \frac{x^2}{2} \right)$  representa a distribuição de momentos flectores associada aos valores de referência das forças exteriores.

### 3.3 Condições de Apoio

É conveniente distinguir entre (1) condições de apoio para a flexão no plano de simetria  $(x,z)$  (daqui em diante designadas por “condições de apoio no plano”) e (2) condições de apoio para a flexão no plano principal  $(x,y)$  e para a torção, incluindo empenamento (designadas por “condições de apoio fora do plano”).

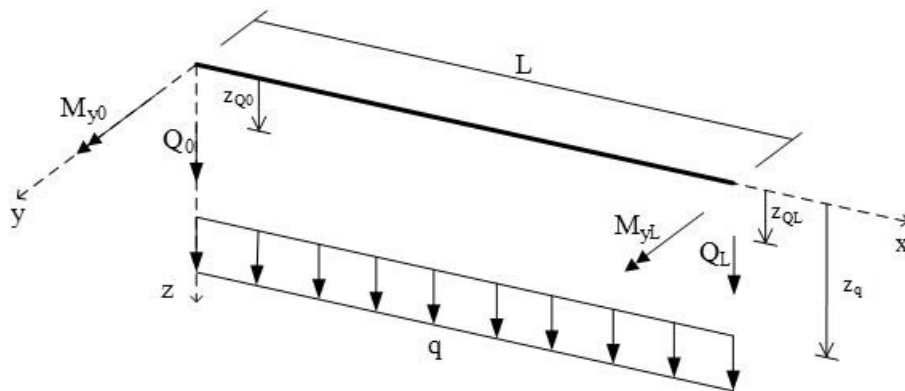


Figura 3.2 – Sistema de forças exteriores (forças aplicadas e ou reações) para condições de apoio arbitrárias



As condições de apoio no plano intervêm na análise da trajetória de equilíbrio fundamental, ou seja, na determinação do campo de momentos  $M_y$  e dos deslocamentos no plano de simetria  $(x,z)$ . São considerados os tipos de apoio correntes: (1) articulações fixas e móveis e (2) encastramentos fixos e móveis. Para o sistema de forças genérico apresentado na Figura 3.2, estas condições de apoio determinam quais das forças de extremidade são ações (eventualmente com valor nulo) e quais são reações.

Já as condições de apoio fora do plano intervêm na análise de bifurcação, e podem incluir qualquer combinação consistente (*i.e.*, que não dê origem a um mecanismo) de restrições rígidas dos seguintes deslocamentos nas secções extremas da viga: (1) deslocamento segundo  $y$  do centro de corte, (2) rotação em torno do eixo  $x$ , (3) rotação em torno do eixo  $z$  e (4) empenamento.

### 3.4 Objetivos da Análise

Como referido na Introdução, vigas como as atrás descritas são suscetíveis a encurvar lateralmente por flexão-torção quando não dotadas de um contraventamento adequado.

Nesta dissertação, pretende-se desenvolver uma ferramenta de análise que identifique os pontos de bifurcação por flexão-torção, isto é, que determine os valores de bifurcação do parâmetro de carga  $\lambda$  e, se pretendido, também a forma dos modos de instabilidade a estes associados. Pretende-se ainda que a ferramenta desenvolvida tenha a possibilidade de considerar, ou não, o efeito da deformação de pré-encurvadura na resistência à encurvadura lateral.

## 4 MODELO MATEMÁTICO UNIDIMENSIONAL ADOTADO

De acordo com a definição dada por Antman (2005), um modelo unidimensional pretende caracterizar os aspetos considerados relevantes, para determinada aplicação, do comportamento mecânico de uma classe de barras por intermédio de um número finito de equações com uma única variável independente espacial. É desejável que as variáveis dependentes tenham uma interpretação física relativamente simples.

Para descrever o comportamento geometricamente não linear de barras prismáticas com secção aberta de paredes finas, adota-se nesta dissertação o modelo matemático unidimensional desenvolvido por Attard (1986). Trata-se, no essencial, de um modelo de casca (bidimensional, portanto) ao qual são impostos os seguintes constrangimentos internos:

- (1) As secções transversais não se deformam no seu plano.
- (2) Na superfície média da barra, as distorções  $\gamma_{xy}$  (que traduzem a variação de ângulo, inicialmente reto, entre as geratrizes da superfície média e as linhas médias das secções transversais) são desprezáveis.
- (3) As fibras, inicialmente normais à superfície média da barra, permanecem retas e normais àquela superfície após a deformação, sem alteração de comprimento.

Os dois primeiros constrangimentos internos correspondem às hipóteses clássicas de Wagner (1929) e de Vlasov (1961). Em particular, o constrangimento (1) permite considerar cada secção transversal como um disco rígido, para efeitos de descrição do movimento no seu plano, mas não permite a consideração de fenómenos de instabilidade local e/ou distorcional, matérias que se encontram fora do âmbito da dissertação.

Já o constrangimento (3) é conhecido como hipótese de Kirchhoff-Love (Love, 1944). Permite tomar em consideração o empenamento dito secundário, ou seja, o empenamento na espessura da parede relativamente à linha média da secção, como mostra a Figura 4.1. O efeito do empenamento secundário assume uma particular relevância no caso de secções que não exibem empenamento primário, isto é, empenamento da linha média, como por exemplo secções retangulares finas, cantoneiras e secções em T (Attard e Lawther, 1989).

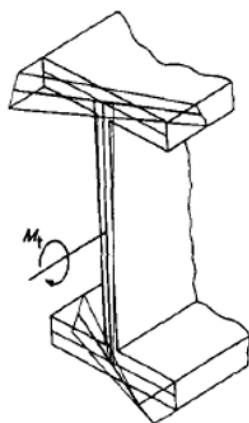


Figura 4.1 – Empenamento primário e empenamento secundário numa secção aberta de paredes finas (Attard, 1986)

A definição de uma configuração deformada é feita a partir dos seguintes deslocamentos generalizados (funções apenas de  $x$ ): (1) deslocamento axial médio das secções transversais, representado por  $u$ , (2) deslocamentos transversais, segundo  $y$  e  $z$ , do eixo dos centros de corte, designados por  $v$  e  $w$ , respetivamente, e (3) rotação das secções transversais em torno do eixo longitudinal  $x$ , designada por  $\phi$ .

O modelo matemático de Attard não é geometricamente exato, isto é, não é válido para deslocamentos e rotações arbitrariamente grandes. É, portanto, fundamental referir que este modelo está limitado a:

- (1) Pequenos deslocamentos axiais (a derivada do deslocamento axial – grandeza adimensional – é muito pequena em comparação com a unidade).
- (2) Rotações de flexão pequenas a moderadas. Já as rotações de torção podem ser grandes.

Ghobarah & Tso (1971) justificam a disparidade no tratamento cinemático da flexão e da torção pela baixa rigidez de torção, comparativamente à rigidez de flexão, que as barras com secção aberta de paredes finas em geral apresentam.

Por fim, é importante mencionar que, no desenvolvimento do seu modelo, Attard adota uma abordagem variacional, baseada no princípio da estacionaridade da energia potencial total. Como refere Fung (1965), esta abordagem apresenta as seguintes vantagens:

- (1) Considera o sistema mecânico na sua globalidade, e não as partes individuais que o compõem.

- (2) Permite obter, de uma forma consistente, as equações de campo e as condições de fronteira que regem o problema.
- (3) Inclui automaticamente os efeitos dos constrangimento, sem que seja necessário conhecer as reações correspondentes.
- (4) O método direto do cálculo de variações é uma das ferramentas mais poderosas para obter soluções numéricas.

Na presente dissertação, o processo de análise desenvolve-se em duas fases sucessivas. Numa primeira fase é determinada a trajetória de equilíbrio fundamental, a qual envolve apenas flexão no plano de simetria  $(x,z)$ . Sobre esta trajetória identificam-se depois os pontos de bifurcação do equilíbrio por flexão-torção. Estas duas fases são discutidas mais pormenorizadamente nas duas secções que se seguem.

#### 4.1 Trajetória de Equilíbrio Fundamental

Num estado de equilíbrio fundamental, a viga encontra-se submetida apenas a flexão no plano  $(x,z)$ , pelo que o deslocamento segundo  $y$  do centro de corte e a rotação de torção das secções são identicamente nulos ( $v = 0$  e  $\phi = 0$ ).

A determinação do deslocamento segundo  $z$  do eixo dos centros de corte, designado por  $w$ , pode ser feita integrando a equação diferencial *linear*

$$EI_y w^{(4)} = q, \quad (30)$$

onde  $EI_y$  designa a rigidez de flexão em torno do eixo  $y$  e  $q$  é a força transversal aplicada (segundo  $z$ ). A solução geral desta equação tem a forma

$$w = \frac{1}{EI_y} \left( \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4 \right) + w_p, \quad (31)$$

onde  $w_p$  representa uma solução particular e as constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são determinadas a partir das condições de fronteira no plano. Nos Quadros 4.1 e 4.2 encontram-se apresentadas, para algumas situações típicas, (1) as condições de fronteira a considerar, (2) uma solução particular  $w_p$  e (3) os valores correspondentes das constantes de integração.

Em virtude da linearidade deste problema de valores na fronteira, pode escrever-se  $w = \lambda w_{ref}$ , onde  $w_{ref}$  é o deslocamento correspondente aos valores de referência das cargas aplicadas. Outras soluções podem ser facilmente obtidas pelo princípio da sobreposição dos efeitos.

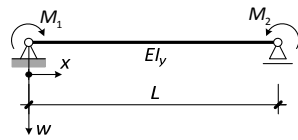
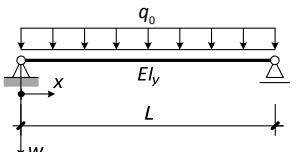
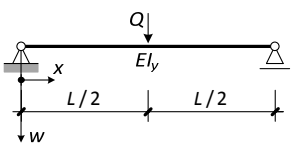
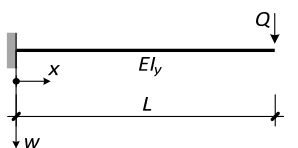
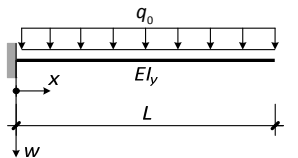
Quadro 4.1 – Flexão no plano – Condições de fronteira em algumas situações típicas

	$w(0) = 0$	$-EI_y w''(0) = M_1$	$w(L) = 0$	$-EI_y w''(L) = M_2$
	$w(0) = 0$	$w''(0) = 0$	$w(L) = 0$	$w''(L) = 0$
	$w(0) = 0$	$w''(0) = 0$	$w'\left(\frac{L}{2}\right) = 0$	$-EI_y w''' \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{Q}{2}$
			$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$	
			$\frac{L}{2} \leq x \leq L$	
	$w'\left(\frac{L}{2}\right) = 0$	$-EI_y w''' \left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{Q}{2}$	$w(L) = 0$	$w''(L) = 0$
	$w(0) = 0$	$w'(0) = 0$	$w''(L) = 0$	$-EI_y w'''(L) = Q$
	$w(0) = 0$	$w'(0) = 0$	$w''(L) = 0$	$w'''(L) = 0$

## 4.2 Pontos de Bifurcação

Depois de definida a trajetória de equilíbrio fundamental, identificam-se sobre esta os pontos de bifurcação por flexão-torção. Para tal, é utilizado o critério de Trefftz (Bazant & Cedolin, 1991, ou Reis & Camotim, 2001), segundo o qual os pontos de bifurcação correspondem à estacionarização da segunda variação da energia potencial total em torno de um estado de equilíbrio fundamental.

Quadro 4.2 – Flexão no plano – Solução particular e constantes de integração

	$w_p$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
	0	$\frac{M_1 - M_2}{L}$	$-M_1$	$\frac{L}{6}(2M_1 + M_2)$	0
	$\frac{q_0}{24EI_y}x^4$	$-\frac{q_0L}{2}$	0	$\frac{q_0L^3}{24}$	0
				$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$	
	0	$-\frac{Q}{2}$	0	$-\frac{QL^2}{16}$	0
				$\frac{L}{2} \leq x \leq L$	
		$\frac{Q}{2}$	$-\frac{QL}{2}$	$\frac{3QL^2}{16}$	$-\frac{QL^3}{48}$
	0	$-Q$	$QL$	0	0
	$\frac{q_0}{24EI_y}x^4$	$-q_0L$	$\frac{q_0L^2}{2}$	0	0

Do modelo de Attard (1986) resulta que a segunda variação da energia potencial total em torno de um estado de equilíbrio fundamental é, para o caso de vigas com secção transversal monossimétrica, dada por

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_z(v'' + w''\phi)^2 + EI_w(\phi'')^2 + GJ(\phi')^2] dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L M_y [2v''\phi + \beta_y(\phi')^2 + w''\phi^2] dx +$$

$$+ \frac{z_q - z_c}{2} \int_0^L q \phi^2 dx + \frac{z_{Q_0} - z_c}{2} Q_0 \phi(0)^2 + \frac{z_{Q_L} - z_c}{2} Q_L \phi(L)^2, \quad (32)$$

em que  $v$  e  $\phi$  representam as duas componentes do modo de instabilidade,  $w''$  é a curvatura (linearizada) no estado de equilíbrio fundamental,  $M_y$  é a distribuição de momentos fletores definida em (29) e  $\beta_y$  é um coeficiente de monossimetria definido como

$$\beta_y = \frac{1}{I_y} \int_A z (y^2 + z^2) dA - 2z_c \quad (33)$$

(para secções duplamente simétricas tem-se  $\beta_y = 0$ ). Note-se que  $w = \lambda w_{ref}$  e  $M_y = \lambda M_{y,ref}$  e, nesta fase, as funções  $w_{ref}$  e  $M_{y,ref}$  já são conhecidas.

Quando os efeitos da curvatura de flexão no estado de equilíbrio fundamental são desprezados – isto é, quando se admite que a viga permanece reta até atingir o estado crítico –, a segunda variação da energia potencial total reduz-se a

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_z (v'')^2 + EI_w (\phi'')^2 + GJ (\phi')^2] dx + \frac{1}{2} \int_0^L M_y [2v'' \phi + \beta_y (\phi')^2] dx + \\ + \frac{z_q - z_c}{2} \int_0^L q \phi^2 dx + \frac{z_{Q_0} - z_c}{2} Q_0 \phi(0)^2 + \frac{z_{Q_L} - z_c}{2} Q_L \phi(L)^2. \quad (34)$$

Observe-se ainda que  $v'' \phi + \frac{1}{2} w'' \phi^2$  representa a variação de segunda ordem da curvatura no plano  $(x, z)$ . De forma análoga,  $v'' + w'' \phi$  representa a variação de primeira ordem da curvatura no plano  $(x, y)$ .

As últimas três parcelas das expressões (32) e (34) referem-se à influência da localização do ponto de aplicação das forças transversais em relação ao centro de corte  $C$  da secção (Figura 4.2). Uma força aplicada “abaixo” do centro de corte ( $z_q > 0$  ou  $z_Q > 0$ ) provoca, na configuração de equilíbrio após encurvadura, um momento torsor adicional que tem um efeito “contrário” à deformação (*i.e.*, tem um efeito *estabilizador*) e faz aumentar o valor crítico do parâmetro de carga. Se, pelo contrário, o ponto de aplicação da força se encontrar “acima” do centro de corte ( $z_q < 0$  ou  $z_Q < 0$ ), o efeito é *instabilizante* e, conseqüentemente, há uma diminuição do valor crítico do parâmetro da carga.

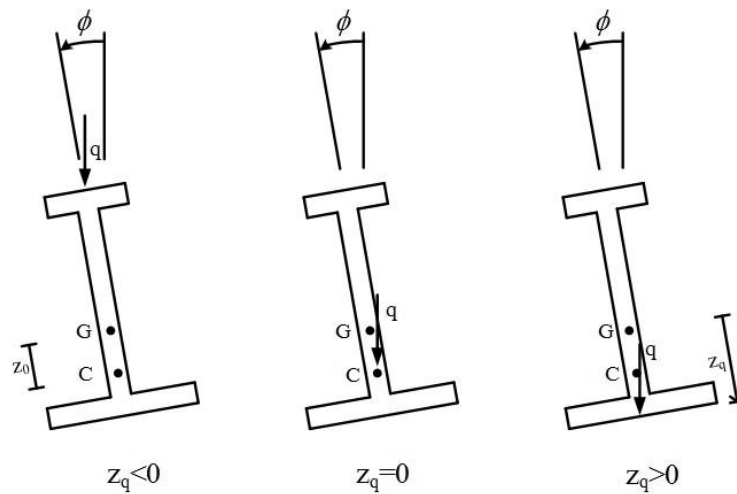


Figura 4.2 - Influência da posição do ponto de aplicação das forças transversais

Para perceber o efeito da monossimetria, considere-se a situação apresentada na Figura 4.3. em que a força de compressão,  $F_c$ , aplicada ao banzo superior (banzo maior) é aproximadamente igual à força de tração,  $F_t$ , no banzo inferior (banzo menor), já que o esforço axial é nulo. Visto que o banzo superior se encontra mais próximo do eixo de torção, que passa pelo centro de corte  $C$ , a sua rotação de empenamento durante a torção é menor que a rotação de empenamento do banzo inferior. Assim, a componente transversal instabilizadora é menor e tem um braço menor do que a componente transversal estabilizadora, pelo que a resistência à encurvadura aumenta. Verificar-se-ia a situação inversa quando o banzo comprimido é o menor.

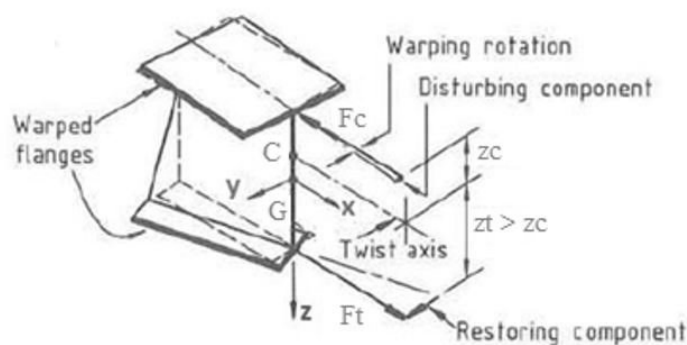


Figura 4.3 – Efeito da monossimetria na encurvadura lateral por flexão-torção (Trahair, 1993)



## 5 DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo são desenvolvidas duas formulações de elementos finitos para a análise de bifurcação de vigas. Na mais simples, o efeito da deformação de pré-encurvadura é desprezado. A formulação mais complexa permite ter em consideração aquele efeito. Nesta última, utilizam-se as soluções exatas obtidas no capítulo anterior (secção 4.1) para a trajetória de equilíbrio fundamental.

A secção 5.1, relativa à aproximação do campo de deslocamentos, e a secção 5.4, que descreve o procedimento de montagem das matrizes de rigidez da malha de elementos finitos a partir das matrizes de rigidez elementares, são comuns às duas formulações.

### 5.1 Aproximação do Campo de Deslocamentos

Considere-se a partição do intervalo  $[0, L]$ , domínio do problema, em  $n$  subintervalos da forma

$$\bar{\Omega}^{(e)} = [x_1^{(e)}, x_2^{(e)}] = [(e-1)\Delta, e\Delta], \tag{35}$$

onde  $e = 1, \dots, n$  e  $\Delta = L/n$  (Figura 5.1). Em cada um deles define-se a coordenada local

$$\eta^{(e)} = x - x_1^{(e)}, \tag{36}$$

a qual varia entre 0 e  $\Delta$ .

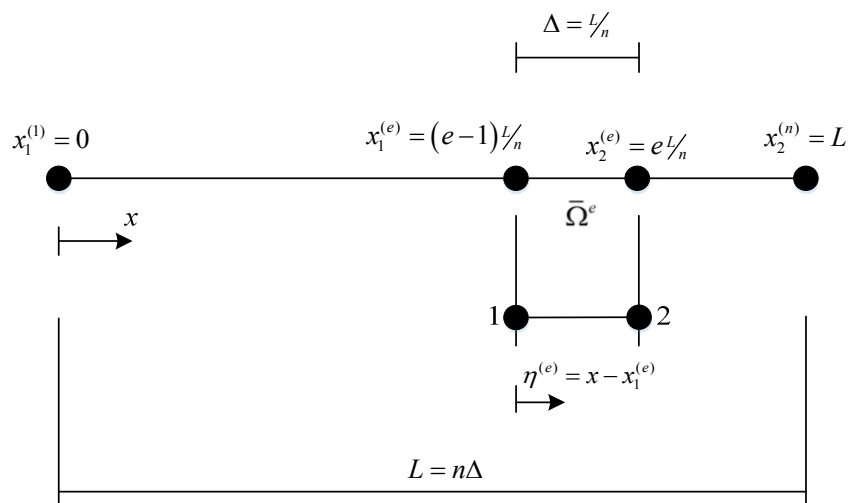


Figura 5.1 – Partição do domínio e definição da coordenada local

Uma vez que nos integrais da segunda variação da energia potencial (equações (32) e (34)) figuram segundas derivadas de  $v$  e  $\phi$ , variáveis dependentes do problema, a aproximação destas funções deverá ser contínua com primeira derivada contínua (continuidade  $C^1$ ). Assim, em cada subintervalo  $\bar{\Omega}^{(e)}$ , adotam-se os polinómios cúbicos

$$v_{\Delta}^{(e)}(\eta^{(e)}) = a_0 + a_1 \eta^{(e)} + a_2 \eta^{(e)2} + a_3 \eta^{(e)3} \quad (37)$$

$$\phi_{\Delta}^{(e)}(\eta^{(e)}) = b_0 + b_1 \eta^{(e)} + b_2 \eta^{(e)2} + b_3 \eta^{(e)3}, \quad (38)$$

onde os coeficientes  $a_0, \dots, a_3$  e  $b_0, \dots, b_3$  dependem unicamente dos valores que  $v_{\Delta}^{(e)}$ ,  $\phi_{\Delta}^{(e)}$  e a primeira derivada de cada uma destas funções assumem nas extremidades do subintervalo ( $\eta^{(e)} = 0$  e  $\eta^{(e)} = \Delta$ ). Pode assim escrever-se (37) e (38) na forma

$$\begin{bmatrix} v_{\Delta}^{(e)}(\eta^{(e)}) \\ \phi_{\Delta}^{(e)}(\eta^{(e)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & N_2^{(e)} & 0 & 0 & | & N_3^{(e)} & N_4^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(e)} & N_2^{(e)} & | & 0 & 0 & N_3^{(e)} & N_4^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(e)} \\ d_2^{(e)} \\ d_3^{(e)} \\ d_4^{(e)} \\ d_5^{(e)} \\ d_6^{(e)} \\ d_7^{(e)} \\ d_8^{(e)} \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{(e)} \cdot \mathbf{d}^{(e)} \quad (39)$$

onde  $N_1^{(e)}$ ,  $N_2^{(e)}$ ,  $N_3^{(e)}$  e  $N_4^{(e)}$  são as funções de forma cúbicas de Hermite (*e.g.*, Becker *et al.*, 1981), representadas na Figura 5.2 e definidas por

$$N_1^{(e)}(\eta^{(e)}) = 2 \left( \frac{\eta^{(e)}}{\Delta} \right)^3 - 3 \left( \frac{\eta^{(e)}}{\Delta} \right)^2 + 1 \quad (40)$$

$$N_2^{(e)}(\eta^{(e)}) = \eta^{(e)} \left[ \left( \frac{\eta^{(e)}}{\Delta} \right) + 1 \right]^2 \quad (41)$$

$$N_3^{(e)}(\eta^{(e)}) = 3 \left( \frac{\eta^{(e)}}{\Delta} \right)^2 - 2 \left( \frac{\eta^{(e)}}{\Delta} \right)^3 \quad (42)$$

$$N_4^{(e)}(\eta^{(e)}) = \eta^{(e)} \left[ \left( \frac{\eta^{(e)}}{\Delta} \right)^2 - \left( \frac{\eta^{(e)}}{\Delta} \right) \right], \quad (43)$$

e  $\mathbf{d}^{(e)}$  é o vetor de deslocamentos nodais representados na Figura 5.3.

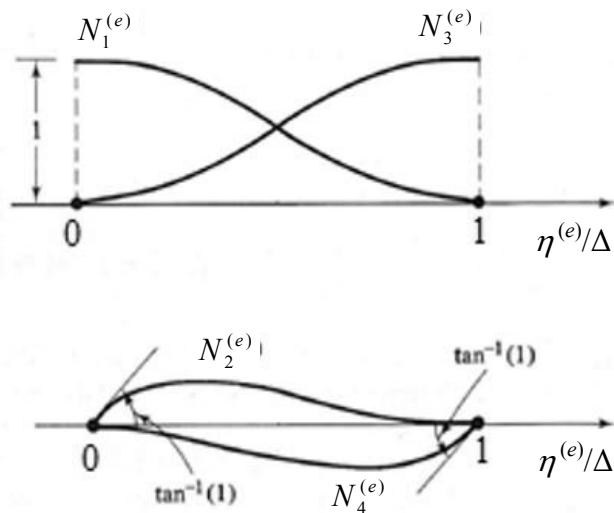


Figura 5.2 – Funções de forma cúbicas de Hermite (adaptada de Becker *et al.*, 1981)

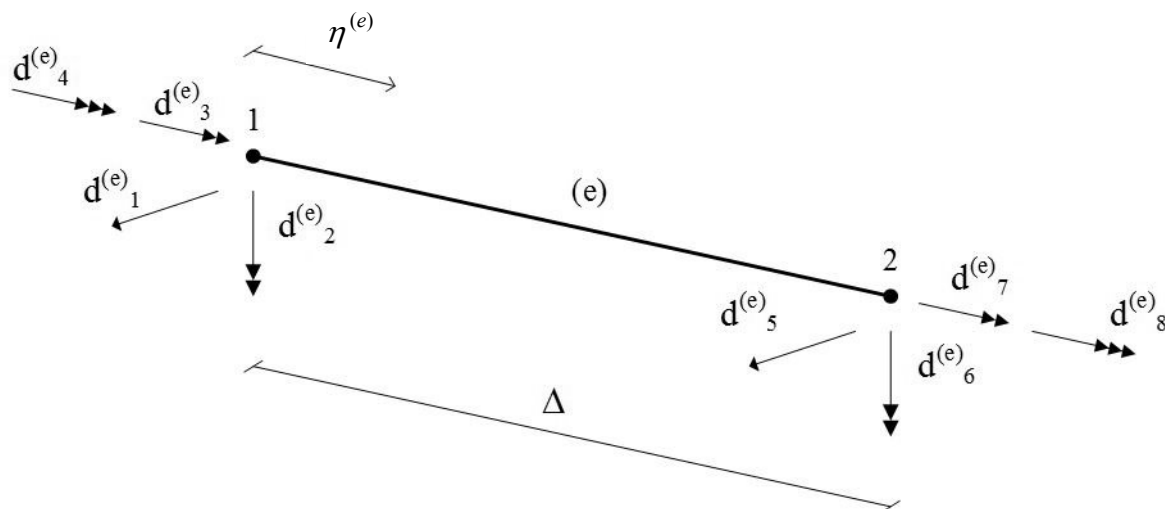


Figura 5.3 – Deslocamentos nodais elementares (a amplitude do empenamento, dada pela derivada da rotação de torção, é representada por uma seta tripla)

### 5.2 Matrizes de Rigidez Elementares – Caso em que é desprezado o efeito da deformação de pré-encurvadura

Considerando a aproximação das variáveis dependentes descrita anteriormente, a segunda variação da energia potencial total (34) vem, por sua vez, aproximada por

$$\begin{aligned}
 V_{2,\Delta} = \sum_{e=1}^n V_{2,\Delta}^{(e)} &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^n \int_0^\Delta \left( \mathbf{D}^{(e)} \cdot \mathbf{N}^{(e)} \cdot \mathbf{d}^{(e)} \right)^T \cdot \mathbf{E}_1^{(e)} \cdot \left( \mathbf{D}^{(e)} \cdot \mathbf{N}^{(e)} \cdot \mathbf{d}^{(e)} \right) d\eta^{(e)} + \\
 &+ \frac{\lambda}{2} \left[ \sum_{e=1}^n \int_0^\Delta \left( \mathbf{D}^{(e)} \cdot \mathbf{N}^{(e)} \cdot \mathbf{d}^{(e)} \right)^T \cdot \mathbf{E}_2^{(e)} \cdot \left( \mathbf{D}^{(e)} \cdot \mathbf{N}^{(e)} \cdot \mathbf{d}^{(e)} \right) d\eta^{(e)} + \right. \\
 &\left. + (z_{Q_0} - z_C) \mathcal{Q}_{0,ref} (d_3^{(1)})^2 + (z_{Q_L} - z_C) \mathcal{Q}_{L,ref} (d_7^{(n)})^2 \right], \quad (44)
 \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{D}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{(d\eta^{(e)})^2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \frac{d}{d\eta^{(e)}} \\ 0 & \frac{d^2}{(d\eta^{(e)})^2} \end{bmatrix} \quad (45)$$

é uma matriz de operadores diferenciais que estabelece a relação entre deformações generalizadas e deslocamentos,

$$\mathbf{E}_1^{(e)} = \begin{bmatrix} EI_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI_w \end{bmatrix}, \quad (46)$$

é uma matriz constitutiva e

$$\mathbf{E}_2^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & M_{y,ref}(x(\eta^{(e)})) & 0 & 0 \\ M_{y,ref}(x(\eta^{(e)})) & (z_q - z_C)q_{ref} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{y,ref}(x(\eta^{(e)}))\beta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

com  $x(\eta^{(e)}) = \eta^{(e)} + x_1^{(e)} = \eta^{(e)} + (e-1)\Delta$  representando a transformação inversa de (36).

Visto que as entradas dos vetores  $\mathbf{d}^{(e)}$  são constantes, isto é, não dependem de  $\eta^{(e)}$ , estes vetores podem ser colocados fora dos integrais presentes em (44). Assim, a contribuição  $V_{2,\Delta}^{(e)}$  de cada elemento finito para  $V_{2,\Delta}$  pode ser escrita, de forma compacta, como

$$V_{2,\Delta}^{(e)} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^{(e)T} \cdot (\mathbf{K}_1^{(e)} + \lambda \mathbf{K}_2^{(e)}) \cdot \mathbf{d}^{(e)}, \quad (48)$$

onde  $\mathbf{K}_1^{(e)}$  representa a matriz de rigidez material elementar e  $\mathbf{K}_2^{(e)}$  a matriz de rigidez geométrica elementar, dadas por

$$\mathbf{K}_1^{(e)} = \int_0^\Delta [(\mathbf{D}^{(e)} \cdot \mathbf{N}^{(e)})^T \cdot \mathbf{E}_1^{(e)} \cdot (\mathbf{D}^{(e)} \cdot \mathbf{N}^{(e)})] d\eta^{(e)} \quad (49)$$

$$\mathbf{K}_2^{(e)} = \int_0^\Delta [(\mathbf{D}^{(e)} \cdot \mathbf{N}^{(e)})^T \cdot \mathbf{E}_2^{(e)} \cdot (\mathbf{D}^{(e)} \cdot \mathbf{N}^{(e)})] \cdot d\eta^{(e)}. \quad (50)$$

À matriz  $\mathbf{K}_2^{(1)}$  {resp.  $\mathbf{K}_2^{(n)}$ } adiciona-se ainda, na posição (3,3) {resp. (7,7)}, a parcela  $(z_{Q_0} - z_C) Q_{0,ref}$  {resp.  $(z_{Q_L} - z_C) Q_{L,ref}$ } caso exista uma carga concentrada na extremidade inicial {resp. final} da viga, aplicada fora do centro de corte.

### 5.3 Matrizes de Rigidez Elementares – Caso em que é considerado o efeito da deformação de pré-encurvadura

Quando se inclui o efeito da deformação de pré-encurvadura, a contribuição de cada elemento para a aproximação da segunda variação da energia potencial (32) é dada por

$$V_{2,\Delta}^{(e)} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^{(e)T} \cdot [\mathbf{K}_1^{(e)} + \lambda (\mathbf{K}_2^{(e)} + \mathbf{K}_3^{(e)}) + \lambda^2 \mathbf{K}_4^{(e)}] \cdot \mathbf{d}^{(e)}, \quad (51)$$

em que  $\mathbf{K}_1^{(e)}$  e  $\mathbf{K}_2^{(e)}$  são as matrizes de rigidez elementares definidas na secção anterior e  $\mathbf{K}_3^{(e)}$  e  $\mathbf{K}_4^{(e)}$  são matrizes rigidez elementares adicionais associadas ao efeito da deformação de pré-encurvadura, dadas por

$$\mathbf{K}_3^{(e)} = \int_0^\Delta (\mathbf{D}^{(e)} \cdot \mathbf{N}^{(e)})^T \cdot \mathbf{E}_3^{(e)} \cdot (\mathbf{D}^{(e)} \cdot \mathbf{N}^{(e)}) d\eta^{(e)} \quad (52)$$

$$\mathbf{K}_4^{(e)} = \int_0^\Delta (\mathbf{D}^{(e)} \cdot \mathbf{N}^{(e)})^T \cdot \mathbf{E}_4^{(e)} \cdot (\mathbf{D}^{(e)} \cdot \mathbf{N}^{(e)}) d\eta^{(e)}, \quad (53)$$

com

$$\mathbf{E}_3^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & EI_z w_{ref}''(x(\eta^{(e)})) & 0 & 0 \\ EI_z w_{ref}''(x(\eta^{(e)})) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\mathbf{E}_4^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{ref}''(x(\eta^{(e)})) [EI_z w_{ref}''(x(\eta^{(e)})) + M_{y,ref}(x(\eta^{(e)}))] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

#### 5.4 Agregação das Matrizes de Rigidez

O passo a seguir descrito consiste na agregação das matrizes de rigidez da viga (ou mais corretamente, da malha de elementos finitos em que aquela foi discretizada) a partir das contribuições elementares. Esta agregação é efetuada da forma habitual, como esquematizado na Figura 5.4. Os blocos representados a tracejado nesta figura têm dimensão  $8 \times 8$  e representam as matrizes de rigidez dos sucessivos elementos finitos. Obtêm-se desta forma as várias matrizes de rigidez da malha de elementos finitos, designadas por  $\mathbf{K}_i$  ( $i=1,2$  quando se despreza o efeito da deformação de pré-encurvadura e  $i=1, \dots, 4$  quando aquele efeito é incluído na análise), todas elas quadradas e de dimensão  $4(n+1)$  (relembre-se que  $n$  designa o número de elementos finitos constituintes da malha e, portanto,  $n+1$  é o número total de nós).

As condições de fronteira cinemáticas, sendo todas homogêneas, são incorporadas através da eliminação das linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade cujo deslocamento se encontra impedido.

#### 5.5 Problema Algébrico de Valores e Vetores Próprios – Caso em que é desprezado o efeito das deformações de pré-encurvadura

A estacionarização de  $V_{2,\Delta}$  conduz neste caso a um problema linear (em  $\lambda$ ) de valores e vetores próprios, dito generalizado, com a forma

$$(\mathbf{K}_1 + \lambda \mathbf{K}_2) \cdot \mathbf{d} = 0. \quad (56)$$

Este problema linear é resolvido em *MatLab* com o comando “eig”,

Ao menor valor próprio positivo, de fundamental importância do ponto de vista estrutural, dá-se o nome de parâmetro de carga crítica. Como este parâmetro é obtido desprezando o efeito da deformação de pré-encurvadura, acrescenta-se o qualificativo “clássico” e representa-se, assim, pelo símbolo  $\lambda_{cr}^{clássico}$ .

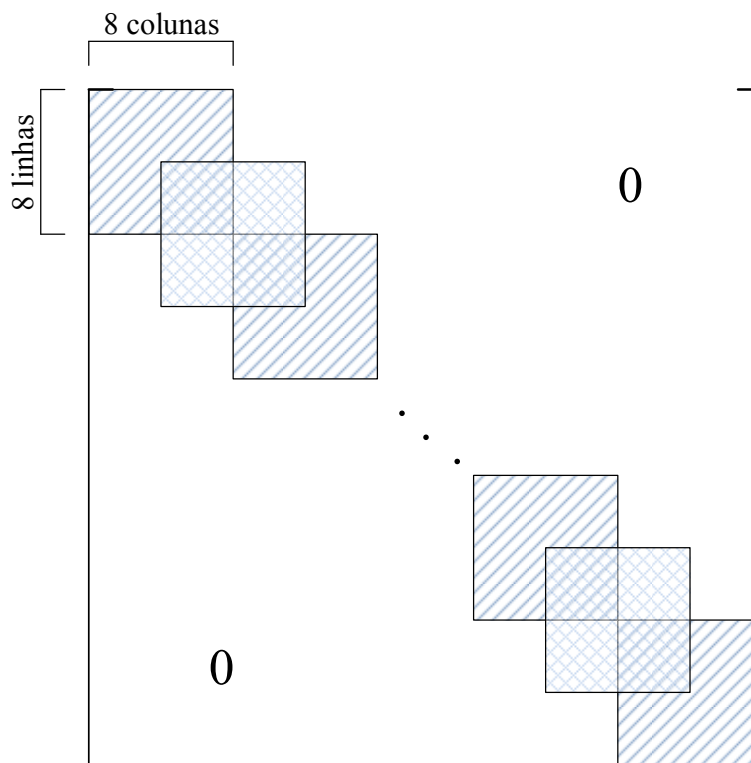


Figura 5.4 - Representação esquemática da agregação das matrizes de rigidez da malha de elementos finitos, a partir das matrizes de rigidez elementares (adaptado de Becker *et al*, 1981)

### 5.6 Problema Algébrico de Valores e Vetores Próprios – Caso em que é considerado o efeito das deformações de pré-encurvadura

No presente caso, a discretização por elementos finitos conduz a um problema de valores e vetores próprios quadrático (em  $\lambda$ ) com a forma,

$$[\mathbf{K}_1 + \lambda(\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3) + \lambda^2 \mathbf{K}_4] \cdot \mathbf{d} = 0, \tag{57}$$

o qual é resolvido em *MatLab* com o comando “polyeig”.

Ao menor valor próprio positivo dá-se novamente o nome de parâmetro de carga crítico, mas agora associado ao qualificativo “não linear”, indicando que é considerado o efeito da deformação de pré-encurvadura. Adota-se o símbolo  $\lambda_{cr}^{n\grave{a}olinear}$  para sua representação.

## 6 EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO

Tendo como objetivo (1) a verificação das formulações de elementos finitos desenvolvidas, bem como da sua implementação computacional, e (2) a avaliação da influência da deformação de pré-encurvadura na instabilidade lateral por flexão-torção de vigas, são aqui apresentados alguns resultados numéricos relativos a barras com diferentes geometrias, condições de apoio e carregamentos. Sempre que possível, os resultados obtidos são comparados com os disponíveis na literatura.

### 6.1 Exemplo 1 – Viga Simplesmente Apoiada com Secção Duplamente Simétrica, submetida a Flexão Uniforme

Considere-se uma viga de secção duplamente simétrica ( $\beta_y = 0$ ), simplesmente apoiada no plano e apresentando, fora do plano, as condições de apoio ditas “padrão” (nas duas extremidades, o deslocamento segundo  $y$  e a rotação em torno do eixo  $x$  estão impedidos, enquanto a rotação em torno do eixo  $z$  e o empenamento são livres), submetida a flexão uniforme (Figuras 6.1 e 6.2).

Quando o efeito dos deslocamentos de pré-encurvadura é ignorado (análise “clássica”), este problema tem a solução analítica (Trahair, 1993)

$$M_{cr}^{clássico} = \lambda_{cr}^{clássico} M_{ref} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z \left( GJ + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2} \right)}. \quad (58)$$

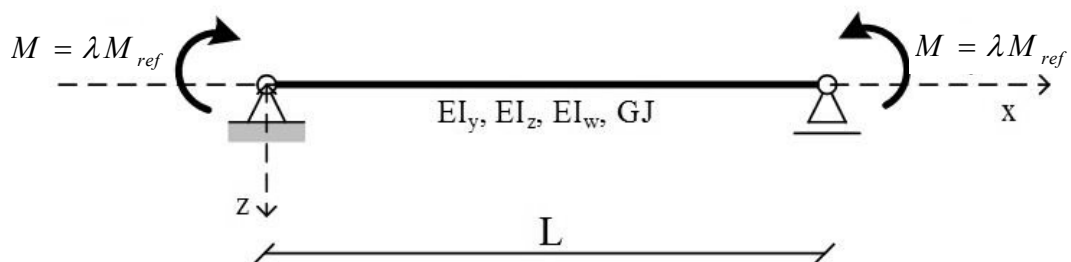


Figura 6.1 – Exemplo 1: Viga simplesmente apoiada submetida a flexão uniforme



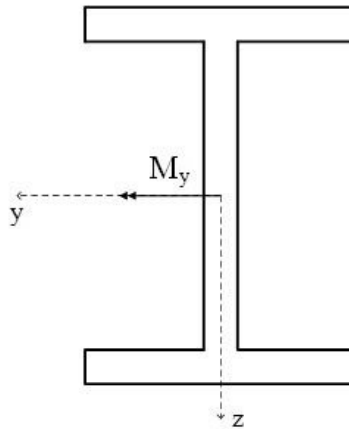


Figura 6.2 – Exemplo 1: Secção transversal duplamente simétrica

Quando o efeito da deformação de pré-encurvadura é incluído na análise, o problema tem também solução analítica, dada agora por (Andrade e Camotim, 2004)

$$M_{cr}^{não\ linear} = \lambda_{cr}^{não\ linear} M_{ref} = \frac{M_{cr}^{clássico}}{\sqrt{1 - \frac{I_z}{I_y}}} \quad (59)$$

Esta expressão indica que, *para este problema*, não existe possibilidade de encurvadura lateral por flexão-torção quando  $I_z \geq I_y$ , isto é, quando a viga está solicitada à flexão no plano principal de maior inércia. Quando  $I_z < I_y$ , (1) a consideração do efeito da deformação de pré-encurvadura conduz a um momento crítico mais elevado do que o fornecido pela análise “clássica”, (2) este aumento é tanto mais significativo quanto maior for a  $I_z / I_y$  (inferior à unidade). Tal pode ser explicado pelo facto de a bifurcação do equilíbrio ocorrer quando a viga se encontra já fletida (*i.e.*, com uma configuração de “arco invertido”), o que provoca uma resistência adicional à instabilidade lateral. É lógico prever que este efeito seja tanto mais significativo quanto maior for a relação  $I_z / I_y$ , na medida em que a viga se encontrará “mais fletida” na bifurcação.

Os resultados numéricos que se apresentam seguidamente dizem respeito a vigas com as características geométricas e materiais indicadas no Quadro 6.1 (Trahair e Woolcock, 1973). Consideram-se duas secções transversais, designadas por 8UC31 e 10UB29, que exibem diferentes relações  $I_z / I_y$ .

Quadro 6.1 – Exemplo 1: Propriedades geométricas e materiais

	<b>8UC31</b>	<b>10UB29</b>
<b>h [mm]</b>	192,2	246,9
<b>I<sub>y</sub> [cm<sup>4</sup>]</b>	4566	6560
<b>I<sub>z</sub> [cm<sup>4</sup>]</b>	1540	678,5
<b>I<sub>w</sub> [cm<sup>6</sup>]</b>	142,2 x 10 <sup>3</sup>	103,4 x 10 <sup>3</sup>
<b>J [cm<sup>4</sup>]</b>	22,23	25,72
<b>E [GPa]</b>	206,9	
<b>G [GPa]</b>	82,74	
<b>L [m]</b>	12,00	
<b>I<sub>z</sub>/I<sub>y</sub></b>	0,337	0,103

Os valores de  $M_{cr}^{clássico}$  e  $M_{cr}^{não\ linear}$  obtidos com malhas de elementos finitos progressivamente mais refinadas estão indicados no Quadro 6.2 e nas Figuras 6.3 e 6.4. Observa-se uma rápida convergência para os resultados exatos. A convergência faz-se sempre por valores superiores, já que o modelo de elementos finitos é mais rígido do que o modelo contínuo.

Quadro 6.2 – Exemplo 1: Valores de  $M_{cr}^{clássico}$  e  $M_{cr}^{não\ linear}$  em função do número  $n$  de elementos finitos utilizado

<b><i>n</i></b>	<b><math>M_{cr}^{clássico}</math> (kNm)</b>		<b><math>M_{cr}^{não\ linear}</math> (kNm)</b>	
	<b>8UC31</b>	<b>10UB29</b>	<b>8UC31</b>	<b>10UB29</b>
1	74,39	51,94	88,44	54,30
2	67,03	46,96	82,24	49,58
4	66,77	46,79	82,01	49,41
8	66,75	46,79	82,00	49,40
16	66,75	46,78	82,00	49,40

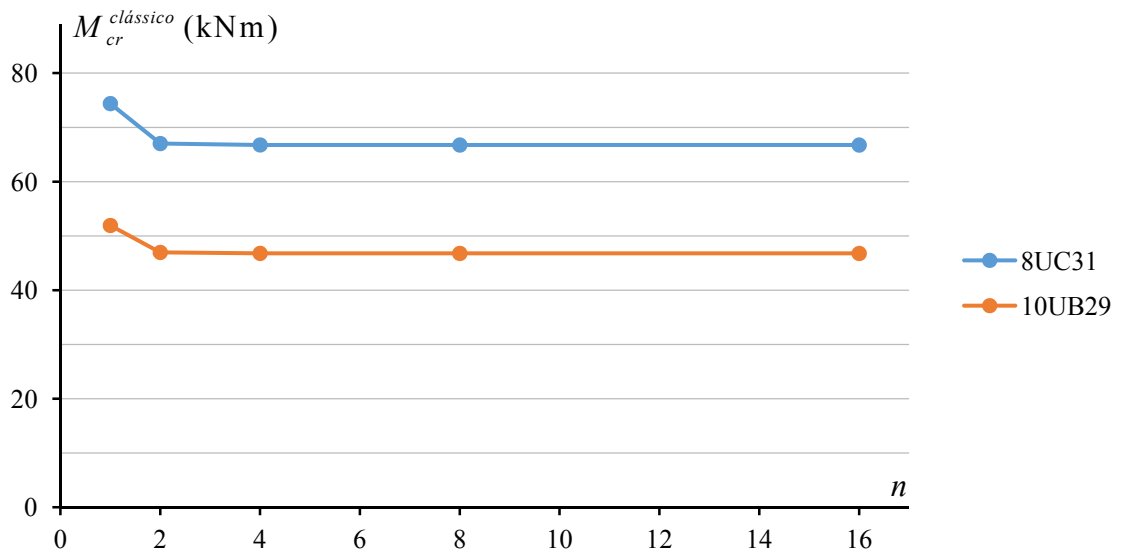


Figura 6.3 – Exemplo 1: Evolução dos valores de  $M_{cr}^{classico}$  em função do número  $n$  de elementos finitos utilizado

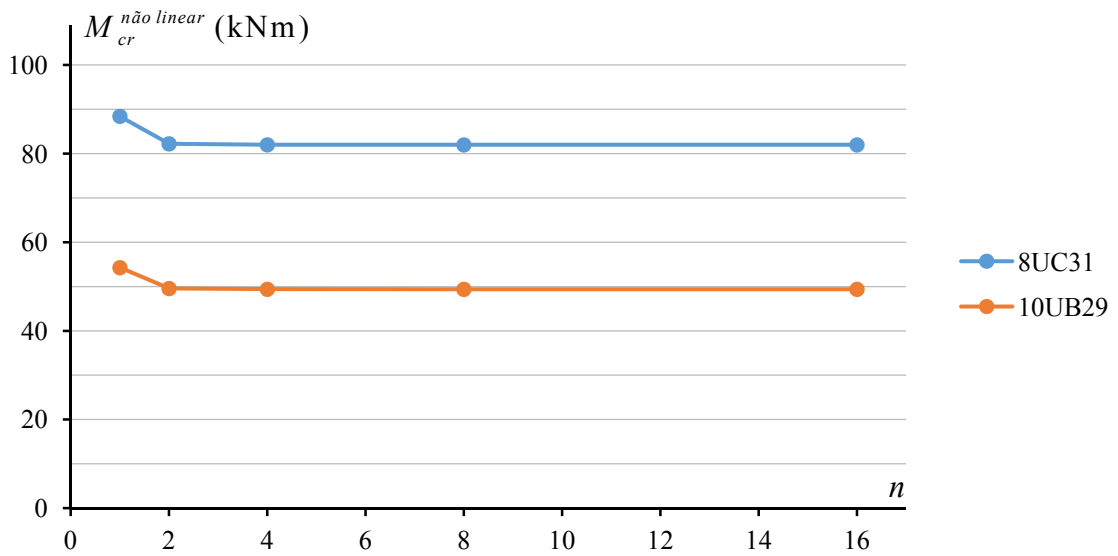


Figura 6.4 – Exemplo 1: Evolução dos valores de  $M_{cr}^{nao\ linear}$  em função do número  $n$  de elementos finitos utilizado

### 6.2 Exemplo 2 – Consola com Secção Duplamente Simétrica, com Carga Pontual aplicada na Extremidade Livre

Considere-se a consola com secção duplamente simétrica ( $z_C = \beta_y = 0$ ) representada na Figura 6.5, atuada por uma força concentrada aplicada na extremidade livre. No encastramento fixo, todos os deslocamentos e rotações relevantes, assim como o empenamento, estão impedidos.

Para este exemplo são novamente usadas as secções transversais 8UC31 e 10UB29, cujas características geométricas já foram indicadas no Quadro 6.1. São também usadas as propriedades materiais fornecidas nessa quadro. O balanço  $L$  da consola varia entre 2,00 e 8,00 m. A força concentrada na extremidade livre é aplicada a meia altura ( $z_Q = 0$ ), no banzo superior ( $z_Q = -h/2$ ) e no banzo inferior ( $z_Q = h/2$ ).

Os resultados obtidos com  $n = 16$  elementos finitos estão resumidos no Quadro 6.3 e nas Figuras 6.6 e 6.7. Refira-se que o padrão de convergência obtido à medida que a malha vai sendo refinada é idêntico ao observado no exemplo anterior.

Para  $z_Q = 0$ , e à semelhança do exemplo anterior, verifica-se que

$$Q_{cr}^{n\grave{a}o\ linear} = \frac{Q_{cr}^{cl\grave{a}s}sico}}{\sqrt{1 - \frac{I_z}{I_y}}}, \tag{60}$$

relação que é novamente suscetível de demonstração analítica (Andrade e Camotim, 2004).

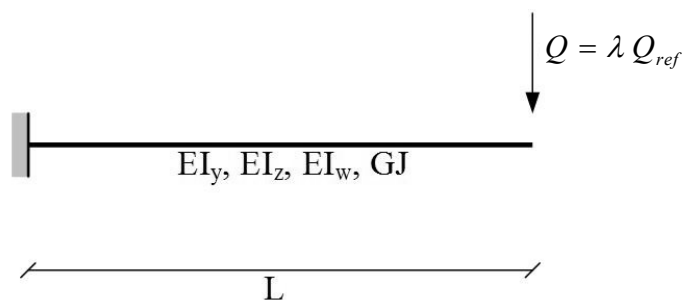


Figura 6.5 – Exemplo 2: Consola submetida a uma carga pontual

Quando a força transversal não está aplicada no centro de corte da secção transversal (que neste exemplo coincide com o centro de gravidade), a influência da deformação de pré-encurvadura depende não só da razão  $I_z / I_y$ , mas também (1) da posição do ponto de aplicação da força e (2) do balanço  $L$  da consola (se bem que a dependência de  $L$  seja muito ligeira quando a força está aplicada no banzo inferior). Para  $L$  fixo, verifica-se que o acréscimo relativo  $(Q_{cr}^{não linear} - Q_{cr}^{clássico}) / Q_{cr}^{clássico}$  aumenta com  $Q_{cr}^{não linear}$  (ou seja, aumenta com  $z_Q$ ).

Quadro 6.3 – Exemplo 2: Valores de  $Q_{cr}^{clássico}$ ,  $Q_{cr}^{não linear}$  e do acréscimo relativo

$$(Q_{cr}^{não linear} - Q_{cr}^{clássico}) / Q_{cr}^{clássico}$$

Secção	$z_Q$ (mm)	$L$ (m)	$Q_{cr}^{clássico}$ (kN)	$Q_{cr}^{não linear}$ (kN)	$\frac{Q_{cr}^{não linear} - Q_{cr}^{clássico}}{Q_{cr}^{clássico}} \times 100\%$
8UC31	-96,1	2,00	211,1	216,4	2,53
		4,00	57,26	60,68	5,97
		6,00	27,81	30,64	10,17
		8,00	16,20	18,40	13,61
	0,0	2,00	683,1	839,0	22,84
		4,00	115,1	141,4	22,84
		6,00	42,56	52,28	22,84
		8,00	21,51	26,42	22,84
	96,1	2,00	1108	1400	26,40
		4,00	153,9	194,1	26,14
		6,00	51,92	65,35	25,81
		8,00	25,02	31,40	25,48
10UB29	-123,5	2,00	150,4	151,9	0,96
		4,00	43,19	44,18	2,30
		6,00	20,47	21,18	3,47
		8,00	11,67	12,16	4,17
	0,0	2,00	422,1	445,8	5,61
		4,00	73,63	77,77	5,61
		6,00	27,83	29,39	5,61
		8,00	14,30	15,11	5,61
	123,5	2,00	641,6	682,9	6,44
		4,00	93,12	99,01	6,33
		6,00	32,64	34,67	6,22
		8,00	16,14	17,13	6,13

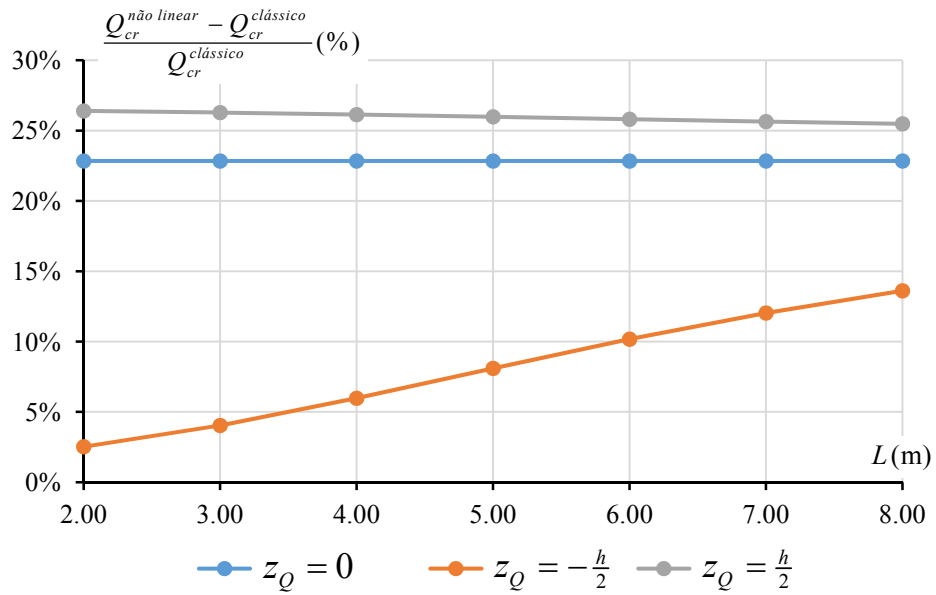


Figura 6.6 – Exemplo 2: Efeito da deformação de pré-encurvatura (secção 8UC31)

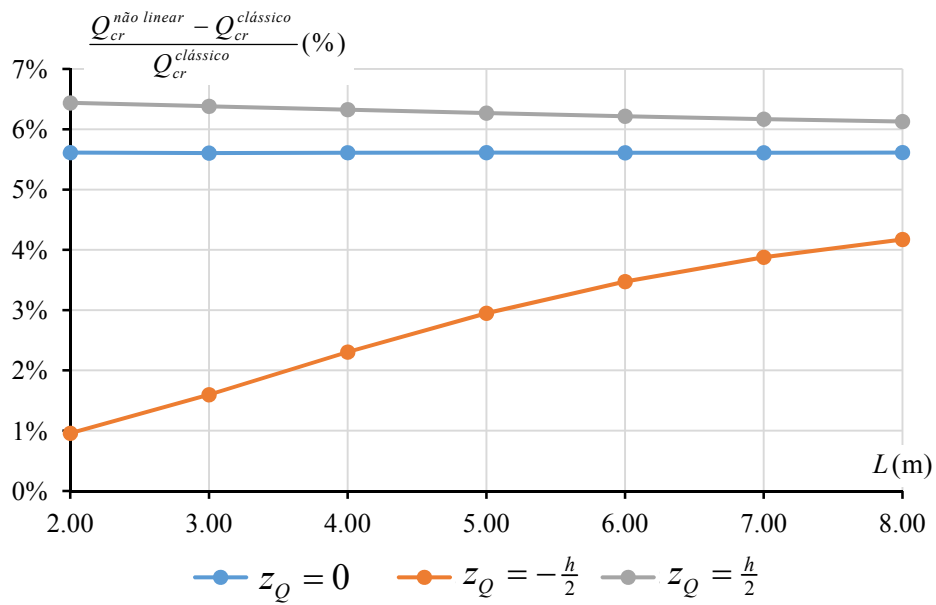


Figura 6.7 – Exemplo 2: Efeito da deformação de pré-encurvatura (secção 10UB29)

### 6.3 Exemplo 3 – Viga Simplesmente Apoiada, com Secção Monossimétrica, submetida a Carga Uniformemente Distribuída

Considere-se, agora, a viga de secção monossimétrica representada nas Figura 6.8 e 6.9, simplesmente apoiada no plano e apresentando, fora do plano, as condições de apoio “padrão”, e que se encontra submetida a uma força transversal uniformemente distribuída. Trata-se de uma viga mista em caixão, em que a parte superior é uma laje de betão armado e a parte inferior um perfil em U; antes do endurecimento do betão, este apenas é considerado como carregamento aplicado à viga.

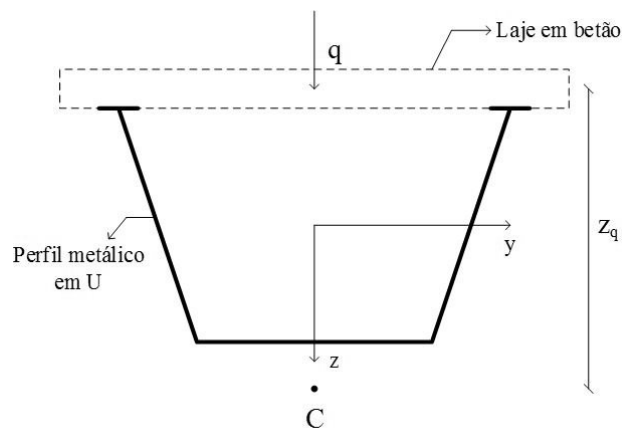


Figura 6.8 - Exemplo 4 - Secção transversal em U

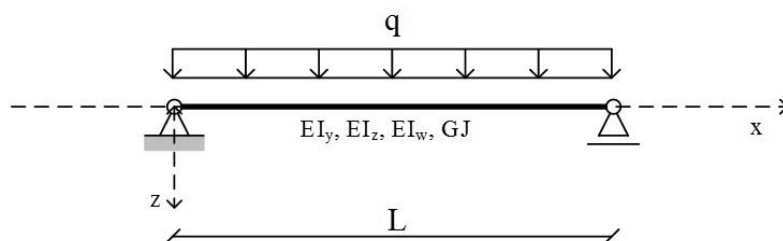


Figura 6.9 - Exemplo 4 - Viga mista simplesmente apoiada

Neste caso são considerados os valores indicados no Quadro 6.8 (Pi e Trahair, 1992b), que contém as propriedades geométricas e materiais da secção, assim como algumas propriedades referentes ao carregamento aplicado sobre a viga.

Quadro 6.1 - Exemplo 4 - Propriedades geométricas e materiais da secção transversal em estudo e carregamento aplicado

<b>Dados da Secção</b>	
$I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	680,0x10 <sup>4</sup>
$I_y$ [cm <sup>4</sup> ]	473,0x10 <sup>4</sup>
$I_w$ [cm <sup>4</sup> ]	398,0x10 <sup>7</sup>
$J$ [cm <sup>4</sup> ]	1010
$E$ [Gpa]	200,0
$G$ [Gpa]	80,00
$L$ [m]	50,00
$\beta_y$ [m]	-1,894
$EI_z$	136,0x10 <sup>5</sup>
$EI_w$	796,0x10 <sup>3</sup>
$GJ$	808,0
<b>Dados de Carregamento</b>	
$q$ [kN/m]	1,000
$z_q$ [m]	-3,949

A solução exata deste problema é dada pelo valor da carga crítica,  $q_{cr}$ , obtida no estudo feito por Pi e Trahair (1992b), sendo o seu valor de 2.832 kN/m quando o efeito da deformação de pré-encurvadura não é considerado.

Usando, novamente, uma malha de elementos finitos, progressivamente mais refinada, chega-se aos valores de carga crítica apresentados no Quadro 6.9 e Figura 6.15, usando o programa *MatLab*. É uma vez mais observado que existe uma rápida convergência para o resultado exato, sendo esta convergência feita por valores superiores, com um erro relativo de cerca de 8.8%, pois, como referido anteriormente, o modelo de elementos finitos é mais rígido do que o modelo contínuo.



Quadro 6.2 - Exemplo 4 - Valores de  $q_{cr}$  (kN/m) em função do número  $n$  de elementos finitos utilizado

Carga Crítica	
$n$	$q_{cr}$
1	3,771
2	3,094
4	3,083
8	3,082
16	3,082

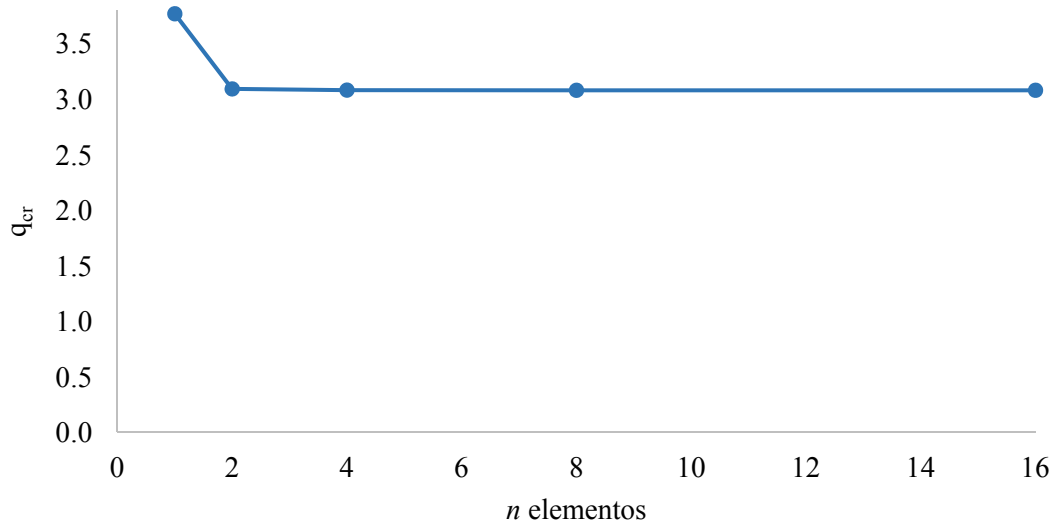


Figura 6.1 - Exemplo 4 - Evolução dos valores de  $q_{cr}$  em função do número  $n$  de elementos finitos utilizado

## 7 CONCLUSÃO

Nesta dissertação procedeu-se à formulação de dois elementos finitos para a análise de bifurcação por flexão-torção de vigas prismáticas em regime elástico, com secção transversal aberta de paredes finas. Na primeira formulação, a mais simples, são desprezados os efeitos da deformação de pré-encurvadura, sendo na segunda formulação, mais complexa, considerados esses mesmos efeitos, tendo este efeito influência na curvatura segundo o plano xz.

Para as duas formulações foram analisados vários exemplos, sendo os elementos finitos desenvolvidos no *software MatLab*, e posteriormente comparados os seus resultados com resultados disponíveis na literatura, verificando-se uma boa concordância entre ambos. É ainda verificado que existe convergência para o resultado exato, de uma viga em que a sua secção transversal é monossimétrica.

No caso da viga simplesmente apoiada com secção duplamente simétrica, verifica-se que, tanto no caso em que é considerado o efeito da deformação de pré-encurvadura (análise não linear) como no caso em que este efeito é desprezado (análise clássica), quando a relação  $I_z/I_y$  é mais elevada o parâmetro de carga é também maior, comparativamente com o caso em que esta mesma relação tem um valor menor.

Para a viga em consola verifica-se, à semelhança do caso anterior, que tanto no caso em que se considera os efeitos da deformação como naquele em que o efeito é desprezado, quando a relação  $I_z/I_y$  é mais elevada, o parâmetro de carga é maior. Verifica-se também, que o parâmetro de carga é superior para vãos pequenos.

Fazendo uma comparação entre análises, verifica-se que os parâmetros de carga, para as diferentes condições de apoio, são superiores quando o efeito das deformações de pré-encurvadura é considerado.

Pode então concluir-se que fazendo uma análise não-linear se obtém resultados mais exatos comparativamente com os resultados obtidos através da análise clássica. Embora esta análise

não apresente resultados exatos estes encontram-se do lado da segurança, podendo esta ser usada quando não exista a possibilidade de efetuar uma análise não linear.

Através do exemplo de uma viga simplesmente apoiada com secção transversal monossimétrica, conclui-se que a ideia generalizada que em vigas em que o eixo de maior inércia é o eixo  $y$  não existe suscetibilidade à encurvadura lateral por flexão-torção, é errada, pois como o exemplo mostrou, esta condição também se pode verificar em casos em que o eixo de maior simetria é o eixo  $z$ .

Para desenvolvimentos futuros propõem-se:

- (1) Prosseguir com os testes de verificação da ferramenta desenvolvida, nomeadamente com outras condições de apoio e de carregamento.
- (2) Validar o modelo adotado comparando-o com modelos de dimensão superior (por exemplo, modelos bidimensionais de casca).
- (3) Realização de estudos paramétricos que avaliem a importância das condições de apoio (no plano e fora do plano) e de carregamento, assim como a forma da secção (relação  $I_z/I_y$ ), e diferentes valores do coeficiente de monossimetria,  $\beta_y$ .
- (4) Como resultado dos estudos paramétricos referidos no número anterior, produzir recomendações práticas que permitam identificar em que situações se justifica desprezar o efeito das deformações de pré-encurvadura e aquelas em que, pelo contrário, é necessário ter em consideração esse mesmo efeito para um dimensionamento seguro e económico.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andrade, A., Camotim, D. (2004). “Lateral-Torsional Buckling of Prismatic and Tapered Thin-Walled Open Beams: Assessing the Influence of Pre-Buckling Deflections”. *Steel & Composite Structures*, Vol. 4, Issue 4, pp. 281-301.
- Antman, S.S. (2005). “Nonlinear Problems of Elasticity” (2<sup>a</sup> ed.). Springer, Nova York.
- Attard, M.M. (1986). “Nonlinear Theory of Non-uniform Torsion of Thin-walled Open Beams”. *Thin-Walled Structures*, Vol. 4, Issue 2, pp. 101-134.
- Attard, M.M., Lawther, R. (1989). “Effect of Secondary Warping on Lateral Buckling”. *Engineering Structures*, Vol. 11, Issue 2, pp. 112-118.
- Bazant, Z.P., Cedolin, L. (1991). “Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture and Damaged Theories”. Oxford University Press, Nova York.
- Becker, E.B., Carey, G.F., Oden, J.T. (1981). “Finite Elements – Volume 1: An Introduction”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Chajes, A. (1974). “Principles of Structural Stability Theory”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Dias da Silva, V. (2013). “Mecânica e Resistência dos Materiais” (4<sup>a</sup> ed.). Coimbra.
- Fung, Y.C. (1965). “Foundations of Solid Mechanics”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Gobarah, A.A., Tso, W.K. (1971). “A Non-linear Thin-walled Beam Theory”. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 13, Issue 12, pp. 1025-1038.
- Gjelsvik, A. (1981). “The Theory of Thin Walled Bars”. Wiley, Nova York.
- Kitipornchai, S., Trahair, N.S. (1980). “Buckling Properties of I-Beams”. *ASCE–Journal of the Structural Division*, Vol. 106, Issue 5, pp. 941-957.
- Kollbrunner, C.F., Basler, K. (1969). “Torsion in Structures – An Engineering Approach”. Springer, Berlim.
- Love, A.E.H. (1944). “A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (4<sup>a</sup> ed.)”. Dover, Nova York.

MathWorks (2015). “MatLab R2015a”.

Oden, J.T., Ripperger, E.A. (1981). “Mechanics of Elastic Structures (2<sup>a</sup> ed.)”. McGraw-Hill.

Pi, Y.L., Trahair, N.S. (1992b). “Prebuckling deflections and lateral buckling – II: Applications”. ASCE–Journal of Structural Engineering, Vol. 118, Issue 11, pp. 2949-2985.

Pi, Y.L., Trahair, N.S. (1992b). “Prebuckling deflections and lateral buckling – II: Applications”. ASCE–Journal of Structural Engineering, Vol. 118, Issue 11, pp. 2967-2982.

Reis, A., Camotim, D. (2001). “Estabilidade Estrutural”. McGraw-Hill, Lisboa.

Simitses, G.J., Hodges, D.H. (2006). “Fundamentals of Structural Stability”. Elsevier, Amsterdão.

Trahair, N.S., Bradford, M.A., Nethercot, D.A., Gardner, L. (2008). “The Behaviour and Design of Steel Structures to EC3”(4<sup>a</sup> edição). Taylor & Francis, Londres.

Trahair, N.S., Woolcock, S.T. (1973). “Effect of Major Axis Curvature on I-Beam Stability”. ASCE–Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 99, Issue 1, pp. 85-98.

Vacharajittiphan, P., Woolcock, S.T., Trahair, N.S. (1974). “Effect of In-Plane Deformation on Lateral Buckling”. Journal of Structural Mechanics, Vol. 3, Issue 1, pp. 29-60.

Vlasov, V.Z. (1961). “Thin-Walled Elastic Beams”. English translation of the 2<sup>nd</sup> Russian edition of 1959. Israel Program for Scientific Translation.

Wagner, H. (1929). “Torsion and Buckling of Open Sections”. Technical Memorandum n. 807, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA).