



**FCTUC DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

# **Problemas Inversos na Análise de Estruturas de Madeira-Betão**

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil na Especialidade de Estruturas

Autor

**Diogo Lopes Santo**

Orientadores

**Alfredo Manuel Pereira Geraldês Dias**

**Luís Miguel da Cruz Simões**

Esta dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor, não tendo sofrido correções após a defesa em provas públicas. O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer responsabilidade pelo uso da informação apresentada

**Coimbra, Julho, 2014**

## **AGRADECIMENTOS**

Quero agradecer aos meus pais, aos professores e orientadores Alfredo Dias e Luís Simões, aos professores Alberto Martins e Sandra Monteiro, ao Eng. Carlos Martins, ao Luís, ao Tiago, à Fabiana e todos os amigos e colegas que me ajudaram.

## RESUMO

Neste trabalho, utiliza-se uma abordagem determinística num problema inverso com o objetivo de determinar parâmetros de rigidez num caso prático de uma laje mista madeira-betão onde são aplicadas cargas estáticas. Este objetivo surge no âmbito dos processos indiretos de identificação paramétrica a usar, por exemplo, em avaliações estruturais.

A resolução deste tipo de problemas requer uma minimização da diferença entre resultados numéricos e medições experimentais em função da variação dos parâmetros. A modelação numérica da estrutura foi feita com recurso a um programa comercial de elementos finitos. Os dados experimentais usados foram obtidos de ensaios laboratoriais, obtidos de um outro trabalho. Para minimizar as diferenças, aplicou-se um algoritmo quasi-Newton, com recurso a um programa de análise numérica computacional. O objetivo foi descobrir os valores dos módulos de elasticidade dos materiais e a rigidez das ligações entre madeira e betão.

Numa primeira abordagem não se utilizaram restrições na minimização, o que levou a valores absurdos. A utilização de restrições na variabilidade dos parâmetros no processo de minimização permitiu melhorar a solução.

Os resultados sem sentido devem-se principalmente aos erros na modelação numérica e nos testes experimentais. Estudou-se as fontes desses erros. Alguns exemplos são os erros de medição experimental, erros provocados por simplificações e hipóteses no modelo numérico ou provenientes da variabilidade das propriedades dos materiais. Produziu-se um estudo da influência que esse erro tem no processo de identificação paramétrica.

## **ABSTRACT**

In this work a determinist approach to an inverse problem is used with the objective of estimate the stiffness parameters in a practical application of a timber-concrete slab type structure with static loads applied. The scope of this objective lies in indirect parametric estimation processes used, for instance, in structural evaluations.

The resolution of this kind of problems requires a minimizations of the difference between numerical results and experimental measurements with respect to the variation of parameters. The numerical model was made using a finite element commercial software. The experimental data was obtained from laboratorial tests performed in a previous work. To minimize the differences, a quasi-Newton algorithm was applied using a numerical calculation computational software. The objective was to determine the values of the materials modulus of elasticity and the wood-concrete connections stiffness.

In a first approach, an unconstrained minimization resulted in absurd values of the parameters. The use of constraints in the variation of parameters allowed to improve the solution.

The meaningless results were mainly due to the errors in the numerical model and the experimental test. A study on the source of those errors was made. Some examples are the errors from experimental measurements, from simplifications and hypothesis taken in the numerical model or due to the variability of material properties. A study of its influence in the parametric identification was made.

---

## ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO .....	1
1.1	Considerações e Enquadramento.....	1
1.2	Organização da tese.....	2
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	3
2.1	Considerações Gerais dos Problemas Inversos .....	3
2.2	Breve história dos problemas inversos .....	4
2.3	Identificação paramétrica e deteção de danos .....	5
2.4	Identificação Paramétrica e Deteção de Danos: Metodologias .....	6
2.4.1	Atualização de Modelos em Estruturas Mistas Madeira-Betão .....	7
2.4.2	Identificação de Parâmetros e Danos em Estruturas Laminares.....	7
2.4.3	Método dos Elementos de Fronteira.....	8
2.4.4	Método dos Elementos Finitos .....	8
2.4.5	Atualização de Modelos para Identificação de Danos .....	11
2.4.6	Método de Energia Residual Mútua.....	12
2.4.7	Método Probabilístico de Identificação.....	12
3	METODOLOGIA .....	13
3.1	Problema Inverso.....	13
3.2	Análise numérica.....	14
3.2.1	Modelação numérica .....	14
3.3	Análise experimental.....	14
3.4	O problema de otimização.....	15
3.4.1	Função objetivo .....	17
3.4.2	Ferramenta Computacional e Algoritmos .....	18
4	APLICAÇÃO PRÁTICA.....	19
4.1	Introdução .....	19
4.2	Laje Mista Madeira-Betão.....	19
4.3	Modelo Numérico .....	23

---

5	ANÁLISE E DISCUSSÃO DE RESULTADOS .....	25
5.1	Introdução .....	25
5.2	Problema Inverso de Identificação de Parâmetros .....	25
5.2.1	Análise de Sensibilidades.....	25
5.2.2	Otimização sem Restrições .....	26
5.2.3	Resultados para a Otimização sem Restrições .....	27
5.2.4	Otimização com Restrições .....	30
6	ESTUDO DO ERRO E DAS INCERTEZAS .....	32
6.1	Influência do erro no processo de identificação.....	32
6.2	Processo de Medição e Configuração Experimental .....	34
6.3	Propriedades dos Materiais .....	36
6.4	Outros Deslocamentos e Deformações.....	40
6.5	Hipóteses e Simplificações.....	42
6.6	Condições de fronteira e ligações internas .....	44
6.7	Resumo do estudo do erro e incertezas .....	50
7	CONCLUSÕES.....	52
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	54
	ANEXO.....	57

## **ABREVIATURAS**

BEM – Método dos Elementos de Fronteira (Boundary Element Method em inglês)

BFGS - Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno

DFP - Davidson-Fletcher-Powell

GL – Lamelado colado (Glued Laminated em inglês)

MEF - Método dos Elementos Finitos

MMQ – Método dos Mínimos Quadrados

MOE – Módulo de Elasticidade (Modulus of Elasticity em inglês)

RO - Rated Output

---

## SIMBOLOGIA

- $E_c$  – Módulo de elasticidade do betão tangente na origem
- $E_{cm}$  – Módulo de elasticidade secante do betão
- $E_{m,g}$  – Módulo de elasticidade global médio
- $E_{GL1}$  – Módulo de elasticidade médio da viga GL1 (ou GL2, GL3, GL6, GL7)
- $F$  – Força de corte no ligador
- $G$  – Função que relaciona parâmetros com observações
- $K$  – Matriz de rigidez
- $K_{L1-6}$  – Rigidez da ligação na viga GL1 e GL6 (ou vigas GL2 e GL3 ou na viga GL7)
- $X_{EXP}$  – Vetor de objetivos obtidos experimentalmente
- $X_{NUM}$  – Vetor de objetivos obtidos numericamente
- $Y$  – Vetor de variáveis de decisão
- $a$  – Rigidez inicial do ligador
- $a_i$  – Fatores na formulação do método dos mínimos quadrados
- $b$  – Rigidez pós-cedência
- $c$  – Valor que define a transição de comportamento elástico para semi-plástico
- $d$  – Vetor de dados
- $f_{cm}$  – Valor médio da tensão de rotura do betão à compressão
- $m$  – Vetor de parâmetros que descrevem o sistema
- $u$  – Objetivos
- $u_j^{exp}$  – Vetor de deslocamentos verticais obtidos experimentalmente
- $u_j^{num}$  – Vetor de deslocamentos verticais obtidos numericamente
- $x$  – Variáveis de decisão
- $x_i$  – Coeficientes na formulação do método dos mínimos quadrados
- $\alpha_i$  – Vetor de parâmetros
- $\beta$  – Resultado na formulação do método dos mínimos quadrados
- $\delta$  – Escorregamento no ligador
- $\delta$  – Escorregamento inicial no ligador
- $\rho$  – Densidade

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações e Enquadramento

Determinar os efeitos a partir das causas tem a designação de problema direto. O problema inverso tenta determinar as causas a partir dos efeitos. Num problema físico, quando existem erros ou informação em falta aplica-se uma análise inversa para, a partir das observações e medições, determinar os parâmetros que melhor se ajustam a essas quantidades. Problemas inversos têm imensas aplicações desde que os sistemas em causa tenham descrição numérica ou analítica possível. Uma das suas aplicações específicas na engenharia é a determinação de parâmetros de um modelo de uma estrutura (como áreas de seções transversais ou rigidezes), através da utilização de resultados como deslocamentos ou tensões, minimizando as diferenças entre resultados numéricos e resultados experimentais (ou observados diretamente por inspeção/avaliação da estrutura). Enquanto num problema direto se obtém um resultado a partir da análise de um sistema, no problema inverso pode haver uma variedade de soluções que se ajustam aos dados. Outra dificuldade é a sensibilidade aos dados de entrada, isto é, obterem-se grandes variações nos resultados finais derivadas de pequenas alterações nos dados iniciais.

Este trabalho tem o objetivo de desenvolver um procedimento de identificação indireta de parâmetros a utilizar em avaliações estruturais de estruturas degradadas. As avaliações estruturais através de testes destrutivos alteram negativamente as características da estrutura. Um processo de identificação indireta pretenderia, a partir de medições estáticas ou dinâmicas inferir, para além dos parâmetros da estrutura, a localização e a quantificação do dano.

Neste trabalho aplica-se o estudo a um caso prático de um pavimento misto madeira-betão. Aplica-se uma minimização de uma função de mínimos quadrados com os deslocamentos verticais obtidos numericamente e medidos experimentalmente para obter o valor dos parâmetros que melhor se ajustam numa formulação de mínimos quadrados entre as duas quantidades. Num contexto ideal, se os erros e imprecisões experimentais e numéricas não existissem, o mínimo seria obviamente o zero, ou seja, o numérico era exatamente igual ao experimental e assim as diferenças e logo o seu quadrado eram zero. Isto não acontece num problema real em que existem erros e incertezas que influenciam as respostas quer numérica quer experimental.

## 1.2 Organização da tese

O primeiro capítulo faz a introdução da tese bem como do problema que está na origem deste estudo, o seu propósito, e os objetivos do trabalho.

Após a introdução, no segundo capítulo, é apresentada uma revisão de alguns métodos utilizados no âmbito dos problemas inversos bem como algumas das suas aplicações na área da engenharia civil e de estruturas. Apresentam-se metodologias baseadas em métodos probabilísticos, método dos elementos de fronteira, elementos finitos, entre outros.

O terceiro capítulo foca-se numa análise de literatura mais específica do trabalho aqui estudado. Nele é feita uma revisão dos conceitos utilizados na formulação do problema bem como os necessários à resolução do mesmo.

O quarto capítulo contém a caracterização e descrição do caso prático de estudo utilizado no âmbito deste trabalho. São apresentadas as características técnicas e específicas deste caso particular e ainda, a explicação técnica da modelação experimental e numérica efetuada sobre esse caso de estudo.

No capítulo cinco são discutidos e apresentados os resultados do processo de identificação paramétrica e no capítulo seis são analisados os erros e incertezas e efetuada a sua discussão.

No sétimo capítulo, estão as conclusões e alguns dos trabalhos possíveis de fazer tendo em conta o estudo desta tese.

Em Anexo encontra-se uma simples e breve explicação dos algoritmos utilizados tanto na otimização restringida como na não restringida.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Considerações Gerais dos Problemas Inversos

Um sistema físico é caracterizado e descrito pelos respetivos parâmetros  $m$ , de onde é possível obter conjuntos de observações ou dados  $d$ . A relação entre os parâmetros e os dados resultantes do sistema é descrita por uma função  $G$ , de forma a:

$$G(m) = d \quad (1)$$

Apesar de poder ter vários aspetos, no âmbito deste trabalho,  $m$  e  $d$  são vetores. A determinação de  $d$  dado  $m$  constitui o problema direto. O problema inverso tenta partir de  $d$  para obter os valores de  $m$  (ver Figura 2.1). Existe ainda a possibilidade de determinação de  $G$  dado alguns exemplos de  $m$  e  $d$  a que usualmente se chama problema de identificação de modelo ou sistema (Aster et al., 2013). Estas são as 3 abordagens possíveis, sendo que este trabalho se desenvolve com base na segunda, a dos problemas inversos, nomeadamente dos discretos, em que os dados e os parâmetros são vetores (Aster et al., 2013).

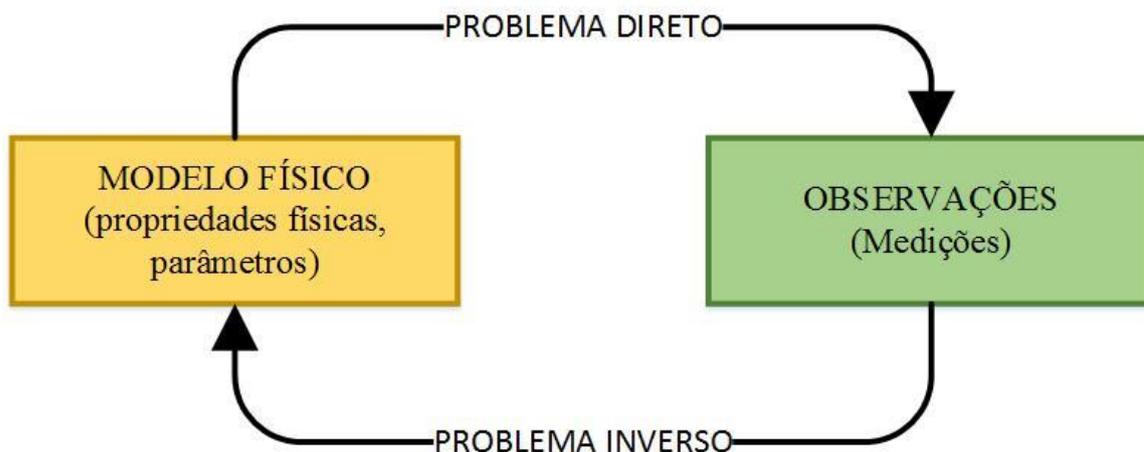


Figura 2.1 – Esquema de distinção entre problema direto e inverso

O problema direto, em termos determinísticos, tem uma única solução pois existe apenas um conjunto de dados que pode resultar da análise do modelo em função do conjunto de parâmetros.

Os problemas inversos podem ter várias soluções, pois geralmente existe um variado número de modelos que se ajusta ao conjunto de dados (R. Aster et al., 2013). Várias áreas têm utilizado análises inversas como a tomografia em medicina, geologia, astronomia e astrofísica (Yaman et al., 2013). Algumas aplicações dos problemas inversos podem ser:

- Acústica subaquática com determinação de distribuições de calor na água, profundidades de oceano, propriedades dos sedimentos depositados ou localização e características de objetos (minas, submarinos, navios afundados, entre outros);
- Testes não destrutivos, para identificação de fendas, descontinuidades ou dano em todo o tipo de estruturas;
- Técnicas de tomografia biomédica que permitem visualizar partes do corpo humano em três dimensões baseado nos raios-X que são atenuados dentro do corpo e também através de indução de correntes elétricas de baixa frequência, medindo as propriedades elétricas nos tecidos humanos;
- Assimilação de dados atmosféricos com aplicações ao nível da previsão meteorológica (Yaman et al., 2013).

Na área da engenharia civil, é possível identificar algumas aplicações relacionadas com temas diversos como sejam(Argoul, 2012):

- Aplicação de técnicas não destrutivas de controlo de danos e degradação de estruturas ou elementos,
- Estudo do comportamento vibratório, de modelos hidrológicos em florestas,
- Identificação de estruturas enterradas.

Estes conjuntos de exemplos mostram claramente a variabilidade de aplicações de problemas inversos em engenharia civil e o potencial que estas técnicas podem ter na prática.

## **2.2 Breve história dos problemas inversos**

Uma visão aceite nos dias de hoje pela generalidade dos cientistas é que o primeiro problema inverso estudado foi o de Niels Henrik Abel em 1826, que consistia na determinação da curva de descida de uma partícula, tendo à partida o tempo de descida desta, em função da distância

---

vertical de queda. Com a segunda guerra mundial, os estudos focaram-se nos problemas inversos de dispersão que tinham o objetivo de determinar localização de alvos entre outras aplicações militares (Yaman et al., 2013). A teoria dos problemas inversos foi muito impulsionada pela investigação no ramo da geofísica, com o desenvolvimento de trabalhos principalmente empíricos e, posteriormente, no início dos anos 70, com os trabalhos de G. Backus e F. Gilbert (Argoul, 2012). Ainda nos anos 70, investigadores russos, como A. N. Tikhonov e Arsenin (1977), realizaram trabalhos sobre a resolução de problemas mal colocados em que não existe uma solução única, e que ajudou a criar um novo ramo da matemática aplicada. Nos anos 80, Albert Tarantola (Tarantola, 1987; Tarantola e Valette, 1982) desenvolve a teoria dos problemas inversos através de métodos probabilísticos na área da geofísica. Anos mais tarde, surge o interesse por parte da engenharia mecânica e civil através de autores como H.D. Bui, M. Bonnet, A. Constantinescu e C. Stolz (Argoul, 2012). Desde então vários trabalhos têm vindo a ser publicados sobre esta temática, nas mais diversas áreas incidindo, no caso da engenharia mecânica e civil: na identificação de parâmetros e/ou propriedades, identificação de danos, fendas, degradação, defeitos, atualização de modelos, deteção de elementos intrusivos, otimização, mecânica da fratura, entre outros (Argoul, 2012).

### **2.3 Identificação paramétrica e deteção de danos**

A identificação paramétrica permite obter as propriedades e até comportamento dos materiais através de análises numéricas ou analíticas, sendo também, utilizada como ferramenta na deteção de danos e degradação. Motivado pelo grande interesse nestas áreas tem-se observado um variado número de trabalhos envolvendo ensaios estáticos ou dinâmicos, com abordagens determinísticas ou probabilísticas. A maioria destes são realizados para estruturas metálicas ou de betão. No caso das estruturas metálicas, tal deveu-se, provavelmente, ao facto de os primeiros e maiores desenvolvimentos deste tema terem ocorrido para as áreas de aeronáutica e aeroespacial, enquanto no caso das estruturas de betão tal terá resultado da sua predominância e da conseqüente problemática da sua degradação. Os desenvolvimentos que ocorreram foram eles também para estruturas simples do tipo laje, vigas ou pórticos, sendo que a complexidade da estrutura implica maior dificuldade do processo e dos problemas.

Os primeiros trabalhos de identificação paramétrica remontam a 1971, quando Aström e Eyhköff (1971) propuseram uma metodologia para estimar parâmetros através da formulação de um problema inverso. Esta formulação consistia em minimizar a norma das diferenças entre os resultados obtidos experimentalmente e do correspondente, obtido analiticamente. Para este procedimento, apenas se podem utilizar processos e fenómenos passíveis de serem descritos por modelos analíticos, o que limita a sua utilização, nomeadamente quando existem problemas de maior complexidade ou de características não lineares acentuadas.

Nos anos 80 aparecem as primeiras metodologias de determinação de parâmetros com a investigação na área da aviação. Um desses exemplos é o trabalho realizado por M. Sanayei e R.B. Nelson (1986) que desenvolveram os primeiros algoritmos de identificação de parâmetros em estruturas sujeitas a cargas estáticas, ao nível dos elementos, estudando o efeito dos erros de medição no processo. Anos mais tarde, em 1992, Schnur e Zabarás (referido por Kleinermann (2000)), utilizaram um código de cálculo de elementos finitos com um método de otimização na identificação do comportamento de materiais. Posteriormente, Cailletaud e Pilvin (Cailletaud e Pilvin, 1993) generalizaram essa técnica, para o caso de modelos de comportamento não linear, num código de elementos finitos não lineares aliado a uma ferramenta de otimização. Tinham uma função objetivo e para a minimizar, utilizaram dois métodos: o método do descendente mais inclinado para as primeiras iterações a fim de melhorar a aproximação dos parâmetros, seguido do método de Levenberg-Marquardt que permitia atingir a solução ótima. Os Elementos finitos a que se recorreu neste estudo, são um exemplo de uma das técnicas que foram usadas para a análise numérica de problemas inversos.

No mesmo ano, Mahnken e Stein (referido por Kleinermann (2000)), propuseram uma formulação semelhante baseada igualmente numa norma Euclidiana sem levar em conta os erros experimentais e em que um termo de estabilização é adicionado. O termo suplementar, geralmente designado de termo de convexificação, permite estabilizar a solução obtida (redução da modificação dos valores ótimos dos parâmetros quando se perturba os valores dos resultados experimentais) e a convergência do método de otimização. Uma escolha inapropriada deste termo, geralmente de difícil seleção, pode levar a uma modificação significativa da posição do mínimo obtido. O método de otimização utilizado é um método quasi-Newton e o cálculo das sensibilidades é semi-analítico, integrando a resolução de um problema direto de elementos finitos.

Vários outros autores tomaram, posteriormente, esse princípio de juntar um método de otimização apropriado com um código de cálculo para elementos finitos. Atualmente, os problemas inversos de identificação paramétrica estão cada vez mais generalizados, sendo que a formulação matemática das diferenças entre simulação numérica e testes experimentais mantém-se quase inalterada, apenas se modificando ou ajustando o termo suplementar de estabilização do processo de convergência e o método de otimização (Kleinermann, 2000).

## **2.4 Identificação Paramétrica e Deteção de Danos: Metodologias**

As metodologias de identificação do valor real dos parâmetros têm sensivelmente a mesma formulação base: processo numérico aliado a algoritmo/método de otimização partindo de observações para chegar a parâmetros descritivos do sistema. O que diferencia é o tipo de processo de otimização e métodos numéricos que se utilizam. Pretende-se aqui demonstrar

estudos feitos recorrendo a outras possibilidades. Dá-se significativo foco a especificidades estudadas em cada um dos trabalhos como características próprias dos exemplos numéricos, tipologias de análise de sensibilidades, tipos de estrutura de exemplificação ou até o método geral de análise.

#### **2.4.1 Atualização de Modelos em Estruturas Mistas Madeira-Betão**

Uma aplicação prática de determinação de parâmetros em estruturas de madeira-betão foi realizada por A. Zona, M. Barbato e M. Fragiaco (2012). O objetivo passava por determinar a variabilidade da resposta global e local dos parâmetros que resulta da existência de incertezas nas propriedades da madeira, do betão e das ligações. Paralelamente, pretendia-se analisar a correlação entre medições experimentais e resultados numéricos. Um modelo não linear de elementos finitos de uma estrutura mista madeira-betão, com ligações deformáveis, foi feito com o objetivo de obter a resposta numérica e para o qual se tinham as medições experimentais. A estrutura é uma viga mista madeira-betão. Foi produzida uma análise probabilística das incertezas nos parâmetros desses 3 componentes (betão, madeira e ligações). Os resultados mostraram que as incertezas nos parâmetros influenciam significativamente a relação entre resultados numéricos e que os parâmetros determinados podem apresentar diferenças substanciais em relação ao valor médio obtido experimentalmente. Apesar disso foi demonstrado que a variabilidade da capacidade da viga devido às incertezas é baixa.

#### **2.4.2 Identificação de Parâmetros e Danos em Estruturas Laminares**

As estruturas laminares têm bastantes aplicações e portanto, rapidamente desenvolve-se uma necessidade de determinar degradações e danos nas suas inspeções e avaliações. Habitualmente estas identificações são realizadas através de ensaios dinâmicos mas dada a complicada instrumentação e processo destes testes, a utilização de ensaios estáticos simplifica bastante a metodologia. Com essa ideia, D. Bandyopadhyay e S. Ghosh (2012), propuseram uma abordagem de identificação de parâmetros e determinação de danos em placas quadradas isotrópicas recorrendo aos elementos finitos e a uma metodologia inversa de estimação paramétrica. Os autores dão ênfase à formulação do problema pelo método dos elementos finitos e utilizam uma abordagem baseada numa função de erro da matriz de deslocamentos, isto é, a relação entre os valores observados de deslocamentos, experimentalmente e numericamente. Além desta, utilizam também uma função de erro de forças aplicadas na estrutura. A análise de sensibilidades é realizada perturbando os parâmetros de uma quantidade pequena, observando a variação nos deslocamentos medidos. O estudo incidiu na análise de danos na estrutura obtendo-se previsões de percentagem de erro médio na estimativa de parâmetros (abaixo de 3%), na média de parâmetros não danificados e média de parâmetros danificados.

Nos anos 90 surgiu a necessidade de determinar a rigidez de flexão com a finalidade de obter o estado de degradação de cais e pontes de betão armado, devido ao grande volume de construção deste tipo de estrutura nas 4 décadas antecedentes. Com isso em mente, M. Sanayei e S.F. Scampoli (1991) desenvolveram com um programa de elementos finitos que permitia ser utilizado para identificação de parâmetros, nomeadamente, propriedades de rigidez em placas ortotrópicas a partir de forças estáticas e deslocamentos medidos. O objetivo foi de utilizar este programa no caso prático de um tabuleiro de uma ponte em betão armado, tendo sido apenas modelada uma parte do mesmo, pois representar a estrutura na sua totalidade envolvia um grande esforço de cálculo. Ao nível da formulação matemática, deu-se destaque à análise de sensibilidades e aos problemas que existem a este nível como é o caso de singularidade de soluções, problemas com a redução de parâmetros, problemas com a divergência ou até problemas de estabilidade da solução. Foi também estudado o nível aceitável de erros nas medições e um processo probabilístico de identificação de danos, permitindo concluir que os parâmetros são muito sensíveis aos erros de medição, pelo que é importante que exista precisão nas forças estáticas e na medição de deslocamentos.

#### **2.4.3 Método dos Elementos de Fronteira**

L.Comino e R.Gallego (2005) apresentaram um estudo no qual resolveram um problema inverso de determinação de parâmetros em materiais anisotrópicos, recorrendo a técnicas de elementos de fronteira. O método dos elementos de fronteira (BEM) foi combinado com o algoritmo de Levenberg-Marquardt. A sua aplicação foi exemplificada em dois casos de estudo: uma placa retangular homogénea onde se varia a carga aplicada; uma placa retangular com uma inclusão interna de outro material. O algoritmo de Levenberg-Marquardt foi usado para resolver o problema não-linear de mínimos quadrados, o qual ocorre devido à não linearidade do modelo. Estudou-se a convergência do algoritmo e outros aspetos tal como o número de medições necessárias, valores iniciais do processo iterativo e o número de iterações foram tidos em conta e o critério de convergência. Os autores estudaram depois a aplicação do estudo numa placa retangular com 6 metros de lado. Concluíram que o processo inverso desenvolvido apresenta soluções precisas e estáveis.

#### **2.4.4 Método dos Elementos Finitos**

S. Cooreman, D. Lecompte, H. Sol, J. Vantomme e D. Debruyne (2007) estudaram o cálculo analítico da matriz de sensibilidades na identificação de parâmetros elasto-plásticos de um material anisotrópico, comparando resultados experimentais com um modelo de elementos finitos. Um esquema que permite compreender o processo de resolução deste problema apresenta-se na Figura 2.2.

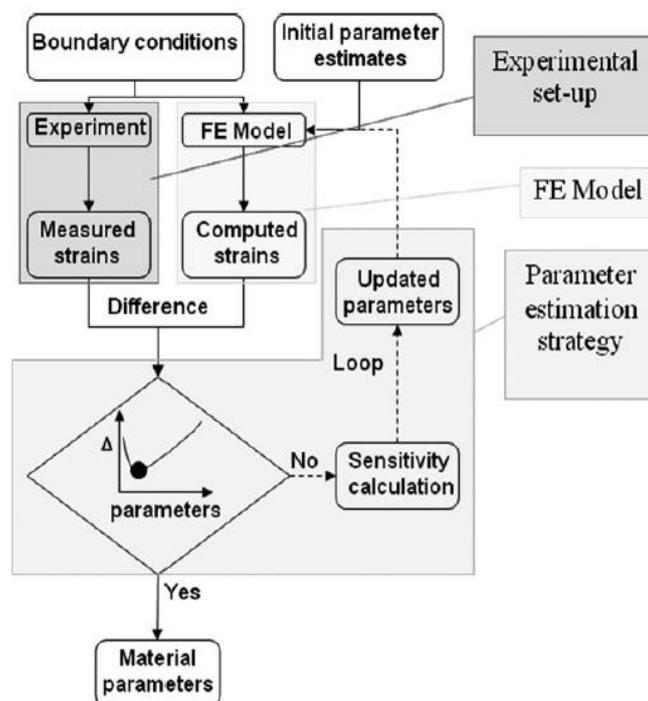


Figura 2.2 - Esquema do problema inverso de identificação de parâmetros (Cooreman et al., 2007)

É possível observar pelo esquema que, para este problema inverso, tem-se uma configuração experimental e uma numérica, onde se minimizam as diferenças em termos de resultados obtidos para chegar aos valores dos parâmetros. Este processo é iterativo pois é necessário realizar o cálculo das sensibilidades, para assim atualizar os parâmetros inseridos no modelo numérico e, desta forma, convergir para a solução do problema. A análise das sensibilidades neste trabalho é feita analiticamente através do cálculo das derivadas das componentes de tensão no plano. O problema foi aplicado a um teste simples de tração e verificado por via numérica, para confirmar a validade da aproximação analítica das sensibilidades, do qual resultou que estas sensibilidades obtidas analítica e numericamente coincidem.

M. Sanayei e M.J. Saletnik (1996a, 1996b) estudaram a utilização de medições de extensão em estruturas para determinação de parâmetros ao invés das habituais medições de deslocamentos. Estas medições podem ser mais precisas e exigir menor esforço para obter resultados em relação aos deslocamentos, caso se utilizem aparelhos de medição de extensão pois apresentam vantagens em estruturas de grande dimensão. Neste trabalho desenvolveu-se um método para estimar parâmetros em estruturas, dando realce, numa primeira fase, à sua formulação ao nível dos elementos finitos e do próprio método e, numa segunda, ao nível de análise de sensibilidades aos erros que existem neste tipo de procedimentos. Este método é baseado numa

otimização que permite ajustar os parâmetros no modelo de elementos finitos, tendo em conta a análise feita das tensões medidas, sendo que para realizar as iterações se utiliza o método de Gauss-Newton e o método dos Gradiente Conjugado. Entre estes dois métodos de otimização, tem-se que o método de Gauss-Newton é sensível a alterações iniciais que provocam divergência do método. Utilizaram-se estruturas lineares (uma estrutura porticada e uma do tipo treliça, de duas dimensões) para verificar a aplicabilidade do método e mais especificamente minimizar a função de erro (erro entre as medidas experimentais e resultados numéricos) de forma a obter a rigidez ao nível dos elementos e ainda propriedades geométricas das seções como áreas e momentos de inércia. Foi demonstrado que quando se utilizam conjuntos de forças e tensões (resultantes) sem erros e com um número suficiente de medições, consegue-se determinar o valor exato dos parâmetros. Para que tal aconteça, deve-se evitar dependências lineares nas sensibilidades (pois estas reduzem a capacidade de obter vários parâmetros em simultâneo) e utilizar mais conjuntos de medições, que evitam o aparecimento de erros relevantes.

Na segunda parte do trabalho destes autores (1996b) sobre análise de sensibilidades de erros estes analisam o comportamento do método desenvolvido devido à existência de erros nos dados de entrada (medições numéricas e experimentais) e saída (resultados do método). Os erros que existem neste tipo de problemas podem resultar de problemas nas medições (aparelhos de medição de extensão são muito sensíveis ao erro), erros no modelo de elementos finitos (como no caso de tensões residuais ou térmicas não contabilizadas, falhas geométricas ou dos materiais) e ainda erros no algoritmo ou metodologia. Os autores utilizam um método heurístico baseado na análise de sensibilidades ao erro para determinar a quantidade de medições força-deslocamento necessárias para existir tolerância ao erro. Utilizam o método de Monte Carlo para estudar o impacto de erros de medição nos parâmetros estimados, gerando aleatoriamente observações com as distribuições de probabilidades dos erros, calculadas também neste trabalho. Uma análise estatística permite depois obter a relação entre os erros que podem existir nas medições (experimentais e obtidas numericamente) e os erros que existem nos resultados do método. Este estudo serviu para determinar em que medida os erros que existem neste procedimento, afetam a solução final dos parâmetros.

M.R. Banan, M.R. Banan e K.D. Hjelmstad (1994) desenvolveram estudos na área da identificação paramétrica de estruturas com base em respostas estáticas, distribuindo os resultados e conclusões do seu trabalho em duas partes: uma parte sobre os aspetos computacionais dos algoritmos e método utilizados e outra parte acerca de aplicações numéricas. A motivação destes autores deveu-se, ao facto que ensaios estáticos serem muito recorrentes e simples, o que aumenta o interesse da sua utilização. Para tal, propuseram dois algoritmos: o primeiro utilizando uma minimização do erro entre resultados experimentais e

numéricos ao nível das forças estáticas aplicadas e o segundo ao nível dos deslocamentos determinados. O algoritmo de erro nas forças estáticas minimiza a diferença entre as forças medidas e as forças estimadas, enquanto o segundo minimiza a diferença entre os deslocamentos medidos e os estimados. Para resolver estes algoritmos recorreram a uma abordagem de mínimos quadrados e para o problema de otimização uma programação quadrática recursiva, pois tratava-se de um problema não linear de otimização com restrições em forma de inequações. Estudaram também alguns problemas computacionais relativos a este tipo de análise como são exemplo, a determinação dos valores dos parâmetros iniciais desconhecidos e a convergência do processo de otimização.

Na segunda parte do trabalho destes autores (Banan et al, 1994) estudam a aplicação do método e algoritmos desenvolvidos e ainda o comportamento destes perante a existência de erros aleatórios nas medições, aos quais se dá o nome de ruído. Este ruído é caracterizado pela sua aleatoriedade, pelo que se recorre a uma simulação de Monte Carlo para conseguir imputar este fenómeno nos algoritmos de estimação de parâmetros. Foi realizado um estudo de aplicação numa estrutura linear, neste caso uma ponte em treliça, onde se comparam os dois algoritmos de identificação (baseado nas forças estáticas e baseado nos deslocamentos medidos), tendo como foco, a comparação da performance do método, o efeito da escolha dos valores iniciais dos parâmetros desconhecidos no processo iterativo, o efeito da qualidade e quantidade da informação utilizada e a influência do número de medições. O algoritmo baseado nas forças estáticas é melhor em algumas situações enquanto o algoritmo baseado nos deslocamentos noutras, sendo que ambos melhoram a sua eficiência e precisão conforme se aumenta o número de medições resultantes (e obtidas).

#### **2.4.5 Atualização de Modelos para Identificação de Danos**

A atualização de modelos de elementos finitos é uma técnica usada na deteção de danos e de identificação de parâmetros. Permite melhorar os modelos realizados a algumas estruturas e baseia-se nos mesmos princípios dos problemas inversos de identificação paramétrica. Trata-se de um processo de atualização dos parâmetros num modelo numérico, de tal forma que estes minimizam a diferença entre os resultados experimentais e numéricos. A metodologia básica desta técnica é a seguinte: 1) estimação dos parâmetros iniciais a utilizar no modelo numérico; 2) análise de sensibilidades e minimização da função objetivo das diferenças entre medições experimentais e resultados numéricos; 3) aplicação do critério de convergência que, caso não seja verificado, leva a uma atualização dos parâmetros desconhecidos do modelo, gerando assim um processo iterativo. Anne Teughels e Guido De Roeck (2005) estudaram esta técnica na aplicação a vigas de betão com dano por uma abordagem modal ao problema, isto é, utilizando para medições, as frequências e modos de vibração.

#### 2.4.6 Método de Energia Residual Mútua

O método de energia residual mútua é utilizado como algoritmo para estimar parâmetros em estruturas. K. D. Hjelmstad, S.L. Wood e S.J. Clark (1992) investigaram sobre a utilização deste método no processo de identificação de parâmetros em sistemas mecânicos deformáveis. Este método tem como requisito o conhecimento total acerca da topologia e geometria da estrutura e é utilizado para duas situações: carga estática ou vibração livre de estruturas que possam ser reproduzidas numa modelação por elementos finitos. O método da energia residual mútua baseia-se numa afirmação do princípio dos trabalhos virtuais e depende essencialmente da decomposição de parâmetros das matrizes de rigidez e de massa. Basicamente, trata-se da minimização da energia residual mútua num conjunto de observações (dados), sendo esta o trabalho realizado pelas forças residuais (forças que faltam para atingir o estado de equilíbrio) de um dado caso de carga  $j$ , que atua num campo de deslocamentos de um caso de carga  $i$ . O melhor resultado é quando esta energia residual toma o valor zero, representando um sistema que está completamente de acordo com as medições. Aplica-se a minimização de uma função que representa o cálculo matricial das componentes de energia residual para obter os parâmetros que levam ao valor zero ou próximo deste. Os autores utilizaram esta formulação para estimar a rigidez a partir de análises estáticas e estimar rigidez e massa no caso de análises modais, recorrendo a uma estrutura linear para demonstração da sua aplicação.

#### 2.4.7 Método Probabilístico de Identificação

Numa abordagem probabilística, qualquer informação relativa ao problema é expressa sob a forma de distribuições. Um exemplo da aplicação deste tipo de análise é o trabalho realizado por R.Hadidi e N.Gucunski (2008), no qual apresentam uma metodologia baseada em métodos probabilísticos para determinação do módulo de elasticidade. A solução para o problema inverso estudado é a distribuição de probabilidades que combina a informação *a priori* (informação que se tem do sistema antes de o resolver) com a informação obtida do problema direto. Para tal, utilizou-se uma metodologia que consiste em aleatoriamente gerar modelos com as suas distribuições de propriedades e analisar a informação obtida, utilizando assim, ao invés de apenas um resultado de deformação, uma distribuição de deformações que permite obter uma distribuição de módulo de elasticidade. Conclui-se que a solução para esta abordagem leva aos mesmos resultados que uma abordagem determinística mas que permite soluções de problemas inversos mais complexos caracterizados por muitas incertezas (como as referidas acima: carga, condições de fronteira, entre outras).

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Problema Inverso

A formulação de um problema inverso para aplicação na identificação de parâmetro passa por minimizar a distância entre resultados obtidos por duas vias de simulação de um modelo. Na Figura 3.1 apresenta-se um esquema geral do problema inverso mais relacionado com este trabalho.

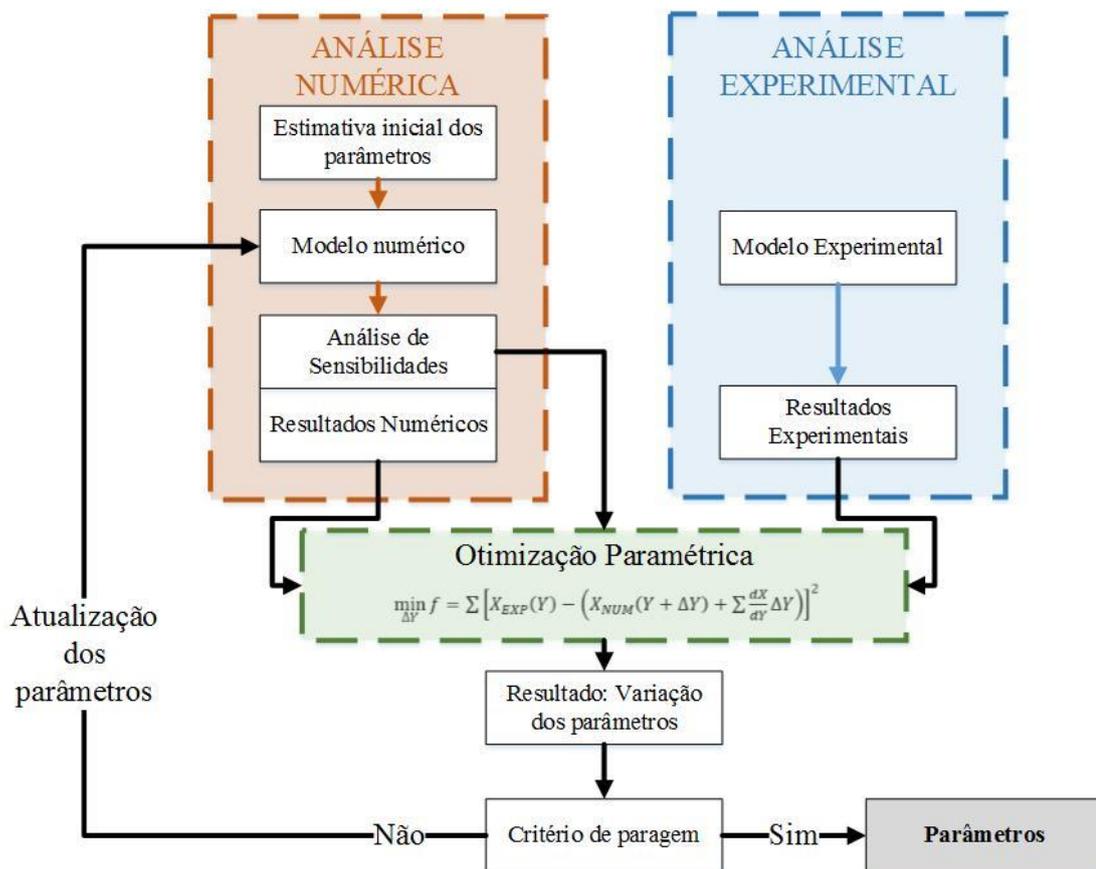


Figura 3.1 – Esquema do Problema inverso

Em termos de aplicação, pode dividir-se o processo em três partes: a parte de análise numérica, a parte do estudo experimental (medição de dados observáveis), e a otimização de parâmetros. Das duas primeiras partes tiram-se as respostas observáveis do sistema e na última parte é realizada a minimização de uma função que permite obter os parâmetros que diminuem a diferença entre resultados numéricos e experimentais. O estudo experimental resulta da preparação e execução de um modelo experimental que resulta em medições efetuadas por aparelhos de medição. A parte de análise numérica é feita com recurso a um programa computacional que permite efetuar a modelação e análise pelo MEF resultando deste processo os dados numéricos. Para além disso é feita também uma análise de sensibilidades, para obter a variação dos objetivos em ordem à variação das variáveis de decisão.

### **3.2 Análise numérica**

A análise numérica diz respeito ao conjunto de modelação numérica, de onde se obtém um conjunto de observações, e à análise de sensibilidades dos objetivos em relação às variáveis de decisão. Para resolução deste conjunto de processos é necessário recorrer a programas de cálculo que auxiliam na resolução dos estudos, dado o elevado grau de complexidade e o esforço de cálculo que estas operações envolvem.

#### **3.2.1 Modelação numérica**

A modelação numérica é uma simulação computacional de um modelo físico que tenta reproduzir o seu comportamento. Quando se efetua esta modelação, existem várias simplificações e hipóteses que se consideram, com o intuito de simplificar os problemas diminuindo a sua complexidade e as suas variabilidades.

A modelação numérica recorre de alguns métodos que permitem resolver os sistemas de equações que os descreve. Alguns destes podem ser o Método dos Elementos Finitos ou o Método dos Elementos de Fronteira.

### **3.3 Análise experimental**

A análise experimental é a reprodução do modelo físico, em condições controladas, com o objetivo de estudar o comportamento com mais precisão do que seria na realidade e obter conhecimento a partir daí. São produzidos e construídos modelos à escala real ou a uma diferente, com o intuito de controlar todas as suas variáveis, e em que muitas vezes o objetivo passa pela comprovação de teorias ou estudos, ou até calibração de modelos numéricos. Essa é a ideia geral de um modelo experimental, mas os resultados podem ser provenientes de medições *in situ*, como no caso de inspeções a elementos estruturais ou mesmo a estruturas

---

completas. Um exemplo de dados retirados deste tipo de teste pode ser deslocamentos a partir de ensaios de carga ou medições através de dispositivos próprios de inspeção.

### 3.4 O problema de otimização

A otimização preocupa-se com a obtenção da melhor resposta de uma dada operação que pode ou não estar sujeita a restrições. Por vezes o objetivo pode não ser o de obter a melhor resposta mas sim o caminho das ações a tomar para a alcançar, isto é, quais as variáveis a alterar para obter a essa melhor solução. Na engenharia é muito utilizado devido ao elevado custo que advém do não melhoramento das soluções ou recursos, aplicando para tal efeito, métodos de otimização às quantidades, variáveis de dimensionamento, parâmetros, entre outros. Matematicamente, a otimização consiste na procura de um ponto de uma função que pode ser um mínimo ou máximo da mesma, isto é, onde a derivada for nula.

Para utilizar a otimização é necessário ter vários elementos, entre eles as variáveis de decisão, a função objetivo e as restrições (que pode ou não ter), que no seu conjunto são a formulação geral do problema de otimização. As variáveis de decisão são os parâmetros suscetíveis de sofrer alteração no problema e que influenciam a solução ótima a que se pretende chegar. A função que se pretende melhorar, que depende das variáveis de decisão, é chamada de função objetivo pois diz respeito aos objetivos que podem ser deslocamentos, tensões, frequências de vibração ou até custos. Outro aspeto são as restrições da função objetivo, que matematicamente são equações, ou inequações, que limitam as variáveis de decisão ou o próprio resultado da função objetivo e, na prática, dizem respeito a limites (restrições) que se pretende colocar no estudo em causa para controlar a solução. Muitas vezes recorre-se a otimizações sem restrições porque dessa forma, os algoritmos de minimização podem deslocar-se (ao nível do passo e da direção de pesquisa) de uma forma livre, sem limitações. Num problema de otimização/identificação paramétrica a otimização sem restrições pode ser uma boa solução tendo em conta a necessidade de determinar o caminho por onde seguir e tendo controlo sempre no passo do processo.

Existem várias metodologias para resolução do processo de otimização, desde métodos de minimização de funções de uma variável até várias variáveis, com ou sem restrições. O foco deste trabalho é nas metodologias de várias variáveis sem restrições. A não utilização de restrições tem o propósito de evitar que estas tenham efeito na determinação da solução ótima. A formulação de um problema deste género é:

$$\min_x f(x) \quad (2)$$

A otimização sem restrições pode ser, de uma forma simples, dividida em dois grupos: os que usam as derivadas e os que não usam. Os primeiros tipos de métodos são melhores para casos em que a função não é contínua ou suave enquanto os que usam gradientes são melhores quando a função é contínua na sua primeira derivada. Quando se consegue calcular facilmente a informação de segunda ordem, o método de Newton, que pertence à outra tipologia acima referida, torna-se uma boa escolha (Haftka e Gürdal, 1992).

Os métodos que usam gradientes recorrem à inclinação da função para determinar a direção de pesquisa para onde o mínimo possa estar. O método mais simples é o método do Descendente Mais Inclinado que utiliza o gradiente negativo como direção para a minimização e foi proposto por Cauchy em 1947 (Simões, 2008). O método consiste em alterar iterativamente o ponto inicial até se atingir o ponto ótimo. Esta metodologia é simples e fácil de implementar embora surjam com ela alguns problemas de eficiência. O Método do Gradiente Conjugado consegue melhorar as características de convergência deste primeiro método. Este coincide com o método do descendente mais inclinado para o primeiro passo e depois a direção de pesquisa é alterada para uma conjugação de gradientes.

O método de segunda ordem mais antigo é o de Newton, que permite minimizar funções não lineares de várias variáveis (Haftka e Gürdal, 1992). Este método utiliza a matriz Hessiana das segundas derivadas, calculada diretamente, para obter a direção de pesquisa. A partir deste método surgiram outros que procuram utilizar a informação do gradiente para obter aproximações da matriz Hessiana ou a sua inversa, como é o caso dos métodos conhecidos por quasi-Newton ou de métrica variável.

Existem alguns métodos quasi-Newton mas neste trabalho vai focar-se a atenção em dois: o Davidson-Fletcher-Powell (DFP) e o Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) (Haftka e Gürdal, 1992). Estes métodos e a necessidade de aproximar a matriz Hessiana surgiram devido ao elevado esforço computacional que significa calcular o seu verdadeiro valor. Primeiramente surgiu o DFP que calcula a aproximação da matriz Hessiana baseando-se nas alterações do gradiente entre interações para que não seja necessário calcular a matriz exata em cada ponto. Além disso garante que a matriz seja positiva definida para que a direção de pesquisa seja sempre descendente (Nocedal e Wright, 2006). O BFGS (ver ANEXO) surgiu posteriormente e veio melhorar o método DFP com uma alteração: ao invés de aproximar a matriz Hessiana, aproxima a sua inversa. A vantagem disto é que para obter a direção de pesquisa pelo DFP é necessário resolver um sistema linear enquanto pelo BFGS apenas é preciso realizar multiplicação de matrizes ou vetores. Além disto é também um processo numericamente mais estável que o DFP (Nocedal e Wright, 2006).

### 3.4.1 Função objetivo

A função objetivo resulta da aplicação do Método dos Mínimos Quadrados. O MMQ é uma técnica simples de determinação de coeficientes ou parâmetros de forma a ajustar modelos a observações. No caso de um problema de identificação de parâmetros onde se têm os resultados experimentais e os resultados numéricos, é necessário ter uma noção da variação dos objetivos em relação às variáveis da decisão para que se possa determinar a variação dessas mesmas variáveis que minimiza a soma dos desvios quadrados. Essa noção é quantificada através de uma análise de sensibilidades (Canale e Chapra, 2010).

A análise de sensibilidades consiste no estudo da variação do valor de uma função com respeito às suas variáveis. Consiste em quantificar a variação do comportamento do sistema em termos de objetivos observáveis (por exemplo: deslocamentos, tensões) em relação às variáveis de decisão. É o equivalente à obtenção das derivadas dessas mesmas respostas (objetivos) de um sistema em relação às suas variáveis de decisão (Haftka e Gürdal, 1992). Para obter as sensibilidades, efetuou-se o seu cálculo através de diferenças finitas. As diferenças finitas são um processo mais simples de determinação das derivadas ao nível da implementação mas podem significar um esforço computacional considerável. Neste trabalho utilizam-se as diferenças finitas progressivas. Aqui, o termo  $x$  refere-se às variáveis de decisão e  $u$  aos objetivos.

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \quad (3)$$

A formulação da função objetivo, que se pretende minimizar no problema inverso, é expressa sob a forma de uma linearização em série de Taylor. Esta formulação junta o método dos mínimos quadrados com a informação obtida dos modelos numérico e experimental.

$$\min_{\Delta Y} f = \sum \left[ X_{EXP}(Y) - \left( X_{NUM}(Y + \Delta Y) + \sum \frac{dX}{dY} \Delta Y \right) \right]^2 \quad (4)$$

Nesta expressão,  $X$  refere-se aos objetivos,  $Y$  às variáveis de decisão e portanto,  $X_{EXP}$  são os objetivos medidos experimentalmente,  $X_{NUM}$  são os objetivos medidos numericamente para o valor da soma da variável de decisão com a variação da mesma,  $dX/dY$  são as sensibilidades dos objetivos em relação às variáveis de decisão e  $\Delta Y$  é a variação das variáveis de decisão.

### 3.4.2 Ferramenta Computacional e Algoritmos

O procedimento de otimização envolve um processo iterativo de elevado esforço de cálculo obrigando a recorrer a uma ferramenta computacional. Neste trabalho recorre-se ao Matlab que possui uma larga biblioteca de funções de otimização, incluindo uma em particular que diz respeito a esta aplicação prática.

Sendo necessário realizar uma minimização sem restrições, o Matlab permite a utilização da função *fminunc* que faz a chamada da função a minimizar e executa o processo (MathWorks, 2013). Esta função permite utilizar dois algoritmos: os métodos quasi-Newton ou os de região de confiança. Neste trabalho usa-se um algoritmo quasi-Newton.

No método quasi-Newton, o cálculo da matriz Hessiana é feita a partir da função de minimização pelo próprio programa, sendo que este permite controlar o valor desta e do gradiente, cada vez que se executa a função de minimização. Pode escolher-se entre três opções de atualização da matriz: BFGS, DFP e Descendente mais inclinado. Dentro das opções que se pode controlar destaca-se: o tipo de diferenças finitas que pode ser utilizado para calcular o gradiente (progressivas, centrais ou regressivas); o número máximo de avaliações da função que se pode fazer; o número máximo de iterações; a tolerância do valor da função e a tolerância das variáveis de decisão. Todas estas opções permitem melhorar e controlar o processo de otimização permitindo também definir quando termina no caso das tolerâncias, do número máximo de iterações e de avaliações da função.

## 4 APLICAÇÃO PRÁTICA

### 4.1 Introdução

Para demonstrar a aplicabilidade do trabalho estudado e ir de encontro aos objetivos desta dissertação escolheu-se um modelo físico que permitisse aplicar o problema inverso, tendo por base as observações obtidas em ensaios de outros estudos. O modelo que serve de base é o de uma laje mista de madeira-betão ensaiada e estudada por Dias et al. (2013). Este modelo tem um particular interesse devido à variabilidade das propriedades dos materiais constituintes.

### 4.2 Laje Mista Madeira-Betão

A laje mista que está na base deste exemplo de aplicação era constituída por 5 vigas de madeira, um conjunto de tábuas de solho que formam uma camada intermédia entre as vigas e o betão e uma lâmina de betão de pequena espessura. As dimensões da laje eram de 3.39 por 3.48 metros e era simplesmente apoiada junto das extremidades (vão entre apoios é de 3.30 metros) de forma a simular as condições de fronteira. As vigas de madeira estavam espaçadas de 0.75 m entre si.

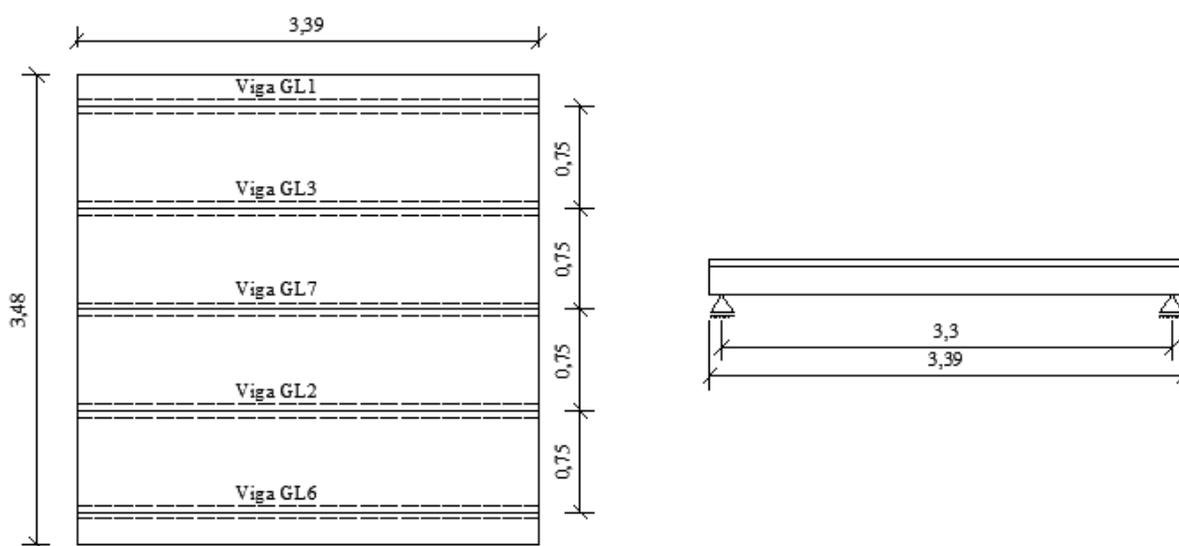


Figura 4.1 – Esquema em planta da geometria da estrutura e localização das vigas (esquerda);  
Vista em perfil da estrutura com distância entre apoios (direita)

As vigas de madeira tinham uma seção transversal de 0.200x0.100 metros e eram em madeira lamelada colada de Abeto (*Abies Alba*). A camada intermédia era composta por tábuas de Pinho com uma espessura de 0.02 m. As suas propriedades mecânicas foram determinadas com recurso a ensaios de determinação do módulo de elasticidade através de cargas estáticas seguiram as indicações da norma EN408 além da medição do peso e das suas dimensões. Para determinação do módulo de elasticidade, a norma prevê duas metodologias, que correspondem a determinar o módulo de elasticidade local (determinado sem esforço transversal) ou o global (determinado com esforço transversal). A diferença na determinação consiste no facto de o local medir a flecha relativa da viga a meio vão numa zona onde, teoricamente, não existe esforço transversal, enquanto no global se mede a deformação total. Neste trabalho utilizou-se o módulo de elasticidade o global. Os valores obtidos encontram-se no Quadro 4.1.

Quadro 4.1 – Propriedades das vigas de madeira lamelada colada

Posição da viga	Designação da viga	MOE Global $E_{m,g}$ (MPa)	Densidade $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
B1	GL1	12732.6	419.88
B2	GL3	12860.3	410.36
B3	GL7	13982.0	425.11
B4	GL2	13401.4	429.88
B5	GL6	12511.0	424.16

A lâmina de betão cobre toda a área da laje mista e tinha uma espessura de 0.05 metros. Para a camada de betão da viga mista foi utilizado um betão normal de classe C25/30, com um módulo de elasticidade médio de 30000 MPa e um valor de tensão média de resistência à compressão,  $f_{cm}$ , de 33 MPa. No betão apenas se determinou a resistência à compressão aos 28 dias, através de provetes cúbicos realizados aquando da análise experimental, sendo que as propriedades de rigidez foram calculadas a partir da correlação com as propriedades resistentes.

As ligações entre a viga e a lâmina de betão são realizadas através de ligadores metálicos que consistem em varões de aço A500NR de 8 mm de diâmetro, com 0.140 de comprimento e espaçados de 0.10 m entre si. Estes varões foram inseridos num orifício pré-furado numa profundidade de 0.08 metros na madeira e 0.04 metros na lâmina de betão. Os restantes 0.02 metros dizem respeito à camada intermédia de solho (Dias et al., 2013). As suas propriedades foram determinadas recorrendo a ensaios experimentais, nas vigas mistas que resultam do corte da laje mista após ensaios. Nestas vigas são aplicadas as mesmas cargas que na laje mista e através do escorregamento e de calibração com um modelo numérico, são determinadas as suas propriedades. Estas propriedades são depois aumentadas para ter em conta o espaçamento entre conectores no modelo experimental (10 cm) e numérico (16 cm devido à malha de elementos finitos). Nesse trabalho considerou-se também que as propriedades são as mesmas para as vigas

simétricas em relação à viga central (Dias et al., 2013). As propriedades são então as que se apresentam no Quadro 4.2.

Quadro 4.2 – Propriedades de rigidez das ligações mistas entre madeira e betão

Ligação na (s):	Rigidez (kN/m)
Vigas GL1 e GL6	2134.2043
Vigas GL2 e GL3	1496.5186
Vigas GL7	1922.0457

As cargas previstas foram calculadas tendo por base as normas em vigor, a EN 1991:2001 (CEN, 2010). As cargas que são utilizadas nas análises experimental e numérica são aproximadamente as cargas de serviço da estrutura, estimadas em 40% das cargas últimas como mostra o Quadro 4.3.

Quadro 4.3 – Cargas de serviço utilizadas na análise numérica e experimental

Localização (Nome da Viga)	Cargas de meio vão (kN)
GL1	31.8
GL3	49.9
GL7	57.5
GL2	44.6
GL6	32.1

A monitorização no ensaio experimental foi feita com utilização de transdutores de deslocamento e células de carga. Os transdutores de deslocamento foram colocados na interseção do meio vão e do quarto do vão com o eixo das vigas, em cada uma das vigas e ainda nas extremidades da laje de betão para medir o escorregamento entre o betão e as vigas de madeira. A carga é aplicada através de um atuador nas posições indicadas na Figura 4.2. (indicadas com a letra B). Na Figura 4.3 pode observar-se uma imagem da configuração do teste experimental.

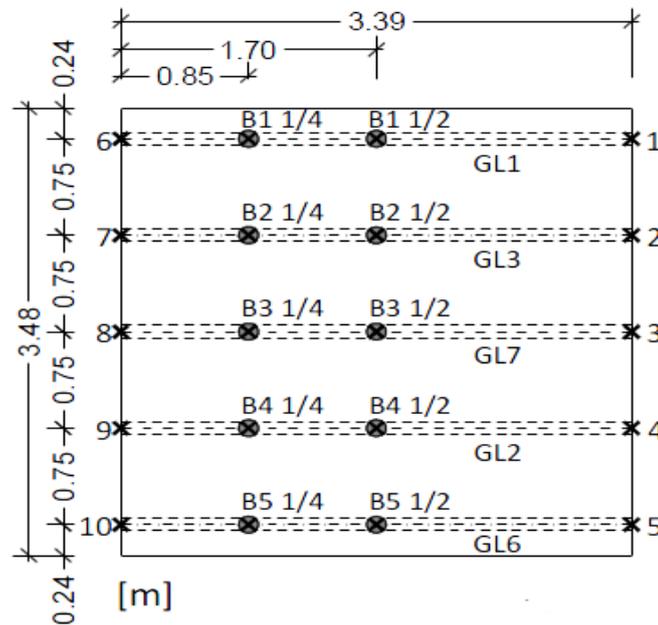


Figura 4.2 - Vista em planta da configuração do ensaio e pontos de medição (Adaptado de (Dias et al., 2013))



Figura 4.3 – Configuração do teste experimental

### 4.3 Modelo Numérico

Para simular a estrutura em estudo utilizou-se a modelação por elementos finitos, que foi usada anteriormente para simular este tipo de problemas tendo apresentado bons resultados (Dias et al., 2013). A modelação numérica com recurso a um programa de análise pelo MEF tem o objetivo de descrever e simular o comportamento da estrutura, para assim obter as respostas do sistema necessárias para o estudo. Foi utilizado o programa comercial SAP2000. Para este tipo de modelo foi necessário apenas os elementos barra e casca. O elemento barra serve para modelar as vigas enquanto o elemento casca tem o objetivo de simular a lâmina de betão da estrutura. Além destes elementos foi necessário recorrer a um outro tipo de elemento de ligação que permite fazer a conexão entre dois pontos para simular a conexão entre viga de madeira e lâmina de betão.

O elemento barra usa uma formulação viga-coluna, tridimensional, que inclui os efeitos de flexão biaxial, torção, deformação axial e deformação por corte biaxial e é modelado através de uma linha. O elemento casca tem seis graus de liberdade rotacionais e de translação em cada nó e que é utilizado para modelar comportamento de membrana, placa ou casca em estruturas planas ou tridimensionais. Utiliza uma formulação que pode ser de três ou quatro nós que combina o comportamento de membrana e placas à flexão e, para a rigidez, utiliza uma formulação que realiza integração numérica de 4 pontos (CSI, 2013). Os esforços internos, tensões e momentos são calculados para os seus pontos de integração 2-by-2 de Gauss que depois são extrapolados para os nós do elemento. O elemento não inclui os efeitos da deformação por corte, sendo a sua formulação originária da teoria *Kirshhoff* (CSI, 2013).

O modelo numérico de elementos finitos é composto por elementos barra a simular as vigas, elementos casca a simular a lâmina de betão e elementos ligação para as ligações madeira-betão. Para a camada intermédia de tábuas de madeira deixa-se apenas o espaço que esta ocupa pois considera-se que a contribuição estrutural destes elementos é muito reduzida. Como o programa assume sempre as ligações entre elementos pelo eixo dos mesmos, houve necessidade de espaçar as barras dos elementos casca para que o cálculo da inércia estivesse mais próximo daquilo que é na realidade. A discretização é apresentada na Figura 4.4.

O comportamento dos materiais é assumido como linear, homogéneo e isotrópico e é escolhida a formulação que negligencia a deformação por corte visto que a espessura da lâmina de betão é muito pequena comparada com o vão livre (Dias et al., 2013). A malha de elementos finitos foi escolhida de forma simples como sendo de largura 0.125 m na zona entre vigas e 0.125 nos banzos exteriores da lâmina de betão e com um comprimento de 0.165 m. Os elementos barra foram também discretizados segundo esta simplificação da distância entre ligadores.

Apenas dois tipos de carregamento foram considerados neste estudo: o peso próprio inserido aquando da definição das propriedades dos materiais e calculado pelo próprio programa tendo em conta as dimensões dos objetos e as cargas pontuais utilizadas no modelo experimental aplicadas nas interseções do meio vão com o eixo das vigas.

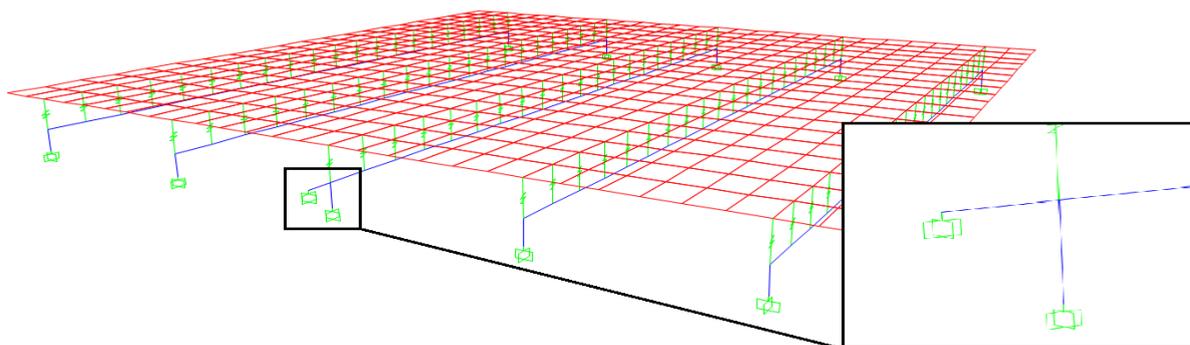


Figura 4.4 - Modelo numérico e pormenor da modelação do apoio duplo

## 5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

### 5.1 Introdução

Este capítulo apresenta os resultados da aplicação do problema inverso. Primeiramente é mostrada a formulação para o caso específico de estudo com os respectivos parâmetros do estudo e os dados utilizados. As especificidades da análise de sensibilidades são analisadas e os resultados da otimização paramétrica são apresentados e discutidos juntamente com algumas sensibilidades do processo inverso.

### 5.2 Problema Inverso de Identificação de Parâmetros

Os dados observáveis do modelo experimental correspondem, para cada caso de carga, a deslocamentos verticais em 10 pontos (interseção do eixo longitudinal de cada uma das 5 vigas com o meio vão e com o quarto de vão). Como foram estudados 5 casos de carga diferentes, totaliza 50 pontos de medição. Estes deslocamentos correspondem aos objetivos utilizados no processo numérico de otimização. As variáveis de decisão correspondem aos parâmetros que melhor conseguem descrever o sistema em termos de influência nos deslocamentos verticais. Para tal, tendo em conta o caso de estudo utilizado, utilizaram-se 9 parâmetros: o módulo de elasticidade do betão, o módulo de elasticidade de cada uma das 5 vigas (GL1, GL2, GL3, GL6 e GL7) e 3 valores de rigidez das ligações. Como existem 5 vigas, na realidade existem 5 ligações diferentes, mas por simplificação considera-se simetria das propriedades das ligações em relação à viga central. A formulação toma então o seguinte aspeto:

$$\min_{\Delta\alpha} \sum \left[ u_j^{exp}(\alpha_i) - \left( u_j^{num}(\alpha_i) + \sum \frac{du_j}{d\alpha_i} \Delta\alpha_i \right) \right]^2 \quad (5)$$

Em que os índices  $i$  e  $j$  correspondem ao parâmetro e ponto de observação dos deslocamentos verticais, respetivamente. Nesta expressão,  $u$  refere-se aos deslocamentos verticais e  $\alpha$  aos parâmetros.

#### 5.2.1 Análise de Sensibilidades

A parcela da expressão que contém as derivadas são as sensibilidades dos deslocamentos face à variação de parâmetros. Estas sensibilidades são calculadas através de uma análise numérica

com uma perturbação de 10% nas propriedades calculando depois recorrendo a diferenças finitas progressivas. Dois aspetos importantes na análise de sensibilidades são a verificação da linearidade das mesmas e a normalização. Verifica-se se as sensibilidades variam linearmente com a alteração dos parâmetros. Um exemplo desta análise está exposta no Quadro 5.1 em termos de percentagem de variação:

Quadro 5.1 – Resultados da verificação da variação linear das sensibilidades

Variação dos parâmetros			Percentagem de variação dos deslocamentos verticais				
-	30	GPa	GL1	GL3	GL7	GL2	GL6
5%	31.5	GPa	0.53%	-1.06%	-1.80%	-1.05%	0.55%
10%	33	GPa	0.95%	-2.11%	-3.56%	-2.08%	1.00%

Como se está a analisar a sensibilidade dos deslocamentos verticais em relação ao módulo de elasticidade do betão, e dada a importância que tem a lâmina de betão no comportamento estrutural desta estrutura mista madeira-betão, seria de esperar que com o aumento da rigidez da lâmina os deslocamentos verticais diminuíssem. Na verdade, como mostra estes resultados, isso só acontece para os pontos das 3 vigas interiores (correspondendo a GL3, GL7 e GL2), enquanto nas extremidades existe um aumento de deslocamento. A explicação para este fenómeno pode residir na distribuição de cargas transversal que ao se alterar, passa a conduzir a existir uma menor solicitação das vigas de extremidade. Apesar deste fenómeno, verifica-se linearidade na sensibilidade.

Num processo numérico deste género, podem-se originar perturbações no processo variáveis de decisão com grandezas diferentes. Para mitigar esse fenómeno, normaliza-se as variáveis de decisão. Posteriormente ao processo numérico de otimização, é feita o processo invertido da normalização.

### 5.2.2 Otimização sem Restrições

Com recurso à ferramenta computacional Matlab, programou-se uma função que determinasse o mínimo da função da formulação de mínimos quadrados. Esta função é minimizada recorrendo a um dos algoritmos de otimização sem restrições intrínsecos do programa. O algoritmo é o quasi-Newton BFGS (ver ANEXO) (MathWorks, 2013) e são escolhidas algumas opções: a tolerância do valor da função, ou seja, a soma do quadrado da diferença para o caso desta formulação, foi tomada como  $1 \times 10^{-6}$  (valor predefinido) que é 100 vezes inferior ao valor da soma dos quadrados das diferenças inicial; a tolerância das variáveis de decisão,  $1 \times 10^{-6}$  (valor predefinido) que não tem interesse neste caso particular pois é esperado que o valor

destas seja bastante superior; o máximo número de iterações, 2000, com o objetivo de não tornar muito longo o cálculo.

Para valor inicial da estimativa dos parâmetros utilizaram-se os que foram calibrados experimentalmente tendo por base o trabalho experimental e numérico que serve de base ao estudo de caso utilizado nesta tese, conforme apresentado no Quadro 5.2.

Quadro 5.2 – Estimativa inicial dos parâmetros

Parâmetro		Valor (kPa ou kN/m)
Módulo Elasticidade do Betão	$E_c$	30000000
Módulo Elasticidade da Viga GL1	$E_{GL1}$	12096008
Módulo Elasticidade da Viga GL3	$E_{GL3}$	12217290
Módulo Elasticidade da Viga GL7	$E_{GL7}$	13282917
Módulo Elasticidade da Viga GL2	$E_{GL2}$	12731331
Módulo Elasticidade da Viga GL6	$E_{GL6}$	11885479
Rigidez das Ligações nas Vigas GL1 e GL6	$K_{L1-6}$	2134.2043
Rigidez das Ligações nas Vigas GL3 e GL2	$K_{L3-2}$	1496.5186
Rigidez da Ligação na Viga GL7	$K_{L7}$	1922.0457

No subcapítulo seguinte, referente aos Resultados é apresentado um estudo de sensibilidade da variação dos parâmetros ao valor dos dados da estimativa inicial para os parâmetros.

### 5.2.3 Resultados para a Otimização sem Restrições

A minimização da função de mínimos quadrados é feita para tentar chegar a um resultado para os parâmetros. O tamanho do passo entre iterações é controlado para que todo o processo numérico do problema inverso convirja de forma mais rápida. Num estudo de identificação paramétrica baseado em respostas estáticas dum sistema (M. Banan et al., 1994), os autores definiram um critério de identificação do número de ponto mínimo, necessário para que os resultados da identificação paramétrica sejam fiáveis. O autor concluiu que o número de observações deve ser sempre superior ao número de variáveis que se pretendem determinar. Além disso, verificou que à medida que a quantidade de pontos de medição (observações) aumenta para além do mínimo número de pontos, a confiança nos parâmetros também cresce. Ainda assim, é apresentado um estudo feito no âmbito deste trabalho sobre a sensibilidade da determinação de parâmetros à quantidade de parâmetros introduzidos. Realizou-se o problema inverso, além dos 50 pontos de medição, para a situação em que se tem apenas um caso de carga, correspondendo a 10 pontos de medição. Os resultados apresentam-se no Quadro 5.3.

Quadro 5.3 – Variação dos parâmetros na 1ª Iteração para diferentes quantidades de dados

Parâmetro		1 Caso de carga	5 Casos de carga	Sensibilidade (GPa/ponto de medição ou kN/m/ponto de medição)
		10 Pontos de medição	50 Pontos de medição	
Módulo Elasticidade do Betão	GPa	-4.551	-5.500	-0.0237
Módulo Elasticidade da Viga GL1	GPa	0.880	0.435	-0.0111
Módulo Elasticidade da Viga GL3	GPa	0.596	0.626	0.0008
Módulo Elasticidade da Viga GL7	GPa	0.346	0.687	0.0085
Módulo Elasticidade da Viga GL2	GPa	0.624	1.354	0.0183
Módulo Elasticidade da Viga GL6	GPa	0.928	0.408	-0.0130
Rigidez das Ligações GL1 e GL6	kN/m	107.4807	116.8158	0.2334
Rigidez das Ligações GL3 e GL2	kN/m	39.7805	72.0772	0.8074
Rigidez da Ligação na Viga GL7	kN/m	13.2620	33.4778	0.5054

A sensibilidade da variação dos parâmetros ao número de pontos de medição é apresentada na última coluna. É apresentada sob a forma da quantidade de variação do parâmetro por cada ponto de medição adicionado. Na aplicação prática em estudo, a adição de mais pontos de medição corresponde a grupos de 10 pontos de cada vez resultantes de cada caso de carga (5 a meio vão e 5 a quarto de vão).

Seguidamente apresenta-se o resultado do estudo da sensibilidade da variação de parâmetros aos dados de entrada. Para efetuar o estudo, aumentou-se a estimativa inicial dos parâmetros em 10% e resolveu-se uma iteração do processo inverso, obtendo-se os resultados apresentados no Quadro 5.4 indicam a variação que 1 unidade alterada no parâmetro inicial produz no valor de atualização dos parâmetros.

Quadro 5.4 – Sensibilidades da variação dos parâmetros à estimativa inicial dos parâmetros

Sensibilidade (GPa/MPa no caso dos módulos de elasticidade ou (kN/m)/(kN/m) no caso da rigidez das ligações)
-1.833E-04
1.618E-05
2.305E-05
2.327E-05
4.787E-05

1.545E-05
5.474E-02
4.816E-02
1.742E-02

A análise destas sensibilidades mostra que os parâmetros de rigidez das ligações variam mais em função do valor da estimativa inicial. Estes parâmetros são muito sensíveis ao seu valor inicial, significando que uma pequena perturbação nos dados de entrada provoca uma maior perturbação nos dados de saída.

Após o estudo das sensibilidades das variações de parâmetros, resolve-se o problema inverso (para os 50 pontos de medição) iterativamente, pois após o final de cada variação de parâmetros, há que fazer nova análise de sensibilidades e resolver a próxima iteração, sucessivamente, até que não se consiga melhorar o valor da função (diminuir a soma do quadrado das diferenças). Apresentam-se no Quadro 5.5 os resultados da atualização de parâmetros.

Quadro 5.5 – Resultado do processo de identificação paramétrica para 3 iterações

Parâmetro	Parâmetro Inicial	Parâmetro Iteração nº1	Parâmetro Iteração nº 2	Parâmetro Iteração nº 3
M. Elasticidade Betão	30000000	24500381	20866836	17693545
M. Elast. Viga GL1	12096008	12530833	13079069	13449527
M. Elast. Viga GL3	12217290	12843172	13563573	14074905
M. Elast. Viga GL7	13282917	13969864	15267574	16104889
M. Elast. Viga GL2	12731331	14085754	15156312	15891392
M. Elast. Viga GL6	11885479	12293639	12927692	13405446
Rigidez Ligadores 1 e 6	2027.4941	2251.0201	2205.5273	2186.8052
Rigidez Ligadores 2 e 3	1421.6927	1568.5958	1488.5187	1445.6432
Rigidez Ligadores 7	1825.9434	1955.5235	1767.1408	1658.5518

No final destas 3 iterações, os valores da função, isto é, a soma do quadrado das diferenças, são apresentados no Quadro 5.6.

Quadro 5.6 – Valores da função

	Valor da função
Inicial	1.62E-04

Após 1ª Iteração	1.33E-04
Após 2ª Iteração	1.07E-04
Após 3ª Iteração	8.47E-05

O valor da função está efetivamente a diminuir mas os valores dos parâmetros que se obtém são absurdos pois já variaram demasiado após 3 iterações. Uma possibilidade para este resultado pode estar nas diferenças entre resultados numéricos e resultados experimentais. Pretende-se minimizar estas diferenças, mas se elas forem muito significativas o processo numérico sem restrições vai continuar mesmo que os valores dos parâmetros percam o seu sentido. Para demonstrar essas diferenças, apresenta-se aqui um gráfico com os valores de deslocamento vertical, obtidos numericamente e experimentalmente, a meio vão na Figura 5.1.

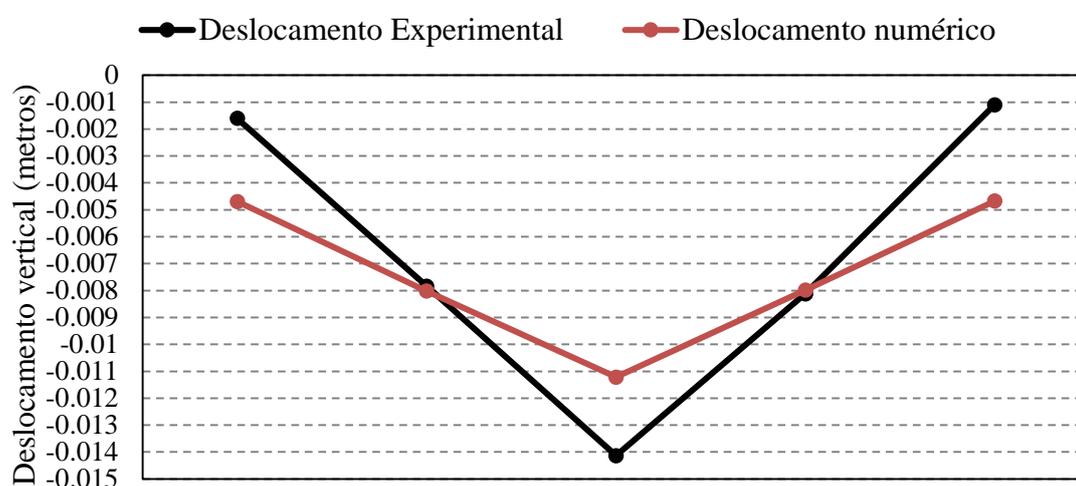


Figura 5.1 – Deslocamento a meio vão para o caso de carga GL7

Nalguns pontos de medição a distância entre resultado numérico e experimental pode atingir 4 milímetros, sendo este um valor bastante significativo. Um outro fenómeno que importa analisar é o que ocorre para cargas muito descentradas em relação ao eixo longitudinal de simetria, estas produzem um levantamento no lado oposto da laje.

A fim de melhorar a solução obtida sem restrições devem impor-se limites de variação aos parâmetros. Desta forma, passa-se a ter um processo de otimização com restrições.

#### 5.2.4 Otimização com Restrições

Numa tentativa de melhorar a solução obtida pela otimização sem restrições foram impostos limites na variação dos parâmetros. O limite utilizado foi de 15%, significando que nenhum dos

valores dos parâmetros poderá, após atualização do mesmo, ser superior ou inferior a mais 15% do valor inicial. Considera-se que este é um valor realístico para máxima variação do parâmetro.

Para realizar a otimização recorre-se mais uma vez à ferramenta computacional para efetuar o cálculo. O esquema geral do procedimento é semelhante, diferindo apenas no método utilizado para minimizar a função. Para minimização restringida utilizou-se um algoritmo de ponto interior que permite eficazmente chegar a uma solução (MathWorks, 2013). Este método de ponto interior basicamente utiliza os pontos interiores da região admissível para a solução ótima e utiliza restrições sob a forma de igualdades ao invés de desigualdades (ver ANEXO).

Quadro 5.7 - Resultados do processo de identificação paramétrica (com restrições na variação dos parâmetros)

Parâmetro	Parâmetro Inicial	Parâmetro Iteração nº1	Parâmetro Iteração nº 2	Parâmetro Iteração nº3
M. Elasticidade Betão (kPa)	30000000	25586152	25512845	25502676
M. Elast. Viga GL1 (kPa)	12096008	12623410	12623296	11355769
M. Elast. Viga GL3 (kPa)	12217290	12768086	12769530	14020980
M. Elast. Viga GL7 (kPa)	13282917	13973692	15198174	15261070
M. Elast. Viga GL2 (kPa)	12731331	14471599	14527248	14630063
M. Elast. Viga GL6 (kPa)	11885479	11876522	12156120	11702332
Rigidez Ligadores 1 e 6 (kN/m)	2027.4941	2139.9102	1873.3788	1942.6058
Rigidez Ligadores 2 e 3 (kN/m)	1421.6927	1504.9071	1655.0580	1716.9304
Rigidez Ligadores 7 (kN/m)	1825.9434	1674.4514	1657.7979	1685.5200

A melhoria (minimização) do valor da função começa ser menor, pelo que se terminou o processo. O resultado em termos de valor da função é apresentado no Quadro 5.8.

Quadro 5.8 – Valor da função no decorrer do processo de otimização com restrições

Iteração	Valor
Inicial	1.62E-04
Após 1ª Iteração	1.39E-04
Após 2ª Iteração	1.36E-04
Após 3ª Iteração	1.34E-04

O valor da função estava a convergir e optou-se pela paragem do processo obtendo a solução apresentada na coluna da 3ª iteração do Quadro 5.7. É possível obter uma solução, uma vez que nenhum dos valores atingiu o limite de variação de 15%.

## 6 ESTUDO DO ERRO E DAS INCERTEZAS

O resultado da abordagem sem restrições na minimização da função objetivo levou à conclusão que os valores medidos experimentalmente e os resultados numéricos tinham diferenças consideráveis provocadas por erros consideráveis entre as duas análises. O objetivo é avaliar e quantificar esses erros na tentativa de determinar o que provoca tais diferenças. De uma reflexão sobre a modelação numérica e testes experimentais resultam as seguintes origens para os erros:

- Do processo de medição e configuração do ensaio experimental;
- Das propriedades dos materiais e variabilidade destas
- Provenientes de outros deslocamentos e deformações no ensaio experimental que diferem do modelo numérico;
- Devido a hipóteses e simplificações tomadas na modelação;
- Oriundos das considerações nas condições de fronteira e ligações internas.

As sensibilidades dos parâmetros ao erro foram estudadas por introdução de milímetros adicionais nas medições experimentais. Determinou-se, para as fontes de erro possíveis, quanto varia o deslocamento vertical em função desse erro. Existe uma influência nos deslocamentos significativa por parte destes erros/imprecisões quando este chega à ordem do milímetro. Antes de proceder à exposição do estudo de cada erro, efetua-se uma análise simplificada da influência destas incertezas no processo inverso de identificação dos parâmetros.

### 6.1 Influência do erro no processo de identificação

Utiliza-se um procedimento simplificado para determinar a influência dos erros. O que se pretende comparar é a influência de uma décima de milímetro ou um milímetro de erro. Este erro pode ser representativo de falhas nas medições experimentais que conseguem atingir tanto a décima de um milímetro como o milímetro. A consideração deste erro de forma global na estrutura pode ser exemplificado pela variabilidade dos materiais, principalmente a madeira. Para obter a sensibilidade ao erro, introduz-se o valor somado em todos os pontos de medição

experimentais e resolve-se o processo de otimização a fim de obter o resultado da primeira iteração. Esses resultados são apresentados no Quadro 6.1 e Quadro 6.2.

Quadro 6.1 – Resultado da análise de sensibilidades das variações de parâmetro em relação ao erro em termos de variação da 1ª iteração (décima de milímetro)

Parâmetro	Sem alteração	+0.1 mm	Sensibilidade (GPa/mm ou kN/mm)	-0.1 mm	Sensibilidade (GPa/mm ou kN/mm)
$E_c$	-5.500	-5.416	0.840	-5.574	-0.741
$E_{GL1}$	0.435	0.410	-0.249	0.461	0.258
$E_{GL3}$	0.626	0.591	-0.350	0.658	0.324
$E_{GL7}$	0.687	0.647	-0.402	0.730	0.431
$E_{GL2}$	1.354	1.297	-0.576	1.409	0.546
$E_{GL6}$	0.408	0.397	-0.113	0.424	0.160
$K_{L1-6}$	116.8158	108.6737	-81.421	124.2706	74.548
$K_{L3-2}$	72.0772	67.0649	-50.124	76.8657	47.885
$K_{L7}$	33.4778	30.4680	-30.098	36.6003	31.225

Quadro 6.2 - Resultado da análise de sensibilidades das variações de parâmetro em relação ao erro em termos de variação da 1ª iteração (milímetro)

Parâmetro	Sem alteração	+1 mm	Sensibilidade (GPa/mm ou kN/mm)	-1 mm	Sensibilidade (GPa/mm ou kN/mm)
$E_c$	-5.500	-4.743	7.565	-6.157	-6.573
$E_{GL1}$	0.435	0.153	-2.816	-0.127	-5.617
$E_{GL3}$	0.626	0.310	-3.161	1.411	7.847
$E_{GL7}$	0.687	0.216	-4.711	0.365	-3.217
$E_{GL2}$	1.354	0.833	-5.213	1.853	4.989
$E_{GL6}$	0.408	0.201	-2.067	0.099	-3.094
$K_{L1-6}$	116.8158	51.6972	-651.186	466.7701	3499.544
$K_{L3-2}$	72.0772	27.9711	-441.061	240.1745	1680.973
$K_{L7}$	33.4778	2.2903	-311.875	99.8541	663.763

Os resultados das sensibilidades dos parâmetros apresentam-se em GPa de variação por milímetro de erro para o caso dos módulos de elasticidade dos materiais e em kN de variação por milímetro de erro para o caso da rigidez das ligações. Consegue verificar-se a sensibilidade da variação de parâmetros quando se observam erros globais de uma décima de milímetro, comparativamente a erros globais de 1 mm. No primeiro caso a sensibilidade é relativamente pequena, enquanto no segundo já tem algum significado.

Outra abordagem feita neste estudo foi a de avaliação do valor da função objetivo, isto é, a soma do quadrado das diferenças, considerando a situação hipotética de se ter um erro de 1 mm em algumas situações: erro em todas as posições de medição da viga GL1, viga GL2, GL3, GL6 e GL7 e ainda, a situação em que se introduz o erro de 1mm na viga GL1 e na GL6, simultaneamente. Os resultados da variação do valor da função são os apresentados no Quadro 6.3.

Quadro 6.3 – Resultado do cálculo do valor da função para várias situações de erro

Localização do erro introduzido	Valor da função	Variação
Inicial	1.62E-04	-
GL1	1.57E-04	-3.7%
GL3	1.66E-04	+2.4%
GL7	1.66E-04	+2.0%
GL2	1.61E-04	-0.7%
GL6	1.50E-04	-8.0%
GL1 e GL6	1.36E-04	-19.7%

A primeira iteração para atualização dos parâmetros do modelo, apresentado no Quadro 5.5 corresponde a um valor da função de soma dos quadrados das diferenças de 1.33E-04. Como se observa pelo quadro acima, esse valor é também obtido se, ao invés de termos uma iteração, tivermos um erro de 1 mm nos pontos de medição correspondentes às vigas GL1 e GL6.

## 6.2 Processo de Medição e Configuração Experimental

Na configuração de um ensaio são necessários vários equipamentos que permitam medir quantidades físicas, nomeadamente os deslocamentos em vários pontos. No caso prático abordado neste trabalho são utilizados transdutores de deslocamento. Os erros provenientes das medições e podem ser devido a:

- Falta de verticalidade na montagem do equipamento (na medição de deslocamentos verticais), isto é, eixo vertical do equipamento não corresponde com direção do deslocamento na perfeição;
- Superfície de contato rugosa da placa do dispositivo com a estrutura;
- Efeito da temperatura na medição de extensão;

- Efeito da não-linearidade (transdutor de deslocamento);
- Estabilidade do suporte;
- Problema de calibração ou mau funcionamento do aparelho.

Destes efeitos, alguns são difíceis de quantificar. O efeito da rugosidade na superfície da estrutura envolve um estudo muito minucioso não abordado aqui. A falta de verticalidade é algo que deve ser verificado durante os testes experimentais, tal como a estabilidade do suporte e que não é quantificável no âmbito deste trabalho. As quantidades possíveis de calcular referem-se aos transdutores de deslocamento que foram os dispositivos utilizados no âmbito deste trabalho.

Os transdutores de deslocamento (Figura 6.1) são aparelhos que, através da medição da extensão, conseguem obter deslocamentos, tornando-se assim úteis para vários tipos de avaliação, como é o exemplo da determinação de deslocamentos verticais, largura de fendas ou até controlo de maquinaria. Estes equipamentos são utilizados neste caso de estudo para a medição dos deslocamentos verticais, sendo montados nos pontos correspondentes numa posição vertical (eixo do dispositivo fica alinhado com a direção de deformação).

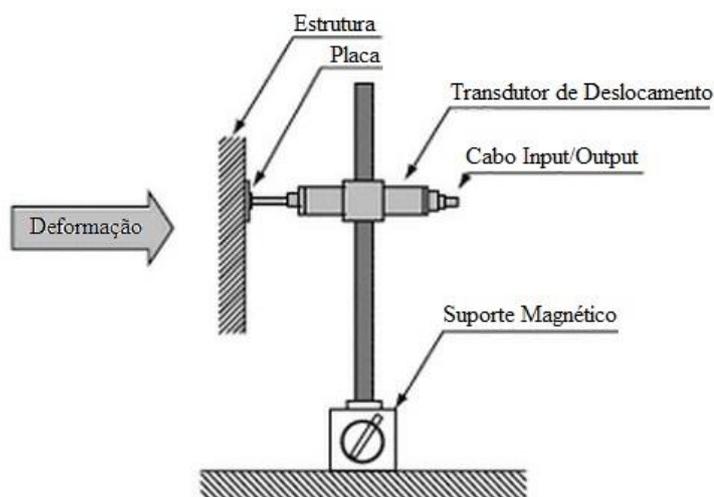


Figura 6.1 - Esquema de um transdutor de deslocamento (Adaptado de [www.tml.jp](http://www.tml.jp))

O dispositivo de medição consiste num suporte magnético e num transdutor de deslocamento que mede a extensão derivada da deformação/deslocamento passando os dados através de um cabo. Este converte as extensões para deslocamentos através de um coeficiente de calibração

que relaciona a capacidade nominal com o valor nominal de saída (Rated Output, RO). O valor nominal de saída (RO) é o máximo deslocamento e a máxima extensão que o equipamento consegue medir. Na análise experimental realizada foram utilizados dispositivos com uma capacidade nominal de 25 mm e um valor nominal de  $12500 \times 10^{-6}$ . O coeficiente de calibração deste equipamento é de  $0,002 \text{ mm} / \times 10^{-6}$  e tem uma sensibilidade de  $500 \times 10^{-6}$ .

Um dos aspetos destes equipamentos é a não linearidade entre a curva de calibração, que une o ponto de origem e o ponto de RO relativo à carga esperada, e a curva de carga-extensão real. Desta forma, existe um erro que pode ser no máximo de 0,1% do RO do equipamento.

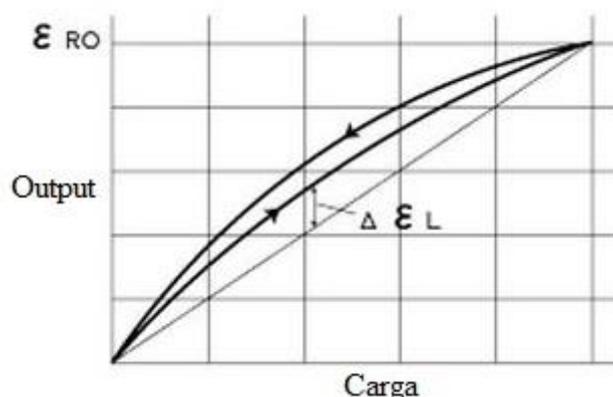


Figura 6.2 – Não linearidade dos equipamentos (Adaptado de [www.tml.jp](http://www.tml.jp))

Dentro destas fontes de erro, apenas as duas últimas se pode utilizar para quantificar o erro. Através da ficha técnica do equipamento obtém-se que a variabilidade da resposta do dispositivo em função de cada um destes aspetos. Relativamente à temperatura é espetável um erro de 0.008% do RO por cada grau Celsius enquanto devido à não linearidade, o afastamento máximo da curva pode ser de 0.1% do RO. Isto significa que neste tipo de dispositivo e a título de exemplo, que teria de haver uma variação de 50°C para existir um erro de 0.1 mm e que devido à não linearidade pode existir, no máximo, um erro de 0.025 mm.

### 6.3 Propriedades dos Materiais

Os materiais utilizados nas estruturas apresentam variabilidade das propriedades e características. Esta variabilidade apresenta-se como um problema quer a nível experimental quer numérico, pois aumenta a complexidade da simulação dos materiais, e dificulta a análise e tratamento de resultados a nível experimental.

A madeira é um material proveniente de árvores, sendo constituída principalmente por celulose, lenhina e sais minerais (Dias, 2012). A madeira apresenta uma anisotropia, dado que as propriedades dependem principalmente da orientação das células que constituem o material e também da estação de crescimento da árvore. Das suas propriedades a mais influente relativamente a deslocamentos, para vigas sujeitas a flexão, é o módulo de elasticidade longitudinal da peça.

O *Wood Handbook* (Forest Products Laboratory, 2010) apresenta os resultados de um estudo feito em madeira limpa (sem defeitos) para determinação de coeficientes de variação. O coeficiente de variação médio para madeira limpa e relativo ao módulo de elasticidade longitudinal é de 22% (Forest Products Laboratory, 2010). A análise é realizada para vários tipos de madeira, provenientes de zonas geográficas diferentes, e portanto este valor é apenas representativo do valor médio de variação. Assim sendo, é possível quantificar a influência da variação nos deslocamentos verticais do caso de estudo. Para tal, variou-se numericamente esta propriedade de 10, 15, 20, 25 e 30% de uma só viga e de todas as 5 vigas integrantes da laje mista para obter uma análise de sensibilidade e uma estimativa dos limites de variação. Na aplicação prática deste trabalho foi utilizada madeira lamelada colada que é um produto que pelas suas características apresenta uma menor variabilidade das propriedades mecânicas.

No betão pode existir alguma variabilidade das propriedades. Para este trabalho, o interesse foca-se no módulo de elasticidade, que de acordo com a EN1992-1-1:2010 (CEN, 2010), se calcula através da seguinte expressão:

$$E_{cm} = 22 \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.3} \quad (6)$$

Em que  $f_{cm}$  é o valor médio da tensão de rotura do betão à compressão. Da análise de sensibilidades realizada no âmbito deste trabalho, verifica-se que a rigidez do betão é o parâmetro (de todos os que estão sob análise) que mais influencia a resposta em termos de deslocamento vertical. O valor introduzido no programa de análise numérica, os 30 GPa, foram obtidos diretamente do quadro 3.1 da EN 1992:2010 (CEN, 2010). Um valor razoável para a variação expectável deste parâmetro será de 15% tendo em conta os resultados obtidos no ensaio em cubos de betão. Na Figura 6.3 mostra-se um gráfico da equação (15) que permite visualizar a variação do módulo de elasticidade em função do valor médio da tensão de rotura à compressão.

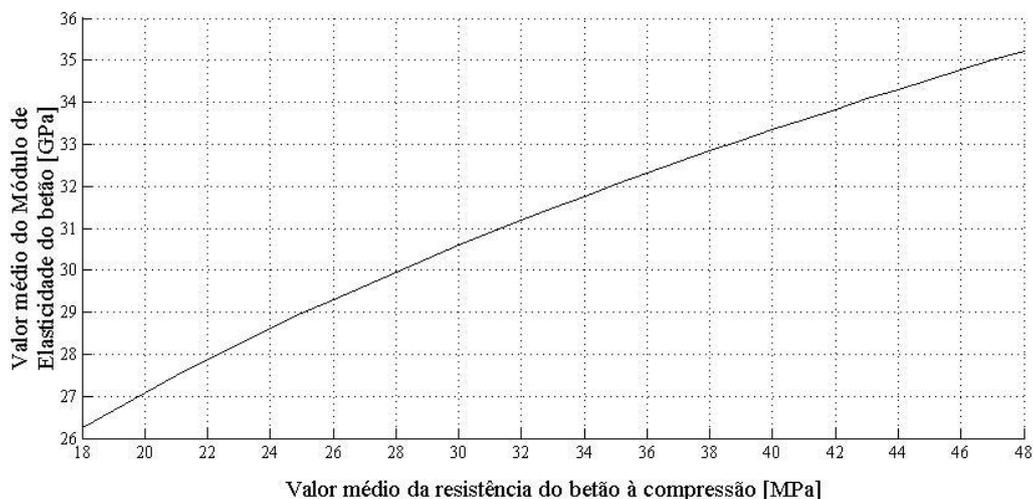


Figura 6.3 – Gráfico de variação do valor médio do módulo de elasticidade do betão em função do valor médio da resistência à compressão de acordo com a EN1992-1-1:2010

Apresenta-se os gráficos do estudo da influência da variabilidade do módulo de elasticidade no deslocamento vertical, na Figura 6.4 e na Figura 6.5.

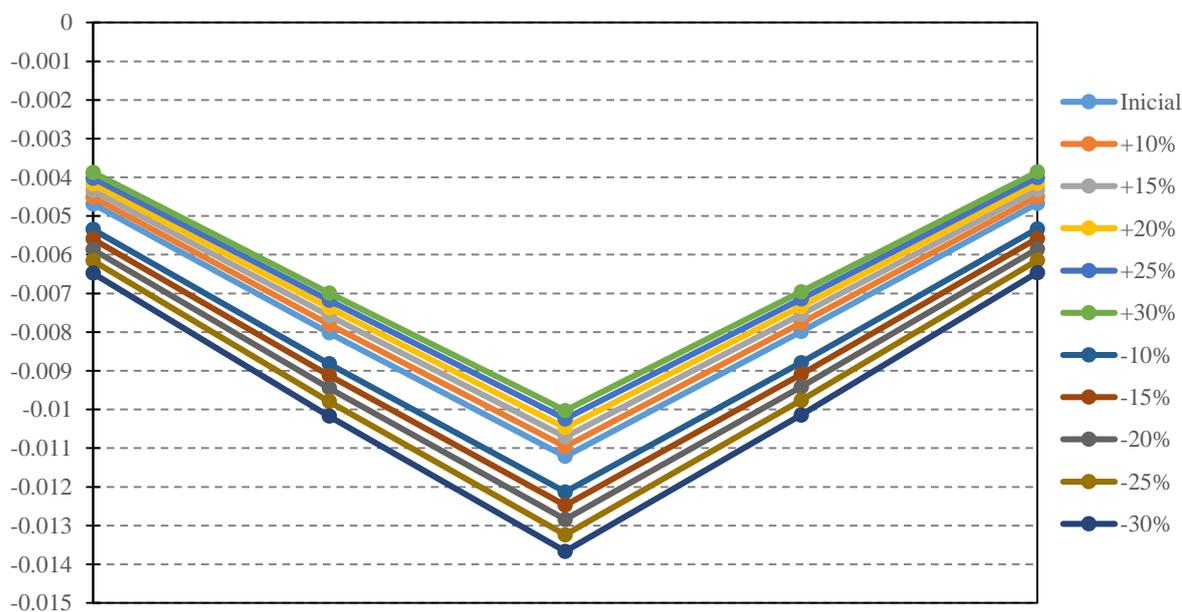


Figura 6.4 - Variação do deslocamento vertical transversal da laje na posição de meio vão, com a variação do módulo de elasticidade das vigas de madeira

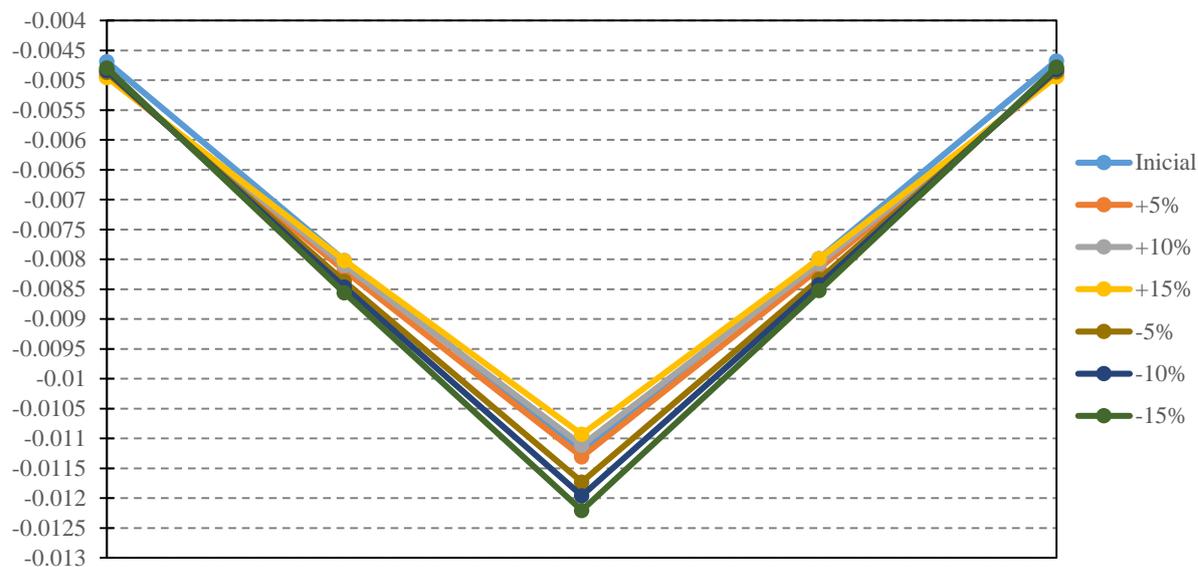


Figura 6.5 - Variação do deslocamento vertical transversal da laje na posição de meio vão, com a variação do módulo de elasticidade do betão

Por análise dos gráficos acima apresentados, podem obter-se os valores de quanto varia o deslocamento vertical, devido à alteração dos módulos de elasticidade dos materiais. Foi feita uma análise de variação global (alteração em todas as vigas ao mesmo tempo) para 10, 15, 20, 25 e 30% de variação (somado e subtraído) no caso da madeira, com base na indicação de variação média acima referida de 22%. No caso do betão, espera-se que o módulo de elasticidade a variação foi estudada dos 5 aos 15% (com intervalos de 5%) tendo em conta a informação dos ensaios experimentais realizados no âmbito do trabalho de base do caso de estudo, e a fórmula de cálculo do módulo de elasticidade médio fornecida no regulamento de betão, função do valor médio de resistência à compressão do betão. A distância vertical (no eixo das ordenadas) entre pontos representa a variação de deslocamento devido à variação da propriedade. Na madeira, verifica-se um intervalo de 3,5 milímetros, com referência ao ponto central do gráfico. Este valor reflete a importância deste aspeto num estudo deste âmbito mesmo tendo em conta a simplificação da análise.

No caso do betão, os limites superiores e inferiores definem um intervalo de variação de 1,2/1,3 milímetros. No gráfico verifica-se que nas extremidades há uma menor variação e até uma discrepância lógica. Acontece que para reduções baixas (5, 10%) do módulo de elasticidade do betão, o deslocamento vertical nas extremidades não aumenta como seria de esperar, mas diminui. A razão deste efeito pode dever-se à redistribuição de cargas na estrutura que leva a solicitações nas vigas, diferentes das que estavam antes de se efetuar a alteração.

## 6.4 Outros Deslocamentos e Deformações

Num sistema complexo, existe um variado conjunto de deslocamentos e deformações que definem a resposta total do sistema. A resposta que é utilizada para a análise numérica deste trabalho e também na análise estrutural e dimensionamento é apenas a que corresponde aos deslocamentos verticais. Estes deslocamentos são influenciados por um variado número de aspetos, como é explicado neste subcapítulo de análise de erros, e pelas propriedades dos materiais que constituem o sistema. Os deslocamentos que aqui se tratam são, o *uplift* nas extremidades da laje, o escorregamento das vigas em relação à camada de betão e as deformações provocadas, por exemplo, por esmagamento localizado do material.

No ensaio experimental foram medidos os deslocamentos de *uplift* e também o escorregamento. Na Figura 6.6 mostra-se a configuração deformada e indeformada bem como uma representação dos deslocamentos envolvidos na deformação de uma viga mista.

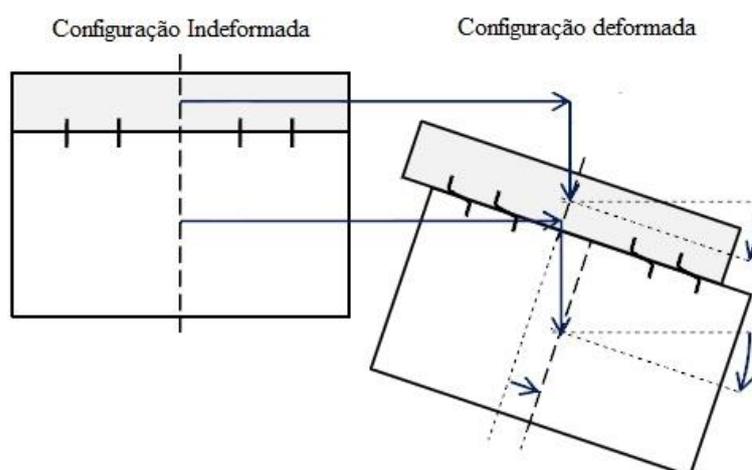


Figura 6.6 - Configuração deformada e indeformada (Adaptado de (Fournely et al., 2011))

Apresentam-se no Quadro 6.4 os resultados obtidos da medição experimental e da determinação da deformação nos elementos *Link*, do programa de elementos finitos, na direção paralela ao eixo das vigas de madeira, isto é, a direção da deformação nos ligadores.

Quadro 6.4 – Valores de escorregamento experimental e numérico

Escorregamento				
Experimental (mm)				
V1-GL1	V2-GL3	V3-GL7	V4-GL2	V5-GL6
-0.140	-0.798	-1.382	-0.833	-0.118

Numérico (mm)				
GL1	GL3	GL7	GL2	GL6
-0.566	-1.019	-1.284	-1.017	-0.564

Outro deslocamento medido experimentalmente foi o *uplift* na zona de extremidade (cantos) da lâmina de betão. O *uplift* é o deslocamento que se observa no sentido contrário à direção de aplicação da carga e do peso próprio, isto é, sentido ascendente. Esta translação foi medida com transdutores de deslocamento colocados em duas extremidades do quadrado formado pela lâmina de betão. Esta medição permite efetuar uma comparação com os resultados numéricos e estudar as diferenças entre numérico e experimental relativamente a este aspeto como se apresenta no Quadro 6.5.

Quadro 6.5 – Comparação dos resultados numéricos e experimentais no uplift

Uplift (mm)		
Caso de carga	Numérico	Experimental
Carga na viga GL1	0.111	-
	0.111	-
	-1.688	-1.3282
	-1.688	-1.954
Carga na viga GL2	0.542	-
	0.542	-
	0.335	1.7
	0.335	0.46
Carga na viga GL3	0.339	-
	0.339	-
	0.565	0.318
	0.565	0.058
Carga na viga GL6	-1.72	-
	-1.72	-
	0.114	0.15
	0.114	0.17
Carga na viga GL7	0.385	-
	0.385	-
	0.391	-
	0.391	-

O ponto de obtenção do resultado numérico é o ponto correspondente à extremidade, enquanto no ensaio experimental o dispositivo de medição foi colocado 5 cm para o interior no sentido perpendicular e paralelo ao eixo das vigas. Isto pode levar a uma pequena e insignificante

discrepância nos valores. O caso de carga na viga GL7 não tem resultados experimentais. Os valores negativos não representam um *uplift* mas sim um deslocamento vertical no sentido descendente. Existe um ponto em que a diferença é cerca de 1,5 milímetros.

Ao nível das deformações, existem dois aspetos relevantes: o esmagamento localizado e as deformações existentes provocadas pela montagem e preparação do ensaio experimental ou até, pelos ciclos de carga-descarga resultantes dos vários casos de carga, que compõe o processo experimental. O esmagamento localizado pode resultar das fracas propriedades que a madeira apresenta na direção perpendicular à das fibras. No caso do ensaio experimental é colocada uma pequena chapa metálica para distribuir as tensões e, para as cargas que se utiliza nesta configuração, não é espectável existirem deformações deste tipo. Outras deformações podem ocorrer na zona dos ligadores e do seu furo, quer seja durante o ensaio ou mesmo na furação. Todas estas deformações podem ter representatividade na influência dos deslocamentos verticais.

## 6.5 Hipóteses e Simplificações

No modelo numérico considera-se um comportamento linear de todos os elementos, como sendo uma simplificação do seu comportamento que é não linear, resultando numa diminuição na complexidade e esforço de cálculo. Para variações de cargas na zona de utilização, isto é, de acordo com o estudo de onde se obtiveram os resultados experimentais (Dias et al , 2013), até 40% da carga última, esta aproximação é muito boa e não introduz erros significativos ao nível do estudo da redistribuição transversal das cargas. Contudo, quando se pretende estudar ao nível da identificação paramétrica, que é muito sensíveis aos dados iniciais, é importante ter em atenção do nível de erro que esta simplificação pode introduzir, dada a escala de valores com que se trabalha.

O betão e a madeira têm características anisotrópicas. A madeira é bastante distinta devido à sua ortotropia, em que as propriedades são diferentes em relação a três eixos ortotrópicos. Nos modelos numéricos consideram-se materiais isotrópicos, por simplificação.

No modelo numérico também se considera simplificada que a carga é pontual. No teste experimental a carga é aplicada por um atuador que tem uma ponteira circular, mas esta simplificação não introduz erros significativos.

Relativamente à estrutura do estudo em si, existe uma simplificação ao nível dos elementos que a constituem visto que, para efeitos de comportamento estrutural não é considerada a camada intermédia de tábuas de madeira de Pinho. Esta camada, com 0.02 m de espessura não é

---

adicionada no modelo sendo apenas considerado o espaço que ocupa pois considera-se que o efeito que estas trazem para a resistência da estrutura é insignificante.

A modelação da lâmina de betão no modelo de elementos finitos foi realizada com recurso a elementos do tipo casca (*Shell*). Como se trata de um processo numérico, existem logo à partida erros de truncatura que podem não ser significativos. Outro aspeto a ter em atenção é o tipo de elementos, uma vez que podem ser utilizadas duas formulações: a de *Kirchhoff* que não tem em consideração a deformação por corte ou a de *Mindlin/Reissner* que tem em consideração essa deformação (CSI, 2013). Nalguns casos a deformação por corte é pequena pelo que não existe necessidade de aumentar o esforço de cálculo para a ter em consideração. Neste modelo numérico de laje mista foi utilizado a teoria de *Kirchhoff* com a utilização de elementos casca finos. Foi feita uma comparação entre os resultados do deslocamento vertical para cada uma das formulações de elemento para determinar a influência. A variação máxima que se determinou foi de 0,13 % do valor de deslocamento, o que não representa um erro significativo.

A consideração de ligações com propriedades lineares e constantes ao longo da análise é outra simplificação do que acontece na prática. Os efeitos provocados e a respetiva análise estão apresentados no subcapítulo das condições de fronteira.

Na modelação da lâmina de betão no programa de elementos finitos, utilizou-se uma malha de elementos de 0.125x0.165 (na maior parte da casca pois nas extremidades da lâmina de betão, a distância é antissimétrica em relação à meia distância entre vigas). É feito um estudo de refinamento de malha para verificar as diferenças apresentadas ao nível dos deslocamentos verticais tendo sempre em conta o esforço computacional adicional que envolve essa operação, apresentado no Quadro 6.6.

Quadro 6.6 – Resultados do estudo do refinamento da malha de elementos finitos

Dimensão do elemento (metros)		0.165 x 0.125	0.0825 x 0.0625	Variação em relação ao inicial	0.04125 x 0.03125	Variação em relação ao inicial
Ponto de Medição						
Meio vão	GL1	-0.00469	-0.004401	6.2%	-0.004389	6.4%
	GL3	-0.008018	-0.008128	-1.4%	-0.008135	-1.5%
	GL7	-0.011214	-0.011508	-2.6%	-0.011522	-2.7%
	GL2	-0.007985	-0.008092	-1.3%	-0.008099	-1.4%
	GL6	-0.004676	-0.004383	6.3%	-0.004371	6.5%
	GL1	-0.003273	-0.003085	5.7%	-0.003076	6.0%

Quarto do vão	GL3	-0.005612	-0.005684	-1.3%	-0.005688	-1.4%
	GL7	-0.007349	-0.007539	-2.6%	-0.007549	-2.7%
	GL2	-0.005589	-0.005659	-1.3%	-0.005663	-1.3%
	GL6	-0.003262	-0.003072	5.8%	-0.003063	6.1%

Verifica-se uma variação de cerca de 6% em alguns pontos de medição, correspondendo a algumas décimas de milímetro. Como já se referiu neste trabalho, as décimas de milímetro, por si só não têm representatividade, no entanto, quando contabilizadas em conjunto podem ter um efeito significativo.

## 6.6 Condições de fronteira e ligações internas

Um aspeto com bastante importância neste estudo são as condições de fronteira e as ligações internas. O objetivo deste subcapítulo é o de determinar e quantificar a influência destes dois aspetos nos deslocamentos verticais. As condições de fronteira da estrutura consistem em apoios simples (e um duplo no modelo numérico). Relativamente às ligações internas, existe as conexões entre a laje de betão e as vigas de madeira. Essa conexão é feita com ligadores, nomeadamente varões metálicos. Produz-se um estudo específico destas condições em termos de tipo, rigidez e comportamento para que se consiga prever e determinar limites das variações nos resultados.

As propriedades de rigidez experimentais das ligações foram determinadas com recurso ao MEF. Nesse trabalho considerou-se um fator de aumento da rigidez pois a malha de elementos finitos corresponde a um espaçamento de 0,165 metros entre ligadores, enquanto no modelo experimental eles estão espaçados de 0,10 metros (Dias et al., 2013). Os valores determinados foram considerados no modelo numérico mas dificilmente corresponde aos valores reais. Procede-se a um estudo da variabilidade desta rigidez e posteriormente uma análise da influência.

De forma a obter a curva que relaciona o escorregamento na ligação com a força no ligador, utiliza-se um modelo descritivo. O modelo utilizado foi apresentado por Foschi e é um dos mais apropriados para descrever esta relação força-escorregamento de ligações de madeira e madeira-betão (Dias, 2005). O modelo de Foschi foi desenvolvido para descrever relação carga-deslocamento de ligadores metálicos em madeira e pode ser adaptado para ligações em madeira-betão. O modelo é representado da seguinte forma:

$$F = (c + b(\delta - \delta_0)) \left(1 - e^{\frac{-a}{c}(\delta - \delta_0)}\right) \quad (7)$$

Em que,  $a$  é a rigidez inicial (tangente à curva na origem),  $b$  é a rigidez pós-cedência,  $c$  é a transição de comportamento elástico para semi-plástico,  $F$  é a força de corte,  $\delta$  é o escorregamento no ligador e  $\delta_0$  é o escorregamento inicial devido, por exemplo, à folga do furo. Para dar a entender melhor o que significa cada um destes parâmetros apresenta-se aqui um gráfico explicativo na Figura 6.7.

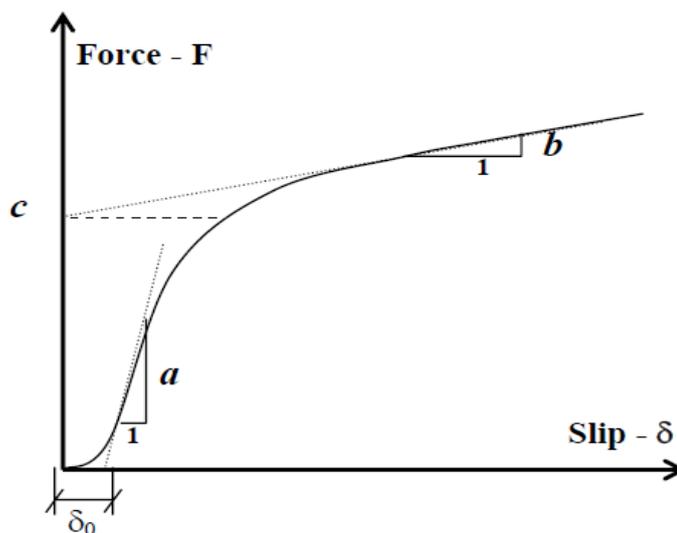


Figura 6.7 – Curva descritiva do modelo de Foschi (Dias, 2005)

Na adaptação ao problema existente, considera-se o valor de escorregamento inicial zero e assume-se os valores dos coeficientes  $b$  e  $c$  determinados por Dias (2005) para ligações com varões de 8 mm. O coeficiente de rigidez inicial é determinado recorrendo ao modelo numérico de uma viga mista para que também se possa comparar com os resultados obtidos do ensaio experimental que tinha o mesmo propósito de determinação da rigidez dos ligadores.

No ensaio experimental de determinação das propriedades de rigidez, testou-se 3 vigas diferentes, assumindo simetria em relação às propriedades. Neste estudo analisa-se as ligações de cada uma das vigas. Através da obtenção da força e do escorregamento numérico de cada uma destas vigas, determina-se uma rigidez inicial “ $a$ ” substituindo os valores na expressão do modelo de Foschi (assumiu-se o valor médio do resultado de cada um dos ligadores). Os valores obtidos são os apresentados no Quadro 6.7.

Quadro 6.7 – Valores médios da rigidez inicial da ligação de cada viga ao betão (coeficiente “ $a$ ” no modelo de Foschi)

Rigidez Inicial média (kN/mm)				
GL1	GL3	GL7	GL2	GL6

2.5228	1.7772	2.5136	1.7253	2.5078
--------	--------	--------	--------	--------

Com estes valores do coeficiente “a” tem-se a expressão do modelo de Foschi para cada uma das vigas. É possível assim derivar a função e obter a função que permite calcular a rigidez tangente do ligador em função do escorregamento existente. Este estudo é feito para cada uma das vigas mistas tendo em conta que as propriedades de rigidez da madeira é diferente, como se apresenta na Figura 6.8 e

Figura 6.9, para a ligação da viga GL7 ao betão.

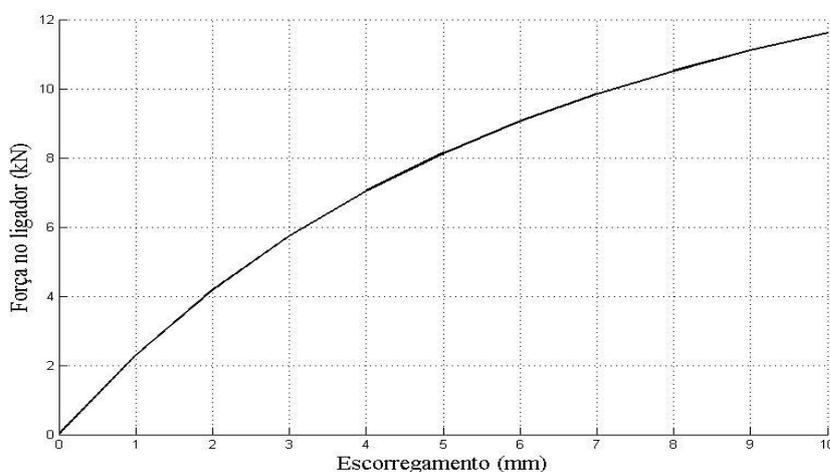


Figura 6.8 - Gráfico da relação força no ligador- escorregamento para a ligação da viga GL7 obtido através do modelo de Foschi

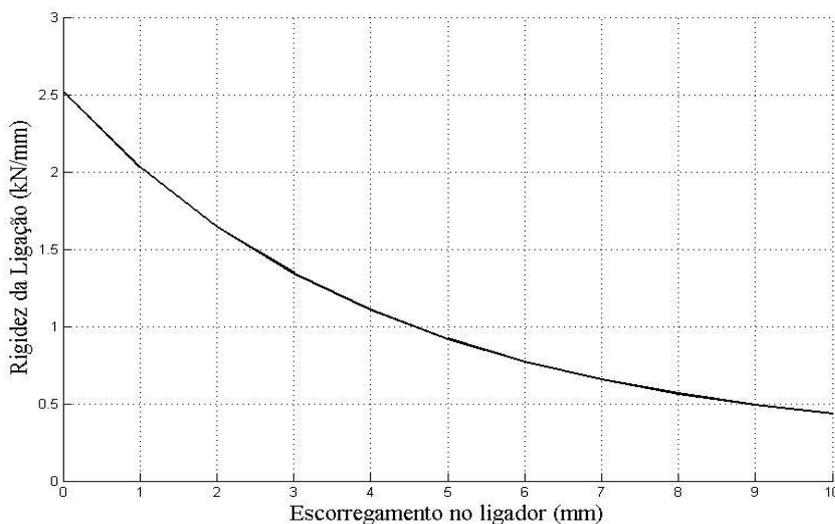


Figura 6.9 – Gráfico da rigidez em função do escorregamento

Pelo gráfico da variação de rigidez pode retirar-se a variação em função do escorregamento e, dado que este varia longitudinalmente na viga, definir dois limites, mínimo e máximo, para o valor desta rigidez. O escorregamento no centro é aproximadamente zero e aumenta de valor para as extremidades. Ao invés de se considerar uma ligação não linear, utiliza-se o escorregamento máximo obtido numericamente para ter uma ideia variação da rigidez da ligação, resultando nos valores que se apresentam no Quadro 6.8.

Quadro 6.8 – Limites de rigidez das ligações respetivamente a cada uma das vigas

Ligação (viga)	Rigidez máxima (kN/m)	Rigidez mínima (kN/m)
GL1	2552.8	1637.2
GL3	1777.2	1281.2
GL7	2513.6	1350.4
GL2	1725.3	1317.8
GL6	2507.8	1647.9

Com os limites definidos, recorre-se ao programa de elementos finitos para estudar a influência que têm estes valores no deslocamento vertical da estrutura. Esse estudo é feito para uma variação de propriedades das ligações de apenas uma viga, testando todas elas individualmente e também com uma análise global (variação em todas as ligações) como se apresenta na Figura 6.10..

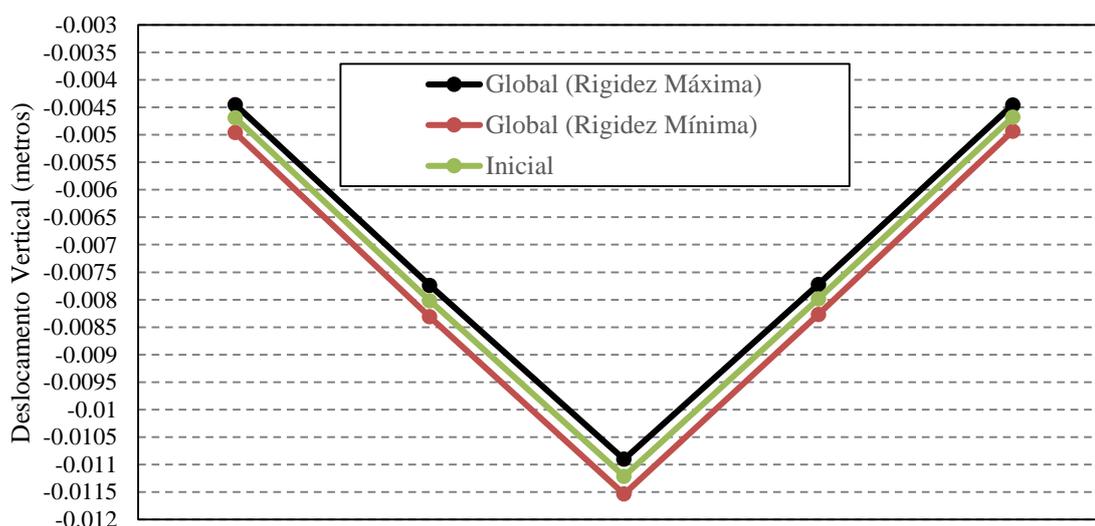


Figura 6.10 – Variação dos deslocamentos verticais transversais da laje mista devido à variação da rigidez de todas as ligações

Fez-se também um estudo desta influência em termos de variação de cada rigidez de ligação individual. Desse estudo resultou que um erro de 50% na rigidez da ligação (valor máximo de diferença entre o que foi considerado no modelo numérico e o valor máximo ou mínimo determinado no âmbito deste estudo) conduz a erros muito pouco significativos nos deslocamentos verticais, na ordem das décimas de milímetro. O mesmo não aconteceu quando se estudou a possibilidade de ter um erro dessa magnitude em todas as ligações. Essa amplitude de erro levou a uma variação máxima de aproximadamente 1 milímetro.

Os apoios são simulados numericamente através de barras muito rígidas cujo eixo é paralelo à direção de translação que se pretende bloquear, bloqueando os graus de liberdade da base da barra. Esta abordagem permite aproximar as condições numéricas das que se verificam experimentalmente. No modelo experimental a viga mista apoia diretamente sobre uma chapa metálica de dimensões 6x10 cm que está assente na célula de carga. A colocação desta chapa tem apenas o objetivo de evitar tensões de compressão excessivas na direção perpendicular à das fibras da madeira, que pode levar a esmagamento localizado.

Um fenómeno relevante ocorre com a rotação da viga. Se essa rotação for significativa, o facto de considerar o apoio pontual (no modelo numérico) ao invés da dimensão da chapa pode ter influência nos deslocamentos verticais. Nesse sentido produziu-se uma análise específica deste efeito, modelando numericamente a condição real de apoio, isto é, a chapa. Um processo simplificado consistiu na utilização de duas barras, uma colocada na extremidade e outra a 6 cm para o interior. A barra do interior é muito rígida enquanto a de extremidade é muito flexível, conseguindo-se assim a representatividade da largura da chapa e ainda que a viga possa levantar na extremidade em relação à outra barra, como se mostra na Figura 6.11.

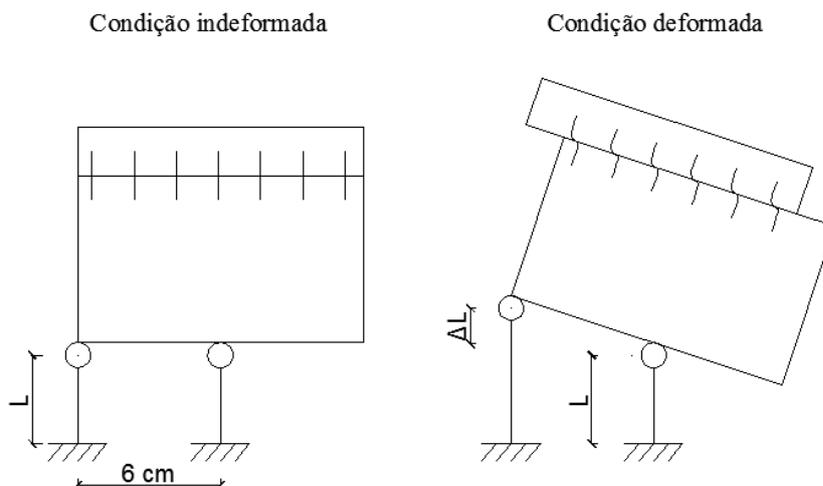


Figura 6.11 – Esquema do modelo de estudo da condição de apoio

Apresenta-se na Figura 6.12 o resultado deste estudo da condição de apoio da estrutura.

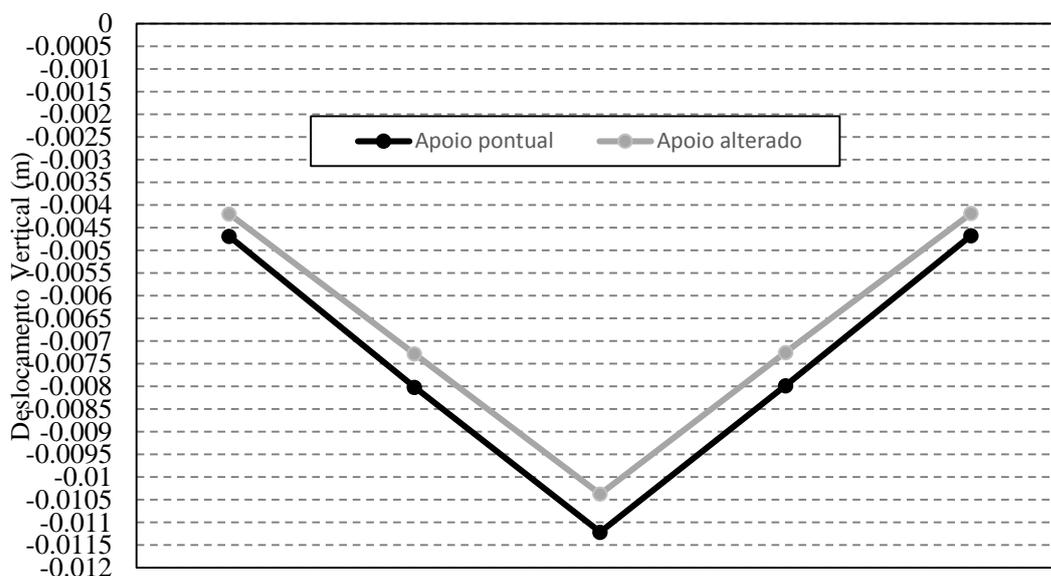


Figura 6.12 - Diferença nos deslocamentos verticais transversais da laje mista a meio vão, para as duas condições de apoio

Como se observa, este fenómeno pode ter uma afetação, na ordem do milímetro, nos resultados em termos de deslocamento vertical. As condições de apoio alteram-se no decorrer da aplicação de carga, originando uma dificuldade de modelar essa realidade. A diferença entre

simplificadamente considerar condições constantes ou alteradas pode não ser preponderante quando se trata de análise estrutural ou dimensionamento mas quando se quer aplicar metodologias de elevada sensibilidade como neste trabalho é necessário tê-la em conta.

## 6.7 Resumo do estudo do erro e incertezas

Apresenta-se, no Quadro 6.9. uma síntese do estudo realizado.

Quadro 6.9 – Resumo do estudo do erro

Erros		Descrição
Medição		Erros dos aparelhos sem significado; Erros de estabilidade do suporte, superfície de contato do aparelho podem ser significativos mas não há forma de quantificá-los
Materiais	Madeira	Varição intrínseca das propriedades de rigidez do material pode levar a variações nos resultados experimentais entre 0 e 3.5 mm.
	Betão	Varição das propriedades de rigidez do material pode levar a variações nos resultados experimentais entre 0 e, aproximadamente, 1 mm.
Deslocamentos e Deformações	Deformações	Deformações provocadas pelos ciclos de carga-descarga ou na produção e montagem dos materiais/estrutura é um erro que não se consegue quantificar
Hipóteses e simplificações	Linearidade	Assumir propriedades com variação linear é um erro de difícil quantificação
	Isotropia	Assumir materiais isotrópicos também não se consegue quantificar
	Homogeneidade	A homogeneidade dos materiais simplifica a modelação mas no âmbito deste trabalho o erro que daí advém não é quantificável
	Malha de elementos finitos	A utilização de uma malha de elementos finitos maior pode levar a bons resultados no âmbito de trabalhos de outra natureza, mas neste estudo representa um erro que pode atingir algumas décimas de milímetro (ou cerca de 6/7 %)

---

	Elemento finito	É possível escolher entre um elemento finito que inclua ou não as deformações por corte. A não consideração neste caso representa um erro muito pequeno, cerca de 0.13 % de variação
Condições de fronteira	Apoios	Com uma representação mais realista da condição de apoio, os deslocamentos verticais podem chegar a variar aproximadamente 1 milímetro
	Ligações	O erro que se comete por simplificar as propriedades de rigidez das ligações pode chegar ao milímetro no que toca a deslocamentos verticais

Muitos dos erros necessitariam de uma análise muito complexa para avaliar a sua influência e nos deslocamentos verticais. Existem erros que apresentam um significado reduzida mas que em conjunto com outros, formam erros consideráveis. Por exemplo, os erros na ordem das décimas de milímetro: umas décimas de milímetro na fase de medição em adição de outras décimas devido a outro efeito, como uma deformação no furo dos ligadores, pode totalizar um erro da ordem do milímetro e passar a influenciar de forma significativa o processo numérico.

## 7 CONCLUSÕES

Este estudo teve o propósito de identificar parâmetros em estruturas de forma indireta. Para tal, estudou-se a aplicação de problemas inversos num pavimento misto de madeira-betão com cerca de 4 metros de comprimento por cerca de 4 metros de largura. Os problemas inversos permitem estimar parâmetros a partir de medições experimentais que são comparadas com resultados numéricos, minimizando as diferenças entre estas duas quantidades. Para este caso pretendia-se determinar os módulos de elasticidade dos materiais e rigidez das ligações entre madeira e betão. Os resultados de que se partiu foram os deslocamentos verticais a meio vão e a um quarto do vão de cada uma das 5 vigas de madeira lamelada colada. A minimização de uma formulação de mínimos quadrados foi feita com recurso a um algoritmo de otimização sem restrições, o que resultou em valores absurdos para os parâmetros. Para melhorar a solução obtida, colocaram-se restrições na variação dos parâmetros. Após algumas iterações o valor da função já não diminuía significativamente, tendo-se obtido uma solução melhorada.

Foi possível resolver o problema inverso para identificação de parâmetros. A solução obtida resulta de uma melhoria das diferenças entre resultados numéricos e medições experimentais. Os resultados obtidos demonstram claramente que o processo inverso é bastante sensível ao valor inicial dos parâmetros, nomeadamente nos valores da rigidez das ligações. Também se verifica que a solução é muito sensível à quantidade de dados utilizados.

Por comparação com os resultados esperados, obtidos no ensaio experimental, pode-se afirmar que os valores obtidos no modelo numérico são relativamente diferentes. Uma das principais razões desta diferença são os erros inerentes aos dados de entrada e processos de análise. Por esse motivo foi decidido realizar um estudo específico da fonte dos erros e incertezas. Alguns são muito difíceis ou mesmo impossíveis de quantificar, mas dentro dos que são possíveis, claramente a variabilidade das propriedades dos materiais tem uma maior influência. Outros erros relevantes resultam da estimativa da rigidez das ligações a utilizar no modelo numérico e das condições de fronteira. Uma análise simplificada da influência do erro mostrou que um milímetro de erro em todos os pontos de medição perturba significativamente os resultados. Um erro dessa dimensão pode ser provocado por exemplo, por erros de medição generalizados ou pela consideração defeituosa das propriedades dos materiais.

Ainda que se tenha conseguido obter uma solução, foi comprovado que o processo inverso é muito sensível a erros. Modelos numéricos e testes experimentais devem ser mais exatos quando se pretende aplicar este tipo de análise.

Em avaliação e inspeção de estruturas quer seja conducente ou não a reabilitação, obter os valores dos parâmetros dos materiais ou de localização e quantificação do dano existente, requer maioritariamente o uso de ensaios destrutivos que alteram as características das estruturas. Um método de identificação indireta efetivo pode estimar esses valores a partir de dados observados como deslocamentos.

Neste trabalho optou-se por utilizar carregamentos estáticos. Uma outra possibilidade seria uma abordagem dinâmica ao problema. Utilizando excitações, poderiam obter-se os parâmetros minimizando diferenças entre resultados dinâmicos medidos experimentalmente e obtidos numericamente.

Propõe-se também uma abordagem probabilística do problema, de forma a conseguir ter uma melhor análise das incertezas e erros. Para estas incertezas pode ser obtido uma média e desvio-padrão para o seu valor e serem incorporadas dessa forma no problema inverso. A diferença é que ao invés de obter um valor para os parâmetros como na análise determinística, obtém-se a variabilidade desses parâmetros, isto é, uma distribuição probabilística da sua quantidade.

Outra recomendação para trabalhos futuros trata-se da ligação entre a ferramenta computacional que realiza a otimização e o programa de análise pelo Método dos Elementos Finitos. Neste trabalho, as duas ferramentas mantiveram-se separadas envolvendo por isso uma maior quantidade de trabalho.

## 8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Argoul, P. (2012). "Parameter Identification in Civil Engineering: Overview of Inverse Problems".
- Aster, R., Borchers, B., e Thurber, C. (2013). "Parameter Estimation and Inverse Problems". (2ª Edição, Ed.). Elsevier, Inc.
- Aström, K. J., e Eykhoff, P. (1971). "System Identification - a survey". *Automatica*, 7, 123–162.
- Banan, M. R., e Hjelmstad, K. D. (1994a). "Parameter estimation of structures from static response. I: Computational aspects". *Journal of Structural Engineering*, 120(11), 3243–3258.
- Banan, M. R., e Hjelmstad, K. D. (1994b). "Parameter estimation of structures from static response. II: Numerical simulation studies". *Journal of Structural Engineering*, 120(11), 3259–3283.
- Bandyopadhyay, D., e Ghosh, S. (2012). "Parameter Identification in Plate Structures from Incomplete , Noisy Static Test Data". *International Congress on Computational Mechanics and Sumulation* (pp. 10–12). Hyderabad.
- Cailletaud, G., e Pilvin, P. (1993). "Identification and inverse problems related to material behaviour". Em H. D. Bui & M. Tanaka (Eds.), *Inverse Problems in Engineering Mechanics* (pp. 79–86). Paris: Taylor & Francis.
- Canale, R. P., e Chapra, S. C. (2010). "Numerical Methods for Engineers" (6ª Edição.). McGraw Hill.
- CEN. (2010). "NP EN1992-1-1:2010 Eurocódigo 2 - Projeto de Estruturas de Betão, Parte 1-1 Regras gerais e regras para edifícios".
- Comino, L., e Gallego, R. (2005). "Material constants identification in anisotropic materials using boundary element techniques". *Inverse Problems in Science and Engineering*, 13(6), 635–654.
- Cooreman, S., Lecompte, D., Sol, H., Vantomme, J., e Debruyne, D. (2007). "Elasto-plastic material parameter identification by inverse methods: Calculation of the sensitivity matrix". *International Journal of Solids and Structures*, 44(13), 4329–4341.
-

CSI. (2013). "Analysis Reference Manual". Berkeley, California.

Dias, A. (2005). Mechanical behaviour of timber-concrete joints.

Dias, A. (2012). "Apontamentos de apoio 2012/2013 da disciplina de Estruturas de Madeira".

Dias, A. M. P. G., Monteiro, S. R. S., e Martins, C. E. J. (2013). "Reinforcement of Timber Floors-Transversal Load Distribution on Timber-Concrete Systems". *Advanced Materials Research*, 778, 657–664.

Forest Products Laboratory. (2010). "Wood Handbook". United States Department of Agriculture Forest Service.

Fournely, E., Fuentes, S., e Taazount, M. (2011). "Mechanical behavior of timber-concrete slabs under real environmental conditions by experimental and numerical approaches". *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 15(5), 773–786.

Hadidi, R., e Gucunski, N. (2008). "Probabilistic Approach to the Solution of Inverse Problems in Civil Engineering". *Journal of Computing in Civil Engineering*, 22 (Dezembro), 338–347.

Haftka, R., e Gürdal, Z. (1992). "Elements of Structural Optimizaton" (3ª Edição.). Kluwer Academic Publisher.

Hjelmstad, K. D., Wood, S. L., e Clark, S. J. (1992). "Mutual residual energy method for parameter estimation in structures". *Journal of Structural Engineering*, 118(1), 223–242.

Jensen, P., e Bard, J. (2002). "Operation Research Models and Methods". Wiley.

Kleinermann, J. P. (2000). Identification paramétrique et optimisation des procédés de mise à forme par problèmes inverses. Université de Liège, Bélgica.

MathWorks. (2013). "Optimization Toolbox™ User's Guide R 2013 b".

Nocedal, J., e Wright, S. J. (2006). "Numerical Optimization" (2ª Edição.). Springer Verlag.

Sanayei, M., e Nelson, R. B. (1986). "Identification of structural element stiffnesses from incomplete static test data". Aerospace Technology Conference and Exposition. Long Beach, California.

Sanayei, M., e Saletnik, M. J. (1996a). "Parameter Estimation of Structures from Static Strain Measurements. I: Formulation". *Journal of Structural Engineering*.

Sanayei, M., e Saletnik, M. J. (1996b). "Parameter Estimation of Structures from Static Strain Measurements. II: Error Sensitivity Analysis". *Journal of Structural Engineering*.

Sanayei, M., e Scampoli, S. F. (1991). "Structural element stiffness identification from static test data". *Journal of Engineering Mechanics*, 117(5).

Simões, L. M. da C. (2008). "Optimização de Estruturas" (1ª Edição.).

Tarantola, A. (1987). "Inverse Problem Theory". Elsevier.

Tarantola, A., e Valette, B. (1982). "Inverse Problems = Quest for Information". *Journal of Geophysics*, 159–170.

Teughels, A., e Roeck, G. De. (2005). "Damage Detection and Parameter Identification by Finite Element Model Updating". *Archives of Computational Methods in Engineering*, 12 (Setembro 2004), 123–164.

Tikhonov, A. N., e Arsenin, V. Y. (1977). "Solutions to ill-posed problems". New York: Winston-Wiley.

Yaman, F., Yakhno, V. G., e Potthast, R. (2013). "A Survey on Inverse Problems for Applied Sciences". *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 1–19.

Zona, A., Barbato, M., e Fragiaco, M. (2012). "Finite-Element Model Updating and Probabilistic Analysis of Timber-Concrete Composite Beams". *Journal of Structural Engineering*, ASCE, (Julho), 899–910.

## ANEXO

### O Método BFGS

O método BFGS inicia com a formulação de um modelo quadrático da função objetivo,  $f$  na iteração  $k$  da forma:

$$m_k(p) = f_k + \nabla f_k^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p \quad (8)$$

Em que  $B_k$  é a matriz das segundas derivadas (Hessiana), simétrica positiva definida, que é revista ou atualizada a cada iteração e  $p_k$  é a direção de pesquisa que se pode escrever da forma:

$$p_k = -B_k^{-1} \nabla f_k \quad (9)$$

O valor de  $x$  na nova iteração será:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \quad (10)$$

Nesta expressão,  $\alpha_k$  é o tamanho do passo que é escolhido de forma a satisfazer as condições de Wolfe, dadas pelas seguintes inequações (Nocedal e Wright, 2006):

Condição de decréscimo suficiente (também conhecido por regra de *Armijo*):

$$f(x_k + \alpha p_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha \nabla f_k^T p_k \quad (11)$$

Condição de curvatura que requer que  $\alpha_k$  satisfaça:

$$\nabla f(x_k + \alpha p_k)^T p_k \geq c_2 \nabla f_k^T p_k \quad (12)$$

São condições que em conjunto, garantem que o algoritmo produz um progresso relevante e em que  $c_1$  assume o valor de  $10^{-4}$  e  $c_2$  o valor de 0,9 para métodos quasi-Newton (Nocedal e Wright, 2006).

A grande diferença deste método para outros métodos de Newton reside na matriz das segundas derivadas que em vez de ser calculada a cada iteração é utilizada uma matriz aproximada. As grandes vantagens em relação ao Método de Newton estão na poupança ao não necessitar de obter a solução de um sistema linear (cálculo de uma nova matriz) e, mas principalmente o facto de não precisar do cálculo das segundas derivadas ( Nocedal e Wright, 2006)

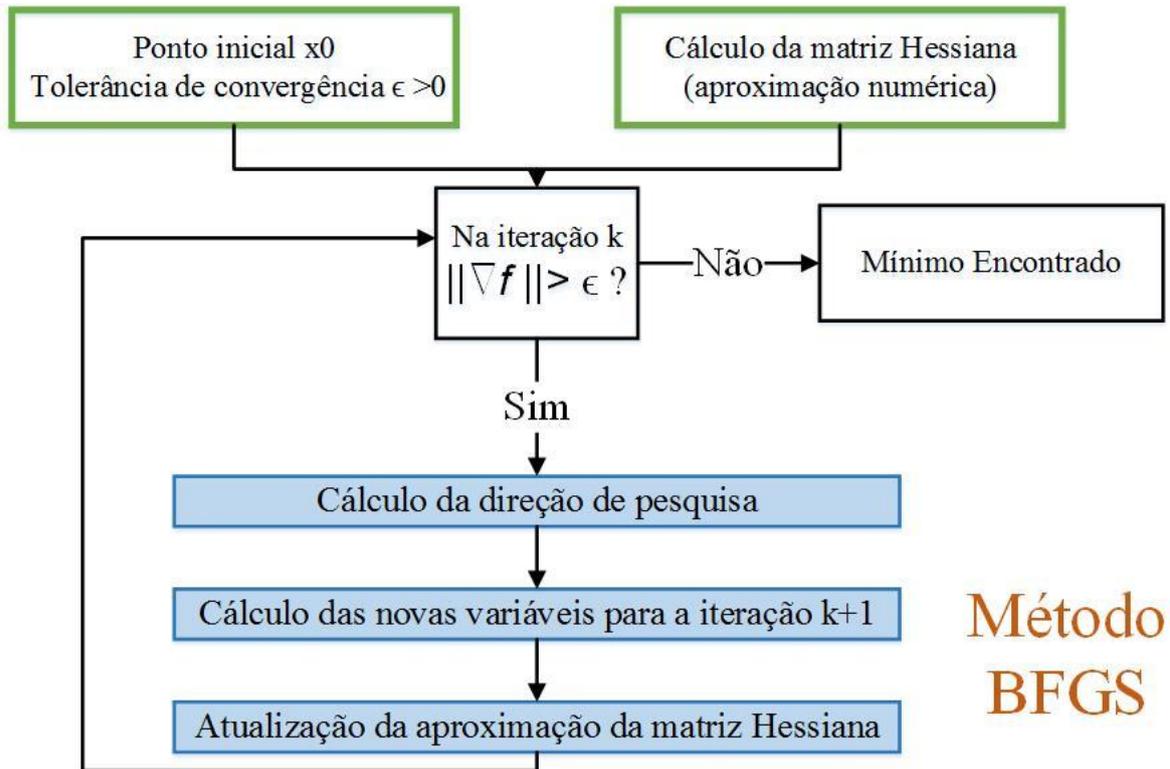


Figura A.0.1 – Esquema de resumo do processo de otimização

## Método de otimização com restrições

O algoritmo de ponto interior em otimização com restrições desenvolveu-se para evitar a complexidade computacional gerada pelo método simplex que utiliza só os extremos da região admissível (Jensen e Bard, 2002). Neste caso particular, é utilizado funções de barreira incorporadas no algoritmo que evitam que as variáveis cheguem a essas extremidades.

A abordagem do algoritmo passa essencialmente pela resolução sequencial de problemas aproximados de minimização. O problema original é:

$$\min_x f(x), \text{ sujeito a } h(x) = 0 \text{ e } g(x) \leq 0 \quad (13)$$

E, para cada  $\mu > 0$ , o problema aproximado é:

$$\min_{x,s} f_{\mu}(x, s) = \min_{x,s} f(x) - \mu \sum_i \ln(s_i) \text{ sujeito a } h(x) = 0 \text{ e } g(x) + s = 0 \quad (14)$$

A variável  $s$  é uma variável adicionada para transformar a desigualdade numa igualdade. Enquanto  $\mu$  diminui para zero, o mínimo da função do problema aproximado deve-se aproximar do mínimo de  $f$ . A parte logarítmica da função é o termo barreira que se introduz para não atingir as extremidades (MathWorks, 2013). Desta forma, ao invés de se ter de resolver problemas sujeitos a restrições de desigualdade, tem-se uma série de problemas com restrições de igualdade que são mais fáceis de resolver (MathWorks, 2013).

Para resolver o problema aproximado, o algoritmo primeiramente utiliza um passo direto, que tenta resolver o problema através de uma aproximação linear, e caso não consiga, utiliza então um passo de gradientes conjugados.