



**FCTUC** DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

# **Análise do Comportamento de Vigas de Betão Armado Axialmente Restringidas**

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil  
na Especialidade de Estruturas

Autor

**João Duarte Saraiva Grilo**

Orientador

**Sérgio Manuel Rodrigues Lopes**

**Adelino Vasconcelos Lopes**

Esta dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor, não tendo sofrido correções após a defesa em provas públicas. O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer responsabilidade pelo uso da informação apresentada

**Coimbra, Janeiro, 2014**

## **AGRADECIMENTOS**

Este trabalho seria impossível de ser concretizado sem o apoio e acompanhamento constante de algumas pessoas, que não só estiveram presentes durante a realização desta dissertação, bem como durante o tempo que frequentei o Mestrado Integrado em Engenharia Civil na Universidade de Coimbra.

Um agradecimento muito especial aos meus orientadores, Professor Doutor Adelino V. Lopes e Professor Doutor Sérgio R. Lopes, por todo o empenho, disponibilidade, críticas e principalmente conhecimento transmitido ao longo dos últimos meses.

Agradeço a todos os meus colegas que frequentaram comigo o perfil de Estruturas, pelo companheirismo, troca de ideias e auxílio sempre que foi necessário.

Aos meus amigos, que me acompanham há muitos anos, a todos um agradecimento profundo da vossa amizade, ajudando-me sempre a ultrapassar as situações mais difíceis.

Por fim, o agradecimento inevitável à minha família por toda a motivação e apoio incondicional, que foi determinante para poder terminar esta etapa da minha vida.

A todos vocês o devo. Obrigado!

## RESUMO

Para cumprir a finalidade para a qual foi projetada, qualquer estrutura de Engenharia Civil deve reunir as condições adequadas de segurança, funcionalidade e durabilidade. As estruturas de Betão Armado constituem um caso particular maioritariamente utilizado.

Por um lado, um conhecimento mais aprofundado dos materiais conduziu à adoção de fatores de segurança inferiores. Por outro, a necessidade de vãos superiores, conduziu à construção de estruturas mais esbeltas e flexíveis. Neste contexto, de redução das margens de segurança, a verificação aos Estados Limite Últimos ULS de resistência e aos Estados Limite de Serviço SLS assumem-se como críticos. Para o efeito é fundamental o conhecimento rigoroso do comportamento estrutural.

Neste sentido, pretende-se avaliar numericamente, no âmbito dos ULS e dos SLS de estruturas de BA, as características resistentes e de deformação de vigas, restringidas axialmente e submetidas a flexão. Importa conhecer, não só o nível da capacidade resistente em termos de esforços máximos, mas principalmente em termos de rigidez após fissuração e cedência. O objetivo consiste em melhorar a análise deste tipo de estruturas.

Para o efeito procedeu-se ao aperfeiçoamento de um programa automático de análise não linear ANL. No programa computacional em questão, existiam limitações que foi necessário eliminar. As alterações efetuadas incidem sobretudo em torno dos cabos de pré-esforço, nomeadamente, na configuração real dos cabos e no comportamento destes.

Neste contexto, os resultados teóricos determinados pelos programas de análise não linear, programa inicial e final ANL, são confrontados com resultados experimentais apresentados por outros autores, de forma a averiguar a eficiência dos programas utilizados. A análise comparativa realizada baseia-se nos diagramas carga-deslocamento  $P-\delta$ .

## ABSTRACT

To fulfill the purpose for which it was designed, any structure in Civil Engineer must have an appropriate level of safety, functionality and durability. Reinforced Concrete Structures are a particular case mostly used.

On the one hand, a greater knowledge about materials has led to a decrease of the safety coefficients. On the other hand, the higher length of the structure's spans, led to the construction of slimmer and more flexible structures. In this context, the reduction of safety limits, the Ultimate Limit States ULS and Service Limit States SLS verifications are assumed as critical. For this purpose, it is essential to have knowledge on the structural behavior.

In the framework of this work, the aim is to numerically evaluate, under ULS and SLS, the strength and deformations in reinforced concrete beams, axially restrained and subjected to bending. It is important to know the level of the maximum strength capacity, but also the crack and yield stiffness. The objective is to improve the analysis of this type of structures.

These studies were carried out by using a nonlinear computational algorithm for the analysis. This algorithm had a few limitations, which had to be removed. Most of the changes were related to the prestressing cables, namely their real configuration and the way they behave.

In this context, the theoretical results predicted by the nonlinear analysis programs, such as the ANL initial and final program, were compared with the experimental results achieved by other authors. This was done in order to ascertain the effectiveness of the programs. Once the theoretical and experimental results were obtained, a comparative analyses based on  $P-\delta$  load-displacement curves were carried out.

---

## ÍNDICE

1 INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Enquadramento Geral.....	1
1.2. Objetivos.....	2
1.3. Organização da Tese.....	2
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	4
2.1 Limites regulamentares para a deformação.....	15
2.2 Metodologias para o cálculo de deformações.....	16
2.2.1 Eurocódigo 2 .....	16
2.2.2 Programas ANL.....	17
3 PROGRAMA COMPUTACIONAL ANL .....	18
3.1 Programa Momento-Curvatura $M-\chi$ .....	18
3.2 Programa Esforço Transverso-Distorção $V-\gamma$ .....	22
3.3 Programa ANLv3 .....	24
3.4 Programa final ANLv4.....	26
4 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO .....	32
4.1 EXEMPLOS 1 .....	33
4.2 EXEMPLOS 2 .....	40
4.3 EXEMPLOS 3 .....	43
4.4 EXEMPLOS 4 .....	49
4.5 EXEMPLOS 5 .....	54

---

5 ANÁLISE GLOBAL DOS RESULTADOS .....	58
5.1 Análise das diversas metodologias utilizadas.....	58
5.2 Comparação dos deslocamentos e cargas limite experimentais SLS com cargas teóricas ULS .....	65
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	68
6.1 Sugestões para trabalhos futuros .....	69
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	70

---

## SIMBOLOGIA

### Letras maiúsculas latinas

$A_r$	Área reduzida
$A_{ps}$	Área de cabos de pré-esforço
$A_s$	Área da armadura de tração
$A'_s$	Área da armadura de compressão
$A_{sw/s}$	Área das armaduras transversal
$D$	Desviadores
$E_c$	Módulo de elasticidade do betão
$E_{ps}$	Módulo de elasticidade de cabos de pré-esforço
$E_s$	Módulo de elasticidade do aço
$EI_I$	Rigidez à flexão na fase elástica
$EI_{II}$	Rigidez à flexão na fase de fissuração
$F_e$	Forças externas
$F_i$	Forças nodais internas
$G$	Módulo de distorção
$I_c$	Momento de inércia da seção de betão
$L$	Comprimento de vão
$M$	Momento fletor
$M_{cr}$	Momento de fissuração
$M_{max}$	Momento máximo
$M_y$	Momento de cedência
$N$	Esforço axial
$N_0$	Esforço axial inicial
$P_{cr}$	Carga de fissuração
$P_{max}$	Carga máxima
$P_y$	Carga de cedência
$V$	Esforço transversal

### Letras minúsculas latinas

$a$	Vetor dos deslocamentos nodais
$b$	Largura da seção
$d$	Altura útil
$d'$	Distancia às armaduras de compressão
$e$	Excentricidade

---

$f$	Vetor de forças globais
$f_{cm}$	Valor médio da tensão de rotura do betão à compressão
$f_{ctm}$	Valor médio da tensão de rotura do betão à tração
$f_{psy}$	Tensão de cedência do aço de pré-esforço
$f_u$	Tensão última das armaduras
$f_y$	Tensão de cedência das armaduras
$h$	Altura da seção
$k$	Matriz de rigidez
$k_c$	Matriz de rigidez referente à deformação por corte
$k_f$	Matriz de rigidez referente à deformação por flexão
$k_s$	Relação $f_u/f_y$
$l_i$	Comprimento de um elemento finito
$q$	Vetor de forças nodais
$t_{ps0}$	Tensão inicial aplicada nos cabos de pré-esforço (ANLv3)
$x$	Posição do eixo neutro da seção

Letras gregas

$\alpha$	Ângulo de um dado troço do cabo de pré-esforço
$\gamma$	Distorção
$\delta_{cr}$	Deslocamento de fissuração
$\delta_y$	Deslocamento de cedência
$\epsilon_{cu}$	Extensão última no betão
$\epsilon_{cp}$	Extensão no pico das tensões de compressão
$\epsilon_N$	Extensão axial
$\epsilon_{ps}$	Extensão nos cabos de pré-esforço
$\epsilon_{sy}$	Extensão de cedência no aço
$\epsilon_{su}$	Extensão última no aço
$\phi$	Diâmetro do varão
$\rho$	Taxa de armadura
$\sigma_{cc}$	Tensão de compressão no betão
$\sigma_{ct}$	Tensão de tração no betão
$\sigma_{ps}$	Tensão no cabo de pré-esforço
$\sigma_{st}$	Tensão de tração no aço
$\mu$	Momento reduzido
$\nu$	Esforço normal reduzido
$\omega$	Taxa mecânica de armadura
$\Psi$	Vetor de desequilíbrio de forças
$\chi$	Curvatura

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Enquadramento Geral

O desenvolvimento tecnológico que tem sido crescente ao longo das últimas décadas, do ponto de vista de análise de estruturas, conduziu a uma maior e melhor capacidade de prever o comportamento das estruturas. Não apenas ao nível académico, estes avanços tecnológicos permitem também ao projetista um dimensionamento estrutural mais fiável e, por ventura, mais económico, fator este que acaba por se revelar de grande importância.

De acordo com os regulamentos em vigor, no dimensionamento de estruturas, dever-se-ão assegurar os Estados Limites Últimos – ULS associados ao colapso parcial ou global da estrutura, bem como os Estados Limites de Serviço – SLS que recaem na funcionalidade, estética e durabilidade da estrutura. No âmbito desta dissertação, pretende-se avaliar o comportamento de vigas axialmente restringidas sujeitas a flexão. O ponto em foco consiste na avaliação da resistência, não só a resistência máxima, mas principalmente a deformação ao longo do carregamento imposto. Estes resultados, necessários para a verificação regulamentar ao nível do ULS, é também muito importante para o Estado Limite de Serviço, mais concretamente, o estudo da deformação de vigas de betão armado, tendo em conta o efeito da restrição axial.

As vigas, que se caracterizam por serem elementos estruturais utilizados para resistir essencialmente a esforços de flexão, nas estruturas correntes encontram-se restringidas axialmente por outros elementos estruturais adjacentes, provocando alterações no comportamento destas em virtude do esforço axial não nulo. Em geral, este aspeto não é considerado aquando do dimensionamento estrutural. Para além disso, é conhecida a tecnologia de pré-esforço no reforço de estruturas tipo ponte, para além da possibilidade de se utilizar esta tecnologia na recuperação e/ou reforço estrutural. Posto isto, torna-se pertinente e importante o desenvolvimento de ferramentas teóricas para estudar o fenómeno da restrição axial na análise da deformação de vigas sujeitas a flexão.

## 1.2. Objetivos

No presente trabalho, um dos principais objetivos consiste no estudo numérico do comportamento de vigas de betão armado, axialmente restringidas, sujeitas a flexão, avaliando numericamente como evoluem as deformações em cada uma das diversas três fases características do comportamento deste tipo de estruturas: a fase elástica, a fase de fissuração e o patamar de plastificação.

Numa primeira fase, foi realizada uma adaptação de um programa inicial de análise linear de vigas de betão armado ANL, onde foram introduzidas alterações principalmente ao nível dos cabos de pré-esforço, de modo a permitir modelar mais corretamente a configuração geométrica real dos cabos, e posteriormente, a evolução de tensões.

Posteriormente, é realizada uma análise comparativa entre curvas teóricas e experimentais de carga-deslocamento P-d. Os diagramas experimentais foram recolhidos em artigos publicados na bibliografia da especialidade, enquanto os diagramas teóricos são obtidos a partir dos programas computacionais de análise não linear, ANLv4 e ANLv3, apresentados neste trabalho.

Um último objetivo presente neste trabalho consiste na comparação de resultados obtidos recorrendo a diversas metodologias; umas associadas ao cálculo da carga limite, outras de acordo com limites regulamentares de deformação e outras relacionadas com o cálculo das deformações no contexto dos SLS.

## 1.3. Organização da Tese

Neste ponto pretende-se apresentar sucintamente um resumo daquilo que será tratado em cada um dos capítulos que constituem este trabalho.

No Capítulo 1 é feito um enquadramento do tema abordado e apresentam-se os objetivos do trabalho.

No Capítulo 2 é apresentado o suporte comparativo de todo o desenvolvimento da tese, expondo trabalhos experimentais realizados por diversas entidades internacionais, bem como metodologias usadas na realização das análises numéricas.

No Capítulo 3 é feita a descrição detalhada do desenvolvimento do programa de análise não linear adotado, sendo descritas as alterações efetuadas.

No Capítulo 4, com base nos diagramas P-d teóricos, obtidos a partir dos programas ANL, e nos diagramas P- $\delta$  experimentais, retirados de artigos expostos no Capítulo 2, são apresentadas algumas análises comparativas.

No Capítulo 5 é realizada uma análise global dos valores obtidos pelas diversas metodologias adotadas para determinar valores de cargas e deslocamentos teóricos em pontos característicos do diagrama de comportamento estrutural P- $\delta$ . É também analisado o Estado Limite que condiciona o dimensionamento de cada uma das vigas.

Por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as considerações finais e as conclusões referentes ao desenvolvimento deste trabalho, bem como sugestões para trabalhos futuros.

.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No desenvolvimento numérico realizado neste trabalho, procurou-se utilizar um suporte bibliográfico com o fim de estudar, e depois confrontar, o comportamento estrutural teórico de vigas de betão armado submetidas a flexão, sendo considerado também o efeito de uma possível restrição axial, nomeadamente o pré-esforço. De facto, a utilização de cabos de pré-esforço permitem simular vigas axialmente restringidas. Os artigos científicos selecionados visam abordar diversas variáveis tais como: a classe de betão, dimensões variáveis das seções retangulares, taxas de armadura diferentes, diversos níveis de pré-esforço e tipologia de esquema estrutural de vigas, isto é, vigas simplesmente apoiadas ou vigas contínuas.

No primeiro artigo selecionado, de Hussein, O., et al. (2012), é apresentado um estudo experimental sobre o comportamento de três seções transversais, nomeadamente, uma não pré-esforçada (N), outra parcialmente pré-esforçada (P), e outra totalmente pré-esforçada (F), considerando duas classes de betão de alta resistência, 70 (Lote1) e 100 (Lote 2) MPa. Uma seção totalmente pré-esforçada é definida como a total eliminação da tradicional armadura de tração, permitindo pequenas tensões de tração resistidas apenas pelo betão, enquanto uma seção parcialmente pré-esforçada elimina parcialmente aquela armadura.

A principal vantagem de elementos de betão totalmente pré-esforçados consiste na ausência de fendas no betão para cargas de serviço, e portanto uma maior durabilidade é alcançada. Quando o betão de alta resistência (HSC) é comparado com betão de resistência normal também existem diversas vantagens. Por exemplo, o betão de alta resistência é caracterizado pela elevada resistência, normalmente associada à sua alta densidade. Estando uma viga submetida também a elevadas compressões, é importante garantir uma boa resistência do betão. Estas vantagens combinadas com o uso de pré-esforço podem resultar em estruturas mais elegantes e de maior duração (Hussein, O., et al., 2012).

Na Tabela 2.1 são identificadas as seis vigas **Bn-C-S**, consideradas neste trabalho, em que *n* corresponde ao número da viga, *C* corresponde à classe resistente do betão e *S* a seção transversal da viga.

Tabela 2.1 – Identificação das vigas (Hussein, O., et al. 2012).

<b>Lote 1</b>	B1-70-N	B2-70-P	B3-70-F
<b>Lote 2</b>	B4-100-N	B5-100-P	B6-100-F

O ensaio das vigas foi feito considerando sempre o mesmo esquema estrutural de viga, mantendo-se para cada uma das diferentes seções já referidas o mesmo comprimento de vão, tipologia de apoios e ponto de aplicação das cargas. As vigas encontram-se simplesmente apoiadas ao longo de 4,0 m de vão livre.

Como já foi referido, apenas foram consideradas três seções retangulares com as mesmas dimensões, sendo que as principais diferenças residem na armadura longitudinal de tração e nos cabos de pré-esforço adotados. A largura da seção é  $b=0,160\text{m}$  e a altura é  $h=0,340\text{m}$ . A armadura de compressão ( $2\phi 10$ ) foi sempre mantida constante para os três casos. Para a seção não pré-esforçada foi colocada uma armadura de tração de  $6\phi 10$ , não existindo qualquer cabo de pré-esforço. Para a seção parcialmente pré-esforçada colocou-se uma armadura de tração de  $2\phi 10$  e um cabo de pré-esforço de 12 mm de diâmetro. Por fim, para a seção totalmente pré-esforçada colocou-se um cabo de pré-esforço de 15,2 mm de diâmetro, não colocando nenhuma armadura de tração. O recobrimento utilizado foi de 25 mm.

Dos materiais usados na construção das vigas, o tipo de aço utilizado, quer na armadura longitudinal não pré-esforçada, quer na armadura transversal, foi um aço com uma tensão de cedência média de 470 MPa e uma tensão última média de 610 MPa. Relativamente ao betão, a resistência média do betão à compressão é de 72 e 97 MPa, aos 28 dias, respetivamente para cada lote de vigas, sendo que não é feita referência se os testes à resistência do betão foram realizados em provetes cilíndricos ou cúbicos. Para finalizar, os cabos de pré-esforço apresentam uma tensão de cedência média de 1674 MPa e uma tensão última média de 1860 MPa.

Durante o processo de aplicação do pré-esforço, o alongamento do cabo foi medido usando um medidor digital de grande precisão. A partir do alongamento registado foi determinada a força aplicada no cabo. Os valores obtidos tiveram em consideração as perdas por atrito.

Para as vigas B1 e B4 o modo de rotura deu-se por cedência das armaduras seguido do esmagamento do betão. Para as vigas B2 e B5 a rotura foi atingida obtendo cedência nas armaduras não pré-esforçadas, seguida do esmagamento do betão e depois a rotura do cabo de pré-esforço. Nas vigas B3 e B6 a rotura deu-se por esmagamento do betão seguido do colapso repentino do cabo de pré-esforço.

Para as cargas de fissuração obtidas, as vigas B1 e B2 apresentam valores inferiores relativamente à viga B3, respetivamente 53% e 9%. Os autores destacam que esta diferença deve-se ao efeito da força de pré-esforço, concluindo que com o aumento do índice de pré-esforço, a carga de fissuração aumenta igualmente. Ainda de salientar a ligeira diferença entre as cargas máximas, relativamente às quais os autores consideram que se deve a pequenas variações das dimensões entre as seções transversais das vigas, apesar de serem inicialmente assumidas como iguais.

A partir de valores apresentados no documento, os autores salientam o facto das vigas de seção P e F apresentarem uma rigidez inicial muito mais elevada que as vigas sem restrição axial. Este efeito deve-se à presença da força de pré-esforço, que retarda a fendilhação do betão. Na fase de fendilhação ocorre o fenómeno contrário, onde a rigidez da seção N apresenta maior valor, em consequência da área da armadura ordinária tracionada.

Com o auxílio dos diagramas P- $\delta$  disponibilizados no artigo, consegue-se analisar facilmente a evolução da carga em função do deslocamento imposto a meio vão para cada uma das vigas ensaiadas. Também é possível identificar as diversas fases: a elástica, a de fissuração e a de cedência. Na Figura 2.1 são apresentados os diagramas P- $\delta$  para cada uma das seis vigas.

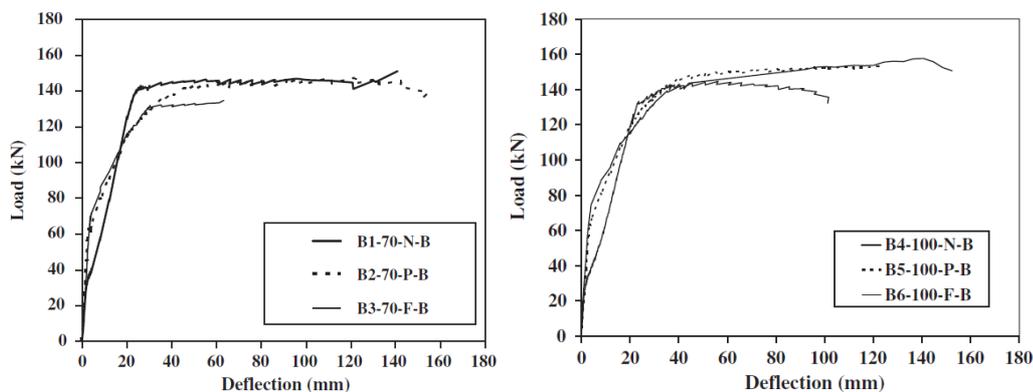


Figura 2.1 – Diagrama P- $\delta$  referentes às seis vigas apresentadas (Hussein, O., et al. 2012).

Neste trabalho foi ainda realizada uma análise teórica para prever o comportamento destas vigas. A modelação da relação tensão-extensão do betão foi considerada parabólica, enquanto que para a modelação do aço foi considerada uma relação tensão-extensão bi-linear. A compatibilidade de extensões e o equilíbrio de forças foi realizado usando um processo iterativo para estabelecer a relação momento-curvatura para cada seção. Para cada incremento de carga, a curvatura ao longo de cada seção da viga foi sendo determinada. O deslocamento máximo da viga foi calculado a partir da integração da curvatura da seção a meio para determinada carga incremental.

A relação tensão-extensão para os cabos de pré-esforço foi apresentada por Abdelrahman, A. (1995):

$$f_{ps} = 196000 \varepsilon_{ps} \left[ A + \frac{B}{\left(1 + (C \varepsilon_{ps})^D\right)^{1/D}} \right] \leq f_{pu} \quad (2.1)$$

Em que A, B, C e D são parâmetros de ajuste da curva, tendo sido considerado A=0,03; B=0,97; C=102; D=10.

Após ser determinado o valor  $f_{ps}$ , os autores, na sua análise teórica, determinam a posição do eixo neutro, a partir da seguinte expressão:

$$C = \frac{A_{ps} f_{ps} + A_s f_y}{0,85 f_c' b \beta_1} \quad (2.2)$$

Após o eixo neutro estar definido, a partir das equações de equilíbrio é determinado o momento máximo teórico, e posteriormente o valor da carga máxima, dado pelas seguintes expressões:

$$M_{\max, \text{theo}} = A_p f_{ps} (d_p - \beta c / 2) + A_s f_y (d_s - \beta c / 2) + A_s' E_s \left[ \frac{(C - d_s') \times 0,003}{c} \right] (\beta c / 2 - d_s') \quad (2.3)$$

$$P_{\max, \text{theo}} = \frac{2M}{a} \quad (2.4)$$

A partir das análises efetuadas e dos resultados obtidos neste artigo, os autores destacam que a presença de armadura de tração em vigas pré-esforçadas melhora consideravelmente a ductilidade. Para além disso, o aumento do valor da resistência de compressão do betão leva um ligeiro aumento das cargas de cedência e máxima. Por fim, as análises teóricas referentes à compatibilidade de extensões e equilíbrio de forças demonstraram uma boa previsão do comportamento de deformação para as vigas de betão armado de alta resistência não pré-esforçadas, parcialmente pré-esforçadas e totalmente pré-esforçadas.

No segundo artigo selecionado, de Soudki, K. e Badawi, M. (2009), é feito um estudo relativo à eficácia do aumento de resistência à flexão de vigas de betão armado, quando pré-esforçadas com cabos CFRP, recorrendo à técnica de montagem NSM (Near-Surface Mounted).

O tipo de material utilizado na constituição dos cabos de pré-esforço contribui significativamente para o comportamento da viga. A prova disso está no uso extensivo,

durante as duas últimas décadas, de cabos constituídos por polímero reforçado com fibras de carbono (CFRP) utilizados para aumentar a resistência de edifícios e pontes, assegurando um aumento da vida útil das estruturas. Uma das técnicas associadas ao uso de CFRP consiste na técnica NSM, introduzida pela primeira vez na década de 40. Esta técnica, de reforço, consiste em colocar cabos CFRP em zonas pré-cortadas na zona tracionada do recobrimento do elemento de betão. Este método é relativamente simples e aumenta consideravelmente a aderência dos cabos CFRP (El-Hacha, R. e Rizkalla, S., 2004).

As principais vantagens do uso deste tipo de material residem essencialmente nestes quatro aspetos: elevada relação resistência-peso, elevada resistência à fadiga, não corrosivo, e uma elevada resistência química (Soudki, K. e Badawi, M., 2009).

No total foram testadas quatro vigas, sendo que a primeira viga ensaiada serviu de viga de controlo, sem qualquer cabo de pré-esforço. Nas restantes três vigas foram introduzidos cabos de pré-esforço, com aplicação de diferentes níveis de pré-esforço. A segunda viga apresenta uma restrição passiva, dado o nível aplicado ter sido de 0%. A terceira e quarta vigas, apresentam 40 % e 60 % da tensão última do material de reforço, respetivamente.

As vigas testadas apresentaram sempre o mesmo esquema estrutural, mantendo-se o mesmo comprimento de vão, tipologia de apoios e ponto de aplicação das cargas. As vigas encontram-se simplesmente apoiadas ao longo de 3,30 m de vão livre, sujeitas a duas cargas pontuais simétricas, distanciadas de 1,10 m.

A geometria da seção das vigas construídas foi mantida idêntica, tendo sido definida uma secção retangular de largura  $b=0,152$  m e altura de  $h=0,254$  m. Para cada viga foram colocadas armaduras de tração de dois varões de 15 mm de diâmetro, enquanto nas armaduras de compressão colocaram-se dois varões de 11,2 mm de diâmetro. A armadura transversal também foi mantida constante, tendo sido utilizados estribos de 8 mm de diâmetro, afastados de 75 mm. Foi usado 30 mm de recobrimento para as vigas. Os cabos de pré-esforço utilizados apresentavam 9,5 mm de diâmetro.

A resistência à compressão média do betão foi determinada com base em provetes cilíndricos de 100x200 mm, tendo sido estimado um valor de  $45 \pm 2,9$  MPa, aos 28 dias. Para determinar a tensão de cedência do aço e o seu módulo de elasticidade foram testadas três amostras de aço de acordo com ASTM Standart E8M-04 (2004), tendo sido obtido  $440 \pm 4$  MPa e  $190 \pm 1.9$  GPa, respetivamente. Relativamente aos cabos CFRP foram registadas as seguintes propriedades: tensão última de 1970 MPa e um módulo de elasticidade de 136 GPa.

Como já foi referido, o método utilizado na aplicação de pré-esforço foi o NSM, e portanto foi necessário abrir uma seção retangular ao longo de toda a viga, com largura  $b=15$  mm e altura  $h=25$  mm, tendo em conta as recomendações presentes na norma americana ACI

440.2R-08 (2008). Para a viga com restrição passiva, o cabo FRP foi apenas introduzido e o restante espaço existente foi preenchido com resina Epoxy. Para as duas restantes vigas, que foram submetidas a uma tensão inicial de 40% e 60% da tensão última, o cabo CFRP foi introduzido na zona pré-cortada, tendo sido aplicadas as tensões iniciais de pré-esforço usando ancoragens de fixação mecânica em cada extremo da viga, sendo posteriormente aplicado a resina Epoxy, preenchendo o restante espaço. É importante notar que o sistema de pré-esforço usado, serve para aplicações em laboratório. Em obra, devido à restrição de acessibilidade aos extremos das vigas, é necessário fazer algumas alterações, nomeadamente ao nível das ancoragens (Soudki, K. e Badawi, M., 2009).

A força de pré-esforço nos cabos CFRP foi monitorizada usando medidores de tensão colocados nos extremos de cada viga. Foi aplicado um pré-esforço inicial de cerca de 4% do nível de tensão desejado, para eliminar as perdas devido às ancoragens. Para a viga 40% pré-esforçada, registou-se uma força de 53-55 kN, correspondendo a uma tensão de 788 MPa, enquanto que para a viga com 60 % registou-se uma força de 80-83 kN, correspondendo a uma tensão de 1182 MPa. Ainda de referir, que o pré-esforço efetivo a meio vão era quase idêntico à tensão inicial registada no macaco hidráulico.

Após as quatro vigas serem ensaiadas, foi possível determinar os diagramas P- $\delta$  associados a cada uma das vigas. Para as quatro curvas obtidas, é possível identificar as três fases distintas: a elástica, a de fissuração e a de cedência. Os diagramas P-d correspondentes a cada viga são apresentados na Figura 2.2.

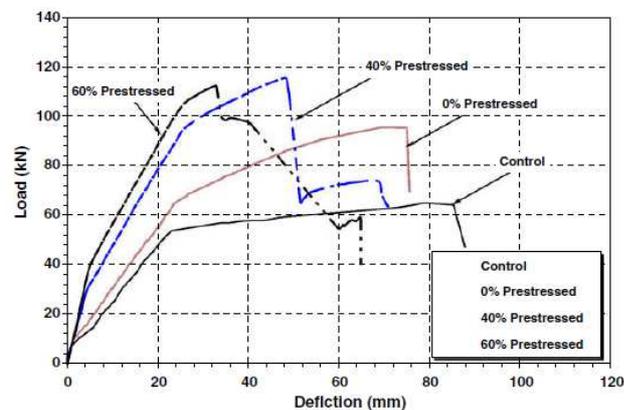


Figura 2.2 – Diagramas P- $\delta$  das vigas consideradas (Soudki, K. e Badawi, M., 2009).

Quando carga de fissuração é atingida, delimitando a fase elástica, existe a primeira alteração da rigidez do elemento. Para a primeira viga, esta carga foi atingida para um deslocamento de 1,86 mm, com um valor de 10,2 kN. A segunda viga apresenta um ligeiro acréscimo da carga de fissuração, apesar da pequena redução do deslocamento. Para as duas outras vigas registou-

se um aumento significativo na carga de fissuração, tendo sido obtido aproximadamente uma carga 3 a 4 vezes superior.

A carga de cedência é caracterizada pelo ponto onde a armadura longitudinal atinge a tensão de cedência, ficando delimitada a fase de fendilhação a partir do ponto da carga de fissuração e este ponto. Por fim, a última fase é delimitada, onde a viga é levada à rotura. A carga última registada para a viga de controlo foi de 64,3 kN com um deslocamento máximo a meio vão de 85,3 mm, enquanto que para a viga com restrição axial passiva obteve-se um valor de 96,5 kN, com um deslocamento máximo a meio vão de 65,5 mm. Para a terceira e quarta vigas ensaiadas foi medida uma carga última de 115,3 kN e 112,0 kN, respetivamente, valores que são praticamente coincidentes.

Face aos ensaios realizados, foi possível saber quais os modos de rotura para as vigas testadas, tendo sido registados dois casos distintos. Para a viga de controlo a rotura deu-se pelo esmagamento do betão na parte superior da viga, após as armaduras longitudinais de tração atingirem a cedência. Por outro lado, as restantes três vigas apresentaram o mesmo modo de rotura, devido à presença do cabo de pré-esforço, dando-se a rotura dos cabos CFRP após se atingir a cedência na armadura longitudinal de tração.

Para conseguir uma previsão dos resultados experimentais, os autores realizaram análises teóricas, com base em pressupostos da teoria de viga de Euler-Bernoulli, nomeadamente, seções planas permanecem planas após a flexão, os efeitos de corte são desprezados e aderência entre betão, aço e cabos CFRP é considerada perfeita.

A conceção do modelo baseia-se em subdividir a viga em elementos finitos para duas zonas distintas: região fendilhada e não fendilhada. O comprimento dos elementos é igual ao espaçamento médio das fendas.

Para modelar a relação tensão-extensão dos materiais foram utilizadas as seguintes equações:

$$f_c = f_c' \left( \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_0} - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right) \quad \text{com} \quad \varepsilon_0 = 2f_c' \quad E_c = 4500\sqrt{f_c'} \quad (2.5)$$

$$f_s = \begin{cases} \varepsilon_s E_s & \varepsilon_s \geq \varepsilon_y \\ f_y + 0,01E_s(\varepsilon_s - \varepsilon_y) & \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \end{cases} \quad (2.6)$$

$$f_{cfp} = \varepsilon_{cfp} E_{cfp} \quad (2.7)$$

Onde  $f_c$  é a tensão no betão correspondente à extensão no betão  $\varepsilon$ ,  $f_c'$  é a tensão resistente do betão à compressão,  $f_s$  é a tensão do aço correspondente à extensão no aço  $\varepsilon_s$ ,  $f_y$  é a tensão de cedência correspondente à extensão de cedência do aço  $\varepsilon_y$ ,  $f_{cfRP}$  é a tensão no cabo CFRP correspondente à extensão dada no cabo CFRP  $\varepsilon_{cfRP}$ ,  $E_c$  é o módulo de elasticidade do betão,  $E_s$  é o módulo de elasticidade do aço antes da cedência e  $E_{cfRP}$  o módulo de elasticidade do cabo CFRP.

O espaçamento entre fendas foi estimado pela equação do EC2, de acordo com a posição do eixo neutro da seção. Para a viga pré-esforçada, o espaçamento de fendas é calculado por:

$$s_m = 50 + 0,25k_1k_2 \frac{\phi}{(\rho_{eff})_{equivalente}} \quad (2.8)$$

Onde  $\phi$  é o diâmetro das barras não pré-esforçadas,  $\rho_{eff}$  é o rácio do reforço efetivo,  $k_1$  é o coeficiente de aderência e  $k_2$  o coeficiente da distribuição da extensão.

Por fim, o deslocamento a meio vão da viga é estimado com base em integrações das encurvaduras de zonas fendilhadas e não fendilhadas. O deslocamento pode ser obtido a partir da seguinte expressão:

$$\Delta_{mid-span} = \sum_{i=1}^{i=n} \chi_i \phi_i s_m \quad (2.9)$$

Em que  $\Delta_{mid-span}$  é o deslocamento a meio vão da viga,  $\chi_i$  a encurvadura numa dada seção,  $\phi_i$  é a rotação numa dada seção e  $s_m$  é o espaçamento médio entre fendas. A comparação dos valores obtidos experimentalmente com as previsões teóricas realizadas permitiu alcançar uma muito boa aproximação entre os resultados.

O momento máximo teórico, que as vigas pré-esforçadas podem suportar, foi determinado pelos autores tendo por base o equilíbrio de forças e a compatibilidade das extensões. A partir da posição do eixo neutro  $c$ , o momento máximo é determinado pela seguinte expressão:

$$M_{maxteo} = \alpha\beta \times bcf_c \left( c - \frac{1}{2}\beta \right) + A_s' f_s' (c - d') - A_s f_s (d - c) - A_{cfRP} E_{cfRP} \left( \varepsilon_{cfRP(pre)} + \varepsilon_{cfRP(c)} + \varepsilon_{cfRP(load)} \right) (d_f - c) \quad (2.10)$$

Perante os resultados obtidos, os autores do artigo realçam que o pré-esforço considerado, NSM CFRP, proporciona uma técnica de reforço que responde às preocupações relativas aos

SLS, nomeadamente deformações e abertura de fendas excessivas. Ainda de referir que esta técnica é muito eficaz no aumento de capacidade de resistência à flexão.

No artigo seguinte, selecionado de Padmarajariah, S., Ramaswamy, A. (2002)., os autores pretenderam avaliar o comportamento à flexão de vigas pré-esforçadas, recorrendo-se a betão de alta resistência fazendo variar diversos parâmetros: diferente volume de fibras de reforço aplicadas na zona tracionada do betão e dois tipos de seção pré-esforçada, nomeadamente, parcialmente e totalmente pré-esforçada, com diferentes níveis de pré-esforço aplicado. No total foram analisadas quinze vigas.

O uso de betão de alta resistência é preferencialmente usado em elementos pré-esforçados, devido à grande resistência que o material oferece em compressão. Na zona de ancoragem dos cabos de pré-esforço, é maior a capacidade resistente às tensões concentradas, sendo que a utilização deste tipo de betão leva a soluções mais económicas. Ainda o facto de se obter um módulo de elasticidade de valor superior permite uma redução das extensões de deformação, e consequentemente uma redução das perdas no pré-esforço inicial aplicado nos cabos da viga (Padmarajariah, S., Ramaswamy, A., 2002).

Entre os exemplos apresentados, apenas foram consideradas duas vigas: uma de seção totalmente pré-esforçada, e outra apenas parcialmente pré-esforçada, ambas sem aplicação de quaisquer fibras de reforço no betão. O esquema estrutural das vigas ensaiadas apresentava um comprimento total de 2,2 m, com um vão livre entre apoios de 2,0 m. Os pontos de aplicação das cargas são simétricos e distam 0,75 m dos apoios.

As vigas construídas apresentavam uma geometria retangular, com largura  $b=0,105$  m e altura  $h=0,240$  m. Para as duas vigas em questão, foram usados  $2\phi 6$  para a armadura longitudinal de compressão. No que diz respeito à armadura longitudinal de tração, aplicou-se  $2\phi 10$  na viga parcialmente pré-esforçada, enquanto que para a viga totalmente pré-esforçada não foi utilizado qualquer armadura de tração. A armadura transversal foi mantida constante ao longo da viga, tendo sido utilizados E2R $\phi 6$  com um afastamento de 0,075 mm. Os recobrimentos adotados foram de 25 mm, para a parte superior da viga, e de 20 mm para a parte inferior da viga. A principal diferença entre as vigas analisadas, reside na quantidade de cabos de pré-esforço introduzidos, sendo que cada cabo tinha um diâmetro de 7 mm. Para a viga de seção totalmente pré-esforçada colocaram-se quatro cabos. Para o caso da viga com seção parcialmente pré-esforçada introduziram-se apenas dois cabos de pré-esforço. O valor indicado para a tensão inicial aplicada nos cabos foi de 917,7 MPa.

A partir de provetes cúbicos, foi determinado o valor da resistência do betão à compressão, ao fim de 28 dias, tendo-se obtido um valor de 65 MPa. Os autores do artigo, relativamente ao aço utilizado para as armaduras longitudinais, apresentam diagramas tensão-extensão,

determinados a partir de modelações realizadas no programa ANSYS. Para o aço referente às armaduras longitudinais de tração e compressão, a tensão de cedência e última eram, respetivamente, de 458 MPa e 525 MPa, e o módulo de elasticidade inicial era de 200 GPa. Para os estribos, o valor da tensão de cedência era de 200 MPa, tendo sido obtido uma tensão última de 285 MPa. Relativamente aos cabos de pré-esforço, a tensão de cedência era de 1542 MPa e a tensão última era de 1598 MPa.

Todas as vigas foram ensaiadas para uma idade de 29 a 30 dias. Durante os ensaios, as cargas foram aplicadas em pequenos incrementos. A cada incremento de carga os deslocamentos e as extensões no betão foram medidos usando um medidor de precisão de 0,01 mm, para cinco seções pertinentes ao longo das vigas. O ensaio foi realizado até à rotura das vigas, tendo-se registado o modo de rotura para cada uma delas.

Uma avaliação numérica foi realizada de forma a ser comparada com os valores experimentais. Apenas metade da viga foi analisada, devido à simetria da mesma. A avaliação com base no método de elementos finitos foi realizada com o auxílio do programa ANSYS. Para este artigo, não são propostas metodologias simplificadas de cálculo para a determinação de cargas máximas e/ou deslocamentos máximos, sendo apenas realizada uma análise numérica com base em modelação de elementos finitos.

Dos resultados obtidos, a partir da resposta carga-deslocamento, os autores realçam que a fase inicial do diagrama carga-deslocamento P- $\delta$  apresenta uma boa concordância entre os valores experimentais e teóricos, começando estas curvas a distanciarem à medida que a carga aumenta.

As principais conclusões apresentadas neste artigo referem-se à presença de fibras de reforço na zona de betão tracionada, destacando que a resistência à fendilhação e à carga máxima é aumentada, e por outro lado as deformações são reduzidas. Relativamente às seções totalmente e parcialmente pré-esforçadas, a partir dos diagramas P-d apresentados, é visível a pequena diferença para ambos os casos, onde a influência da presença de fibras de reforço acaba por ser muito mais significativa que a utilização de uma seção totalmente pré-esforçada, ao invés de uma seção parcialmente pré-esforçada.

No estudo de mais um artigo de Lou, T., et al. (2013), os autores apresentam uma avaliação numérica do comportamento à flexão para vigas contínuas com cabos de pré-esforço externos à viga. Os vários parâmetros considerados na análise consideram a quantidade de armadura longitudinal, a configuração dos cabos externos e o tipo de carregamento.

O uso de pré-esforço externo é cada vez mais utilizado na reabilitação e construção de pontes de betão, que na prática da engenharia são utilizadas sob a forma de estruturas contínuas de diversos vãos. Durante os últimos 20 anos, muitos trabalhos experimentais e teóricos têm

---

levado a estudar o comportamento de vigas simplesmente apoiadas com pré-esforço externo, e em particular, os efeitos de segunda ordem gerados pelas alterações das excentricidades nos cabos com os deslocamentos nas vigas (Tan and Ng 1997, Harajli et al. 1999, Pisani 2005, Ng and Tan 2006, Au et al. 2008, Lou and Xiang 2010).

Para os exemplos expostos adiante, foram tidas em consideração apenas duas vigas contínuas, em que o parâmetro considerado corresponde à quantidade da armadura longitudinal utilizada. Para ambas as vigas, o esquema estrutural foi o mesmo, com comprimento total de 20,0 m, constituída por dois vãos de 10,0 m. As cargas estão aplicadas a meio vão de cada um dos tramos.

As vigas apresentam uma seção retangular de largura  $b = 0,30$  m e altura  $h = 0,60$  m. A armadura longitudinal de compressão foi mantida igual, assumindo-se  $A_s' = 3,60$  cm<sup>2</sup>. Em relação à armadura de tração, para a primeira viga considerou-se  $A_s = 5,40$  cm<sup>2</sup>, enquanto para a segunda considerou-se  $A_s = 10,80$  cm<sup>2</sup>. Ao longo de cerca de 6,67 m, centrado no apoio central da viga (zona de momento fletores negativos) a armadura de tração está aplicada na parte superior da viga, e por sua vez a armadura de compressão aplicada na parte inferior da viga.

Para o betão, a resistência média à compressão é de 40 MPa, a resistência média à tração 3 MPa e a extensão última no betão de 3,3 %. Para o aço não pré-esforçado, a tensão de cedência média é 450 MPa, com um módulo de elasticidade de 200 GPa. Para o aço pré-esforçado tem-se uma área total de  $A_p = 4,0$  cm<sup>2</sup>, com uma tensão última e de cedência de 1860 MPa e  $0,9f_{pu} = 1674$  MPa, respetivamente, e módulo de elasticidade de 195 GPa. O pré-esforço efetivo aplicado foi de 1120 MPa.

Ao longo da viga, a excentricidade dos cabos é variável. Face ao esquema estrutural apresentado, são considerados 5 desviadores. O primeiro e último desviador, colocados nos extremos da viga encontram-se numa posição sem excentricidade. Na zona de aplicação das cargas, estão colocados dois desviadores de excentricidade +150 mm abaixo do eixo neutro. Por fim, tem-se um desviador na zona do apoio central, posicionado com uma excentricidade de -100 mm, ou seja, acima do eixo neutro.

A partir da análise numérica realizada pelos autores, para as duas vigas, o modo de rotura deu-se pelo esmagamento do betão a meio vão de cada tramo. Antes de ser atingida a rotura, para as vigas analisou-se quatro fases sequenciais, nomeadamente, a fissuração no apoio central, segunda fissuração a meio vão, seguido da formação de uma rótula plástica no apoio central por cedência do aço não pré-esforçado e posteriormente a segunda rótula plástica formada a meio vão.

A resposta carga-deslocamento foi analisada pelos autores. A partir dos resultados obtidos para as vigas contínuas, como a rotura ocorre a meio vão, o aumento da quantidade de armadura não pré-esforçada nesta zona revela-se mais eficaz do que o aumento da quantidade de armadura na zona do apoio central, dado considerar-se uma seção não crítica. Porém, o aumento da armadura a meio vão resulta num deslocamento máximo superior e aumento da tensão nos cabos de pré-esforço.

Para as vigas contínuas, devido à redistribuição dos momentos, a relação entre a carga aplicada e o momento numa dada seção perde a sua linearidade quando a seção crítica assume um comportamento não linear. Nos estados iniciais de carga, o momento aumenta linearmente, até se atingir a primeira fissura no apoio central, não ocorrendo redistribuição de momentos nesta fase elástica. Após a primeira fissura, o momento é redistribuído para a zona entre apoios, resultando numa redução do crescimento dos momentos no apoio central, e aumentando o crescimento do valor dos momentos fletores a meio vão das vigas. Ainda de referir, que o aparecimento das fissuras a meio vão, não manifestam nenhum efeito assinalável na redistribuição dos momentos (Lopes, S. et al 1997)

## 2.1 Limites regulamentares para a deformação

Segundo a EN 1992-1-1, a deformação de uma estrutura não deve ser prejudicial ao seu correto funcionamento ou ao seu aspeto. Tendo em conta a natureza e função da estrutura, bem como dos acabamentos, divisórias e acessórios, o EC2 estabelece valores limites para as deformações impostas, as quais não devem exceder os valores compatíveis com as deformações de outros elementos não estruturais ligados à estrutura. Para uma dada estrutura sujeita a ações quase-permanentes, o seu aspeto ou funcionamento pode ser alterado, caso a flecha  $\delta$  de uma viga seja superior a:

$$\delta = \frac{L}{250} \quad (2.11)$$

Em que  $L$  representa o vão entre apoios. Para o deslocamento limite determinado, tendo em conta o comportamento a longo prazo, deve ser considerado o efeito de fluência e retração do betão. Se a flecha afetar partes adjacentes à estrutura, o valor limite de  $\delta$  calculado pela Expressão 2.16 deve ser reduzido para metade.

## 2.2 Metodologias para o cálculo de deformações

Para realizar uma comparação dos resultados experimentais obtidos nos diversos artigos selecionados, ao nível das cargas e deformações, recorreu-se às seguintes metodologias: EN 1992-1-1 e aos programas de análise não linear ANLv4 e ANLv3, explicitados adiante.

### 2.2.1 Eurocódigo 2

O deslocamento no ponto de fissuração  $\delta_{cr}$  é estimado a partir do momento de fissuração  $M_{cr}$ , associado à carga de fissuração  $P_{cr}$ , tendo em conta o valor da rigidez de flexão da primeira fase  $EI_I$ , considerada como elástico linear. O momento de fissuração  $M_{cr}$ , a partir do qual se inicia a fase de fissuração, pode ser estimado, para uma seção retangular de betão, sujeita a flexão simples (Beeby, 1995), através da seguinte expressão:

$$M_{cr} = f_{ctm} \frac{bh^2}{6} \quad (2.12)$$

Em que  $f_{ctm}$  é o valor médio da resistência do betão à tração,  $b$  a largura e  $h$  a altura da seção.

Para estimar o deslocamento de cedência  $\delta_y$  é necessário calcular o momento de cedência  $M_y$ , associado à carga de cedência  $P_y$  e o valor da rigidez da fase de fissuração  $EI_{II}$ . O momento de cedência pode ser obtido a partir de fórmulas simplificadas, presentes no manual Tabelas e Ábacos de dimensionamento segundo o EC2 (Barros e Figueiras, 2010), apresentadas de seguida:

$$\omega = \frac{A_s f_{sym}}{bd \cdot f_{cm}} \quad (2.13)$$

$$\nu = \frac{N}{bh \cdot f_{cm}} \quad (2.14)$$

$$M_y = \mu bd^2 f_{cm} \quad (2.15)$$

Em que  $A_s$  é a área de armadura de tração,  $d$  a altura útil da seção,  $f_{sym}$  a tensão de cedência média no aço,  $f_{cm}$  o valor médio da resistência do betão à compressão e  $\mu$  o momento

reduzido. O momento reduzido  $\mu$  é obtido a partir da utilização de ábacos, tendo em conta a taxa de armadura  $\omega$  e no caso da flexão composta, o esforço axial reduzido  $\nu$ .

No anexo H da EN 1992-1-1 é referido que na ausência de uma avaliação mais rigorosa da rigidez, pode utilizar-se a seguinte expressão para um elemento fissurado:

$$EI_{II} \approx 0,4 \frac{E_{cm} \cdot I_c}{\gamma_{ce}} \quad \text{com} \quad \gamma_{ce} = 1,2 \quad (2.16)$$

Em que  $E_{cm}$  é o valor médio do módulo de elasticidade do betão,  $I_c$  o momento de inércia da seção em fase elástica,  $\gamma_{ce}$  é um coeficiente parcial relativo ao betão e  $EI_{II}$  é a rigidez à flexão na fase de fissuração.

Por fim para determinar o momento máximo  $M_{max}$ , associado à carga máxima  $P_{max}$ , este pode ser calculado recorrendo às mesmas fórmulas simplificadas já referidas, alterando apenas o valor de  $f_{sym}$  pelo valor da tensão média última do aço  $f_{sum}$ . De referir que não sendo apresentada nenhuma proposta no EC2 para o cálculo da rigidez na última fase, não é possível estimar o deslocamento máximo  $\delta_{max}$ .

### 2.2.2 Programas ANL

Os programas de análise não linear utilizados baseiam-se no método dos elementos finitos de viga de dois nós, tendo em consideração as deformações por corte.

Muito sumariamente, numa primeira fase dos programas são determinados os diagramas Momento-Curvatura e Esforço Transverso-Distorção, a partir das características geométricas da seção transversal e das propriedades mecânicas dos materiais. Numa segunda fase dos programas, os esforços internos e respetivas deformações da estrutura analisada, após definida a modelação do esquema estrutural, são determinados a partir de um algoritmo incremental de carga, sendo os resultados obtidos até ser atingida a carga máxima. No capítulo seguinte, o programa será abordado mais detalhadamente.

### 3 PROGRAMA COMPUTACIONAL ANL

A avaliação numérica da deformação em vigas submetidas a esforços axiais de flexão constitui o objetivo central deste trabalho. Para a sua concretização houve a necessidade em proceder a alguns desenvolvimentos num programa inicial. O programa inicial, capaz de modelar vigas em flexão restringidas por cabos externos não aderentes à viga, não permitia a modelação adequada de vigas com cabos inclinados, mudando de direção em desviadores, nem a modelação de cabos aderentes às vigas.

De modo a testar a aplicabilidade deste programa, confrontaram-se os resultados obtidos com outros, essencialmente obtidos experimentalmente, e por outros autores.

O programa inicial, implementado em linguagem FORTRAN, realiza uma análise não linear do comportamento estrutural de vigas restringidas axialmente, em que a determinação de resultados é efetuado com base na metodologia dos elementos finitos, baseada em deslocamentos, a partir de um processo incremental de cargas. Ainda de referir que a determinação da matriz de rigidez e o vetor sollicitação elementares dos elementos de viga são determinados com base na Teoria de vigas de Timoshenko (Oñate, E., 1992).

Resumidamente, o programa funciona em 2 fases: primeiramente, com a utilização de 2 algoritmos, é feita uma análise ao nível da seção da viga, onde são determinados os diagramas Momento-Curvatura  $M-\chi$  e Esforço Transverso-Distorção  $V-\gamma$ , para diversos níveis de esforços axiais, obtendo-se assim  $n$  curvas  $M-\chi$  e  $V-\gamma$ , para os correspondentes  $n$  esforços axiais. Numa segunda fase, com base nestes diagramas obtidos, é utilizado um algoritmo incremental de carga para determinar sucessivamente a configuração geométrica dos elementos e respetivos esforços atuantes, garantindo o equilíbrio entre esforços internos e cargas aplicadas.

#### 3.1 Programa Momento-Curvatura $M-\chi$

O programa numérico Momento-Curvatura tem o objetivo de determinar a evolução dos momentos fletores correspondentes à evolução da curvatura a que a seção está sujeita, até se

atingir a rotura. Neste programa, relativamente à geometria da seção, a análise pode ser realizada para seções retangulares, em T ou em I. Porém, a análise é unicamente efetuada para seções de betão armado.

Os resultados determinados por este programa dependem fundamentalmente das propriedades dos materiais, betão e aço, quer em compressão, quer em tração.

O diagrama de comportamento do betão à compressão considerado no presente trabalho, é apresentado na Figura 3.1, o qual pode ser descrito pelas seguintes equações:

$$\sigma_{cc} = f_{cm} \left[ \frac{c_k \eta - \eta^2}{1 + (c_k - 2) \eta} \right] \quad \text{se } 0 \leq \varepsilon_{cc} \leq \varepsilon_{cu} \quad (3.1)$$

Onde  $c_k$  e  $\eta$  são parâmetros definidos por:

$$c_k = 1,05 \frac{E_{c0}}{E_{cpc}} \quad \text{com} \quad E_{cpc} = \frac{f_{ctm}}{\varepsilon_{cpc}} \quad (3.2)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_{cc}}{\varepsilon_{cpc}} \quad (3.3)$$

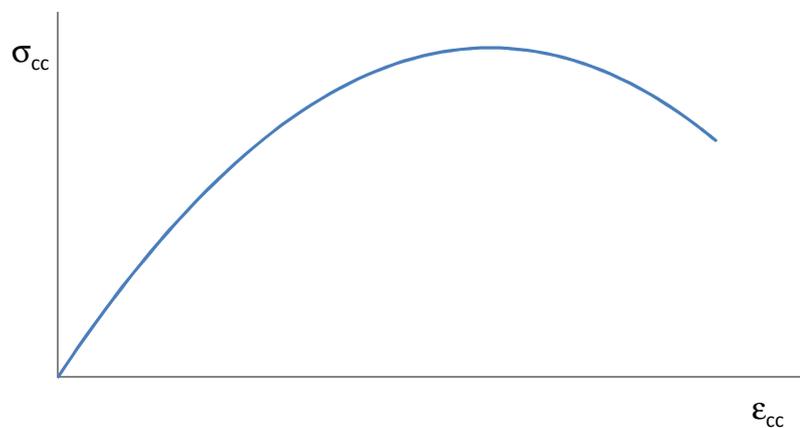


Figura 3.1 – Diagrama tensão-extensão do betão em compressão.

Na Figura 3.2 é apresentado o diagrama de comportamento do betão em tração considerado neste trabalho, o qual pode ser descrito pelas seguintes equações

$$\sigma_{ct} = E_{c0} \varepsilon_{ct} \quad \text{se } 0 \leq \varepsilon_{ct} \leq c_k \quad (3.4)$$

$$\sigma_{ct} = f_{ctm} - 0,1f_{ctm} \frac{(0,00015 - \varepsilon_{ct})}{(0,00015 - c_k)} \quad se \quad c_k < \varepsilon_{ct} \leq 0,15\% \quad (3.5)$$

$$\sigma_{ct} = f_{ctm} - \left( \frac{0,8f_{ctm}}{0,00003} \right) (\varepsilon_{ct} - 0,00015) \quad se \quad 0,15\% < \varepsilon_{ct} \leq 0,18\% \quad (3.6)$$

$$\sigma_{ct} = 0,2f_{ctm} - \left( \frac{0,2f_{ctm}}{0,01} \right) (\varepsilon_{ct} - 0,00018) \quad se \quad 0,18\% < \varepsilon_{ct} \leq 10\% \quad (3.7)$$

Onde:

$$c_k = 0,9 \frac{f_{ctm}}{E_{c0}} \quad (3.8)$$



Figura 3.2 – Diagrama tensão-extensão do betão em tração.

O programa pode considerar dois tipos de aço, nomeadamente, o aço NR e o aço ER. As seguintes expressões definem o comportamento do aço NR.

$$\sigma_{st} = E_s \varepsilon_{st} \quad se \quad \varepsilon_{st} \leq \varepsilon_{sy} \quad (3.9)$$

$$\sigma_{st} = f_{sym} \quad se \quad \varepsilon_{sy} < \varepsilon_{st} < 0,25\varepsilon_{suk} \quad (3.10)$$

$$\sigma_{st} = f_2 + f_1 \varepsilon_{st} \quad se \quad 0,25\varepsilon_{suk} \leq \varepsilon_{st} \leq \varepsilon_{suk} \quad (3.11)$$

Onde  $f_1$  e  $f_2$  são dados pelas seguintes expressões:

$$f_1 = \frac{f_{sym}(k_s - 1) / \varepsilon_{suk}}{0,75} \quad (3.12)$$

$$f_2 = f_{sym} - 0,25\varepsilon_{suk} f_1 \quad (3.13)$$

O diagrama de comportamento do aço ER é definido a partir das seguintes expressões:

$$\sigma_{st} = E_s \varepsilon_{st} \quad \text{se } \varepsilon_{st} \leq 0,8\varepsilon_{sy} \quad (3.14)$$

$$\sigma_{st} = 0,8f_{sym} + f_1 + f_2 \quad \text{se } 0,8\varepsilon_{sy} < \varepsilon_{st} < 1,9\varepsilon_{sy} \quad (3.15)$$

$$\sigma_{st} = f_{sym} \left[ 1 + (k_s - 1) \frac{(\varepsilon_{st} - \varepsilon_{sy})}{(\varepsilon_{suk} - \varepsilon_{sy})} \right] \quad \text{se } 1,9\varepsilon_{sy} \leq \varepsilon_{st} \leq \varepsilon_{suk} \quad (3.16)$$

Onde  $f_1$  e  $f_2$  são dados pelas expressões:

$$f_1 = f_{st} \varepsilon_{ls1} \quad \text{com } \varepsilon_{ls1} = \varepsilon_{st} - 0,8\varepsilon_{sy} \quad (3.17)$$

$$f_2 = \frac{f_{sym}}{25} - 0,1322 \frac{E_s}{\varepsilon_{sy}} \varepsilon_{ls2}^2 \quad \text{com } \varepsilon_{ls2} = \varepsilon_{st} - 0,8\varepsilon_{sy} - 0,55\varepsilon_{sy} \quad (3.18)$$

Os diagramas tensão-extensão do aço em tração considerados para os aços do tipo: NR e ER, são apresentados na Figura 3.3.

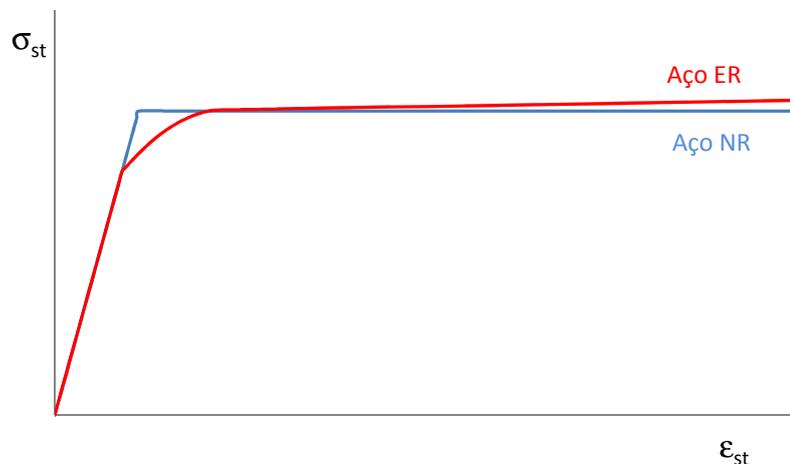


Figura 3.3 – Diagrama tensão-extensão do aço NR e ER em tração.

Assim, e assumindo uma determinada curvatura  $\chi$  para a secção transversal considerada, é possível avaliar as extensões nos materiais em função da profundidade do eixo neutro. No aço considera-se a extensão ao nível das armaduras respetivas. O betão é subdividido em cerca de 200 faixas, de modo a poder considerar-se que a extensão não varia significativamente no seu interior. As tensões correspondentes podem então ser avaliadas a partir das propriedades dos materiais. Por sua vez, as forças correspondem à integração das tensões determinadas. A posição do eixo neutro, correspondente à curvatura considerada, é determinada a partir da

condição de equilíbrio de forças segundo a direção normal à seção transversal. De referir que esta condição de equilíbrio considera a força axial aplicada.

Neste algoritmo, a convergência é atingida ao fim de cada iteração a partir da seguinte expressão. Nesta expressão  $F_s$  representa o somatório das forças de tração e compressão no aço,  $F_c$  o somatório das forças de tração e compressão no betão,  $N$  o esforço axial aplicado na direção normal à seção transversal e  $F_{Rd}$  a força resistente máxima do aço de tração em cedência. O critério de convergência é variável, sendo por norma considerado um valor de  $1E-7$ .

$$\frac{F_s + F_c - N}{F_{Rd}} \quad \text{com} \quad F_{Rd} = f_{sym} A_s \quad (3.19)$$

Atingida a convergência, é possível a avaliação do momento fletor  $M$  instalado correspondente à curvatura admitida. Na Figura 3.4 é apresentado um diagrama  $M-\chi$  tipo, no qual são visíveis os 3 Estados característicos do comportamento das seções de betão armado.

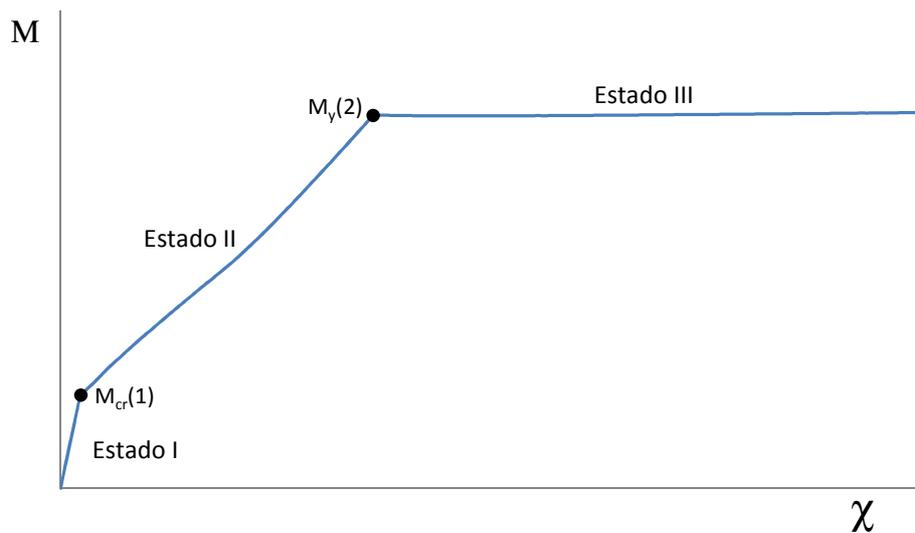


Figura 3.4 – Diagrama Momento-Curvatura  $M-\chi$  tipo.

### 3.2 Programa Esforço Transverso-Distorção $V-\gamma$

A avaliação da matriz de rigidez e do vetor solicitação, no programa principal, baseia-se na teoria de Timoshenko para a formulação do elemento finito de viga. Como se sabe, uma das deformações consideradas nesta formulação é a deformação de corte, a par da de flexão.

Assim, neste sub-programa de análise não linear procura-se saber a evolução da distorção  $\gamma$  com a evolução do esforço transverso  $V$  a que a secção transversal está sujeita.

Importa ainda referir que, no caso do algoritmo anterior foi considerado que a seção plana antes da deformação permanecia plana depois da deformação. Este princípio não é assumido na formulação do elemento finito de viga seguindo a teoria de Timoshenko. Apesar disso, admite-se que a curva  $M-\chi$  é representativa do comportamento da secção à flexão.

Tendo em consideração os estudos experimentais e teóricos desenvolvidos e apresentados por Rahal (Rahal, K., 2008, 2010 e 2013) acerca da distorção originada por tensões tangenciais em membranas planas, verifica-se um comportamento tensão tangencial-distorção semelhante ao evidenciado pelo diagrama  $M-\chi$ . Neste contexto, uma alternativa possível consiste em admitir que a degradação da rigidez secante no diagrama  $V-\gamma$  é semelhante à que se verifica no diagrama  $M-\chi$ .

No entanto, conservadoramente, é possível recorrer aos valores determinados pelo EC2 para a definição de um diagrama  $V-\gamma$  independente. Neste diagrama, apresentado na Figura 3.5, admite-se um comportamento elástico linear até metade da resistência  $V_{Rdc}$ . No ponto  $V=V_{Rdc}$ , admite-se que a distorção vale o dobro do valor elástico. De facto, não é possível separar a fissuração da seção por motivo da flexão, da deformação devida ao esforço transverso. Mas também não foi possível encontrar forma mais rigorosa de o fazer. Importa realçar que a compressão a que a seção se encontra sujeita ajuda na referida resistência. Por fim, o ponto de resistência máxima  $V_{Rds}$  terá, seguramente, resistência superior ao valor determinado pelo EC2, em virtude do esforço axial de compressão. A distorção admitida neste ponto corresponde à extensão máxima dos estribos. Assim sendo, no diagrama correspondente à relação Esforço Transverso-Distorção da seção analisada, são definidas três fases a partir das seguintes equações:

$$V = GA_r \cdot \gamma \quad \text{se } 0 < \gamma \leq 0,5 \gamma_{Rdc} \quad (3.20)$$

$$V = \frac{V_{Rdc}}{2} + \frac{GA_r}{3} (\gamma - 0,5 \gamma_{Rdc}) \quad \text{se } 0,5 \gamma_{Rdc} < \gamma \leq 2 \gamma_{Rdc} \quad (3.21)$$

$$V = V_{Rdc} + \left[ \frac{(V_{Rds} - V_{Rdc})}{(\gamma_{uk} - 2 \gamma_{Rdc})} \right] (\gamma - 2 \gamma_{Rdc}) \quad \text{se } 2 \gamma_{Rdc} < \gamma \leq \gamma_{uk} \quad (3.22)$$

Onde  $\gamma_{Rdc}$  e  $\gamma_{uk}$  são dados por:

$$\gamma_{Rdc} = \frac{V_{Rdc}}{GA_r} \quad (3.23)$$

$$\gamma_{uk} = \frac{f_{ywm}}{\epsilon_s} \frac{d^2}{s} \cot \theta \quad (3.24)$$

$V_{Rdc}$  e  $V_{Rds}$  são calculados a partir das equações apresentadas na EN1992-1-1.

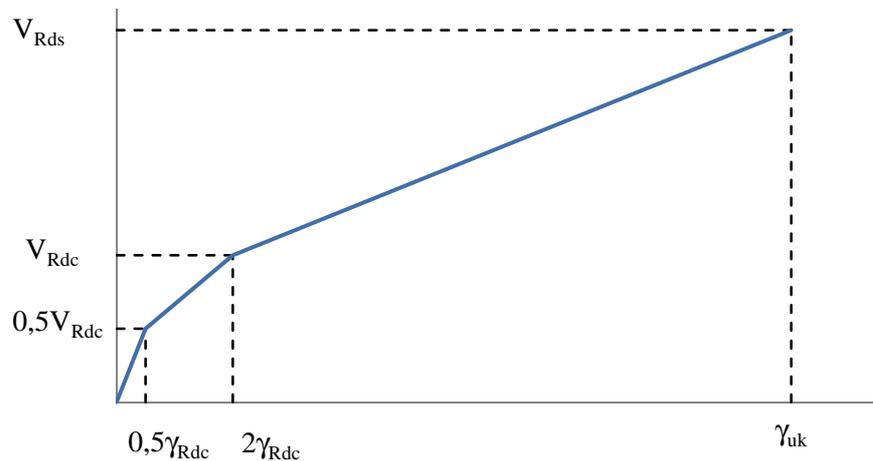


Figura 3.5 – Diagrama Esforço Transverso-Distorção V- $\gamma$  tipo.

Importa ainda realçar que nos exemplos analisados, o esforço transverso é máximo onde o momento é mínimo, e vice-versa. Deste modo, não sendo possível a independência total entre estas duas parcelas, é contudo possível limitar a sua interdependência. Por outro lado, espera-se que a distorção, ou a resistência, estejam algo afastadas das do ponto  $V=V_{Rdc}$ .

### 3.3 Programa ANLv3

Numa segunda fase, após serem gerados ficheiros referentes aos diagramas Momento-Curvatura M- $\chi$  e Esforço Transverso-Distorção V- $\gamma$ , o programa computacional ANL utilizará estes dados na análise não linear para calcular a deformada da viga em análise.

O foco relativo às vigas axialmente restringidas é realizado com base num cabo de pré-esforço, fixado externamente em duas seções transversais, a uma determinada excentricidade na seção transversal e com uma determinada tensão inicial. Durante a análise, a evolução do esforço axial do cabo dependerá das deformações axiais entre as duas referidas seções transversais ao nível do cabo.

Como já foi referido, o algoritmo do programa de análise não linear, determina, a cada incremento de carga, a configuração geométrica da viga. Na formulação básica do elemento

finito, os parâmetros de flexão e corte são definidos segundo a Teoria de vigas de Timoshenko, que considera um campo de deslocamentos baseado em três hipóteses para a configuração da deformada do elemento:

- i) Os deslocamentos verticais de todos os pontos de uma seção transversal são pequenos e iguais aos dos eixos da viga;
- ii) O deslocamento lateral é nulo;
- iii) As seções transversais normais ao eixo da viga antes da deformação permanecem planas, mas não necessariamente ortogonais ao referido eixo depois da deformação.

Com base nesta metodologia, é possível chegar a uma equação de equilíbrio interno do elemento a partir da seguinte expressão:

$$ka - f = q \quad \text{com} \quad k = (k_f + k_c) \quad (3.25)$$

Onde  $k_f$  e  $k_c$  representam as parcelas de flexão e de corte da matriz de rigidez.

Os deslocamentos nodais são determinados com recurso a um algoritmo incremental de carga até se atingir o valor máximo. A cada incremento, uma nova configuração da viga é determinada, a que lhe corresponde um dado vetor de forças internas capaz de equilibrar as forças externas aplicadas. Assim, a cada incremento é realizado repetidamente um sub-processo iterativo até se atingir a convergência entre forças internas e externas. Caso não se consiga equilibrar internamente as cargas externas, considera-se que a estrutura analisada atinge a sua capacidade máxima e o processo incremental termina.

Assim, a cada incremento de carga, para uma dada sub-iteração, é determinado o vetor global de forças internas  $F_i$ , correspondente às deformações na estrutura. A partir dos vetores das forças internas  $F_i$  e externas  $F_e$ , assume-se que o equilíbrio é atingido quando os valores sejam aproximadamente simétricos para os respetivos nós. Para avaliar o equilíbrio da viga, é definido um vetor de desequilíbrio de forças  $\Psi$ , que resulta da diferença entre as cargas externas e o valor dos esforços internos, dado pela seguinte expressão:

$$\Psi = F_e - F_i \quad (3.26)$$

Enquanto  $\Psi$  for superior ao critério de convergência, o sub-processo iterativo é repetido, determinando-se um ajustamento da configuração  $\Delta a$  dado por:

$$K \Delta a = \Psi \quad (3.27)$$

sendo calculado um novo vetor de forças internas  $F_i$ , que resultará numa nova avaliação do desequilíbrio de forças. Quando é atingido o equilíbrio, o sub-processo iterativo termina e é aplicado um novo incremento de carga.

O critério de convergência adotado baseia-se na norma euclidiana do vetor  $\Psi$ . O limite tolerado varia entre  $1,0E-8$  nas primeiras iterações e  $1,0E-3$  na sub-iteração 50. Não sendo verificado o critério de convergência termina o processo iterativo.

Após o programa terminar o processo iterativo, considera-se ter sido atingida a rotura. Ao longo do processo incremental é possível registar esforços e deformações. Na Figura 3.6 é apresentada um diagrama carga-deslocamento  $P-\delta$  tipo, determinado pela flexão de uma viga.

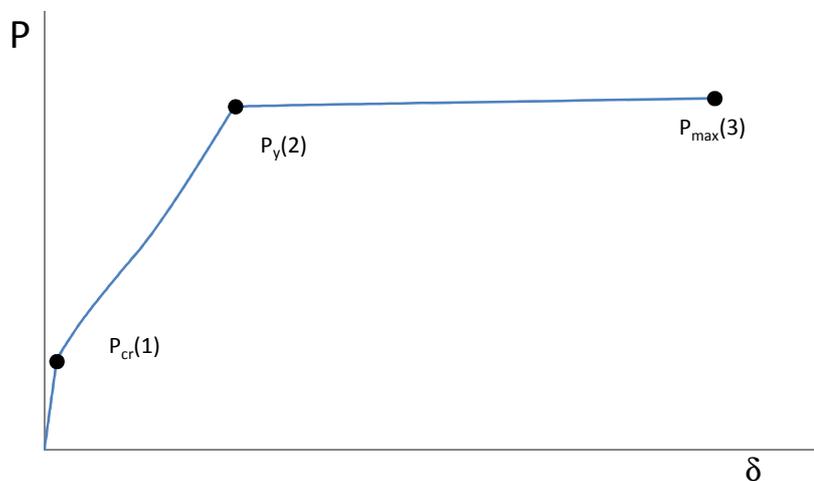


Figura 3.6 – Diagrama Carga-Deslocamento  $P-\delta$  tipo.

### 3.4 Programa final ANLv4

O programa anterior contém diversas limitações que interessa ultrapassar, nomeadamente a possibilidade de utilizar desviadores nos cabos. No infinito, o cabo considera-se aderente à viga. Este desenvolvimento corresponde ao principal objetivo deste trabalho.

Porém, ainda referente ao programa Momento-Curvatura  $M-\chi$ , detetaram-se algumas imprecisões, nomeadamente ao nível do ponto de fissuração. A dificuldade em representar corretamente o diagrama tensão-extensão do betão em tração conduziu a alguns desvios nos resultados. Esta situação ocorre maioritariamente para vigas pouco armadas onde a força no aço é muito inferior à força no betão tracionado.

Como referido anteriormente, o programa inicial ANL determina, com base num processo incremental de carga, as deformações e respetivos esforços, para vigas submetidas a esforços axiais e de flexão.

As alterações realizadas incidiram principalmente em torno dos cabos de pré-esforço, melhorando o comportamento dos cabos (ao nível das deformações e da evolução das tensões) e permitindo definir mais corretamente a configuração real destes, em vez de considerar apenas cabos retos.

No que diz respeito à evolução de tensões nos cabos, a relação tensão-extensão utilizada, de acordo com o REBAP (D'Arga e Lima, J., 2011), é definida pelas equações seguintes.

$$\sigma_{ps} = E_{ps} \cdot \varepsilon_{ps} \quad \text{para} \quad \sigma_{ps} \leq 0,7 f_{psy} \quad (3.28)$$

$$\sigma_{ps} = E_{ps} \varepsilon_{ps} - 0,823 \left( \frac{\sigma_{ps}}{f_{psy}} - 0,7 \right)^5 \quad \text{para} \quad \sigma_{ps} > 0,7 f_{psy} \quad (3.29)$$

Após esta alteração, o principal foco consistiu em modelar a posição dos cabos, permitindo definir a configuração real destes em casos de cabos com desviadores ou aderentes.

No programa inicial ANL considera-se que o cabo de pré-esforço está ancorado em 2 seções, permitindo definir inicialmente apenas uma excentricidade constante ao longo da viga. Assim sendo, estas duas seções sofrem os efeitos do cabo, materializados numa força com a direção do eixo da viga e num momento dado pelo produto da excentricidade e a força axial inicial no cabo, ambos concentrados em cada centro geométrico das seções. Nas restantes seções intermédias, o valor do momento fletor é corrigido pelo produto do esforço axial pelo deslocamento vertical da seção. Ainda de referir que o cabo não introduz alterações ao nível do esforço transversal.

Com o objetivo de eliminar a limitação de excentricidade constante ao longo da viga, no programa final ANL, o cabo de pré-esforço passou a ser definido a partir de troços retos delimitados pelos desviadores a considerar, os quais são posicionados ao longo da viga com determinadas excentricidades. Assim, ao longo do cabo de pré-esforço, a partir dos troços definidos é possível avaliar a excentricidade e a inclinação ou o ângulo em relação ao eixo horizontal da viga em cada seção transversal considerada na viga. Para o efeito foi elaborada uma nova sub-rotina, designada por '*excent0*' destinada a avaliar a inclinação inicial do cabo em cada um dos troços. Sempre que a configuração geométrica da viga é alterada, a posição dos desviadores do cabo é atualizada, adicionando-se à excentricidade do desviador o correspondente deslocamento vertical nesse ponto. Este cálculo é efetuado numa outra sub-rotina '*excent1*' no final de cada incremento de carga.

Ainda na sub-rotina *'excent0'*, com base na inclinação de cada troço, são determinadas as excentricidades iniciais do cabo relativamente a cada seção transversal considerada na discretização efetuada na viga. Posteriormente, estas excentricidades são atualizadas na sub-rotina *'excent1'*. A partir destas excentricidades também são calculadas as excentricidades no ponto médio dos elementos da viga.

As inclinações dos cabos, conjuntamente com os correspondentes esforços axiais, permitem definir as forças (segundo as direções axial e transversal) aplicadas nos pontos extremos dos troços. Para além disso, as inclinações dos cabos, conjuntamente com as deformações da viga, são ainda utilizadas para avaliar as variações de extensão, e conseqüentemente as variações de tensão, em cada troço. As excentricidades dos elementos permitem avaliar as variações de momento fletor imposta pelos cabos.

Como já foi referido no ponto 3.3, o programa ANL, estabelecido na formulação básica de elementos finitos segundo a Teoria de vigas de Timoshenko, calcula, para cada nível de carga, os deslocamentos nodais a partir de um sub-processo iterativo, o qual termina quando se obtêm a convergência entre forças internas e externas. Este processo de cálculo é resolvido na sub-rotina *'anlvt'*. A partir desta sub-rotina, foi criada uma nova sub-rotina *'anlvt0'* utilizada para iniciar o cálculo de deslocamentos apenas para a iteração "0". Nesta adaptação, existiu a necessidade em introduzir um amortecedor de convergência, que assume apenas parte das forças de desequilíbrio ao longo do sub-processo de convergência. Este desenvolvimento é muito importante no caso de cabos com elevados pré-esforços.

A variação da tensão, ou da extensão, nos cabos, por motivo da alteração da configuração geométrica, é efetuada troço a troço. Em cada troço considera-se a extensão média ao longo dos elementos da viga na direção do cabo e o desnível entre pontos extremos. A extensão ao nível dos cabos em cada elemento é determinada tendo em consideração duas parcelas, uma parcela devido à curvatura  $\chi$  das seções do elemento, em função do momento instalado, e outra parcela devido à deformação axial  $\varepsilon_N$  do elemento, em função do esforço axial  $N$  instalado. As expressões referentes à extensão média de um elemento  $\varepsilon_i$  e à extensão média em cada troço  $\varepsilon_{med}$  são apresentadas abaixo, respetivamente. Nestas equações  $h$  representa a altura da seção,  $x$  a profundidade do eixo neutro,  $e$  a excentricidade do cabo relativamente ao eixo da seção central e  $l_i$  o comprimento de cada elemento de um dado troço.

$$\varepsilon_i = \chi \left[ e + \left( \frac{h}{2} - x \right) \right] + \varepsilon_N \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_{med} = \frac{\sum \varepsilon_i l_i}{\sum l_i} \quad (3.31)$$

O cálculo das extensões e respetivo comprimento nos troços ocorre em duas sub-rotinas: *'extcps0'* e *'extcps1'*. A primeira é destinada ao cálculo das extensões iniciais nos cabos, enquanto que a segunda é utilizada nos sub-processos iterativos.

Na sub-rotina *'extcps1'*, é determinada a variação de extensão, e respetiva variação de tensão e variação de esforço axial ao nível dos cabos, em cada troço a partir dos comprimentos calculados devidos à extensão média em cada troço do cabo e do desnível entre desviadores, tendo em conta os valores iniciais destes. Assim, a extensão instalada no cabo será dada pela extensão inicial, adicionando a variação da extensão axial que resulta da variação da extensão média ao nível do cabo e do desnível entre desviadores. A tensão no cabo é dada pela relação tensão-extensão apresentada anteriormente nas Expressões (3.28) e (3.29).

Os esforços axiais, de corte e de flexão transmitidos do cabo para a viga são determinados no programa final ANL, de forma semelhante ao efetuado no programa inicial. As adaptações recaem sobretudo na consideração das componentes vertical e horizontal da força no cabo, resultantes da inclinação do troço em consideração. As forças são sempre calculadas troço a troço, ao invés de serem determinados para o cabo na sua totalidade. Na Figura 3.7 é apresentado um esquema representativo das forças consideradas.

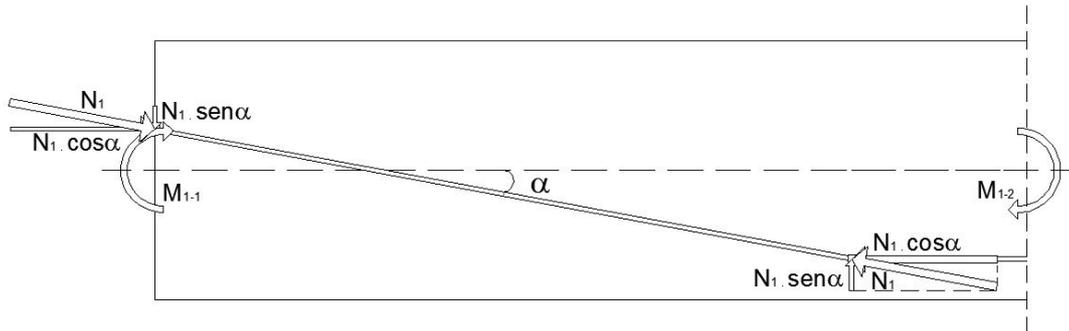


Figura 3.7 – Esquema representativo das forças aplicadas ao nível do cabo de pré-esforço numa viga.

Neste contexto, para o equilíbrio da viga, para além das forças externas aplicadas devem ser consideradas as forças internas resultantes da tensão instalada no cabo. Num dado troço, as componentes horizontal e vertical da força instalada no cabo devem ser consideradas nos nós extremos do cabo tal como é indicado na Figura 3.7. Os momentos a considerar são determinados pelo produto da excentricidade do desviador pela componente horizontal da força no cabo. Para além disso, as seções intermédias, o momento fletor é ainda alterado pelo produto da componente horizontal da força ao nível do cabo pela soma da excentricidade média em cada elemento com o afundamento da seção. Este processo de cálculo ocorre na sub-rotina *'upload'*. Esta sub-rotina é utilizada sempre que seja necessário calcular variações da força axial no cabo.

Como a análise ao nível dos cabos é realizada para troços isoladamente, é expectável que surjam diferenças significativas de esforço axial entre troços adjacentes, não totalmente absorvíveis pelo atrito nos desviadores. Importa acrescentar desde já que a diferença de esforços, entre 2 troços de cabo, é por um lado de muito difícil caracterização, mas por outro lado também é muito importante para os resultados obtidos. Para analisar estas diferenças, foi criada uma sub-rotina ‘*eqdsv*’, de forma a equilibrar o cabo nos desviadores. Este equilíbrio foi estabelecido a partir de uma diferença máxima de esforço axial entre troços do cabo, normalmente limitada a 10%. O reequilíbrio entre troços é realizado “passando” cabo de um troço para outro, em que a quantidade de cabo “passado” é determinada com base na maior força axial entre os dois troços que estão a ser analisados. A partir dessa força, é calculada uma variação de comprimento que deve ser reduzida no comprimento do troço onde a força axial é menor, e adicionada no comprimento de troço onde a força é maior. A variação de comprimento  $\Delta l$  é dada pela seguinte expressão.

$$\Delta l = 0,9L^T \frac{N^T}{E_{ps}A_{ps}} \quad (3.32)$$

Na equação anterior  $L^T$  representa o comprimento total do troço com maior força axial registada,  $N^T$  a força axial aplicada nesse troço do cabo e  $E_{ps}$  e  $A_{ps}$  o módulo de elasticidade e área do cabo de pré-esforço, respetivamente.

Em seguida, são determinadas as respetivas variações de extensões, tensões e forças nos diversos troços, sendo posteriormente atualizadas as cargas nos respetivos troços a partir da sub-rotina ‘*upload*’. De referir que este processo de cálculo é realizado para conjuntos de dois troços adjacentes de cada vez, começando pelos 2 troços iniciais até aos últimos 2 troços da viga, sendo refeita a análise em sentido inverso para reduzir possíveis erros que surjam caso a análise seja efetuada em apenas um sentido. Apesar desta precaução, foram detetados alguns desvios, sempre desprezáveis.

Nas Figuras 3.8 e 3.9 são apresentados flowcharts das rotinas utilizadas para uma iteração genérica e para a iteração “0”, respetivamente.

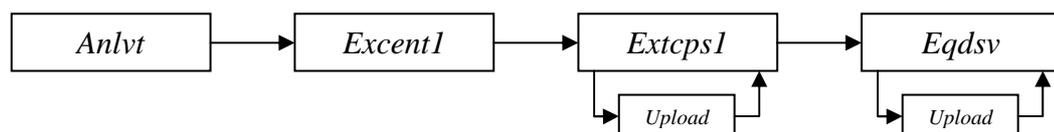


Figura 3.8 – Rotinas utilizadas no cálculo de uma Iteração genérica.

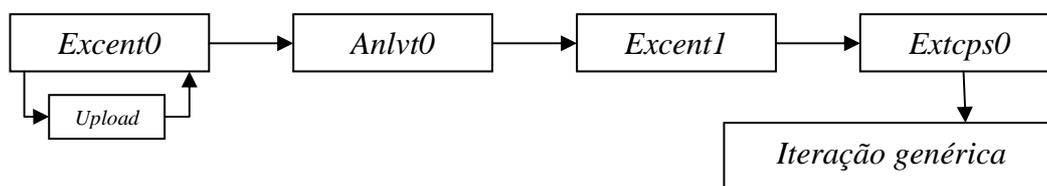


Figura 3.9 – Rotinas utilizadas no cálculo da Iteração “0”.

## 4 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Neste capítulo pretende-se apresentar a avaliação numérica do comportamento de diversas vigas de betão armado, cujos resultados experimentais foram determinados previamente por outros autores, em geral descritos em teses ou em artigos científicos da especialidade.

Assim, a partir dos exemplos selecionados, já expostos no Capítulo 2, foi realizada uma análise comparativa entre os resultados experimentais dos diagramas P- $\delta$  publicados e os diagramas P- $\delta$  teóricos obtidos a partir dos programas ANLv3 e ANLv4 apresentados no Capítulo 3.

Importa salientar que nem todos os exemplos estudados são alvo de apresentação neste capítulo. De facto, em alguns exemplos, os resultados teóricos divergem significativamente dos resultados experimentais apresentados (Lou, T. et al, 2013) e noutros casos existem muitas dúvidas relativamente aos dados a analisar (Cattaneo, S. et al, 2012). Apresentam-se apenas, de entre os casos analisados, os exemplos onde foi possível encontrar uma razoável concordância entre as curvas P- $\delta$  teóricas e experimentais, sendo que em todos estes casos, nem todos os valores das variáveis necessárias foram retirados dos documentos em que foram apresentados. Nesta eventualidade, ou se admitiu um valor razoável, ou foi deduzido a partir de outros valores.

Assim sendo, são apresentados de seguida cinco conjuntos de exemplos, reproduzindo os ensaios expostos nos artigos selecionados. Ao longo de cada exemplo serão indicados os valores introduzidos nos programas, justificando todas as opções tomadas. Para todas as vigas analisadas nos exemplos apresentados, a partir dos diagramas teóricos obtidos pelo programa inicial ANLv3 e o programa final ANLv4, é feita uma análise comparativa com os resultados experimentais apresentados nas respetivas referências, podendo observar-se a melhoria de resultados face às alterações efetuadas no programa ANL.

#### 4.1 EXEMPLOS 1

Os primeiros exemplos apresentados baseiam-se num artigo dos autores Hussein, O. Et al. (2012) publicado por House and Building National Research Center.

Os ensaios descritos e apresentados no documento pretendem estudar o comportamento estrutural de vigas construídas com betão de alta resistência e sujeitas a pré-esforço. Neste exemplo foram analisadas três Vigas 1V1, 1V2 e 1V3 com seções transversais de dimensões iguais, mantendo os mesmos tipos de materiais: betão e aço, mas com quantidade de armadura variável.

O esquema estrutural das vigas analisadas consiste numa viga simplesmente apoiada com um comprimento total de 4,4 m, e 4,0 m de vão livre entre apoios. A geometria da seção transversal é idêntica para as três vigas: largura  $b = 0,16\text{m}$  e altura  $h = 0,34\text{m}$ . Na viga são aplicadas duas cargas pontuais que distam 1,0 m de cada apoio. O esquema estrutural da viga é apresentado na Figura 4.1:

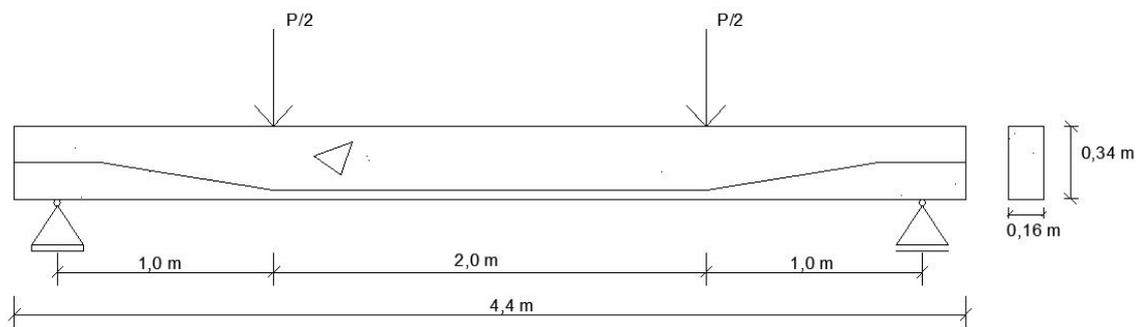


Figura 4.1 – Geometria e esquema estrutural das vigas dos Exemplos 1.

A armadura longitudinal de compressão é construída por  $A'_s = 2\phi 10$ . A armadura transversal utilizada foi de  $A_{sw/s} = E2R\phi 10 // 0,10$  m até ao local de aplicação das cargas pontuais, passando a ter um espaçamento de 0,20 m no troço entre cargas aplicadas (zona de esforço transversal nulo). O recobrimento adotado foi de 25 mm. As restantes características da seção transversal, nomeadamente a armadura longitudinal de tração  $A_s$ , e a armadura de pré-esforço  $A_p$  são indicadas na Tabela 4.1. Nesta tabela,  $d$  representa a altura útil e  $d'$  a distância à armadura comprimida.

Tabela 4.1 – Características geométricas e armaduras das Vigas dos Exemplos 1.

	1V1	1V2	1V3
d // d'	0,300 m // 0,04 m	0,300 m // 0,04 m	0,305 m // 0,04 m
A <sub>s</sub> // ρ	6φ10 = 4,71 cm <sup>2</sup> // 0,87 %	2φ10 = 1,57 cm <sup>2</sup> // 0,29 %	-
A <sub>s</sub> '	2φ10 = 1,57 cm <sup>2</sup>	2φ10 = 1,57 cm <sup>2</sup>	2φ10 = 1,57 cm <sup>2</sup>
A <sub>sw</sub> /s	2φ10 // 0,1 m = 1,57 cm <sup>2</sup> /m	2φ10 // 0,1 m = 1,57 cm <sup>2</sup> /m	2φ10 // 0,1 m = 1,57 cm <sup>2</sup> /m
A <sub>p</sub>	-	0,99 cm <sup>2</sup>	1,40 cm <sup>2</sup>

No documento é dada pouca informação sobre as características mecânicas do betão e do aço, bem como os procedimentos para estimar estas características. O único valor referido para o betão é o valor da resistência à compressão do betão, não tendo sido referido se este valor se refere a provetes cilíndricos ou cúbicos. Assumiu-se que o valor de 72 MPa correspondia ao valor médio de resistência do betão à compressão referente a provetes cúbicos, tendo sido estimadas todas as restantes características necessárias para definir o material de acordo o Quadro 3.1 da EN 1992-1-1. Assim, os valores assumidos para as características mecânicas do betão são indicados na Tabela 4.2. Nesta Tabela,  $f_{cm}$  representa o valor médio da tensão de rotura do betão à compressão,  $f_{cm,c}$  o valor médio da tensão de rotura do betão à compressão tendo em consideração o efeito de confinamento,  $f_{ctm}$  é valor médio da tensão de rotura do betão à tração,  $\varepsilon_{cu}$  a extensão máxima de compressão do betão,  $E_c$  o módulo de elasticidade do betão e  $\varepsilon_{cp}$  a extensão no pico das tensões de compressão.

Tabela 4.2 – Características mecânicas do betão das vigas dos Exemplos 1.

Viga	$f_{cm}$ (MPa)	$f_{ctm}$ (MPa)	$\varepsilon_{cu}$ (‰)	$E_c$ (GPa)	$\varepsilon_{cp}$ (‰)
1V1, 1V2, 1V3	72	4,1	3,0	37,2	2,5

Em função da forma do gráfico experimental, o tipo de aço considerado neste exemplo foi o aço NR. Optou-se por aumentar em 5% a tensão de cedência e tensão última do aço, considerando possíveis erros nas medições da resistência do aço utilizado. Na Tabela 4.3 são apresentadas as características utilizadas por ambos os programas ANL, para determinar os diagramas  $M-\chi$ . Nesta tabela,  $f_y$  é a tensão de cedência do aço das armaduras,  $f_{yu}$  é a tensão última,  $E_s$  o módulo de elasticidade assumido para o aço,  $\varepsilon_{su}$  é a extensão última assumida e  $k_s$  o quociente entre  $f_{yu}$  e  $f_y$ .

Tabela 4.3 – Características mecânicas do aço das Vigas dos Exemplos 1.

Viga	$f_y$ (MPa)	$f_{yu}$ (MPa)	$E_s$ (GPa)	$\varepsilon_{su}$ (‰)	$k_s$
1V1, 1V2, 1V3	493,5	641,5	200	10	1,3

Na modelação destes exemplos utilizaram-se elementos finitos com o comprimento 0,10 m, conseguindo-se obter uma discretização regular da viga com 45 nós e 44 elementos. Nestes casos, esta discretização permite definir pontos nos apoios, na aplicação das cargas e a meio vão.

No documento são referidas as tensões de cedência e última dos cabos de pré-esforço: 1674 e 1860 MPa, respetivamente. O valor do módulo de elasticidade não é indicado, tendo sido considerado 195 GPa. Os cabos de pré-esforço tinham uma configuração não linear, sendo que junto aos topos da viga, ao longo de aproximadamente 0,70 m, encontravam-se a uma distância de 0,17 m da face superior da viga (excentricidade nula). Partindo dessa posição, os cabos desciam até que na zona de aplicação das cargas estavam a uma distância de 0,299 m e 0,297 m, da face superior, para as Vigas 1V2 e 1V3, respetivamente. Na Tabela 4.4 são apresentados os valores a considerar para caracterizar o cabo de pré-esforço utilizado nos programas ANLv3 e ANLv4. Nesta tabela  $A_p$  indica a área da armadura de pré-esforço,  $t_{ps0}$  a tensão inicial aplicada nos cabos,  $e_p$  a excentricidade dos cabos (referente ao programa ANLv3),  $E_p$  o módulo de elasticidade dos cabos de pré-esforço,  $D$  o número de desviadores e  $N_0$  a força inicial imposta nos vários troços do cabo ( $D$  e  $N_0$  referentes ao programa ANLv4). De referir ainda que a força inicial imposta nos cabos de pré-esforço, foi definida com igual valor para todos os troços.

Tabela 4.4 – Definição dos cabos de pré-esforço para ANL das Vigas dos Exemplos 1.

	$A_p$ (cm <sup>2</sup> )	$t_{ps0}$ (MPa)	$E_p$ (GPa)	$e_p$ (m)	$N_0$ (kN)	$D$
V2	0,99	1009	195	0,299	101	7
V3	1,40	1001	195	0,297	137	7

Tendo em conta as limitações do programa ANLv3, que considera cabos retos, optou-se para estes exemplos por definir uma excentricidade de 0,299 m, para a Viga 1V2, e de 0,297 m, para a Viga 1V3. Na zona da viga em que o cabo apresenta excentricidade variável, mais especificamente, entre 0,50 m da zona do apoio e a aplicação da carga pontual, foram ainda considerados momentos pontuais adicionais provocados pelas forças axiais dos cabos de pré-esforço nas variações de excentricidade. Na Tabela 4.5 e na Tabela 4.6 são apresentados os valores dos momentos fletores gerados pelos valores extremos dos esforços axiais dos cabos das Vigas 1V2 e 1V3, respetivamente. Dada a simetria do esquema estrutural da viga, os mesmos  $\Delta M$  foram aplicados na outra extremidade do cabo, com valores simétricos. A determinação do comportamento final, com base nestas duas curvas, é explicitada adiante. Nas tabelas referidas,  $e$  indica a excentricidade do cabo,  $\Delta M$  a variação de momento fletor em cada nó e  $N$  o valor inicial do esforço axial nos cabos de pré-esforço.

Tabela 4.5 – Momentos aplicados para a Viga 1V2 dos Exemplos 1, para ANLv3.

Nó (x;z)	e (mm)	$\Delta M$ (kN.m)	
		N = 100 kN	N = 184 kN
8 (0,7;0)	0	-13,03	-23,74
9 (0,8;0)	26	2,61	4,75
10 (0,9;0)	52	2,61	4,75
11 (1,0;0)	77	2,61	4,75
12 (1,1;0)	103	2,61	4,75
13 (1,2;0)	129	2,61	4,75

Tabela 4.6 – Momentos aplicados para a Viga 1V3 dos Exemplos 1, para ANLv3.

Nó (x;z)	e (mm)	$\Delta M$ (kN.m)	
		N = 140 kN	N = 260 kN
8 (0,7;0)	0	-17,45	-33,12
9 (0,8;0)	26	3,45	6,63
10 (0,9;0)	51	3,45	6,63
11 (1,0;0)	76	3,45	6,63
12 (1,1;0)	102	3,45	6,63
13 (1,2;0)	127	3,45	6,63

Relativamente às tabelas anteriores, os valores de 101 kN e 140 kN, equivalem às forças iniciais instaladas nos cabos para as Vigas 1V2 e 1V3, respetivamente. Os valores de 184 kN e 260 kN correspondem aos valores máximos de esforço axial que os cabos podem suportar. A partir das duas curvas conseguiu-se assumir uma curva P- $\delta$  “média”, assumida como mais correta.

Os parágrafos anteriores traduzem a estratégia inicialmente seguida com o objetivo de avaliar o comportamento destas vigas utilizando o programa ANLv3. Obviamente que a utilização não é direta. A variação da excentricidade dos cabos passa por considerar cargas concentradas aproximadas, as quais dependem diretamente do esforço axial no cabo que é variável ao longo da simulação. De qualquer modo, existem inúmeras imperfeições na metodologia ANLv3, a começar na avaliação do esforço axial nos cabos que não é totalmente correta, para além de que é variável de troço para troço.

Para se conseguir comparar os diagramas obtidos foi determinado o desvio das curvas P- $\delta$  teóricas (ANLv3 e ANLv4) em relação à curva experimental, designado adiante por parâmetro de comparação, o qual depende das áreas dos diagramas das curvas P- $\delta$ , até um

dados deslocamento  $\delta$ . Os desvios são calculados a partir do quociente entre a diferença das áreas do diagrama teórico e experimental e a área do diagrama experimental. Em alguns casos, um parâmetro de comparação reduzido pode não corresponder a uma boa aproximação entre curvas, dado serem comparadas as áreas totais dos diagramas. Assim, para estes casos, é determinado outro parâmetro de comparação a partir do quociente entre a soma das diferenças absolutas das áreas do diagrama teórico e experimental e a área do diagrama experimental.

Na Figura 4.2 são apresentados os diagramas P- $\delta$  para a Viga 1V1, a qual, recorde-se, está livre de qualquer cabo de pré-esforço. Para a Viga 1V1, conseguiu-se obter uma excelente aproximação das duas curvas em todas as fases, uma vez que as duas curvas são praticamente coincidentes para os valores da carga de fissuração e da carga de cedência. A partir dos diagramas apresentados, o parâmetro de comparação obtido para o ANLv4 e ANLv3 foi de 0,7% e 1%, respetivamente, calculado até um deslocamento de 65 mm, concluindo-se que se obteve uma ótima relação entre as curvas P- $\delta$  teórica e experimental.

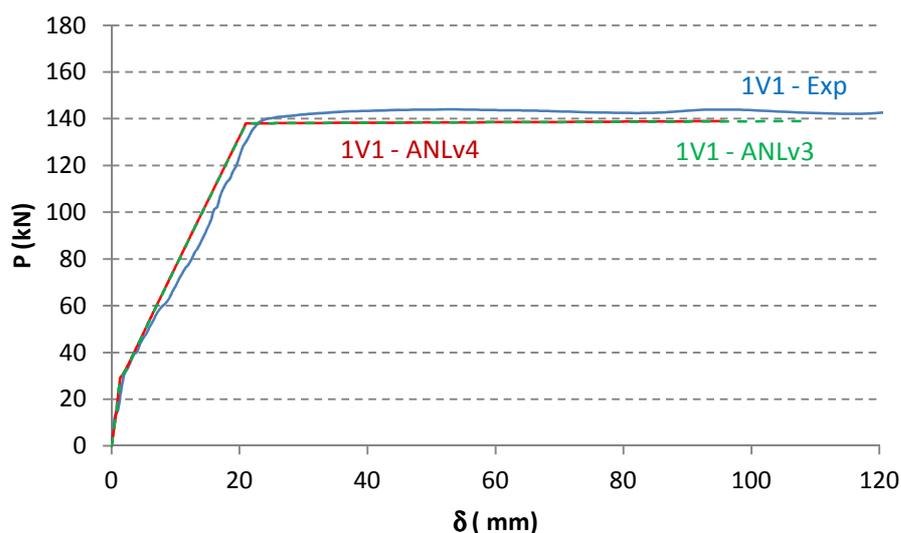


Figura 4.2 – Diagramas carga-deslocamento P- $\delta$  da Viga 1V1 dos Exemplos 1.

Na Figura 4.3 são apresentados os diagramas para a Viga 1V2. Relativamente à viga anterior, a Viga 1V2 tem um terço da armadura de tração e o cabo de pré-esforço tem uma área que é cerca de dois terços da área correspondente armadura tracionada. A curva P- $\delta$  obtida referente ao ANLv4 apresenta valores praticamente coincidentes nas fases elástica e de fissuração, tal como se verificou para a viga anterior. Neste caso, dado a viga ser pouco armada, a diferença da carga de fissuração para as curvas experimental e teórica ANLv4 é notória, pois como já foi referido anteriormente, a dificuldade de representar corretamente o diagrama tensão-extensão do betão em tração não evita a existência de desvios deste tipo. Para as duas

primeiras fases as curvas apresentam concordância até cerca de 20 mm de deslocamento, sendo que a partir desta altura a curva teórica referente ao ANLv4 passa a registar valores ligeiramente acima dos valores experimentais, dado atingir-se a carga de cedência teórica ligeiramente mais cedo do que na curva experimental. Para a curva teórica referente ao ANLv3, os valores são ligeiramente inferiores. Posteriormente, é na fase de plastificação que se obteve as maiores discrepâncias de valores e se verifica que não existe uma tão boa concordância das curvas, dado que nesta zona, para ambas curvas teóricas os valores das cargas continuam a crescer, ao invés de entrar num patamar em que a carga se mantém aproximadamente constante, como ocorre na curva experimental. O parâmetro de comparação para os diagramas P- $\delta$  para a Viga 1V2 referente ao ANLv4 e ANLv3 foi de 8,2% e 10,8%, respetivamente, calculado até um deslocamento de 45 mm, evidenciando uma boa relação entre os diagramas obtidos.

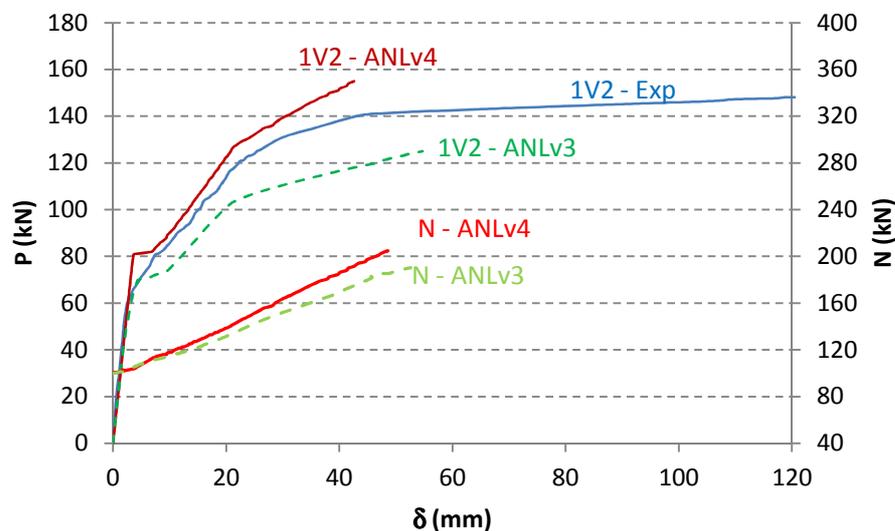


Figura 4.3 – Diagramas carga-deslocamento P- $\delta$  da Viga 1V2 dos Exemplos 1.

Na Figura 4.4 são apresentados os diagramas P- $\delta$  referentes à Viga 1V3. A Viga 1V3 não dispõe de armadura tracionada e o cabo de pré-esforço tem sensivelmente a área de armadura tracionada da viga anterior, ou cerca de mais 50% relativamente ao cabo anterior. Na fase elástica verifica-se uma muito boa concordância das curvas. Na fase de fissuração, mais concretamente, na zona da carga de fissuração, ocorre uma discrepância considerável de valores. Mais uma vez, coloca-se a questão da dificuldade de retratar a correta relação tensão-extensão do betão em tração. O facto da Viga 1V3 não conter armadura de tração acentua ainda mais estas diferenças. Por fim, na fase final da fase de fissuração e quando se atinge o patamar de plastificação conseguiu-se aproximar a curva teórica ANLv4 à curva experimental, apesar de não se obter o deslocamento máximo desejado a partir do programa. É ainda de notar que para os resultados teóricos ANLv3, a curva apresenta grandes desvios

em relação à curva experimental, nomeadamente ao nível da rigidez da fase de fissuração. Até um deslocamento de 35 mm, o parâmetro de comparação referente à curva ANLv4 determinado para esta viga foi de 4,2 %, enquanto para a curva teórica ANLv3, para um deslocamento de 45 mm obteve-se um desvio de 6,8%. Este último resultado esconde a referida discrepância da fase de fissuração. Para esta viga, foi determinado o parâmetro de comparação com base nos desvios absolutos das áreas dos diagramas, obtendo-se um parâmetro de 5,3% e 9,1%, para ANLv4 e ANLv3, respetivamente.

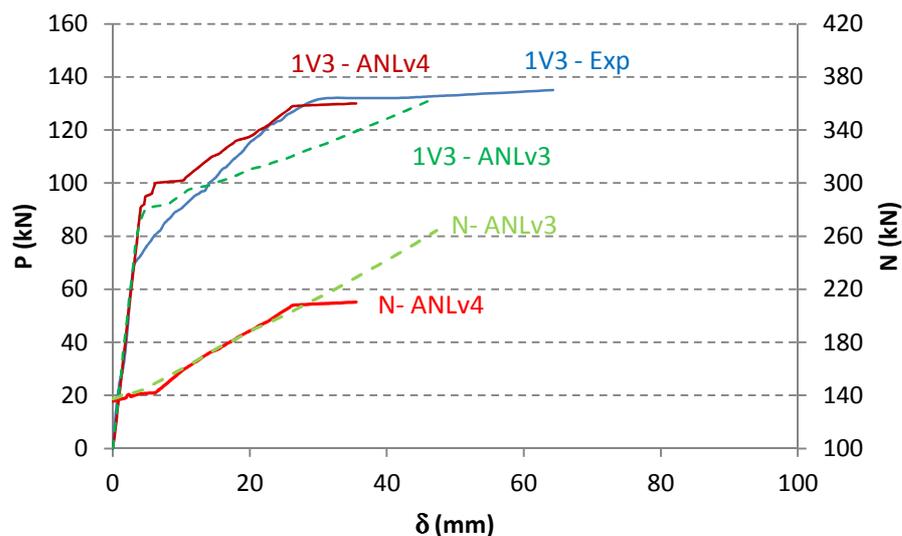


Figura 4.4 – Diagramas carga-deslocamento  $P$ - $\delta$  da Viga 1V3 dos Exemplos 1.

Em suma, pode concluir-se que os resultados teóricos obtidos pelo programa ANLv3 apresentam desvios aceitáveis quando comparados com os valores experimentais, registando-se as principais diferenças sempre ao nível da fase de fissuração e no patamar de plastificação no caso do ANLv3. Este desvio depende fortemente das limitações existentes no programa de cálculo ANLv3. De facto, ao considerar-se como retos os cabos de confinamento axial da viga, esta circunstância introduz uma discrepância nos resultados à medida que a flecha da viga aumenta e/ou o esforço axial nos cabos aumenta. Caso os cabos acompanhassem a deformação da viga (como ocorre para o programa ANLv4), essa deformação nos cabos permitiria uma maior resistência a cargas externas.

No que diz respeito aos resultados teóricos obtidos pelo programa ANLv4, verifica-se um melhoramento notável, que se traduz numa diminuição considerável dos desvios em relação à curva experimental, evidenciando que as alterações feitas no programa ANL melhoram a análise realizada.

Para além disso, é possível que algum desvio, dos valores teóricos em relação aos experimentais registados, resida nas estimativas aproximadas dos valores aquando da definição das características dos materiais, da seção da viga e da geometria dos cabos de pré-esforço.

## 4.2 EXEMPLOS 2

Nestes segundos exemplos recorreu-se ao artigo utilizado nos anteriores exemplos “Behavior of bonded and unbonded prestressed normal and high strength concrete beams”, dos autores Hussein, O. et al. (2012), publicado por House and Building National Center,

Semelhantemente ao que foi feito nos Exemplos 1, pretende-se avaliar o comportamento estrutural de vigas de betão de alta resistência sujeitas a pré-esforço, tendo sido consideradas as mesmas três seções, alterando-se apenas o tipo de betão, em relação aos Exemplos 1. A única alteração consiste na utilização de um betão com cerca de mais 25% de resistência à compressão.

O valor médio de resistência do betão à compressão, referido no documento e assumido como o valor médio da resistência à compressão do betão referente a provetes cúbicos, é de 95 MPa. Na Tabela 4.7 são apresentadas as características referentes ao betão considerado para estes exemplos.

Tabela 4.7 – Características mecânicas do betão das Vigas dos Exemplos 2.

Viga	$f_{cm}$ (MPa)	$f_{ctm}$ (MPa)	$\epsilon_{cu}$ (‰)	$E_c$ (GPa)	$\epsilon_{pc}$ (‰)
2V4, 2V5, 2V6	95	5,0	3,0	40,4	2,5

Na Figura 4.5 são apresentados os diagramas P- $\delta$  referentes à Viga 2V4, a qual não contém armadura de pré-esforço. Nesta viga, os valores obtidos pelos programas ANLv3 e ANLv4 na fase elástica aproximam-se dos valores experimentais, atingindo-se praticamente o mesmo valor da carga de fissuração nas três curvas. Na fase seguinte, na fase de fissuração, obteve-se uma boa concordância de valores entre as curvas teóricas e experimental, até sensivelmente a carga de cedência. Por fim, na fase de plastificação os valores da carga P teóricos, para ambas as curvas, pouco aumentou à medida que o deslocamento aumentava, enquanto na curva experimental houve um ligeiro acréscimo da carga P nesta fase. Note-se que semelhantemente ao que ocorre na Viga 1V1 dos Exemplos 1, as curvas teóricas obtidas são praticamente iguais, visto não existir qualquer pré-esforço aplicado na viga. O parâmetro de comparação

calculado para as curvas teóricas foi de 0,3% e 0,2%, para a curva ANLv4 e ANLv3 respetivamente, sendo determinado até um deslocamento de 46 mm, concluindo-se que os desvios são insignificantes para os diagramas obtidos.

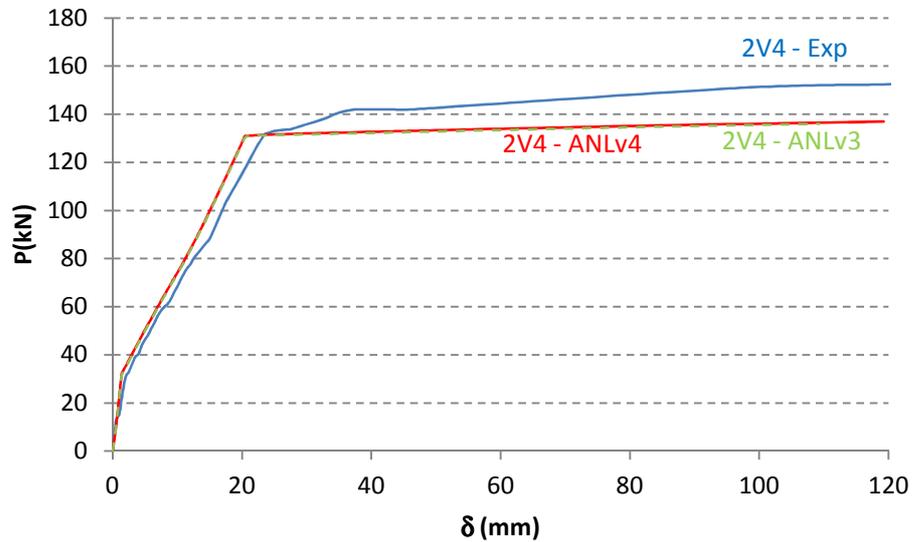


Figura 4.5 – Diagramas carga-deslocamento P- $\delta$  da Viga 2V4 dos Exemplos 2.

Na Figura 4.6 são apresentados os diagramas P- $\delta$  para a Viga 2V5, a qual contém um terço de aço tracionado e algum aço de pré-esforço.

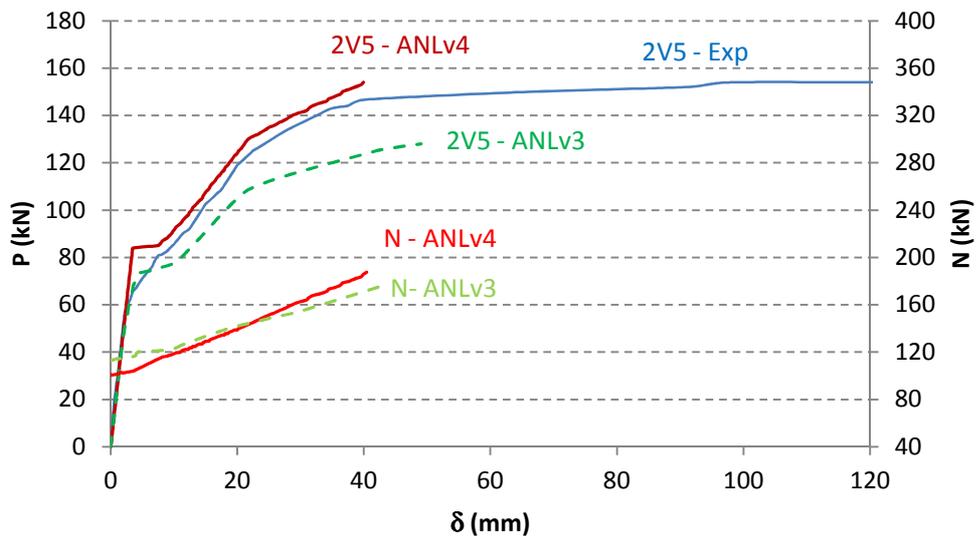


Figura 4.6 – Diagramas carga-deslocamento P- $\delta$  da Viga 2V5 dos Exemplos 2.

Para este caso, excetuando a zona do ponto de fissuração, obteve-se uma boa aproximação da curva teórica ANLv4 em relação à curva experimental, em quase todo o diagrama. Mais uma vez, quando se atinge a carga de fissuração da viga, surgem imprecisões na curva teórica, dado o problema ao nível da relação tensão-extensão do betão em tração, apesar de posteriormente se conseguir uma boa adaptação da curva teórica à experimental ao longo de toda a fase de fissuração. Na fase de plastificação surgem as principais diferenças entre as curvas, obtendo-se maior resistência teórica na Viga 2V5, do que a suportada realmente. Para um deslocamento de 40 mm, o parâmetro de comparação calculado para a curva ANLv4 foi de 5,0 %, enquanto para a curva ANLv3 obteve-se um parâmetro de comparação de 8,6%. Valores aceitáveis portanto.

Na Figura 4.7 são apresentadas as curvas teóricas e experimental P- $\delta$  referentes à Viga 2V6, a última viga destes exemplos, a qual não contém qualquer armadura tracionada.

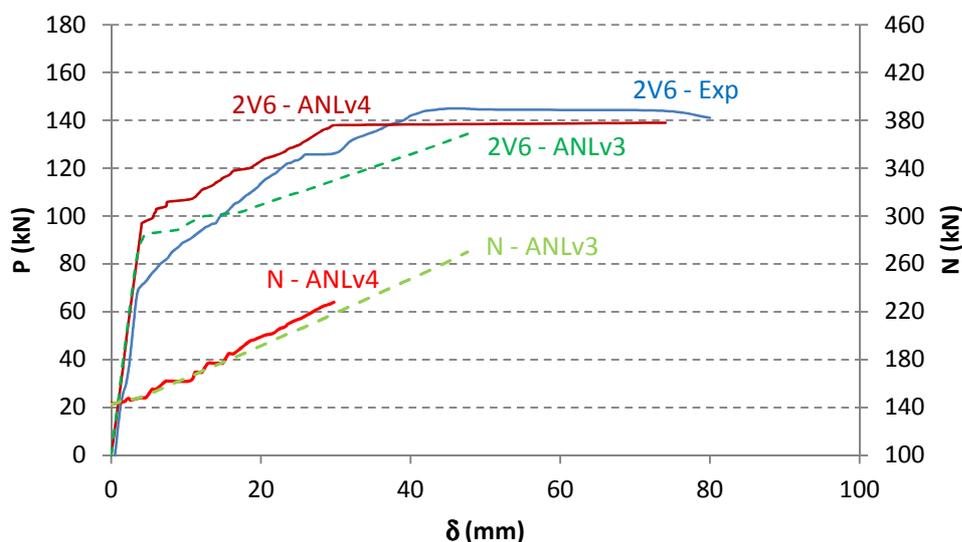


Figura 4.7 – Diagramas carga-deslocamento P- $\delta$  da Viga 2V6 para os Exemplos 2.

Na fase elástica conseguiu-se um bom ajuste dos diagramas teóricos P- $\delta$  em relação à curva experimental, apesar de não se conseguir determinar corretamente a carga de fissuração. Ao longo da fase de fissuração são notórias as diferenças entre as curva teóricas ANLv4 e experimental, sendo que a curva teórica nesta fase apresenta cargas superiores e uma rigidez inferior. Para a curva teórica P- $\delta$ , apesar da carga de fissuração ser atingida para valores superiores, a carga de cedência é atingida para valores de carga e deslocamento inferiores. Na fase de plastificação, os valores teóricos obtidos pelo programa ANLv4 apresentam concordância com os valores experimentais, obtendo-se um patamar de cedência onde quer a carga última, quer o deslocamento máximo são praticamente coincidentes com os valores

---

experimentais. Na Viga 2V6, para um deslocamento de 74 mm, o parâmetro de comparação calculado para a curva ANLv4 foi de 2,0%, enquanto que para a curva ANLv3 se obteve um parâmetro de comparação de 5%, para um deslocamento de 47 mm. Para este caso, também foi determinado o parâmetro de comparação com base nos desvios absolutos das áreas dos diagramas, obtendo-se para ANLv4 e ANLv3, um parâmetro de 4,7% e 11%, respetivamente.

Analogamente ao que se verificou para os Exemplos 1, as principais diferenças são registadas ao nível do ponto de fissuração para as vigas pré-esforçadas. Dos valores obtidos para os parâmetros de comparação, questiona-se, entre as duas vigas pré-esforçadas consideradas nestes exemplos, o menor valor do parâmetro de comparação na pior comparação entre curvas. Isto acontece porque este parâmetro compara energia de deformação, ao invés dos desvios absolutos das cargas, que, acrescente-se, seria igualmente válido e complementar deste parâmetro. Só que, no âmbito da análise não linear estrutural de estruturas complexas, faz sentido comparar energias de deformação.

### 4.3 EXEMPLOS 3

Os Exemplos 3 baseiam-se num ensaio realizado por Badawi, M. e Soudki, K. (2009), descrito no artigo “Flexural strengthening of RC beams with prestressed NSM CFRP rods”, publicado na revista “Construction and Building Materials”.

Nestes ensaios, os autores pretenderam estudar experimental e analiticamente o comportamento estrutural de vigas de betão armado de seção retangular solicitadas à flexão, sujeitas a diferentes cargas de pré-esforço.

Os cabos de pré-esforço utilizados foram do tipo CFRP (Carbon fiber reinforced polymer), com recurso ao uso de uma técnica de aplicação de pré-esforço NSM (Near-Surface Mounted), como já foi referido no Capítulo 2.

No total foram testadas quatro vigas, três delas com cabos de pré-esforço sujeitos a cargas iniciais de 0%, 40% e 60% da tensão última dos cabos, e uma viga que serviu de viga de controlo, sem recurso a cabos de pré-esforço, para comparação de resultados. Na Tabela 4.8 são identificadas as quatro vigas ensaiadas.

Tabela 4.8 – Identificação das Vigas dos Exemplos 3.

3V1	Viga de Controlo
3V2	Viga c/ PE 0 %
3V3	Viga c/ PE 40 %
3V4	Viga c/ PE 60 %

O esquema estrutural das vigas ensaiadas consiste numa viga simplesmente apoiada com um comprimento total de 3,50 m, com 3,30 m de vão livre entre apoios. Ao longo das vigas são aplicadas duas ações pontuais aplicadas a terços de vão. As vigas construídas tinham uma seção retangular de largura  $b=0,152$  m e uma altura de  $h=0,254$  m. Na Figura 4.8 está representado o esquema estrutural das vigas.

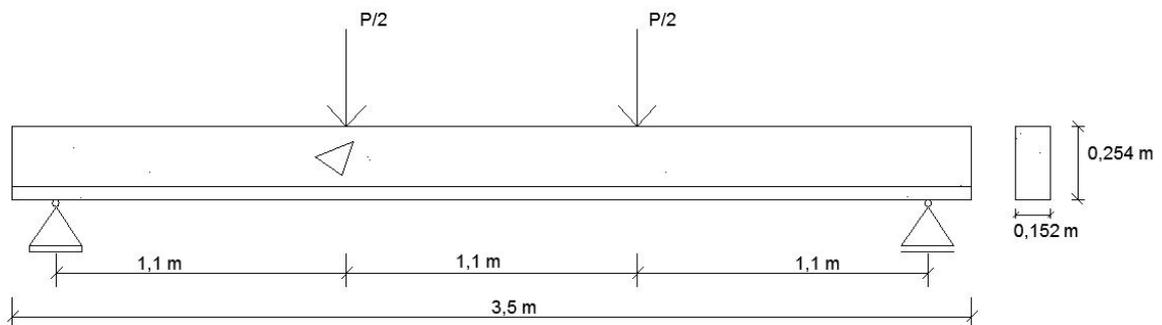


Figura 4.8 – Geometria e esquema estrutural das Vigas dos Exemplos 3.

A armadura longitudinal de compressão foi de  $2\phi 10M$  (11,2 mm), enquanto a armadura longitudinal de tração foi de  $2\phi 15M$  (15 mm). A armadura transversal utilizada foi de  $2\phi 8 // 0,075$  m, permitindo um bom confinamento do betão. O recobrimento utilizado foi de 30 mm. A seção foi mantida constante ao longo de toda a viga. Na Tabela 4.9 é definida a seção transversal das vigas.

Tabela 4.9 – Características geométricas e armaduras das Vigas dos Exemplos 3.

Caraterização da seção – 3V1, 3V2, 3V3, 3V4	
$d // d'$	0,208 m // 0,043 m
$A_s // \rho$	$2\phi 15 = 3,53 \text{ cm}^2 // 0,9 \%$
$A_s'$	$2\phi 11,2 = 1,97 \text{ cm}^2$
$A_{sw}/s$	$2\phi 8 // 0,075 \text{ m} = 1,01 \text{ cm}^2/\text{m}$

O valor médio da resistência do betão à compressão ao fim de 28 dias, foi determinada através de ensaios em provetes cilíndricos. É o único valor referido no documento em relação às características do betão. As restantes características foram estimadas a partir deste valor, de acordo o Quadro 3.1 da EN 1992-1-1. Na Tabela 4.10 estão identificadas as características mecânicas do betão necessárias ao cálculo dos diagramas  $M-\chi$ .

Tabela 4.10 – Caraterísticas mecânicas do betão das Vigas dos Exemplos 3.

Viga	$f_{cm}$ (MPa)	$f_{cm,cube}$ (MPa)	$f_{ctm}$ (MPa)	$\varepsilon_{cu}$ (‰)	$E_c$ (GPa)	$\varepsilon_{pc}$ (‰)
3V1,3V2,3V3,3V4	45	56,3	3,3	4	36,9	3,5

O valor da tensão última do aço não é referido no documento, tendo sido considerado um valor aceitável, de acordo com a tensão de cedência. O tipo de aço considerado para estes exemplos foi o aço NR. As características mecânicas do aço estão presentes na Tabela 4.11.

Tabela 4.11 – Caraterísticas mecânicas do aço das vigas dos Exemplos 3.

Viga	$f_y$ (MPa)	$f_{yu}$ (MPa)	$E_s$ (GPa)	$\varepsilon_{su}$ (‰)	$k_s$
3V1,3V2,3V3,3V4	466	572	190	10	1,2

Na modelação destes exemplos tentou-se adotar uma discretização regular com comprimento do elemento finito de 0,10 m, para que existissem nós nos apoios, nos pontos de aplicação das cargas. A meio vão da viga optou-se por sub-dividir o elemento central da viga em dois elementos de 0,05 m, e deste modo obter-se um nó a meio vão. No total foram considerados 37 nós e 36 elementos finitos.

As vigas sujeitas a pré-esforço, foram submetidas à ação de um cabo de pré-esforço de diâmetro de 9,5 mm, equivalente a uma área  $A_p = 0,71 \text{ cm}^2$ . Foi introduzida resina Epoxy envolvendo o cabo de pré-esforço numa zona pré-cortada ao longo de toda a viga com uma seção retangular de 0,015 m x 0,025 m. A utilização de resina Epoxy aumenta a aderência do cabo de pré-esforço, sendo que este efeito não é considerado pelos programas ANLv4 e ANLv3. O cabo de pré-esforço dista 0,242 m da face superior da viga. A excentricidade foi mantida constante ao longo de toda a viga, com um valor de 0,115 m.

Para definir o sistema de restrição axial composto pelo conjunto cabo CRFP e resina, fez-se uma homogeneização dos materiais, tendo em conta as áreas e módulos de elasticidade de cada um dos casos. Considerando  $0,71 \text{ cm}^2$  e  $3 \text{ cm}^2$  de áreas e 136 GPa e 12,8 GPa de módulo de elasticidade, para o cabo de pré-esforço e para a resina respetivamente, obteve-se uma área equivalente de  $A_p = 1,0 \text{ cm}^2$  e um módulo de elasticidade equivalente de  $E_p = 135 \text{ GPa}$ . Na Tabela 4.12 são apresentadas as forças iniciais aplicadas  $N_0$  nos vários troços do cabo e número de desviadores utilizados  $D$  (no programa ANLv4)

Tabela 4.12 - Definição dos cabos de pré-esforço para ANLv4 das Vigas dos Exemplos 3.

	3V2	3V3	3V4
$N_0$ (kN)	0	67	95
D	5	5	5

Na Figura 4.9 são apresentadas as curvas P- $\delta$  teóricas e experimental para a viga de controlo, sem cabo de pré-esforço, Viga 3V1. Pode verificar-se que numa fase inicial do comportamento estrutural da viga, referente às fases elástica e de fissuração, obtiveram-se valores teóricos da carga P ligeiramente superiores aos valores experimentais. Os resultados teóricos para ambas as curvas na fase de plastificação são praticamente coincidentes com os resultados experimentais. Para um deslocamento de 78 mm, o parâmetro de comparação calculado foi de 4,5% para ambos as curvas teóricas ANL. Neste caso, o parâmetro de controlo não traduz as diferenças de carga da fase de fissuração, porque foram considerados deslocamentos muito para além do deslocamento de cedência.

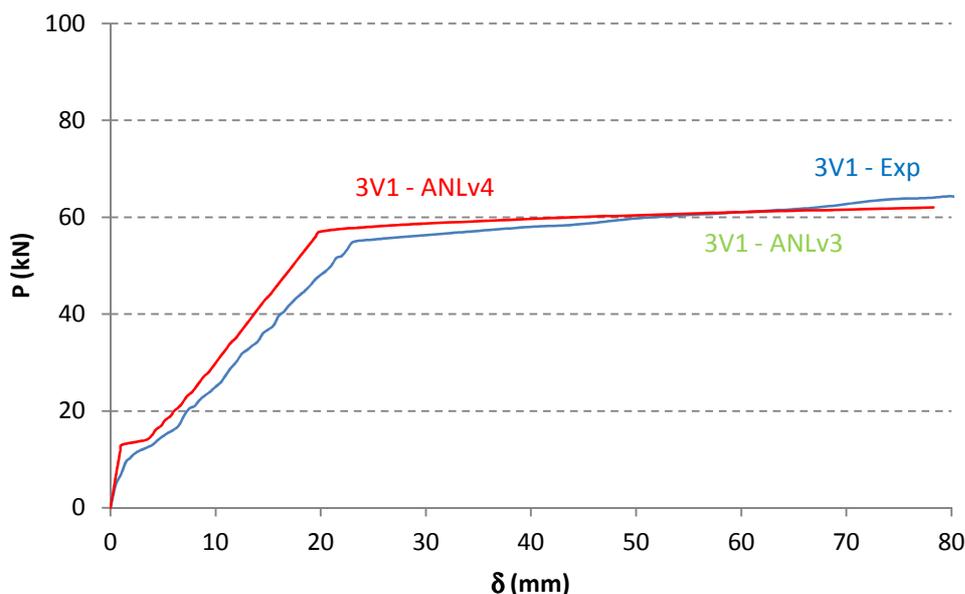


Figura 4.9 – Diagramas carga-deslocamento P- $\delta$  para a Viga 3V1 dos Exemplos 3.

Para as curvas P- $\delta$  da Viga 3V2, apresentadas na Figura 4.10, é possível retirar conclusões idênticas na fase elástica, apesar de se obter uma ligeira diferença entre os valores da carga de fissuração teórica e experimental. Ao longo da fase de fissuração pode verificar-se que os valores teóricos dados pelo ANLv4 vão se afastando ligeiramente dos valores experimentais, evidenciando uma maior rigidez teórica. Sensivelmente a partir da carga de cedência, ocorre uma inversão de tendência da curva teórica ANLv4, e a partir deste ponto, os valores obtidos

pelo programa começam a reduzir os desvios em relação aos valores experimentais. De uma maneira geral, conseguiu-se para a Viga 3V2 uma boa aproximação das curvas P- $\delta$ . Para a análise comparativa realizada, até um deslocamento de 53 mm, o parâmetro calculado para a curva teórica ANLv4 foi de 2,0%, enquanto para a curva teórica ANLv3 obteve-se 13,3%. Os desvios da curva ANLv3 devem-se certamente à impossibilidade do programa considerar a solidarização entre a viga e os cabos de pré-esforço. Recordando que esta viga inicia o carregamento com pré-esforço nulo, verifica-se que os desvios se vão acentuando à medida que a deformação aumenta, isto é, o cabo gera o efeito de arco.

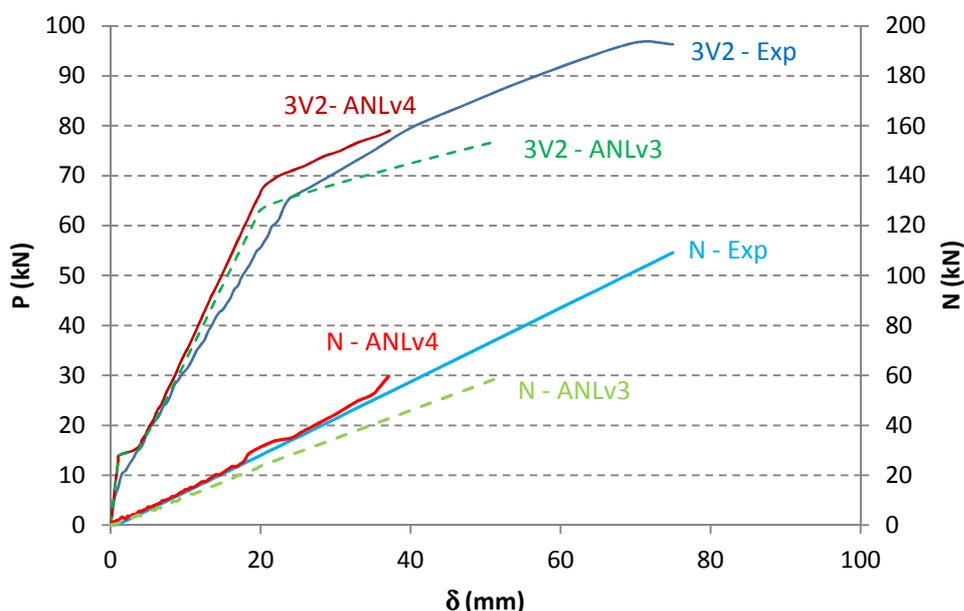


Figura 4.10 – Diagramas carga-deslocamento P- $\delta$  para Viga 3V2 dos Exemplos 3.

Na Figura 4.11 são apresentados os diagramas teóricos e experimental P- $\delta$  da Viga 3V3, parcialmente pré-esforçada. Nas fases elástica e de fissuração destas curvas obtiveram-se ligeiras discrepâncias entre as curvas teóricas e a curva experimental. Estas discrepâncias, parcialmente visíveis no caso anterior, poderão residir no tipo de ligação do cabo de pré-esforço à viga, a qual é assegurada por recurso a resinas Epoxy. Obviamente que alguma plastificação existirá nesta ligação, a qual será crescente à medida que a transferência de tensões aumenta. Neste caso, devido ao facto da viga ter uma armadura de tração considerável ( $\rho = 0,9 \%$ ), as diferenças na carga de fissuração não são acentuadas. Ainda de referir que a carga de cedência  $P_y$  teórica é ligeiramente inferior ao registado experimentalmente. Na fase de plastificação, verifica-se que as curvas experimental e teórica apresentam diferenças crescentes ao longo desta fase. Contudo, as diferenças são superiores no caso da curva ANLv3. Para um deslocamento de 40 mm, o parâmetro de comparação para a curva ANLv4 foi de 1,8%, enquanto para a curva teórica ANLv3 foi de 2,8%.

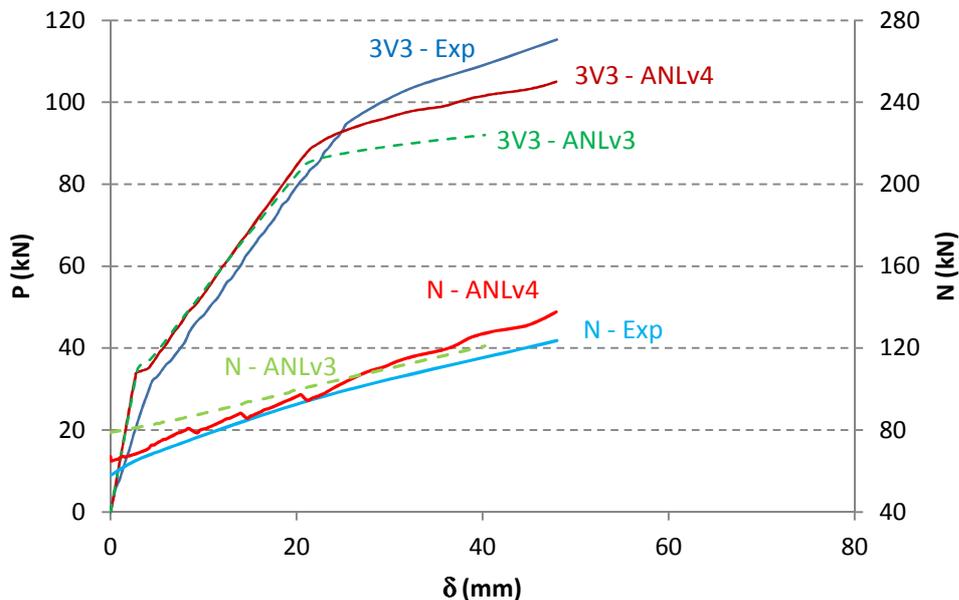


Figura 4.11 - Diagramas carga-deslocamento P- $\delta$  para Viga V3 dos Exemplos 3.

Na Figura 4.12 são expostas as curvas teóricas e experimental P- $\delta$  da Viga 3V4, a viga cuja armadura de pré-esforço tem maior tensão inicial.

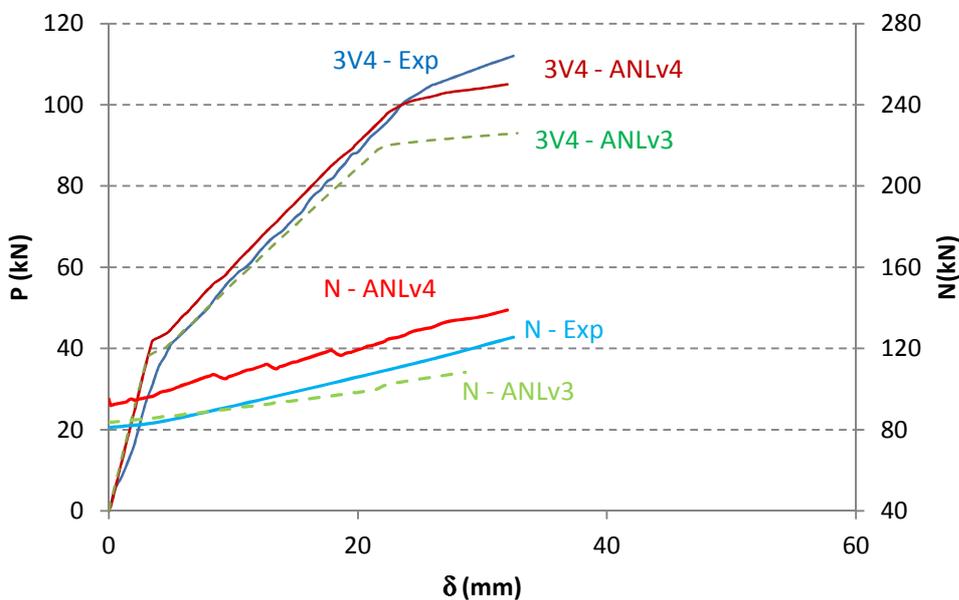


Figura 4.12 - Diagramas carga-deslocamento P- $\delta$  para Viga 3V4 dos Exemplos 3.

Para a viga em questão, tanto na fase elástica, como na fase de fissuração conseguiu-se uma boa aproximação das duas curvas, registando-se uma reduzida diferença ao nível da carga de

fissuração. Neste caso, não se observam os desvios determinados anteriormente. Quando se atinge a fase de cedência, para a curva teórica ANLv4 a rigidez apresenta uma redução substancial, que se traduz num patamar de carga praticamente horizontal, ao contrário daquilo que foi registado experimentalmente. Posto isto, é nesta fase que são visíveis as principais diferenças entre as curvas teóricas e a curva experimental. Mais uma vez, as maiores diferenças surgem relativamente à curva ANLv3. Para a Viga 3V4, até um deslocamento de 32,5 mm, o parâmetro de comparação calculado para a curva ANLv4 foi de 0,1%, enquanto para a curva teórica ANLv3 obteve-se um valor de 5,2%.

Pode concluir-se ainda que para as duas vigas em que foi imposta uma tensão inicial no cabo de pré-esforço, e também para a viga com cabo passivo, o programa de ANLv4 não conseguiu reproduzir fielmente os resultados na fase correspondente ao patamar de plastificação, nomeadamente na obtenção do valor da carga máxima que seria expectável. As razões plausíveis poderão residir no sistema de pré-esforço introduzido, em que se recorreu à resina Epoxy para envolver o cabo de pré-esforço, a qual deve com certeza gerar plastificações não consideradas na aderência do cabo à viga. Para além disso, a rigidez efetiva do sistema pode não ter sido adequadamente avaliada, ou pode não ser linear.

Para as quatro vigas destes exemplos, nas fases elástica e de fissuração, o diagrama teórico ANLv4 encontra-se muito ligeiramente acima do diagrama experimental. Para a análise efetuada, admite-se que estas diferenças possam estar associadas a estimativas feitas relativas às características mecânicas do betão ou do aço, visto que na viga de controlo, a Viga 3V1, estas diferenças já são visíveis.

#### **4.4 EXEMPLOS 4**

Para o desenvolvimento dos Exemplos 4, recorreu-se a um estudo realizado no Instituto Indiano da Ciência, no Departamento de Engenharia Civil, por Padmarajaiah, S. e Ramaswamy, A. (2002), exposto no artigo “A finite element assessment of flexural strength of prestressed concrete beams with fiber reinforcement”.

O objetivo deste ensaio consistiu em avaliar o comportamento estrutural à flexão de vigas pré-esforçadas com betão de alta resistência. No total foram ensaiadas quinze vigas, sendo analisadas para este exemplo apenas duas vigas: uma viga totalmente pré-esforçada (Viga 4V1) e outra viga parcialmente pré-esforçada (Viga 4V2).

O esquema estrutural das vigas ensaiadas foi idêntico para ambos os casos, consistindo numa viga simplesmente apoiada, com um comprimento total de 2,20 m, com um vão livre entre apoios de 2,0 m. Foram aplicadas duas cargas pontuais aplicadas a uma distância de 0,75 m de cada apoio. Para os dois casos analisados nestes exemplos, ambas as seções foram consideradas retangulares com largura  $b = 0,105$  m e altura  $h = 0,24$  m. Na Figura 4.13 é apresentado o esquema estrutural das vigas.

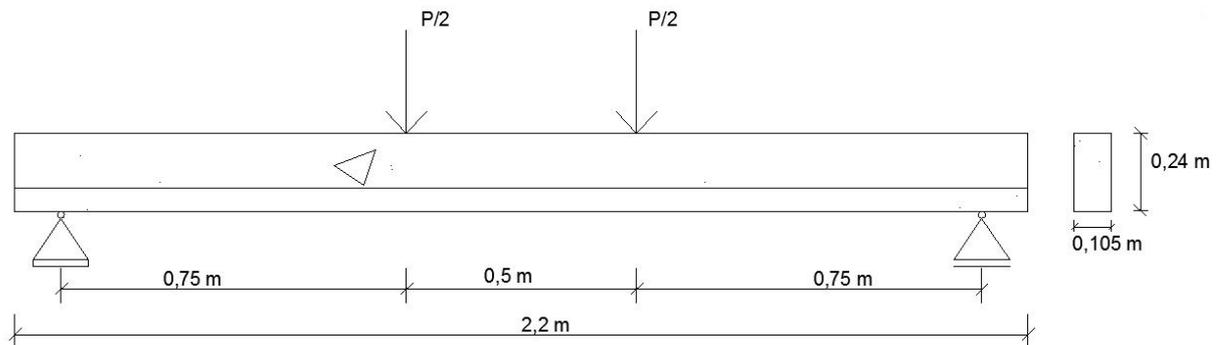


Figura 4.13 – Geometria e esquema estrutural das Vigas dos Exemplos 4.

A armadura longitudinal de compressão foi de  $2\phi 6$  para ambas as vigas. A armadura transversal adotada foi de  $2\phi 6 // 0,075$  m, o qual garante um adequado confinamento do betão. O recobrimento das armaduras de tração foi de 20 mm, e 25 mm para as armaduras de compressão. Ao longo de toda a viga a seção manteve-se constante. Na Tabela 4.13 é definida a seção transversal das vigas.

Tabela 4.13 - Características geométricas e armaduras das Vigas dos Exemplos 4.

	4V1	4V2
$d // d'$	0,211 m // 0,034 m	0,209 m // 0,034 m
$A_s // \rho$	-	$2\phi 10 = 1,57 \text{ cm}^2 // 0,6 \%$
$A_s'$	$2\phi 6 = 0,57 \text{ cm}^2$	$2\phi 6 = 0,57 \text{ cm}^2$
$A_{sw}/s$	$2\phi 6 // 0,075 \text{ m} = 0,57 \text{ cm}^2/\text{m}$	$2\phi 6 // 0,075 \text{ m} = 0,57 \text{ cm}^2/\text{m}$

O valor médio da resistência do betão à compressão foi determinado através de ensaios sobre provetes cúbicos, ao fim de 29 dias. Este valor, bem como o módulo de elasticidade são indicados no artigo em questão. As características mecânicas do betão são indicadas na Tabela 4.14.

Tabela 4.14 – Características mecânicas do betão das Vigas dos Exemplos 4.

Viga	$f_{ck,cube}$ (MPa)	$f_{cm,cube}$ (MPa)	$f_{ctm}$ (MPa)	$\epsilon_{cu}$ (‰)	$E_c$ (GPa)	$\epsilon_{pc}$ (‰)
4V1 e 4V2	65	73	5,2	4,0	40,6	3,0

As características mecânicas do aço são apresentadas no documento a partir de diagramas tensão-extensão, sendo indicados no diagrama os valores da tensão de cedência e última, valor da extensão última do aço, e ainda o valor do módulo de elasticidade na fase elástica do diagrama. Tendo em conta o diagrama P- $\delta$ , o qual apresenta um ponto de cedência não pronunciado, o tipo de aço considerado foi o aço ER de baixa ductilidade. Na Tabela 4.15 são apresentadas as propriedades mecânicas do aço.

Tabela 4.15 – Características mecânicas do aço das Vigas dos Exemplos 4.

Viga	$f_y$ (MPa)	$f_{yu}$ (MPa)	$E_s$ (GPa)	$\epsilon_{su}$ (‰)	$k_s$
4V1 e 4V2	458	525	200	6	1,15

Para realizar a modelação do esquema estrutural das vigas, adotou-se uma discretização regular com comprimento do elemento finito de 0,05 m, para que existissem nós nos apoios, nos pontos de aplicação das cargas e a meio vão da viga. No total foram considerados 45 nós e 44 elementos finitos.

Em ambas as vigas foram introduzidos cabos de pré-esforço de 7 mm de diâmetro, equivalente a uma área  $A_p = 0,385 \text{ cm}^2$ . Na Viga 4V1 foram utilizados 4 cabos, dispostos em duas fiadas de dois cabos, em que a primeira dista da face superior da viga 0,156 m, e a segunda dista 0,185 m. Para a Viga 4V2, foi considerada apenas uma fiada com dois cabos distanciados da face superior da viga de 0,156 m.

Na modelação dos cabos de pré-esforço, no programa ANLv3, para a Viga 4V1 optou-se por considerar apenas um cabo com área equivalente aos 4 cabos existentes, com uma área total  $A_p = 1,54 \text{ cm}^2$ , a uma distância média da face superior da viga de 0,170 m. Na Viga 4V2, para os cabos de pré-esforço considerou-se uma área equivalente de  $A_p = 0,77 \text{ cm}^2$ , definindo-se uma distância dos cabos à parte superior da viga de 0,156 m. As excentricidades consideradas foram mantidas constantes ao longo de toda a viga. O módulo de elasticidade do sistema de restrição axial teve por base o diagrama de tensão-extensão dos cabos apresentado no documento, tendo-se obtido o valor  $E_p = 195 \text{ GPa}$ .

A tensão inicial considerada para os cabos de pré-esforço, no programa ANLv3, para a Viga 4V1 foi de 971,8 MPa, enquanto que para a Viga 4V2 considerou-se uma tensão inicial de

1271,4 MPa. Os valores considerados resultam do aumento do valor da tensão inicialmente aplicada, 918 MPa (valor indicado no artigo).

Para o programa ANLv4, foram consideradas as mesmas áreas equivalentes, módulo de elasticidade e excentricidades para cada uma das vigas. O número de desviadores D e as forças aplicadas nos vários troços do cabo  $N_0$  são apresentados na Tabela 4.16.

Tabela 4.16 – Definição dos cabos de pré-esforço, para ANLv4, das Vigas dos Exemplos 4.

	4V1	4V2
$N_0$ (kN)	157,4	99,4
D	5	5

Na Figura 4.14 são apresentados os diagramas P- $\delta$  para a Viga 4V1, a qual não contém qualquer armadura de tração, mas considera um grande pré-esforço inicial. Para a viga analisada, de um modo geral, conseguiu-se obter uma boa aproximação entre os resultados teóricos ANLv4 e os resultados experimentais.

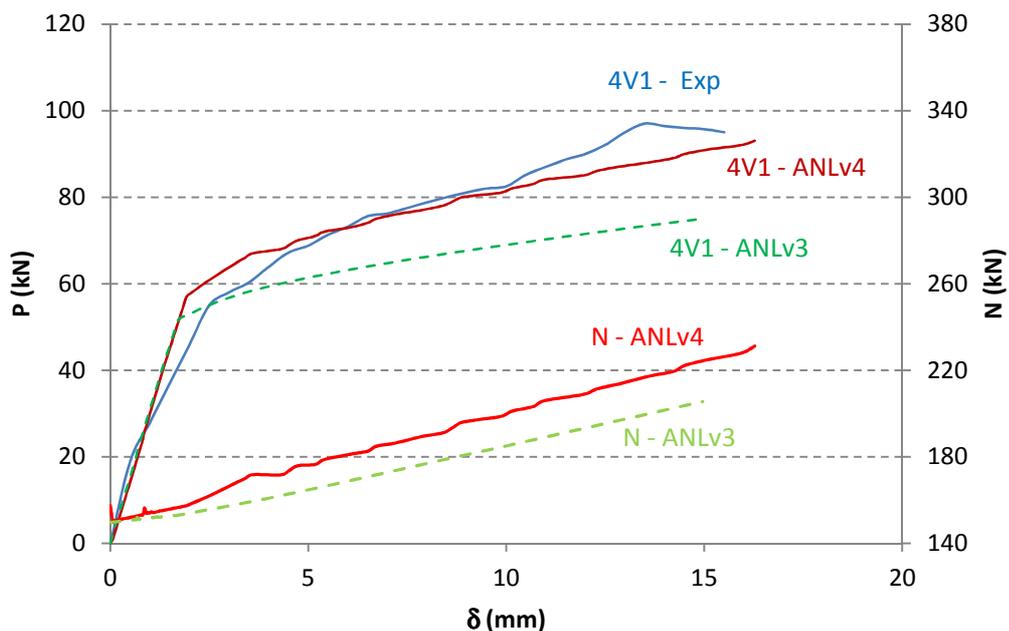


Figura 4.14 – Diagramas carga deslocamento P- $\delta$  para a Viga 4V1 dos Exemplos 4.

Na figura anterior, é visível a dificuldade de adaptação das curvas teóricas à curva experimental para o ponto de fissuração. Esta dificuldade foi sendo registada para todas as vigas fracamente armadas. Nestes casos, os valores da carga de fissuração estão ligeiramente acima dos registados experimentalmente. Após ser atingida a fissuração, observa-se uma redução da rigidez da viga, obtendo-se ao longo desta fase uma boa concordância entre o

diagrama teórico ANLv4 e o experimental. Sensivelmente a partir dos 10 mm de deslocamento, as cargas experimentais apresentam valores ligeiramente superiores aos resultados teóricos ANLv4. Para um deslocamento de 15 mm, o parâmetro de comparação determinado para o diagrama teórico ANLv4 foi de 0,2%, enquanto que para o diagrama ANLv3 obteve-se 14,9%. Neste caso, foi determinado o parâmetro de comparação com base nos desvios absolutos das áreas dos diagramas, sendo que para ANLv4 e ANLv3, obteve-se 5,4% e 16,3%, respetivamente.

Na Figura 4.15 são apresentadas as curvas P- $\delta$  referentes à Viga 4V2, com alguma armadura de tração ( $\rho = 0,6\%$ ) e algum pré-esforço. Na fase elástica conseguiu-se determinar curvas praticamente sobrepostas. Os desvios registados verificam-se principalmente a partir dos 5 mm de deslocamento, na fase de fissuração, em que à medida que o deslocamento aumenta, os diagramas teóricos vão apresentando valores inferiores aos resultados experimentais, até se atingir à carga máxima.

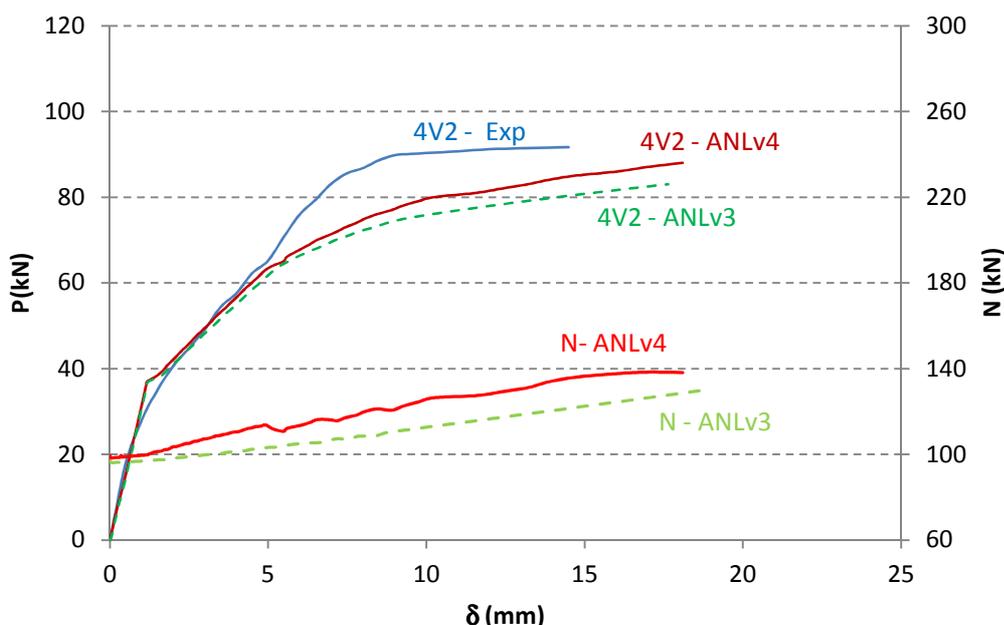


Figura 4.15 – Diagramas carga deslocamento P- $\delta$  para a Viga 4V2 dos Exemplos 4.

Para esta Viga 4V2, é visível a moderada variação de resultados determinados pelos programas ANL. Para um deslocamento de 14,5 mm, os parâmetros de comparação determinados em relação aos diagramas teóricos da Viga 4V2 foi de 7,2% e 10,4%, respetivamente para ANLv4 e ANLv3.

De uma maneira geral, face aos parâmetros de comparação determinados, conseguiram-se obter desvios aceitáveis para os diagramas ANLv4 apresentados, que traduzem a boa

aproximação e concordância entre diagramas. Das vigas analisadas nestes Exemplos 4, podem evidenciar-se dois aspetos. Primeiro, o aumento da quantidade de armadura de tração leva a um melhoramento ao nível da determinação do ponto de fissuração. Segundo, também de referir que com a redução da carga de pré-esforço, associada à área de cabo considerada (dado serem comparadas seções parcialmente e totalmente pré-esforçada), revela-se a maior dificuldade em avaliar a carga máxima correta.

#### 4.5 EXEMPLOS 5

Os últimos exemplos apresentados baseiam-se num artigo dos autores Lou, T. et al. (2013), publicado por Journal of Bridge Engineering (ASCE). As avaliações numéricas presentes no artigo pretendem estudar o comportamento à flexão de vigas contínuas com pré-esforço aplicado externamente. Nestes exemplos foram analisadas apenas duas vigas, Vigas 5V1 e 5V2 com seções transversais de dimensões iguais, mantendo os mesmos materiais: betão e aço, mas com armadura variável.

O esquema estrutural das vigas analisadas consiste numa viga contínua de dois vãos, simétrica, com um comprimento total de 20,0 m, tal como apresentado na Figura 4.16. A geometria da seção transversal é idêntica para as duas vigas: largura  $b = 0,3$  m e altura  $h = 0,6$  m. Na viga são aplicadas duas cargas pontuais que distam 5,0 m de cada apoio extremo.

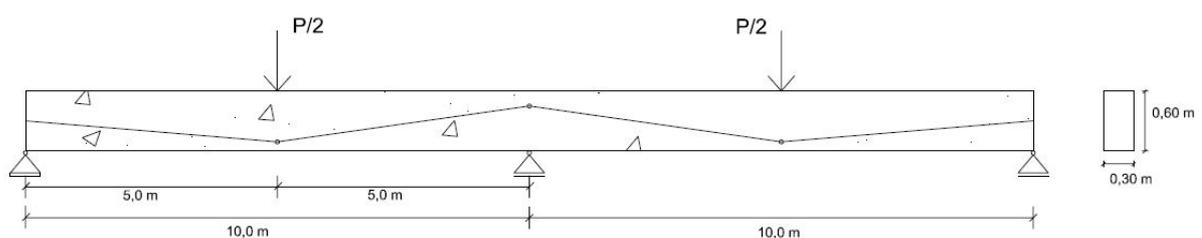


Figura 4.16 – Geometria e esquema estrutural das Vigas dos Exemplos 5.

Ao longo da viga, o diagrama de momentos fletores varia entre momentos positivos e negativos, o que leva a adotar duas seções para cada viga variando a armadura: uma sobre o apoio central e outra para os vãos. Ao longo de 7,0 m, desde os topos da viga, a armadura de tração  $A_s$  estará na parte inferior da viga e a de compressão na parte superior, enquanto no restante comprimento intermédio (zona central da viga correspondente ao momentos fletores

negativos registados) a armadura de tração estará na parte superior da viga e a de compressão na parte inferior. Na Tabela 4.17 são definidas as seções transversais das Vigas 5V1 e 5V2.

Tabela 4.17 - Características geométricas e armaduras das Vigas dos Exemplos 5.

	5V1	5V2
d // d'	0,565 m // 0,035 m	0,565 m // 0,035 m
A <sub>s</sub> // ρ	5,40 cm <sup>2</sup> // 0,3 %	10,8 cm <sup>2</sup> // 0,6 %
A <sub>s</sub> '	3,60 cm <sup>2</sup>	3,60 cm <sup>2</sup>

As propriedades mecânicas do betão e do aço são apresentadas nas Tabelas 4.18 e 4.19. O aço considerado foi o aço NR.

Tabela 4.18 – Características mecânicas do betão das Vigas dos Exemplos 5.

Viga	f <sub>cm,cube</sub> (MPa)	f <sub>ctm</sub> (MPa)	ε <sub>cu</sub> (‰)	E <sub>c</sub> (GPa)	ε <sub>pc</sub> (‰)
5V1 e 5V2	40	3,0	3,3	33,3	2,0

Tabela 4.19 – Características mecânicas do aço das Vigas dos Exemplos 5.

Viga	f <sub>y</sub> (MPa)	f <sub>yu</sub> (MPa)	E <sub>s</sub> (GPa)	ε <sub>su</sub> (‰)	k <sub>s</sub>
5V1 e 5V2	450	500	200	8	1,11

Face ao comprimento das vigas analisadas e adotando uma discretização com elementos finitos de 0,1 m, foram definidos 201 pontos e 200 elementos. Com esta discretização conseguiram-se obter pontos na zona dos apoios, aplicação dos carregamentos externos e meio vão de cada tramo.

Para o esquema estrutural de viga destes exemplos, neste caso, dado as consideráveis dimensões da viga, interessa contabilizar o peso próprio da viga, variável que o programa computacional não tem em consideração. Assim, para obter aproximadamente a carga uniformemente distribuída referente ao peso próprio da viga, foram introduzidas quatro cargas pontuais de 9 kN distanciadas de 2,0 m, ao longo de cada vão.

Ao longo das vigas, a excentricidade dos cabos de pré-esforço é variável, razão pela qual foi necessário definir vários desviadores para simular a real configuração dos cabos no programa ANLv4, tendo-se também optado por não utilizar o programa inicial ANLv3. A área efetiva dos cabos considerada foi A<sub>p</sub> = 4,0 cm<sup>2</sup>, com um módulo de elasticidade de 195 GPa. No programa ANLv4 foram definidos 5 desviadores, sendo que a posição de cada desviador e a carga axial inicial imposta nos troços dos cabos encontram-se definidas na Tabela 4.20. Ainda de referir que a excentricidade é positiva quando o cabo se encontra abaixo do eixo neutro.

Tabela 4.20 – Definição dos desviadores das Vigas dos Exemplos 5.

D	1	2	3	4	5
x (m)	0,0	5,0	10,0	15,0	20,0
e (m)	0,00	0,15	- 0,10	0,15	0,00
N <sub>0</sub> (kN)	448	448	448	448	448

Na Figura 4.17 são apresentados os diagramas para a Viga 5V1. Para a análise realizada para a Viga 5V1, de grosso modo, as diferenças entre o diagrama experimental e teórico são assinaláveis. Numa primeira fase, na fase elástica, conseguiu-se uma aproximação dos resultados bastante boa, traduzida na sobreposição das duas curvas. Quando é atingida carga de fissuração, os valores teóricos ANLv4 apresentam maior carga do que a registada experimentalmente, analogamente ao que ocorre na maioria dos exemplos apresentados. Na fase de fissuração é notável uma divergência de valores entre resultados teóricos e experimentais à medida que o deslocamento aumenta, apesar de se verificar uma boa concordância entre as curvas. As diferenças de valores ao longo desta fase estão intrinsecamente associadas ao ponto de fissuração determinado pelo programa ANLv4. Quando se atinge a fase de cedência, embora haja uma diferença substancial entre as cargas teóricas e experimentais, na curva ANLv4 a rigidez é reduzida consideravelmente conseguindo uma boa concordância entre ambos os diagramas. Para um deslocamento de 40 mm, o parâmetro de comparação da curva teórica em relação à experimental foi de 5,3%.

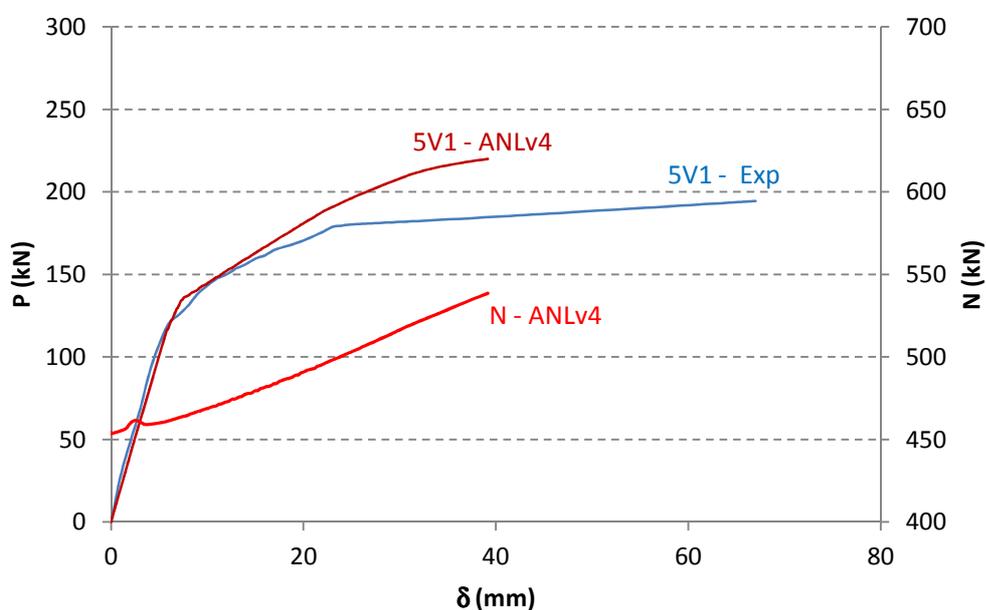


Figura 4.17 - Diagramas carga deslocamento P- $\delta$  para a Viga 5V1 dos Exemplos 5.

Na Figura 4.18 são apresentadas os diagramas para a Viga 5V2. Para a Viga 5V2, de uma maneira geral conseguiu-se uma melhor aproximação entre as curvas do que no caso da Viga

5V1. Para a fase elástica, a curva teórica é praticamente coincidente com a curva teórica, sendo que o ponto de fissuração teórico é atingido para uma carga superior, apesar da menor diferença em relação à viga anterior (neste caso tem-se um  $\rho$  superior, e portanto a diferença não é tão significativa). Na fase de fissuração, em consequência da aproximação das cargas de fissuração experimental e teórica, os desvios ao longo desta fase são mais reduzidos, conseguindo-se uma maior aproximação entre as curvas, mas ainda assim os desvios são crescentes à medida que o deslocamento aumenta. Na fase de cedência, registam-se desvios consideráveis entre ambas as curvas, sendo que se consegue obter uma boa concordância das curvas nesta fase. Para um deslocamento de 37,5 mm, o parâmetro de comparação obtido foi de 2,3%.

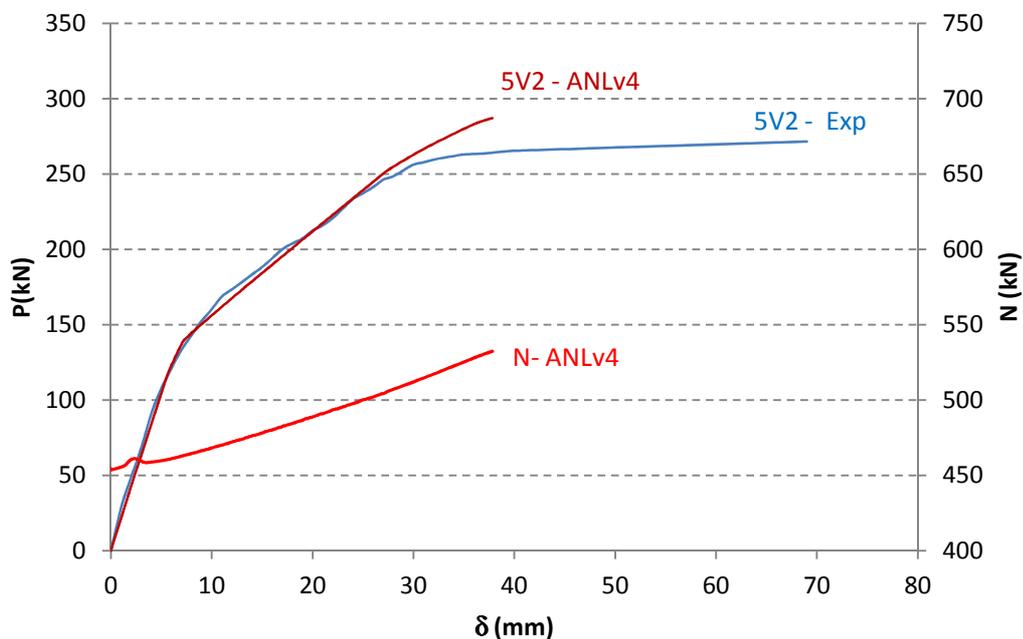


Figura 4.18 - Diagramas carga deslocamento  $P$ - $\delta$  para a Viga 5V2 dos Exemplos 5.

Dado o programa ANLv4 considerar os cabos de pré-esforço solidários com a viga, são consideradas deformações nos cabos, conferindo uma maior resistência por parte da viga. Também as modelações do betão em compressão e dos cabos pré-esforçados propostas pelos autores do artigo em questão, apresentam diferenças em relação às consideradas pelo programa ANLv4. Posto isto, seria de esperar uma sobreavaliação das cargas teóricas em relação às experimentais, como o que se verificou.

## 5 ANÁLISE GLOBAL DOS RESULTADOS

Neste capítulo é realizada uma análise global e comparação dos resultados experimentais e teóricos obtidos para os diversos exemplos definidos no capítulo anterior. Apresentam-se também alguns resultados determinados pelas metodologias apresentadas na EN 1992-1-1, quer para determinar deformações, com base em estimativas dos valores da rigidez, quer cargas de fissuração, de cedência e última, utilizadas na apreciação global dos resultados.

A comparação dos resultados é realizada a partir dos desvios obtidos em relação aos resultados experimentais. Estes desvios são avaliados em pontos característicos da curva P-d, nomeadamente nos pontos de fissuração, de cedência e carga máxima. Por desvio de uma quantidade entende-se o quociente entre a diferença absoluta deste valor relativamente ao valor de referência, o experimental, pelo valor de referência.

Para as diversas vigas consideradas também é realizada uma avaliação do caso condicionante de dimensionamento, ou seja, se as vigas são condicionadas pelos Estados Limites Últimos, associados ao colapso global ou parcial da estrutura, ou se pelos Estados Limites de Serviço, associados às deformações limites impostas pelas normativas em vigor.

### 5.1 Análise das diversas metodologias utilizadas

Na análise realizada neste ponto são apresentados os valores das cargas de fissuração, cedência e máximas, e os correspondentes deslocamentos, sendo comparados estes valores entre as diversas metodologias adotadas.

Os pontos de fissuração e de cedência, referentes aos diagramas P- $\delta$  apresentados no capítulo anterior, são estimados através da interseção de retas auxiliares, obtidas a partir das rigidezes máximas registadas para cada uma das fases. Na fase elástica, a reta tem origem no sistema de eixos e inclinação correspondente à rigidez máxima nesta fase. Nas fases de fissuração e de cedência, as retas auxiliares são tangentes à curva, nos pontos de rigidez máxima em cada uma das fases. Assim, o ponto de fissuração é estimado a partir da interseção das retas

auxiliares da fase elástica e fase de fissuração, e o ponto de cedência é estimado a partir da interseção das retas auxiliares correspondentes à fase de fissuração e de cedência.

Para os Exemplos 1, os valores dos deslocamentos nos pontos de fissuração e de cedência, e as cargas de fissuração, de cedência e máxima, bem como os respetivos desvios são apresentados na Tabela 5.1. É de referir, que para os casos das Vigas 1V2 e 1V3, devido à ação do pré-esforço a que as vigas estariam sujeitas, os valores da carga de fissuração e correspondente deslocamento de fissuração não foram calculados, uma vez que não existe qualquer proposta ao nível do EC2 para o efeito. Contudo, esses valores poderiam ter sido calculados caso se recorresse a uma análise de equilíbrio de forças na secção transversal tendo em conta o esforço axial  $N$  instalado. Esta derivação passaria pela determinação da posição do eixo neutro da seção, e depois pelo cálculo do valor do momento de fissuração  $M_{cr}$ , tendo em conta a resistência do betão à tração.

Tabela 5.1 – Valores dos deslocamentos e das cargas para as Vigas 1V1, 1V2 e 1V3 dos Exemplos 1.

Viga	$P_{cr}$ (kN)	Desvio	$d_{cr}$ (mm)	Desvio	$P_y$ (kN)	Desvio	$d_y$ (mm)	Desvio	$P_{max}$ (kN)	Desvio	
1V1	EXP	33,0	-	2,5	-	136,8	-	22,5	-	152,0	-
	ANLv4	31,0	6,1%	1,8	27,2%	138,0	0,9%	21,0	6,7%	139,0	8,6%
	ANLv3	30,0	9,1%	1,6	34,8%	138,0	0,9%	21,1	6,4%	139,0	8,6%
	EC2	22,8	30,9%	0,6	76,0%	142,8	4,4%	11,0	51,1%	158,8	4,5%
1V2	EXP	61,8	-	3,0	-	118,0	-	21,5	-	148,0	-
	ANLv4	81,0	31,1%	3,7	24,3%	127,0	7,6%	21,3	0,7%	154,0	4,1%
	ANLv3	56,0	9,4%	2,9	4,7%	102,0	13,6%	20,6	4,4%	125,0	15,5%
	EC2	-	-	-	-	144,8	22,7%	11,1	48,4%	155,4	5,0%
1V3	EXP	72,4	-	4,0	-	122,0	-	23,0	-	135,0	-
	ANLv4	91,0	25,7%	4,1	2,3%	129,0	5,7%	26,4	14,6%	130,0	3,7%
	ANLv3	77,4	6,9%	3,4	15,8%	132,3	8,4%	47,3	105,5%	132,3	2,0%
	EC2	-	-	-	-	145,6	19,3%	11,2	51,3%	156,2	15,7%

Como já foi referido, a dificuldade de definir corretamente o diagrama de tensão-extensão para o betão em tração, leva a que o programa ANL, para o ponto de fissuração, apresente cargas superiores às que realmente se registam experimentalmente. Assim, para as Vigas 1V2 e 1V3, relativamente aos resultados teóricos ANLv4, obtêm-se desvios significativos para a carga e para o deslocamento de fissuração. Além disso, as alterações efetuadas no programa ANLv3 não melhoram os resultados a este nível. Para a Viga 1V1, livre de pré-esforço, as análises numéricas realizadas pelos 2 programa não apresentam diferenças assinaláveis, tendo sido obtidos desvios aceitáveis para a carga de fissuração, apesar do deslocamento obtidos ser

ligeiramente inferior ao experimental. Ainda de referir que a metodologia EC2 não permite obter resultados aceitáveis.

No ponto de cedência, quer em cargas, quer em deslocamentos, os desvios ANLv4 obtidos são admissíveis para todas as vigas, determinando desvios desprezáveis em alguns dos casos. No que diz respeito à análise realizada pelo programa ANLv3, os desvios apresentados são sempre superiores aos registados para ANLv4, à exceção da Viga 1V1, em que os desvios são praticamente coincidentes, dado não haver aplicação de pré-esforço. Na Viga 1V3, de salientar que o valor obtido para o deslocamento de cedência é muito superior ao experimental, resultando num outro deslocamento, demonstrando a dificuldade que o programa inicial apresenta no cálculo da deformação para vigas com elevado pré-esforço. Para a metodologia EC2, note-se que os deslocamentos são subavaliados, enquanto as cargas de cedência são sobreavaliadas.

No caso das cargas máximas verifica-se que os valores teóricos são comparáveis aos experimentais. Para todas as vigas, os desvios ANLv4 obtidos são aceitáveis. Também a este nível, os resultados avaliados pela metodologia EC2 são comparáveis aos experimentais, à exceção da Viga 1V3, onde é determinado um desvio moderado. No que diz respeito à análise comparativa com os resultados ANLv3, à exceção da Viga 1V1, que apresenta valores praticamente coincidentes com ANLv4, para a Viga 1V2 tem-se um valor muito inferior ao valor experimental. Para a Viga 1V3 o valor de carga última é igual ao valor da carga de cedência.

De viga para viga, os desvios não apresentam um padrão que se possa realçar tendo em conta a evolução da intensidade do pré-esforço aplicado às vigas. No entanto, os desvios obtidos relativos aos resultados teóricos ANLv4 evidenciam um melhoramento quando comparados com os desvios referentes aos resultados teóricos ANLv3.

Na Tabela 5.2 são apresentados os valores relativos às Vigas 2V4, 2V5 e 2V6. Globalmente os resultados da tabela acima apresentam desvios semelhantes aos anteriores, visto que as vigas analisadas, apenas diferem nas propriedades mecânicas do betão. Viga a viga, também não são visíveis alterações a registar.

No ponto de fissuração, o programa ANLv4 determina, para as Vigas 2V5 e 2V6, resultados algo afastados dos experimentais, resultando em desvios consideráveis. Para a Viga 2V4, os desvios das cargas de fissuração são aceitáveis, apesar dos deslocamentos determinados serem consideravelmente inferiores aos experimentais. Igualmente ao que ocorre para os Exemplos 1, a partir do programa ANLv3 obtêm-se cargas de fissuração próximas das experimentais, e ligeiramente abaixo das obtidas no programa ANLv4. Ainda de referir, que a metodologia EC2 não consegue prever adequadamente o ponto de fissuração para a Viga 2V4, a viga livre de pré-esforço.

Tabela 5.2 – Valores dos deslocamentos e das cargas para as Vigas 2V4, 2V5 e 2V6 dos Exemplos 2.

Viga		$P_{cr}$ (kN)	Desvio	$d_{cr}$ (mm)	Desvio	$P_v$ (kN)	Desvio	$d_v$ (mm)	Desvio	$P_{max}$ (kN)	Desvio
2V4	EXP	39,0	-	2,8	-	131,1	-	23,5	-	157,0	-
	ANLv4	34,0	12,8%	1,7	39,3%	131,0	0,1%	20,5	12,8%	137,0	12,7%
	ANLv3	34,0	12,8%	1,8	35,0%	130,0	0,8%	20,4	13,3%	137,0	12,7%
	EC2	25,3	35,1%	0,6	78,6%	143,9	9,8%	10,2	56,6%	158,7	1,1%
2V5	EXP	67,0	-	3,6	-	122,7	-	21,5	-	154,0	-
	ANLv4	84,0	25,4%	3,6	1,1%	127,0	3,5%	20,9	2,9%	154,0	0,0%
	ANLv3	60,2	10,1%	2,9	20,0%	108,2	11,8%	21,5	0,0%	128,0	16,9%
	EC2	-	-	-	-	136,6	11,3%	9,7	54,9%	147,9	4,0%
2V6	EXP	74,0	-	4,1	-	122,0	-	23,0	-	145,0	-
	ANLv4	91,0	23,0%	3,8	6,8%	138,0	13,1%	29,8	29,4%	139,0	4,1%
	ANLv3	85,3	15,3%	3,6	12,0%	134,3	10,1%	47,6	107,0%	134,3	7,4%
	EC2	-	-	-	-	140,0	14,8%	9,9	57,0%	145,7	0,5%

Para o ponto de cedência, foram aceitáveis os desvios obtidos pelos programas ANLv3 e ANLv4 para as Vigas 2V4 e 2V5. Contudo os desvios referentes ao ANLv4 estão mais próximos dos valores experimentais. Para a Viga 2V6, note-se que os desvios para as cargas de cedência são moderados, apesar dos deslocamentos determinados se afastarem muito dos experimentais, apresentando um desvio de cerca de 30% e de 100%, para ANLv4 e ANLv3 respetivamente. Para os resultados ANLv3, pelo deslocamento de cedência determinado evidenciam-se as limitações que o programa inicial apresenta. Na metodologia EC2, os desvios referentes às cargas de cedência são aceitáveis, apesar dos deslocamentos estarem subavaliados.

No ponto de carga máxima, os resultados avaliados pela metodologia EC2 são quase que perfeitos, na medida em que todos os desvios avaliados são desprezáveis. No que diz respeito aos desvios determinados para ANLv3 e ANLv4 são na sua maioria aceitáveis, registando-se os piores desvios para os resultados ANLv3 da Viga 2V5 e, curiosamente, para a Viga 2V4, viga livre de pré-esforço, em ambas as análises ANLv3 e ANLv4.

Para os Exemplos 3, considerados no Capítulo 4, foram igualmente determinados os deslocamentos e cargas que delimitam a fase elástica, de fissuração e de plastificação, para as duas metodologias já referidas. Na Tabela 5.3 são apresentados os valores experimentais e teóricos obtidos.

Também neste caso não são visíveis diferenças assinaláveis entre as vigas. As cargas de fissuração e correspondentes deslocamentos, calculados a partir do EC2, para as Vigas 3V2, 3V3 e 3V4 não foram determinadas devido à ação do esforço axial proveniente dos cabos de pré-esforço, o qual faz variar significativamente a posição do eixo neutro.

Tabela 5.3 – Valores dos deslocamentos e das cargas para as Vigas 3V1, 3V2, 3V3 e 3V4 dos Exemplos 3.

Viga		P <sub>cr</sub> (kN)	Desvio	d <sub>cr</sub> (mm)	Desvio	P <sub>y</sub> (kN)	Desvio	d <sub>y</sub> (mm)	Desvio	P <sub>max</sub> (kN)	Desvio
3V1	EXP	10,2	-	1,9	-	54,8	-	23,0	-	64,3	-
	ANLv4	13,0	27,5%	1,1	38,4%	56,0	2,2%	20,1	12,6%	62,0	3,6%
	ANLv3	13,0	27,5%	1,1	42,7%	56,0	2,2%	19,5	15,1%	62,0	3,6%
	EC2	11,3	10,8%	0,8	56,8%	54,8	0,0%	12,0	47,8%	66,9	4,0%
3V2	EXP	10,2	-	1,5	-	65,6	-	24,0	-	96,5	-
	ANLv4	14,0	37,3%	1,1	24,0%	67,0	2,1%	20,1	16,3%	89,0	7,8%
	ANLv3	14,0	37,3%	1,2	22,7%	63,0	4,0%	19,9	17,1%	77,0	20,2%
	EC2	-	-	-	-	69,3	5,6%	15,2	36,7%	90,1	6,6%
3V3	EXP	29,0	-	4,0	-	87,8	-	23,0	-	115,3	-
	ANLv4	34,0	17,2%	2,8	30,0%	88,0	0,2%	21,2	7,8%	105,0	8,9%
	ANLv3	36,0	24,1%	3,3	17,5%	85,0	3,2%	21,0	8,6%	92,0	20,2%
	EC2	-	-	-	-	94,2	7,3%	20,6	10,4%	110,0	4,6%
3V4	EXP	41,0	-	5,0	-	100,0	-	23,5	-	112,0	-
	ANLv4	43,0	4,9%	4,2	15,6%	98,0	2,0%	22,4	4,6%	105,0	6,3%
	ANLv3	38,0	7,3%	3,1	37,8%	89,0	11,0%	21,7	7,9%	96,0	14,3%
	EC2	-	-	-	-	103,7	3,7%	22,7	3,4%	115,3	2,9%

Para o ponto de fissuração em todas as vigas, note-se os desvios consideráveis para as análises comparativas para ANLv4 e ANLv3. Nestas vigas, tal como acontece para as vigas dos Exemplos 1 e 2, é notória a dificuldade em determinar o ponto de fissuração. Porém, dado a viga apresentar uma armadura de tração não desprezável ( $\rho = 0,9\%$ ), e apesar dos desvios serem consideráveis, a diferença entre cargas não é assim tão assinalável, e à medida que a carga de fissuração aumenta com o pré-esforço aplicado, observa-se uma diminuição do desvio obtido. No que diz respeito aos deslocamentos, também os desvios determinados são significativos.

Para o ponto de cedência, os desvios ANL obtidos são quase sempre desprezáveis, apesar dos resultados teóricos ANLv4 serem ligeiramente melhores que os ANLv3, quando comparados com os resultados experimentais. Apenas o desvio ANLv3 para a Viga 3V4 é superior a 10%

na carga de cedência. Para os deslocamentos de cedência, de uma maneira geral, obtiveram-se desvios aceitáveis.

Por fim, as cargas máximas determinadas pelo programa ANLv4 levam a desvios todos eles aceitáveis, o que já não ocorre para os desvios ANLv3, tendo sido obtidos desvios significativos nas Vigas 3V2, 3V3 e 3V4, todas as vigas pré-esforçadas.

Para as duas vigas referentes aos Exemplos 4 apresentadas no capítulo anterior, os valores teóricos e experimentais são expostos na Tabela 5.4. De referir que como ambas as vigas estão sujeitas à ação do pré-esforço, não foram determinados as cargas e deslocamentos de fissuração correspondentes à metodologia EC2.

Tabela 5.4 – Valores dos deslocamentos e das cargas para as Vigas 4V1 e 4V2 dos Exemplos 4.

Viga		$P_{cr}$ (kN)	Desvio	$d_{cr}$ (mm)	Desvio	$P_y$ (kN)	Desvio	$d_y$ (mm)	Desvio	$P_{max}$ (kN)	Desvio
4V1	EXP	55,4	-	2,7	-	64,7	-	4,5	-	95,0	-
	ANLv4	59,0	6,5%	2,2	17,5%	67,0	3,6%	3,6	19,5%	93,0	2,1%
	ANLv3	52,0	6,1%	1,8	34,7%	58,0	10,4%	3,4	23,3%	75,0	21,1%
	EC2	-	-	-	-	64,3	0,6%	12,3	174,0%	93,6	1,5%
4V2	EXP	42,8	-	2,3	-	61,1	-	4,1	-	91,7	-
	ANLv4	42,0	1,9%	2,0	14,6%	63,0	3,1%	4,9	19,8%	88,0	4,0%
	ANLv3	38,0	11,2%	1,6	33,5%	63,0	3,1%	5,2	26,6%	83,0	9,5%
	EC2	-	-	-	-	59,0	3,5%	11,3	174,4%	81,3	11,3%

De uma maneira geral, os resultados apurados podem considerar-se próximos dos resultados experimentais, excetuando alguns deslocamentos determinados.

A análise efetuada a partir do programa ANLv4 levou a uma boa aproximação das curvas teóricas às curvas experimentais, que para ambas as vigas, no que diz respeito às cargas de fissuração, de cedência e máxima, refletiu-se nos desvios obtidos, todos abaixo dos 5%, à exceção da carga de fissuração para a Viga 4V1, que ainda assim apresenta um desvio aceitável. Ao nível dos deslocamentos, os desvios apresentam um ligeiro aumento em relação às cargas correspondentes, apesar de todos eles serem reduzidos.

Na análise realizada pelo programa inicial ANLv3, em comparação com a análise a partir do programa ANLv4, os desvios obtidos são superiores para estes exemplos em todos os pontos analisados. Porém, estes resultados obtidos apresentam desvios moderados, registando-se os maiores desvios ao nível dos deslocamentos, igualmente ao que ocorre para ANLv4.

A partir da metodologia EC2, globalmente obteve-se muito boa aproximação nos valores das cargas de cedência e última, para as Vigas 4V1 e 4V2. No que diz respeito aos deslocamentos determinados, a partir desta metodologia, não se consegue estimar sequer os deslocamentos reais de ambas as vigas.

Nas vigas dos Exemplos 5 são apresentadas as cargas de fissuração e cargas máximas registadas nas vigas para a metodologia EC2 e a análise numérica realizada a partir do programa ANLv4, conjuntamente com os valores experimentais. Para estas vigas, não são apresentados valores no ponto de cedência em virtude da dificuldade em estimar a posição deste ponto. Na Tabela 5.5 são apresentados os valores referentes às Vigas 5V1 e 5V2 dos Exemplos 5.

Tabela 5.5 – Valores dos deslocamentos e das cargas para as Vigas 5V1 e 5V2 dos Exemplos 5.

Viga		$P_{cr}$ (kN)	Desvio	$d_{cr}$ (mm)	Desvio	$P_{max}$ (kN)	Desvio
5V1	EXP	120	-	6,0	-	194	-
	ANLv4	158	31,4%	8,9	48,3%	244	25,5%
	EC2	-	-	-	-	202	3,8%
5V2	EXP	121	-	6,0	-	272	-
	ANLv4	164	35,5%	8,7	44,2%	313	15,3%
	EC2	-	-	-	-	265	2,3%

Para o ponto de fissuração, analogamente ao que se tem verificado para a maior parte das vigas analisadas, a carga de fissuração apresenta desvios significativos, sendo esta carga determinada sempre para valores superiores aos valores experimentais. Também os deslocamentos neste ponto são sobreavaliados, e por isso os desvios são consideráveis.

No que diz respeito à carga máxima, segundo a metodologia EC2 conseguiu-se muito boa aproximação de valores, resultando em desvios insignificantes. Para a análise ANLv4, note-se que as cargas máximas determinadas são sempre consideravelmente superiores às obtidas experimentalmente, obtendo-se desvios moderados. Os desvios assinaláveis obtidos nesta análise, devem-se, certamente, à incapacidade do programa em simular corretamente o comportamento dos cabos de pré-esforço, visto que estes são simulados como estando a trabalhar externamente às vigas. Apesar da atualização da posição dos desviadores e da introdução das forças estabilizadores na viga, um cabo solidário com a viga comporta-se de modo ligeiramente diverso.

## 5.2 Comparação dos deslocamentos e cargas limite experimentais SLS com cargas teóricas ULS

No presente ponto foram determinados os deslocamentos limite impostos pelo EC2 p1-1 (2004) tendo em consideração o comprimento de vão livre das vigas, como apresentado no Capítulo 2. Os deslocamentos determinados foram reduzidos, dividindo-os por um fator de 2,5 de modo a ter em conta os efeitos diferidos, nomeadamente a fluência e a retração do betão.

Face aos deslocamentos limite determinados, foram retirados dos diagramas P- $\delta$  experimentais apresentados no Capítulo 4, as respetivas cargas  $P_{SLS}$ , que traduzem a carga máxima que a viga pode suportar, garantindo as condições de serviço, para que o seu funcionamento e aspeto não seja afetado.

Por outro lado, as cargas limite referentes aos Estados Limites Últimos traduzem o valor máximo de carga que a viga pode suportar de modo a evitar qualquer tipo de colapso na estrutura, parcial ou global. Dado que as combinações de ações para ULS são determinadas utilizando coeficientes parciais de majoração de 1,35 para ações permanentes, e 1,5 para ações variáveis, foi considerado um coeficiente parcial de majoração intermédio entre estes dois valores, inicialmente tendo-se definido um valor de 1,4. Este valor relaciona adequadamente a carga limite ULS relativamente à carga correspondente à combinação característica. Assim sendo, como a combinação a considerar para a verificação da deformação corresponde à combinação quase-permanente, adota-se para as análises realizadas adiante, um quociente de 1,6 para a relação entre  $P_{ULS}$  e  $P_{SLS}$ . Este valor é apenas aproximado, e traduz um valor aproximado na Engenharia Civil.

Os valores das cargas  $P_{ULS}$  foram determinados tendo por base o EC2, com base em fórmulas simplificadas presentes no manual de Tabelas e Ábacos de dimensionamento segundo o EC2 (Barros e Figueiras, 2010), já apresentadas no Capítulo 2. Neste cálculo utilizaram-se as resistências de cálculo  $f_{cd}$  e  $f_{yd}$ , avaliados com base nos coeficientes parciais de segurança propostos pelo EC2.

Para as vigas referentes aos Exemplos 1, são apresentados, na Tabela 5.6, os valores obtidos para as cargas ULS e SLS e respetivos coeficientes.

Tabela 5.6 – Avaliação do Estado Limite condicionante para as vigas dos Exemplos 1.

Viga	$\delta_{SLS}$ (mm)	$P_{SLS}$ (kN)	$P_{ULS}$ (kN)	$P_{ULS}/P_{SLS}$
1V1	6,4	53,6	121,6	2,3
1V2		76	123,9	1,6
1V3		81,2	133,8	1,6

Só o quociente determinado para a Viga 1V1 é claramente superiores a 1,6, pelo que o Estado Limite que a condiciona é o de serviço. De referir que à medida que o pré-esforço aplicado aumenta (1V1<1V2<1V3) mais o coeficiente se aproxima do valor 1,6. Estes valores indicam que a introdução do pré-esforço permite equilibrar as cargas relativas às verificações de segurança, ou seja, permite a otimização relativa das vigas tal como é esperado.

Para as vigas referentes aos Exemplos 2, os valores obtidos para as cargas  $P_{SLS}$  e  $P_{ULS}$  são apresentados na Tabela 5.7. Analogamente ao que ocorre para os Exemplos 1, à medida que o pré-esforço aumenta, o quociente determinado entre  $P_{ULS}$  e  $P_{SLS}$  vai decrescendo, atingindo o ponto ótimo na Viga 2V6. Apesar disso, as três vigas consideradas nos Exemplos 2, são condicionadas pelos Estados Limites de Serviço ao nível do dimensionamento.

Tabela 5.7 – Avaliação do Estado Limite condicionante para as vigas dos Exemplos 2.

Viga	$\delta_{SLS}$ (mm)	$P_{SLS}$ (kN)	$P_{ULS}$ (kN)	$P_{ULS}/P_{SLS}$
2V4	6,4	55,2	123,7	2,2
2V5		77	138,9	1,8
2V6		87,4	139,5	1,6

Na Tabela 5.8 são apresentados os valores para as vigas dos Exemplos 3. Para estas vigas, os quocientes são significativamente superiores a 1,6, e portanto todas as vigas são condicionadas pelos Estados Limites de Serviço.

Tabela 5.8 – Avaliação do Estado Limite condicionante para as vigas dos Exemplos 3.

Viga	$\delta_{SLS}$ (mm)	$P_{SLS}$ (kN)	$P_{ULS}$ (kN)	$P_{ULS}/P_{SLS}$
3V1	5,3	15,5	59,5	3,8
3V2		20	72,5	3,6
3V3		34,5	91,5	2,7
3V4		42,5	102,7	2,4

Também neste caso, o aumento do nível de pré-esforço aplicado inicialmente, a cada uma das vigas, se encontra relacionado com o decréscimo do valor do quociente entre as cargas determinadas.

São apresentados na Tabela 5.9, os valores para as vigas dos Exemplos 4. Para estas vigas, ambas pré-esforçadas, o dimensionamento será condicionado pelos ULS. Neste caso interessa realçar uma particularidade, contrariamente ao que ocorre para as vigas dos outros exemplos. De facto, à medida que o pré-esforço axial inicial aumenta, o quociente determinado também aumenta. Este aspeto poderá resultar do facto de existir um valor ótimo de pré-esforço a partir do qual a carga  $P_{ULS}$  é severamente reduzida.

Tabela 5.9 – Avaliação do Estado Limite condicionante para as vigas dos Exemplos 4.

Viga	$\delta_{SLS}$ (mm)	$P_{SLS}$ (kN)	$P_{ULS}$ (kN)	$P_{ULS}/P_{SLS}$
4V1	3,2	58,9	67,2	1,1
4V2		51,3	63,3	1,2

Por fim, na Tabela 5.10 são apresentados os valores para as vigas dos Exemplos 5. Semelhantemente ao que se verificou para as vigas dos Exemplos 4, também neste caso o dimensionamento é condicionado pelos ULS. A principal razão para os quocientes determinados residirá no apoio central, sobre o qual a viga mobiliza uma enorme quantidade de esforços. Por outro lado, a configuração do cabo contraria os deslocamentos previsíveis. Assim as cargas SLS determinadas serão muito mais próximas das cargas ULS determinadas.

Tabela 5.10 – Avaliação do Estado Limite condicionante para as vigas dos Exemplos 5.

Viga	$\delta_{SLS}$ (mm)	$P_{SLS}$ (kN)	$P_{ULS}$ (kN)	$P_{ULS}/P_{SLS}$
5V1	16,0	161,6	182,0	1,1
5V2		194,1	218,5	1,1

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os objetivos do presente trabalho incidiram na avaliação numérica do comportamento à flexão de vigas de betão armado axialmente restringidas, o que levou à necessidade de selecionar bibliografia relevante para a realização deste trabalho. Os artigos em questão serviram de suporte para se atingir um outro objetivo a partir dos resultados apresentados nestes: a adaptação de um programa computacional de análise não linear ao caso de vigas com recurso a cabos de pré-esforço de excentricidade variável.

No desenvolvimento do programa de cálculo automático de vigas axialmente restringidas sujeitas a flexão, apresentado no Capítulo 3, o bom funcionamento do programa foi alcançado, conseguindo-se modelar e analisar as diversas vigas consideradas sem grandes limitações. A aplicabilidade do programa foi comprovada a partir dos resultados obtidos, que resultaram em desvios inferiores a 10% para todas as vigas analisadas nos exemplos apresentados no Capítulo 4. Ainda de referir que na grande maioria destas vigas os desvios determinados foram inferiores a 5%.

Com base nas análises comparativas e apreciação de resultados efetuados nos Capítulos 4 e 5, importa destacar diversos aspetos. A sobreavaliação do ponto de fissuração para vigas pouco armadas, que se deve à dificuldade em representar corretamente o diagrama tensão-extensão do betão em tração, é um aspeto de relevo que deve ser tido em conta na análise numérica efetuada a partir do programa ANL. Por outro lado, para as vigas com taxas de armadura consideráveis, o ponto de fissuração teórico é avaliado mais corretamente, aproximando-se do valor experimental.

É igualmente importante salientar que para as vigas com cabos de pré-esforço aderentes às vigas, com excentricidade inicialmente constante, as cargas máximas determinadas são inferiores às registadas experimentalmente, pois não é mobilizada a resistência máxima do aço de pré-esforço, dado os cabos serem modelados como não aderentes à viga.

Por outro lado, para as vigas com cabos de pré-esforço de excentricidade variável, na maioria dos casos, as cargas máximas obtidas são superiores às registadas experimentalmente. Para além disso, não foi possível fazer com que o programa computacional consiga determinar corretamente a fase de plastificação dessas vigas.

Ainda de referir que, nos exemplos em que são aplicados vários níveis de carga de pré-esforço nas vigas (Exemplos 1, 2, 3 e 4), a viga com pré-esforço mais elevado em cada um dos exemplos, na fase de fissuração, apresenta uma rigidez teórica inferior à rigidez registada experimentalmente. Este aspeto é evidenciado visualmente, a partir da inclinação dos diagramas P- $\delta$  nesta fase.

### 6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Apresentam-se de seguida algumas sugestões para a realização de trabalhos futuros:

- A sobreavaliação do ponto de fissuração para vigas pouco armadas constituiu a principal dificuldade de modelação do programa desenvolvido. Melhorar o programa ANL de modo a otimizar a carga e o deslocamento de fissuração determinado, principalmente para vigas pouco armadas, é uma sugestão que não pode deixar de ser referida. Porventura, uma adaptação da relação tensão-extensão do betão em tração seja suficiente;
- Possibilitar a consideração de cabos de pré-esforço aderentes à viga no processo de cálculo do programa ANL;
- Realizar um conjunto mais vasto de comparações, com outros resultados experimentais, principalmente com ensaios de vigas com recurso a cabos de pré-esforço de excentricidade variável.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Almeida, C. (2012). “Deformação de Vigas de Betão Armado Restringidas Axialmente”. Tese de Mestrado em Engenharia Civil, Especialização de Estruturas, Departamento de Engenharia Civil da Faculdade e Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra
- Azevedo, A. (1985) “Análise não Linear de Estruturas Planas de Betão Armado”. DEC FEUP, Porto.
- Badawi, M., Soudki, K. (2009). “Flexural strengthening of RC beams with prestressed NSM CFRP rods – Experimental and analytical investigation”. Construction and Building Materials. Canada.
- Barros, H e Figueiras, J. (2010). “Tabelas e Ábacos de dimensionamento de Seções de Betão Solicitadas à Flexão e a Esforços Axiais Segundo o Eurocódigo 2”. FEUP edições, Porto.
- Cattaneo, S., Guissani, F., Mola, F. (2012). “Flexural behaviour of reinforced, prestressed and composite self-consolidating concrete beams”. Construction and Building Materials. Italy.
- D’Arga e Lima, J. (2011). “Betão Armado: Armaduras – REBAP 83”. LNEC, Lisboa.
- El-Hacha, R., Rizkalla, S. (2004). “Near-Surface-Mounted Fiber-Reinforced Polymer Reinforcements for Flexural Strengthening of Concrete Structures”. ACI Structural Journal
- EN 1992-1-1 (2004). “Eurocódigo 2: Projecto de estruturas de betão – Parte 1.1: Regras gerais e regras para edifícios”. CEN, Abril.
- Hussein, O., Elafandy, T., Abdelrahman, A., Nasr, E. (2012) “Behavior of bonded and unbonded prestressed normal and high strength concrete beams”. HBRC journal. Egypt.
- Lou, T., Lopes, S., Lopes, A. (2013). “Flexural Response of Continuous Concrete Beams Prestressed with External Tendons”. Journal of Bridge Engineering. ASCE.

- Neiva, D. (2012). “Avaliação Numérica do Comportamento à flexão Simples de Peças de Betão Armado”. Tese de Mestrado em Engenharia Civil, Especialização de Estruturas, Departamento de Engenharia Civil da Faculdade e Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra
- Oñate, E. (1992). “Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis estático lineal”. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona.
- Padmarajaiah, S., Ramaswamy, A. (2002). “A finite elemento assessment of flexural strength of prestressed concrete beams with fiber reinforcement”. Cement & Concrete Composites. India.
- Rahal, K. (2008). “Simplified design and capacity calculations of shear strength in reinforced concrete membrane elements”. Engineering Structures.
- Rahal, K. (2010). “Post-cracking shear módulos of reinforced concrete membrane elements”. Engineering Structures.
- Rahal, K. (2013). “Simplified calculation of shear deformation in reinforced concrete membrane elements”. Civil-Comp Press, Scotland.
- Rodrigues, R. (2011). “Deformação de Vigas de Betão Armado Restringidas Axialmente”. Tese de Mestrado em Engenharia Civil, Especialização de Estruturas, Departamento de Engenharia Civil da Faculdade e Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra
- Silva, V. (2004). “Mecânica e Resistência dos Materiais”. ZUARI, Coimbra.