



FCTUC DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Desenvolvimento e Análise de Modelos de Escoras e Tirantes Planos Para Ligações Viga-Pilar

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil na Especialidade de Estruturas

Autor

Hugo Castro Azevedo Machado Couto

Orientadores

Paulo Manuel Mendes Pinheiro da Providência e Costa

Miguel Pedrosa Ferreira

Esta dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor, não tendo sofrido correcções após a defesa em provas públicas. O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer responsabilidade pelo uso da informação apresentada

Coimbra, Julho, 2013

AGRADECIMENTOS

É com enorme satisfação que expresso aqui o mais profundo agradecimento a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram na realização desta dissertação e a tornaram possível.

Em primeiro lugar, escrevo uma palavra de agradecimento ao Professor Doutor Paulo Providência e Costa pela disponibilidade e empenho que sempre apresentou na transmissão de conhecimentos e orientações que me ajudaram a traçar o melhor caminho para todo este percurso.

Ao Engenheiro Miguel Pedrosa Ferreira pelo esclarecimento de todas as dúvidas relativas, não só ao EvalS, mas também aos conteúdos abordados na dissertação.

Ao Professor Ricardo Costa pela contribuição preciosa que teve em várias fases do processo.

A todos os meus amigos pela lealdade e companheirismo que demonstraram ao longo dos anos.

Por último, agradeço à minha família pelo carinho e apoio que ofereceram, não só durante a realização do documento, mas em todos os cinco anos de formação académica. Ao meu irmão Helder por todas as palavras de incentivo, à minha mãe Teresa por todos os conselhos que ajudaram a ultrapassar os momentos de maior dificuldade e incerteza, e ao meu pai António, por toda a influência que teve na pessoa que sou hoje e na forma como vejo a vida. Obrigado por tudo.

RESUMO

O método de análise baseado em modelos de escoras e tirantes constitui uma forma prática, fundamentada na mecânica e extremamente intuitiva para o dimensionamento de estruturas de betão armado.

As ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado são frequentemente consideradas através de modelos excessivamente simplistas, tanto para efeitos de análise como de dimensionamento. A falta de conhecimento acerca do seu comportamento traduz-se em modelos pouco rigorosos e inadequados. Como zonas de descontinuidade que são, estes elementos estruturais podem ser analisados de forma eficaz recorrendo a modelos de escoras e tirantes.

Este documento reflecte o estudo efectuado sobre a aplicação do método de escoras e tirantes exclusivamente a ligações viga-pilar. Nele estão contidas informações essenciais à compreensão da temática, instruções relativas aos processos de modelação mais adequados e avaliação dos principais componentes de resistência, e também da rigidez, das ligações.

A análise numérica é efectuada com recurso ao *software* de análise estrutural EvalS e incide sobre um espécime real ensaiado por Roeser (2002).

A análise de resultados obtidos, bem como a possibilidade de uma comparação sólida com resultados experimentais oferecem noções importantes sintetizadas num conjunto de regras práticas para a concepção de modelos deste tipo.

ABSTRACT

The strut-and-tie method is a practical, mechanically sound and extremely intuitive way to design reinforced-concrete structures.

Beam-column connections in reinforced concrete frame structures are often considered by overly simplistic models, both for analysis and design. The lack of knowledge about their behaviour is responsible for inaccurate and inadequate models. Beam-column connections can be classified as zones of discontinuity, which makes strut-and-tie models particularly appropriate for their effective analysis.

This document reflects the study on the application of the strut-and-tie method exclusively to beam-column connections. It contains essential information to understand the thematic, instructions for the most appropriate modelling procedures and assessment of the main components that provide strength, and also stiffness, to the connections.

The numerical analysis is performed using the structural analysis software, EvalS, and it is applied to an actual laboratorial specimen tested by Roeser (2002).

The analysis of the results obtained as well as the possibility of a solid comparison with experimental results provide important concepts synthesized on a set of practical rules for designing such models.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	ii
ABSTRACT	iii
ÍNDICE.....	iv
ÍNDICE DE FIGURAS	vi
ÍNDICE DE QUADROS	ix
SIMBOLOGIA	x
ABREVIATURAS	x
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Considerações Gerais.....	1
1.2 Objectivos	1
1.3 Organização do Documento.....	2
2 ESTADO DA ARTE	3
2.1 Introdução	3
2.2 Enquadramento Histórico	3
2.3 Enquadramento Normativo.....	5
2.4 Estudos Realizados Sobre Modelos de Escoras e Tirantes em Ligações.....	5
3 O MÉTODO DE ESCORAS E TIRANTES	12
3.1 Introdução	12
3.2 Teoremas Limite da Plasticidade	12
3.3 Zonas B e Zonas D de Uma Estrutura	13
3.4 Princípio de Saint-Venant.....	14
3.5 Tipificação Genérica de Modelos	14
3.5.1 Tirantes	16
3.5.2 Escoras.....	16
3.5.3 Nós.....	18
4 LIGAÇÕES VIGA-PILAR	21
4.1 Introdução	21
4.2 Tipos de Ligações Viga-Pilar	23
4.2.1 Ligações de Canto Com Momento Negativo – <i>Closing Joints</i>	23
4.2.2 Ligações de Canto Com Momento Positivo – <i>Opening Joints</i>	25
4.2.3 Ligações em T – <i>T-Joints</i>	28
4.2.4 Ligações em Cruz – <i>Cross-Joints</i>	29
5 CASO DE ESTUDO – EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	30

5.1	Introdução	30
5.2	Modelação e Análise Inicial.....	31
5.2.1	Aspectos Construtivos e Características Gerais dos Modelos.....	31
5.2.2	Modelos Isostáticos	33
5.2.3	Modelos Hiperestáticos	47
6	OPTIMIZAÇÃO DE RESULTADOS	56
6.1	Redução dos Módulos Periféricos	56
6.2	Aumento de Espessura das Escoras Diagonais	59
6.3	Incorporação de Uma Escora na Diagonal Principal do Módulo da Ligação.....	60
6.4	Contribuição das Tensões do Betão nas Armaduras.....	61
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	64
7.1	Análise de Resultados e Conclusões.....	64
7.2	Potencial Para Futuros Desenvolvimentos	65
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 - Modelo de treliça clássica de Ritter-Mörsch.	4
Figura 2.2 – MET desenvolvido por Ortiz (1993).....	6
Figura 2.3 – METs utilizados por Pimanmas e Chaimahawan (2010).....	9
Figura 3.1 – Exemplos de zonas B e D segundo Schlaich – adoptado de ACI-318 (2002). ...	14
Figura 3.2 – Exemplos de modelos de escoras e tirantes – Adoptado de Ortiz (1993).....	15
Figura 3.3 – Configurações típicas de campos de tensão de compressão – Adoptado de Souza (2004).....	16
Figura 3.4 – Regiões nodais – adoptado de ACI-318 (2002).....	18
Figura 3.5 – Nó hidrostático – adoptado de ACI-318 (2002).....	19
Figura 4.1 – Distribuição de tensões em nós ortogonais de pórticos de momento positivo (sinais contrários para momento negativo) – adoptado de MacGregor (1992). ...	21
Figura 4.2 – <i>Closing joint</i> ; (a) Esforços na ligação; (b) Fendilhação na ligação – adoptado de MacGregor (1992).	23
Figura 4.3 – <i>Closing joint</i> ; construção do campo de tensões através de elementos de escora e de tirante – adaptado de Muttoni (2006).....	24
Figura 4.4 – <i>Opening joint</i> ; (a) Esforços na ligação; (b) Fendilhação na ligação - adoptado de MacGregor (1992).	25
Figura 4.5 - <i>Opening joint</i> ; (a) Modelo com desvio simples; (b) Modelo com desvio duplo - adoptado de Muttoni (2006).	26
Figura 4.6 – <i>Opening joint</i> ; Diferentes modelos de escoras e tirantes e esquema de reforço correspondente – adoptado de Schlaich (1987).	26
Figura 4.7 – <i>Opening joint</i> ; Aspectos das fissuras em nós de pórticos para diferentes tipos de armadura – adoptado de Leonhardt (1978).....	27
Figura 4.8 – Níveis de eficiência de <i>opening joints</i> – Adoptado de MacGregor (1992).....	27
Figura 4.9 – <i>T-joint</i> ; a) Níveis de eficiência; b) Modelo de escoras e tirantes; c) Reforço insatisfatório; d) Reforço satisfatório – adaptado de MacGregor (1992).	28
Figura 4.10 – <i>T-joint</i> ; Modos de carga e respectivos modelos em escoras e tirantes.....	29
Figura 4.11 – <i>Cross joint</i> ; Modos de carga e respectivos modelos de escoras e tirantes.	29

Figura 5.1 – Condições de apoio e carregamento, e geometria dos modelos numéricos efectuados.	31
Figura 5.2 – Esquema de modelos isostáticos; a) Modelo 1; b) Modelo 2; c) Modelo 3.....	34
Figura 5.3 – Resultados EvalS do Modelo 1; a) Esforços; b) Deformada	34
Figura 5.4 – Modelo 1; identificação de elementos.	35
Figura 5.5 – Geometria típica do nó N1.	36
Figura 5.6 – Geometria típica do nó N2.	36
Figura 5.7 – Diagrama força-deslocamento (Modelo 1).	39
Figura 5.8 - Resultados EvalS do Modelo 2; a) Esforços; b) Deformada.	40
Figura 5.9 - Geometria típica do nó N3.....	40
Figura 5.10 - Geometria típica do nó N4.....	41
Figura 5.11 - Diagrama força-deslocamento (Modelo 2).	43
Figura 5.12 – EvalS; esforços resultantes do Modelo 2 alternativo para um carregamento de 50 kN nas extremidades laterais das vigas.	44
Figura 5.13 - Diagrama força-deslocamento (Modelo 2 alternativo).	44
Figura 5.14 – Modelo 3; a) Deformada; b) Identificação de elementos; c) Esforços.....	45
Figura 5.15 – Diagrama força-deslocamento do Modelo 3	46
Figura 5.16 – Modelo 3 alternativo; a) Diagrama força-deslocamento; b) Esforços relativos a um carregamento de 50 kN nas extremidades laterais das vigas.....	47
Figura 5.17 – Esquema de modelos hiperestáticos; a) Modelo 4; b) Modelo 5.	48
Figura 5.18 – Modelo 4; a) Esforços; b) Deformada, c) Identificação dos elementos.	48
Figura 5.19 – Geometria típica do nó N2'.....	49
Figura 5.20 – Diagrama força-deslocamento do Modelo 4.....	50
Figura 5.21 – Modelo 4 alternativo; a) Diagrama força-deslocamento, b) Esforços relativos a um carregamento de 50 kN nas extremidades laterais das vigas.....	51
Figura 5.22 – Modelo 5; a) Esforços; b) Deformada; c) Identificação de elementos.....	52
Figura 5.23 – Geometria típica do nó N5.	53
Figura 5.24 – Diagrama força-deslocamento do Modelo 5.....	54
Figura 6.1 – Redução de módulos periféricos; a) Modo 1; b) Modo 2; c) Modo 3.....	57
Figura 6.2 – Diagrama força-deslocamento do Modo 1.....	57
Figura 6.3 - Diagrama força-deslocamento do Modo 2.....	58
Figura 6.4 - Diagrama força-deslocamento do Modo 3.....	58
Figura 6.5 – Aumento da espessura das escoras diagonais.	59
Figura 6.6 – Diagrama força-deslocamento.	59
Figura 6.7 – Influência da introdução de uma escora na diagonal principal do módulo da ligação no Modelo 2.	60

Figura 6.8 - Influência da introdução de uma escora na diagonal principal do módulo da ligação no Modelo 3.	60
Figura 6.9 - Influência da introdução de uma escora na diagonal principal do módulo da ligação no Modelo 4.	61
Figura 6.10 – Contribuição das tensões do betão traccionado na rigidez de um elemento.	63

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 3.1 – Limites superior e inferior para o ângulo formado pelas escoras e tirantes.	20
Quadro 5.1 – Principais características do espécime RA4 ensaiado por Roeser (2002).	32
Quadro 5.2 – Principais propriedades dos aços utilizados na armação do espécime RA4.	32
Quadro 5.3 – Principais características dos elementos lineares das vigas e pilares.	33
Quadro 5.4 – Características geométricas das escoras diagonais dos módulos periféricos do Modelo 1.	37
Quadro 5.5 – Características geométricas da escora do módulo central do Modelo 1.	38
Quadro 5.6 – Resistência limite dos elementos do Modelo 1.	38
Quadro 5.7 – Características geométricas das escoras diagonais dos módulos periféricos do Modelo 2.	42
Quadro 5.8 – Características geométricas das escoras do módulo central do Modelo 2.	42
Quadro 5.9 - Resistência limite dos elementos do Modelo 2.	42
Quadro 5.10 - Características geométricas das escoras diagonais dos módulos periféricos do Modelo 3.	45
Quadro 5.11 - Características geométricas das escoras do módulo central do Modelo 3.	46
Quadro 5.12 - Resistência limite dos elementos do Modelo 2.	46
Quadro 5.13 - Características geométricas das escoras diagonais dos módulos periféricos do Modelo 4.	49
Quadro 5.14 - Características geométricas das escoras do módulo central do Modelo 3.	50
Quadro 5.15 - Resistência limite dos elementos do Modelo 4.	50
Quadro 5.16 - Características geométricas das escoras diagonais dos módulos periféricos do Modelo 5.	53
Quadro 5.17 - Características geométricas das escoras do módulo central do Modelo 5.	53
Quadro 5.18 - Resistência limite dos elementos do Modelo 5.	54
Quadro 6.1 – Acréscimo de área de armadura equivalente	62

SIMBOLOGIA

A_c	Área da secção transversal de betão
A_s	Área da secção de armadura para betão armado
E_c	Módulo de elasticidade do betão
E_s	Módulo de elasticidade do aço
F	Cargas aplicadas nas extremidades livres das vigas da ligação
I	Momento de inércia da secção de betão
N_c	Carga aplicada no topo do pilar superior da ligação
b	Largura total da secção transversal de betão
h	Altura total da secção transversal de betão
f_c'	Valor de cálculo da tensão de rotura do betão à compressão – ACI-318 (2012)
f_{cd}	Valor de cálculo da tensão de rotura do betão à compressão – Eurocódigo 2 Parte 1-1 (2010)
f_{ctm}	Valor médio da tensão de rotura do betão à tracção
z	Braço do binário das forças interiores
ε_s	Extensão do aço à tracção
σ_x	Tensão longitudinal no betão
σ_y	Tensão radial no betão
θ	Ângulo formado pela inclinação da escora e a armadura longitudinal do elemento

ABREVIATURAS

MET – Método de Escoras e Tirantes

LVP – Ligação Viga-Pilar

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Gerais

No panorama actual da engenharia civil, o betão armado assume-se como um dos principais materiais estruturais. É, por isso, importante compreender, tanto quanto possível, o seu comportamento, criando processos de dimensionamento seguros e práticos apoiados em fundamentos teóricos comprovados experimentalmente e aceites pela comunidade científica.

Lourenço (1992) refere que, sendo o betão armado um material não-homogéneo e não-linear, a aplicação de uma análise não-linear através de uma abordagem de elementos finitos na simulação do seu comportamento é pouco prática e de difícil acesso ao projectista comum. Mais de uma vintena de anos depois, Costa (2013) mantém esse diagnóstico. Os modelos de escoras e tirantes resolvem esse problema de uma forma simplificada e sem uma grande necessidade de recursos informáticos complexos, constituindo uma alternativa válida e bastante útil ao nível da concepção e pré-dimensionamento de uma estrutura (Pinho, 1995), senão mesmo do seu próprio dimensionamento (Muttoni et al., 2006).

A análise apoiada em modelos de escoras e tirantes baseia-se na Analogia da Treliça proposta por Ritter e Mörsh em 1899 e pertence ao domínio de aplicação do teorema do limite inferior da análise plástica. Proporciona uma compreensão expedita da transferência de forças e correspondente distribuição de tensões, possibilitando uma fácil identificação das zonas mais solicitadas da estrutura. Na realidade, a grande utilidade deste método advém do facto de permitir a análise de zonas de descontinuidade de elementos não abrangidas pela Hipótese de Bernoulli e outros métodos habituais de dimensionamento em betão armado. Nós de pórticos, zonas de aplicação de cargas pontuais e aberturas, são alguns exemplos de singularidades a cujo tratamento o método de escoras e tirantes se adequa. Os primeiros, constituem uma zona particularmente crítica a nível de dimensionamento, sendo de crucial importância a análise do seu comportamento em condições de serviço e de rotura.

1.2 Objectivos

As ligações são zonas de concentração de tensões potencialmente críticas devendo, por isso, o seu comportamento ser considerado de uma forma fidedigna. De facto, esse é um dos

principais objectivos desta dissertação. Pretende-se, portanto, contribuir para o desenvolvimento da mecânica que possibilita a descrição e modelação do comportamento deste tipo de disposições estruturais, recorrendo à análise simplificada por modelos de escoras e tirantes.

São objectivos deste documento, mostrar o funcionamento dos vários tipos de ligação, incidindo com mais pormenor em ligações em cruz, através de uma abordagem em escoras e tirantes, sugerindo os métodos mais eficazes de modelação. Pretende-se também testar métodos de optimização de resultados particularmente ao nível da rigidez da ligação.

A divulgação deste tipo de análise e a possibilidade de acrescentar uma referência bibliográfica a nível nacional e internacional são também uma mais-valia e, por isso, um objectivo não menos importante.

1.3 Organização do Documento

O documento está organizado em 7 capítulos, subdivididos em secções e subsecções.

No Capítulo 1 faz-se uma introdução geral ao tema da dissertação e apresentam-se os principais objectivos do estudo, assim como a organização do documento.

No Capítulo 2 é apresentado o estado da arte relativo ao tema em estudo, dando a perceber a posição actual da ciência que sustenta a temática, apresentando um enquadramento histórico e normativo e ainda uma compilação de estudos efectuados no seu âmbito.

O Capítulo 3 contém uma compilação de conceitos básicos dos modelo de escoras e tirantes, essencial para a compreensão consistente deste método.

No Capítulo 4 aborda conceitos de carácter mais específico, relativos à aplicação do método das escoras e tirantes ao caso concreto de ligações viga-pilar.

O Capítulo 5 apresenta uma análise linear efectuada através de um conjunto de 5 modelações possíveis de um caso prático real ensaiado por Roeser (2002), apontando as características principais de cada uma e examinando os seus resultados.

No Capítulo 6 testam-se estratégias de optimização dos resultados obtidos recorrendo transformações físicas e geométricas capazes de promover a proximidade com a realidade.

No Capítulo 7 resume-se as principais conclusões extraídas dos capítulos anteriores.

2 ESTADO DA ARTE

2.1 Introdução

No presente capítulo será efectuada uma pequena abordagem à história e ao estado da arte sobre modelos de escoras e tirantes e nós de ligação viga-pilar. Será apresentada uma compilação de documentos normativos e de estudos sobre a temática da modelação genérica em escoras e tirantes, enfatizando situações de ligação viga-pilar.

2.2 Enquadramento Histórico

A base do método de escoras e tirantes surgiu na transição do século XIX para o século XX, quando foi introduzido o conceito de Analogia da Treliça por Ritter e Mörsch. Esta abordagem clássica baseia-se na analogia do comportamento de uma viga de betão armado simplesmente apoiada de secção rectangular fendilhada e uma treliça.

De acordo com a teoria, o comportamento da viga após a fendilhação assemelha-se ao de uma treliça, na qual, o banzo superior corresponde a um cordão de betão comprimido e o banzo inferior à armadura de tracção longitudinal, devendo ser paralelos entre si. Os elementos diagonais correspondem a escoras de betão entre as fendas e à armadura transversal (de esforço transversal) caso estejam comprimidos ou traccionados, respectivamente. As escoras diagonais devem, tal como acontece com as fendas nas zonas onde o esforço transversal é mais significativo, ter uma inclinação θ na ordem dos 45° , enquanto na armadura transversal a inclinação α ronda frequentemente os 90° por motivos de exequibilidade, ambas em relação ao eixo da viga. Note-se que as inclinações podem variar dentro de limites impostos pelas normas em vigor. A treliça é habitualmente isostática, devendo assegurar-se que os nós não são esmagados.

A Figura 2.1 apresenta um modelo exemplificativo da Analogia Clássica da Treliça sugerido por Ritter e Mörsch.

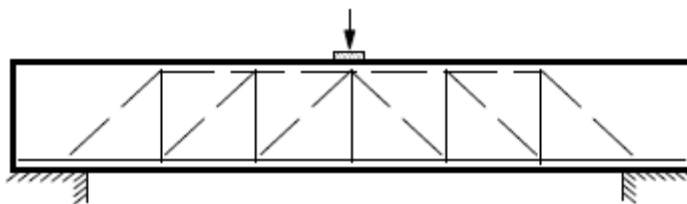


Figura 2.1 - Modelo de treliça clássica de Ritter-Mörsch.

Este modelo permanece perfeitamente actual e continua a ser utilizado em processos de dimensionamento de estruturas. No entanto, apesar de eficaz em determinadas zonas, o método da Analogia Clássica da Treliça não se coaduna completamente com o comportamento real da viga de betão em zonas de descontinuidade geométrica ou estática, tal como nas imediações de cargas concentradas, nós de pórticos, consolas curtas e aberturas (Lourenço, 1992).

A fim de ultrapassar lacunas inerentes ao método original, outros investigadores empenharam-se no seu aperfeiçoamento, dando origem a modelos que consideram melhor a realidade do problema. Neste contexto destacam-se Kupfer (1964), Leonhardt (1978), Marti (1991), McGregor (1992) e Muttoni e Thürlimann (2006), entre outros, contribuindo para a criação de uma base científica sólida e devidamente apoiada na Teoria da Plasticidade neste tipo de modelação (Souza, 2004).

Os desenvolvimentos efectuados no âmbito da analogia supra citada conduziram ao surgimento do Método de Escoras e Tirantes (MET), tendo em Schlaich e Schäfer (1987, 1991) os principais impulsionadores da investigação e divulgação da temática.

Schlaich e Schäfer (1987) dedicaram especial atenção à análise do comportamento dos nós e dos estados múltiplos de tensão nas escoras dos modelos treliçados. Sugeriram ainda que se considerassem zonas de comportamentos distintos na análise de estruturas, designadamente “Zonas D” e “Zonas B”, abordadas no ponto 3.3 deste documento.

Em Portugal, este tema encontra-se ainda relativamente pouco estudado. Contudo, servem de referência os trabalhos realizados por Lourenço (1992) e Pinho (1995) que abordam o assunto de um modo abrangente, apresentando esclarecimentos gerais de dimensionamento de escoras, mas também análises específicas a zonas de descontinuidade e meios irregulares de betão armado.

2.3 Enquadramento Normativo

Num projecto de engenharia as condições de segurança, estabilidade, funcionalidade e durabilidade têm de, obrigatoriamente, ser respeitadas. Neste sentido, de modo a providenciar recursos de cálculo convenientemente testados, teórica e experimentalmente, e a uniformizar métodos de dimensionamento a utilizar pelo projectista, criaram-se disposições regulamentares que servem de referência no dimensionamento ou sua verificação. Destes documentos normativos abordar-se-ão os casos do Eurocódigo 2 Parte 1-1 (2010), vigente na União Europeia e, conseqüentemente, em Portugal e da norma ACI-318 (2002), vigente nos Estados Unidos da América. Serão ainda indicadas algumas condições presentes no Model Code 1990 (1993) e em algumas publicações cujos resultados se encontrem consolidados e aceites na comunidade científica.

O Eurocódigo 2 Parte 1-1 (2010) aborda a problemática da modelação com escoras e tirantes nos pontos 5.6.4 e 6.5, sendo que no Anexo J apresenta algumas considerações deste processo aplicado a ligações. Genericamente, a norma considera válida a utilização de modelos de escoras e tirantes na verificação ao estado limite último das regiões de continuidade e de descontinuidade de um elemento de betão, sendo que nestas últimas servem também para a definição de disposições construtivas. Se forem asseguradas as condições de compatibilidade aproximada dos modelos de escoras e tirantes, designadamente na escolha da posição e direcção das escoras, pode também efectuar-se a verificação ao estado limite de utilização, verificando as tensões no aço e controlando a largura das fendas. O conteúdo apresentado é, no entanto, demasiadamente genérico relativamente a complexidade global do tema.

A norma ACI-318 (2002) dedica uma secção, o *Appendix A*, na elucidação do tema. Já o Model Code 1990 (1993) apresenta no item 6.8 uma grande quantidade de informações que possibilitam um desenvolvimento adequado de projectos utilizando este método.

2.4 Estudos Realizados Sobre Modelos de Escoras e Tirantes em Ligações

A modelação em escoras e tirantes em peças de betão armado tem sido alvo de vários estudos, em grande maioria num passado relativamente recente. O crescente interesse pela matéria prende-se no facto de se tratar de um método bastante prático e eficaz, capaz resolver situações não contempladas por outros métodos, como por exemplo nos casos em que a Hipótese de Bernoulli é totalmente inadequada, como foi referido anteriormente. Neste

seguimento, muitos têm sido os investigadores que se debruçam sobre a temática com o intuito de a melhorar e contribuir para uma base científica mais consistente e abrangente. Serão mencionados aqui alguns desses trabalhos e investigadores que se focaram essencialmente na reflexão sobre o MET aplicado a ligações viga-pilar (LVP) e seu comportamento.

De modo a analisar os resultados do seu estudo laboratorial, Ortiz (1993) examinou o tema da modelação em escoras e tirantes em betão armado aplicado, sobretudo, a situações de vigas curtas e de LVP, havendo um interesse particular nesta última situação.

Tendo como objectivo melhorar a compreensão do comportamento de LVP exteriores, Ortiz propôs-se a desenvolver um MET baseando-se em resultados de testes experimentais em sete ligações distintas, ver Figura 2.2. Nos testes realizados, a viga foi carregada com uma única carga monotónica e o pilar suportado de modo a permitir a sua rotação nas extremidades. Os testes foram acompanhados por medições de deformação das secções críticas e em vários pontos do reforço e os padrões das fendas foram observados e marcados. As observações experimentais permitiram uma análise do mecanismo de transferência de forças internas e da resistência ao corte do nó.

Ortiz sugere um processo para a avaliação da resistência da ligação organizado em três fases:

- (1) Definição do ângulo θ da escora diagonal através do $\arctan(F_v/V_j)$, onde F_v representa a resultante das forças verticais introduzidas pela viga e pelo pilar em cada lado do nó e V_j o esforço transversal no nó.
- (2) Determinação da capacidade da ligação com $V_{jd} = \alpha_2 f_{cd} b_c w_i \cos \theta + A_{sv} f_{yd}$, $w_i = 0,45 (h_c \sin \theta + s \cos \theta)$ e $A_{sv} f_{yd} \leq \alpha_2 f_{cd} b_c 0,55 (h_c \sin \theta + s \cos \theta) \cos \theta$.
- (3) Comparação entre V_{jd} e V_j .

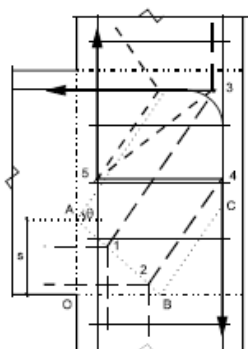


Figura 2.2 – MET desenvolvido por Ortiz (1993).

Podem extrair-se como principais conclusões do estudo o facto de a carga axial do pilar apresentar maior influência em condições de serviço que em condições de rotura. Perto da

rotura, a fendilhação do canto em abertura do nó pode prejudicar significativamente a aderência dos varões da armadura no interior da ligação. A capacidade de carga das dobras dos varões é influenciada pelo estado de tensão geral da região, podendo este ser descrito através de uma verificação adicional sugerida por Ortiz (1993).

$$\frac{\sigma_{be}}{f_{be}} + \frac{\sigma_{other}}{f_{other}} \leq 1,0$$

em que σ_{be} e f_{be} representam as tensões actuante e resistente ao esmagamento do betão por parte dos varões e σ_{other} e f_{other} as restantes tensões, actuantes e resistentes, na ligação.

Hong e Lee (2004) efectuaram um estudo baseado num MET que permitisse avaliar a deformação do betão armado no interior das LVP. Os efeitos de deformação plástica nas vigas, sujeitas a esforço transverso na região do nó, foram definidos segundo o nível de deterioração na ligação e amaciamento do betão em compressão registados. Compararam também os esforços e deformação calculados pelo modelo proposto com resultados de ensaios existentes, considerando haver um nível satisfatório de proximidade. Estes autores consideraram insuficiente a modelação em escoras e tirantes comum, apenas com mecanismo diagonal de treliça. Segundo eles, esses modelos traduzem-se numa solução conservativa na capacidade de resistência ao corte da ligação viga-pilar, uma vez que não retractam legitimamente as relações entre as forças transversais e a deformação das ligações plásticas nas vigas adjacentes, assim como não permitem uma correcta estimativa da ductilidade do sistema por rotura ao corte do nó.

Com os novos modelos propostos, Hong e Lee (2004) sugerem uma nova abordagem dependente das condições de deformação, na qual a deterioração da ligação e amaciamento do betão são tidos em consideração, designadamente na determinação das forças efectivas das componentes que actuam nas escoras, tirantes, nós C-C-C e T-T-C (ver 5.3.5). Estes novos modelos ajudam a uma melhor compreensão do percurso das cargas no interior das ligações viga-pilar que variam com a resposta plástica do sistema. Podem inclusive ser utilizados na avaliação de nós existentes e no dimensionamento em zonas de alta sismicidade, ou média-baixa sismicidade onde a consideração de um comportamento totalmente dúctil não é necessário.

Bakir e Boduroglu (2005) realizaram uma reflexão sobre o comportamento de ligações viga-pilar utilizando um MET considerando o amaciamento do betão para elementos de membrana, recorrendo a uma análise não linear, com o objectivo de expandir a aplicação de modelos deste tipo. O modelo explorado contém três equações de equilíbrio, três equações de compatibilidade e quatro equações para as leis constitutivas dos materiais. Contém ainda três características importantes, a primeira relativa à associação não-linear da tensão e extensão; a

segunda relativa ao amaciamento do betão em compressão devido às tensões na direcção perpendicular, também referida por Hong e Lee (2004); e a terceira à influência das tensões de tracção entre fendas no betão presente na relação tensão-extensão do aço da armadura de reforço e à influência das tensões ortogonais na relação tensão-extensão do betão em compressão. É tida em conta a influência das condições de aderência dos varões da viga no comportamento da ligação.

O MET proposto desenvolve-se em três fases. A primeira fase do processo consiste na determinação de uma constante λ que representa um factor de aderência, associando a grandeza das tensões na armadura longitudinal da viga às tensões nos estribos de modo a obter o rácio de reforço na direcção longitudinal.

$$\lambda = 0,706 - 18,0606 \frac{A_{sje}}{b_{eff}h_c} - \frac{9,2N}{100000b_ch_c} - \frac{7,218A_{scol}}{b_ch_c}$$

sendo A_{sje} a área da secção transversal dos estribos, N o esforço axial no pilar, b_{eff} a média da largura do pilar e da viga, b_c e h_c a largura e altura da secção do pilar e A_{scol} a área da secção transversal da armadura longitudinal do pilar.

Na segunda fase realiza-se uma previsão empírica dos parâmetros que influenciam o factor de aderência λ usando um processo com a designação de *stepwise multiple regression analysis* (análise de regressão múltipla passo-a-passo). Bakir e Boduroglu (2005) concluíram que o factor λ depende principalmente do nível de confinamento caracterizado pelas tensões axiais do pilar e pelo rácio de estribos, sendo que se o nível de confinamento for adequado, as condições de aderência melhoram consideravelmente. Na terceira e última fase, o factor de aderência é aplicado ao modelo de escoras e tirantes. Este procedimento é aplicado em testes a 51 ligações viga-pilar exteriores.

As conclusões retiradas do estudo mostram que se for considerada uma aderência total dos varões da viga ao betão, os desvios padrão e as variações dos coeficientes tornam-se relativamente altos, enquanto que a resistência ao corte da ligação é subestimada. A correcta consideração das condições de aderência das armaduras tem então um papel muito importante na simulação do comportamento das ligações. Aparentemente, os resultados obtidos levam a crer que o modelo é bastante preciso nas previsões da resistência ao corte nos nós.

Liang (2006) apresentou um método de optimização de modelos de escoras e tirantes em ligações viga-pilar de betão armado, nomeadamente, a técnica da optimização baseada no desempenho, ou *performance-based optimization (PBO)*. De acordo com Liang (2006), o modelo de escoras e tirantes óptimo numa LVP em betão é gerado pela remoção gradual de elementos finitos ineficientes da ligação, num processo de optimização. No seu estudo, foram

otimizados METs para o dimensionamento e detalhe de ligações do tipo *opening joint*, ligações viga-pilar exteriores e interiores. O processo da *PBO* revela-se uma ferramenta particularmente eficaz para o dimensionamento e detalhe de regiões de descontinuidade como é o caso das ligações, podendo ser utilizado para gerar automaticamente modelos óptimos de escoras e tirantes.

Uma outra investigação foi conduzida por Pimanmas e Chaimahawan (2010) onde foi estudado o efeito do aumento na área de uma LVP na sua resistência ao corte. Embora não tenha incidido directamente na modelação com escoras e tirantes, este estudo utilizou um modelo desse tipo, baseado na principal distribuição de tensões obtida de uma análise de elementos finitos, para analisar os exemplares testados. O modelo proposto permite prever o modo de rotura, a força de corte no pilar e as tensões na armadura longitudinal, para além da distribuição das forças transversais horizontais no plano da ligação e secções das vigas dentro da área alargada.

Foram testados cinco exemplares de ligações viga-pilar sujeitos a carregamentos cíclicos quase estáticos. O primeiro, exemplar de controlo, não sofrendo alargamento da ligação, o segundo tendo sofrido um alargamento monolítico quadrado e os últimos três tendo sido alargados em diferentes tamanhos e formas (Figura 2.3). A análise dos testes indicou que existe uma rotura por corte frágil da ligação no primeiro exemplar de controlo e uma rotura à flexão da viga no segundo exemplar. Nos restantes exemplares a rotura variou entre rotura à flexão da viga e rotura por esmagamento do painel da ligação e das áreas alargadas.

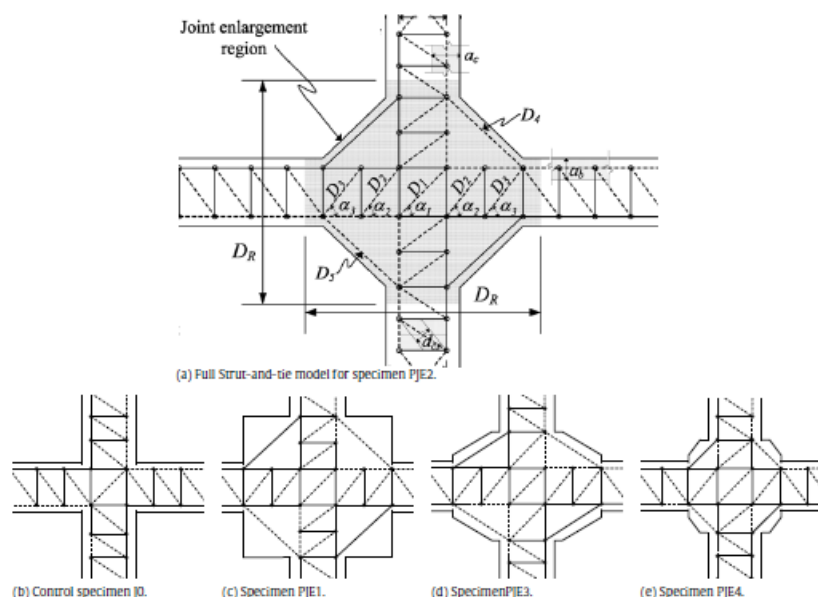


Figura 2.3 – METs utilizados por Pimanmas e Chaimahawan (2010).

Os resultados obtidos mostraram que o aumento da área da ligação possibilita o aumento da sua resistência, rigidez e dissipação de energia. Foi verificado um decréscimo nas tensões de corte nos elementos alargados. Contudo, a distribuição dessas tensões não é uniforme, sendo maior no painel da ligação do que nas secções da viga nas zonas alargadas. A análise de elementos finitos realizada para examinar o desenvolvimento das tensões nas zonas de alargamento da ligação demonstra o comportamento da escora diagonal principal e das escoras adicionais ao longo das zonas de ligação alargadas, servindo de base para a construção do modelo de escoras e tirantes.

Pode extrair-se das conclusões do estudo que este modelo proporciona uma boa comparação qualitativa com os resultados experimentais em termos de esforços de corte no pilar e na ligação e de tensões nas armaduras da viga. Descreve ainda a distribuição não linear das tensões de corte horizontais nas zonas de alargamento das ligações.

To, Ingham e Sritharan (2003) executaram uma investigação com o objectivo de determinar a resposta elástica e a capacidade resistente de estruturas de betão armado. Estes investigadores estabeleceram, usando um MET, bases de dados contendo respostas força-deslocamento não-lineares inelásticas de ligações em T de pontes e encurvadura de pontes de múltiplos pilares. Os METs utilizados foram modelados com o *software* de análise não linear *Drain-2DX* e tiveram como base os mecanismos de transferência de esforços no plano das ligações.

Os resultados obtidos evidenciaram que METs bem formulados são capazes de avaliar as exigências a nível de esforços internos, capturando a rigidez em regime elástico e a resistência em regime plástico. Deste modo, To, Ingham e Sritharan (2003) consideram que existe um potencial considerável na combinação de diferentes fases do procedimento convencional de dimensionamento de betão armado num único conceito de modelação usando METs.

Continuando o desenvolvimento dos estudos relativos ao comportamento sísmico de METs em ligações de betão armado, Sritharan (2005) efectuou uma análise aplicada a nós de pontes em T usando um método baseado na transferência de forças, external strut force transfer model (*EFTM*), de modo a facilitar a execução da armadura. A utilização de estribos verticais estrategicamente colocados no plano da ligação, permite transferir as forças através da mesma. Foram aplicadas diferentes quantidades de pré-esforço no topo da viga, simulando-se situações de carregamento sísmico plano.

Analisaram-se três modelos de nós de pontes em T em escoras e tirantes. Embora tenha sido observado um bom desempenho sísmico nas ligações com pré-esforço aplicado, as ligações sem pré-esforço no topo da viga entraram em rotura dúctil para médios e grandes deslocamentos. A análise detectou também deficiências a nível da transferência de esforços de

dimensionamento e revelou que o modelo pode ser simplificado com redução considerável do reforço da zona da ligação quando há aplicação de pré-esforço.

Os testes experimentais permitiram concluir que os *EFTM* actuais fornecem detalhes insuficientes para o betão armado dos nós de pontes, resultando num reforço excessivo em nós pré esforçados. Confirmaram também que a modelação do esforço de corte como uma componente da força total transferida através do nó, possibilita a colocação de reforço na viga, permitindo, por isso, reduzir o reforço na zona da ligação e melhorando os aspectos construtivos.

Foi verificada a possibilidade da transferência de forças ser caracterizada por mecanismos de fixação e emenda, ou, *clamping and splice*. O mecanismo de fixação pode ser simulado por uma escora ancorada no topo da viga, como assumido no *EFTM*, no entanto a grandeza e orientação da escora estão incorrectamente consideradas e o mecanismo de emenda não é considerado. Finalmente, o comportamento da zona de topo da viga adjacente ao lado de compressão do pilar não é correctamente considerado neste procedimento.

3 O MÉTODO DE ESCORAS E TIRANTES

3.1 Introdução

Como foi já referido, o MET permite uma análise sistemática de elementos estruturais descontínuos, assim como, um entendimento suficientemente correcto de uma estrutura e do seu mecanismo resistente.

É de extrema importância possuir uma boa compreensão de todos os conceitos e teorias por detrás deste método de modo a se conseguir usufruir de toda a sua utilidade a nível prático, sem que sejam cometidos erros potencialmente comprometedores.

Neste capítulo dão-se a conhecer os aspectos considerados relevantes na base do funcionamento genérico do MET e são apresentados os modelos mais comuns em nós de pórticos, bem como algumas das suas características.

3.2 Teoremas Limite da Plasticidade

Os teoremas limite da análise plástica foram originalmente introduzidos por Gvozdev em 1938 e posteriormente validados e desenvolvidos por Drucker e Prager, na tentativa de obter o comportamento na rotura de materiais com comportamento elasto-plástico perfeito (Souza, 2004).

O Teorema do Limite Inferior da Plasticidade (ou teorema estático) determina que quando existe um conjunto de cargas externas em equilíbrio com um estado de tensão no interior do elemento e não é excedido o critério de rotura do material em nenhum ponto, não é possível a ocorrência de colapso e as cargas de colapso reais nunca serão inferiores às cargas aplicadas externamente, ou seja, se o critério de plastificação não é superado pelo estado de tensão no elemento em nenhum ponto, não ocorre rotura. Este teorema é particularmente relevante na fundamentação do MET, uma vez que, normalmente, se admite a hipótese de que a capacidade resistente do aço das armaduras se esgota antes da do betão (rotura dúctil).

O Teorema Limite Superior da Plasticidade (ou teorema cinemático) estabelece que quando existe um conjunto de cargas externas e um mecanismo de colapso plástico, tal que a deformação para a qual a taxa dessas forças produz um trabalho igual ou superior à taxa de dissipação interna, deve haver colapso, ou seja, se existe um mecanismo de rotura cinematicamente admissível em que o trabalho das forças externas supera das forças internas, a estrutura entra em rotura.

Na prática, dada a dificuldade de se definirem estes limites com precisão, os teoremas fornecem uma boa aproximação dos mesmos, tendo uma grande utilidade no que toca a problemas de engenharia.

3.3 Zonas B e Zonas D de Uma Estrutura

De acordo com Schlaich et al. (1987), dentro de um elemento estrutural podem distinguir-se dois tipos de zonas consoante a continuidade/descontinuidade do seu comportamento. Assim, regiões de uma estrutura em que se admitem válidas as hipóteses das secções planas de Bernoulli, são designadas de zonas B (ou de continuidade). Todas as restantes, onde a hipótese das secções planas não for aplicável, devido a descontinuidades geométricas e/ou estáticas, são designadas de zonas D (ou de descontinuidade).

As zonas B admitem uma distribuição linear das deformações ao longo da secção transversal do elemento, sendo geralmente dimensionadas de um modo cuidado e bastante preciso recorrendo apenas às hipóteses clássicas da teoria geral da flexão. Lourenço (1992) escreve que a distribuição de tensões nestas secções é facilmente obtida a partir dos esforços seccionais, sendo que, se a secção se encontrar não-fendilhada, essas tensões determinam-se com base na sua geometria e nas características do material; se a secção se encontrar fendilhada pode aplicar-se o método da treliça clássica para a sua obtenção.

As zonas D apresentam deformações não lineares ao longo da secção transversal do elemento. Por esse motivo, as rotinas tradicionais de dimensionamento são inadequadas, podendo comprometer a segurança da estrutura. Em casos em que não haja fendilhação, a análise de elementos finitos em regime elástico linear constitui uma boa solução no dimensionamento. Em casos em que haja fendilhação, o MET assume-se como uma boa alternativa representando, simplificadamente, o fluxo interno de tensões na secção. Note-se que a delimitação geométrica das zonas D obedece ao Princípio de Saint-Venant, abordado no ponto 3.4 deste documento.

A sua versatilidade, garante ao MET uma eficácia satisfatória nas diferentes zonas de uma estrutura, B e D, atribuindo uma grande utilidade a este processo. Na Figura 3.1 estão representados os diferentes tipos de zonas considerados por Schlaich.

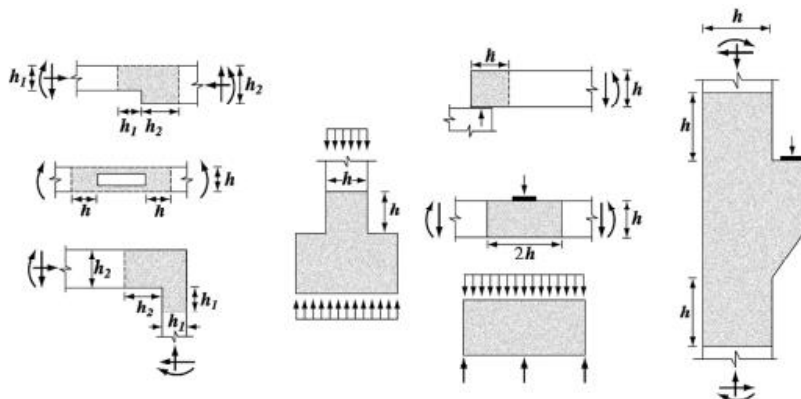


Figura 3.1 – Exemplos de zonas B e D segundo Schlaich – adoptado de ACI-318 (2002).

3.4 Princípio de Saint-Venant

Um dos passos mais complexos da análise pelo MET consiste em considerar correctamente as zonas D no dimensionamento. Para este processo recorre-se, usualmente, ao Princípio de Saint-Venant que estabelece que, se existir um sistema de forças aplicado sobre uma zona limitada da superfície de um corpo, as tensões e deformações provocadas por esse sistema de forças a uma distância suficientemente grande da superfície de aplicação não depende da maneira particular como as forças estão aplicadas, mas apenas da sua resultante (Silva, 2004). Este princípio estende-se ainda a regiões com geometrias irregulares, uma vez que também estas provocam uma quebra local na linearidade das deformações.

Simplificadamente, pode assumir-se que os efeitos localizados causados por qualquer tipo de singularidade numa estrutura serão dissipados ou atenuados em regiões suficientemente distantes do ponto singular, sendo que essa distância define a amplitude da zona D. É habitual considerar-se a dimensão da secção transversal da estrutura na definição da zona D.

3.5 Tipificação Genérica de Modelos

A forma como as estruturas de betão armado suportam cargas aplicadas pode ser traduzida por um conjunto de campos unidireccionais de tensões de compressão interligados por tirantes (varões de armadura, cabos de pré-esforço ou campos unidireccionais de tensões de tracção

no betão). O MET condensa todas as tensões em barras sujeitas a esforços axiais de compressão ou tracção ligadas por nós.

Na base deste processo estão alguns fenómenos variáveis, consoante o sistema de carregamento aplicado e o comportamento dos materiais, que necessitam de atenção por parte do projectista. Para valores de carga crescentes ocorre, por parte da estrutura, uma resposta tão rígida quanto possível mobilizada por factores como o estado de tensão no betão, as condições de aderência das armaduras, entre outros. À medida que o betão fendilha as condições de aderência podem deteriorar-se gradualmente contribuindo sucessivamente para o estabelecimento de novos sistemas estáticos. Contudo, a fase de rotura pode representar-se por apenas um único modelo de escoras e tirantes de acordo com a distribuição de tensões existente. Este facto não descarta uma pormenorização cuidada e competente das armaduras, sendo necessário garantir que as forças no modelo se transmitem para as zonas pretendidas.

Os modelos pretendem representar as trajectórias de tensões nas zonas em estudo, podendo em geral ser de três tipos (Ferreira, 2010). (1) Modelos cinemáticos, que consideram que o equilíbrio apenas é garantido para uma determinada configuração geométrica do modelo; (2) modelos isostáticos, simples de calcular comparativamente com os modelos cinemáticos, mas podendo conduzir a situações que se afastam das condições de compatibilidade; e (3) modelos hiperestáticos que resultam geralmente da sobreposição de dois modelos possíveis e visam aproximar o modelo final à solução dada pela teoria da elasticidade.

Genericamente os modelos são constituídos por linhas tracejadas e contínuas, representando campos de compressão (ou escoras) e campos de tracção (ou tirantes), respectivamente. A união das escoras e dos tirantes é feita por nós (ou regiões nodais). A Figura 3.2 demonstra algumas situações comuns da aplicação de modelos de escoras e tirantes.

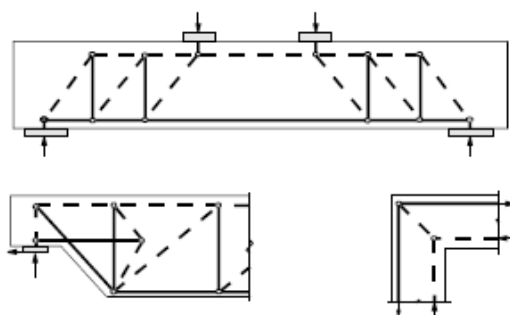


Figura 3.2 – Exemplos de modelos de escoras e tirantes – Adoptado de Ortiz (1993)

3.5.1 Tirantes

Os tirantes representam geralmente as armaduras de uma peça de betão armado, que, sendo essencialmente lineares, apresentam campos unidimensionais de tensão. Note-se que também podem existir tirantes de betão, no entanto raramente são modelados devido à baixa resistência do betão à tracção.

No dimensionamento de tirantes, o Eurocódigo2 Parte 1-1 (2010) aponta que o valor de resistência deve ser determinado segundo as regras genéricas de cálculo de armaduras de aço em betão armado, devendo estas ser convenientemente amarradas nos nós.

$$N_{Rd} = A_s f_{yd} \quad (1)$$

onde N_{Rd} traduz o esforço axial no tirante, A_s a armadura necessária para resistir ao esforço e f_{yd} o valor de cálculo da tensão de cedência do aço em tracção.

A mesma consideração é feita na norma ACI-318 (2002) e Model Code 1990 (1993).

3.5.2 Escoras

Contrariamente ao que acontece com os tirantes, onde os campos de tensão são unidimensionais, as escoras de betão (e também os tirantes de betão) podem assumir distribuições bidimensionais ou tridimensionais de tensão. Segundo Shäfer e Schlaich (1991) os campos de tensão em escoras de betão estrutural podem tomar três configurações tipificadas, ver Figura 3.3.

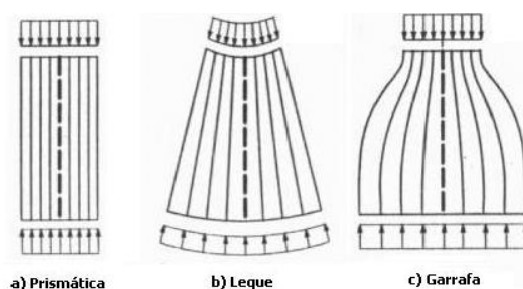


Figura 3.3 – Configurações típicas de campos de tensão de compressão – Adoptado de Souza (2004).

A escora prismática (ou paralela) representa uma distribuição de tensões uniforme, sem perturbações e sem tensões transversais de tracção, sendo características de zonas B. Quando assume a configuração em leque, a escora de betão traduz um campo de compressões onde, apesar de já não existir uniformidade, podem-se desprezar as tensões de tracção transversal. A escora em garrafa simula um campo de compressões com curvaturas localizadas, gerando tracções transversais não desprezáveis.

No que toca ao dimensionamento, para o cálculo do valor de resistência de uma escora de betão numa região com tensões de compressão transversal ou sem tensões transversais o Eurocódigo 2 Parte 1-1 (2010) indica que a tensão no elemento não deve ser superior ao valor de cálculo da tensão do betão em compressão:

$$\sigma_{Rd,máx} = f_{cd} \quad (2)$$

Para este caso de tensão o Model Code 1990 (1993) recomenda que o valor de resistência seja obtido por:

$$\sigma_{Rd,máx} = 0,85 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) f_{cd} \quad (3)$$

Num caso em que haja uma zona simultaneamente comprimida e fendilhada, tanto o Eurocódigo 2 Parte 1-1 (2010) como o Model Code 1990 (1993) sugerem que o valor de resistência da escora de betão deverá ser reduzido:

$$\sigma_{Rd,máx} = 0,6v' f_{cd} \quad (4)$$

O valor de v' deverá ser indicado no Anexo Nacional do respectivo país, sendo que se recomenda que seja determinada por $1 - f_{ck}/250$.

Em regiões com compressão multi-axial o Eurocódigo permite que se admita um valor de cálculo de resistência superior.

A norma ACI-318 (2002) refere que a resistência à compressão efectiva de uma escora de betão pode ser obtida por $0,85\beta_s f_c'$, sendo f_c' o valor característico da resistência à compressão do betão.

O factor β_s depende do estado de tensão na escora, podendo tomar os valores 1; 0,75; 0,60 e 0,40, para escoras prismáticas sem perturbações, em garrafão com armadura de reforço sem fendilhação, com armadura de reforço com fendilhação e para escoras com tensões de tracção, respectivamente.

Schlaich e Schäfer (1988, 1991) apresentam como valores básicos de resistência de escoras:

- 0,85 f_{cd} para um estado de tensão uniaxial sem perturbações,
- 0,68 f_{cd} para campos de compressão com fendas paralelas,
- 0,51 f_{cd} fcd para campos de compressão com fendas inclinadas.

3.5.3 Nós

Os nós de um modelo de escoras e tirantes resultam da intersecção de três ou mais barras (escoras ou tirantes), cargas aplicadas ou reacções de apoio e são responsáveis pela transferência de forças entre eles, razão pela qual deve ser garantido o equilíbrio em cada um dos nós do modelo (Pinho, 1995). As dimensões do nó dependem essencialmente da direcção e da geometria dos campos de tensão que nele convergem.

Segundo Schlaich e Schäfer (1987) podem distinguir-se dois tipos de nós, podendo estes ser singulares ou contínuos. Nós singulares são aqueles onde as forças concentradas são aplicadas e nos quais o desvio da força é feito localmente. Caracterizam-se por serem pontos críticos e o equilíbrio das tensões provenientes das escoras e tirantes deve ser garantido de modo a que não se mobilizem deformações suficientemente elevadas capazes de provocar fendilhação. Por sua vez, nós contínuos pressupõem que existem comprimentos satisfatórios na circunstância do desvio da força. Neste tipo de nó a ancoragem das armaduras é feita facilmente e tipicamente não apresentam um comportamento crítico. A norma ACI-318 (2002) sugere também quatro tipos de configuração para nós de três barras, nomeadamente CCC, CCT, CTT e TTT, em que cada letra “C” representa uma escora e cada letra “T” representa um tirante em cada uma das situações indicadas. A Figura 3.4 ilustra as quatro situações nodais contempladas em ACI-318 (2002).

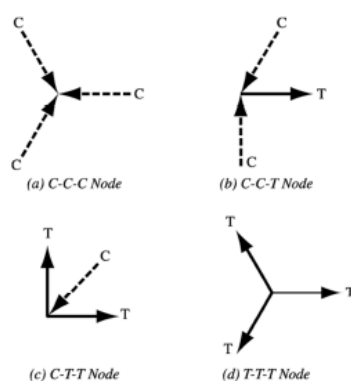


Figura 3.4 – Regiões nodais – adoptado de ACI-318 (2002).

Refira-se que na representação bidimensional do estado de tensão de um nó, deve ser assegurada uma situação hidrostática. Nesse seguimento, em ACI-318 (2002) é mencionado ainda que as tensões normais nas faces de uma zona nodal são iguais em todas as direcções e que existe uma relação de proporcionalidade entre os comprimentos w_{n1} , w_{n2} e w_{n3} de cada uma as faces e os valores de C_1 , C_2 e C_3 de cada uma das forças, ver Figura 3.5.

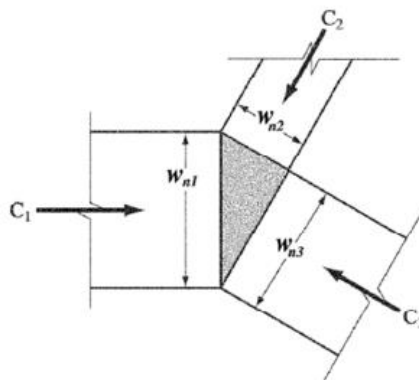


Figura 3.5 – Nó hidrostático – adoptado de ACI-318 (2002).

No dimensionamento dos nós, o Eurocódigo2 Parte 1-1 (2010) tem sobretudo em consideração aqueles que apresentam concentração de esforços, isto é, pontos de aplicação de cargas, apoios, zonas de amarração com concentração de armaduras ou armaduras de pré-esforço, partes curvas de varões e nos cantos dos elementos.

São apresentadas as expressões de cálculo de tensões máximas que podem ser aplicadas nas faces de nós comprimidos sem tirantes amarrados no nó, nós sujeitos a compressão e tracção numa direcção e nós sujeitos a compressão e tracção em mais do que uma direcção.

$$\sigma_{Rd,máx} = k_1 \nu' f_{cd}$$

$$\sigma_{Rd,máx} = k_2 \nu' f_{cd}$$

$$\sigma_{Rd,máx} = k_3 \nu' f_{cd}$$

Note-se que os valores de k_1 , k_2 e k_3 estão indicados no Anexo Nacional do respectivo país, sendo que na norma portuguesa os valores recomendados são de 1; 0,85 e 0,75, respectivamente.

O valor de cálculo das tensões pode ainda ser sujeito a um aumento de 10% caso se verifique pelo menos uma das condições; uma compressão tri-axial no elemento, todos os ângulos de escoras e tirantes sejam maiores ou iguais a 55° , as tensões nos apoios ou zonas de aplicação

de cargas concentradas são uniformes e o nó possuir cintas transversais, a armadura seja disposta em várias camadas.

De acordo com a norma ACI-318 (2002), a não ser que a eficácia do reforço aplicado na zona do nó seja apoiada em testes e análises, o valor da tensão existente num nó não deve exceder

$$f_{cu} = 0,85\beta_n f_c' \quad (5)$$

sendo f_{cu} o valor da tensão resistente do nó, β_n um parâmetro dependente do tipo de nó e f_c' o valor característico da tensão do betão à compressão.

Assim, para nós do tipo CCC β_n toma o valor de 1, para nós CCT toma o valor de 0,80 e para nós do tipo CTT toma o valor de 0,60.

Schlaich e Schafer (1988,1991) apresentam valores de resistência para dois tipos de nó. Distinguindo nós que recebem apenas escoras de nós que recebem pelo menos um tirante, sugeriram uma tensão limite de $1,0 f_{cd}$, para o primeiro caso e $0,8 f_{cd}$, para o segundo.

No Model Code 1990 (1993) o limite de tensão toma o valor de $0,85(1 - f_{ck}/250)f_{cd}$ em nós CCC ou onde o ângulo entre as escora e o tirante é maior do que 55° ; e $0,60(1 - f_{ck}/250)f_{cd}$ em nós CCT.

A avaliação da resistência de uma região nodal depende ainda do ângulo formado pelas escoras e tirantes que nele concorrem, sendo que, quanto menor for este ângulo menor a resistência à compressão da escora.

Existem várias recomendações para limite de aplicabilidade de ângulos formados entre uma escora e um tirante. No quadro 3.1 resumem-se algumas dessas recomendações.

Quadro 3.1 – Limites superior e inferior para o ângulo formado pelas escoras e tirantes.

Fonte	Ângulo permitido
ACI-318 (2002)	$30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$
Eurocódigo2 Parte 1-1 (2010)	$21^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$
Model Code 1990 (1993)	$18,4^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$
Schlaich e Schäfer (1988, 1991)	$45^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$

4 LIGAÇÕES VIGA-PILAR

4.1 Introdução

Como foi já previamente discutido, descontinuidades geométricas, como são exemplo ligações entre vigas e pilares, em estruturas de betão armado merecem especial atenção ao nível do dimensionamento pelo facto de apresentarem modificações no estado de tensão. O equilíbrio das forças internas deve ser assegurado através de uma solução adequada de armaduras. Leonhardt (1978) refere que em qualquer nó de uma estrutura de betão armado onde exista uma mudança de eixo da mesma, existe também uma mudança na direcção dos esforços internos que, conseqüentemente, introduzem forças transversais capazes de alterar a distribuição de tensões relativamente às vigas rectas.

A distribuição de tensões, σ_x , de uma secção transversal na zona da ligação é tipicamente hiperbólica e apresenta no bordo interno do nó um valor máximo de tensão, podendo este valor de tensão ser reduzido com o arredondamento do bordo. A existência de um pico de tensões, de tracção para momento positivo de compressão para momento negativo, condiciona significativamente a capacidade resistente da ligação. A mudança de direcção dos esforços internos longitudinais promove o surgimento de tensões radiais, σ_y , que são maioritariamente de compressão ou tracção considerando um momento negativo ou positivo, respectivamente. A Figura 4.1 ilustra a distribuição de tensões de um nó ortogonal sujeito a um momento positivo.

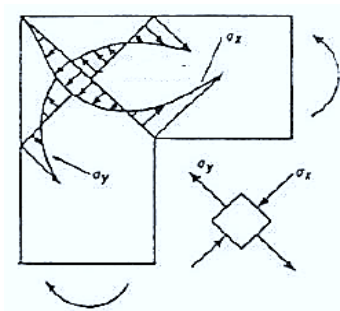


Figura 4.1 – Distribuição de tensões em nós ortogonais de pórticos de momento positivo (sinais contrários para momento negativo) – adoptado de MacGregor (1992).

Note-se que o facto de existir uma variação no sinal das tensões de acordo com a direcção do momento aplicado implica a existência de dois comportamentos completamente diferentes.

No caso de um nó com um momento positivo, existe uma tendência de separação do betão da parte comprimida que deve ser controlada através da introdução de cintas. Contudo, a introdução de cintas transversalmente às tensões principais pode levar a um congestionamento de armaduras e, por isso, a problemas de execução. Deve-se acrescentar que a amarração do betão existente no recobrimento não pode ser feita e na circunstância de nós com altas tensões existe mesmo a possibilidade da ocorrência de *spalling*, pelo que, a camada de betão comprimido não deve ser considerada na avaliação do momento resistente (fib bulletin 54, 2010). Para além disso as tensões radiais reduzem a capacidade da parte de betão em compressão e reduzem o braço das forças internas dos elementos.

Por estes motivos ligações viga-pilar sujeitas a um momento positivo possuem uma menor resistência ao momento do que uma secção equivalente localizada numa zona-B. Em (fib bulletin 54, 2010) é sugerida a aplicação de uma redução da percentagem de armadura $\rho \leq 0.8$ % num caso genérico com aço S500 e betão C 20/25.

Um outro factor de distinção comportamental é o pico de tensões presente no bordo interior da ligação. Neste caso, assumindo um comportamento do material idealmente elástico, resultariam tensões infinitamente grandes que, na realidade, são absorvidas pela plasticidade do betão em ligações sujeitas a momentos negativos e pela formação de fendas em ligações sujeitas a momentos positivos.

Estas considerações são, de certa forma, genéricas e visam o comportamento de situações padrão de ligações de canto com momento positivo (ou *opening joint*) e de ligações de canto com momento negativo (ou *closing joints*). Servem de referência na análise de casos particulares das ligações referidas, assim como de ligações mais complexas, onde existe a convergência de um maior número de elementos no nó, como são exemplos as ligações em T (ou *T-joints*) e em cruz (ou *cross joints*). Estes últimos resultam geralmente em situações onde ocorrem os fenómenos comportamentais supracitados em simultâneo, dependendo do canto que se estiver a analisar.

No subcapítulo 4.2 serão abordados com mais detalhe, cada um dos tipos de ligação mencionados.

4.2 Tipos de Ligações Viga-Pilar

Tipicamente são reconhecidos quatro tipos fundamentais de LVP, designadamente, *opening joint*, *closing joint*, *T-joint* e *cross joint*, sendo que em cada um deles existem particularidades funcionais que devem ser tidas em consideração.

4.2.1 Ligações de Canto Com Momento Negativo – *Closing Joints*

Em ligações do tipo *closing joint* o momento actuante produz altas tensões de compressão no bordo interno do nó e tensões de tracção no bordo externo do nó, ver Figura 4.2(a).

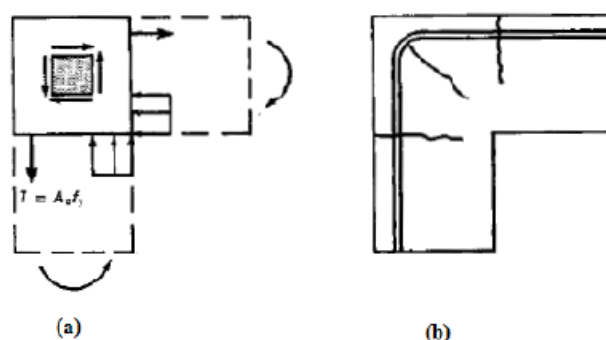


Figura 4.2 – *Closing joint*; (a) Esforços na ligação; (b) Fendilhação na ligação – adoptado de MacGregor (1992).

Para controlar a fendilhação no betão traccionado a armadura na face exterior deve ser dimensionada de forma a que o seu raio de dobramento seja suficientemente grande para evitar um excesso de pressão devido à mudança de direcção das barras da armadura, ver Figura 4.2 (b). De acordo com Leonhardt (1978), a pressão deve ter um limite obtido pela expressão:

$$P_{u adm} = 0.3\beta_{wN} \sqrt{\frac{e}{\phi}} \leq \beta_{wN} \quad (6)$$

Onde β_{wN} representa a resistência cúbica à compressão do betão e e representa a distância entre varões de dobramento.

Da expressão (6) resulta o diâmetro necessário para o pino de dobramento:

$$d_{B\ nec} \geq 5,24 \frac{\sigma_e}{\beta_{wN}} \phi \sqrt{\frac{\phi}{e}} \quad (7)$$

Em que σ_e é a tensão existente no aço no início da curvatura.

Importa também referir que a adopção de diâmetros inferiores ao necessário para os pinos de dobramento implica o dimensionamento de uma armadura especial de controlo de fendilhação, em duas ou mais camadas que deve ser colocada no interior da curvatura da armadura principal.

A forma como se pretende distribuir as armaduras numa ligação assume uma importância significativa na definição de um modelo de escoras e tirantes. Por outro lado, a construção de um modelo é também bastante útil para encontrar uma distribuição adequada de armadura. O objectivo do MET prende-se em conseguir simular de forma prática e eficaz o estado de tensão no interior de um nó através de um equilíbrio de forças mobilizadas pela armadura a dimensionar e pelo betão em compressão, sem comprometer nenhum dos materiais. Nesse sentido, no caso dos *closing joints* essas condições são satisfeitas considerando simplesmente duas escoras de betão comprimido concorrentes no bordo interno do nó, e uma escora diagonal que satisfaz o equilíbrio entre elas e a armadura que sofre uma mudança de direcção, ver Figura 4.3.

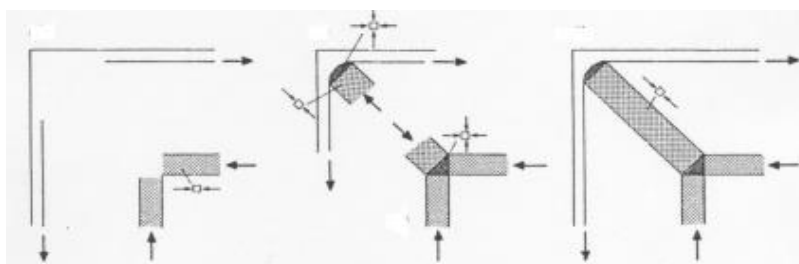


Figura 4.3 – *Closing joint*; construção do campo de tensões através de elementos de escora e de tirante – adaptado de Muttoni (2006).

Este modelo adequa-se a uma grande parte das ligações deste tipo e outros modelos podem ser obtidos seguindo os mesmos princípios, de forma a contemplar diferentes casos, sujeitos a condicionantes geométricas ou de outra natureza.

4.2.2 Ligações de Canto Com Momento Positivo – *Opening Joints*

Em ligações do tipo *opening joint* o momento actuante produz altas tensões de tracção no bordo interno do nó e tensões de compressão no bordo externo do nó (ver Figura 4.4 (a)). Esta é uma situação mais complexa em termos de dimensionamento, uma vez que existe a possibilidade de esmagamento do betão comprimido no bordo exterior do nó, havendo uma tendência para a sua separação. A existência de tensões radiais de tracção σ_y (ver Figura 4.1) deve também ser tida em conta na solução de reforço da ligação de modo a que não ocorra a fendilhação ilustrada na Figura 4.4(b).

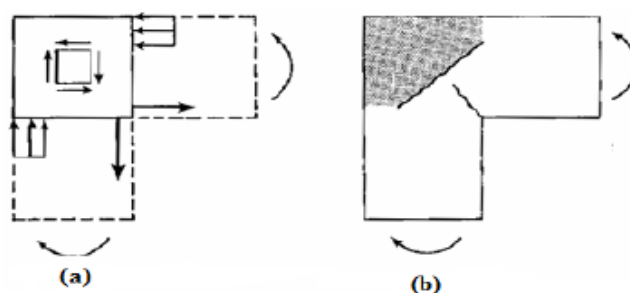


Figura 4.4 – *Opening joint*; (a) Esforços na ligação; (b) Fendilhação na ligação - adoptado de MacGregor (1992).

Segundo Leonhardt (1978), o valor da força de tracção Z_D que actua na bissectriz do ângulo devido às tensões σ_y pode ser determinada, por aproximação, pela resultante dos esforços de tracção das armaduras Z_e dispostas ao longo do bordo interior dos elementos da ligação:

$$Z_D = \sqrt{2} Z_e \quad (8)$$

Acrescenta ainda que a tensão radial é tão elevada que a fenda indicada surge com carregamentos da ordem dos 50% da carga limite da barra recta, quando não são previstas medidas adicionais.

Sendo o bordo externo do nó uma zona problemática é de interesse do projectista evitar que a concentração das forças de compressão aconteça muito próxima do canto exterior do nó, onde existe pouca área de betão, pelo que um modelo simples, considerando apenas duas escoras exteriores e um tirante diagonal que promove o equilíbrio com as armaduras principais, é claramente pouco eficiente, ver Figura 4.5 (a). Outra solução simples corresponde à do modelo ilustrado pela Figura 4.5 (b), no entanto também não constitui uma solução adequada, visto que as armaduras principais da viga e do pilar teriam de ser ancoradas dentro do cordão

de compressão praticamente da face exterior das secções. Este tipo de ancoragem é problemático e necessita de reforços adicionais.

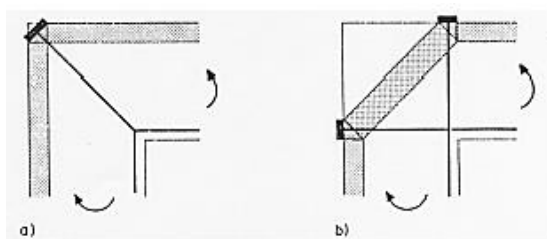


Figura 4.5 - *Opening joint*; (a) Modelo com desvio simples; (b) Modelo com desvio duplo - adoptado de Muttoni (2006).

De modo a melhorar o comportamento da ligação podem ser adoptadas soluções em laços em forma de ganchos voltados para fora (Figura 4.6 (b)), envolvendo duplamente a zona comprimida, ou com estribos inclinados devidamente dimensionados (Figura 4.6 (a)). Contudo uma das condicionantes destas soluções é o facto de as direcções dos reforços apresentarem divergências relativamente às direcções das armaduras principais (cerca de 45°), resultando numa fendilhação diagonal e comprometendo a eficiência da ligação. Nestes casos é aconselhável a introdução de barras inclinadas no bordo interior, perpendiculares à diagonal principal (Figura 4.6 (c), (d) e (e)).

Schlaich (1987) apresenta um conjunto de soluções possíveis para opening joints ilustradas na Figura 4.6.

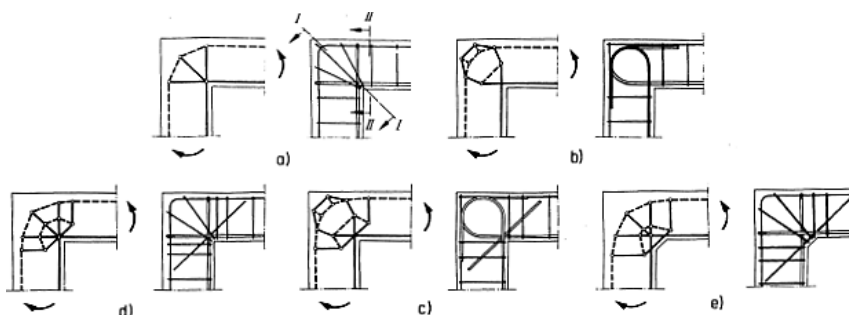


Figura 4.6 – *Opening joint*; Diferentes modelos de escoras e tirantes e esquema de reforço correspondente – adoptado de Schlaich (1987).

A rotura em *opening joints*, pode ainda ocorrer no bordo interno do nó, onde as armaduras longitudinais se encontram, devido a um excesso de sollicitação de aderência, conduzindo à abertura de uma fenda no canto que se bifurca e alastra até à zona comprimida, ver Figura 4.7.

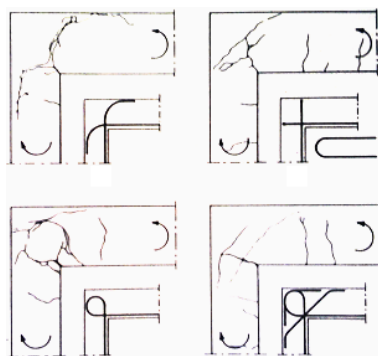


Figura 4.7 – *Opening joint*; Aspecto das fendas em nós de pórticos para diferentes tipos de armadura – adoptado de Leonhardt (1978).

Nilsson (1973) efectuou uma análise experimental da eficiência de diferentes tipos de solução em *opening joints*. A eficiência foi definida como sendo o rácio entre o momento de rotura da ligação e o momento resistente do membro mais desfavorável que nela converge. A Figura 4.8 mostra graficamente os resultados obtidos.

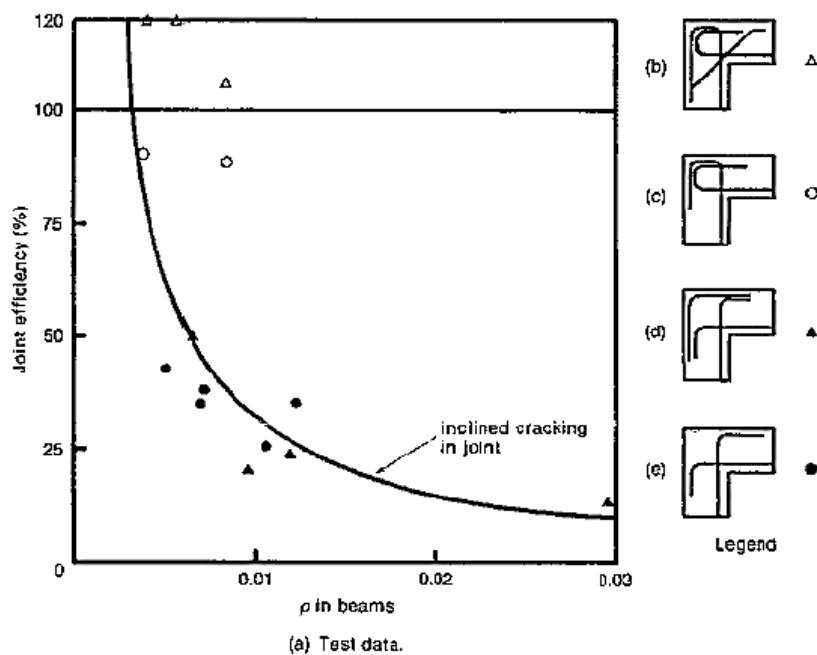


Figura 4.8 – Níveis de eficiência de *opening joints* – Adoptado de MacGregor (1992)

4.2.3 Ligações em T – T-Joints

Este tipo de ligação ocorre quando três elementos concorrem num nó. Casos de ligação como os de pilares intermediários de pórticos de vários vãos, vigas ligadas a pilares externos contínuos ou na base de paredes resistentes, servem de exemplos comuns em estruturas correntes. De acordo com fib bulletin 54 (2010) o dimensionamento de reforços de nós com três elementos deve, tipicamente, ser executado separando os efeitos na secção em três partes. Assim, deve ser tido em conta um momento transmitido no elemento contínuo, entre ambas as partes; um momento negativo transmitido desde o pilar até uma das vigas (ou desde a viga até um dos pilares, sendo o pilar o elemento contínuo); e, se necessário, um momento positivo transmitido desde o pilar até à outra viga (ou desde a viga até o outro pilar, sendo o pilar o elemento contínuo).

Na presença de um pilar intermediário ligado a uma viga contínua, quando os momentos no topo do pilar são pequenos, relativamente aos momentos nas vigas, basta ancorar a armadura vertical do pilar a partir do bordo inferior da viga e até ao bordo traccionado. Esta consideração é ainda reforçada pelo facto das tensões de compressão provenientes da flexão, transversais aos varões, contribuirão favoravelmente. Quando o valor de momento flector no topo do pilar é elevado, é aconselhável prolongar a armadura do pilar ao longo do cordão traccionado superior da viga, sendo ligada por traspasse à armadura da mesma (Leonhardt, 1978). MacGregor (1992) apresenta um modelo de escoras e tirantes típico nestas circunstâncias, com duas alternativas de reforço, cujas eficiências foram avaliadas experimentalmente em Nilsson (1973), ver Figura 4.9.

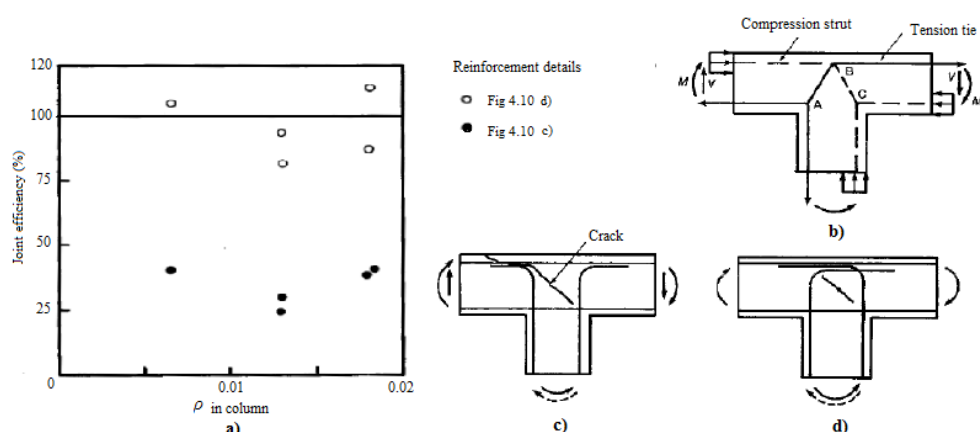


Figura 4.9 – T-joint; a) Níveis de eficiência; b) Modelo de escoras e tirantes; c) Reforço insatisfatório; d) Reforço satisfatório – adaptado de MacGregor (1992).

Face a uma ligação entre uma viga e um pilar contínuo, permanecem válidas as hipóteses referenciadas em fib bulletin 54 (2010), no entanto, a transmissão de momentos da viga aos pilares contínuos provoca esforços de tracção muito desfavoráveis na direcção diagonal e tensões de aderência muito elevadas na armadura do pilar, que devem ser tidas em consideração aquando do dimensionamento. Os três padrões mais comuns de solicitações assim como os respectivos modelos simplificados em escoras e tirantes estaticamente admissíveis são exibidos na Figura 4.10.

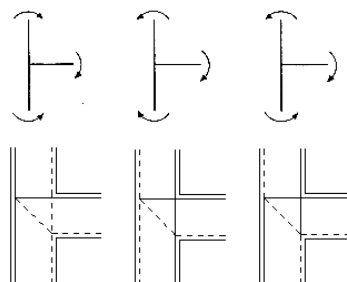


Figura 4.10 – *T-joint*; Modos de carga e respectivos modelos em escoras e tirantes.

4.2.4 Ligações em Cruz – *Cross-Joints*

Este tipo de ligação ocorre quando 4 elementos concorrem num nó, geralmente na ligação entre vigas e pilares contínuos. Estes nós são responsáveis pela transmissão dos esforços de tracção e compressão, resultantes dos sistemas de carregamento actuantes, entre as extremidades das vigas e pilares que neles confluem. Na presença de carregamentos nas vigas laterais desenvolvem-se tensões diagonais na secção do nó, pelo que todos os pressupostos relativos às ligações em T podem ser aplicados tendo em consideração que, neste caso, existem quatro interacções entre elementos, ver Figura 4.11.

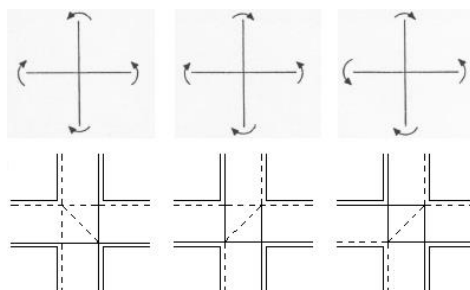


Figura 4.11 – *Cross joint*; Modos de carga e respectivos modelos de escoras e tirantes.

5 CASO DE ESTUDO – EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.1 Introdução

Os MET são particularmente eficientes na determinação da capacidade resistente de estruturas de betão armado (Estados Limite Últimos). No entanto, não possuem a mesma eficácia na avaliação da rigidez, e conseqüentemente, dos deslocamentos sofridos pelas estruturas em condições de serviço (Estados Limite de Serviço). Deste modo, pretende-se, neste capítulo, apresentar estratégias de modelação capazes de avaliar de forma satisfatória ambas as situações referidas.

Serão apresentadas alternativas de modelação com o intuito de simular o comportamento de ligações viga-pilar em cruz recorrendo ao espécime RA4 ensaiado por Roeser (2002) e, recentemente estudado por Costa (2013), que visa representar um troço interior de uma estrutura porticada sujeita a cargas laterais.

Os ensaios efectuados por Roeser (2002) cumprem as disposições normativas em vigor para ligações viga-pilar de betão armado submetidas a acções não-cíclicas e possuem dimensões correspondentes a estruturas correntes à escala 1:2 (Hegger, Sherif et al., 2003).

Para reproduzir da melhor forma as condições de apoio e carregamento experimentais, utilizou-se o sistema adoptado por Hegger, Sherif et al. (2004). Refira-se também que a largura das secções transversais é semelhante tanto nas vigas como nos pilares, sendo $b_v = b_p = 0.15\text{m}$ e que, relativamente à altura das secções transversais tem-se $h_v = 0.30\text{m}$, para as vigas e $h_p = 0.24\text{m}$, para os pilares.

Nos modelos efectuados considerar-se-ão 5 módulos na zona da ligação de forma a incluir correctamente os efeitos provenientes das vigas e dos pilares. Os módulos periféricos serão quadrados, tendo uma extensão igual à altura da secção transversal do elemento que estiverem a representar, que de acordo com o Princípio de Saint-Venant é a zona de maior irregularidade dos campos de tensão e deformação, enquanto o módulo central será condicionado pelas dimensões dos elementos que nele concorrem.

Na Figura 5.1 estão compiladas todas as informações anteriores.

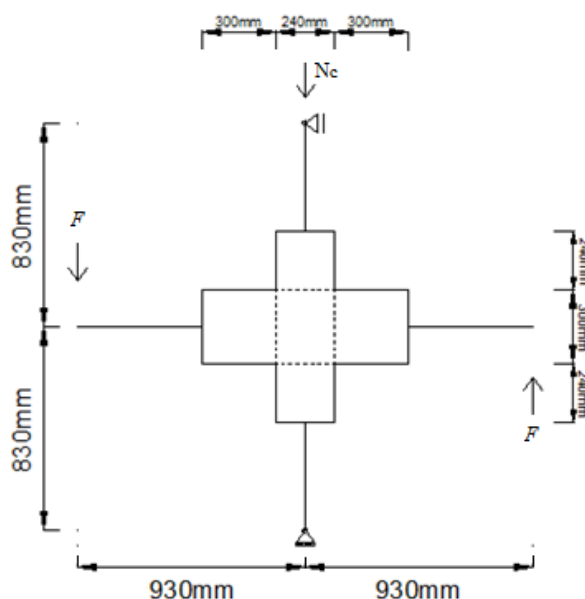


Figura 5.1 – Condições de apoio e carregamento, e geometria dos modelos numéricos efectuados.

O principal objectivo passa por aplicar um conjunto de forças na extremidade livre das vigas e medir aí o deslocamento para valores crescentes das forças, através de uma análise linear, com o intuito de simular da melhor forma o comportamento da ligação em condições de serviço. Pretende-se que o modelo seja capaz de avaliar de forma satisfatória a capacidade resistente global da ligação e a sua rigidez em regime elástico linear, embora estes objectivos não sejam totalmente compatíveis com um modelo de escoras e tirantes único.

O processo de modelação e análise foi totalmente efectuado com recurso ao *software* de cálculo EvalS (Ferreira,2012).

5.2 Modelação e Análise Inicial

Mediante as considerações feitas na secção anterior procede-se à descrição dos processos e estratégias de modelação utilizados, sendo que, inicialmente, é importante apresentar aspectos construtivos, assim como características gerais dos materiais envolvidos no caso de estudo, comuns a todos os modelos.

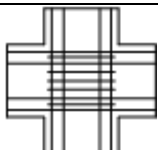
5.2.1 Aspectos Construtivos e Características Gerais dos Modelos

Uma vez que a informação relativa ao recobrimento não é disponibilizada no espécime em questão, e tratando-se de uma simulação de um nó interior de um pórtico, assume-se um valor

de 1.25 cm tanto para as vigas como para os pilares. Dado o facto de a armadura se distribuir em duas camadas, adopta-se o mesmo afastamento entre elas, 1.25 cm. Deste modo, com o objectivo de facilitar a modelação, considerar-se-á uma espessura para as escoras de betão longitudinais de 5 cm, de forma a que o seu eixo coincida com os das armaduras longitudinais, nos pontos em que se encontrarem.

O Quadro 5.1 apresenta uma compilação das características principais, juntamente com uma representação esquemática do espécime RA4 ensaiado por Roeser (2002).

Quadro 5.1 – Principais características do espécime RA4 ensaiado por Roeser (2002).

Espécime	f_c' (MPa)	Recobrimento (mm)	Armadura long. da viga	Armadura long. do pilar	Cintas	$N_c / (A_c f_c')$	
RA4	66.1	12.5	4 ϕ 20 + 4 ϕ 16	4 ϕ 20 + 6 ϕ 16	5 ϕ 8	0.14	

Note-se que a expressão $N_c / (A_c f_c') = 0.14$ quantifica o valor relativo da carga vertical aplicada no topo do pilar relacionando-a com a área de betão do pilar (A_{cp}) e com a tensão de cedência do betão (f_c').

Os valores do módulo de elasticidade (E_s) bem como da tensão de cedência (f_y) dos aços utilizados na armação do modelo são também disponibilizados no Quadro 5.2.

Quadro 5.2 – Principais propriedades dos aços utilizados na armação do espécime RA4.

Propriedades	ϕ 8	ϕ 16	ϕ 20
E_s (Gpa)	198.225	199.672	201.37
f_y (Mpa)	595	553.5	550.2

Tendo como referência a Figura 5.1, o facto de se considerar que os módulos periféricos introduzem adequadamente os efeitos provenientes das vigas e pilares, permite que a restante dimensão destes elementos seja modelada simplesmente como elementos lineares, sendo apenas necessário reproduzir as suas propriedades comportamentais. Na extremidade que entra em contacto com o módulo do respectivo elemento existe um elemento linear infinitamente rígido ligado na perpendicular, de modo a que a sua inclusão não afecte a rigidez global do modelo.

A rigidez de flexão seccional (EI) do pilar e da viga é definida por, respectivamente, $0.9 E_c I_p$ e $0.5 E_c I_v$, em que I_p e I_v são os momentos de inércia do pilar e da viga. A expressão relativa à rigidez de flexão das vigas é proposta no Eurocódigo 8 Parte 1 (2010), sendo que, no caso dos pilares, de modo a acautelar a maior rigidez provocada pelo esforço axial, se procede a um

aumento da mesma, promovendo o realismo da solução (Costa, 2013). E_c é o módulo de elasticidade do betão, obtido pela expressão apresentada no EuroCódigo 2 parte 1-1 (2010):

$$E_c = 22[f_c'/10]^3 = 22[66.1/10]^3 = 38.77 \text{ GPa} \quad (9)$$

Para a rigidez axial (EA) considera-se simplesmente $E_c A_p$ e $E_c A_v$, para os pilares e vigas, respectivamente.

Resumem-se no quadro 5.3 as propriedades necessárias à modelação dos elementos lineares de vigas e pilares.

Quadro 5.3 – Principais características dos elementos lineares das vigas e pilares.

Elemento	f_c' (MPa)	E_c (GPa)	I (m ⁴)	A (m ²)	EI (kN.m ²)	EA (kN)
Viga	66.1	38.77	3.38×10^{-4}	0.045	6542.24	1.745×10^6
Pilar	66.1	38.77	1.73×10^{-4}	0.036	6029.33	1.396×10^6

O sistema de carregamento será também semelhante em todos os modelos, pretendendo-se avaliar aquele que oferece a resposta mais adequada. Assim sendo, de acordo com a especificação do quadro 5.1, a carga aplicada no topo do pilar é dada por

$$0.14 = \frac{N_c}{A_{cp} \times f_c'} = \frac{N_c}{0.036 \times 66.1 \times 10^3} \rightarrow N_c = 333.14 \text{ kN} \quad (10)$$

As cargas aplicadas nas extremidades livres das vigas assumem o valor de 50 kN. Tratando-se de uma análise linear, este carregamento é suficiente para oferecer uma primeira análise do comportamento P- δ , que é definido por uma recta que cruza a origem.

Considerando-se que não existem tensões transversais, a resistência das escoras de todos os modelos será calculada através do produto da área da menor secção transversal com o valor da tensão resistente do betão, f_c' . Por sua vez, a resistência dos tirantes resulta do produto da área de armadura correspondente com os respectivos valores de tensão de cedência, f_y , conforme o estabelecido em 3.5.1 e 3.5.2.

5.2.2 Modelos Isostáticos

Foram considerados três modelos isostáticos na análise do espécime RA4 ensaiado por Roeser (2002), contendo, cada um deles, um conjunto de particularidades, estudando-se as suas repercussões no comportamento da ligação, ver Figura 5.2.

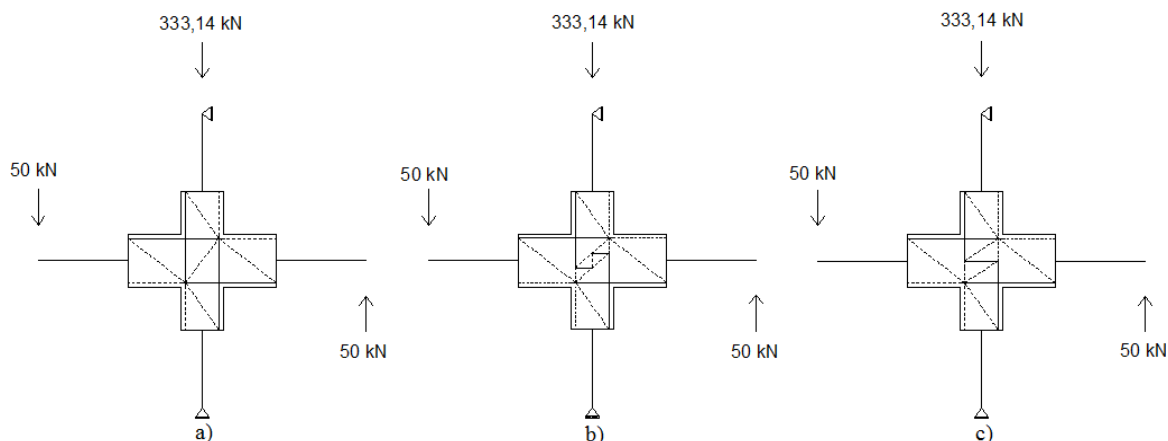


Figura 5.2 – Esquema dos modelos isostáticos: a) Modelo 1; b) Modelo 2; c) Modelo 3.

Note-se que na esquematização dos modelos os elementos a tracejado representam escoras de betão comprimido e os elementos traço cheio representam tirantes de armadura à tracção.

5.2.2.1 Modelo 1

O Modelo 1 constitui a abordagem mais simples na análise da LVP, contendo apenas as escoras e tirantes longitudinais e as escoras diagonais, inclusive no módulo central da ligação. A Figura 5.3 apresenta o esforço axial e a deformada da ligação calculados no EvalS.

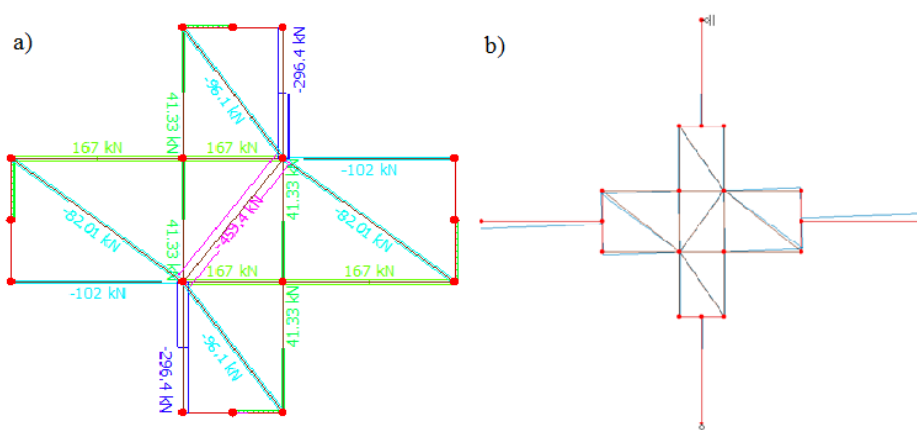


Figura 5.3 – Resultados EvalS do Modelo 1: a) Esforços; b) Deformada

O equilíbrio nodal é naturalmente um ingrediente básico da análise de treliças, sendo contudo, no caso dos modelos de escoras e tirantes, essencial uma correcta consideração das interações das escoras e tirantes confluentes em cada nó e merecendo especial atenção

aquando da modelação. Neste sentido, será destacada a representação geométrica das zonas nodais tipo presentes no modelo, sobretudo quando existe convergência de mais de três elementos, ver Figura 5.4. De modo simplificado, pode-se admitir que as zonas nodais ou são zonas planas sujeitas a estados planos de deformação, como é o caso do nó N2 na figura, ou são zonas lineares, como é o caso do nó N1. Neste processo serão utilizados conceitos de modelação abordados por Marti (1991) e Muttoni et al. (2006).

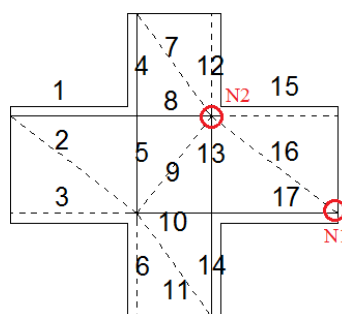


Figura 5.4 – Modelo 1; identificação de elementos.

No nó N1 verifica-se o equilíbrio entre os varões da armadura de esforço transverso, a armadura longitudinal da viga e a escora de betão diagonal. No modelo de treliça a distância entre montantes é dada por:

$$z \cot \theta \quad (11)$$

em que z é o braço mecânico definido pelos eixos da escora longitudinal e da armadura longitudinal e θ é o ângulo formado pela escora diagonal e a armadura longitudinal. A distância entre escoras diagonais sucessivas define naturalmente a espessura de cada escora diagonal, C_i :

$$C_i = \sin \theta \times z \cot \theta \quad (12)$$

Importa referir que o método utilizado para o nó N1 é o mesmo para todos os outros de disposição semelhante, tanto na viga como no pilar, havendo apenas o cuidado de substituir os parâmetros específicos a cada elemento.

A Figura 5.5 ilustra a geometria destes nós.

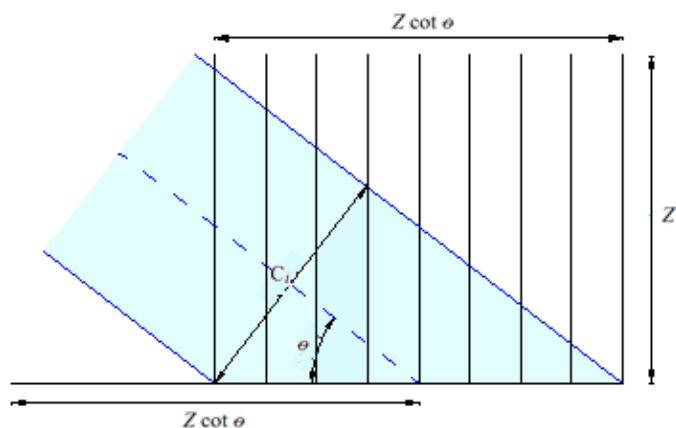


Figura 5.5 – Geometria típica do nó N1.

A modelação do nó N2 requer mais atenção, uma vez que envolve a intersecção de cinco escoras e dois tirantes. A configuração deste nó depende directamente da geometria das escoras que nele concorrem. Assim sendo, sabendo à partida que a espessura das escoras longitudinais está definida e assume o valor de 5cm e com recurso aos esforços de compressão presentes em todas as escoras, podem estabelecer-se as relações geométricas que definem a espessura das escoras em equilíbrio, ver Figura 5.6.

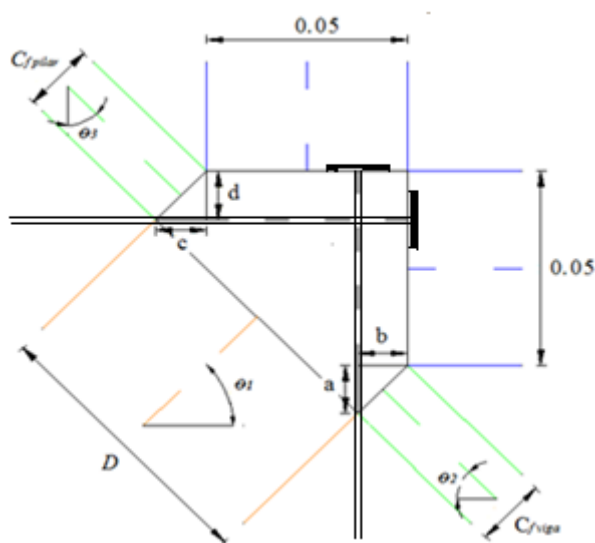


Figura 5.6 – Geometria típica do nó N2.

Para o cálculo de a , b , c e d utiliza-se uma proporcionalidade entre esforços e dimensões, isto é, a relação entre as dimensão a e a componente horizontal do esforço de compressão proveniente da escora diagonal da viga é a mesma que a relação entre a dimensão da escora longitudinal da viga, 0.05m, e o seu esforço de compressão. Do mesmo modo, a relação entre as dimensão b e a componente vertical do esforço de compressão proveniente da escora diagonal da viga é a mesma que a relação entre a dimensão da escora longitudinal do pilar e o

seu esforço de compressão. Para a determinação de c e d procede-se de forma análoga. Com estes valores definidos, as espessuras $C_{f\text{ pilar}}$ e $C_{f\text{ viga}}$ obtêm-se de forma simples, utilizando a uma abordagem proposta no Eurocódigo 8 Parte 1 (2010) segundo a qual:

$$C_f = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta \quad (13)$$

em que C_1 e C_2 representam as espessuras que concorrem perpendicularmente no nó (horizontal e vertical, respectivamente) e θ é o ângulo formado pela escora respectiva e a horizontal (vertical no caso do pilar).

Assim sendo, tem-se:

$$C_{f\text{ viga}} = a \cos \theta + b \sin \theta \quad (14.a)$$

$$C_{f\text{ pilar}} = c \cos \theta + d \sin \theta \quad (14.b)$$

Como se pode constatar, a espessura das escoras diagonais dos módulos laterais é variável, variando linearmente entre C_i e C_f , tanto nas vigas como nos pilares. Na avaliação da resistência última de uma estrutura de betão armado (Estados Limite Últimos), utilizando uma abordagem em escoras e tirantes, não é comum considerar esta variação, considerando-se apenas a espessura necessária para resistir à solicitação do elemento, suficiente para garantir o equilíbrio. No entanto, na realidade, toda a área de betão, mobilizada pela espessura total da escora e a profundidade do elemento, assume grande importância em termos de avaliação da rigidez, pelo que a sua consideração é essencial. Apesar de serem quatro as escoras que concorrem no nó juntamente com D , a mesma abordagem pode ser utilizada, convertendo a geometria das quatro escoras em duas espessuras perpendiculares equivalentes:

$$D = (0.05 + a - d) \cos \theta + (0.05 + c - b) \sin \theta \quad (14.c)$$

Os dois nós anteriores permitem definir todos os elementos presentes no Modelo 1. Seguidamente apresentam-se os Quadros 5.4, 5.5 e 5.6 contendo o resumo da informação relativa ao modelo 1.

Quadro 5.4 – Características geométricas das escoras diagonais dos módulos periféricos do Modelo 1.

Escora diagonal (módulos das vigas)					Escora diagonal (módulos dos pilares)				
Ângulo Θ (graus)	Z_v (m)	$Z_{\cot\Theta}$ (m)	Espessura C_i (m)	Espessura C_f (m)	Ângulo Θ (graus)	Z_p (m)	$Z_{\cot\Theta}$ (m)	Espessura C_i (m)	Espessura C_f (m)
37.569	0.25	0.325	0.198	0.033	35.640	0.19	0.265	0.154	0.030

Quadro 5.5 – Características geométricas da escora do módulo central do Modelo 1.

Escora diagonal (módulo central)					
Ângulo Θ (graus)	a (m)	b (m)	c (m)	d (m)	Espessura D (m)
0.921	0.032	0.008	0.013	0.027	0.077

Quadro 5.6 – Resistência limite dos elementos do Modelo 1.

Elementos	Esforço axial (kN)	Resistência (kN)	Área de armadura (m ²)/ espessura da escora (m)	Carga máxima admissível (kN)
1,8,10 e 17	167.00	1136.553	0.0021	340.29
4,5,13 e 14	41.33	1359.128	0.0025	1644.24
2 e 16	-82.01	-326.82	0.033	199.25
3 e 15	-102.00	-495.75	0.05	243.01
6 e 12	-296.40	-495.75	0.05	83.63
7 e 11	-96.10	-301.88	0.030	157.07
9	-459.40	-758.57	0.077	82.56

No Quadro 5.6 é utilizada a mais habitual convenção de sinal relativa ao esforço axial, ou seja, valores de esforço axial positivos correspondem a forças de tracção enquanto valores de esforço axial negativo correspondem a forças de compressão.

Atendendo aos resultados obtidos observa-se que a escora diagonal do módulo central, 9, é o primeiro elemento a entrar em rotura e, tratando-se de um modelo isostático, toda a ligação fica comprometida. Este é um resultado espectacular, uma vez que este modelo não contempla a presença de cintas no módulo central, estando toda a tensão de compressão concentrada em apenas uma escora diagonal principal.

A avaliação do deslocamento das extremidades livres é também efectuada através do *software* EvalS. A Figura 5.7 apresenta a evolução força-deslocamento do Modelo 1 e ainda a mesma evolução medida por Roeser (2002) no ensaio do espécime RA4, juntamente com o resultado da análise, com modelo de fibras para as peças lineares e modelo não linear para a ligação viga pilar, implementada por Costa (2013) também no EvalS.

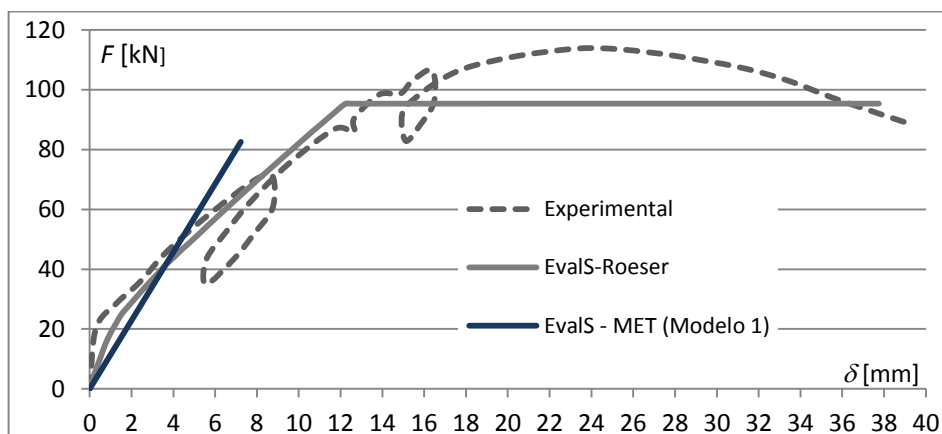


Figura 5.7 – Diagrama força-deslocamento (Modelo 1).

Para o sistema de duas cargas representado na Figura 5.1, quando o valor de cada uma é de 50 kN, o deslocamento dos pontos onde são aplicadas é de 4.378 mm, continuando linearmente até aos 82.56 kN das cargas e correspondentes 7.229 mm do deslocamento. Comparativamente com a análise experimental a capacidade resistente da ligação é um pouco inferior. No entanto, a recta do deslocamento obtido aproxima-se razoavelmente bem do troço elástico linear (condições de serviço) tanto da análise experimental como da análise não linear de Costa (2013), embora a sua rigidez seja menor. Ou seja, apesar da escora diagonal principal não resistir satisfatoriamente, por si só, às solicitações de compressão sofridas, apresenta uma boa eficácia ao nível da rigidez.

5.2.2.2 Modelo 2

O Modelo 2 já contempla a presença de cintas no módulo central da ligação, apresentando uma das abordagens possíveis para esta situação na análise da LVP. O equilíbrio no módulo central é garantido através de duas escoras diagonais limitadas pela convergência de escoras provenientes dos módulos periféricos, de um lado e por dois tirantes e uma escora do outro. Existe ainda a particularidade da existência de uma escora vertical a meio do módulo central responsável por equilibrar a componente vertical das forças de compressão das escoras diagonais. Na Figura 5.8 identificam-se os elementos da ligação e apresentam-se os esforços e a deformada, obtidos com o EvalS.

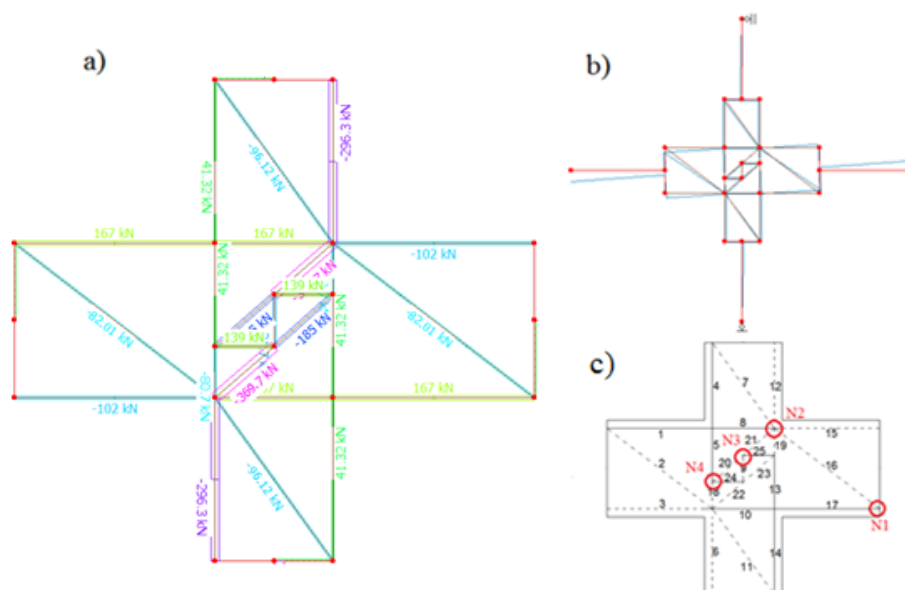


Figura 5.8 - Resultados EvalS do Modelo 2: a) esforços; b) deformada e c) identificação das escoras, tirantes e nós.

Relativamente ao equilíbrio nos nós, voltam a existir nós do tipo N1 e N2, analisados anteriormente, mas devido à nova configuração surgem duas novas disposições que merecem atenção. Posto isto e não havendo nada a acrescentar relativamente à configuração dos nós N1 e N2, procede-se à justificação da configuração dos campos de tensões nos nós N3 e N4.

O nó N3 é responsável pela separação do esforço axial proveniente das escoras 21 e 22, sendo que existe ainda a influência dos tirantes 24 e 25 que não deve ser desprezada. A disposição tipificada deste nó é ilustrada na Figura 5.9.

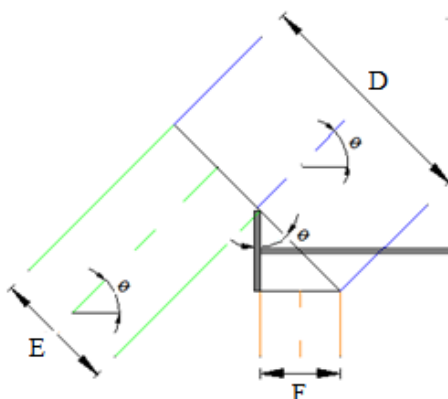


Figura 5.9 - Geometria típica do nó N3.

Sendo a espessura D a mesma que resulta do equilíbrio do nó N2, a sua relação com o esforço axial de compressão na escora, condiciona a dimensão E , que deve obedecer à mesma relação, uma vez que as escoras são paralelas,

$$\frac{D}{N_D} = \frac{E}{N_E} \quad (15)$$

representando N_D e N_E as forças de compressão nas escoras respectivas.

A parte restante do esforço axial na escora D deverá ter a sua componente vertical equilibrada pela escora de espessura F e a componente horizontal pelo tirante adjacente. Neste seguimento, a dimensão F pode ser determinada através da análise da disposição geométrica das resultantes de tensões em equilíbrio:

$$F = \sin \theta \times (D - E) \quad (16)$$

Note-se que a largura de influência do tirante é calculada da mesma forma através do co-seno do mesmo ângulo. Por outro lado, a chapa de ancoragem representada (neste nó e nos demais neste trabalho) indica apenas que a amarração dos varões é considerada a partir daquela secção.

O cálculo do sistema equilibrado do nó do tipo N4, é efectuado de forma semelhante, na medida em que a espessura G deve ser geometricamente definida pelas dimensões do triângulo rectângulo ilustrado na Figura 5.10.

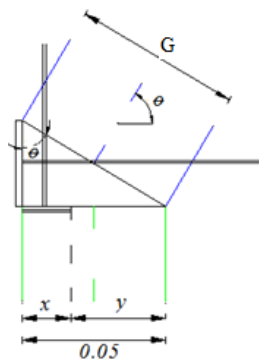


Figura 5.10 - Geometria típica do nó N4.

A espessura da escora longitudinal, 0.05 m, contém a contribuição do esforço axial nessa escora e no tirante longitudinal do pilar (na proporção y e x , respectivamente). A dimensão G poderá ser obtida recorrendo à expressão:

$$G = \sqrt{\left(\frac{0.05}{\tan \theta}\right)^2 + 0.05^2} = \frac{0.05}{\sin \theta} \quad (17)$$

De acordo com a explicação dada anteriormente, observa-se que as escoras 20 e 23 variam linearmente de espessura, de E para G .

Reunidas as condições necessárias para o equilíbrio global da ligação apresentam-se nos Quadros 5.7, 5.8 e 5.9, as informações relativas ao Modelo 2.

Quadro 5.7 – Características geométricas das escoras diagonais dos módulos periféricos do Modelo 2.

Escora diagonal (módulos das vigas)					Escora diagonal (módulos dos pilares)				
Ângulo Θ (graus)	Z_v (m)	$Z_{\cot\Theta}$ (m)	Espessura C_i (m)	Espessura C_f (m)	Ângulo Θ (graus)	Z_p (m)	$Z_{\cot\Theta}$ (m)	Espessura C_i (m)	Espessura C_f (m)
37.569	0.25	0.325	0.198	0.033	35.640	0.19	0.265	0.154	0.030

Quadro 5.8 – Características geométricas das escoras do módulo central do Modelo 2.

Escoras (módulo central)								
Ângulo Θ (graus)	a (m)	b(m)	c (m)	d (m)	Espessura D (m)	Espessura E (m)	Espessura F (m)	Espessura G (m)
0.720	0.032	0.008	0.013	0.027	0.077	0.039	0.025	0.076

Quadro 5.9 - Resistência limite dos elementos do Modelo 2.

Elementos	Esforço axial (kN)	Resistência (kN)	Área de armadura (m ²)/ espessura da escora (m)	Carga máxima admissível (kN)
1,8,10 e 17	167.00	1136.55	0.0021	340.3
4,5,13 e 14	41.32	1359.13	0.0025	1644.6
2 e 16	-82.01	-326.82	0.033	199.3
3 e 15	-102.00	-495.75	0.05	243.0
6 e 12	-296.3	-495.75	0.05	83.7
7 e 11	-96.12	-301.97	0.030	157.1
18 e 19	-80.70	-495.75	0.05	307.2
20 e 23	-185.00	-382.05	0.039	103.3
21 e 22	-369.70	-763.49	0.077	103.3
24 e 25	139.00	149.54	0.00025	53.8
9	-121.70	-251.53	0.03	103.3

Os resultados obtidos com o Modelo 2 indicam que a inclusão de cintas no módulo central permite substituir uma escora diagonal principal por uma disposição com mais elementos, distribuindo os campos de tensões por uma zona mais alargada. Desta forma, a rotura passa a ser condicionada pela cedência da armadura das cintas (tirantes 24 e 25). A rotura dá-se, no entanto, para cargas laterais de 53.8 kN, valor inferior ao do Modelo 1.

Na avaliação do deslocamento, para o sistema de cargas considerado, verifica-se um deslocamento de 4.975 mm nas extremidades livres das vigas para a carga de 50 kN, e de 5.35 mm no momento da rotura, ver Figura 5.11.

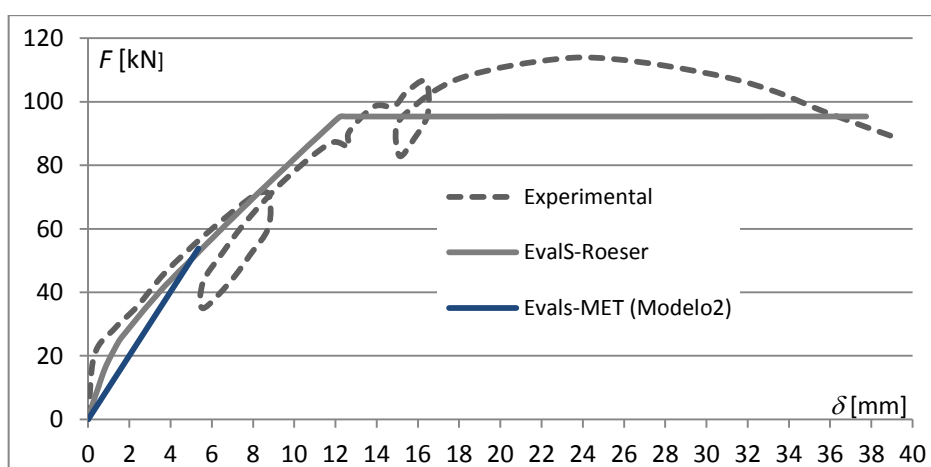


Figura 5.11 - Diagrama força-deslocamento (Modelo 2).

A capacidade resistente da ligação é claramente inferior à esperada, sendo que a recta força-deslocamento se afasta ligeiramente mais que a do Modelo 1, relativamente aos resultados experimentais.

Contrariamente ao que seria pretendido, a inclusão de cintas no Modelo 2 teve repercussões negativas nos resultados, sugerindo que o modelo não é o mais adequado.

Uma alternativa capaz de melhorar a capacidade resistente do modelo passa por controlar a tensão nos tirantes 24 e 25, fazendo com que as escoras diagonais dos módulos laterais coincidam com a extremidade dos mesmos, introduzindo desta forma esforços de compressão, ou antes, deformações, que reduzem as tensões naqueles tirantes, ver Figura 5.12.

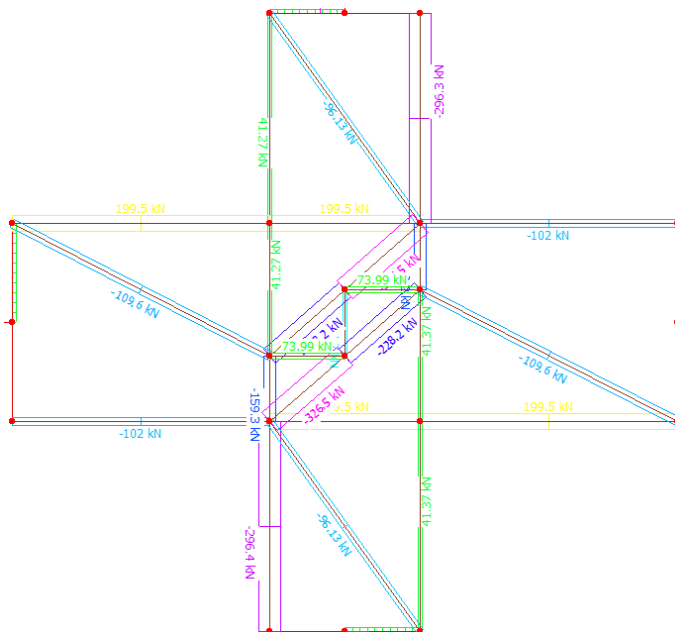


Figura 5.12 – EvalS: esforços no Modelo 2 alternativo para cargas de 50 kN nas vigas.

Seguindo uma análise semelhante à do modelo original, a nova distribuição de esforços apresenta alterações nos elementos mais solicitados. Neste caso, as escoras longitudinais dos pilares passam a ser os elementos que condicionam a resistência da ligação, possibilitando um valor máximo para as cargas laterais de 62.2 kN. O deslocamento das extremidades livres das vigas verificado para esse valor de carga é de 6.48 mm, sendo que para a situação de carregamento de referência, 50 kN, toma o valor de 5.21 mm, como ilustra a Figura 5.13.

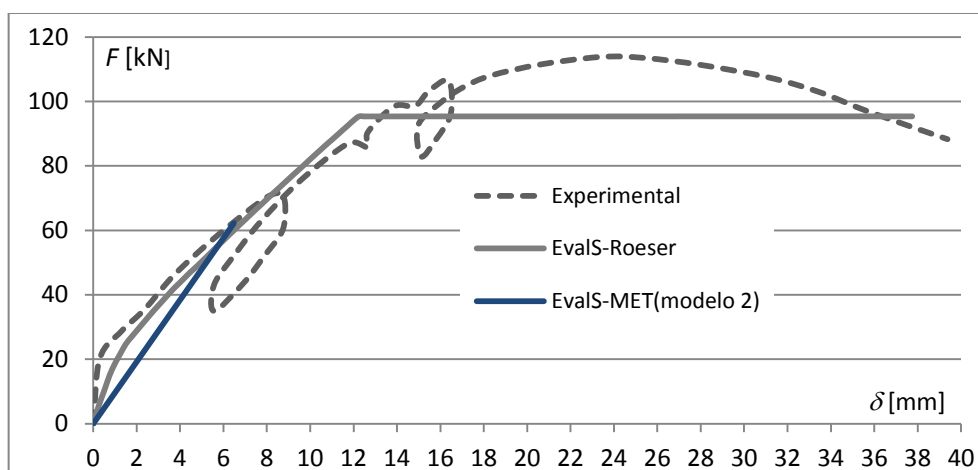


Figura 5.13 - Diagrama força-deslocamento (Modelo 2 alternativo).

Como se pretendia, a alteração efectuada melhora a resistência, contudo apresenta piores resultados na avaliação do deslocamento.

5.2.2.3 Modelo 3

No Modelo 3 a presença de cintas é considerada através de outra configuração isostática adequada ao tipo de LVP, desta vez através de um único tirante horizontal, contendo a área total da armadura das cintas. Este tirante divide o módulo central em duas partes iguais e é equilibrado por duas escoras com metade do ângulo da escora principal apresentada no Modelo 1, ver Figura 5.14.

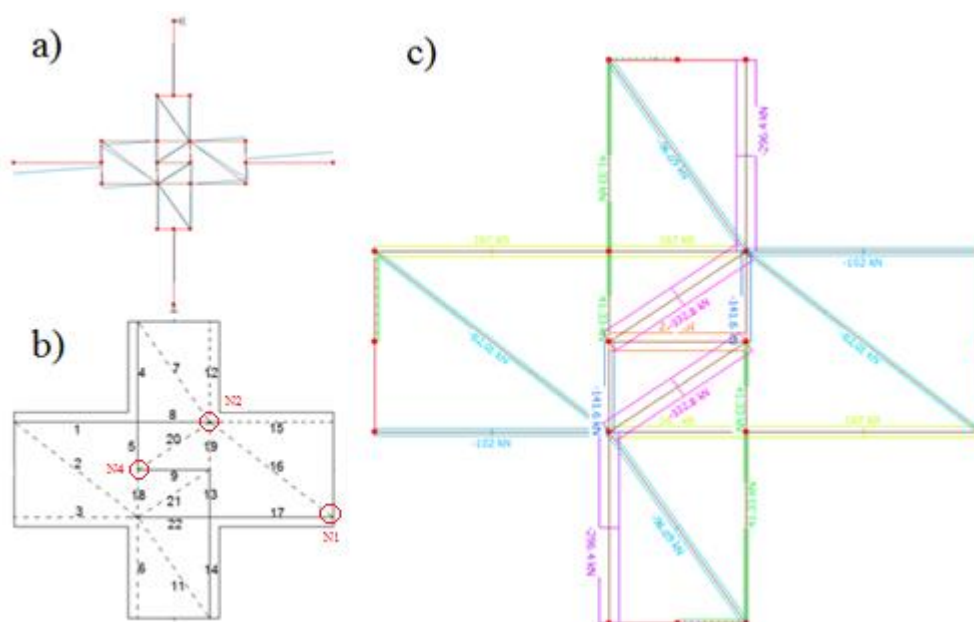


Figura 5.14 – Modelo 3; a) Deformada; b) Identificação de elementos; c) Esforços.

Este modelo não apresenta novas situações de equilíbrio nodal, pelo que os processos de cálculo demonstrados em 5.2.2.1 e 5.2.2.2 permanecem adequados.

Assegurado o equilíbrio global da ligação, procede-se à compilação de todos os resultados de dimensionamento necessários nos Quadros 5.10, 5.11 e 5.12.

Quadro 5.10 - Características geométricas das escoras diagonais dos módulos periféricos do Modelo 3.

Escora diagonal (módulos das vigas)					Escora diagonal (módulos dos pilares)				
Ângulo Θ (graus)	Z_v (m)	$Z_{cot\Theta}$ (m)	Espessura C_i (m)	Espessura C_f (m)	Ângulo Θ (graus)	Z_p (m)	$Z_{cot\Theta}$ (m)	Espessura C_i (m)	Espessura C_f (m)
37.569	0.25	0.325	0.198	0.033	35.640	0.19	0.265	0.154	0.030

Quadro 5.11 - Características geométricas das escoras do módulo central do Modelo 3.

Escoras (módulo central)						
Ângulo Θ (graus)	a (m)	b(m)	c (m)	d (m)	Espessura D (m)	Espessura G (m)
33.341	0.032	0.008	0.013	0.027	0.076	0.091

Quadro 5.12 - Resistência limite dos elementos do Modelo 2.

Elementos	Esforço axial (kN)	Resistência (kN)	Área de armadura (m ²)/ espessura da escora (m)	Carga máxima admissível (kN)
1,8,10 e 17	167.00	1136.553	0.0021	340.29
4,5,13 e 14	41.33	1359.128	0.0025	1644.24
2 e 16	-82.01	-326.82	0.033	199.25
3 e 15	-102.00	-495.75	0.05	243.01
6 e 12	-296.40	-495.75	0.05	83.63
7 e 11	-96.09	-301.85	0.030	157.07
18 e 19	-141.60	-495.75	0.05	175.05
20 e 21	-332.80	-749.05	0.076	112.54
9	278.00	299.08	0.0005	53.79

Os resultados obtidos pelo Modelo 3 indicam que a cedência da armadura das cintas se dá para um valor das cargas muito próximo do do Modelo 3, visto que o tirante 9 entra em rotura para um valor de 53.79 kN. Estes resultados voltam a ser insatisfatórios quando comparados com os experimentais. Quanto ao deslocamento das extremidades das vigas, para o valor de referência 50 kN toma o valor de 5.224 mm e no ponto de rotura de 5.62 mm, afastando-se ainda mais dos valores experimentais que os modelos anteriores, ver Figura 5.15.

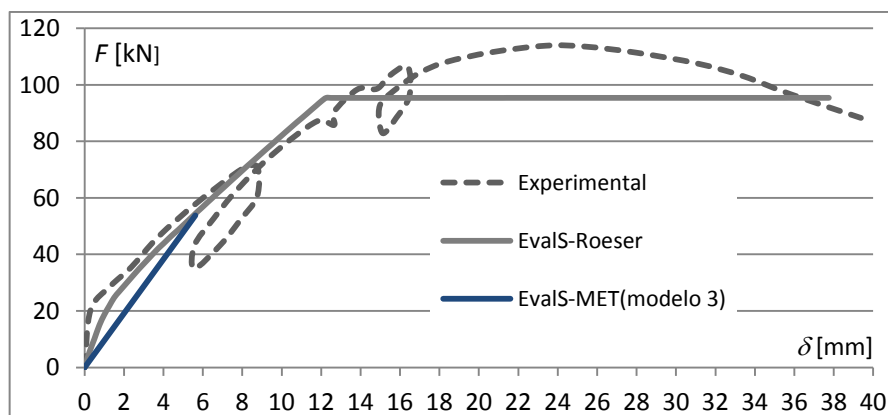


Figura 5.15 – Diagrama força-deslocamento do Modelo 3

Usando uma abordagem semelhante à anterior, de modo a controlar a tensão no tirante 9, altera-se a posição das escoras diagonais dos módulos laterais como demonstrado na Figura 5.16 b).

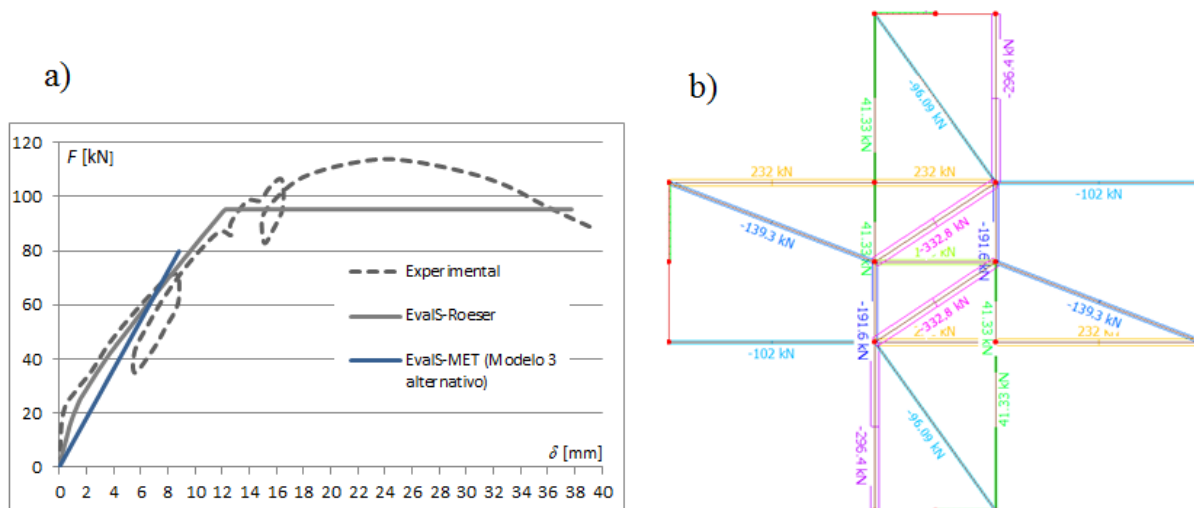


Figura 5.16 – Modelo 3 alternativo: a) diagrama força-deslocamento; b) esforços para cargas de 50 kN nas vigas.

Nesta configuração, os primeiros elementos a entrar em rotura são as escoras longitudinais do módulo central, suportando um valor máximo das cargas de 79.8 kN ao qual corresponde um deslocamento de 8.82 mm. Para 50 kN o valor de deslocamento é de 5.53 mm, ver Figura 5.16 a).

Esta solução apresenta valores mais aceitáveis ao nível da resistência, mas volta a não se adequar ao deslocamento determinado experimentalmente.

5.2.3 Modelos Hiperestáticos

A análise pelo MET pode ser também efectuada considerando modelos hiperestáticos, sendo que estes podem inclusive proporcionar uma melhor aproximação ao campos de tensões reais numa estrutura de betão armado. O facto de não ser muito comum utilizar este tipo de modelação reside na dificuldade de cálculo que acarreta, sendo útil nestes casos *softwares* de cálculo apropriados, como é o caso do EvalS. Nesse sentido estudaram-se duas modelações possíveis com 1 grau de hiperestaticidade, ilustradas na Figura 5.17.

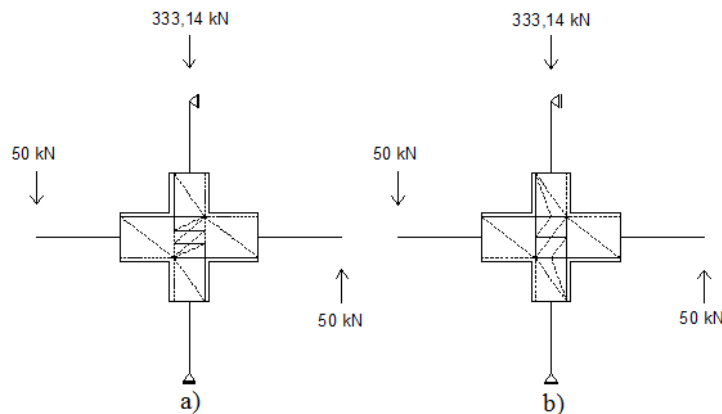


Figura 5.17 – Esquema de modelos hiperestáticos: a) Modelo 4; b) Modelo 5.

5.2.3.1 Modelo 4

Neste Modelo 4 opta-se pela inclusão de um maior número de escoras, na tentativa de distribuir a tensão no interior do módulo central de uma forma mais uniforme, aproveitando o máximo de área possível. O efeito das cintas de armadura é simulado por dois tirantes horizontais que equilibram dois pares de escoras no módulo central. A Figura 5.18 mostra os esforços e a configuração deformada desenvolvidos pelo modelo para um carregamento vertical nas extremidades das vigas de 50 kN.

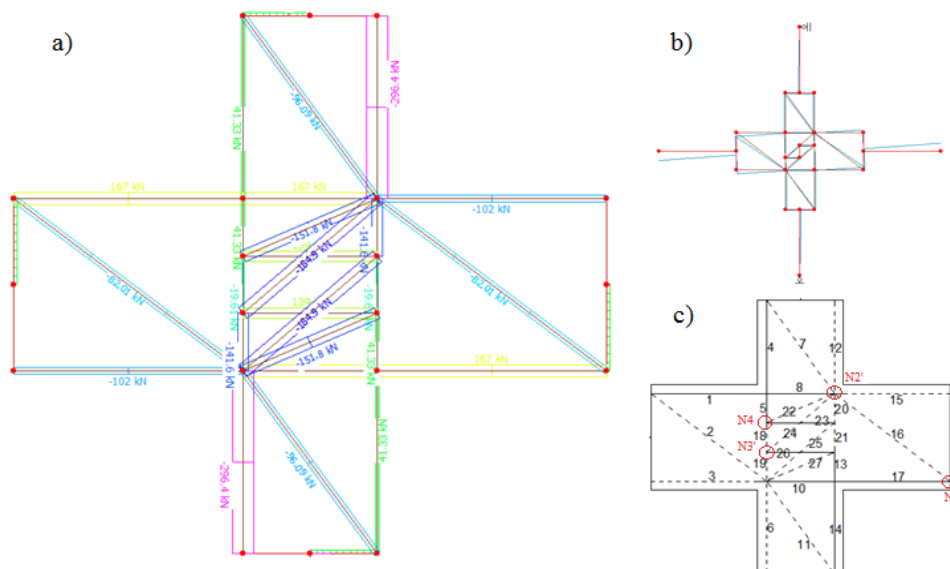


Figura 5.18 – Modelo 4: a) Esforços; b) Deformada, c) Identificação dos elementos.

O equilíbrio de todos os nós do modelo é assegurado recorrendo a quatro tipos de configuração, sendo que os tipos N1 e N4 foram já abordados, o tipo N3' deriva directamente do exemplo N3 tratado em 5.2.2.2, havendo apenas uma mudança de direcção e N2' é em tudo semelhante a N2, tratado em 5.2.2.1, com a particularidade de serem duas as escoras diagonais do módulo central que nele convergem, ver Figura 5.19.

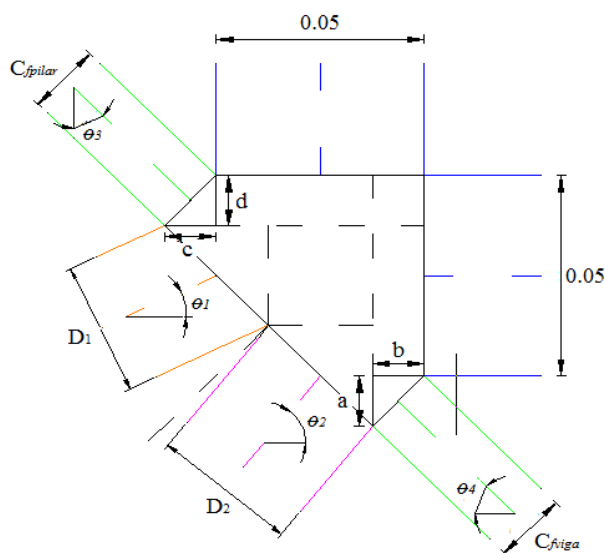


Figura 5.19 – Geometria típica do nó N2'.

A metodologia apresentada em 5.2.2.2 adequa-se perfeitamente a esta situação, sendo que, neste caso, cada uma das duas escoras diagonais do módulo central, D_1 e D_2 , é equilibrada com metade da espessura equivalente resultante da interacção dos elementos dos módulos periféricos. As suas dimensões podem ser determinadas da seguinte forma:

$$D_i = \frac{(0.05 + a - d)}{2} \cos \theta_i + \frac{(0.05 + c - b)}{2} \sin \theta_i \quad (18)$$

Apresenta-se nos Quadros 5.13, 5.14 e 5.15 a compilação de todas as geometrias e características resistentes do modelo.

Quadro 5.13 - Características geométricas das escoras diagonais dos módulos periféricos do Modelo 4.

Escora diagonal (módulos das vigas)					Escora diagonal (módulos dos pilares)				
Ângulo Θ (graus)	Z_v (m)	$Z_{cot\Theta}$ (m)	Espessura C_i (m)	Espessura C_f (m)	Ângulo Θ (graus)	Z_p (m)	$Z_{cot\Theta}$ (m)	Espessura C_i (m)	Espessura C_f (m)
37.569	0.25	0.325	0.198	0.033	35.640	0.19	0.265	0.154	0.030

Quadro 5.14 - Características geométricas das escoras do módulo central do Modelo 3.

Escoras (módulo central)							
Ângulo Θ_1 (graus)	Ângulo Θ_2 (graus)	a (m)	b(m)	c (m)	d (m)	Espessura D_1 (m)	Espessura D_2 (m)
23.682	41.25	0.032	0.008	0.013	0.027	0.036	0.039

Quadro 5.15 – Capacidade resistente dos elementos do Modelo 4.

Elementos	Esforço axial (kN)	Resistência (kN)	Área de armadura (m ²)/ espessura da escora (m)	Carga máxima admissível (kN)
1,8,10 e 17	167.00	1136.55	0.0021	340.29
4,5,13 e 14	41.33	1359.13	0.0025	1644.24
2 e 16	-82.01	-326.82	0.033	199.25
3 e 15	-102.00	-495.75	0.05	243.01
6 e 12	-296.40	-495.75	0.05	83.63
7 e 11	-96.09	-301.85	0.030	157.07
23 e 26	139.60	149.54	0.00025	53.56
18 e 21	-19.61	-68.66	0.01	175.05
19 e 20	-141.60	-495.75	0.05	175.05
22 e 27	-151.80	-356.06	0.036	117.28
24 e 25	-184.90	-381.76	0.039	103.23

Verifica-se novamente um excesso de solicitação axial nos tirantes representativos das cintas que resulta na rotura dos mesmos para valores de carga de 53.56 kN. Apesar de hiperestático este é o ponto de rotura global da ligação, uma vez que são dois elementos em simultâneo a ceder. O deslocamento de referência, para 50 kN, é de 5.12 mm, enquanto na rotura chega aos 5.48 mm, ver Figura 5.20.

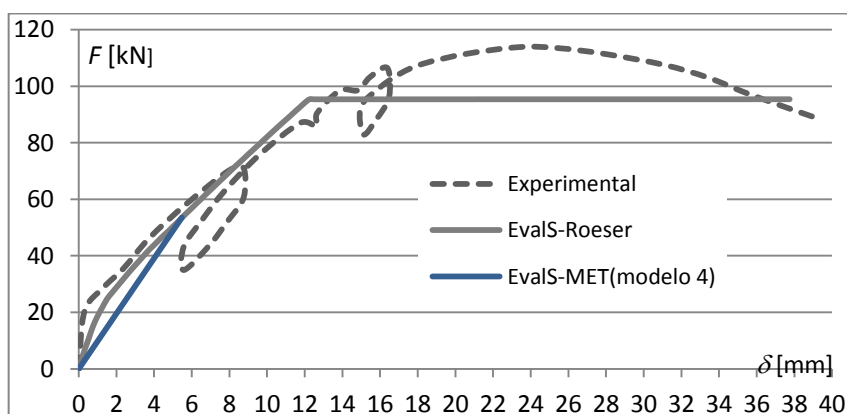


Figura 5.20 – Diagrama força-deslocamento do Modelo 4.

Experimentando a mesma modificação que em 5.2.2.2 e 5.2.2.3 obtêm-se resultados da mesma ordem de grandeza, havendo uma beneficiação em termos de capacidade resistente, 67.7 kN de carregamento, mas sem grandes alterações a nível de deslocamentos, 4.936 mm para cargas de 50 kN e 6.68 mm para a carga de rotura, tal como ilustra a Figura 5.21.

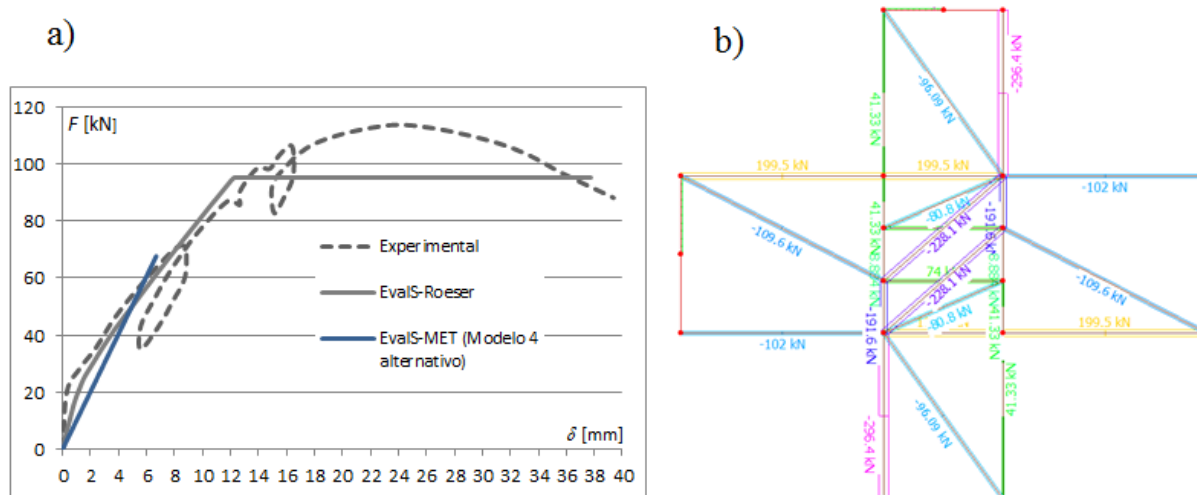


Figura 5.21 – Modelo 4 alternativo; a) Diagrama força-deslocamento, b) esforços para cargas de 50 kN nas vigas.

Os resultados de ambas as alternativas continuam muito distantes dos experimentais.

5.2.3.2 Modelo 5

O Modelo 5 constitui uma outra abordagem hiperestática que pode ser utilizada para descrever o comportamento da ligação em análise. Por ilação dos resultados dos modelos anteriores é possível afirmar que a escora diagonal principal do módulo central considerada no Modelo 1 contribui de modo relevante para a rigidez global da ligação. Do mesmo modo, para evitar uma concentração de tensões nessa escora, devem ser previstas escoras adicionais que permitam distribuir a tensão por uma maior superfície de betão, conseguidas através da inclusão de tirantes horizontais no módulo central, representativos da armadura das cintas da ligação. A configuração deste modelo foi pensada de modo a conter todas as características referidas, havendo também a preocupação de não sobrecarregar os nós superior direito e inferior esquerdo do módulo central (nós de tipo N2 ou N2', nos modelos anteriores) com um excesso de escoras, sob pena de diminuir significativamente as suas espessuras.

A Figura 5.22 indica o diagrama de esforços, a configuração deformada e a identificação dos elementos do Modelo 5 em condições padrão de carregamento.

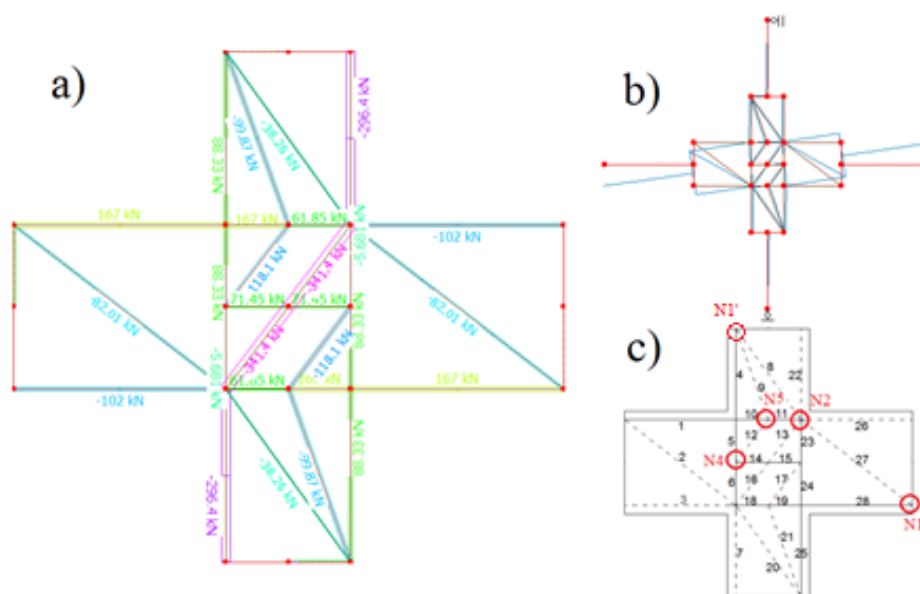


Figura 5.22 – Modelo 5; a) Esforços; b) Deformada; c) Identificação de elementos.

De todas as situações nodais presentes no modelo, apenas N1' e N5 apresentam características inovadoras relativamente aos modelos anteriores.

O nó N1' deriva do nó N1 sendo que, em vez de um escora, contempla a interacção de duas. A forma de calcular a espessura inicial de cada uma das escoras, C_{i1} e C_{i2} , é a mesma usada em 5.2.2.1, Figura 5.5, dividindo em metade a dimensão proporcionada pela armadura de esforço transverso:

$$C_{i_i} = \sin \theta_i \times \frac{Z \cot \theta_i}{2} = \frac{Z}{2} \cos \theta_i \quad (19)$$

Um nó do tipo N5 resulta da interacção de duas escoras e de dois tirantes. Dada a disposição dos elementos na zona da intersecção, a definição da geometria das escoras pode ser efectuada simplificada, ignorando a contribuição dos tirantes. As alterações que esta simplificação provoca na espessura das escoras, relativamente à abordagem completa, são muito pouco significativas, uma vez que os tirantes actuam na mesma direcção, mas com acções em sentidos opostos, amenizando o efeito de cada uma delas.

Neste caso, a geometria do nó depende apenas da intersecção das escoras, ver Figura 5.23.

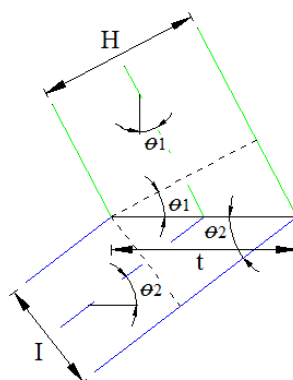


Figura 5.23 – Geometria típica do nó N5.

Sendo a espessura H a mesma resultante do equilíbrio do nó $N1'$, a espessura I pode ser determinada com base na expressão:

$$I = \frac{H}{\cos \theta_1} \times \sin \theta_2 \quad (20)$$

Equilíbrio assegurado, procede-se à caracterização geométrica e funcional do modelo, ver Quadros 5.16, 5.17 e 5.18 e Figura 5.24.

Quadro 5.16 - Características geométricas das escoras diagonais dos módulos periféricos do Modelo 5.

Escora diagonal (módulos das vigas)				Escoras diagonais (módulos dos pilares)					
Ângulo θ (graus)	Z_v (m)	Espessura C_i (m)	Espessura C_r (m)	Ângulo θ_1 (graus)	Ângulo θ_2 (graus)	Z_p (m)	Espessura C_i (m)	Espessura C_r (m)	Espessura H (m)
37.569	0.25	0.198	0.033	19.722	35.640	0.19	0.077	0.012	0.089

Quadro 5.17 - Características geométricas das escoras do módulo central do Modelo 5.

Escoras (módulo central)							
Ângulo θ_1 (graus)	Ângulo θ_2 (graus)	a (m)	b(m)	c (m)	d (m)	Espessura D (m)	Espessura I (m)
52.765	52.765	0.032	0.008	0.005	0.011	0.080	0.076

Quadro 5.18 - Resistência limite dos elementos do Modelo 5.

Elementos	Esforço axial (kN)	Resistência (kN)	Área de armadura (m ²)/ espessura da escora (m)	Carga máxima admissível (kN)
1,10,19 e 28	167.00	1136.55	0.0021	340.29
4,5,24 e 25	88.33	1359.13	0.0025	769.35
2 e 27	-82.01	-326.82	0.033	199.25
3 e 26	-102.00	-495.75	0.05	243.01
7 e 22	-296.40	-495.75	0.05	83.63
8 e 20	-38.26	-120.19	0.012	157.07
9 e 21	-99.87	-886.67	0.089	443.91
11 e 18	61.85	1136.55	0.0021	918.80
6 e 23	-5.68	-495.75	0.0500	4363.23
14 e 15	71.45	277.37	0.0005	194.10
12 e 17	-118.10	-749.93	0.076	317.50
13e16	-341.40	-795.09	0.080	116.45

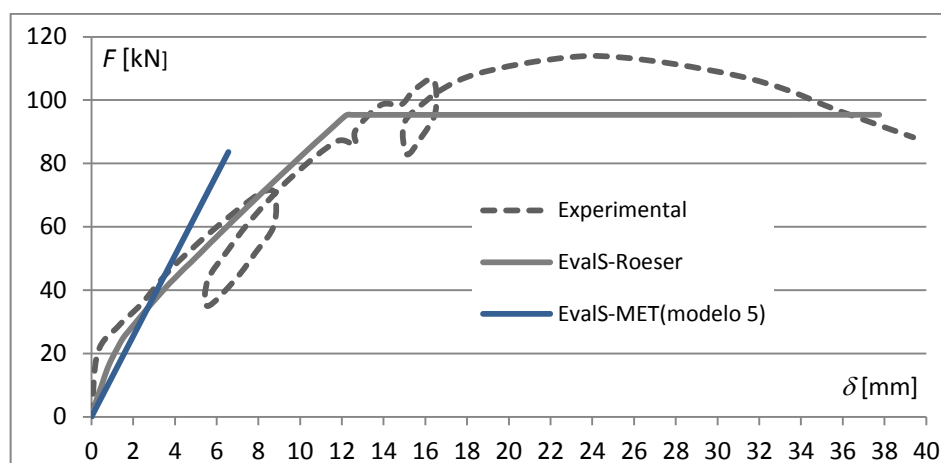


Figura 5.24 – Diagrama força-deslocamento do Modelo 5.

Mediante os resultados obtidos constata-se que a presença de uma escora na diagonal principal do módulo central oferece ao modelo níveis de eficiência da mesma ordem do Modelo 1. A escora acumula a maior parte da tensão no módulo da ligação em si própria, sendo que devido à contribuição das cintas e das escoras adicionais, deixa de ser o elemento condicionante na rotura.

Tal como era previsto, esta configuração melhora a avaliação da capacidade resistente e do deslocamento sofrido pela ligação, aproximando os resultados aos experimentais. Assim

sendo, as escoras 7 e 22 entram em rotura simultaneamente para cargas de 83.63 kN e o deslocamento nas condições de carga padrão é de 3.92 mm.

Apesar de os resultados poderem ser considerados razoavelmente satisfatórios, existe ainda margem para optimização da análise.

No capítulo 6 serão testadas diferentes iniciativas com o objectivo de tentar obter resultados mais próximos dos experimentais.

6 OPTIMIZAÇÃO DE RESULTADOS

Mediante a análise efectuada a partir dos exemplos apresentados no capítulo 5 deste documento, é possível concluir que existem certas particularidades que devem ser incluídas na configuração de um modelo de modo a que esteja apto a avaliar tanto a capacidade resistente como a rigidez de uma ligação. Destaca-se o benefício facultado pela consideração da espessura total das escoras e pela consideração de uma escora na totalidade da diagonal do módulo central, auxiliada, sempre que possível por outras escoras capazes de alargar o campo de tensões a uma maior área (i.e. volume) de betão.

Contudo, apesar de aceitáveis, os resultados não se coadunam, ainda, com os obtidos experimentalmente, ficando a resistência e a rigidez de todos os modelos ligeiramente aquém das expectativas. No presente capítulo serão experimentados processos que possam otimizar os resultados.

Por uma questão de simplicidade de análise e tendo em conta que o comportamento de todos os modelos testados é globalmente similar (exceptuando o módulo central de cada um), todos os processos serão testados no Modelo 1.

6.1 Redução dos Módulos Periféricos

A proposta de redução dos módulos laterais tem que ver com o facto de, num modelo em escoras e tirantes a tensão ser constante ao longo de cada escora, caso ela seja prismática. Ora, na realidade, nos elementos lineares flectidos, as tensões normais nos banzos decrescem à medida que nos afastamos da ligação. Deste modo, as tensões constantes nas escoras e tirantes longitudinais dos modelos apresentados, constituem um erro importante que tende a aumentar a deformabilidade do modelo. Ao se reduzir a dimensão dos módulos periféricos, está também a reduzir-se a extensão dos elementos com tensão constante, atenuando as diferenças com o comportamento real dos mesmos. Espera-se que este processo produza resultados particularmente significativos na avaliação da rigidez da ligação.

A redução foi efectuada de três modos distintos e faseadamente, isto é, averiguando a influência da redução dos módulos laterais, inferior e superior isoladamente e finalmente em conjunto, ver Figura 6.1.

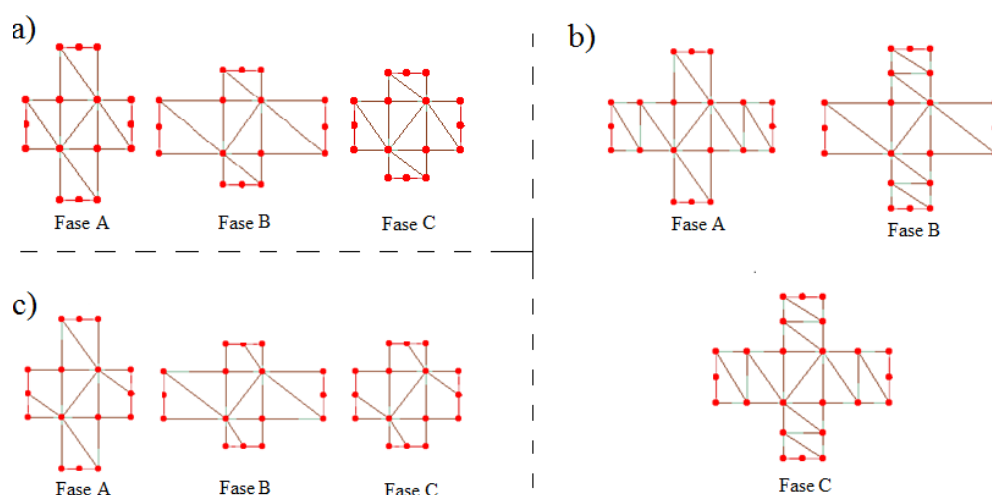


Figura 6.1 – Redução de módulos periféricos; a) Modo 1; b) Modo 2; c) Modo 3.

O Modo 1 consiste na redução dos módulos periféricos em metade da extensão original, mantendo a configuração das escoras diagonais e causando, por isso, uma variação do ângulo das mesmas. O Modo 2 baseia-se numa condição análoga, sendo que em vez de se reduzir os módulos, divide-se em duas partes iguais. Esta divisão permite a adaptação das tensões longitudinais a dois troços mais curtos, aproximando-as da realidade. Relativamente ao Modo 3, a redução é cumprida sem que se alterem os ângulos das escoras diagonais, obedecendo à mesma configuração do modelo original.

Apresentam-se a seguir os resultados relativos às várias fases dos Modos 1, 2 e 3, ver Figura 6.2, Figura 6.3 e Figura 6.4.

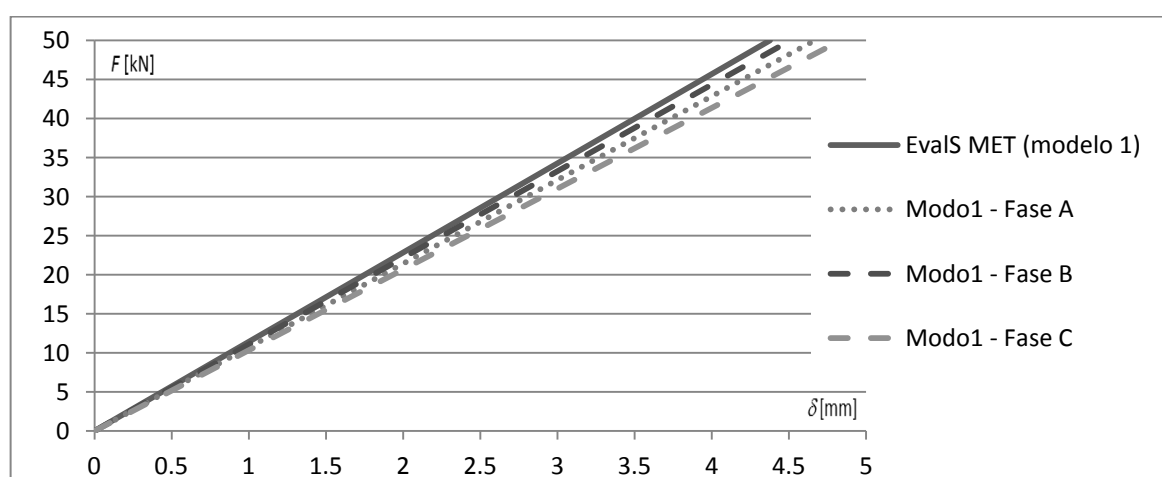


Figura 6.2 – Diagrama força-deslocamento do Modo 1.

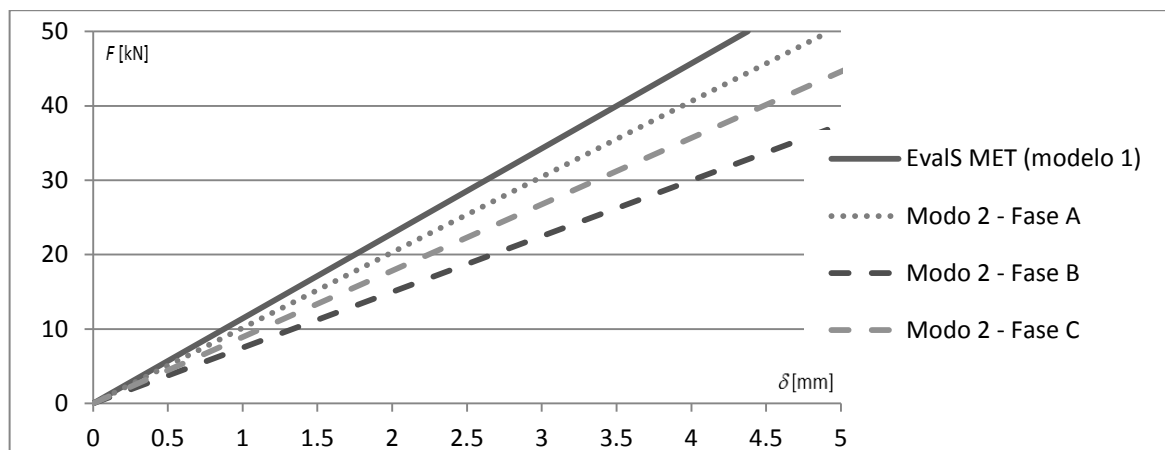


Figura 6.3 - Diagrama força-deslocamento do Modo 2.

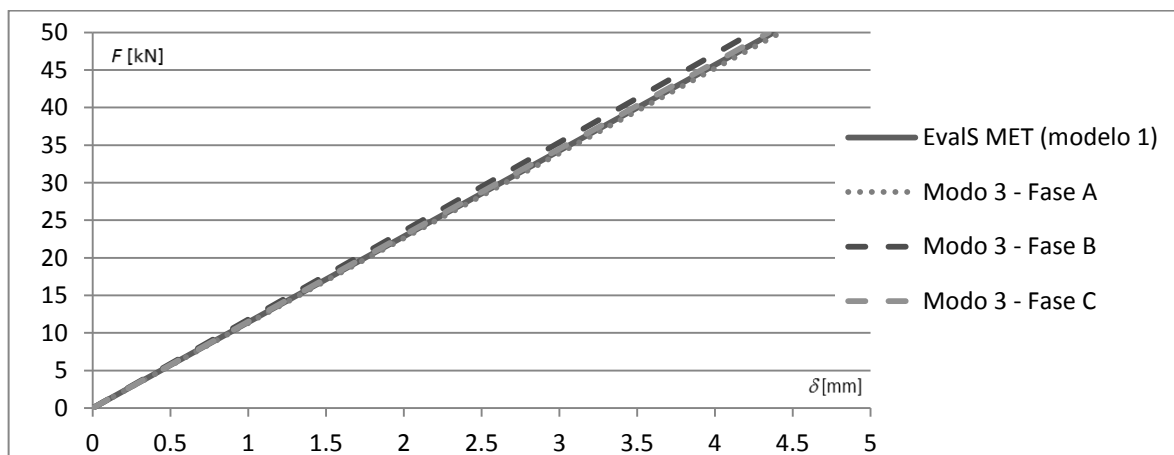


Figura 6.4 - Diagrama força-deslocamento do Modo 3.

Da análise dos resultados obtidos pode concluir-se que o Modo 1 e o Modo 2 não são alternativas interessantes para a optimização da rigidez do modelo, apresentando resultados mais afastados que o modelo original em qualquer uma das fases. A razão para este afastamento será a variação dos ângulos das escoras e conseqüentes repercussões geométricas na determinação da espessura das escoras.

Mantendo a configuração angular do modelo original, o Modo 3 consegue atingir o objectivo proposto e diminuir o deslocamento da ligação particularmente na Fase B. Tal facto pode ser explicado pela maior tensão nos pilares causados pela carga de topo de 333.14 kN. As diferenças de tensão entre vigas e pilares são de tal ordem, que a redução isolada dos módulos das vigas, Fase A, ou até a consideração da redução simultânea de todos os módulos periféricos, Fase C, reflectem resultados menos satisfatórios.

6.2 Aumento de Espessura das Escoras Diagonais

Como foi possível testemunhar no capítulo 5, as escoras diagonais são responsáveis por uma grande parte da rigidez dos modelos testados. Neste sentido, a possibilidade de aumentar a superfície destas escoras emprestará ao modelo um aumento significativo de rigidez. Assim, estudar-se-á a influência de um aumento de 10% da espessura das escoras diagonais do Modelo 1, tendo em atenção que no caso das escoras diagonais periféricas apenas se aumenta a menor espessura, uma vez que a maior está limitada pela expressão (12), Figura 5.5.

Tal como em 6.1, os testes efectuados foram faseados de modo a qualificar a contribuição de cada conjunto de escoras isoladamente e em simultâneo, ver Figura 6.5 e .

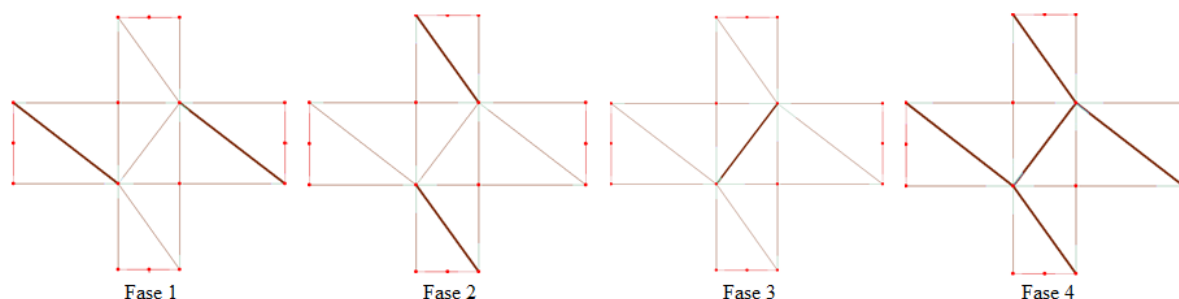


Figura 6.5 – Aumento da espessura das escoras diagonais.

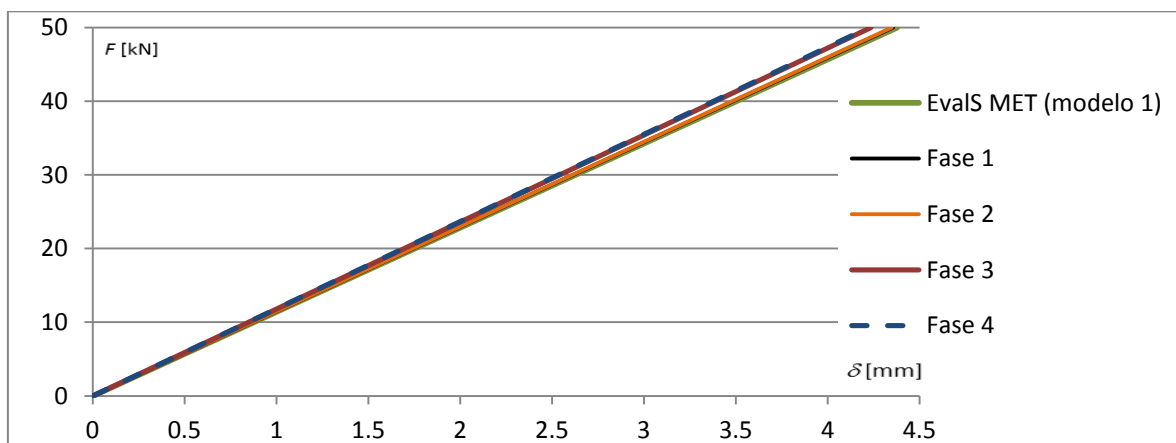


Figura 6.6 – Diagrama força-deslocamento.

De acordo com o diagrama força-deslocamento das várias fases constata-se que o aumento de qualquer conjunto de escoras é benéfico na simulação do deslocamento de uma ligação. É possível acrescentar que a contribuição das escoras diagonais dos módulos periféricos na rigidez global da ligação é bastante inferior à da escora diagonal do módulo central, sendo que

a situação mais eficaz é a consideração de todas em simultâneo. Para além da rigidez, o aumento da superfície das escoras aumenta a capacidade resistente de uma ligação sempre que a rotura se der pelo betão.

6.3 Incorporação de Uma Escora na Diagonal Principal do Módulo da Ligação

Tendo em conta as conclusões tiradas de 5.2.2.1, 5.2.3.2 e 6.2, que reforçam a ideia de que uma escora incluída na diagonal principal do módulo central de uma ligação confere grande parte da rigidez da mesma, estuda-se a influência desse aspecto nos Modelos 2, 3 e 4, ver Figura 6.7, Figura 6.8 e Figura 6.9.

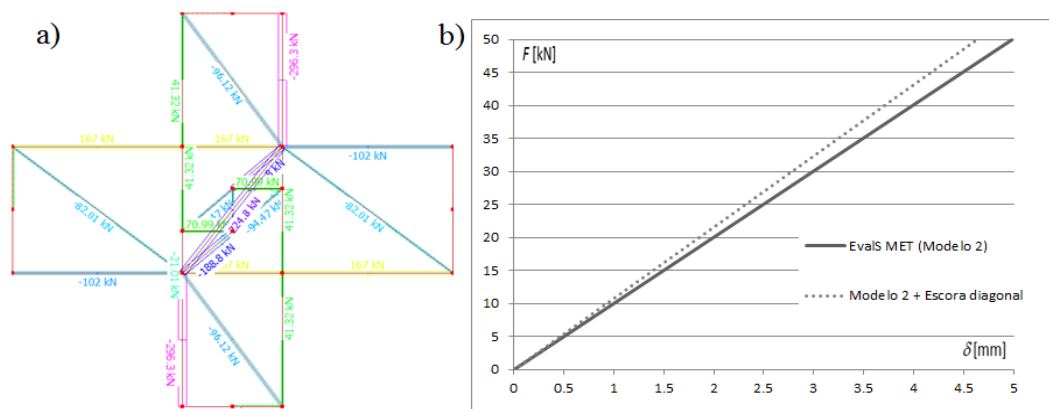


Figura 6.7 – Influência da introdução de uma escora na diagonal principal do módulo da ligação no Modelo 2.

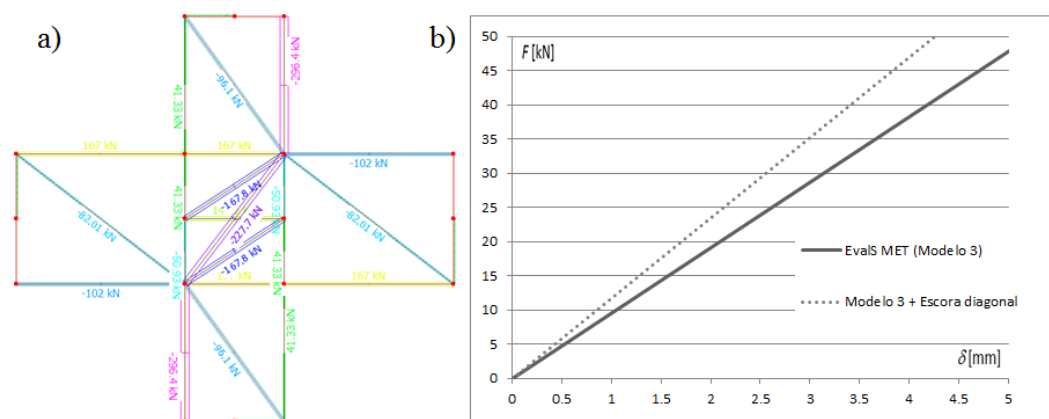


Figura 6.8 - Influência da introdução de uma escora na diagonal principal do módulo da ligação no Modelo 3.

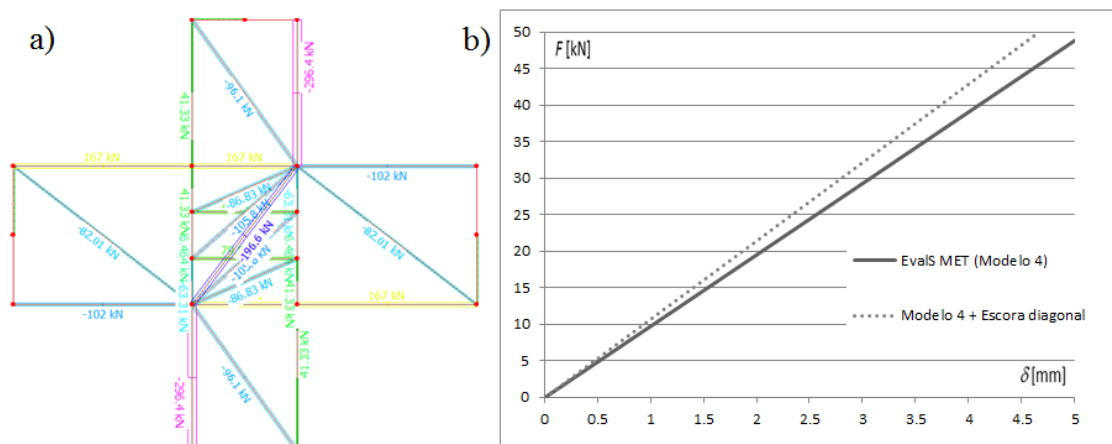


Figura 6.9 - Influência da introdução de uma escora na diagonal principal do módulo da ligação no Modelo 4.

De acordo com o esperado todos os modelos beneficiaram significativamente com a introdução de uma escora diagonal principal do módulo da ligação. Os Modelos 2 e 4 reduziram os seus deslocamentos em cerca de 0.5 mm, enquanto o Modelo 3 perdeu cerca de 1 mm.

6.4 Contribuição das Tensões do Betão nas Armaduras

O betão em contacto com as armaduras de um elemento de betão armado desenvolve tensões que se tornam significativas na avaliação da sua rigidez, tanto em regime elástico linear como em fase fendilhada (*tension-stiffening*).

Tension-stiffening é um fenómeno caracterizado pela contribuição do betão traccionado para a rigidez da zona traccionada de peças de betão armado flectidas ou traccionadas, que é assim superior do que a que se observaria se se considerasse apenas a contribuição dos varões de armadura. Este efeito é exercido pelo betão, sendo que, em fase fendilhada apenas se considera o betão contido entre duas fendas contíguas. Apesar de não alterarem a resistência do elemento, as tensões desenvolvidas pelo betão armado entre fendas, alteram a sua rigidez, uma vez que, a existência de tensões tangenciais de aderência na interacção do betão com a armadura contribui para a mobilização de uma componente longitudinal de tracção no betão envolvente que se opõe conjuntamente com a armadura à deformação longitudinal.

Costa (2013) diz que a contribuição do betão traccionado na armadura de um elemento de betão armado pode ser aproximada à expressão:

$$\Delta N = \Delta \varepsilon_s E_s A_s \quad (21)$$

correspondendo $\Delta \varepsilon_s, E_s, A_s$ à variação na extensão, módulo de elasticidade e área de armadura.

Para quantificar a variação na extensão de um elemento, $\Delta \varepsilon_s$, é necessário conhecer-se vários factores, como a percentagem geométrica de armadura (ρ), o módulo de elasticidade do aço (E_s), assim como o valor médio da tensão de rotura à tracção do betão (f_{ctm}):

$$\Delta \varepsilon_s = 0.4 \frac{f_{ctm}}{E_s \rho} \quad (22)$$

Através das expressões (21) e (22) pode definir-se uma tensão média no betão associada ao *tension-stiffening* de $\sigma_{cm} = \Delta N / A_c$.

Uma hipótese de consideração deste efeito no MET é substituir o acréscimo de tensão proporcionado pelo betão por uma área de armadura equivalente, que tenha em conta a totalidade dos efeitos. Para isso, deverá ser adicionada à armadura existente uma área de, $A_s = \Delta N / \sigma_s$.

O quadro 6.1 mostra a quantidade equivalente de área adicionada à armadura das vigas e dos pilares de modo a contemplar o efeito de *tension-stiffening* para o valor $F = 50$ kN das cargas.

Quadro 6.1 – Acréscimo de área de armadura equivalente

Elemento	f_{ctm} (Mpa)	E_s (Gpa)	ρ	$\Delta \varepsilon_s$ ($\times 10^5$)	ΔN (kN)	σ_s (MPa)	A (cm ²)
Armadura da viga	4.30	200.351	0.328	2.616	12.91	67.80	1.9
Armadura do pilar	4.30	200.521	0.275	3.123	12.91	81.03	1.6

Contudo, o *tension-stiffening* ocorre apenas no betão fendilhado, pelo que, se o objectivo for o estudo do comportamento em regime elástico linear, a interface armadura-betão deve funcionar em simultâneo ao longo de todo o elemento. Neste caso a rigidez de flexão das vigas e dos pilares indicada em 5.2.1, deverá ser considerada na sua totalidade, EI , traduzindo uma configuração intacta de todo o betão.

A Figura 6.10 mostra o desenvolvimento da curva força deslocamento para ambas as situações descritas.

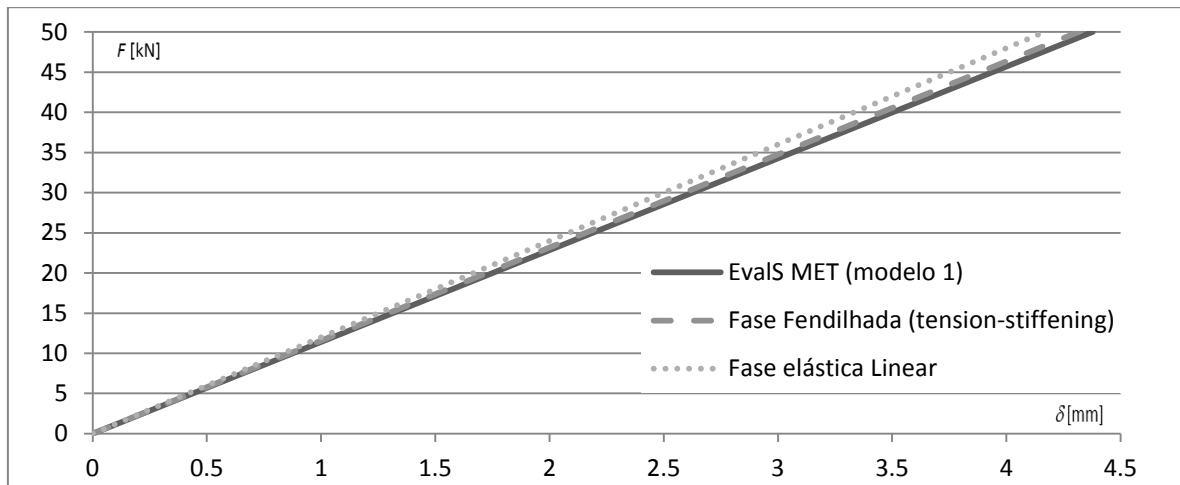


Figura 6.10 – Contribuição das tensões do betão traccionado na rigidez de um elemento.

De acordo com as curvas força-deslocamento ambas as hipóteses testadas introduzem um ganho de rigidez ao modelo, notando-se mais a contribuição em fase elástica linear, como seria expectável. Note-se que a aplicação de cada um destes métodos de optimização é directamente dependente da fase do comportamento do elemento e por isso não devem ser aplicados em simultâneo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 Análise de Resultados e Conclusões

Analisando os resultados da análise efectuada nos Capítulos 5 e 6 é possível tirar ilações importantes acerca do comportamento das ligações viga-pilar e da melhor forma de o simular através da modelação com escoras e tirantes.

Dos resultados obtidos no Capítulo 5, com base no desempenho dos cinco modelos propostos, é possível concluir que, apesar de se poderem considerar várias configurações que obedecem ao sistema de equilíbrio da ligação, nem todas apresentam graus satisfatórios de aproximação aos resultados experimentais. Outra conclusão importante prende-se com a ideia de que, apesar de poder ser benéfico, nem sempre a consideração de modelos hiperestáticos se traduz em melhores resultados. Os Modelos 1 e 5, apresentam na sua configuração uma escora diagonal principal que, conforme foi demonstrado, confere ao modelo uma grande parte da sua rigidez, aproximando-o dos resultados experimentais, sendo que no Modelo 1 a concentração de tensões nesse elemento ditou a rotura da ligação. Os Modelos 2, 3 e 4 modelos, formados por outra disposição de escoras no módulo central da ligação, apresentaram rigidezes tendencialmente inferiores à rigidez obtida pelos ensaios experimentais. No entanto o facto de contemplarem a presença de tirantes representativos de escoras, permitiu que se pudesse considerar um maior número de escoras e com isso reduzir a concentração de tensões em cada elemento. O Modelo 5 combina as duas características apontadas, pelo que, de forma expectável possui os melhores resultados.

Contudo, tratando-se de uma análise elástica linear e sendo objectivo aproximar a curva força-deslocamento do troço em regime elástico da ligação, existe ainda espaço para optimizações. Nesse sentido, no Capítulo 6 mostra que a redução dos módulos periféricos, diminui também o comprimento das escoras e tirantes longitudinais, com tensão constante, neles contidos, reduzindo as diferenças provocadas por se ignorar a variação da tensão normal nos banzos das peças lineares dos modelos. No entanto, o maior benefício na avaliação da rigidez resultou da redução isolada dos módulos superior e inferior da ligação, levando a crer que o facto de serem os elementos com esforços mais elevados, faz com que sejam também os mais influentes.

Foi testado também o efeito de um aumento das escoras diagonais, por se tratarem dos elementos que mais contribuem na rigidez e, quando a rotura é condicionada pelo betão, na resistência do elemento. Mediante o faseamento da análise, observou-se que o acréscimo de rigidez provocado pelo aumento da escora do módulo central é muito superior ao das escoras diagonais dos módulos periféricos em simultâneo, o que reforça novamente o potencial da rigidez deste elemento.

Dado o carácter linear da análise, particularmente importante em condições de serviço, averiguou-se a contribuição do betão traccionado para o acréscimo de rigidez do elemento estrutural em regime elástico linear, considerando o contributo do betão ao longo de toda a peça, e em fase fendilhada, através do *tension-stiffening*. Os benefícios em termos de ganho de rigidez são também significativos em ambas as abordagens, pelo que a sua consideração no regime correto deve ser contemplada.

7.2 Potencial Para Futuros Desenvolvimentos

Como foi possível constatar, a análise das ligações viga-pilar recorrendo a modelos de escoras e tirantes conduz a resultados bastante satisfatórios na simulação do comportamento estrutural daqueles elementos de betão armado.

Nesse sentido a continuação do desenvolvimento de estudos sobre o tema e sua divulgação poderá trazer benefícios ao projectista comum.

Seria interessante a aplicação conjugada dos vários procedimentos delineados no capítulo 6 aos modelos desenvolvidos no capítulo 5, e sua afinação, o que se revelou impossível por limitação de tempo.

É importante tentar avaliar se faz sentido tentar utilizar os mesmos modelos para avaliar a capacidade resistente e o comportamento dos elementos estruturais, ou se estes têm de ser obrigatoriamente distintos, tal como são distintos os objectivos almejados.

Sugere-se que, no futuro, se efectue uma análise semelhante aumentando a amostra, de modo generalizar e validar as conclusões tiradas.

Uma outra proposta consiste no estudo através de uma análise não linear de modelos deste tipo. A utilização de modelos de escoras e tirantes adaptativos no estudo de ligações viga-pilar, especialmente direccionados à análise do comportamento dos elementos estruturais de

betão armado, só não é sugerida porque já está a ser investigada por um dos meus orientadores (M Ferreira).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACI-318 (2002). “Building Code Requirements for Structural Concrete”. Farmington Hills, Michigan.

Bakir, P. G., Boduroglu, H. M. (2006). “Nonlinear analysis of beam-column joints using softened truss model”. *Mechanics Research Communications* vol: 33, Issue: 2. pp 134-147.

CEB-FIP (1993). “Modal Code 1990”. Comité Euro-Internacional du Béton – Fédération Internationale de la Précontrainte, Tomas Telford Services Ltd, Lausanne, Switzerland.

CEN Eurocódigo 2 (2010). “Projecto de Estruturas de Betão – Parte 1-1: Regras Gerais e Regras para Edifícios”. Comité Europeu de Normalização, Bruxelas.

CEN Eurocódigo 8 (2010). “Projecto de Estruturas Para Resistência aos Sismos” – Parte 1: Regras Gerais, Acções Sísmicas e Regras para Edifícios”. Comité Europeu de Normalização, Bruxelas.

Costa R. (2013). “MODELAÇÃO DE LIGAÇÕES VIGA-PILAR NA ANÁLISE DE ESTRUTURAS PORTICADAS PLANAS DE BETÃO ARMADO”, tese de doutoramento, Universidade de Coimbra

Ferreira, M. (2012). “EvalS – Manual do Utilizador”. Edição de Autor.

fib Bulletin 54 (2010). “ Structural Concrete – Textbook on behavior, design and performance”. Vol: 4. Fédération Internationale du Béton. Lausanne, Switzerland.

Hegger, J., A. Sherif e W. Roeser (2003). “Nonseismic design of beam-column joints”. *ACI Structural Journal*, 100(5): 654-664.

Hegger, J., A. Sherif e W. Roeser [2004]. “Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete beam-column connections”. *ACI Structural Journal*, 101(5): 604-614.

Hong, S., Lee, S. (2004). "Strut-and-Tie models for deformation of reinforced concrete beam-column joints dependente on plastic hinge behavior of beams". 13th World Conference on Earthquake Engineering. Vancouver, Canada. Paper no. 1026.

Kupfer, H. (1964). "Expansion of Mörsch's Truss Analogy by Aplication of the Principle of Minimum Strain Energy".CEB-Bulletin 40, Paris, 1964.

Leonhardt, F. e Mönnig, E. (1977). "Construções de Concreto: Princípios Básicos do Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado". Editora Interciência, Rio de Janeiro.

Liang, Q. (2006). "Performance-based optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete beam-column connections". In: 10th East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction: Materials, Experimentation, Maintenance and Rehabilitation (EASEC-10) , 3-5 Aug 2006, Bangkok, Thailand.

Lourenço P. (1992). "Novas Metodologias para o dimensionamento de estruturas de betão armado". Dissertação de Doutoramento. Universidade do Minho.

MacGregor, J. (1992). "Reinforce Concrete – Mechanics and Design". 2nd Edition. Prentice Hall. Englewood Cliffs.

Marti, P. (1991). "Dimensioning and detailing". Proceedings of IABSE Colloquium Structural Concrete, v.62, Stuttgart, p.411-441.

Muttoni A. Schwartz J., Thürlimann B. (2006). "Dimensionamiento y concepción de estructuras en hormigón armado mediante campos de tensiones". IS-BETON, Lausanne, Switzerland.

Nicholas H. T. To, Jason M. Ingham e Sri Sritharan (2003). "Strut-And-Tie Computer Modelling of Reinforced Concrete Bridge Joint Systems". Journal of Earthquake Engineering, 7:3, pp.463-493.

Ortiz, R. (1993). "Strut and tie modeling of reinforced concrete short beams and beam-column joints". PhD Thesis, University of Westminster.

Pimanmas, A., Chaimahawan, P. (2010). "Shear strength of beam-column joint with enlarged joint area". Engineering Structures vol: 32. pp. 2529-2545.

Pinho, M. (1995). “Análise e Síntese de Meios Irregulares de Betão Armado pelo Modelo Escora-Tirante”. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.

Roeser, W. (2002). “Zum tragverhalten von Rahmenknoten aus Stahlbeton”. Lehrstuhl und Institut für MassivBau, RWTH Aachen University. Ph.D. thesis: 176.

Schlaich, J. e Schafer, K. (1987). “Toward a Consistent Design of Structural Concrete”. PCI Journal, v. 32, No. 3.

Schlaich, J. e Schafer, K. (1991). “Design and Detailing of Structural Concrete using Strut-and-Tie Models”. The Structural Engineer, v. 69, No. 6.

Silva, V. (2004). “Mecânica e Resistência dos Materiais”. Editora Zuari, 3ª ed., Coimbra.

Souza, R. (2004). “Concreto Estrutural: Análise e Dimensionamento de Elementos com Descontinuidades”. Dissertação de Doutorado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Sritharan, S. (2005). ”Strut-and-Tie Analysis of Bridge Tee Joints Subjected to Seismic Actions.” Journal of Structural Engineering, 131(9), pp.1321–1333.