

[Technology, like art, is a soaring exercise of the human imagination.]
[Daniel Bell]

À minha família.

Agradecimentos

A realização desta dissertação foi possível graças ao apoio e colaboração de algumas pessoas que marcaram e incentivaram a realidade deste processo e às quais estarei eternamente grata.

Ao Professor Doutor Miguel Oliveira Panão, orientador da dissertação, pelo apoio, pela sua orientação, pelas opiniões e críticas, pela partilha do conhecimento e contributo de valiosas informações. Acima de tudo agradeço pelas palavras de incentivo ao longo da realização de todo o trabalho.

À minha família pelo apoio incondicional, pelas palavras de carinho e incentivo, pelas orações submetidas de vela acesa, pela paciência e contributo nesta jornada, mas principalmente agradeço por sempre acreditarem em mim e nas minhas capacidades.

Aos amigos pela presença nos bons e maus momentos, pelo companheirismo, pela força e pelos sorrisos e gargalhadas que me proporcionaram.

O meu profundo e sentido Obrigado a todas as pessoas que de uma maneira ou de outra contribuíram para a concretização de mais uma etapa marcante da minha vida.

Resumo

Nos dias de hoje é possível observar a utilização de sprays em diversas aplicações, sendo essencial sua caracterização. Um Spray é constituído por gotas de diferentes tamanhos e dependendo dos mecanismos de atomização, pode-se caracterizar um Spray através de ferramentas de estatística. Até então, pouco tem sido desenvolvido quanto à forma de como se caracteriza um spray, sentindo-se a necessidade de inovar, melhorar e reinterpretar as propriedades que definem uma distribuição de Spray. Esta necessidade surge tanto para aferir a quantidade de dados face à informação se extrai dos momentos da distribuição, como para redefinir a forma de pensar a uniformidade de um spray (grau de variedade de tamanhos). Nesta tentativa que desenvolver métodos mais avançados que tenham em conta a distribuição de probabilidade na sua totalidade, em vez de apenas os seus momentos (média, desvio padrão, etc.), tem surgido o contributo de conceitos provenientes da teoria de informação. Neste sentido, foram realizados estudos de carácter computacional, abordando os conceitos de entropia de Shannon e Complexidade, com o objetivo de desenvolver um novo método de análise de forma a reinterpretar as características de um Spray.

Palavras Chave: Spray, Teoria de Informação, Complexidade, Uniformidade

Abstract

Nowadays, it is possible to observe the use of sprays in numerous applications, so it is essential to have their characterization made. A spray is constituted by drops of various sizes, and depending on the atomisation mechanisms we can characterize a spray using statistical tools. Until then, little has been developed as to how it characterizes a spray, feeling the need to innovate, improve and reinterpret the properties that define a distribution of a spray. This need ascends both to assess the quantity of data in relation to information extracted from the distribution moments, as to re-define the way you think the uniformity of a spray (degree of variety of sizes). In this attempt to develop more advanced methods that take into account the probability distribution as a whole, rather than just its moments (average, standard deviation, etc.), there has been the contribution of concepts from information theory. In this way, computational studies were performed to characterize sprays by addressing the Shannon entropy and complexity concepts, with the purpose of developing a new method of analysis in order to re-interpret the characteristics of a Spray.

Keywords: Spray, Information Theory, Complexity, Uniformity

Índice

Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	vii
Nomenclatura	ix
1 Introdução	1
1.1 Estado Atual do Conhecimento	6
1.1.1 Entropia Termodinâmica	6
1.1.2 Entropia de Shannon	6
1.1.3 Complexidade	8
1.1.4 Propriedade extensiva e intensiva da complexidade	11
1.2 Objetivos	12
2 Introdução do Conceito de Complexidade na Caracterização de Sprays	13
2.1 Considerações sobre o Número de Classes na Caracterização de Sprays	13
2.2 Complexidade extensiva e intensiva	15
3 Aplicação da Complexidade como Critério na Caracterização de Sprays	21
3.1 Impacto de um Spray num Disco	21
3.2 Análise da Complexidade Aplicada ao Impacto do Spray num Disco . .	22
3.3 Síntese do Algoritmo da Complexidade	26
4 Conclusões e trabalhos futuro	29

Lista de Figuras

Figura 1.1	Demonstração de um Spray [Adaptado de ILASS-Europe].	1
Figura 1.2	Efeito do número de classes sobre a distribuição discreta do spray.	3
Figura 1.3	Função discreta de probabilidade numérica, correspondente à distribuição numérica $f_0(D)$ [Adaptado de Ashgriz (2011)].	3
Figura 1.4	Entropia de uma variável aleatória associada a casos de probabilidade	7
Figura 1.5	Três comportamentos da complexidade como função da desordem [Adaptado de Shiner (1999)].	10
Figura 2.1	Exemplo de uma distribuição bimodal caracterizada por $N_k = 14$ (\bullet) e aumentando N_k em uma ordem de grandeza para $N_k = 140$ (\circ).	14
Figura 2.2	Exemplo de um ajustamento da simulação de um spray a dados experimentais onde o número de classes é diferente (Befrui <i>et al.</i> , 2016).	14
Figura 2.3	Variação das três formas de quantificar a complexidade com o número de classes.	17
Figura 2.4	Número de classes que maximiza a complexidade segundo diferentes distribuições características para sprays.	18
Figura 3.1	Malha de medidas com o Anemómetro Laser [Retirado de Panão & Moreira (2004)].	22
Figura 3.2	Evolução da Complexidade Normalizada C_n com o número de classes (cima), bem como o número de classes que não contêm qualquer contagem (baixo).	23
Figura 3.3	Evolução da Complexidade Normalizada C_n com o número de classes (cima), bem como o número de classes que não contêm qualquer contagem (baixo).	24

Figura 3.4	Largura de banda das classes para uma correta descrição dos tamanhos das gotas em cada posição r de acordo com o critério da Complexidade definido pela Eqs. (2.6), (2.7) e (3.1).	24
Figura 3.5	Distribuições discretas nas várias posições de medida consideradas.	25
Figura 3.6	Uniformidade do Spray após aplicação do algoritmo da Complexidade que decide o melhor número de classes para representar o perfil radial do spray.	26

Lista de Tabelas

Tabela 1.1	Possíveis comportamentos da complexidade SDL em função dos parâmetros de ordem e desordem	9
Tabela 1.2	Recapitulação dos conceitos abordados em estudo.	12
Tabela 2.1	Funções de distribuição cumulativas e gama de parâmetros. . .	17

Nomenclatura

C	Complexidade
C_n	Complexidade normalizada
D	Desiquilíbrio
d_m	Diâmetro característico [μm]
H	Entropia de Shannon [$bits$]
H_n	Entropia de Shannon normalizada
J	Séries de Fibonnaci Entrelaçadas
LMC	López-Ruiz-Mancini-Calbet
LN	Normal-Logaritmica
N	Número da amostra
N_k	Número de classes
p	Probabilidade
PDF	Função de densidade de probabilidade
q	Parametro ajustável
r	Posição radial
S	Entropia
SDL	Shiner-Davison-Landsberg
w_1	Parâmetro ajustável
w_2	Parâmetro ajustável

Símbolos gregos

α	Parâmetro de desordem
β	Parâmetro de ordem
$\Gamma_{\alpha\beta}$	Complexidade SDL

γ	Desvio padrão geométrico
Δ	Desordem
δD	Intervalo de diâmetros
Ω	Ordem

Subscritos

ext	extensivo
max	Máximo
min	Mínimo
woot	Wootters
n	normalizada

1 Introdução

A palavra *spray* de origem inglesa significa "pulverizar ou borrifar". Assim sendo, um spray é constituído por um conjunto de gotas, com diversos tamanhos, e esses dependem de vários mecanismos de atomização que envolvem forças de inércia que promovem a desintegração e as de tensão superficial e viscosas que a mitigam. Os sprays são usados em diversas aplicações desde a indústria farmacêutica, química, alimentar, cerâmica, fazendo já parte do quotidiano do ser humano. Podem ser utilizados tanto em sistemas de climatização, usando vaporização de partículas de água, como em pequenos utensílios do dia-a-dia como um desodorizante ou um perfume.

A sua produção, independentemente da aplicação, terá sempre o mesmo princípio. Uma vez que o líquido seja injetado para o ambiente circundante, existe um equilíbrio entre as forças de inércia associadas à pressão exercida na fronteira exterior do líquido, e as forças de tensão superficial associadas à pressão no interior do líquido. Quando as forças de inércia superam as de tensão superficial, o líquido desintegra-se em ligamentos e estes em gotas, no sentido de encontrar um novo equilíbrio.



Figura 1.1: Demonstração de um Spray [Adaptado de ILASS-Europe].

Um dos aspetos mais importantes após a produção do spray é saber o tamanho e velocidade das gotas. Para isso podem usar-se técnica de diagnósticos não intrusivas baseadas na análise de imagem e de interferometria laser. A forma de apresentar

essas medidas é essencialmente estatística. Assim, usualmente a descrição de um spray envolve sempre a produção de distribuições discretas de densidade de probabilidade, as partir das quais se obtêm quantidades médias e momentos de ordem superior para dar uma indicação da polidispersão de tamanhos, assimetria nessa distribuição e grau de uniformidade.

Enquanto que muito tem sido feito para desenvolver cada vez mais as técnicas de diagnóstico para caracterizar sprays, de modo a aumentar a precisão nessas medidas, pouco tem sido desenvolvido no âmbito da forma de caracterização propriamente dita. Como foi mencionado anteriormente, caracterizar um spray é obter distribuições de tamanho e velocidade das gotas que o constituem, mas quais os princípios para essa construção? Qual o número de classes que deve ser escolhido para representar a distribuição de um spray? Quando se comparam distribuições, há requisitos? Por exemplo, em relação ao número de classes (N_k), suponhamos que um spray foi caracterizado com um instrumento de medida que possui uma precisão infinita e obtiveram-se $N = 10000$ medidas de tamanhos de gotas. Os limites de representação são $N_k = 1$ e $N_k = 10000$. Não há muitos critérios disponíveis na literatura para a escolha do número de classes. Caso se aplique o princípio útil de que $2^{N_k} \geq N$ o número mínimo de classes corresponderia a $N_k = 14$. Uma outra abordagem que se encontra em Chang *et al.* (1991), desenvolvida depois por Aldana (2005), e aplicada a sprays por Panão & Moreira (2008), usando séries de Fibonacci interlaçadas, resultaria em $N_k = 115$ com 6 séries. O resultado está representado na Fig. 1.5 e a probabilidade cumpre a regra $\sum_i p_i = 1$. O eixo das ordenadas está em escala logarítmica devido às diferenças na ordem de grandeza dos valores.

Como seria de esperar, se todas as gotas estão dentro da mesma classe a probabilidade desse acontecimento é igual à unidade. Para um número mínimo, $N_k = 14$, a probabilidade atribuída a cada classe é, obviamente, menor, e conforme aumentamos esse número, incluindo o caso de $N_k = 115$, observa-se cada vez mais a presença de classes com muitas gotas e outras com muito menos, ou nenhuma, daí que a dispersão de valores comece por ser bastante elevada para $N_k > 1000$. Assim, os critérios de $N_k \geq \log_2(N)$, bem como o das série de Fibonacci interlaçadas, são manifestamente insuficientes.

A caracterização de um spray é feita dividindo as gotas de determinado spray

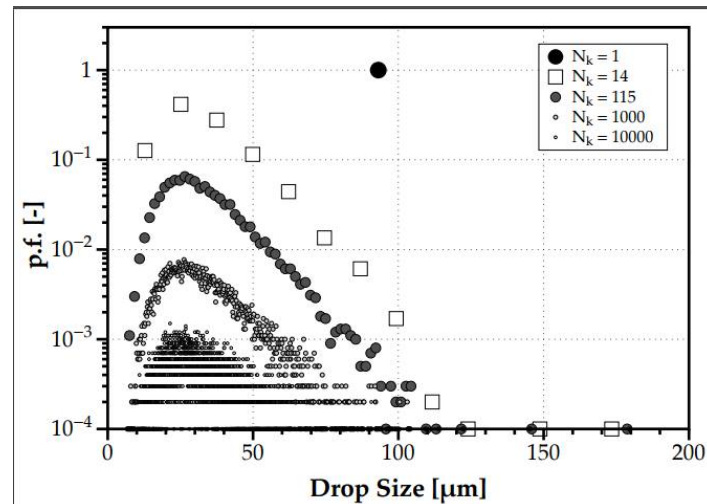


Figura 1.2: Efeito do número de classes sobre a distribuição discreta do spray.

em classes, onde cada classe corresponde a uma gama de diâmetros de gotas, $[D - \delta D/2; D + \delta D/2]$. Desta forma é possível elaborar um histograma de frequência de ocorrência de tamanhos de gotas, contando o número destas em cada classe. A versão contínua do histograma é a função de densidade de probabilidade (PDF - *Probability Density Function*) do tamanho de gota, correspondendo a uma distribuição numérica, $f_0(D)$, (Fig. 1.3. No entanto, a distribuição numérica não é o único tipo de PDF. As distribuições podem ser também ponderadas pela área e volume (Sowa, 1992).

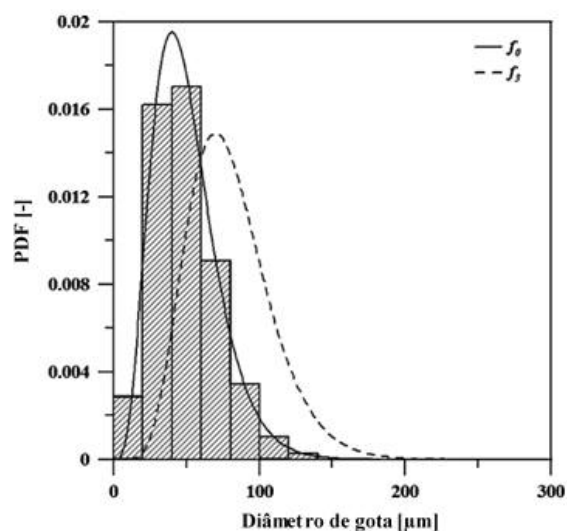


Figura 1.3: Função discreta de probabilidade numérica, correspondente à distribuição numérica $f_0(D)$ [Adaptado de Ashgriz (2011)].

Actualmente existem três métodos usados para descrever o tamanho de gota: o

método empírico, o método de função de probabilidade discreta (DPF - *Discrete Probability Function*) e o método de máxima entropia (ME - *Maximum Entropy*).

O método empírico é utilizado quando as distribuições de tamanho gotas são geralmente determinadas pelo ajuste dos dados experimentais a funções matemáticas pré-determinadas. Os problemas surgem quando se extrapola para regimes fora da faixa do domínio de validação. Para superar este problema surgem as propostas de duas abordagens analíticas, DPF e ME. Na caracterização de sprays, muita da atenção está focada em distribuições comumente usadas numa aproximação do modelo a resultados experimentais como as de Rosin-Ramler, Weibull, Normal-Logarítmica e Nukiyama-Tanasawa (Lefebvre, 1989). Porém, quando as distribuições são multimodais, recorre-se, usualmente, a misturas finitas de funções matemáticas de densidade de probabilidade, $f(\tilde{x})$,

$$f(\tilde{x}) = \sum_i w_i f_i(\tilde{x})$$

em que \tilde{x} corresponde aos parâmetros característicos da função. Embora esta ferramenta seja usada com distribuições Normais para reconstruir distribuições de densidade de probabilidade Shrimpton *et al.* (2014), com o algoritmo adequado, pode ser aplicada usando outras distribuições. Panão & Radu (2013) aplicaram esta técnica a sprays e uma das vantagens apontada pelos autores é permitir identificar grupos de gotas com características semelhantes, tornando-se uma ferramenta que aumenta a precisão na descrição e melhora a interpretação física dos mecanismos de atomização (ver também Pan (2013)).

O método DPF assume que um spray é formado por uma combinação de processos aleatórios e não-aleatórios. Uma análise da instabilidade é usada para descrever desintegração primária, exclusivamente determinada para um dado conjunto de condições iniciais e um modelo do mecanismo hidrodinâmico de atomização. Este método tenta superar as dificuldades encontradas no método da máxima entropia, descrevendo matematicamente os detalhes do processo de desintegração, e introduz efeitos probabilísticos para dar uma explicação à aleatoriedade inerente. No entanto, este método não pode ser validado devido às dificuldades em obter dados experimentais (Babinsky & Sojka, 2002).

O método da ME pressupõe que a formação de um spray é um processo aleatório que pode ser descrito por um modelo matemático usando como critério de decisão o

princípio da maximização de entropia sujeito a um conjunto de restrições globais. É um método de inferência baseado nos estágios iniciais e finais do processo, ou seja, com um conjunto limitado de informações.

O Princípio da Máxima Entropia, proveniente da Teoria da Informação, determina a distribuição matemática estatística que mais se aproxima dos resultados experimentais. Este princípio tem algum interesse uma vez que recorre a princípios físicos de conservação de massa, momento e energia para o efeito (Dumouchel, 2009).

A base do formalismo associado a este princípio afirma que a distribuição de probabilidade mais provável, p_i , ou com o menor desvio da original possível, é aquela que satisfaz um conjunto de constrangimentos. Esses expressam características conhecidas da distribuição e o critério que permite a escolha da distribuição é a que maximiza o valor da sua entropia de informação H , definida como

$$H = -k \sum_i p_i \ln(p_i) \quad (1.1)$$

em que k é uma constante. Esta formulação vem do trabalho de Claude Shannon (Shannon, 1948) e uma revisão deste formalismo aplicado a sprays encontra-se em Dumouchel (2009).

Embora, o princípio da máxima entropia seja a ferramenta com maior expressividade na literatura quando se aplica a Teoria de Informação à caracterização de sprays, recentemente, explorou-se o seu potencial na própria interpretação física, nomeadamente, no fator de dispersão (*Relative Span*, Δ). Por exemplo, Panão (2016) propôs a entropia de informação como um parâmetro mais fiável para medir o grau de uniformidade de um spray que mede a variabilidade de tamanhos de um spray. Isto significa que parâmetros associados à teoria de informação possuem potencial interpretativo em relação à ciência de sprays, como acontece com os momentos de uma distribuição (D_{10}, D_{30}, D_{32} , etc., ver Sowa (1992)).

Embora, o conceito mais utilizado seja a entropia de Shannon definida pela Eq. (1.1), existe um outro conceito que será considerado neste trabalho, a complexidade. Em termo gerais, enquanto o conceito de Informação está mais associado a uma incerteza e a aleatoriedade de um sistema, a complexidade está mais associada à existência de estrutura e ao grau de ordenação dos componentes de um sistema. A secção seguinte explora em maior detalhe cada um destes conceitos.

1.1. Estado Atual do Conhecimento

1.1.1. Entropia Termodinâmica

A entropia (S) é um conceito termodinâmico definido como a medida de desordem das partículas de um sistema. Foi introduzida em 1865, por Rudolf Clausius, e deu origem à 2ª Lei da Termodinâmica. A formulação física do conceito emerge, posteriormente, com Ludwig Boltzmann expressando-o como o logaritmo natural do número de configurações microscópicas igualmente prováveis, multiplicado por uma constante (k),

$$S = k \ln W \quad (1.2)$$

A entropia, S , de um sistema fechado cresce proporcionalmente ao número de arranjos possíveis para os elementos do sistema, W . A entropia de um sistema num estado ordenado é menor do que a de um sistema desordenado, sendo este último o estado mais provável. Posteriormente, este conceito entropia volta a ser reinterpretado por Claude Shannon dando origem à Teoria de Informação.

1.1.2. Entropia de Shannon

O conceito de informação, H , é muito amplo e de difícil definição, ao que C. Shannon propôs uma definição matemática de informação. Segundo Shannon (1948), a *entropia de informação* é uma medida de incerteza que quantifica o valor esperado de informação contida numa mensagem. Quanto menor for o valor de H , maior é a probabilidade de se saber o resultado de um evento, antes da sua ocorrência. A sua formulação, expressa na eq. (1.1.2) é semelhante à de Boltzmann e daí a associação ao nome: entropia.

Uma vez que se refere a informação no seu sentido mais básico, o resultado de H é dado em bits, onde o log é tomado na base 2, sendo o mais comum em teoria de informação. Assim sendo, o bit, neste contexto, é definido como uma unidade de medida de incerteza. A entropia de Shannon pode também ser normalizada pela entropia de máxima informação, correspondendo à equiprobabilidade de um sistema isolado em equilíbrio, de tal modo que $p_i = \frac{1}{N}$ para i , entre os seus estados acessíveis, e é dado por,

$$H_{max} = \ln(N) \quad (1.3)$$

O valor da entropia é nulo quando $p = 0$ (apesar de conter na sua formulação um logaritmo natural) ou $p = 1$, significando o conhecimento absoluto da informação sem qualquer incerteza associada. Portanto, quanto mais próximo estiver a entropia de zero, menor será o seu grau de incerteza. Por outro lado, a incerteza será máxima quando associada ao valor máximo da entropia.

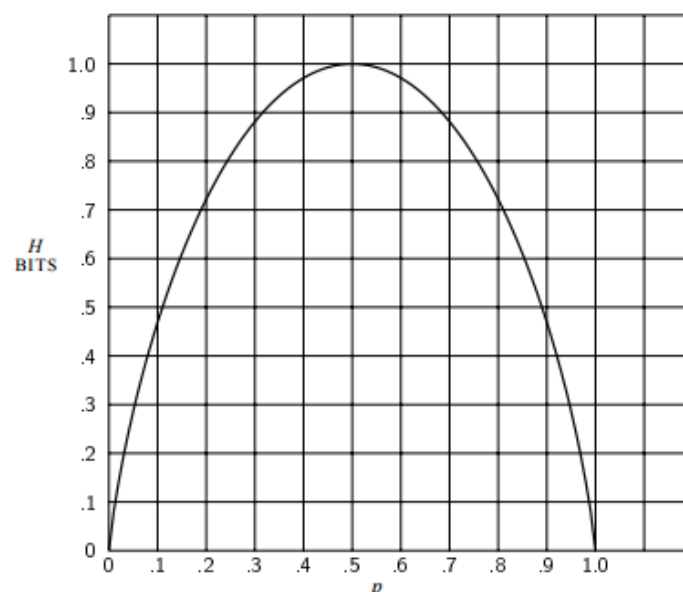


Figura 1.4: Entropia de uma variável aleatória associada a casos de probabilidade [Adaptado de Shannon (1948)].

Apesar de ter sido aplicada inicialmente à informação em bits, atualmente, a entropia de informação tem utilidade numa vasta gama de aplicações, principalmente no que diz respeito à compreensão de dados estatísticos. Inclusive, em técnicas de diagnóstico laser, onde as medidas se exprimem usualmente através de distribuições estatísticas, a teoria de informação permite a melhoria da eficiência com que são realizadas (Panão, 2012).

Porém, associado também à teoria de informação está o conceito de complexidade, como forma de expressar a existência de estrutura em fenômenos de natureza estatística. No caso do presente trabalho, importa focar na forma de a quantificar se é que pretende explorar o conceito do ponto de vista da caracterização de sprays.

1.1.3. Complexidade

Na literatura são apresentadas diferentes formas de quantificar a complexidade. E como foi já referido, a complexidade está associada ao conceito de estrutura.

Para compreender este conceito considere-se um sistema isolado de um gás ideal e um cristal perfeito como exemplos de complexidade mínima. Um cristal perfeito apresenta os seus átomos arranjados e ordenados, já o sistema isolado de gás ideal é uma representação de desordem total. A informação necessária para descrever o cristal é mínima enquanto que para descrever o gás ideal é máxima. Assim sendo, estes dois cenários extremos constituem a escala de ordem e informação, levando a que o conceito de complexidade não deva ser apenas em função da ordem e da informação (López-Ruiz *et al.*, 1995).

Existem duas propostas para quantificar a complexidade recorrendo ao conceito de entropia de informação, e que a consideram como uma medida estatística.

Complexidade SDL

A complexidade SDL (Shiver-Davison-Landsberg) é expressa em termos da desordem de um sistema. Esta medida considera que a complexidade aumenta em função do aumento da desordem do sistema.

Por norma, a entropia é associada a uma medida da desordem de um sistema, o que indica que, se o número de estados de uma sistema aumenta, a entropia e, consequentemente, a desordem, também aumentam. Sabe-se desta forma que o crescimento da complexidade é indesejável (Shiner, 1999). Desta forma para a medida de complexidade SDL a desordem é definida como:

$$\Delta = \frac{S}{S_{max}} \quad (1.4)$$

onde S é a entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon (Shannon, 1948), e S_{max} corresponde ao seu valor máximo. Esta definição de desordem assenta nos limites de $0 \leq \Delta \leq 1$, admitindo que para um sistema totalmente organizado a desordem é nula, assumindo o valor máximo para um sistema totalmente desorganizado. Devido a não extensividade de Δ , S pode ser substituída pela entropia de Shannon:

$$S = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \quad (1.5)$$

onde N é o número de estados possíveis e p_i é a probabilidade de ocorrência do i -ésimo estado. Dada a normalização de Δ para atingir a não extensividade, pode-se definir ordem como:

$$\Omega = 1 - \Delta \quad (1.6)$$

Após esta definição é notório que para $\Omega = 1$ corresponde a um sistema perfeitamente ordenado e previsível, e que $\Omega = 0$ corresponde a um sistema desordenado com uma completa aleatoriedade. Assim, definiu-se que a complexidade SDL é uma medida dependente da ordem e da desordem e expressa por:

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \Delta^\alpha \Omega^\beta \quad (1.7)$$

em que α e β correspondem aos parâmetros de medida que controlam a importância da desordem e da ordem respectivamente. De acordo com estes dois parâmetros é possível, através da medida SDL, expressar três categorias de medidas de Complexidade, representado na tabela 1.1 e Fig. ??(Shiner, 1999).

Tabela 1.1: Possíveis comportamentos da complexidade SDL em função dos parâmetros de ordem e desordem

Tipo	α	β	Comportamento $\Gamma_{\alpha\beta}$	Complexidade
I	< 0	$= 0$	monotonicamente crescente	Algorítmica
II	< 0	< 0	convexa	Profundidade termodinâmica
III	$= 0$	< 0	monotonicamente decrescente	Sistemas Auto-organizados

Em suma, analisando a eq. (1.6) percebe-se que a ordem do sistema é uma medida da distância que esse tem do equilíbrio. Se a complexidade deixar de existir para sistemas em equilíbrio implicará máxima desordem. Por outro lado, se o sistema for ordenado indica uma máxima distância do equilíbrio,(ver também (Kyrkou, 2007)).

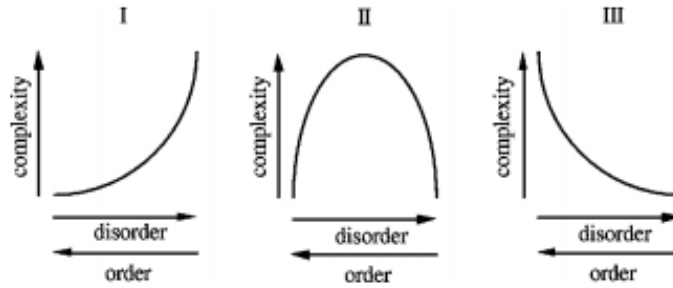


Figura 1.5: Três comportamentos da complexidade como função da desordem [Adaptado de Shiner (1999)].

Complexidade LMC

Através da observação do comportamento e estrutura de um cristal e de um gás ideal, López-Ruiz, Mancini e Calbet (LMC) definiram a complexidade como a interação da informação armazenada no sistema e o desequilíbrio (López-Ruiz *et al.*, 1995).

O desequilíbrio, D , é definido como a distância entre uma distribuição de probabilidade e a distribuição equiprovável dos estados acessíveis do sistema. Este atinge um mínimo no caso de um gás ideal e um máximo para o cristal perfeito, o que indica que esta medida não possa ser diretamente associada à complexidade LMC (López-Ruiz *et al.*, 1995). O desequilíbrio corresponde à distância que a distribuição de probabilidade tem da equiprobabilidade ($1/N$), sendo dado por:

$$D = \sum_{i=1}^N \left(p_i - \frac{1}{N} \right)^2 \quad (1.8)$$

Como a equiprobabilidade está associada ao equilíbrio, se uma distribuição é uniforme, ou seja, cada classe das N possíveis tem uma probabilidade de ocorrência de $1/N$, o desequilíbrio é nulo. Pelo contrário, se há apenas uma solução possível no meu sistema, de tal modo que $p_i = 1$, o desequilíbrio é máximo, isto é, o meu sistema está enviesado para um determinada solução.

Em síntese, um sistema muito ordenado, ou muito desordenado, é um sistema sem complexidade, logo, ao quantificá-la, o seu valor deveria ser nulo. Nesse sentido, López-Ruiz *et al.* (1995) definiram a complexidade LMC não normalizada como o produto da entropia de informação com o desequilíbrio,

$$C = HD = -k \sum_{i=1}^N p_i \ln(p_i) \sum_{i=1}^N \left(p_i - \frac{1}{N} \right)^2 \quad (1.9)$$

Este produto quantifica a complexidade e possui um máximo entre os dois extremos. No entanto a complexidade também depende da escala. Cada escala de observação de um novo conjunto de dados tem a sua distribuição de probabilidades levando a uma mudança da complexidade correspondente a cada escala.

1.1.4. Propriedade extensiva e intensiva da complexidade

A dependência da massa numa amostra pode ser considerada como um dos critérios para classificar as propriedades físicas de determinada matéria. Estas são divididas em dois tipos de propriedades: as propriedades extensivas e as propriedades intensivas. As propriedades extensivas são definidas como aquelas que dependem da massa da amostra, como por exemplo a massa, o volume, energia e entropia. Por outro lado, as propriedades intensivas são aquelas que não dependem da massa da amostra, tendo como principais propriedades: a densidade, a pressão, o ponto de ebulição e fusão. A complexidade pode ser avaliada como medida extensiva ou intensiva, onde ambas terão as suas áreas de validação. A medida de complexidade LMC introduzida por Lopez-Ruiz satisfaz as condições limites dos extremos ordenados e desordenados. Assim sendo, Feldman & Crutchfield (1998) analisaram algumas das características da complexidade LMC e verificaram que esta não é uma variável extensiva nem intensiva, pelo que propôs uma alteração da complexidade LMC que a torna extensiva. A entropia de Shannon é uma medida extensiva o que possibilita caracterizar a aleatoriedade da variável no sistema. Uma vez que o desequilíbrio não tem um comportamento de uma propriedade extensiva, não há circunstância em que este cresça linearmente com o comprimento do sistema. Pode-se demonstrar que o desequilíbrio desaparece exponencialmente com o aumento do tamanho do sistema para uma grande classe de sistemas. Estes aspectos serão abordados em maior detalhe no próximo capítulo.

Todos os conceitos aqui abordados tem directa ou indirectamente importância para o estudo aqui apresentado, pelo que se resume todos os conceitos na seguinte tabela 1.2 que são o contributo para a caracterização da complexidade.

Tabela 1.2: Recapitulação dos conceitos abordados em estudo.

Medida	Formulação
1.Entropia de Shannon	$H = -k \sum_i p_i \ln(p_i)$
2.Entropia Normalizada	$H_n \equiv \Delta = \frac{H}{H_{max}}$
3.Complexidade SDL	$\Gamma_{\alpha\beta} = \Delta^\alpha \Omega^\beta$
4.Desequilíbrio	$D = \sum_{i=1}^N (p_i - \frac{1}{N})^2$
5.Complexidade LMC	$C = H \times D$

1.2. Objetivos

A questão de investigação abordada nesta dissertação é a seguinte:

- Existe potencial no desenvolvimento de novos métodos de análise de caracterização de sprays envolvendo os conceitos de entropia de Shannon e Complexidade?

Para responder a esta questão, o primeiro objetivo consiste em introduzir o conceito de complexidade relativamente a um spray, analisando o seu comportamento e os seus parâmetros de influência. Um segundo objetivo, pela primeira vez, será aplicar este conceito para desenvolver um critério de decisão sobre o número de classes em distribuições de sprays considerando os diversos tipos de distribuições associadas a sprays. Por fim, a ferramenta aqui desenvolvida com base na complexidade é aplicada a dados experimentais do impacto de um spray num disco.

2 Introdução do Conceito de Complexidade na Caracterização de Sprays

A complexidade é um conceito que na teoria de informação está associada a estrutura. Por outro lado, a aplicação da teoria da informação a sprays está particularmente focada na sua caracterização. De certo modo, quando se procura descrever um spray através de um histograma, confere-se alguma estrutura à sua caracterização. Essa estrutura está essencialmente ligada ao número de classes usadas. Na introdução desta tese mostrou-se já o efeito que a escolha do número de classes tem sobre a descrição de um spray. Aqui podemos explorar um detalhe que mostra a importância dessa escolha.

2.1. Considerações sobre o Número de Classes na Caracterização de Sprays

Consideremos uma mistura de duas distribuições Normal-Logarítmica (LN - *Log-Normal*)

$$f(d) = w_1 f_{LN}(\mu_1, \gamma_1) + w_2 f_{LN}(\mu_2, \gamma_2)$$

com diâmetros característicos de $\mu_1 = 10\mu m$ e $\mu_2 = 70\mu m$, desvio padrão geométrico de $\gamma_1 = 1/\sqrt{6}$ e $\gamma_2 = 0.9/\sqrt{6}$, respetivamente. Os pesos de cada distribuição na mistura são de $w_1 = 0.1$ e $w_2 = 0.9$. Na simulação produzem-se no total 10000 gotas cujos tamanhos estão distribuídos por esta mistura. Assim, pela regra 2^k , o número mínimo de classes para representar esta distribuição é $N_k \approx 14$. Porém, como ilustrado na Fig. 2.1, ao representar o spray com esse número não é possível perceber que se trata de uma distribuição bimodal, como se nota quando se aumenta N_k em uma ordem de grandeza. Por outro lado, este exemplo mostra também que se não soubéssemos à partida que se trata do mesmo spray em cada um dos histogramas, poderíamos ser induzidos a pensar que se tratariam de sprays diferentes.

Por vezes encontra-se na literatura comparações entre distribuições obtidas experimentalmente e obtidas por simulação, como se o ajuste fosse adequado, quando, no

fundo, é um *tunning* ao número de classes que permite esse ajustamento (ver Fig. 2.2). A ideia subjacente a esta observação não é para evidenciar que os resultados reportados na literatura estão incorrectos, mas antes chamar a atenção para a importância deste aspeto, e da necessidade de haver critérios, quando se procura descrever sprays através de histogramas.

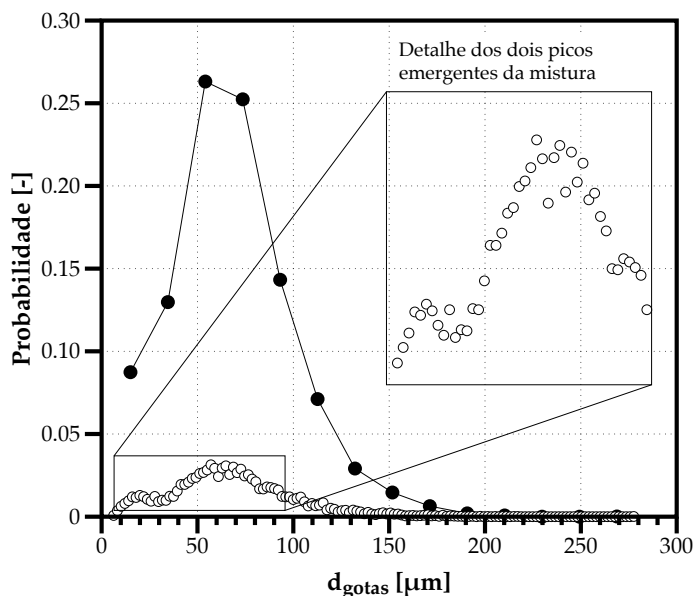


Figura 2.1: Exemplo de uma distribuição bimodal caracterizada por $N_k = 14$ (●) e aumentando N_k em uma ordem de grandeza para $N_k = 140$ (○).

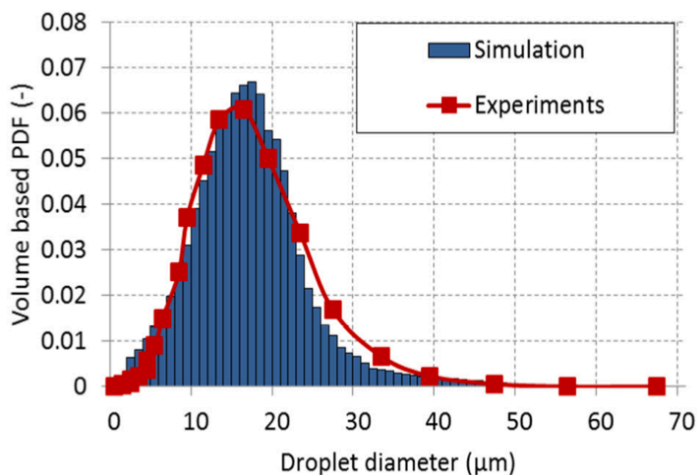


Figura 2.2: Exemplo de um ajustamento da simulação de um spray a dados experimentais onde o número de classes é diferente (Befrui *et al.*, 2016).

Neste capítulo, o estudo realizado pretende introduzir o conceito de complexidade

na caracterização de sprays, e como esse está relacionado com *estrutura*, a primeira abordagem será no efeito que o número de classes tem sobre este parâmetro.

2.2. Complexidade extensiva e intensiva

A complexidade é quantificada como o produto da entropia de informação H e do desequilíbrio D . No presente trabalho, a entropia de informação usada no cálculo da complexidade será a normalizada pela entropia máxima, logo, também a complexidade é normalizada. Como se pode observar na Fig. 2.1, aumentar o número de classes, considerando que $\sum_i p_i = 1$, implica necessariamente que o tamanho do intervalo de diâmetros em cada classe é cada vez menor, bem como, a probabilidade de ocorrência associada. Daí os menores valores de p_i obtidos com $N_k = 140$ em relação a $N_k = 14$. Em termos de distribuição há uma aproximação à equiprovável, ou uniforme em que $p_i = 1/N_{gotas}$, logo, a entropia de informação de Shannon H aumentará. Assim, a influência do número de classes estará essencialmente no desequilíbrio D .

Foram abordadas diferentes formas para este cálculo:

- Proposta de López-Ruiz *et al.* (1995) (LMC) considerando o desequilíbrio como formulação não extensiva:

$$D = \sum_{i=1}^{N_k} \left(p_i - \frac{1}{N_k} \right)^2 \quad (2.1)$$

- Proposta de Feldman & Crutchfield (1998), como tentativa de reparação da não extensividade do desequilíbrio na formulação LMC:

$$D_{ext} = (1 - H_n) \ln(N_k) \quad (2.2)$$

- Proposta de Martin *et al.* (2003), onde considera o desequilíbrio com base na distância entre duas distribuições no espaço de probabilidade, sendo nula quando essas coincidem e $\frac{\pi}{2}$ quando o afastamento é máximo:

$$D_{woot} = \frac{1}{\cos^{-1} \left(\left[\frac{1}{N_k} \right]^{\frac{1}{2}} \right)} \cos^{-1} \left(\sum_{k=1}^{N_k} [p_k]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{N_k} \right]^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.3)$$

No caso da proposta de Feldman & Crutchfield (1998), para o cálculo da informação, foi utilizada a definição de entropia de Shannon normalizada, ou seja, dividindo a entropia de informação de Shannon dada pela Eq. (1.1) pelo valor máximo possível, que depende do número de classes e é dada pela Eq. (1.3). Assim,

$$H_n = \frac{H}{H_{max}} \quad (2.4)$$

Em relação ao número de classes, N_k , uma outra opção que se encontra na literatura foi proposta Chang *et al.* (1991) a utilização de séries de fibonacci como uma maneira fiável de cálculo para o número de classes. Como esta série se move para um grande número foi definido a relação entre as classes consecutivas como $0.5 \times (\sqrt{5} + 1) \approx 1.618$. Segundo Aldana (2005), as séries de fibonacci entrelaçadas, J , foram utilizadas para produzir uma malha mais fina na distribuição de probabilidade discreta de tamanhos de gota, de tal modo que o número de classes de tamanho pudesse ser obtido pela relação,

$$N_k = J \frac{\ln(N)}{\ln(1.618)} \quad (2.5)$$

em que N corresponde ao número de gotas. Ainda de acordo com Aldana (2005), $J = 6$ séries de fibonacci entrelaçadas fornecem uma excelente ferramenta para estimar o número de classes, mas como se viu no exemplo dado na introdução desta dissertação, alguma dispersão de valores emerge para as classes correspondentes a maiores diâmetros.

De modo a aferir o efeito que o número de classes exerce sobre os valores da complexidade em distribuições de tamanhos de gotas num spray, foram consideradas diferentes funções de distribuição de probabilidade tipicamente associadas a sprays.

A metodologia consiste em simular sprays de acordo com essas distribuições, numa variada gama de valores para os parâmetros característicos, e observar o comportamento da complexidade com o número de classes. As simulações consistem em gerar N valores entre 0 e 1, e extrair, para cada valor, o diâmetro correspondente a partir da distribuição cumulativa. A Tabela 2.1 sintetiza as distribuições consideradas.

Recorrendo a um algoritmo desenvolvido em *Matlab* geram-se 50 amostras para cada distribuição cujo valor varia de 1000 até 10000 gotas com um diâmetro característico $d_{med} = \{20, 50, 100, 500\}$ obtendo-se para cada simulação o valor da complexidade

Tabela 2.1: Funções de distribuição cumulativas e gama de parâmetros.

Função de distribuição	Função de distribuição cumulativa	Gama caracteristica
Log-normal	$\frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln\left(\frac{d}{d_g}\right)}{\sqrt{2}\gamma} \right) \right)$	$\gamma \in [0.5/\sqrt{6}; 1.8/\sqrt{6}]$
Nukiyama-Tanasawa	$1 - \frac{\Gamma(3q^{-1}, (d \cdot d_m^{-1})^q)}{\Gamma(3q^{-1})}$	$q \in [1; 3]$
Weibull	$1 - \exp\left(-\left(\frac{d \cdot d_m^{-1}}{\omega_2}\right)^{\omega_1}\right)$	$\omega_1 \in [1.5; 3]$ $\omega_2 \in [0.5, 0.75, 1]$
Rosin-Ramler	$1 - \exp\left[-\left(\frac{d}{d_m}\right)^q\right]$	$q \in [1.5; 3]$

para as três formas definidas anteriormente.

Para isso utilizou-se o método de cálculo apresentado na secção 2.2, sendo possível obter três diferentes formas de quantificar a complexidade. Os resultados obtidos para todas as distribuições consideradas apresentam o mesmo comportamento, pelo que se apresenta aqui apenas um exemplo para uma distribuição Normal Logarítmica com diâmetro característico de $50\mu m$ e desvio padrão geométrico de $\gamma = 1/\sqrt{6}$ e uma amostra de 2000 gotas.

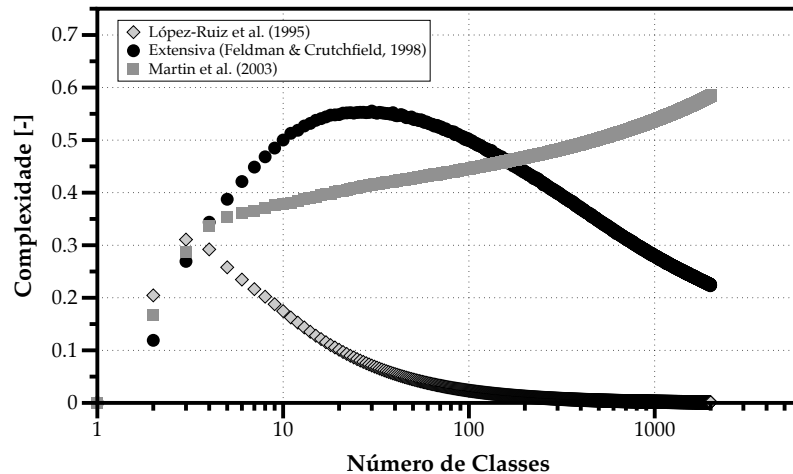


Figura 2.3: Variação das três formas de quantificar a complexidade com o número de classes.

Na Fig. 2.3 observa-se que a complexidade não extensiva (LMC) e a Extensiva produzem um máximo, o que é relevante do ponto de vista de estabelecer um critério. Pelo contrário, a formulação de Martin *et al.* (2003) possui um comportamento monotónico, logo, não parece ser uma opção viável. De entre as duas restantes, caso se usasse a

regra de 2^k , o número mínimo de classes, para 2000 gotas, seria $N_k = 11$. Logo, apenas a complexidade extensiva possui o seu máximo acima desse valor. Neste sentido, a formulação que se apresenta como mais adequada para estabelecer um critério é a de Feldman & Crutchfield (1998).

Após adquiridos todos as classes que maximizam a complexidade é possível analisar a complexidade de forma a poder-se caminhar em direção à escolha no número de classes adequado. A Fig. 2.4, representa o número de classes que maximizam a complexidade segundo quatro diferentes distribuições típicas utilizadas para descrever sprays, de acordo com as bases do critério de escolha de classes proposto. A gama de valores obtidos são maiores que o mínimo sugerido pela regra 2^k , verificando-a.

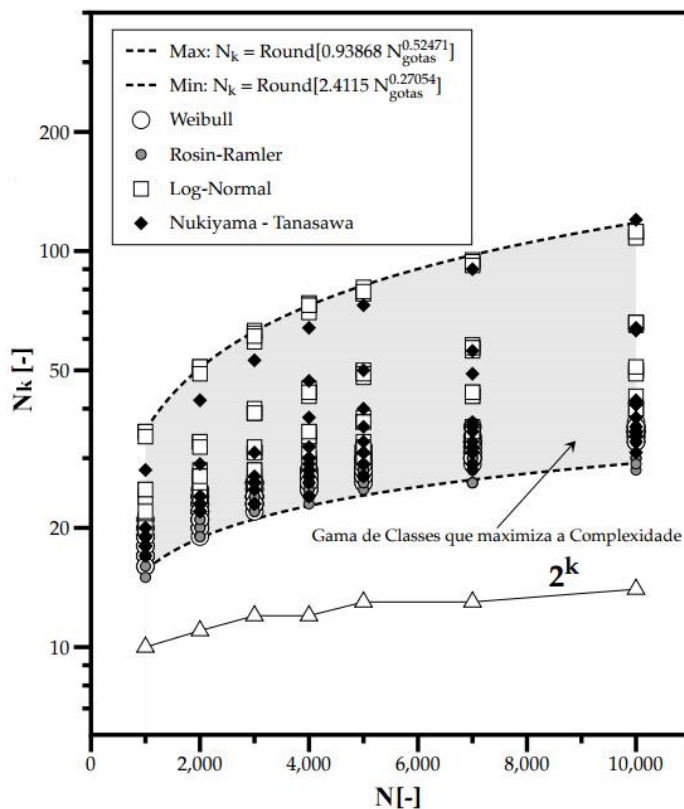


Figura 2.4: Número de classes que maximiza a complexidade segundo diferentes distribuições características para sprays.

Os resultados apontam para a existência de uma gama de número de classes N_k em que a complexidade é máxima, limitados por duas funções empíricas,

$$N_k^{max} = \text{Round} [0.94N^{0.525}] \quad (2.6)$$

$$N_k^{min} = \text{Round} [2.41N^{0.270}] \quad (2.7)$$

Este resultado será aplicado no próximo capítulo a dados experimentais para o tamanho de gotas no impacto de um spray sobre um disco.

3 Aplicação da Complexidade como Critério na Caracterização de Sprays

3.1. Impacto de um Spray num Disco

Neste capítulo, os conceitos anteriormente introduzidos são aplicados na análise de dados experimentais do tamanho de gotas no impacto de um spray sobre um disco (Panão & Moreira, 2004). Os mecanismos envolvidos dão origem a diferentes fenómenos que dependem de variados factores como a energia cinética, o ângulo de impacto de cada gota, natureza da superfície e propriedades do líquido.

Esta experiência consiste na atomização de gasolina, através de um injector multi-ponto PFI (*Port Fuel Injection*), que incide sobre um disco plano a 30mm de distância. A experiência é realizada à temperatura ambiente para reproduzir fenómenos que ocorrem em condições de arranque do motor. As medições foram efectuadas com um sistema de Anemometria Laser PDI (*Phase Doppler Interferometer*) de dois componentes na região próxima da parede.

O disco é feito de alumínio com uma rugosidade média de $0,4\mu\text{m}$ e 36mm de diâmetro. O fluido utilizado é a gasolina com densidade de $749.6\text{kg}/\text{m}^3$, viscosidade de $4,2612 \times 10^{-4}\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$, um índice de refacção de 1.44 e uma tensão superficial de $19,4\text{mN}/\text{m}$. A abertura e fecho da agulha do injector é controlado por um pulso TTL (*Transistor-Transistor Logic*) gerado por uma placa geradora de funções NI5411 da *National Instruments*. A pressão de injeção é controlada por uma válvula. A medição em cada ponto do centro à periferia assume simetria radial e corresponde à aquisição de informação do tamanho e duas componentes de velocidade de mais de 50000 gotas validadas. O objetivo desta quantidade de medidas seria assegurar uma amostra mínima de 100 gotas validadas dentro a janela de tempo considerada para uma análise temporal das características do spray ao longo do tempo de injeção.

As medições são realizadas colocando o volume de controlo da PDA a uma distância de 2 mm da parede, sendo esta a menor distância na qual o volume de controlo

pode ser localizado sem haver bloqueio dos feixes de laser no plano perpendicular à parede. São utilizadas coordenadas cilíndricas como se pode verificar na figura 3.1. A origem da coordenada radial é tomada no eixo do injetor e as medições foram feitas em $r \in \{0; 0,5; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12\}$. A velocidade axial, U , corresponde ao componente da velocidade perpendicular à superfície do alvo, sendo a que permite distinguir gotas primárias provenientes do injetor das secundárias provenientes de mecanismos de atomização pós-impacto. Ou seja, as gotas primárias referem-se às gotas de colisão que se movem em direção à parede, enquanto que as gotas secundárias referem-se como aquelas que se afastam da parede. O velocidade radial, V , corresponde ao componente da velocidade paralela à parede e torna-se positiva na direção positiva da coordenada radial. Os nossos testes serão focados nas medidas medidas do tamanho das gotas sem distinguir primárias de secundárias.

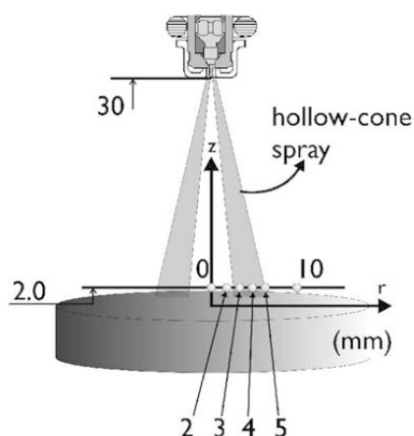


Figura 3.1: Malha de medidas com o Anemómetro Laser [Retirado de Panão & Moreira (2004)].

3.2. Análise da Complexidade Aplicada ao Impacto do Spray num Disco

De acordo com o resultado obtido na secção 2.2, para cada ponto podemos estimar o número mínimo e máximo de classes recomendado para representar o histograma da polidispersão de tamanhos das gotas. Porém, uma vez que se tratam de medidas experimentais, importa ter presente a resolução do sistema, ou seja, considera-se que o intervalo δD mínimo deveria ser pelo menos o dobro da distância mínima entre dois

valores únicos. Estes são os valores que se repetem na amostra. Por exemplo, a amostra pode conter informação de 50000 gotas, mas devido à precisão da técnica, os valores desses tamanhos são apenas 450. Assim, o máximo número de classes considerada será o valor mínimo entre o resultado da Eq. (2.7) e

$$N_k^{max} = \frac{\max(D) - \min(D)}{\delta D} \quad (3.1)$$

A Fig. 3.2 mostra os resultados obtidos para todas as posições consideradas. É de notar que o valor da Complexidade Normalizada C_n aumenta com o número de classes, mas apresenta também um comportamento oscilatório mais pronunciado até $r = 5mm$.

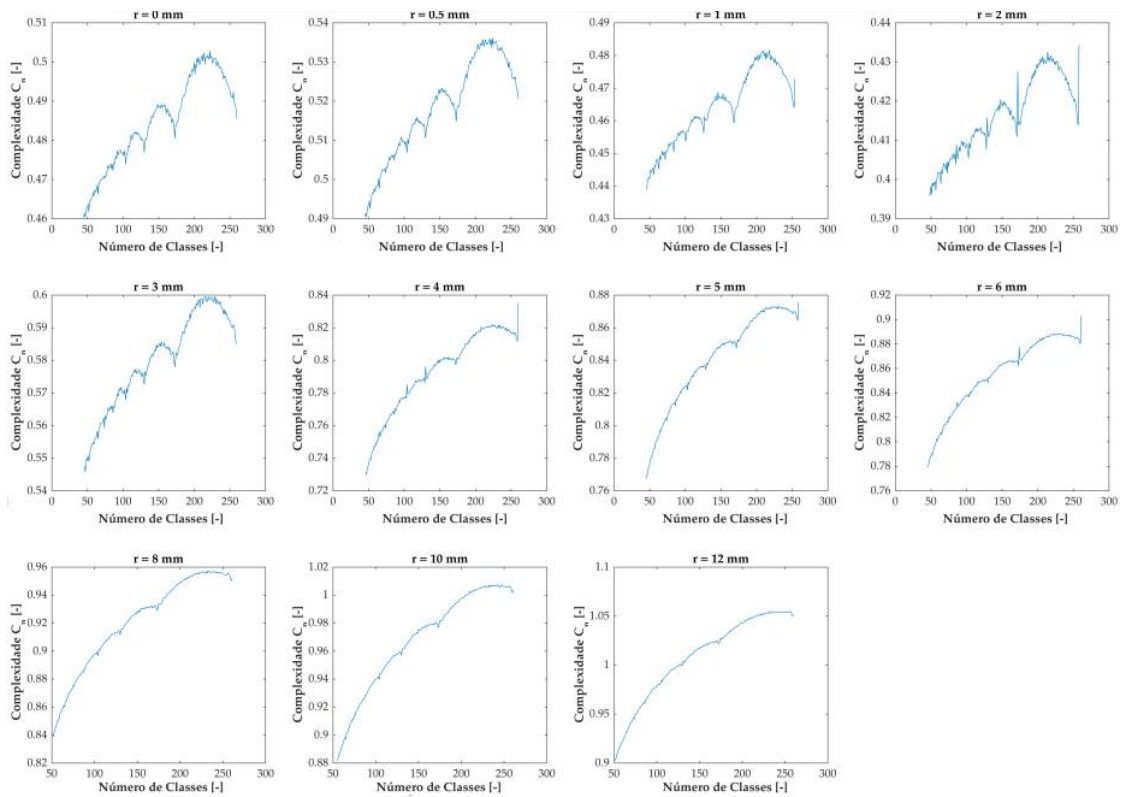


Figura 3.2: Evolução da Complexidade Normalizada C_n com o número de classes (cima), bem como o número de classes que não contêm qualquer contagem (baixo).

Procurou-se perceber a razão e tomando os resultados para dois pontos, um no centro em $r = 0mm$ e outro na periferia em $r = 10mm$, comparou-se a evolução de C_n com N_k e a emergência de uma quantidade de classes que não contam qualquer diâmetro N_k^0 . Os resultados apresentados na Fig. 3.3 evidenciam que o comportamento oscilatório, de certo modo, coincide com o aparecimento cada vez maior de classes sem gotas.

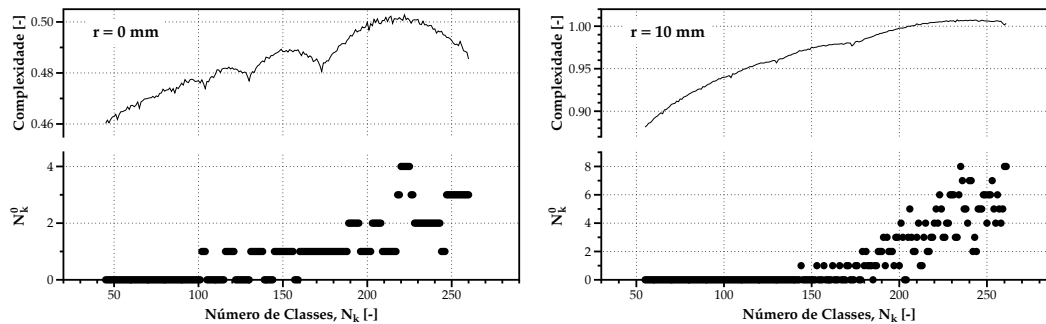


Figura 3.3: Evolução da Complexidade Normalizada C_n com o número de classes (cima), bem como o número de classes que não contêm qualquer contagem (baixo).

Assim, considerou-se que a emergência dessa oscilação indica uma representação mais incorreta da distribuição discreta, ou histograma, pelo que se optou pelo critério de que, a partir do número de classes em que emerge pelo menos uma sem gotas, não será considerada uma quantidade de classes igual ou superior a esse valor. Por exemplo, se com $N_k = 80$ há um classe que não contém qualquer gota, então, pelo facto de C_n aumentar com N_k , mantendo que a melhor representação corresponde a um valor máximo para C_n , o número de classes ideal para essa distribuição é $N_k = 79 > \min(N_k)$ dado pela Eq. (2.6).

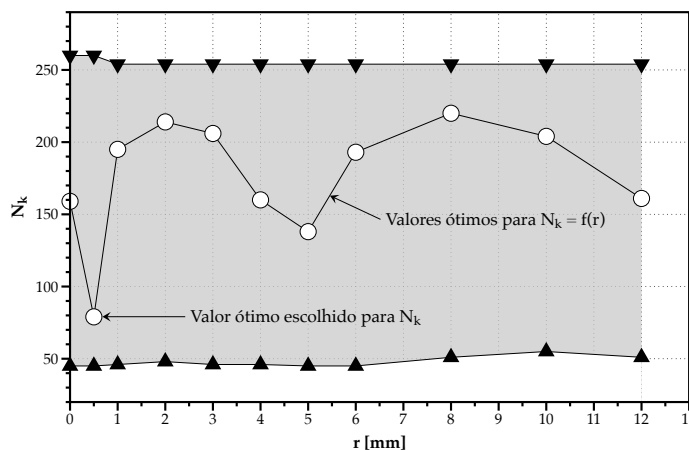


Figura 3.4: Largura de banda das classes para uma correta descrição dos tamanhos das gotas em cada posição r de acordo com o critério da Complexidade definido pela Eqs. (2.6), (2.7) e (3.1).

Os resultados para os valores mínimo e máximo obtidos em cada ponto estão sintetizados na Fig. 3.4. A figura contém também informação sobre o valor ótimo escolhido para o número de classes. A razão pela qual se escolhe o valor mínimo de classes,

representadas por círculos (\circ), é por ser o que garante, em todos os pontos, não haver classes sem gotas. Qualquer um dos restantes valores iria gerar em $r = 0,5mm$ classes sem gotas, enquanto que não gera nas restantes posições.

De modo a tentar perceber a razão pela qual a oscilação é maior no centro (e.g. $r = 0mm$) do que na periferia, comparam-se as distribuições para um número de classes ótimo de $N_k = 79$.

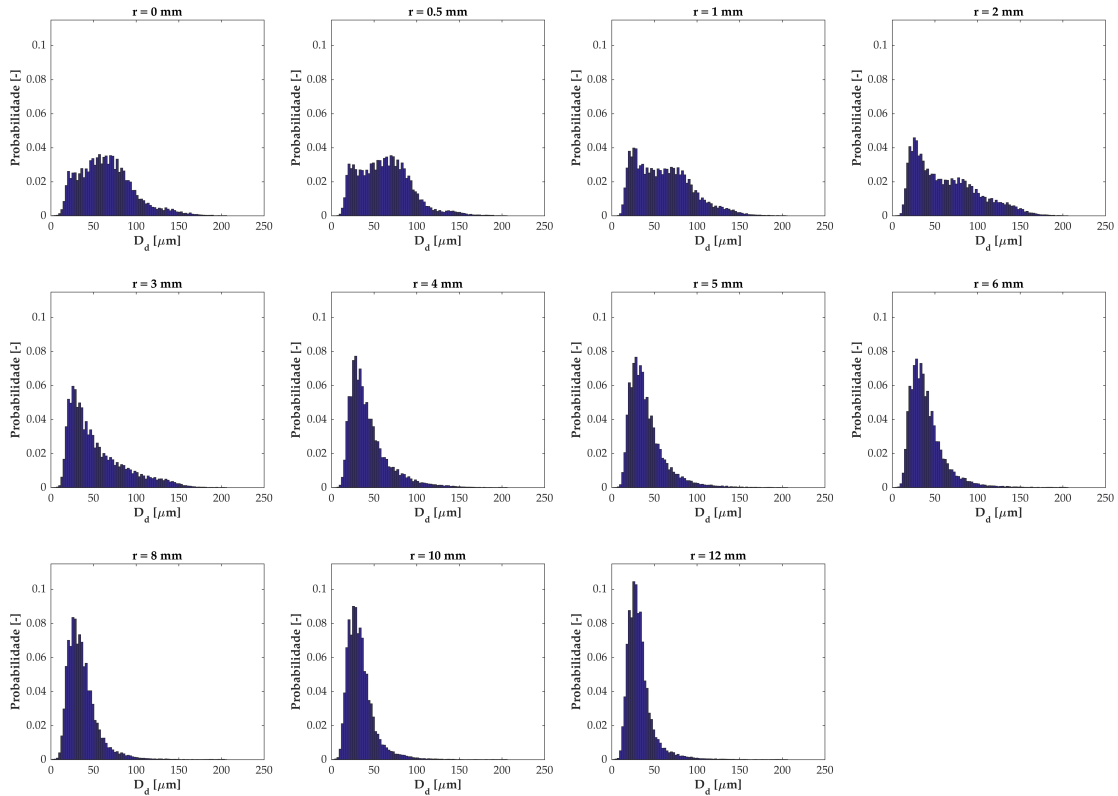


Figura 3.5: Distribuições discretas nas várias posições de medida consideradas.

De facto, até $r = 5mm$ as distribuições de tamanhos apresentam alguma bimodalidade, segundo Panão & Moreira (2004), devido à presença simultânea de gotas primárias que incidem na superfície e gotas secundárias que emergem por mecanismos de atomização secundária. Enquanto que para $r > 5mm$, a presença de gotas secundárias passa a dominar a distribuição. É de salientar que todas as distribuições possuem o mesmo número de classes, bem como limites $[D_k - \delta D/2; D_k + \delta D/2]$ iguais. Este aspeto é importante para garantir que as distribuições são, efetivamente, comparáveis entre si. Como último exemplo a aplicabilidade do algoritmo da complexidade, pode-se inferir sobre a uniformidade do spray dada pela entropia de informação normalizada, assim como é definido por Panão (2016).

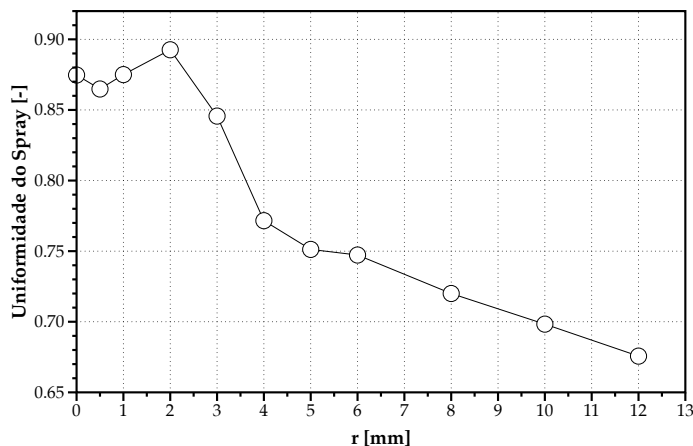


Figura 3.6: Uniformidade do Spray após aplicação do algoritmo da Complexidade que decide o melhor número de classes para representar o perfil radial do spray.

O perfil radial de uniformidade evidencia o facto deste ser um spray de cone-vazio (*hollow-cone spray*), com a presença de gotas primárias até $r = 5mm$, diminuindo gradualmente a partir daí devido ao aumento do número de gotas produzidas pelos mecanismos de atomização secundária.

3.3. Síntese do Algoritmo da Complexidade

O objectivo da criação do algoritmo da complexidade é ajudar na decisão da escolha do melhor número de classes que irão caracterizar as distribuições de spray, para que estas possam ter um termo de comparação, no que diz respeito à igualdade do número de classes associado. Assim sendo o algoritmo consiste em:

1. Aplicação das correlações N_k^{max} e N_k^{min} para uma amostra de N gotas, verificando a existência de uma gama de número de classes em que a complexidade é máxima dentro dos limites de funções empíricas (Eq.(2.7) e Eq.(2.6)).
2. Proceder ao cálculo da complexidade normalizada para as distribuições de spray em análise entre N_k^{min} e N_k^{max}
3. Verificação da resolução do sistema de medida e escolha do número de classes que maximiza a complexidade. No caso de se observar N_k^{max} superior a $N_k^{max,sm}$ máximo obtido pela resolução do sistema de medida (sm), a decisão de escolha do máximo número de classes a ser considerada será o valor mínimo entre o resultado

das Eq.(2.7) e Eq.(3.1) para o qual a complexidade é máxima.

4. Verificação de existência de classes sem gotas. Caso se verifique a existência de classes sem gotas não serão considerados quantidades de classes superiores ou iguais a esse valor. Desta forma a escolha recai sobre o valor mínimo de classes e máximo de complexidade que garante, em todos os pontos, a inexistência de classes sem gotas.

Seguindo os passos em cima descritos será possível comparar várias distribuições com igual número de classes.

4 Conclusões e trabalhos futuro

A abordagem através da teoria de informação é uma forma de garantir uma análise estatística contendo toda a informação na perspectiva de um Spray.

Apesar de já existirem variadas propostas de caracterização de sprays com base na teoria de informação, a associação do conceito de complexidade a esta caracterização provou ser de interesse substancial. Este conceito é por norma associado a estrutura, e por isso, explorou-se o efeito do número de classes na descrição de um spray sobre a complexidade.

Até ao momento, não há um critério definido para a escolha do número de classes a utilizar para descrever uma distribuição, que não deve ser feita aleatoriamente ou por mera intuição. É importante fomentar a ideia de que existe necessidade de recorrer a critérios para a escolha de classes quando se procura descrever e efectuar um termo de comparação de distribuições de sprays.

A aplicação da complexidade como critério na caracterização de sprays surgiu com base no princípio da maximização da complexidade. No entanto durante os estudos efectuados, pode-se verificar que a complexidade caracterizada para um spray define-se como um parâmetro sensível à resolução do instrumento de medida. A resolução e precisão do instrumento de medida pode redefinir o número de classes a utilizar.

Através do estudo do impacto de um spray num disco, apurou-se, que existem oscilações na complexidade que coincidem com o aparecimento de classes sem gotas e a amplitude dessas oscilações é proporcional à multimodalidade do spray. Isto é uma medida clara de que a partir de um determinado número de classes, começa a notar-se o efeito da precisão de medida. Para contornar esta situação a análise é feita desde um mínimo até ao valor de um número de classes sem gotas. Verifica-se ainda que a presença de oscilações na complexidade pode ainda ser derivado dos mecanismos de atomização envolvidos na experiência analisada. Como referido no capítulo anterior, a aplicação do algoritmo da complexidade dá ainda oportunidade de estudar a evolução da uniformidade para o spray. Este parâmetro irá variar dependendo

do tipo de spray em uso. Nesta análise foi analisado um spray de cone vazio indicando que a uniformidade vai diminuindo com o aumento da posição radial.

É possível afirmar que num spray o sistema é constituído por gotas ,cujos tamanhos dependem dos mecanismos de atomização, e conseqüente influencia dos parâmetros operacionais. Logo são esses mecanismos que afastam um spray dos casos extremos de todas as gotas com o mesmo tamanho ou igual presença de gotas com diferentes tamanhos. Sendo assim, os mecanismos de atomização são responsáveis por dar alguma estrutura ao spray.

Sugestões de trabalhos futuros

O estudo realizado nesta dissertação permitiu mostrar que a teoria de informação é uma abordagem viável para este tipo de caracterização. A necessidade de um critério base para escolha de classes é necessária, mas o algoritmo abordado abrange apenas uma série de distribuições, pois está vocacionada para a caracterização de tamanhos de gotas. Deste modo, sugere-se:

- Explorar o cálculo da complexidade para os sprays recorrendo base de dados feita por digitize, utilizado várias distribuições existentes na literatura, para se verificar a existência de sensibilidade do parâmetro da complexidade a variações paramétricas que geram sprays com características diferentes;
- Investigar e verificar se o número de classes utilizada por autores na literatura será o mais adequado.

Bibliografia

2013. Statistical analysis of spray impact to assess fuel mixture preparation in {IC} engines. *Fuel Processing Technology*, **107**, 64 – 70.
- Aldana, Gustavo A. P. 2005. *Effect of Surfactants on Drop Size Distributions in a Batch, Rotor-Stator Mixer*. PhD Thesis, University of Maryland.
- Ashgriz, Nasser. 2011. *Handbook of Atomization and Sprays // Drop Size Distributions*. Vol. 10.1007/978-1-4419-7264-4.
- Babinsky, E., & Sojka, P.E. 2002. Modeling drop size distributions. *Progress in Energy and Combustion Science*, **28**.
- Befrui, Bizhan, Aye, Andreas, Bossi, A., & Varble, D. L. 2016. ECN GDi Spray G: Coupled LES Jet Primary Breakup - Lagrangian Spray Simulation and Comparison with Data. *ILASS Americas 28th Annual Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, At Dearborn, MI, USA*.
- Chang, Yu-Chen, Calabrese, Richard V., & Gentry, James W. 1991. An Algorithm for Determination of the Size-Dependent breakage frequency of droplets, flocs and aggregates. *Particle and Particle Systems Characterization*, **8**.
- Dumouchel, Christophe. 2009. The Maximum Entropy Formalism and the Prediction of Liquid Spray Drop-Size Distribution. *Entropy*, **11**(4), 713.
- Feldman, David P, & Crutchfield, James P. 1998. Measures of statistical complexity: Why? *Physics Letters A*, **238**.
- Kyrkou, C.P. Panos; K.Ch. Chatzisavvas; Ch.C. Moustakidis; E.G. 2007. Comparison of SDL and LMC measures of complexity: Atoms as a testbed. *Physics Letters A*, **363**.

- Lefebvre, Arthur Henry. 1989. *Atomization and sprays*. New York : Hemisphere Pub. Corp.
- López-Ruiz, R., Mancini, H.L., & Calbet, X. 1995. A statistical measure of complexity. *Physics Letters A*, **209**(5), 321 – 326.
- Martin, M T, Plastino, A, & Rosso, O A. 2003. Statistical complexity and disequilibrium. *Physics Letters A*, **311**(2), 126–132.
- Panão, Miguel O. 2016. Redefining spray uniformity through an information theory approach. *Atomization and Sprays*, **26**, 1069–1081.
- Panão, M. R. O., & Moreira, A. L. N. 2004. Experimental study of the flow regimes resulting from the impact of an intermittent gasoline spray. *Experiments in Fluids*, **37**(12).
- Panão, M R O, & Moreira, A L N. 2008. A real-time assessment of measurement uncertainty in the experimental characterization of sprays. *Measurement Science and Technology*, **19**(9), 095402.
- Panão, Miguel R Oliveira. 2012. Assessment of measurement efficiency in laser- and phase-Doppler techniques: an information theory approach. *Measurement Science and Technology*, **23**(12), 125304.
- Panão, Miguel R.O., & Radu, Lucian. 2013. Advanced statistics to improve the physical interpretation of atomization processes. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, **40**, 151 – 164.
- Shannon, C. E. 1948. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, **27**, 379–423.
- Shiner, J. S.; Davison, Matt; Landsberg P. T. 1999. Simple measure for complexity. *Physical Review E*, **59**(2).
- Shrimpton, J. S., Haeri, S., & Scott, Stephen J. 2014. *PDF Reconstruction Methods*. London: Springer London. Pages 93–115.
- Sowa, W. A. 1992. INTERPRETING MEAN DROP DIAMETERS USING DISTRIBUTION MOMENTS. *Atomization and Sprays*, **2**(1), 1–15.