

# **Simulação Numérica em Opções com Volatilidade Estocástica**

Lucileida Regina Cruz





DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA



# Simulação Numérica em Opções com Volatilidade Estocástica

Lucileida Regina Cruz

Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática  
Área de Especialização em Estatística Optimização e Matemática Financeira

**Júri**

**Presidente:** Prof. Doutora Maria Paula Serra de Oliveira

**Orientador:** Prof. Doutor Jose Augusto Mendes Ferreira

**Vogal:** Prof. Doutora Ercília Cristina Costa e Sousa

25 Agosto de 2011



# Resumo

O modelo de Black-Scholes para opções europeias foi estabelecido assumindo um conjunto de hipóteses sobre a evolução do preço do activo subjacente, nomeadamente, o retorno e a volatilidade são constantes e o carácter aleatório é introduzido por um processo Browniano. A comparação entre os resultados de simulação numérica e os dados reais relativos à evolução de alguns mercados, colocou em questão tais hipóteses, nomeadamente a volatilidade constante.

Com o objectivo de colmatar as diferenças do comportamento observado nos resultados de simulação e nos dados reais do mercado, surgiram na literatura vários modelos Brownianos para a evolução do preço de opções em que a evolução do preço do activo subjacente é descrito por uma equação diferencial estocástica mas em que a volatilidade é estocástica é uma função determinista do preço do activo calculado no mesmo instante temporal ou uma função determinista do passado do preço do activo. É de salientar que nesta última classe de modelos é introduzido um certo efeito memória.

O estudo de dois modelos representativos de cada uma das classes de modelos anteriormente introduzidos é o objectivo central desta dissertação: o modelo de Cox e Ross e o modelo de Hobson e Rogers, mais especificamente os correspondentes problemas diferenciais estocásticos com condição inicial para o preço dos activos subjacentes e os problemas de derivadas parciais para as correspondentes opções europeias.

**Palavras Chave:** Equação diferencial estocástica, preço do activo, volatilidade, preço das opções europeias, equação de derivadas parciais, simulação numérica.

# Abstract

The Black-Scholes model for European options was established under a set of assumptions for the time evolution of asset prices, more precisely, constant drift, constant volatility and the randomness is introduced by a Brownian motion. A gap between the simulation results and the data of real financial markets leads to check out such assumptions, namely the constant volatility.

To avoid the observed gap between the simulation results and the data of real financial markets, several Brownian models for the evolution of the asset prices characterized by stochastic differential equations for the asset prices arise in the literature where the volatility depends (deterministically) on asset price at the same time level or depends on the past of the asset prices. We point out that in this last class of models a certain memory effect was introduced.

The aim of this work is the study of two models representing the two previous classes: the Cox and Ross's model and the Hobson and Rogers's model. more precisely, the correspondents stochastic initial boundary value

problems for the asset prices and the partial differential problems for the European options.

**Keywords:** Stochastic differential equation, asset prices, volatility, European option prices, partial differential equations, numerical simulation.







# Agradecimentos

*Este trabalho não ficaria completo se não pudesse agradecer à aqueles que fizeram que a realização deste trabalho fosse possível:*

*Um especial e infinitamente grande Obrigado! ao meu incansável orientador, Professor Doutor José Augusto Mendes Ferreira, pela sua sábia e paciente orientação;*

*À minha família, em especial ao meu marido, Adilson Ramos, pelo carinho e suporte incondicional;*

*Ao meu colega, Professor Doutor Paulino Lima Fortes, pelo incentivo e positivismo que me transmitiu ao longo de todo este tempo.*



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Alguns resultados preliminares</b>	<b>5</b>
2.1	O processo Browniano . . . . .	5
2.2	Equações diferenciais estocásticas . . . . .	5
2.3	O lema de Itô . . . . .	7
<b>3</b>	<b>O Modelo de Black Scholes</b>	<b>9</b>
3.1	Introdução . . . . .	9
3.2	BS para o preço do activo . . . . .	9
3.3	BS para opções Europeias . . . . .	10
<b>4</b>	<b>O Modelo de Cox and Ross</b>	<b>17</b>
4.1	Introdução . . . . .	17
4.2	CR para o preço do activo . . . . .	17
4.3	CR para opções . . . . .	19
4.4	CR para opções - simulação numérica . . . . .	21
<b>5</b>	<b>O Modelo de Hobson e Rogers</b>	<b>27</b>
5.1	Introdução . . . . .	27
5.2	HR para activos . . . . .	27
5.3	HR para opções . . . . .	30
5.4	HR para opções - simulação numérica . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Comentários e Conclusões</b>	<b>37</b>



# Capítulo 1

## Introdução

O modelo de Black e Scholes (BS) foi introduzido em 1973 em [2] para estudar a evolução de opções ditas europeias do tipo *call* ou *put*. Este modelo é caracterizado por uma equação parabólica para o preço da opção quando o preço do activo atinge um determinado valor num determinado instante, por uma condição no instante de maturidade e que é definida a partir do preço de exercício e por condições de fronteira que são estabelecidas a partir do preço da opção quando o preço do activo é nulo e quando o preço do activo é arbitrariamente grande. tendo-se neste caso, para um valor do preço do activo arbitrariamente grande, o valor da opção igual a este preço do activo.

O modelo BS é estabelecido assumindo que o preço do activo satisfaz uma equação diferencial estocástica em que o ruído é definido a partir de um movimento Browniano, os coeficientes *deriva* ou *flutuação* e a volatilidade são considerados constantes. Além das hipóteses anteriores, Black e Scholes consideram um conjunto de hipóteses sobre o mercado como por exemplo, a taxa de juro sem risco é constante, não há arbitragem e não existem custos de transacção associados.

Os dados reais do mercado financeiro permitem observar na volatilidade fenómenos usualmente designados sorrisos (do inglês *smiles*) e ausência de achatamento (do inglês *skews*) que não são compatíveis com a hipótese para a volatilidade assumida por Black e Scholes ([8],[15]). Surgiram então na literatura modelos Brownianos em que a volatilidade é estocástica dependendo do preço do activo. Sem pretendermos ser exaustivos salientamos o modelo de Cox e Ross ([4]) caracterizado por uma equação diferencial estocástica para o preço do activo no instante  $t$ ,  $S(t)$ , em que a volatilidade depende do preço do activo subjacente no mesmo instante, o modelo de Hull e White ([10]) caracterizado por um sistema de equações diferenciais estocásticas para o preço do activo e para o quadrado da volatilidade em que a aleatoriedade é definida por dois processos Brownianos dependentes, o modelo de Hobson e Rogers ([11]) em que o preço do activo é definido a partir de uma equação diferencial estocástica para o preço do activo no instante  $t$ ,  $S(t)$ , em que a volatilidade depende do passado do preço do activo subjacente. Salientamos que o último modelo é caracterizado por um certo efeito memória uma vez

## CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO

que o passado do preço do activo determina o preço do activo no momento presente. Modelos para o preço do activo caracterizados por equações diferenciais estocásticas com atraso têm sido objecto de estudo ([1]).

Uma outra linha de investigação surgiu, entre outras, na modelação matemática de mercados financeiros associada à substituição do processo Browniano por outro tipo de processos estocásticos. De facto, algumas das propriedades deste processo como a continuidade induz trajectórias contínuas para o preço do activo, não são observadas em alguns mercados financeiros (por exemplo [13],[14]).

Equações de derivadas parciais para a evolução do preço de opções, fundamentalmente europeias, sobre activos subjacentes cuja dinâmica é descrita pelos modelos anteriormente mencionados foram estabelecidos em alguns dos trabalhos mencionados. O principal ingrediente na dedução destes problemas é o lema de Itô que permite eliminar o carácter aleatório presente na evolução destes activos. É de salientar que apenas o modelo BS admite uma fórmula explícita para o preço das opções em função do preço do activo subjacente e dos parâmetros do mercado: taxa de juro, tempo de maturidade, preço de exercício, deriva e volatilidade. Os restantes modelos para opções não permitem obter expressões explícitas para o preço das opções. Neste caso, os métodos numéricos para equações com derivadas parciais têm um papel central na descrição do comportamento do preço das opções.

O estudo de dois modelos de volatilidade estocástica é o objectivo central desta dissertação: o modelo de Cox e Ross e o modelo de Hobson e Rogers, mais especificamente, os correspondentes problemas diferenciais estocásticos com condição inicial para o preço dos activos e os problemas de derivadas parciais para as correspondentes opções europeias.

Num capítulo introdutório, Capítulo 2, apresentamos alguns conceitos fundamentais nesta dissertação como são o conceito de processo Browniano e o Lema de Itô. O modelo BS é objecto de estudo no Capítulo 3. Neste capítulo apresentamos de modo sucinto o modelo anterior para o preço dos activos e para as correspondentes opções europeias e ilustramos o seu comportamento em função dos parâmetros do modelo: taxa de juro, tempo de maturidade, preço de exercício, deriva e volatilidade. O estudo do modelo de Cox e Ross é objecto de estudo no Capítulo 4. Consideramos neste capítulo o problema diferencial estocástico com condição inicial para o preço do activo com deriva constante em que a volatilidade é função do preço do activo e estabelecemos o problema diferencial de derivadas parciais para o preço das opções europeias correspondentes. Ilustramos o comportamento dos preços dos activos e das opções correspondentes uti-

lizando o método de Euler explícito para o problema diferencial estocástico e o método de Euler explícito com discretização das derivadas do preço da opção em relação ao preço do activo utilizando operadores de diferenças centradas. O modelo de Hobson e Rogers é estudado no capítulo 5. Neste capítulo apresentamos o problema diferencial para o preço dos activos e o problema diferencial de derivadas parciais para o preço das opções europeias. A ilustração do comportamento destes preços bem como dos preços dos activos subjacentes é feito utilizando métodos do tipo dos considerados no capítulo anterior. Finalmente no capítulo final, capítulo 6, apresentamos algumas considerações finais.





# Capítulo 2

## Alguns resultados preliminares

### 2.1 O processo Browniano

O carácter aleatório do mercado financeiro é modelado por um processo estocástico. Recordamos seguidamente esta noção.

**Definição 1.** *Seja  $X(t)$ ,  $t \geq 0$ , uma função aleatória, isto é, uma aplicação que atribui a cada valor do índice  $t \geq 0$  uma variável aleatória.  $X(t)$ ,  $t \geq 0$ , diz-se um processo estocástico se for uma função aleatória do tempo.*

O processo estocástico que mais tem sido considerado na modelação do carácter aleatório do mercado financeiro é o conhecido *processo Browniano*.

**Definição 2.** *O processo estocástico  $X(t)$ ,  $t \geq 0$ , diz-se um processo Browniano se as suas trajectórias são contínuas e os seus incrementos verificam os seguintes requisitos: têm média nula, são independentes (isto é, as variáveis aleatórias  $X(t_0)$ ,  $X(t_1) - X(t_0)$ ,  $\dots$ ,  $X(t_M) - X(t_{M-1})$  são independentes para todos os valores  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_M$ ) e são estacionários (isto é, as distribuições dos processos estocásticos  $\{X(t_0 + h) - X(t_0)\}_{h \geq 0}$  e  $\{X(t_1 + h) - X(t_1)\}_{h \geq 0}$  são as mesmas, quaisquer que sejam os valores reais não negativos  $t_0$  e  $t_1$ ).*

É de salientar que algumas das propriedades dos processos anteriores como a continuidade, a independência dos acréscimos, não são válidas em alguns mercados financeiros. Estes factos levou à substituição destes processos por outros processos estocásticos como os *processos de salto* ([13]), os *processos de telégrafo* ([14]).

### 2.2 Equações diferenciais estocásticas

Seja  $X(t)$ ,  $t \geq 0$ , um processo Browniano. A equação diferencial estocástica que consideramos posteriormente na descrição da dinâmica do preço do activo é uma particularização da equação seguinte:

$$dS(t) = a(S(t), t) dt + b(S(t), t) dX(t), t > 0. \quad (2.1)$$

O resultado seguinte estabelece uma condição suficiente para a existência de uma solução  $S(t)$  de (2.1).

**Teorema 1.** *Se  $a$  e  $b$  são localmente de Lipschitz relativamente ao primeiro argumento, então para cada  $S_0 \in \mathbb{R}$  existe pelo menos uma solução  $S(t)$  de (2.1) tal que  $S(0) = S_0$ .*

A unicidade de solução é estabelecida no resultado seguinte:

**Teorema 2.** *Se  $a$  e  $b$  são de Lipschitz relativamente ao primeiro argumento e verificam as seguintes condições de crescimento*

$$|a(x, t)| \leq C|x|, |b(x, t)| \leq C|x|, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

para algum  $C > 0$ , então, para cada  $S_0 \in \mathbb{R}$ , existe uma solução única de (2.1).

Embora a existência e unicidade seja, pelo Teorema 2, garantida para uma grande classe de problemas, a determinação da expressão de tal solução só é conhecida para um conjunto reduzido de problemas. A determinação de tal solução, pelo menos de modo aproximado, pode ser feito recorrendo ao método de Euler. Para o efeito, consideremos um intervalo temporal  $[0, T]$  onde introduzimos uma partição uniforme

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M = T,$$

em que  $t_{i+1} - t_i = \Delta t, i = 0, \dots, M - 1$ . No cálculo do valor aproximado para  $S(t_i)$ .  $S_i$  usaremos o processo discreto seguinte:

$$\begin{cases} S_{i+1} = S_i + \Delta t \mu(t_i, S_i) + \sigma(t_i, S_i)(X_{i+1} - X_i), i = 0, \dots, M - 1, \\ S_0 \text{ é dado.} \end{cases} \quad (2.3)$$

No caso particular  $\mu(t_i, S_i) = \mu S_i, \sigma(t_i, S_i) = \sigma S_i$ , da quação (2.3) vem que o retorno do preço do activo  $\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i}$  satisfazem a igualdade

$$\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} = \mu \Delta t + \sigma (X_{i+1} - X_i), \quad (2.4)$$

em que os acréscimos  $X_{i+1} - X_i$  são independentes e seguem uma lei normal de média nula e variância  $\Delta t$ . Assim o retorno do preço do activo tem média  $\mu \Delta t$  e variância  $\sigma^2 \Delta t$ . Observamos que podemos reescrever (2.4) na forma equivalente

$$\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_i, \quad (2.5)$$

em que  $Z$  é uma variável aleatória normal de média nula e variância unitária. Nas simulações numéricas que apresentamos ao longo deste trabalho, tomamos uma amostra com  $M = 200$  e que tem associada o histograma representado na Figura 2.1.

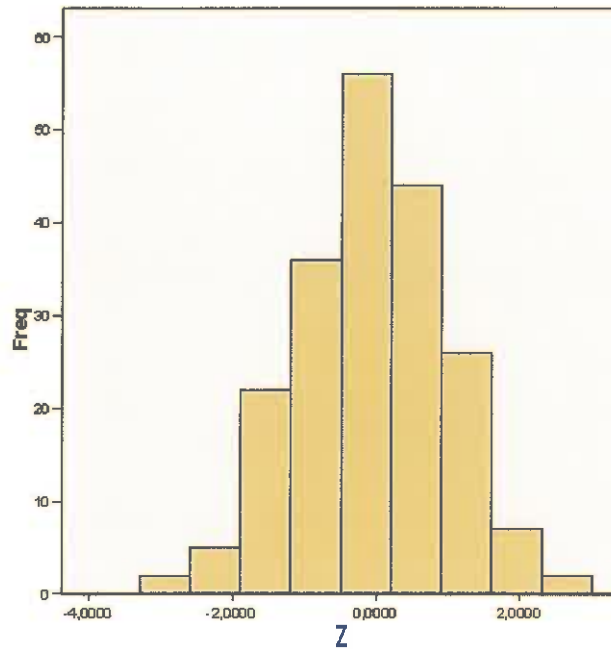


Figura 2.1: Histograma da amostra da variável aleatória normal  $Z$  de média nula e variância igual à unidade.

### 2.3 O lema de Itô

O resultado seguinte tem um papel central no estabelecimento da equação de Black-Scholes para o preço de opções europeias pois permite substituir, num enquadramento adequado, o modelo de natureza estocástica por um modelo determinista.

**Teorema 3.** *Seja  $S(t), t \geq 0$ , a solução da equação diferencial estocástica que consideramos na descrição da dinâmica do preço do activo. Seja  $V(S(t), t)$ , que por simplicidade denotaremos por  $V(S, t)$ , uma função duas vezes continuamente diferenciável em  $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$ . Nestas condições, o processo estocástico  $V(S, t), t \geq t_0$  satisfaz a equação integral estocástica escrita, em versão diferencial, na forma*

$$dV(S, t) = \frac{\partial V}{\partial t}(S, t)dt + \frac{\partial V}{\partial S}(S, t)dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t)(dS)^2, \quad (2.6)$$

em que o termo  $(dS)^2$  é calculado através das regras algébricas:

$$dt \cdot dt = dt \cdot dX(t) = dX(t) \cdot dt = 0 \text{ e } dX(t) \cdot dX(t) = dt.$$



# Capítulo 3

## O Modelo de Black Scholes

### 3.1 Introdução

O modelo introduzido por Black e Scholes ([2]) para o preço do activo e para as opções europeias correspondentes, que designamos *modelo BS para os activos* e *modelo BS para opções* é talvez o modelo para mercados financeiros que mais tem sido usado. É estabelecido assumindo um conjunto de hipóteses simplificadoras que permite obter fórmulas explícitas para o preço das opções.

Neste capítulo apresentamos de modo sumário os modelos BS para activos e para opções e apresentamos algumas ilustrações destes modelos em função dos parâmetros: deriva, volatilidade e taxa de juro. Assim na secção 3.2 apresentamos o modelo BS para os activos e o modelo BS para opções é apresentado na secção 3.3. Nesta secção, além de introduzirmos expressão explícita para o preço de opções europeias, mostramos que esta solução é única. Em ambas as secções apresentamos resultados que ilustram o comportamento dos modelos.

### 3.2 BS para o preço do activo

O modelo de BS para o preço de opções Europeias sobre activos financeiros tem por base a seguinte equação diferencial estocástica para o preço dos activos

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dX(t), t > 0, \\ S(0) = S_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde

- $\mu$  representa a deriva ou flutuação e está associado a taxa média de crescimento do activo;
- $\sigma$  denota a volatilidade e é um indicador do desvio dos retornos;
- $X(t)$  representa o processo Browniano.

Pelo Teorema 2, a solução do problema de condição inicial (3.1) existe, é única. A função

$$S(t) = S_0 \text{Exp}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + X(t)\right), t \geq 0. \quad (3.2)$$

é solução do problema de condição inicial (3.1)

No que se segue ilustramos a influência da deriva e da volatilidade no comportamento do preço do activo. Para o efeito utilizamos o método (2.5).

Nos resultados que apresentamos seguidamente tomamos a amostra de tamanho 200 da variável aleatória de média nula e variância unitária cujo histograma está representado na Figura 2.1. Na Figura 3.1 apresentamos a evolução do activo para  $S_0 = 5$ ,  $T_m = 2$  e  $\mu = 0.01, 0.1$ ,  $\sigma = 0.02$ . Constatamos que o aumento da deriva induz um aumento do preço do activo.

Ilustramos agora a influência da volatilidade no preço do activo. Na Figura 3.2 apresentamos a evolução do preço do activo com volatilidade  $\sigma = 0.02, 0.04$  e deriva  $\mu = 0.01$ . Observamos um aumento da variabilidade do preço do activo com o aumento da volatilidade.

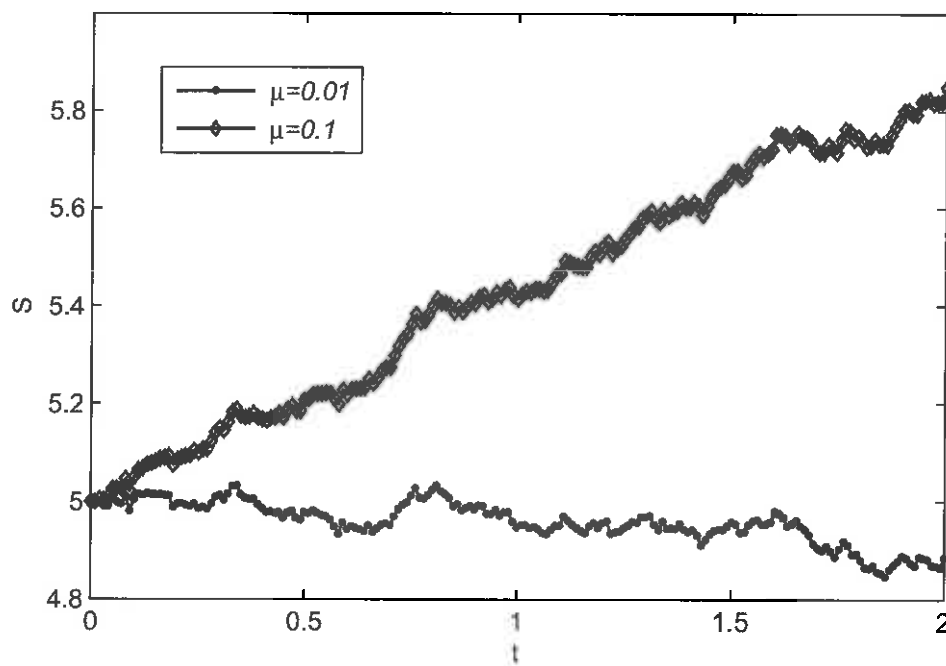


Figura 3.1: Preço do activo com o modelo BS para  $\mu = 0.01, 0.1, \sigma = 0.02, T_m = 2$ .

### 3.3 BS para opções Europeias

Seja  $V(S(t), t)$  o preço de uma opção Europeia cujo tempo de maturidade é  $T_m$ . Seja  $E$  o preço de exercício desta opção. Recordamos que

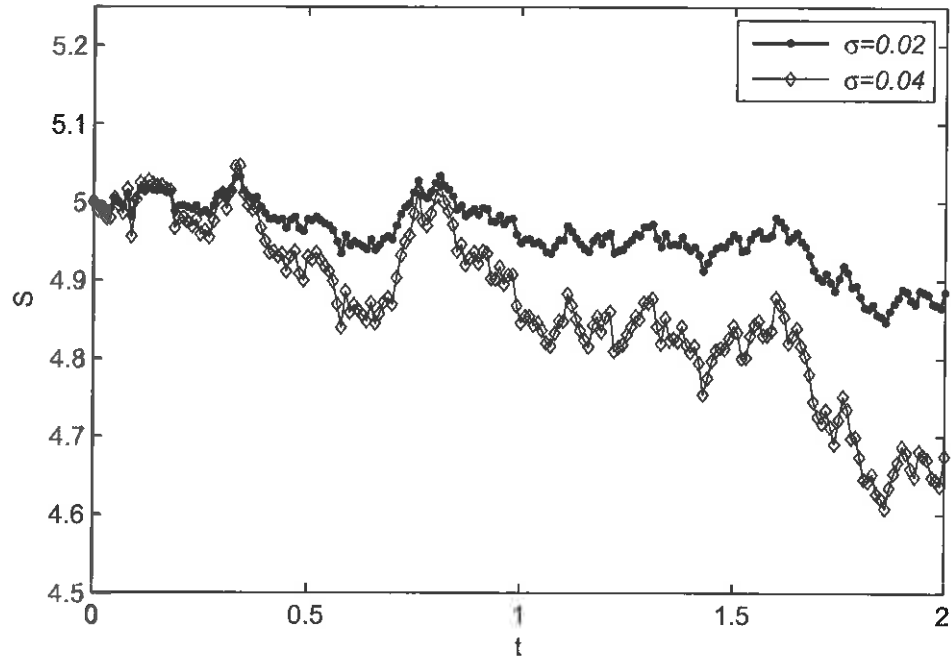


Figura 3.2: Preço do activo com o modelo BS para  $\mu = 0.01$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $T_m = 2$ .

- $V(S(T_m), T_m) = \max\{S(T_m) - E, 0\}$  se a opção é uma *call*,
- $V(S(T_m), T_m) = \max\{E - S(T_m), 0\}$  se a opção é uma *put*,

em que  $S(T_m)$  denota o preço dos activos na maturidade.

O modelo BS para as opções Europeias foi estabelecido assumindo as seguintes hipóteses para o mercado financeiro:

- a taxa de juro  $r$  sem risco é constante;
- não há arbitragem;
- não existem custos de transacção associado ao mercado das opções;
- a volatilidade do preço do activo subjacente é constante.

Seja  $V(S(t), t)$  o preço de uma opção Europeia do tipo *call* que denotamos apenas por  $V(S, t)$ . Seja  $\Pi(S, t) = V(S, t) - \Delta S$  o preço de uma carteira definida a partir da opção e de um determinado número de activos  $\Delta$  a preço  $S$ . Conjugando a variação da carteira num determinado período de tempo, a equação diferencial estocástica para o preço do activo (3.1), o Lema de Itô 3 e ainda o facto de a taxa de juro ser igual a  $r$ , Black e Scholes estabelecem a seguinte equação de derivadas parciais para o preço das opções Europeias

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \equiv 0, S > 0, t \in (0, T_m]. \quad (3.3)$$

A equação parabólica (3.3) é complementada pela condição no instante de maturidade

$$V(S, T_m) = \max\{S - E, 0\}, \quad S > 0. \quad (3.4)$$

Além da condição anterior, tem-se

$$V(0, t) = 0, \quad t \in (0, T_m]. \quad (3.5)$$

Admitimos que quando o preço do activo subjacente se torna arbitrariamente grande, o preço da opção é igual ao preço do activo, isto é

$$\lim_{S \rightarrow \infty} (V(S, t) - S) = 0, \quad t \in (0, T_m]. \quad (3.6)$$

Observamos que o problema diferencial (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) tem quando muito uma solução. De facto, sejam  $V_1$  e  $V_2$  duas soluções e seja

$$W(S, t) \equiv W(S, T_m - t) = V_1(S, t) - V_2(S, t).$$

Esta função verifica

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} + rS \frac{\partial W}{\partial S} - rW, \quad S > 0, \quad t \in (0, T_m], \quad (3.7)$$

$$W(S, 0) = 0, \quad S \geq 0, \quad (3.8)$$

$$W(0, t) = 0, \quad t \in (0, T_m], \quad (3.9)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} W(S, t) = 0, \quad t \in (0, T_m]. \quad (3.10)$$

Observamos que se tem

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 = \int_0^\infty W(S, t) \frac{\partial W}{\partial t}(S, t) dS,$$

e, atendendo a (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \sigma^2 S^2 W(S, t) \frac{\partial^2 W}{\partial S^2}(S, t) dS \\ &+ \int_0^\infty rS W(S, t) \frac{\partial W}{\partial S}(S, t) dS \\ &- \int_0^\infty rW^2(S, t) dS. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Atendendo às condições (3.9), (3.10), para o primeiro termo do segundo membro de (3.11) tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^\infty S^2 W(S, t) \frac{\partial^2 W}{\partial S^2}(S, t) dS &= - \int_0^\infty S^2 \left( \frac{\partial W}{\partial S}(S, t) \right)^2 ds - 2 \int_0^\infty W(S, t) \frac{\partial W}{\partial S}(S, t) S ds \\ &= - \int_0^\infty S^2 \left( \frac{\partial W}{\partial S}(S, t) \right)^2 ds + \|W(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \\ &\leq \|W(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$



Para o segundo termo de (3.11) tem-se

$$\int_0^\infty SW(S, t) \frac{\partial W}{\partial S}(S, t) dS = -\frac{1}{2} \|W(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2. \quad (3.13)$$

Conjugando (3.11), (3.12) e (3.13) obtemos

$$\frac{d}{dt} \|W(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \leq (\sigma^2 - 3r) \|W(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2, t > 0,$$

que permite concluir, atendendo a (3.8), a seguinte desigualdade

$$\|W(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \leq 0, t \geq 0. \quad (3.14)$$

Da desigualdade (3.14) vem finalmente

$$W(t) = 0, t \geq 0, \quad (3.15)$$

ou seja

$$V_1(S, t) = V_2(S, t) = 0, S \geq 0, t \in [0, T_m].$$

Concluimos o resultado seguinte:

**Teorema 4.** *O problema diferencial (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) tem quando muito uma solução.*

Observamos que no estabelecimento da igualdade (3.15) a partir de (3.14) assumimos a continuidade de  $W$ .

A solução do problema diferencial (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), admite a seguinte representação

$$V(S, t) = SN(d_1) - e^{-r(T_m-t)} EN(d_2), S \geq 0, t \in [0, T_m], \quad (3.16)$$

onde

- $N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$
- $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \left( \ln \frac{S}{E} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T_m - t) \right),$
- $d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \left( \ln \frac{S}{E} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T_m - t) \right).$

Ilustramos seguidamente o comportamento do preço da opção definido por (3.16) em função dos parâmetros volatilidade ( $\sigma$ ), deriva ( $\mu$ ) e taxa de juro ( $r$ ). Na Figura 3.3 ilustramos o comportamento da opção *call*  $V(S, t)$  quando  $T_m = 10, E = 5, \mu = 0.02, \sigma = 0.01$  e  $r = 0.2$ . Nesta figura são apresentados as curvas  $V(S, t)$  quando  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  (da esquerda para a direita). Na Figura 3.4 apresentamos a comparação

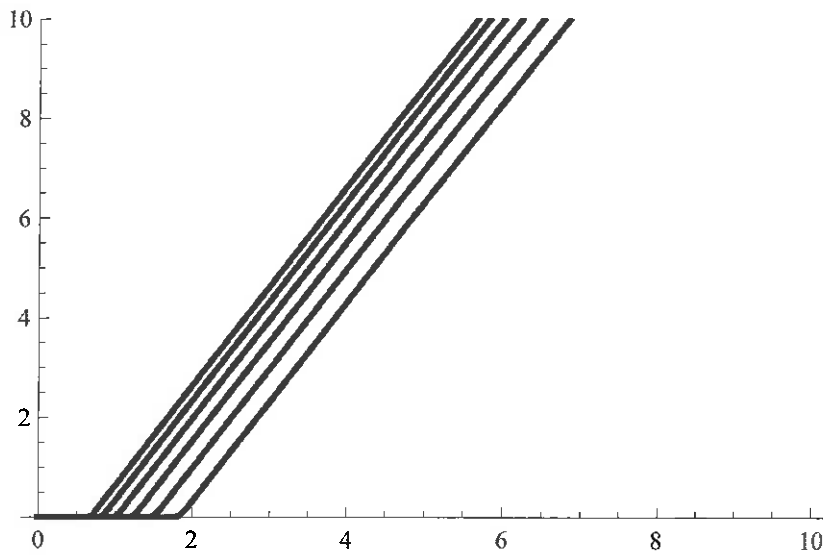


Figura 3.3: Preço de opções *call* com o modelo BS para  $T_m = 10$ ,  $E = 5$ ,  $\mu = 0.02$ ,  $\sigma = 0.01$  e  $r = 0.2$  nos em  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

entre o preço da opção para  $\sigma = 0.01, 0.06$ , em  $t = 3, 4, 5$ . Observamos que há apenas alteração do comportamento na vizinhança de  $S = E$ . O aumento da volatilidade induz um aumento do valor da opção. A influência da taxa de juro no comportamento das opções é ilustrada na Figura 3.5. Nesta figura apresentamos o preço da opção para  $r = 0.1, 0.2$  e  $E = 5, \mu = 0.02, \sigma = 0.01$  em  $t = 3, 4, 5$ . O aumento da taxa de juro induz um aumento do valor da opção.

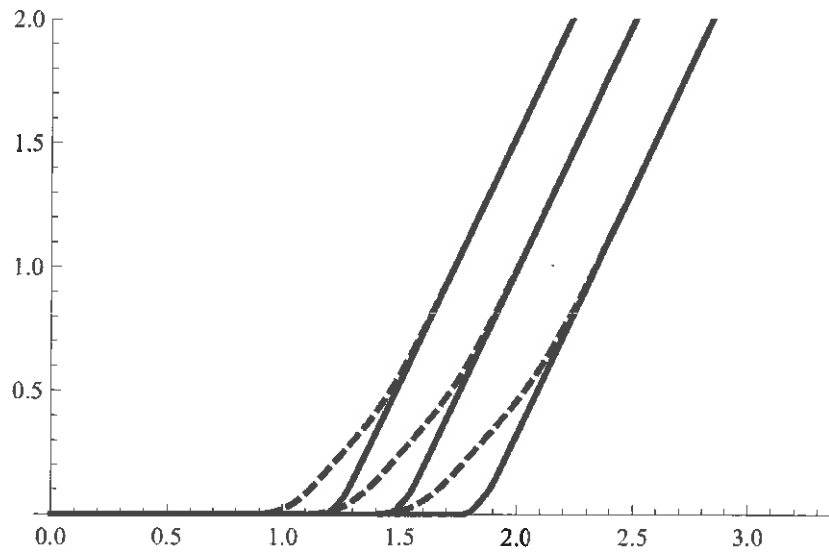


Figura 3.4: Preço de opções *call* com o modelo BS para  $T_m = 10$ ,  $E = 5$ ,  $\mu = 0.02$ ,  $\sigma = 0.01$  (traço contínuo)  $0.06$  (traço descontínuo) e  $r = 0.2$  em  $t = 3, 4, 5$ .

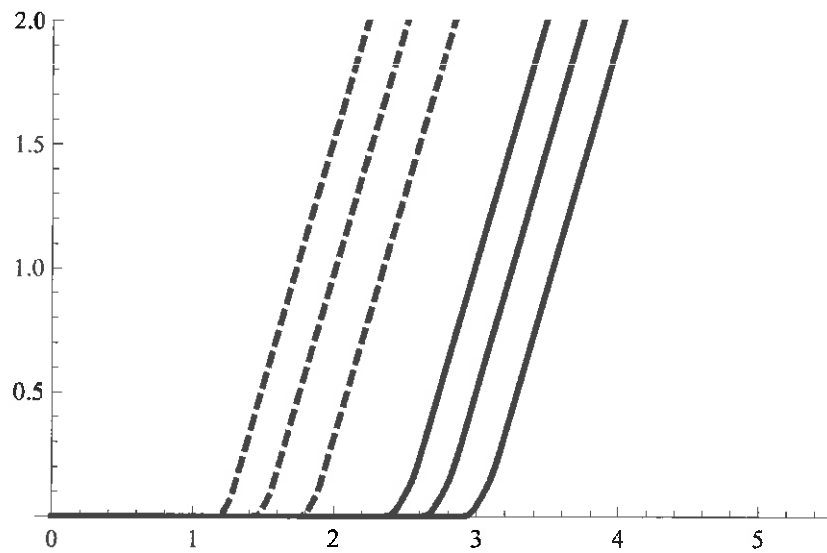


Figura 3.5: Preço de opções *call* com o modelo BS para  $r = 0.1$  (traço contínuo)  $0.2$  (traço descontínuo) com  $T_m = 10$ ,  $E = 5$ ,  $\mu = 0.02$ ,  $\sigma = 0.01$  em  $t = 3, 4, 5$ .



# Capítulo 4

## O Modelo de Cox and Ross

### 4.1 Introdução

O modelo BS foi estabelecido tendo por hipótese que o preço dos activos subjacentes verificam a equação diferencial estocástica (3.1) em que a volatilidade é constante e o ruído aleatório é introduzido por um processo Browniano. Os dados reais do mercado financeiro permitem observar que a volatilidade não é constante ([8], [15]). Surgiram então na literatura modelos Brownianos em que a volatilidade é estocástica dependendo do preço do activo.

O objectivo deste capítulo é o estudo de um dos modelos Brownianos com volatilidade estocástica que foi introduzido por Cox e Ross em [4] e que na literatura surge como modelo de variância com elasticidade constante e que neste trabalho designamos *modelo CR*. Neste modelo a volatilidade depende do preço do activo e os autores consideraram  $\sigma(S(t)) = \sigma S(t)^{-(1-\alpha)}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Assim na secção 4.2 introduzimos o modelo CR para o preço do activo e ilustramos o seu comportamento. O modelo CR para as opções correspondentes é estudado na secção 4.3. Aqui estabelecemos a equação para o preço das opções e apresentamos alguns resultados ilustrativos. Observamos que tais resultados foram obtidos utilizando um método de diferenças finitas.

### 4.2 CR para o preço do activo

Consideremos um activo financeiro de valor cujo preço no instante  $t$ ,  $S(t)$  é aleatório e cuja dinâmica é descrita pela equação diferencial estocástica

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma(S(t), t)S(t)dX(t), \quad (4.1)$$

onde  $\mu$  representa a deriva,  $\sigma(S(t), t)$  denota a volatilidade e  $X(t)$  o processo Browniano. Uma expressão possível para  $\sigma$  foi proposta por Cox e Ross-  $\sigma(x, t) = \sigma x^{-(1-\alpha)}$ , com  $\alpha \in (0, 1)$ .

A equação diferencial estocástica (4.1) admite a representação (2.1). Para a escolha anterior da expressão de sigma temos  $b(x, t) = \sigma x^\alpha$ . Esta função é localmente

de Lipschitz em  $x$  mas não satisfaz a hipótese (2.2). Assim, embora possamos garantir a existência de solução do problema diferencial (4.1) quando complementado por uma condição inicial  $S(0) = S_0$ , não podemos aplicar o Teorema 2 para estabelecer a unicidade.

As ilustrações do comportamento da solução de (4.1) com  $S(0) = S_0$  no intervalo  $[0, T]$  poderão facilmente ser obtidas considerando os processos numérico explícito (4.2) ou explícito -implícito (4.3) definidos, respectivamente, por

$$\begin{cases} S_{i+1} \equiv (1 + \Delta t \mu) S_i + \sigma S_i^\alpha (X_{i+1} - X_i), i = 0, \dots, M-1, \\ S_0 \text{ dado,} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} (1 - \Delta t \mu) S_{i+1} \equiv S_i + \sigma S_i^\alpha (X_{i+1} - X_i), i = 0, \dots, M-1, \\ S_0 \text{ dado.} \end{cases} \quad (4.3)$$

No que se segue utilizamos o método explícito (4.2). Na Figura 4.1 são apresentados os preços dos activos para  $\mu = 0.01, \sigma = 0.02, \alpha = 0.1, 0.4$ , e  $\Delta t = 0.01$ . O aumento do parâmetro  $\alpha$  induz um aumento na variabilidade. O mesmo comportamento se observa quando  $\sigma$  cresce (ver Figura 4.3).

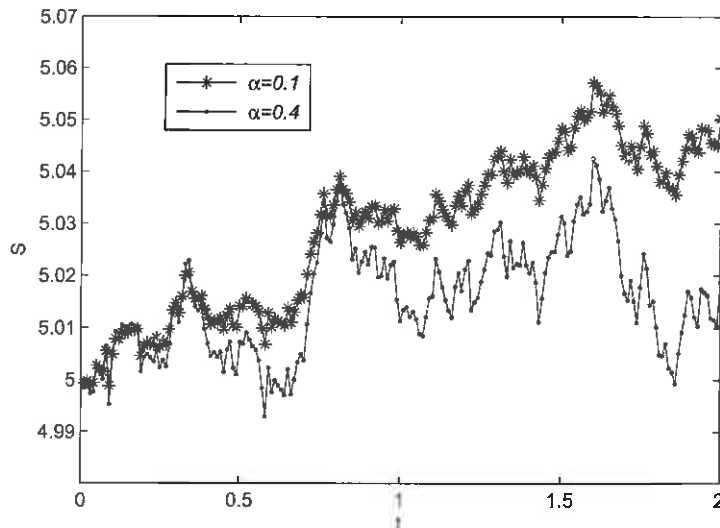


Figura 4.1: Preços dos activos com  $\mu = 0.01, \sigma = 0.02, \alpha = 0.1, 0.4$ , definidos por (4.2) para  $\Delta t = 0.01$ .

A Figura 4.2 ilustra o comportamento dos preços dos activos para  $\sigma = 0.02, \mu = 0.01, \mu = 0.04, \alpha = 0.1$  e  $\Delta t = 0.01$ . Das Figuras 3.1 e 4.2 constatamos que o comportamento do preço do activo quando há um aumento da deriva nos modelos BS e CR é análogo.

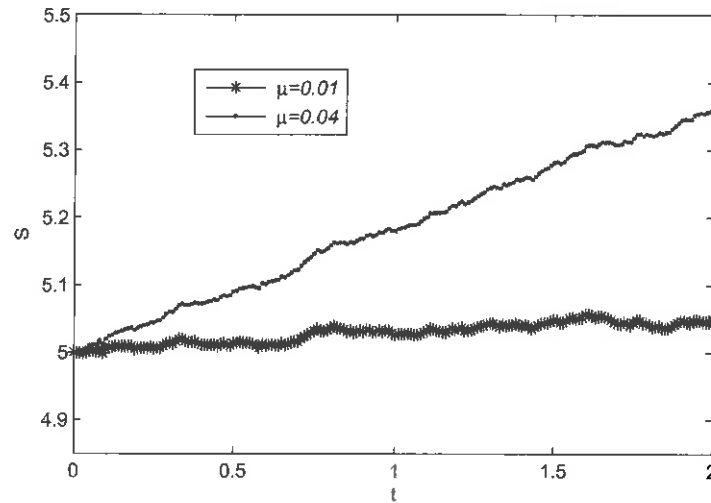


Figura 4.2: Preços dos activos com  $\sigma = 0.02$ ,  $\mu = 0.01$ ,  $\mu = 0.04$  e  $\alpha = 0.1$ , definidos por (4.2) para  $\Delta t = 0.01$ .

O comportamento do preço dos activos definido pelo modelo CR (4.2) quando o parâmetro  $\sigma$  aumenta é ilustrado na Figura 4.3. Observamos que o aumento deste parâmetro induz um aumento da variabilidade dos preços.

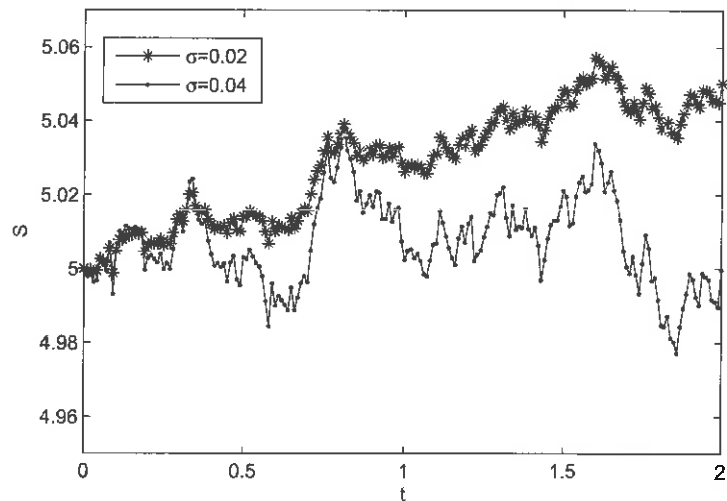


Figura 4.3: Preços dos activos com  $\sigma = 0.02, 0.04$ ,  $\mu = 0.01$  e  $\alpha = 0.1$ , definidos por (4.2) para  $\Delta t = 0.01$ .

### 4.3 CR para opções

Seja  $V(S, t)$  o valor de uma opção europeia no instante  $t$  sobre o activo de preço  $S$ . Consideremos a carteira  $\Pi(S, t)$  definida por  $\Pi(S, t) = V(S, t) - \Delta S$ , em que  $\Delta$  denota o número de activos com preço  $S$ .

A carteira apresenta, no período de tempo  $dt$ , a variação

$$d\Pi = dV = \Delta dS. \quad (4.4)$$

Pelo Lema de Itô 3, a variação do preço da opção é dada por

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2. \quad (4.5)$$

Atendendo a que  $dS$  satisfaz (4.1), de (4.5) obtemos

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX. \quad (4.6)$$

A estimativa para o preço da opção obtém-se considerando a variação da carteira.

Conjugando (4.4) com (4.6) e (4.1) estabelecemos

$$d\Pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt - \Delta (\mu S dt + \sigma S dX),$$

isto é

$$d\Pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu \left( \frac{\partial V}{\partial t} - \Delta \right) S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) S dX. \quad (4.7)$$

Considerando agora  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ , a componente estocástica do segundo membro de (4.7) anula-se tendo-se

$$d\Pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu \left( \frac{\partial V}{\partial t} - \Delta \right) S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \quad (4.8)$$

A variação da carteira pode também ser calculada considerando que a taxa de juro é  $r$  e que não há arbitragem tendo-se

$$d\Pi = r\Pi dt. \quad (4.9)$$

Conjugando as igualdades (4.8) e (4.9) obtemos a equação de Black-Scholes com volatilidade variável

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, S > 0, t \in (0, T_m], \quad (4.10)$$

em que  $T_m$  denota o tempo de maturidade. Finalmente, seja  $v(S, t) = V(S, T_m - t)$ .

Temos

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + rS \frac{\partial v}{\partial S} - rv, S > 0, t \in (0, T_m], \quad (4.11)$$

que é complementada com as seguintes condições

$$v(S, 0) = \max\{S - E, 0\}, S > 0, \quad (4.12)$$

quando a opção é uma *call*,

$$v(0, t) = 0, t \in (0, T_m], \quad (4.13)$$



$$\lim_{S \rightarrow \infty} (v(S, t) - S) = 0. \quad (4.14)$$

Seguindo a demonstração do Teorema 4, podemos demonstrar que se  $\frac{\partial^2}{\partial S^2}(\sigma^2 S^2)$  é limitada, então o problema diferencial (4.11)-(4.14) tem quando muito uma solução. De facto, se  $w(S, t) = v_1(S, t) - v_2(S, t)$  e  $v_1$  e  $v_2$  satisfazem (4.11)-(4.14), então é suficiente observar que se tem

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial S^2} w \sigma^2 S^2 ds &\equiv - \int_0^\infty \left(\frac{\partial w}{\partial S}\right)^2 \sigma^2 S^2 ds = - \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial S} w \frac{\partial}{\partial S} (\sigma^2 S^2) ds \\ &\leq \int_0^\infty \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} (\sigma^2 S^2) ds \\ &\leq \text{Conts.} \|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2. \end{aligned}$$

#### 4.4 CR para opções - simulação numérica

Atendendo a que a expressão da solução do problema diferencial não é conhecida, o comportamento do preço de opções europeias só pode ser descrito utilizando métodos numéricos para equações diferenciais de derivadas parciais. Neste trabalho consideramos os métodos de diferenças finitas. Para o efeito consideramos  $S_{max}$  fixo arbitrariamente grande. Introduzimos em  $[0, S_{max}]$  a rede uniforme  $\{S_i, i = 0, \dots, N\}$  de espaçamento  $h$ ,  $S_{i+1} = S_i + ih, i = 0, \dots, N - 1, S_0 = 0, S_{max} = S_N$ . Seja  $\{t_n, n = 0, \dots, M\}$  a rede uniforme, de espaçamento  $\Delta t$ , definida em  $[0, T_m]$ ,  $t_{n+1} = t_0 + n\Delta t, t_0 = 0, t_M = T_m$ . Por  $v_i^n$  denotamos a aproximação para  $v(S_i, t_n)$  definidas pelos esquemas de diferenças finitas que apresentamos seguidamente. A discretização das derivadas parciais, de primeira e segunda ordens, relativamente ao preço do activo é feita utilizando os operadores de diferenças centradas de segunda ordem  $D_2$  e  $D_c$  definidos por

$$\begin{aligned} D_2 u_i &= \frac{1}{h^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \\ D_c u_i &= \frac{1}{2h} (u_{i+1} - u_{i-1}), i = 1, \dots, N - 1, \end{aligned}$$

e o operador de diferenças regressivas

$$D_{-x} u_i = \frac{1}{2h} (u_i - u_{i-1}), i = 1, \dots, N.$$

Consideramos seguidamente os métodos numéricos explícito centrado e explícito *upwind* definidos, respectivamente, por (4.15) e (4.16). O método (4.15) é estabelecido considerando no cálculo de uma aproximação para  $v$  no nível temporal  $t_{n+1}$  as discretizações dos termos difusivo  $\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}$  e convectivo  $rS \frac{\partial v}{\partial S}$  utilizando os operadores  $D_2$  e  $D_c$ . No método (4.16) o operador  $D_c$  foi substituído por  $D_{-x}$ .

- Método explícito centrado:

$$v_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left( (\sigma_i^n)^2 S_i^2 \frac{\Delta t}{h^2} - r S_i \frac{\Delta t}{h} \right) v_{i-1}^n + (1 - (\sigma_i^n)^2 S_i^2 \frac{\Delta t}{h^2} - r \Delta t) v_i^n + \frac{1}{2} \left( (\sigma_i^n)^2 S_i^2 \frac{\Delta t}{h^2} + r S_i \frac{\Delta t}{h} \right) v_{i+1}^n, \quad i = 1, \dots, N-1, n = 0, \dots, M-1, \quad (4.15)$$

$$v_i^0 = \max\{S_i - E, 0\}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$v_0^n = 0, \quad v_N^n = S_{max}, \quad n = 0, \dots, M,$$

onde  $\sigma_i^n = \sigma(S_i, t_n)$ .

- Método explícito *upwind*:

$$v_i^{n+1} = \left( \frac{1}{2} (\sigma_i^n)^2 S_i^2 \frac{\Delta t}{h^2} - r S_i \frac{\Delta t}{h} \right) v_{i-1}^n + (1 - (\sigma_i^n)^2 S_i^2 \frac{\Delta t}{h^2} - r \Delta t + r S_i \frac{\Delta t}{h}) v_i^n + \frac{1}{2} (\sigma_i^n)^2 S_i^2 \frac{\Delta t}{h^2} v_{i+1}^n, \quad i = 1, \dots, N-1, n = 0, \dots, M-1,$$

$$v_i^0 = \max\{S_i - E, 0\}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$v_0^n = 0, \quad v_N^n = S_{max}, \quad n = 0, \dots, M.$$

(4.16)

Observamos que os métodos (4.15) e (4.16) têm ordem de consistência, relativamente ao espaço, 2 e 1, respectivamente. Esta propriedade não permite concluir que o primeiro método conduz a melhores resultados que o método (4.16) atendendo às propriedades de estabilidade. Nos resultados que apresentamos seguidamente consideramos  $T_m = 2, E = 5, \alpha = 0.4, \sigma = 0.02, r = 0.1$  e  $s_{max} = 100$ . Na Figura 4.4 apresentamos a evolução do preço da opção definido pelo método centrado (4.15) com  $h = 1, \Delta t = 0.01$ .

Na Figura 4.5 apresentamos a evolução do preço da opção definido pelo método (4.15) com  $h = 0.1$  e  $\Delta t = 0.01$ . Os resultados apresentados não sofrem alteração relativamente aos apresentados na Figura 4.4.

Uma vez que não se observou numericamente qualquer comportamento de instabilidade, não apresentamos a simulação numérica obtida com o método (4.16) pois que os resultados obtidos não são significativamente diferentes dos obtidos com o método (4.15). Assim, no que se segue consideramos o método (4.15) com  $h = 0.1$  e  $\Delta t = 0.01$ .

Ilustramos seguidamente o comportamento do modelo CR para opções relativamente a alguns dos seus parâmetros. Na Figura 4.6 consideramos o comportamento das opções quando há um aumento da taxa de juro. Observamos que um aumento da taxa de juro é acompanhado por uma valorização do preço da opção.

O comportamento do preço da opção relativamente ao parâmetro  $\sigma$  é ilustrado nas figuras seguintes. Na Figura 4.7 apresentamos os resultados obtidos com  $r = 0.1, \alpha = 0.4$

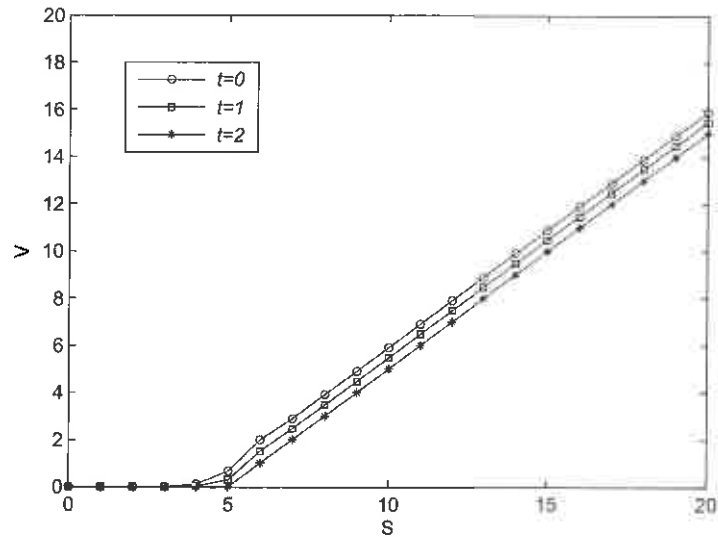


Figura 4.4: Preço de opções *call* definidas pelo modelo CR (4.15) com  $h = 1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $\alpha = 0.1$ , em  $t = 0, 1$  e  $2$ .

e  $\sigma = 0.02, 0.2$  mas para  $S < 6$ . Observamos que para  $\sigma = 0.2$  há uma valorização do preço das opções. A partir deste valor do activo, o preço da opção não apresenta variação significativa como podemos ver na Figura 4.8.

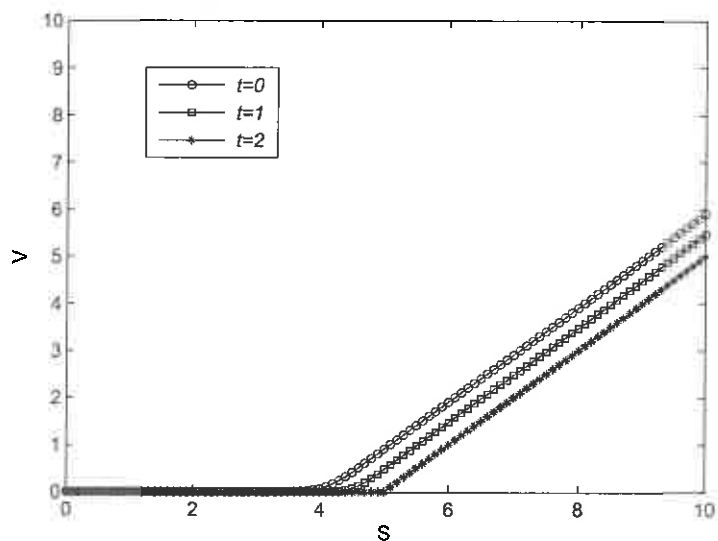


Figura 4.5: Preço de opções *call* definidas pelo modelo CR (4.15) com  $h = 0.1, \Delta t = 0.01, r = 0.1, \sigma = 0.02, \alpha = 0.1$ , em  $t = 0.1$  e 2.

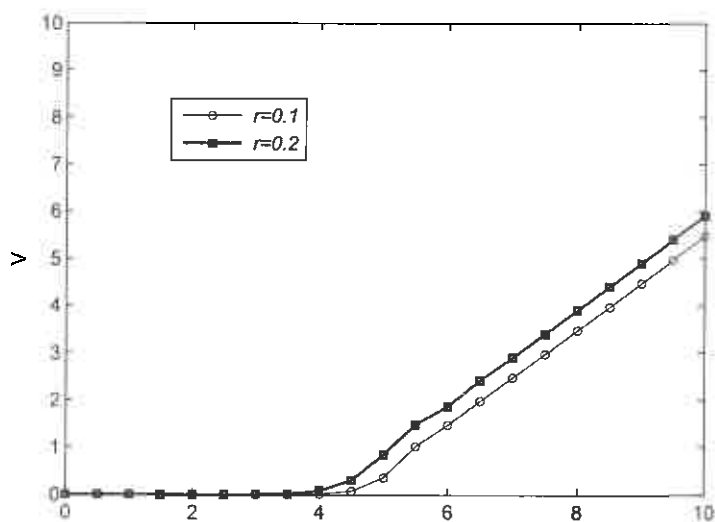


Figura 4.6: Preço de opções *call* definidas pelo modelo CR (4.15) com  $h = 0.1, \Delta t = 0.01, \sigma = 0.02, \alpha = 0.1$ , e  $r = 0.1, 0.2$ , em  $t = 1$ .

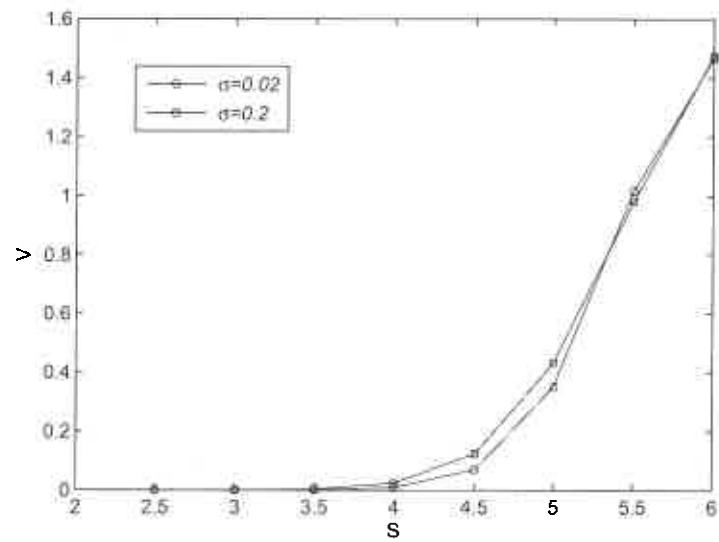


Figura 4.7: Preço de opções *call* definidas pelo modelo CR (4.15) com  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $\alpha = 0.1$ , e  $r = 0.1.02$ , em  $t = 1$ , para  $S < 6$ .

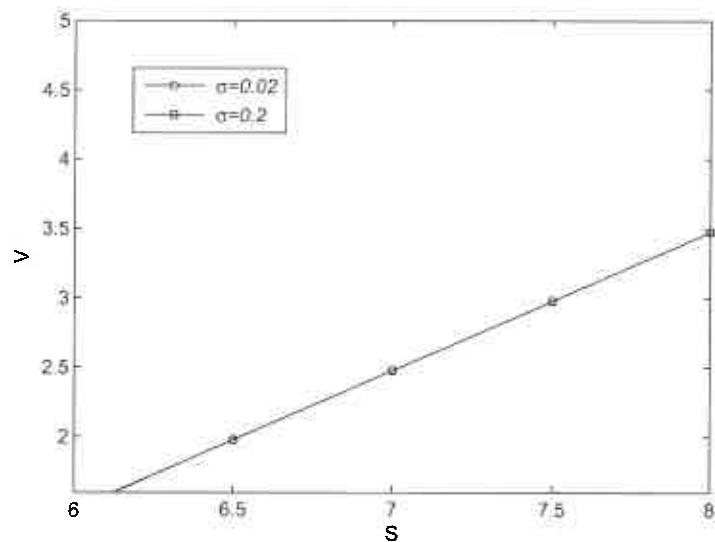


Figura 4.8: Preço de opções *call* definidas pelo modelo CR (4.15) com  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $\sigma = 0.02$ ,  $\alpha = 0.1$ , e  $r = 0.1.02$ , em  $t = 1$ , para  $S > 6$ .



# Capítulo 5

## O Modelo de Hobson e Rogers

### 5.1 Introdução

No capítulo anterior foi estudado o modelo CR para os preços de activos e para a evolução de opções em que a volatilidade é estocástica já que depende do preço do activo no instante  $t$ .

Há nos estudiosos do mercado financeiro a aceitação de que as propriedades do mercado dependem do seu passado. De facto, nos modelos propostos em [1], [3], [12] o comportamento do preço do activo é modelado por uma equação diferencial estocástica com atraso em que a volatilidade depende do passado do preço do activo mas apenas num período específico. Um modelo para a dinâmica do preço do activo em que a volatilidade é estocástica mas que depende de todo o seu passado foi proposto por Hobson e Rogers em 1998 ([11]). O objectivo deste capítulo é o estudo deste último modelo para o preço de activos - Secção 5.2 e para opções europeias sobre estes activos - Secção 5.3.

Finalmente observamos que o modelo de Hobson e Rogers tem atraído a atenção de um conjunto considerável de investigadores. Sem pretendermos ser exaustivos, salientamos os trabalhos [5], [6] e [7] bem como as suas referências.

### 5.2 HR para activos

No que segue tomamos uma particularização do modelo proposto por Hobson e Rogers em [11]. Estes autores introduzem uma equação diferencial estocástica para uma nova variável estocástica  $Z(t)$  que depende do preço do activo e que é definida por  $Z(t) = \ln(e^{-rt}S(t))$  em que  $e^{-rt}S(t)$  representa o preço do activo com desconto.

Seja  $D(t)$  a variável estocástica definida por

$$D(t) \equiv \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\tau} (Z(t) - Z(t - \tau)) d\tau, \quad (5.1)$$

em que o parâmetro  $\lambda$  representa a taxa de desconto da diferença entre o preço  $Z(t)$  e

do seu passado  $Z(t - \tau)$ . Observamos que para  $D(t)$  vale a representação seguinte

$$D(t) \equiv Z(t) - \lambda \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} Z(\tau) d\tau. \quad (5.2)$$

A relação anterior permite de facto afirmar que  $D(t)$  representa a diferença entre o preço  $Z(t)$  e o seu passado  $Z(\tau)$  depois de descontado pelo factor  $\lambda e^{-(t-\tau)}$ .

Hobson e Rogers propõem o seguinte problema diferencial estocástico para  $Z(t)$

$$\begin{cases} dZ(t) \equiv \mu(D(t))dt + \sigma(D(t))dX(t), & t > 0, \\ Z(0) \text{ dado,} \end{cases} \quad (5.3)$$

onde  $X(t)$  representa o processo Browniano e  $\sigma$  e  $\mu$  são funções de Lipschitz sendo  $\sigma(\cdot)$  estritamente positiva. Tem-se o resultado seguinte:

**Lema 1.** *Seja  $Z(t)$  a solução de (5.3) e  $D(t)$  definido por (5.1). Então*

$$dD(t) \equiv (\mu(D(t)) - \lambda D(t)) dt + \sigma(D(t)) dX(t), t > 0. \quad (5.4)$$

**Demonstração:** Por hipótese  $\mu$  e  $\sigma$  são funções de Lipschitz, logo, dado  $D_0$ , existe e é única a solução de (5.4) que satisfaz  $D(0) = D_0$ . Atendendo à representação (5.2), tem-se

$$\begin{aligned} dD(t) &= dZ(t) - \lambda Z(t) + \lambda^2 \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} Z(\tau) d\tau \\ &= \mu(D(t))dt + \sigma(D(t))dX(t) - \lambda \left( Z(t) - \lambda \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} Z(\tau) d\tau \right) dt \\ &\equiv (\mu(D(t)) - \lambda D(t)) + \sigma(D(t))dX(t). \end{aligned}$$

■

A partir da equação diferencial para o processo  $Z(t)$ , estabelecemos seguidamente a equação diferencial para o preço do activo. Tem-se

$$dZ(t) = -rdt + \frac{dS(t)}{S(t)}$$

e, atendendo a que  $Z(t)$  satisfaz (5.3), vem

$$dS(t) \equiv (\mu(D(t)) + r)S(t)dt + \sigma(D(t))S(t) dX(t). \quad (5.5)$$

Da equação (5.5) constatamos que Hobson e Rogers consideram na dinâmica do preço do activo a deriva dependendo do passado do preço do activo descontado a taxa de juro  $r$ .

Embora a existência de  $Z(t)$  e  $D(t)$  esteja garantida, o seu cálculo efectivo é feito numericamente. Para tal consideremos o intervalo  $[0, T_m]$  e a rede uniforme  $\{t_n\}$  de



espaçamento  $\Delta t$  com  $t_0 = 0, t_M = T_m$ . Sejam  $Z_i$  e  $D_i$  as aproximações para  $Z(t_i)$  e para  $D(t_i)$ , respectivamente, definidas pelos esquemas de diferenças

$$\begin{cases} D_{i+1} = D_i + \Delta t(\mu(D_i) - \lambda D_i) + \sigma(D_i)(X_{i+1} - X_i), i = 0, \dots, M-1 \\ D_0 \text{ dado.} \end{cases} \quad (5.6)$$

e

$$\begin{cases} Z_{i+1} = (Z_i + \Delta t\mu(D_{i+1})) + \sigma(D_{i+1})(X_{i+1} - X_i), i = 0, \dots, M-1 \\ Z_0 \text{ dado.} \end{cases} \quad (5.7)$$

O preço do activo é então determinado através da igualdade

$$S_i = e^{Z_i + rt_i}, i = 0, \dots, M. \quad (5.8)$$

Nos resultados numéricos obtidos consideramos  $\mu$  constante e a função de volatilidade introduzida em [11] por Hobson e Rogers

$$\sigma(x) = \min\{\eta\sqrt{1 + \epsilon x^2}, N_v\} \quad (5.9)$$

em que  $\eta, \epsilon$  e  $N_v$  são constantes ( $N_v \gg \eta, \epsilon$ ).

Salientamos que a função anterior foi substituída por

$$\sigma(x) = \frac{a + bx^2}{c + dx^2}, \quad (5.10)$$

e

$$\sigma(x) = \frac{1 + ax + bx^2}{c + dx + ex^2}, \quad (5.11)$$

em que  $a, b, c, d$  e  $e$  são constantes, por exemplo, em [9]. No entanto estas duas últimas funções introduzem um maior número de parâmetros a determinar a partir dos dados do mercado o que limita a sua aplicabilidade.

Na Figura 5.1 apresentamos a evolução do preço dos activos definido por (5.6), (5.7) e (5.8) com  $S(0) = 5, \Delta t = 0.01$ , para  $\mu = 0.01, r = 0.01, \epsilon = 1, \eta = 1, N_v = 10$ . A evolução da volatilidade é apresentada na Figura 5.2.

A influência do parâmetro  $\lambda$  no comportamento do preço dos activos definidos pelo modelo HR é ilustrada na Figura 5.3. Observamos que para tempos mais altos a influência deste parâmetro tem mais significado tendo-se preços mais elevados para maior valor de  $\lambda$ .

Na Figura 5.4 ilustramos o comportamento do modelo HR para activos em função da taxa de juro  $R$ . Nesta figura apresentamos os resultados obtidos com (5.6), (5.7) e (5.8),  $S(0) = 5, \Delta t = 0.01, \mu = 0.01, \lambda = 0.1, \epsilon = 1, \eta = 1, N_v = 10$  e  $r = 0.01, 0.1$ . O

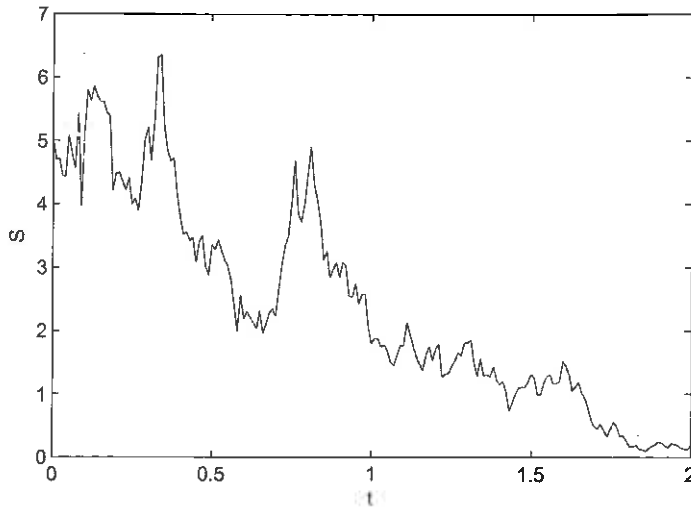


Figura 5.1: Evolução do preço dos activos definido por (5.6), (5.7) e (5.8) com  $\Delta t = 0.01$ , para  $S(0) = 5$ ,  $\mu = 0.01$ ,  $r = 0.01$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\eta = 1$ ,  $N_v = 10$ .

aumento da taxa de juro induz um aumento no preço do activo e esse aumento torna-se mais significativo para tempos mais elevados e para maiores preços. O comportamento dos preços dos activos relativamente à deriva é análogo ao anterior como está ilustrado na Figura 5.5.

A comparação entre os modelos HR, CR e BS para activos é apresentada na Figura 5.6. Nesta figura apresentamos a evolução dos preços dos activos calculados com o modelo HR, com  $\Delta t = 0.01$ , para  $\mu = 0.01$ ,  $r = 0.01$ ,  $\lambda = 0.01$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\eta = 1$ ,  $N_v = 10$ , com o modelo CR com  $\Delta t = 0.01$ ,  $\mu = 0.01$ ,  $\sigma = \frac{1}{M+1} \sum_{i=0}^M \sigma(S_i)$  e  $\alpha = 0.5$ , e com o modelo BS com  $\Delta t = 0.01$ ,  $\mu = 0.01$  e  $\sigma = \frac{1}{M+1} \sum_{i=0}^M \sigma(S_i)$ . Observamos o mesmo comportamento qualitativo mas os preços dos activos são significativamente diferentes.

### 5.3 HR para opções

Consideramos seguidamente uma opção *call* sobre um determinado número de activos de preço  $S(t)$ . Atendendo a que  $D(t)$  é definido por (5.1), podemos assumir que o preço da opção  $V$  sobre os activos de preço  $S(t)$  depende de  $D(t)$  e  $S(t)$ , isto é  $V = V(D(t), S(t), t)$ . Seja  $v(D, S, t) = V(D, S, T_m - t)$ . Em [11] é estabelecida para  $v$  a seguinte equação diferencial de derivadas parciais

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = & \sigma(D)^2 \left( \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial D^2} + S \frac{\partial^2 v}{\partial D \partial S} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial D} \right) \\ & + rS \frac{\partial v}{\partial S} - \lambda D \frac{\partial v}{\partial D} - rv, S \in \mathbb{R}^+, t \in (0, T_m]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

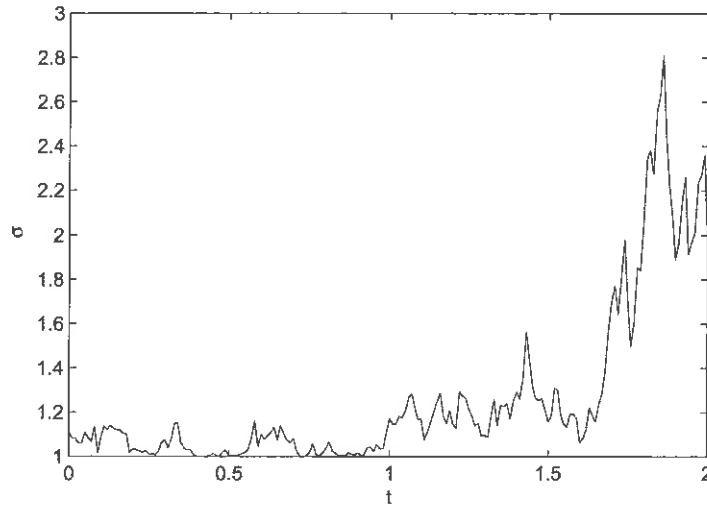


Figura 5.2: Evolução da volatilidade  $\sigma(S)$  definida por (5.6), (5.7), (5.8) e (5.9), com  $\Delta t = 0.01$ , para  $S(0) = 5, \mu = 0.01, r = 0.01, \lambda = 0.1, \epsilon = 1, \eta = 1, N_v = 10$ .

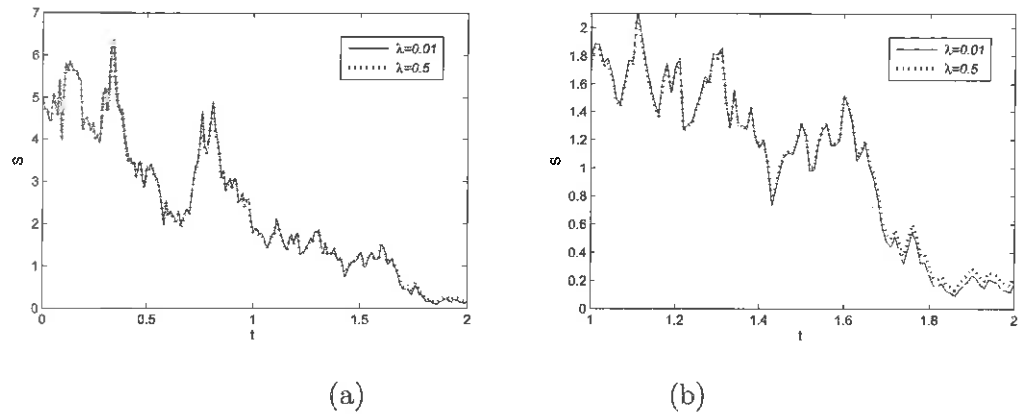


Figura 5.3: Evolução do preço dos activos definido por (5.6), (5.7) e (5.8) com  $\Delta t = 0.01$ , para  $S(0) = 5, \mu = 0.01, r = 0.01, \epsilon = 1, \eta = 1, N_v = 10$  e  $\lambda = 0.01, 0.5$ .

Atendendo à definição de  $D(t)$  (5.2), tomamos  $D \in \mathbb{R}$ . Assim, em (5.12) tomamos  $D \in \mathbb{R}$  e esta equação é complementada pelas condições de fronteira

$$v(D, 0, t) = 0, \lim_{S \rightarrow \infty} (v(D, S, t) - S) = 0, D \in \mathbb{R}, t \in (0, T_m]. \quad (5.13)$$

Para uma opção Europeia do tipo *call*, a condição inicial para  $v$ , que corresponde à condição final para  $V$ , é definida por

$$v(D, S, 0) = \max\{S - E, 0\}, S \in \mathbb{R}^+, D \in \mathbb{R}. \quad (5.14)$$

Fixado  $S_{max}$  arbitrariamente grande quando comparado com o preço de exercício  $E$ , as condições na equação diferencial (5.12) tomamos  $S \in (0, S_{max})$  e as condições (5.13) e

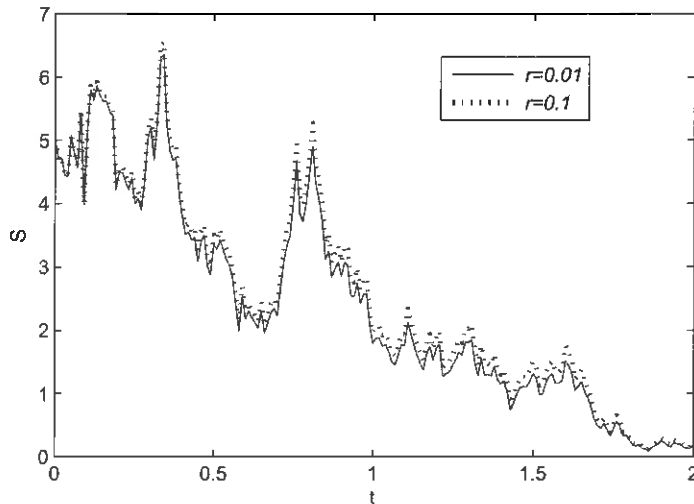


Figura 5.4: Evolução do preço dos activos definido por (5.6), (5.7) e (5.8) com  $\Delta t = 0.01$ , para  $S(0) = 5$ ,  $\mu = 0.01$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\eta = 1$ ,  $N_v = 10$  e  $r = 0.01, 0.1$

(5.14) são substituídas por

$$v(D, 0, t) = 0, v(D, S_{max}, t) = S_{max}, D \in \mathbb{R}, t \in (0, T_m], \quad (5.15)$$

e

$$v(D, S, 0) = \max\{S - E, 0\}, S \in (0, S_{max}), D \in \mathbb{R}, t \in (0, T_m]. \quad (5.16)$$

Com o objectivo de introduzir na secção seguinte um método numérico de diferenças finitas para determinar aproximações para o preço da opção, consideramos  $D \in [-D_{max}, D_{max}]$ . Assim, na equação diferencial (5.12) tomamos  $S \in (0, S_{max}), D \in (-D_{max}, D_{max})$ , nas condições (5.15) e (5.16) substituímos  $D \in \mathbb{R}$  por  $D \in (-D_{max}, D_{max})$  e impomos ainda as seguintes condições de fronteira fictícias

$$\frac{\partial v}{\partial D}(-D_{max}, S, t) = 0, S \in (0, S_{max}), t \in (0, T_{max}], \quad (5.17)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial D}(D_{max}, S, t) = 0, S \in (0, S_{max}), t \in (0, T_{max}]. \quad (5.18)$$

## 5.4 HR para opções - simulação numérica

Consideremos em  $[0, T_m]$  a rede  $\{t_n, n = 0, \dots, M, t_0 = 0, T_m = T_M\}$  de espaçamento  $\Delta t$  e em  $[0, S_{max}] \times [-D_{max}, D_{max}]$  a rede rectangular uniforme

$$\{(S_i, D_j), i = 0, \dots, N_S, j = 0, \dots, N_D, S_0 = 0, S_{max} = S_{N_D}, D_0 = -D_{max}, D_{N_D} = D_{Max}\}$$

em que  $S_i - S_{i-1} = h, D_j - D_{j-1} = k$ .

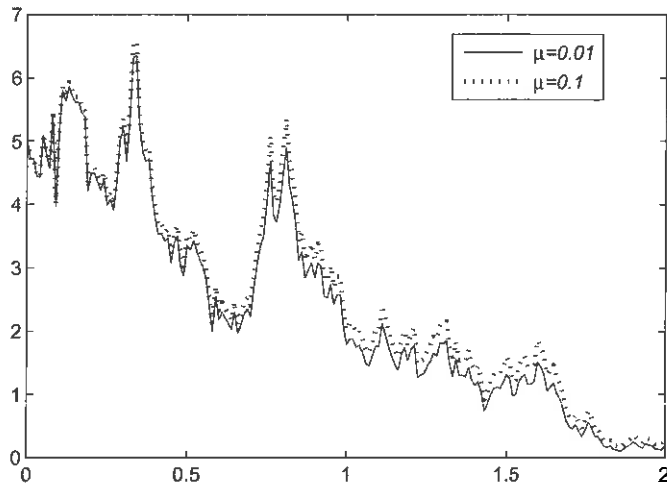


Figura 5.5: Evolução do preço dos activos definido por (5.6), (5.7) e (5.8) com  $\Delta t = 0.01$ , para  $S(0) = 5$ ,  $\mu = 0.01$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\eta = 1$ ,  $N_v = 10$  e  $\mu = 0.01, 0.1$

Na construção do método de diferenças finitas para o problema diferencial introduzido na secção anterior, substituímos as derivadas parciais de primeira e segunda ordens por cocientes de diferenças centradas de primeira e segunda ordens, respectivamente, e a derivada mista  $\frac{\partial^2 v}{\partial D \partial S}(S_i, D_j, t_n)$  é substituída pelo cociente de diferenças

$$D_{S,D}v(S_i, D_j, t_n) = \frac{1}{kh} \left( (v(S_{i+1}, D_{j+1}, t_n) - v(S_{i-1}, D_{j+1}, t_n)) - (v(S_{i+1}, D_{j-1}, t_n) - v(S_{i-1}, D_{j-1}, t_n)) \right).$$

As condições de fronteira (5.17) e (5.18) são discretizadas utilizando operadores de diferenças progressivas e regressivas em relação à variável  $D$ , respectivamente. Assim, no que se segue, consideramos o método explícito

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} = & \frac{\sigma(D_j)^2 S_i^2}{2h^2} (v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n) + \frac{\sigma(D_j)^2}{2k^2} (v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n) \\ & + \frac{\sigma(D_j)^2 S_i}{4hk} \left( (v_{i+1,j+1}^n - v_{i-1,j+1}^n - v_{i+1,j-1}^n + v_{i-1,j-1}^n) \right. \\ & \left. - \left( \frac{\sigma(D_j)^2}{2} + \lambda D_j \right) \frac{1}{k} (v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n) \right) + r S_i \frac{1}{h} (v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n) - r v_{i,j}^n, \\ & i = 1, \dots, N_S - 1, j = 1, \dots, N_D - 1, n = 0, \dots, M - 1, \end{aligned} \quad (5.19)$$

em que

$$\begin{aligned} v_{i,j}^0 &= \max\{S_i - E, 0\}, i = 0, \dots, N_S, j = 0, \dots, N_D, \\ v_{0,j}^n &= 0, v_{N_S,j}^n = S_{max}, j = 0, \dots, N_D, n = 1, \dots, M, \\ v_{i,1}^n &= v_{i,0}^n, v_{i,N_D}^n = v_{i,N_D-1}^n, i = 0, \dots, N_S, n = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (5.20)$$

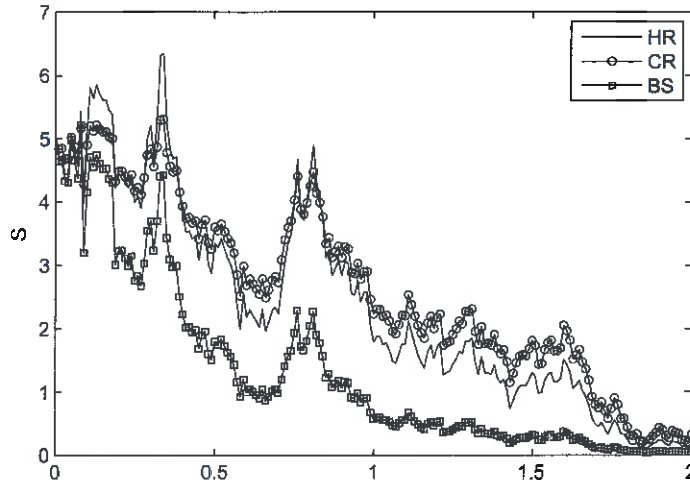


Figura 5.6: Evolução dos preços dos activos definidos pelos modelos HR, CR e BS: modelo HR com  $\Delta t = 0.01$ , para  $\mu = 0.01, r = 0.01, \lambda = 0.1, \epsilon = 1, \eta = 1, N_v = 10$ ; modelo CR com  $\Delta t = 0.01, \mu = 0.01, \sigma = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^M \sigma(S_i)$  e  $\alpha = 0.5$ ; e modelo BS com  $\Delta t = 0.01, \mu = 0.01$  e  $\sigma = \frac{1}{M+1} \sum_{i=0}^M \sigma(S_i)$ .

Nas figuras seguintes apresentamos a evolução do preço da opção para  $T_m = 0.0001$ ,  $E = 1, S_{max} = 4, D_{max} = 4$  e  $\eta = 1, \epsilon = 1, N_v = 10, \lambda = 0.1, r = 0.1$ . Consideramos  $\Delta t = 0.00001, h = k = 0.2$  Na Figura 5.7 apresentamos a condição inicial e a Figura 5.8 ilustra o comportamento da solução numérica definida por (5.19), (5.20) com os parâmetros anteriores.

Observamos que a simulação numérica mostra que o método (5.19), (5.20) é instável. Por exemplo na Figura 5.9 apresentamos os resultados obtidos com  $\Delta t = 0.00001, h = k = 0.1$ . A redução da medidas de passo  $h$  e  $k$  induz um comportamento oscilatório.

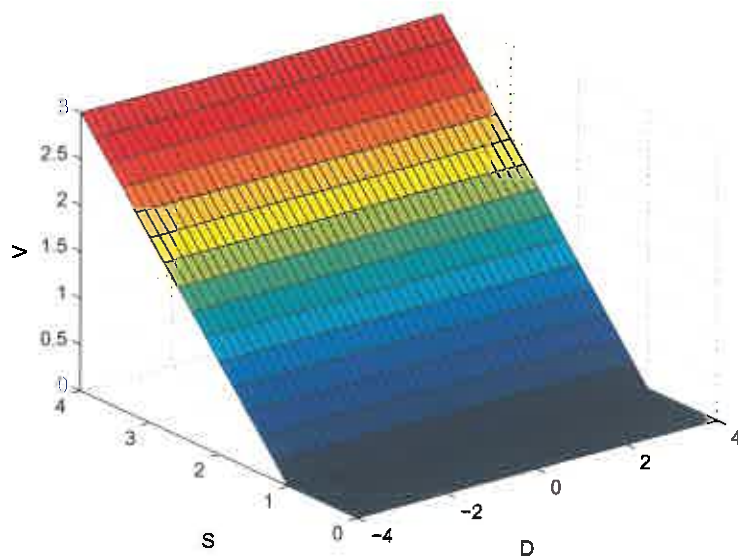


Figura 5.7: Gráfico de  $V(S, D, T_m)$  para  $S \in [0, 4]$ ,  $D \in [-4, 4]$ .

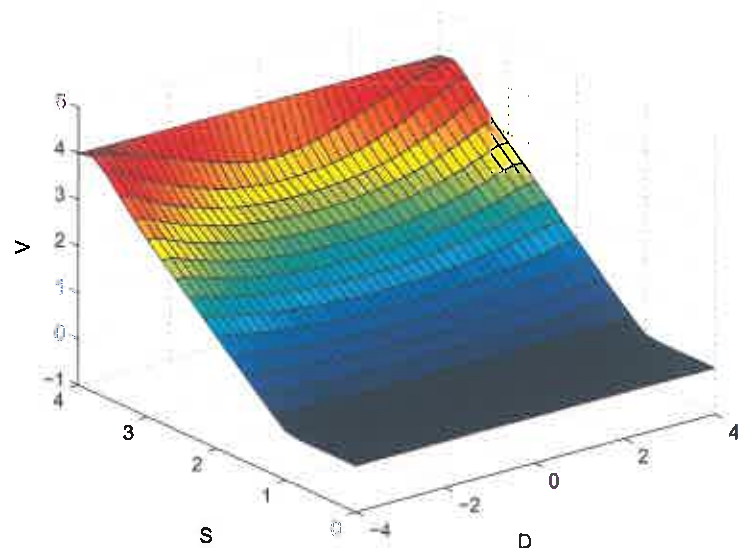


Figura 5.8: Preço da opção *call* definida pelo modelo HR (5.19), (5.20) em  $t = 0$  obtida com  $T_m = 0.0001$ ,  $E = 1$ ,  $S_{max} = 4$ ,  $D_{max} = 4$ ,  $\eta = 1$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $N_v = 10$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $r = 0.1$  e  $\Delta t = 0.00001$ ,  $h = k = 0.2$

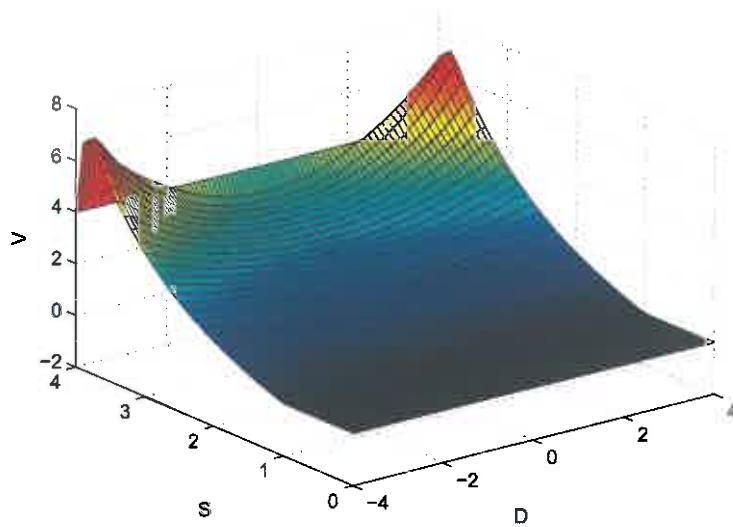


Figura 5.9: Preço da opção *call* definida pelo modelo HR (5.19), (5.20) em  $t = 0$  obtida com  $T_m = 0.0001$ ,  $E = 1$ ,  $S_{max} = 4$ ,  $D_{max} = 4$ ,  $\eta = 1$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $N_v = 10$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $r = 0.1$  e  $\Delta t = 0.00001$ ,  $h = k = 0.1$



## Capítulo 6

# Comentários e Conclusões

Nesta dissertação foram estudados modelos para a evolução de preços de activos e opções em que a volatilidade é estocástica, nomeadamente o modelo de CR e o modelo HR. Salientamos que no primeiro modelo a volatilidade é função do preço do activo e no modelo HR a volatilidade depende do passado do preço do activo. Atendendo a este facto, podemos afirmar que neste último modelo é introduzido um certo efeito memória relativamente ao passado do preço do activo.

O comportamento dos preços de activos e opções modelados pelo modelos BS, CR e HR foram ilustrados recorrendo a métodos numéricos. Deste modo foi ilustrado o efeito dos parâmetros que caracterizam cada modelo na evolução dos preços de activos e de opções. Salientamos que para o modelo BS, a evolução do preço de opções foi ilustrado recorrendo à popular fórmula de Black-Scholes.

A simulação numérica do modelo CR para opções foi feita utilizando um método de diferenças finitas explícito obtido discretizando as derivadas relativamente ao preço do activo utilizando operadores de diferenças centradas. Observamos que o problema diferencial apresenta coeficientes variáveis. A simulação numérica efectuada utilizando tal método permite-nos intuir que o método é estável. Notamos que foi feita a comparação entre o método anterior e o correspondente método *upwind*.

Na simulação numérica do modelo HR para opções utilizamos um método de diferenças finitas explícito obtido discretizando as derivadas parciais utilizando operadores de diferenças centradas. A simulação numérica realizada permite-nos intuir da instabilidade do método usado.

Uma questão natural que permanece ao concluir este trabalho, é a construção de um método de diferenças finitas para o modelo HR para opções que seja estável.



# Bibliografia

- [1] M. Arriojas, Y. Hu, S-E Mohammed e G. Pap. A delayed Black and Scholes formula. *Stochastic Analysis and Applications*, 25, 471–492, 2007.
- [2] F. Black e M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 87, 637–659, 1973.
- [3] M-H. Chang e R. K. Youree. Infinite-dimensional Black-Scholes equation with hereditary structure. *Applied Mathematics and Optimization*, 56, 395–424, 2007.
- [4] J.C. Cox e S.A. Ross. The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3, 145–166, 1976.
- [5] M. Di Francesco, P. Foschi e A. Pascucci. Analysis of an uncertain volatility model. *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, Volume 2006, Article ID 15609, 1–17, 2006.
- [6] M. Di Francesco e A. Pascucci. On complete model with stochastic volatility. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematics, Physics and Engineering Sciences*, 460, 3327–3338, 2010.
- [7] P. Foschi e A. Pascucci. Calibration of a path-dependent volatility model: empirical tests. *Computational Statistics and Data Analysis*, 53, 2219–2235, 2009.
- [8] W.K.H. Fung e D.A. Hsieh *Empirical analysis of implied volatility: stocks, bonds and currencies*. Proceedings of the Forth FORC Conference, University of Warwick, 1991.
- [9] V.B. Hallulli e T. Vargiolu. Robustness of the Hobson-Rogers model with respect to the offset function. Proceedings of the Ascona '05 Seminar on Stochastic Analysis. Random Fields and Applications 469 - 492, R. C. Dalang, M. Dozzi, F. Russo, editors, Birkhäuser 2007.

## BIBLIOGRAFIA

- [10] J. Hull e A. White. The pricing of options on assets with stochastic volatility. *Journal of Finance*, 42, 281–300, 1987.
- [11] D.G. Hobson e L.C.G. Rogers. Complete models with stochastic volatility. *Mathematical Finance*, 8, 27–48, 1998.
- [12] Y. Kazmerchuk, A. Swishchuk e J. Wu The pricing of options for security markets with delayed response. *Mathematics and Computers in Simulation*, 75, 69–79, 2007.
- [13] R.C. Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3, 125–144, 1976.
- [14] N. Ratanov. Jump telegraph processes and financial markets with memory. *Quantitative Finances*, 7, 575–583, 2007
- [15] M. Rubisntein. Nonparametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the 30 mosta active CBOE option classes from Aug. 23 1976 through Aug. 30 1978. *Journal of Finance*, 40, 455–480, 1985.