



# Uma Análise Comparativa dos Índices PSI 20, IBEX 35 e DAX 30 usando Onduletas

Madalena Moura Trindade Rodrigues de Carvalho

Dissertação para a obtenção do Grau de

**Mestre em Métodos Quantitativos em Finanças**

**Júri**

**Presidente:** Prof. Doutora Maria Esmeralda Elvas Gonçalves

**Orientador:** Prof. Doutora Ana Margarida Machado Monteiro

**Vogais:** Prof. Doutor António Alberto Ferreira dos Santos

**Data: Fevereiro de 2015**



# Resumo

O presente trabalho pretende aprofundar o estudo de três índices bolsistas europeus, PSI 20, IBEX 35 e DAX 30, utilizando para tal uma abordagem recente, a análise com onduletas. As características únicas das séries financeiras, como a ausência de estacionaridade, a presença de *clusters* de volatilidade e do efeito alavanca, exigem uma ferramenta minuciosa capaz de analisar profundamente a série. A análise com onduletas permite realizar a decomposição da série em vários níveis de detalhe e de aproximação, tendo em conta o domínio do tempo e o domínio da frequência simultaneamente. A relação entre os rendimentos dos três índices em estudo é avaliada utilizando uma abordagem baseada em onduletas. Os resultados mostram como estes três índices bolsistas se encontram bem correlacionados para frequências baixas.

**Palavras Chave:** Onduleta, Transformada discreta com onduleta, Transformada contínua com onduleta, Análise multiresolução, Transformada discreta com onduleta de máxima sobreposição

# Abstract

The aim of this work is to develop the study of three european stock market indexes, PSI 20, IBEX 35 and DAX 30, using a very promising tool called: wavelet analysis. Time series of financial asset returns often exhibit volatility clustering and leverage effects which require a great tool, capable of decomposing a time series in a set of detail and approximation coefficients into a time-frequency space. The link between the three stock market indexes is analysed with a wavelet-based measure. The results show that these european stock markets are highly integrated at lower frequencies.

**Keywords:** Wavelet, Discrete wavelet transform, Continuous wavelet transform, Multiresolution analysis, Maximal overlap discrete wavelet analysis



# Agradecimentos

*Expresso aqui o meu agradecimento a algumas pessoas que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a concretização desta dissertação.*

*Começo por agradecer à minha orientadora, Professora Doutora Ana Margarida Monteiro, a forma como orientou o meu trabalho. Toda a sua dedicação, apoio e as valiosas contribuições foram fulcrais na realização deste trabalho.*

*Aos meus pais por todo o apoio que me deram durante todo o meu percurso académico.*

*Às minhas colegas de mestrado que sempre me incentivaram.*

*Aos meus amigos, que me acompanharam neste percurso, pelo apoio e por todos os momentos de descontração.*



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Da análise de Fourier à análise com onduletas</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Análise com onduletas</b>	<b>9</b>
3.1	Alguns conceitos básicos . . . . .	9
3.2	Transformada contínua com onduletas . . . . .	13
3.3	Transformada discreta com onduletas e análise multiresolução . . . . .	16
3.4	Transformada discreta com onduletas de máxima sobreposição . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Análise comparativa dos índices PSI 20, IBEX 35 e DAX 30</b>	<b>21</b>
4.1	Análise descritiva dos índices . . . . .	22
4.2	Uma aplicação com onduletas . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Correlação</b>	<b>31</b>
5.1	Análise de correlação usando onduletas . . . . .	31
5.2	Resultados empíricos . . . . .	34
5.3	Análise de coerência . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>43</b>
	<b>Apêndice A</b>	<b>45</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>48</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Na União Europeia tem-se assistido a uma crescente interdependência dos mercados financeiros resultante da liberdade de circulação de bens e serviços, da criação de uma moeda única, o Euro, e da inovação tecnológica nos sistemas de negociação. O contexto atual dos mercados financeiros, bem como as características únicas dos rendimentos financeiros, exigem uma análise cuidada das séries financeiras. De facto, os rendimentos financeiros possuem um conjunto de factos estilizados que não convém ignorar, entre os quais, a presença de fenómenos como *clusters* de volatilidade, onde a volatilidade se encontra durante períodos consideravelmente longos afastada do nível médio, evidenciando persistência, e o efeito de alavanca, onde a volatilidade é tendencialmente maior em períodos de queda de preços. A metodologia utilizada nesta dissertação, a análise com onduletas, constitui uma técnica de análise que tem em conta estes factos estilizados e que permite realizar uma análise detalhada no domínio do tempo e no domínio da frequência, simultaneamente.

Graças a esta capacidade de decompôr as funções tanto no domínio da frequência como no domínio do tempo, esta abordagem constitui uma ferramenta única de processamento de sinais, muito aplicada na compressão de dados, eliminação do ruído de sinais, identificação de singularidades, entre outras aplicações, Mallat [16]. Os exemplos mais conhecidos de aplicação de onduletas incluem o algoritmo de compressão de dados relativos a impressões digitais utilizado pelo *Federal Bureau of Investigation* (FBI) e o algoritmo JPEG para efeitos de compressão relativa a imagem, Vidakovic e Mueller [29].

A história das onduletas é ainda recente. As onduletas mais simples apareceram em 1909, com Alfred Haar [12], um matemático alemão, que introduziu o que viria a ser conhecido como onduletas Haar, um sistema ortogonal de funções reais definidas, por exemplo, em  $]-1, 1[$ . No entanto, a teoria formal matemática sobre onduletas só viria a ser desenvolvida em 1982 com Jean Morlet e Alex Grossman [11]. O Geofísico francês e Grossman foram os primeiros a introduzir a transformada contínua com onduletas recorrendo a uma função,  $\psi$ , bem localizada no tempo e na frequência e que designaram

por onduleta. Como a transformada contínua com onduletas se revelou um método de aplicação complicado, em 1985, Yves Meyer descobriu que usando valores discretos para os parâmetros se chegava a uma base ortonormal no espaço de Hilbert  $L^2(\mathbf{R})$ . Mais tarde, em 1987, Stephan Mallat juntamente com Meyer [17, 18] introduziram a análise multiresolução. Desde então a pesquisa e o estudo com onduletas tornou-se um fenómeno que alastrou em todo o mundo.

As onduletas são ferramentas matemáticas para analisar séries temporais e imagens, entre outras aplicações. Nesta dissertação iremos aplicá-las ao estudo de séries temporais relativas a índices bolsistas.

A metodologia a ser utilizada nesta dissertação é uma abordagem inovadora relativa ao estudo dos três índices bolsistas PSI 20, IBEX 35, DAX 30, na medida em que se procura analisar em pormenor as influências que têm uns nos outros. Deste modo, pretende-se alertar para a utilidade desta análise nesta área de estudos.

No capítulo 2 é apresentada uma breve revisão de literatura, bem como uma breve exposição da análise de Fourier e a sua comparação com a análise com onduletas.

No capítulo 3 é descrita a metodologia do estudo. Inicia-se com a apresentação do conceito de onduleta, as suas propriedades e tipos existentes, passando pela descrição da transformada contínua e discreta com onduletas e pela apresentação da análise multiresolução e da transformada discreta com onduletas de máxima sobreposição.

O capítulo 4 inclui uma análise descritiva dos índices PSI 20, IBEX 35 e DAX 30 e uma aplicação da transformada discreta com onduletas aos rendimentos dos três índices bolsistas em estudo. Apresenta-se igualmente, a decomposição de cada uma das séries em coeficientes de detalhe e de aproximação.

No capítulo 5 realiza-se uma análise de correlação entre os rendimentos dos três índices em causa, baseada em dois tipos de transformada com onduletas: a transformada discreta de máxima sobreposição e a transformada contínua. Por último, no capítulo 6 são efetuadas as devidas conclusões.

## Capítulo 2

# Da análise de Fourier à análise com onduletas

A análise com onduletas é baseada na análise de Fourier, constituindo uma alternativa a ter em conta em muitas aplicações. Apresenta-se de seguida alguns conceitos essenciais da análise de Fourier, (ver [31, 25]).

As origens da análise de Fourier remontam a inícios do século XIX, mais precisamente, 1807, com o trabalho pioneiro de Jean Baptiste Joseph Fourier sobre a difusão de calor num sólido. Fourier considerou que uma determinada função  $f$  poderia ser representada por uma série de cossenos e senos e que esta não era mais do que uma combinação linear de funções trigonométricas simples da forma  $\sin(nz)$  e  $\cos(nz)$  para valores inteiros de  $n$ .

**Definição 1.** *Seja  $f$  uma função seccionalmente contínua no intervalo  $[-L, L]$ ,  $L \in \mathbf{R}$ . Então a série de Fourier de  $f$  é a série de funções*

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

onde os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$  se definem por

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e designam-se por coeficientes de Fourier.

O teorema seguinte apresenta uma condição de convergência das séries de Fourier.

**Teorema 2.** *Seja  $f$  uma função periódica de período  $2L$ ,  $L \in \mathbf{R}$ . Se  $f$  e  $f'$  forem seccionalmente contínuas em  $[-L, L]$ , então a série de Fourier de  $f$  é convergente em  $\mathbf{R}$ . A soma da série de Fourier coincide com  $f$  nos pontos em que  $f$  for contínua. Nos pontos  $x_0$  em que  $f$  for descontínua é igual à média aritmética dos limites laterais de  $f$ :*

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2},$$

onde  $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  e  $f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

## CAPÍTULO 2. DA ANÁLISE DE FOURIER À ANÁLISE COM ONDULETAS

Por vezes, em vez de uma combinação linear de senos e cossenos, a série de Fourier é apresentada em termos de exponenciais complexas. Esta abordagem baseia-se na fórmula de Euler onde

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi \quad \text{com } \phi \in \mathbf{R}.$$

Se  $f$  for uma função integrável, definida no intervalo  $[a, b]$  de dimensão  $L$  (ou seja,  $b - a = L$ ), então o coeficiente de Fourier de ordem  $n$  de  $f$  ( $n$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $f$ ) é definido como

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx,$$

e a série de Fourier de  $f$  é dada por

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi i n x}{L}}.$$

Assim, designando  $\hat{f}(n)$  por  $a_n$  obtém-se

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}},$$

que se trata da série de Fourier de  $f$ .

**Teorema 3.** *A série de Fourier de uma função contínua, periódica e seccionalmente regular converge uniformemente para essa função em todo o eixo real. Neste caso, podemos escrever:  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$ , sendo  $a_n$  os coeficientes de Fourier de ordem  $n$ .*

A transformada de Fourier permite decompôr um conjunto de dados numéricos em componentes de frequência diferentes, ou seja, um sinal representado no domínio do tempo é transformado para o domínio da frequência (espectro do sinal).

**Definição 4.** *Se  $f$  for uma função absolutamente integrável em  $\mathbf{R}$ , a transformada de Fourier de  $f$ , designada por  $\hat{f}$ , é dada por*

$$\hat{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi v x} dx. \quad (2.1)$$

Esta abordagem fornece informação sobre as frequências mas não indica o instante ou intervalo de tempo em que essas frequências ocorrem, ou seja, assume que a componente frequência da função é estacionária ao longo do tempo. Sendo particularmente importante para séries temporais estacionárias, torna-se pouco adequada para séries temporais não estacionárias que possuem desvios, tendências, movimentos bruscos ou o conhecido fenómeno de *clusters* de volatilidade, como é o caso das séries financeiras.

A transformada de Fourier em tempo curto, introduzida por Gabor em 1946 [8], constitui um aperfeiçoamento da análise de Fourier apresentada. Consiste na aplicação da transformada de Fourier, tal como foi descrita anteriormente, em diferentes segmentos do sinal igualmente espaçados no tempo. Assim que a dimensão da janela é determinada, a resolução no tempo e na frequência torna-se fixa para toda a frequência e todo o domínio do tempo, respetivamente, como ilustrado na Figura 2.1. Aparentemente, esta análise constitui a solução ideal para as limitações existentes na análise de Fourier, uma vez que é capaz de extrair informação sobre a frequência e o momento do tempo em que ocorre, no entanto, persistem algumas questões. De facto, a transformada de Fourier em tempo curto utiliza na sua análise janelas de dimensão fixa, o que implica que para janelas menores é possível ter melhor resolução no tempo, já para janelas maiores a resolução é melhor na frequência, ou seja, a resolução nunca estará adequada a todas as frequências. Uma vez definida a amplitude da janela, esta terá de ser a mesma para todas as frequências e muitas funções requerem maior flexibilidade, de modo que se possa variar o tamanho da janela para uma maior precisão no tempo e na frequência. Deste modo, surge a necessidade de criar uma metodologia que tenha em consideração quer o domínio do tempo quer o domínio da frequência.

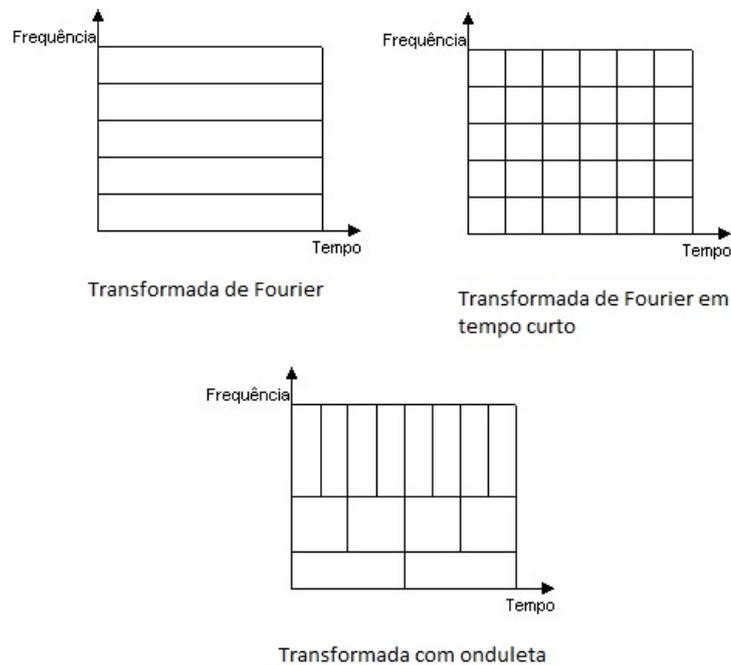


Figura 2.1: Representação no espaço tempo-frequência

A análise com onduletas é mais flexível do que a análise realizada pela transformada de Fourier em tempo curto, já que considera uma janela de dimensão variável cuja

largura e altura se adaptam às frequências. Deste modo, quando se pretende maior precisão na informação de baixa frequência utiliza intervalos de tempo mais longos, por outro lado, para maior precisão na informação de alta frequência utiliza intervalos de tempo mais curtos. A sua capacidade de ter em consideração quer o domínio do tempo quer o domínio da frequência, torna-a extremamente útil em diferentes áreas como Engenharia, Física, Matemática, Economia, entre outras.

Em alternativa à análise de Fourier, a análise com onduletas tem como base uma função de duração limitada, isto é, de suporte compacto. As onduletas são mais irregulares e assimétricas já as sinusóides, ondas clássicas seno e cosseno, têm duração ilimitada, propagam-se infinitamente, e são mais previsíveis. Há várias funções de onduleta levando a que se possa escolher a que mais se adequa ao estudo do sinal em causa, o que constitui uma vantagem da análise com onduletas sobre a análise de Fourier que só utiliza as sinusóides.

Enquanto que a transformada de Fourier e também a transformada de Fourier em tempo curto, são funções da frequência, a transformada com onduleta é uma função de escala. De facto, a frequência e a escala possuem entre si uma relação inversa, ou seja, uma frequência mais elevada corresponde a uma escala mais reduzida e uma frequência mais reduzida corresponde a uma escala mais elevada.

Apresentamos, de seguida, algumas referências relativas ao estudo das onduletas, que foram relevantes para o estudo feito nesta dissertação. Apesar da sua relevância na área da economia e das finanças, a primeira aplicação neste contexto surgiu há cerca de duas décadas. Percival e Walden [20] e Gençay, Selçuk e Whitcher [10] contêm uma descrição detalhada da aplicação das onduletas na análise de séries temporais. Crowley [4] e Ramsey [22] sintetizam todo o trabalho com onduletas já realizado na área da economia e das finanças, e discutem as potencialidades futuras desta abordagem nesta área de estudos. Ramsey [21] propõe possíveis contribuições futuras das onduletas na economia, enaltecendo quatro funcionalidades das onduletas: análise, estimação da densidade, decomposição tempo-escala e previsões.

Uma das vantagens da análise com onduletas é a sua capacidade de decompôr uma série temporal em componentes associados a diferentes escalas. Capobianco [3] realizou uma aplicação da análise multiresolução ao principal índice da bolsa de Tóquio, o Nikkei. Aplicou o algoritmo de Stephan Mallat e Yves Meyer [17, 18], concluindo que se adequa ao estudo de séries financeiras. A volatilidade de um índice acionista é analisada por Vuorenmaa [30]. Os resultados demonstram como esta análise pode fornecer uma nova perspectiva útil nas dinâmicas da volatilidade.

As onduletas são também uma ferramenta útil no estudo da interdependência entre séries financeiras. No caso contínuo, Aguiar-Conraria e Soares [1] demonstram a utilidade da transformada contínua com onduletas na área da economia. Rua e Nunes [24] aplicam uma medida de co-movimento baseada em onduletas para o estudo da relação entre os índices bolsistas da Alemanha, Japão, Reino Unido e EUA. Por sua vez, Ranta [23] estuda a presença de contágio entre os mercados financeiros internacionais com uma medida de coerência.

No caso discreto, há vários estudos publicados. Lee [15] estuda a relação existente entre mercados desenvolvidos (EUA, Japão e Alemanha) e mercados emergentes (Turquia e Egito). Para isso utiliza o índice accionista de cada um dos países realizando um estudo baseado nas onduletas. Gallegati [9] investigou a relação entre o índice accionista Dow Jones e a atividade económica dos EUA, representada pelo índice de produção industrial dos EUA, utilizando uma abordagem baseada nas onduletas. Para escalas elevadas, correspondentes a um período de 16 meses ou mais, os resultados mostraram que os rendimentos acionistas lideram a actividade económica. Fernández-Macho [7] considera duas novas ferramentas estatísticas: a correlação múltipla baseada nas onduletas e a correlação cruzada múltipla baseada nas onduletas para analisar a relação existente entre um conjunto de índices bolsistas europeus. Tiwary, Dar, Bhanja e Shah [26] utilizaram as mesmas medidas estatísticas para analisar a correlação existente entre nove índices bolsistas da Ásia. Barunick e Vacha [2], bem como Kravets e Sytienko [14] utilizaram as onduletas para estudar o comportamento de um conjunto de índices durante a crise financeira mundial de 2008. Considerando o rendimento composto continuamente, a análise multiresolução mostrou, para qualquer escala, um aumento da volatilidade durante o ano de 2008.



## Capítulo 3

# Análise com onduletas

Neste capítulo irão ser apresentados alguns conceitos sobre onduletas. É apresentada a transformada contínua com onduletas e a sua discretização, ou seja, a transformada discreta com onduletas. Por último, realiza-se uma breve descrição da análise multiresolução e da transformada discreta de máxima sobreposição.

### 3.1 Alguns conceitos básicos

A análise com onduletas considera uma função base, a onduleta mãe, também designada simplesmente por função onduleta que, tal como o nome indica, é uma onda pequena que cresce e decresce num intervalo de tempo limitado, como tal, obedece a determinados requisitos.

Seja  $\psi$  uma função de variável real<sup>1</sup>, consideremos que esta função satisfaz as seguintes propriedades:

o seu integral é zero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0, \quad (3.1)$$

a função  $\psi$  é de quadrado integrável, com valor igual a 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x) dx = 1. \quad (3.2)$$

A equação (3.1) obriga a que a função  $\psi$  oscile de modo a compensar os intervalos em que assume valores positivos, com outros em que assume valores negativos. Deste modo, o gráfico da função assemelha-se a uma pequena onda. Por outro lado, relativamente a (3.2), se considerarmos  $\varepsilon \in \mathbf{R}, 0 < \varepsilon < 1$  deverá existir um intervalo  $[-I, I]$  de comprimento finito tal que

$$\int_{-I}^I \psi^2(x) dx > 1 - \varepsilon.$$

Considerando  $\varepsilon$  muito próximo de zero, então  $\psi$  é aproximadamente nula fora de  $[-I, I]$  e essencialmente não nula nesse intervalo.

---

<sup>1</sup>Na análise com onduletas as funções onduleta, sendo de variável real, podem tomar valores reais ou complexos. A função onduleta de Morlet, de que falaremos a seguir, é um exemplo de uma função onduleta com valores complexos.

Dado que pretendemos que as funções onduleta sejam flexíveis e ajustadas a diferentes tipos de características de sinais, é necessário acrescentar outras condições. Uma condição importante é a de admissibilidade: seja  $\psi$  uma função onduleta, diremos que  $\psi$  é admissível se a sua transformada de Fourier,  $\widehat{\psi}$ , é tal que

$$0 < C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(v)|^2}{v} dv < +\infty. \quad (3.3)$$

Dentro das funções onduleta podemos encontrar várias famílias de funções cujas diferenças residem, essencialmente, no suporte da função  $\psi$ , na sua simetria, no número de momentos nulos <sup>2</sup> e na regularidade dessa função. A mais simples de todas é a onduleta Haar [12], introduzida muito antes do aparecimento do conceito de onduleta. As suas propriedades de localização no tempo são boas mas a sua localização na frequência é muito fraca,

$$\psi^H(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x \leq -1 \vee x > 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Esta onduleta é simétrica, não contínua, ortonormal e de suporte compacto, pode ser dada pela expressão (3.4) e representada graficamente pela Figura 3.1. A sua simplicidade torna pouco adequada a aplicação ao mundo real.

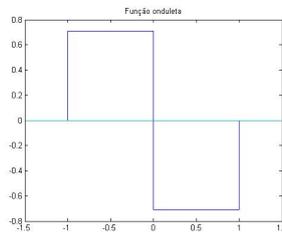


Figura 3.1: Ilustração da onduleta Haar

Existem outras famílias de onduletas, como por exemplo, a família de onduletas Daubechies, cujo nome se deve a Ingrid Daubechies [6], e que dizem respeito a onduletas ortonormais de suporte compacto. São onduletas bastante adequadas para o estudo dos rendimentos associados a índices bolsistas, porque possuem um determinado grau de suavidade. Usualmente, esta onduleta representa-se por  $Db(N)$  onde  $N$  corresponde à ordem, que diz respeito ao número de momentos nulos. A onduleta Haar constitui um caso particular da onduleta Daubechies, trata-se da onduleta Daubechies de ordem 1, ou seja,  $Db(1)$ , a mais simples de todas. A onduleta Haar tem um só momento nulo e,

<sup>2</sup>Uma função  $\psi$  com  $P$  momentos nulos satisfaz  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^r \psi(x) dx = 0$  para  $r = 0, 1, \dots, P - 1$ .

por exemplo, a onduleta Daubechies de ordem 4,  $Db(4)$  tem quatro momentos nulos, favorecendo o ajustamento do sinal. Deste modo, as onduletas Daubechies de ordem superior a 1 são mais eficientes em compressão de sinal do que a onduleta Haar. Para além disso, o problema da onduleta Haar é o facto de, por exemplo, pretender aproximar uma função regular por funções que possuem fortes descontinuidades. As onduletas Daubechies evitam este tipo de problema dado que possuem maior suavidade. De uma forma geral, estas onduletas não possuem uma expressão explícita, embora se possam definir à custa dos respetivos filtros de onduleta. De facto, é possível definir a onduleta à custa de uma série  $h_l, l = 0, \dots, L-1$ , em que  $L$  é a largura do filtro e deve ser inteiro par (impomos  $h_0 \neq 0$  e  $h_{L-1} \neq 0$  para que a largura seja  $L$ ), para  $l < 0$  e  $l \geq L$  temos  $h_l = 0$ . Esta formulação designa-se por filtro de onduleta, este deve satisfazer:

$$\sum_{l=0}^{L-1} h_l = 0, \quad \sum_{l=0}^{L-1} h_l^2 = 1 \quad e \quad \sum_{l=0}^{L-1} h_l h_{l+2n} = 0, \quad (3.5)$$

sendo  $n$  um inteiro não nulo. Como exemplo, temos o filtro com onduletas Haar definido por  $h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $h_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  em que  $L = 2$ .

Para além das onduletas Daubechies, Ingrid Daubechies [6] introduziu outro tipo de onduletas, as onduletas *symlets* que constituem modificações da família de onduletas Daubechies para aumentar a simetria, mantendo as outras propriedades. Apresenta-se de seguida as imagens referentes às onduletas Daubechies de ordem 4 ( $Db(4)$ ), Daubechies de ordem 8 ( $Db(8)$ ) e *symlet* de ordem 8.

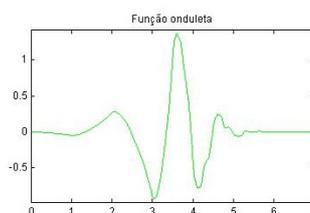


Figura 3.2: Função onduleta  $Db(4)$

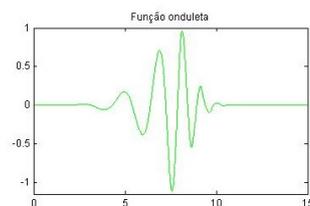


Figura 3.3: Função onduleta  $Db(8)$

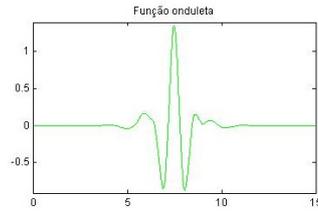


Figura 3.4: Função onduleta *symlet* de ordem 8

Existem outros tipos de onduletas como, por exemplo, a onduleta *Mexican hat*, representada na Figura 3.5, cuja expressão é

$$\psi^{Mh}(x) = \frac{2}{\pi^{1/4}\sqrt{3}\sigma} \left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbf{R}, \sigma \in \mathbf{R}^+$$

Trata-se de uma função onduleta simétrica que não possui a característica de ortogonalidade. A sua expressão é proporcional à expressão da segunda derivada da função densidade de probabilidade gaussiana.

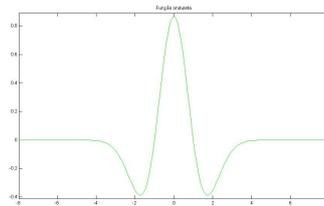


Figura 3.5: Função onduleta *Mexican hat*

Tal como a onduleta *Mexican hat*, a onduleta de Morlet, representada na Figura 3.6, é simétrica, não ortogonal e possui uma expressão explícita dada por

$$\psi^M(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega_0 x} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbf{R}$$

sendo  $\omega_0$  uma constante real que controla o número de oscilações. Usualmente,  $\omega_0$  é fixado em 6, o que possibilita um bom equilíbrio entre resolução no tempo e na frequência.

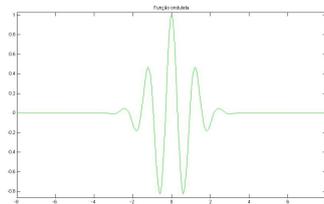


Figura 3.6: Função onduleta de Morlet

Como já foi referido anteriormente, a onduleta Haar é demasiado simplista na análise de variáveis económicas devido à sua natureza descontínua. Entre as outras onduletas

apresentadas, não há uma escolha óbvia sendo necessário uma análise cuidada dos dados em estudo. A escolha do tipo de onduleta a usar depende do estudo que se pretende efetuar.

### 3.2 Transformada contínua com onduletas

As onduletas dão-nos informação acerca de como as médias ponderadas de certas funções variam de um período para o seguinte, como procuraremos ilustrar de seguida.

Consideremos  $u$  uma função real de variável real, integrável em  $[a, b]$ , a expressão

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b u(x) dx = \alpha(a, b)$$

define o valor médio de  $u$  no intervalo  $[a, b]$ . Por outro lado, supondo, por simplicidade de apresentação, que  $u$  é uma função escada:

$$u(x) = u_j, \quad a + \frac{j}{N}(b-a) < x \leq a + \frac{j+1}{N}(b-a), \quad j = 0, \dots, N-1$$

e considerando a definição de integral de Riemann vem

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b u(x) dx = \frac{1}{b-a} \sum_{j=0}^{N-1} u_j \frac{b-a}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j.$$

Considerando este valor médio a depender do intervalo  $[a, b]$  e fazendo  $s = b - a$ , diremos que  $s$  é a **escala** associada com o valor médio, assim podemos definir um valor médio da função  $u$ , designado por  $A$ , relativo à escala  $s$  e centrado no ponto temporal  $\tau$ :

$$A(s, \tau) = \alpha\left(\tau - \frac{s}{2}, \tau + \frac{s}{2}\right) = \frac{1}{s} \int_{\tau - \frac{s}{2}}^{\tau + \frac{s}{2}} u(x) dx.$$

Mais importante do que conhecer estes valores médios é saber como é que  $A(s, \tau)$  muda de um período para outro. Se associarmos esta mudança com o ponto temporal que divide dois valores médios obtemos

$$D(s, \tau) = A\left(s, \tau + \frac{s}{2}\right) - A\left(s, \tau - \frac{s}{2}\right) = \frac{1}{s} \int_{\tau}^{\tau+s} u(x) dx - \frac{1}{s} \int_{\tau-s}^{\tau} u(x) dx. \quad (3.6)$$

Nota: Se  $s = 1$  corresponder a um dia, a representação gráfica de  $D(1, \tau)$  indica quão depressa o sinal (por exemplo temperatura) muda de um dia para o outro. Se  $s$  corresponder a um ano, indica quanto é que a média do sinal muda de um ano para o outro.

Considerando a função  $\tilde{\psi}_{s, \tau}$  definida por

$$\tilde{\psi}_{s, \tau}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{s} & , \tau - s < x \leq \tau \\ \frac{1}{s} & , \tau < x \leq \tau + s \\ 0 & , x \notin ]\tau - s, \tau + s] \end{cases}$$

podemos escrever o integral (3.6) na forma

$$D(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \tilde{\psi}_{s, \tau}(x) dx$$

Se compararmos com a onduleta Haar (3.4), constatamos que analisar as diferenças médias é comparável à aplicação desta onduleta:

$$\tilde{\psi}_{1,0}(x) = \sqrt{2} \psi^H(x).$$

De facto, através do integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \psi^H(x) dx = W^H(1, 0)$$

a onduleta Haar extrai informação acerca das diferenças entre duas escalas unitárias de  $u$  para  $\tau = 0$ . Para extrair informação acerca de escalas unitárias para outros valores de  $\tau$  basta fazer uma translação de  $\psi^H$ :

$$\psi_{1, \tau}^H(x) = \psi^H(x - \tau),$$

em que

$$\psi_{1, \tau}^H(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } \tau - 1 < x \leq \tau \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } \tau < x \leq \tau + 1 \\ 0 & \text{se } x \leq \tau - 1 \vee x > \tau + 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

A integração de  $u$  com  $\psi_{1, \tau}^H$  permite obter

$$W^H(1, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \psi_{1, \tau}^H(x) dx = \int_{\tau}^{\tau+1} u(x) dx - \int_{\tau-1}^{\tau} u(x) dx = D(1, \tau)$$

Se pretendermos extrair informação sobre outros pontos temporais  $\tau$  podemos fazer uma translação da função  $\psi^H$  considerando  $\psi^H(x - \tau)$ , como foi referido anteriormente. Por outro lado, para obter informação sobre outras escalas e outros pontos temporais simultaneamente, podemos considerar

$$\psi_{s, \tau}^H(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^H\left(\frac{x - \tau}{s}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2s}} & \text{se } \tau - s < x \leq \tau \\ \frac{1}{\sqrt{2s}} & \text{se } \tau < x \leq \tau + s \\ 0 & \text{se } x \leq \tau - s \vee x > \tau + s. \end{cases}$$

Usando esta onduleta obtemos

$$W^H(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \psi_{s, \tau}^H(x) dx = D(s, \tau)$$

Fazendo variar  $s$  percebemos melhor como é que os valores médios de  $u$  variam segundo diferentes escalas, de um período de largura  $s$  para outro. O conjunto

$$\{W^H(s, \tau) : s > 0, -\infty < \tau < +\infty\} \quad (3.8)$$

### 3.2. TRANSFORMADA CONTÍNUA COM ONDULETAS

designa-se por transformada contínua com onduletas Haar de  $u$ .

De modo semelhante, podemos considerar outra função onduleta  $\psi$  e construir a sua transformada contínua, definida como:

$$W(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\psi_{s,\tau}(x)dx \quad (3.9)$$

sendo

$$\psi_{s,\tau} = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{x-\tau}{s}\right) \quad (3.10)$$

em que  $s$  é o parâmetro de escala,  $\tau$  é o parâmetro de localização e  $\frac{1}{\sqrt{s}}$  é o factor de normalização.

No domínio do sinal, havendo uma translação e dilatação das funções, se  $|s| < 1$  então a onduleta resultante é a versão comprimida da função onduleta correspondendo a frequências altas, se  $|s| > 1$  então corresponde a frequências baixas. No caso em que  $s = 1$  estamos perante a função onduleta inicial. Uma escala reduzida corresponde a uma elevada frequência e permite estabelecer uma análise local, já uma escala elevada corresponde a uma frequência reduzida realizando-se, neste caso, uma análise global.

A transformada com onduleta decompõe um sinal definido no domínio do tempo, num sinal bem definido no domínio do tempo, através das translações, e no domínio da frequência, através das dilatações. O sinal é decomposto em conjuntos de coeficientes onde cada conjunto é associado a uma escala e cada coeficiente no conjunto é associado a uma localização particular. Na terminologia das onduletas, cada coeficiente designa-se por átomo e o conjunto de coeficientes para cada escala é designado por cristal.

Tal como no caso de Fourier, a transformada contínua é a soma, ao longo do tempo, do sinal multiplicado por funções onduleta que resultaram da translação ou dilatação da função onduleta. Os coeficientes onduleta resultantes são uma função desses dois parâmetros, de escala e de localização. A decomposição da função em estudo ao mover e dilatar a função onduleta, torna a estrutura complexa original numa série de componentes mais simples.

Se a onduleta satisfizer a condição de admissibilidade (3.3), então poderá ser aplicada uma operação inversa para reproduzir a função  $u$  através dos coeficientes de onduleta obtidos com a sua decomposição, ou seja,

$$u(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\tau, s)\psi_{\tau,s}(x) \frac{d\tau ds}{s^2}$$

As onduletas possuem assim uma propriedade de extrema importância, a sua capacidade de decompôr e reconstruir de uma maneira quase perfeita uma função de quadrado integrável.

### 3.3 Transformada discreta com onduletas e análise multi-resolução

Hoje em dia, o acesso a dados dos mercados financeiros é generalizado e de fácil acesso. Com uma grande quantidade de dados, torna-se computacionalmente menos intensivo usar a transformada discreta com onduletas, em vez da contínua. Vamos de seguida apresentar os conceitos que permitem o cálculo de uma transformada discreta com onduletas, relativa a um vetor com um número finito de observações.

A transformada discreta com onduletas pode ser vista como uma discretização do caso contínuo, isto é, da transformada contínua com onduletas. Usando como base onduletas ortogonais, isto é, funções  $\psi$  para as quais  $\psi_{s,\tau}$  formem uma base ortonormada de  $L^2(\mathbf{R})$ , a transformada discreta com onduletas é particularmente importante no processamento de um determinado sinal. Sendo  $\tau$  e  $s$  determinísticos, o sinal pode ser decomposto num conjunto numerável de coeficientes de onduleta. Enquanto que a transformada contínua com onduletas opera em todas as escalas, na transformada discreta com onduletas calcula-se o número de escalas a usar, assegurando que a informação presente na função original é preservada pelos coeficientes das onduletas. O número máximo de escalas,  $J$ , é limitado pelo número total de observações  $N$ , ou seja,  $J$  é o número inteiro máximo tal que  $J \leq \frac{\log(N)}{\log(2)}$ . Esta característica permite que a aplicação da transformada discreta com onduletas seja computacionalmente menos intensiva. Os parâmetros vêm dados, de acordo com uma rede diádica, por

$$s = 2^{-j}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$\tau = 2^{-j}k, \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Nesse caso vem então a seguinte família de funções:

$$\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (3.11)$$

onde  $j$  e  $k$  são inteiros que controlam a dilatação e a translação da função onduleta, respetivamente.

Se as funções definidas em (3.11) formarem uma base ortonormada de  $L^2(\mathbf{R})$  tem-se,  $u = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle u, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} u_{j,k} \psi_{j,k}$  em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  designa o produto interno de duas funções.

Para além da função onduleta,  $\psi$ , esta transformada também utiliza a função escala,  $\phi$ . Tal como a função onduleta, a função escala também pode ser movida e dilatada, sendo dada por:

$$\phi_{J,k} = 2^{-\frac{J}{2}} \phi\left(\frac{x - 2^J k}{2^J}\right).$$

### 3.3. TRANSFORMADA DISCRETA COM ONDULETAS E ANÁLISE MULTIRESOLUÇÃO

De acordo com a expressão (3.9), os coeficientes relativos às onduletas são obtidos projetando porções da série temporal com versões dilatadas e movidas da função onduleta.

Considerando uma função  $f$ , para uma determinada família de funções base,  $\psi$  e  $\phi$ , pode-se definir uma sequência de coeficientes

$$s_{J,k} = \int f(x)\phi_{J,k}dx$$

e

$$d_{j,k} = \int f(x)\psi_{j,k}dx, j = 1, \dots, J$$

onde  $s_{J,k}$  são os coeficientes de aproximação na escala máxima,  $J$ , e  $d_{j,k}$  são os coeficientes detalhe a todas as escalas de 1 a  $J$ . O valor  $J$  corresponde ao número de níveis (escalas) e  $k$  varia entre 1 e o número de coeficientes na componente correspondente, isto é,  $1 \leq k \leq \frac{N}{2^j}$ .

Dados os coeficientes, a transformada discreta com onduletas torna possível a decomposição da função  $f$  através dos seus componentes:

$$f(x) = \sum_k s_{J,k}\phi_{J,k}(x) + \sum_k d_{J,k}\psi_{J,k}(x) + \dots + \sum_k d_{j,k}\psi_{j,k}(x) + \dots + \sum_k d_{1,k}\psi_{1,k}(x), \quad 1 \leq j \leq J$$

onde se assume que as funções base  $\phi_{j,k}(x)$  e  $\psi_{j,k}(x)$  são ortogonais, ou seja,

$$\begin{aligned} \int \phi_{J,k}(x)\phi_{J,k'}(x) &= \delta_{k,k'} \\ \int \psi_{J,k}(x)\phi_{J,k'}(x) &= 0 \\ \int \psi_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(x) &= \delta_{k,k'}\delta_{j,j'} \end{aligned}$$

onde  $\delta_{i,j} = 1$  se  $i = j$  e  $\delta_{i,j} = 0$  se  $i \neq j$ .

Considerando uma série temporal de dimensão diádica, a decomposição baseada na transformada discreta com onduletas não tem de ser necessariamente realizada até ao nível  $J = \log_2(N)$ . Pode ser realizada uma transformada discreta parcial até ao nível  $J_p < J$ .

De acordo com o que foi referido anteriormente, a transformada discreta com onduletas pode ser formulada considerando uma decomposição da série de observações em estudo. A função  $f$  pode ser representada como

$$f(x) = S_J(x) + D_J(x) + D_{J-1}(x) + \dots + D_j(x) + \dots + D_1(x)$$

onde

$$S_J(x) = \sum_k s_{J,k}\phi_{J,k}(x)$$

e

$$D_j(x) = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad j = 1, \dots, J$$

$S_J(x)$  e  $D_j(x)$  são os componentes de aproximação e detalhe, respetivamente. A representação apresentada designa-se por decomposição **multiresolução** porque os termos  $S_j(x), D_j(x), D_{j-1}(x), \dots, D_1(x)$  são componentes da série temporal em estudo relativos a diferentes resoluções.

Uma análise de multiresolução de nível  $J$  consiste na decomposição da função  $f$  em  $J$  níveis de detalhe ( $D_J(x), D_{J-1}(x), \dots, D_1(x)$ ) e um único nível de aproximação ( $S_J(x)$ ). Esta apresentação da transformada discreta com onduletas pode ser sintetizada através de uma operação matricial. Seja  $y$  um vetor de observações com dimensão diádica,  $N = 2^J$ . O vetor dos coeficientes de onduleta discreto,  $w$ , obtém-se por

$$w = Wy \tag{3.12}$$

em que  $W$  é uma matriz  $N \times N$  ortonormal, que define a transformada discreta com onduletas. O vetor de coeficientes de onduleta é composto por  $J + 1$  vetores,

$$w = [d_1, d_2, \dots, d_J, s_J]^T$$

em que  $d_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , é um vetor com  $\frac{N}{2^j}$  coeficientes de onduleta e diz respeito aos coeficientes de detalhe, e  $s_J$  é um vetor de dimensão  $\frac{N}{2^J}$  dizendo respeito aos coeficientes de aproximação associados com as variações na escala de tamanho  $\lambda_j = 2^{j-1}$ . Note-se que, por exemplo, no caso das onduletas Daubechies, se  $\lambda_1 = 2^0 = 1$ , então tomamos a diferença entre observações adjacentes, se  $\lambda_2 = 2^1 = 2$  considera-se diferenças generalizadas de tamanho 2, isto é, primeiro calculam-se médias dos pares de observações adjacentes e depois consideram-se as diferenças dessas médias.

A matriz  $W$  é ortonormal composta por filtros de onduleta que dizem respeito à onduleta escolhida para fazer a decomposição.

Cada uma das análises, contínua ou discreta, tem as suas próprias vantagens e desvantagens. A transformada contínua com onduletas é uma ferramenta bastante útil na interpretação. Esta transformada parte de uma função de um parâmetro para outra de dois parâmetros levando a alguma redundância, no entanto, é esta redundância que torna a informação mais visível e permite captar características do sinal original que de outra forma poderiam não estar visíveis. Assim, o que esta análise perde na simplicidade, ganha na maior facilidade de interpretação.

A transformada discreta com onduletas vem contornar a questão da redundância. Esta transformada pode ser interpretada como uma amostra da transformada contínua

### 3.4. TRANSFORMADA DISCRETA COM ONDULETAS DE MÁXIMA SOBREPOSIÇÃO

com onduletas lidando unicamente com escalas diádicas e preservando a capacidade de decompôr o sinal em partes associadas a um instante e a uma escala em particular. Constitui uma boa ferramenta de análise, já que permite decompôr uma série temporal em diversos coeficientes associados a um determinado instante e escala diádica  $2^{j-1}$ . Estes coeficientes são equivalentes ao sinal original uma vez que a partir dos mesmos é possível reconstruir a série original de uma maneira quase perfeita.

### 3.4 Transformada discreta com onduletas de máxima sobreposição

Neste capítulo vai ser apresentada uma versão modificada da transformada discreta com onduletas, a transformada discreta com onduletas de máxima sobreposição. Trata-se de uma transformada que considera uma rede diádica, tal como a transformada discreta com onduletas, mas, por outro lado, utiliza todas as translações. Neste caso, os parâmetros vêm dados por

$$s = 2^{-j}, \quad j \in \mathbb{Z} \quad e \quad \tau = k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Para além disso, esta transformada pode lidar com qualquer dimensão  $N$ , não necessitando que seja do tipo diádico,  $2^J$ .

Sendo  $u$  um vetor de observações de dimensão  $N$ , o vetor de coeficientes da transformada discreta com onduletas de máxima sobreposição,  $\tilde{w}$ , de dimensão  $(J+1)N$  é dado por

$$\tilde{w} = \tilde{W}u$$

onde  $\tilde{W}$  é uma matriz  $(J+1)N \times N$  definindo a transformada discreta de máxima sobreposição. O vetor de coeficientes desta transformada pode ser organizado em  $J+1$  vetores da seguinte forma

$$\tilde{w} = [\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_J, \tilde{s}_J]^T$$

onde  $\tilde{d}_j$  é um vetor de coeficientes de detalhe associados a mudanças numa escala  $\lambda_j = 2^{j-1}$  e  $\tilde{v}_J$  é um vetor de coeficientes de aproximação associados a flutuações numa escala  $2^J = 2\lambda_J$ , tal como na transformada discreta.

Os coeficientes da transformada discreta com onduleta podem ser considerados um subconjunto dos coeficientes da transformada discreta com onduleta de máxima sobreposição.

A transformada discreta de máxima sobreposição constitui uma alternativa à transformada discreta mas não a substitui. É uma modificação da transformada discreta que não possui a característica de ortogonalidade, mas ganha outras propriedades que

a transformada discreta não possui e que são adequadas em estudos económicos, como por exemplo, o facto de analisar séries temporais de qualquer dimensão.

Entre as diversas aplicações possíveis com a transformada discreta com onduleta de máxima sobreposição, salienta-se os estimadores para a variância, para a correlação e para a correlação cruzada com onduletas.

## Capítulo 4

# Análise comparativa dos índices PSI 20, IBEX 35 e DAX 30

Neste capítulo, vamos aplicar a transformada discreta com onduletas a dados financeiros. Vamos considerar os dados referentes aos rendimentos dos índices PSI 20, IBEX 35 e DAX 30 e analisar as suas variações.

Os dados utilizados neste trabalho foram retirados do site [yahoofinance.com](http://yahoofinance.com), tendo sido consideradas as cotações de fecho de cada um dos índices em estudo, no período de 24 de Janeiro de 2000 a 23 de Outubro de 2014, num total de 3722 observações. Como já foi descrito anteriormente, a transformada discreta com onduletas exige dados numa escala diádica, deste modo, neste caso em concreto, considera-se  $2^{12} = 4096$  observações. Para este efeito, recorreu-se à última observação do período em análise expandindo-a até ao número mais próximo da escala diádica.

Um índice é um indicador que reflete a evolução média das cotações das acções das empresas que o compõem. O índice PSI 20 constitui o índice de referência do mercado de capitais português sendo constituído pelas acções das vinte maiores empresas cotadas na bolsa de valores de Lisboa. O IBEX 35 é o principal índice de referência da bolsa espanhola, sendo elaborado por Bolsas e Mercados Espanhóis. É composto pelas 35 maiores empresas lá cotadas, cuja importância no índice é ponderada pela capitalização bolsista. O DAX 30 é composto pelas 30 empresas mais importantes do mercado Alemão, ou seja, as empresas com maior capitalização bolsista cotadas na bolsa de Frankfurt. O valor numérico do índice não tem qualquer significado em si mas a sua variação indica o sentido de evolução do mercado.

Considerámos os rendimentos associados aos preços de fecho do índice, para tal utilizámos o rendimento composto continuamente, obtido através da seguinte fórmula:

$$r_t = \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right), \quad t = 1, 2, \dots, T$$

onde  $P_t$  corresponde ao valor do índice no momento  $t$  e  $T$  ao número total de observações.

No estudo da volatilidade considerou-se o quadrado dos rendimentos de acordo com

a fórmula

$$r_t^2 = \left[ \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \right]^2. \quad (4.1)$$

## 4.1 Análise descritiva dos índices

Apresenta-se de seguida a evolução dos rendimentos associados ao índice PSI 20, IBEX 35 e DAX 30, entre 2000 e 2014.

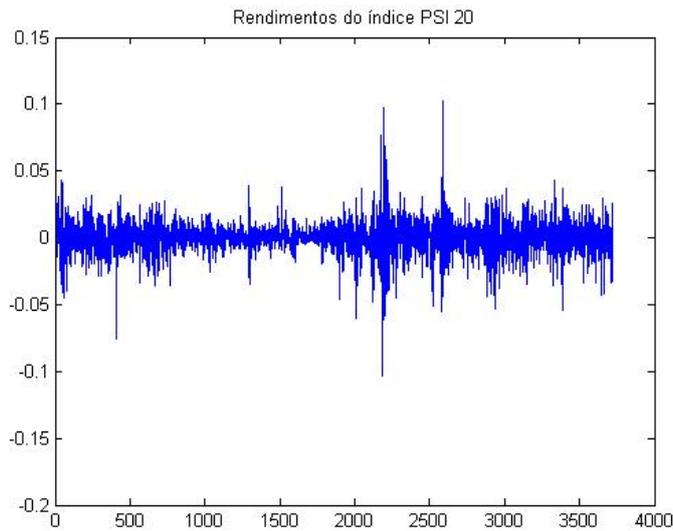


Figura 4.1: Rendimentos associados ao índice PSI 20

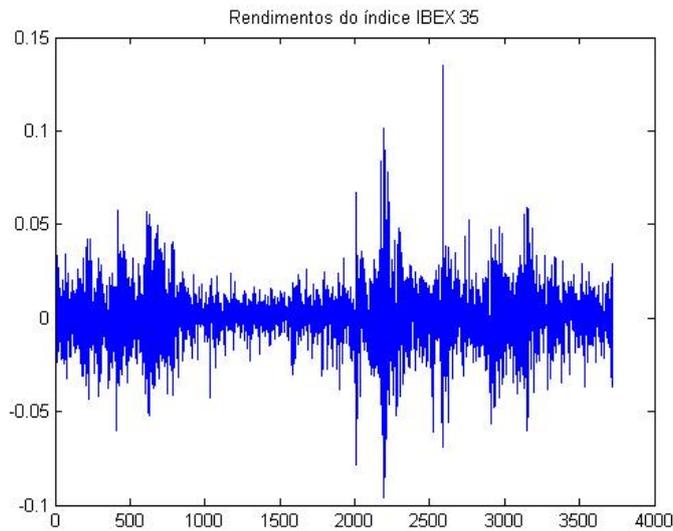


Figura 4.2: Rendimentos associados ao índice IBEX 35

#### 4.1. ANÁLISE DESCRITIVA DOS ÍNDICES

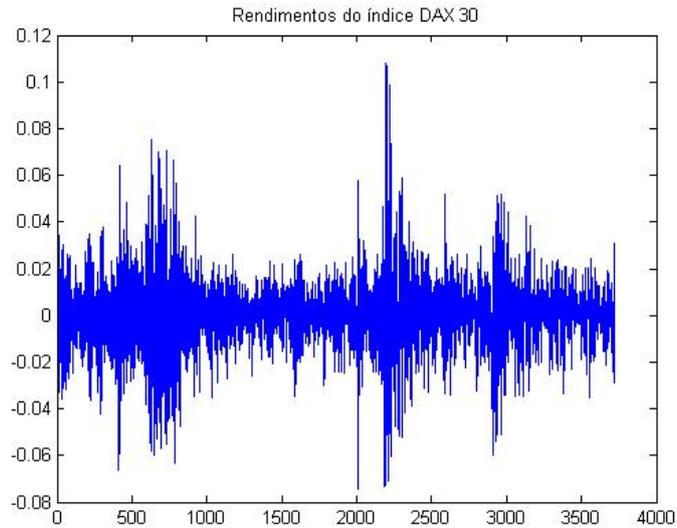


Figura 4.3: Rendimentos associados ao índice DAX 30

As Figuras 4.1, 4.2 e 4.3 possuem dois picos em comum, entre as observações 2000 e 2500 e as observações 2500 e 3000. O primeiro pico corresponde ao ano 2008, o início da crise económica global. Com várias economias a entrar em recessão no final de 2008, os mercados accionistas sofreram ao longo do mês de Outubro uma quebra acentuada. O segundo pico coincide com o ano 2010 resultando da conjuntura económica negativa que persiste desde o início da crise financeira e que se agravou com a crise da dívida soberana na Europa.

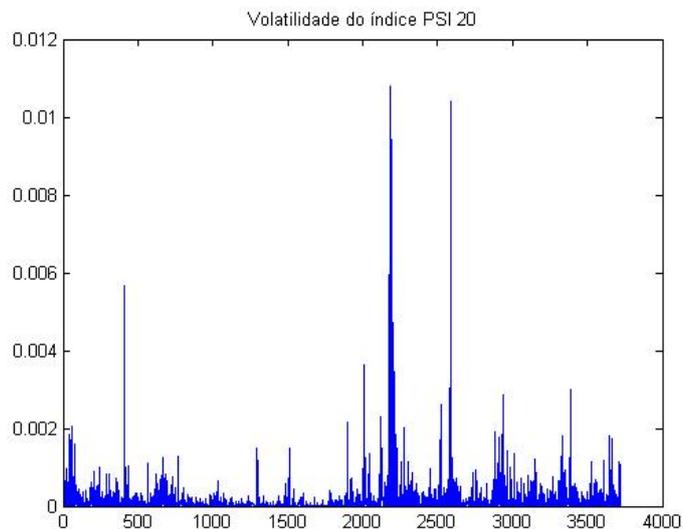


Figura 4.4: Volatilidade associada ao índice PSI 20

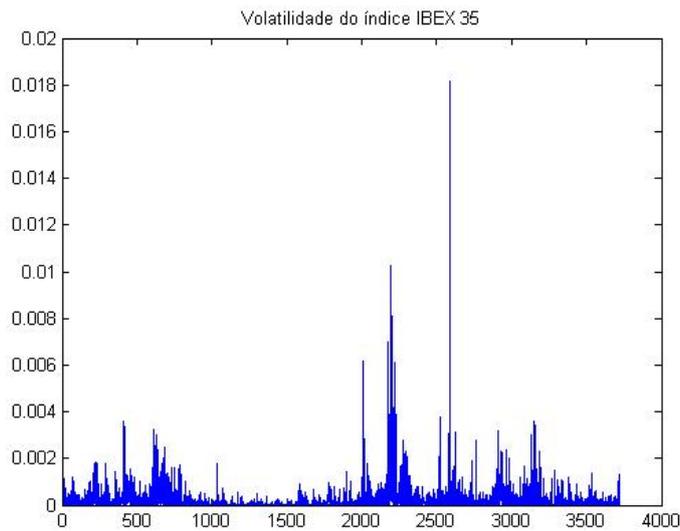


Figura 4.5: Volatilidade associada ao índice IBEX 35

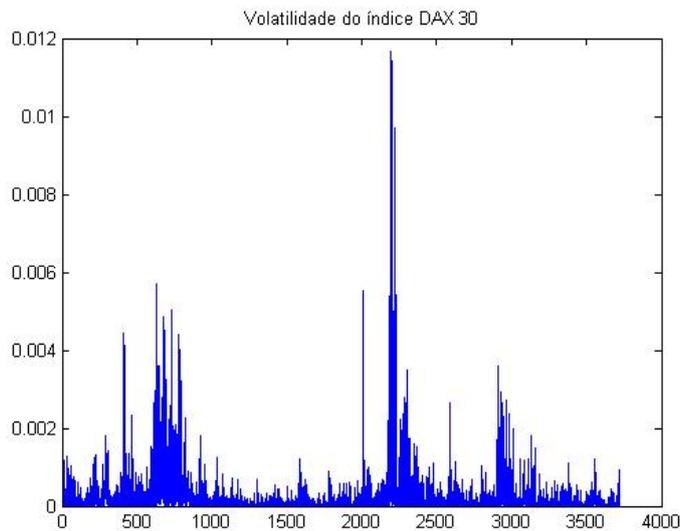


Figura 4.6: Volatilidade associada ao índice DAX 30

As Figuras 4.4, 4.5 e 4.6 apresentam os resultados relativos à evolução da volatilidade para os três índices em estudo, no período considerado para análise, de acordo com 4.1. Os índices PSI 20 e IBEX 35 apresentam três picos de volatilidade, perto da observação 500, entre 2000 e 2500 e entre 2500 e 3000 correspondendo respectivamente aos anos de 2002 (janeiro), 2008 (outubro) e 2010 (maio, junho). O índice DAX 30 apresenta uma volatilidade mais dispersa. Há um pico que sobressai entre a observação 2000 e 2500, havendo também alguma volatilidade entre a observação 500 a 1000 (finais de 2002, 2003) e perto da observação 3000 (ano de 2012).

Os mercados accionistas apresentaram uma tendência de queda a par de elevadas

volatilidades ao longo de 2002. Vários factores contribuíram para que 2002 não fosse um ano de recuperação de mercados. Destacam-se a desconfiança dos investidores quanto à recuperação económica onde a produção industrial continuava a registar uma evolução negativa no Reino Unido, em França e na Alemanha e a forte instabilidade geopolítica com perspectivas de conflito no Iraque.

A crise financeira de 2008 reduziu as cotações e aumentou a volatilidade em geral. Este ano foi marcado por um conjunto de eventos negativos nos mercados financeiros internacionais, dos quais se destacam as dificuldades do sector bancário e segurador das economias ocidentais. Estas dificuldades conduziram a uma forte instabilidade e volatilidade nas principais bolsas mundiais. A divulgação de perdas significativas por parte de algumas instituições financeiras aumentou os receios relativos a um risco de contágio nos mercados financeiros internacionais. Assistiu-se assim a uma diminuição da confiança dos investidores. Outubro de 2008 foi o mês onde se tornou evidente o efeito da crise financeira mundial nos diferentes índices accionistas. Foi em 2008 que os mercados acionistas registaram um dos piores desempenhos de sempre devido à conjuntura económica adversa num quadro de incerteza. Esta situação intensificou-se à medida que as dificuldades na obtenção de liquidez evoluíram para um contexto mais grave de risco de incumprimento, de recessão económica e de instabilidade social.

Em 2010, o mercado de acções registou uma elevada turbulência devido à crise da dívida soberana associada a Portugal, Espanha, Grécia e Irlanda. Havia também um clima generalizado de incerteza quanto às perspectivas económicas do mundo ocidental, por receio de um novo período de recessão económica pouco depois de se ter iniciado uma fase de recuperação da economia. Na Europa também as incertezas no plano político contribuíram para o aumento da volatilidade dos mercados.

Mais recentemente em 2012, os níveis de volatilidade assistidos particularmente no índice da Alemanha podem ser explicados pelos efeitos cumulativos dos problemas da União Europeia, ou seja, a decrescente confiança nas suas instituições financeiras. A evolução dos mercados acionistas continuou a ser influenciada pela incerteza e pelos cenários de instabilidade financeira que persistiram em diversos países da área do Euro. A incerteza sobre a situação bancária em Espanha, e os subsequentes riscos para a estabilidade da área do Euro, bem como o agravamento das condições económicas em muitos países, a par da incerteza sobre a eventual saída desordenada de países da área do Euro, foram os motivos desta evolução.

A Tabela 4.1 inclui um resumo das estatísticas descritivas de cada um dos rendimentos dos índices bolsistas.

	PSI 20	IBEX 35	DAX 30
Máximo	0.1020	0.1348	0.1080
Mínimo	-0.1038	-0.0959	-0.0743
Mediana	9.2608e-05	6.7095e-04	7.5726e-04
Média	-2.3507e-04	-1.5687e-05	7.1553e-05
Desvio padrão	0.0121	0.0153	0.0156
Assimetria	-0.2249	0.0931	0.0104
Curtose	9.8510	7.9353	7.2815
Teste Jarque Bera	7310.229	3782.725	2842.896
P-valor	< 2.2e-16	< 2.2e-16	< 2.2e-16

Tabela 4.1: Estatísticas descritivas dos rendimentos dos índices

Pela análise da Tabela 4.1 conclui-se que todas as séries em análise possuem curtose superior a 3, o que indicia que estes rendimentos financeiros podem ser caracterizados por uma distribuição leptocúrtica. Possuem caudas mais pesadas do que uma distribuição normal, consequência da existência de muitas observações afastadas da média. Quanto à assimetria, comparando com a distribuição gaussiana, os rendimentos do índice PSI 20 exibem uma assimetria negativa, já os rendimentos dos índices IBEX 35 e DAX 30 possuem uma assimetria ligeiramente positiva. Portanto, comparativamente à distribuição normal, no caso do PSI 20 verifica-se uma maior concentração de observações na cauda esquerda da distribuição, já no caso do IBEX 35 e do DAX 30, há uma maior concentração na cauda direita. Os valores da estatística do teste Jarque-Bera e do valor-p associado, permitem rejeitar a hipótese de normalidade dos rendimentos em análise para níveis de significância usuais, o que já era expectável.

Confrontando agora os valores da média e do desvio-padrão das três séries, algumas conclusões podem ser retiradas. A média dos rendimentos do índice DAX 30 é superior à dos rendimentos do índice PSI 20 e do IBEX 35. Também o seu valor do desvio-padrão é superior aos valores encontrados para os rendimentos dos índices PSI 20 e IBEX 35 reforçando a ideia de que elevados riscos implicam elevados rendimentos.

	PSI 20	IBEX 35	DAX40
Máximo	0.0108	0.0182	0.0117
Mediana	3.4586e-05	5.9303e-05	5.7504e-05
Média	1.4538e-04	2.3342e-04	2.4201e-04
Desvio padrão	4.3288e-04	6.1478e-04	6.0664e-04
Assimetria	13.2743	11.8943	7.8009
Curtose	266.8978	253.0195	101.2894
Teste Jarque Bera	10909720	9781981	1535979
P-valor	< 2.2e-16	< 2.2e-16	< 2.2e-16

Tabela 4.2: Estatísticas descritivas da volatilidade dos índices

Analisando as estatísticas descritivas da volatilidade apresentadas na Tabela 4.2, as mesmas conclusões podem ser retiradas. Os rendimentos dos índices IBEX 35 e DAX 30 são mais voláteis do que os rendimentos do índice PSI 20, o que está de acordo com os valores encontrados para o desvio-padrão na Tabela 4.1.

## 4.2 Uma aplicação com onduletas

Nas Figuras 4.7, 4.9 e 4.10 está representada uma decomposição dos três índices em estudo, baseada na transformada discreta com onduletas. A onduleta escolhida nesta análise foi a *symlet*, de ordem 8, pelas suas características de simetria, ortogonalidade e suavidade. Nesta representação utilizou-se a *Wavelet Toolbox* do MATLAB versão 2012b.

Segundo a definição de transformada discreta com onduletas, o nível máximo de decomposição é, neste caso, 12 já que há  $2^{12} = 4096$  observações. Como o nível de decomposição ideal também está dependente da forma, amplitude e frequência do sinal e do tipo de informação que pretendemos obter com a transformada de onduletas, nesta análise inicial realizou-se uma decomposição baseada na transformada discreta com onduletas considerando 6 níveis de decomposição.

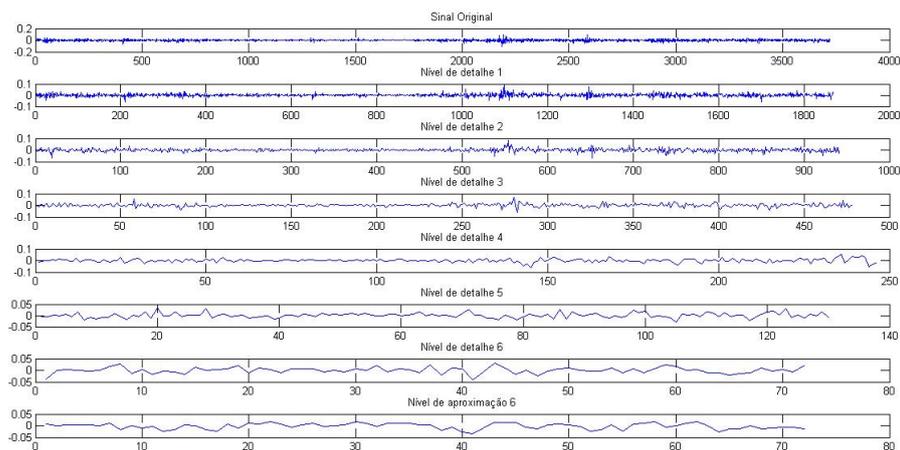


Figura 4.7: Coeficientes onduleta associados ao índice PSI 20

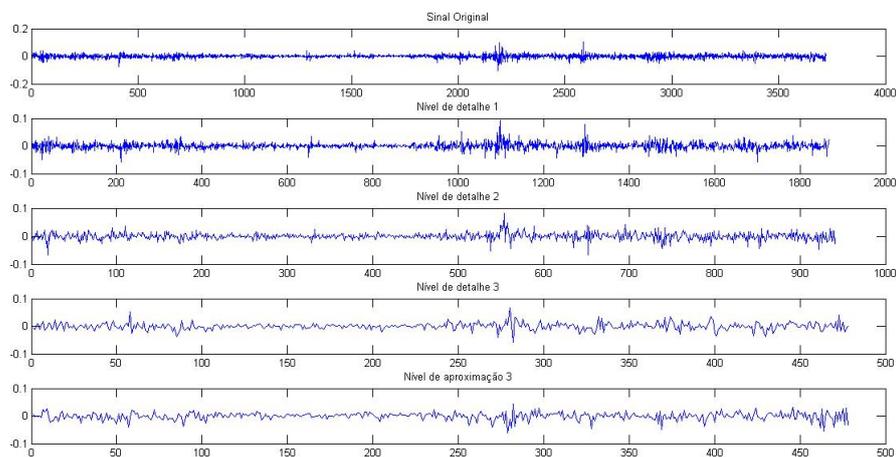


Figura 4.8: Coeficientes onduleta associados ao índice PSI 20 para os primeiros três níveis

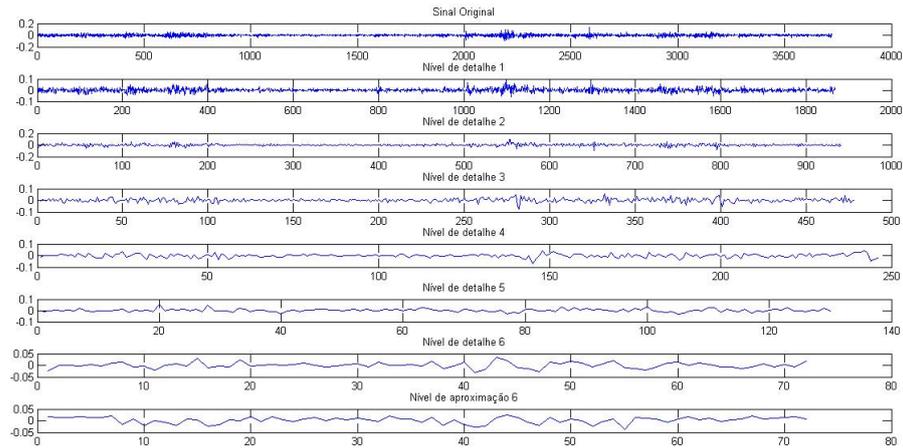


Figura 4.9: Coeficientes onduleta associados ao índice IBEX 35

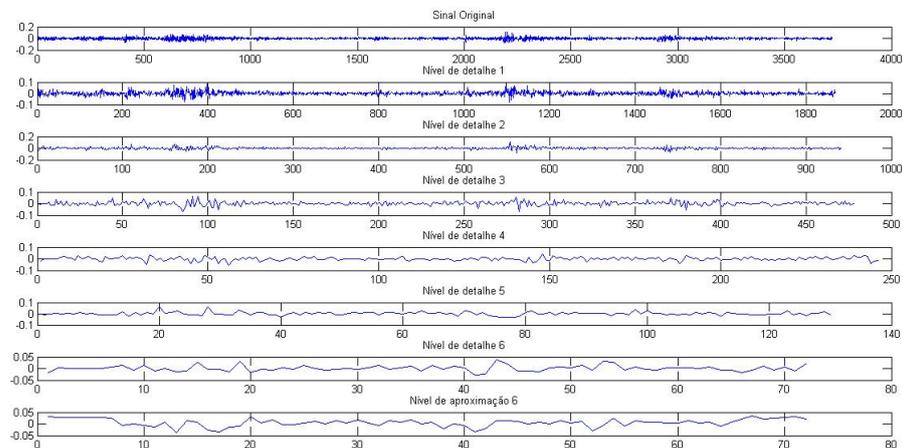


Figura 4.10: Coeficientes onduleta associados ao índice DAX 30

As séries de rendimentos irão ser analisadas relativamente às suas variações. Na Figura 4.7, o primeiro gráfico diz respeito aos rendimentos do PSI 20 contém, por isso, a mesma informação da Figura 4.1. Os seis gráficos seguintes referem-se aos coeficientes de detalhe  $d_1, d_2, \dots, d_6$  e o último aos coeficientes de aproximação  $a_6$ . O mesmo se aplica às Figuras 4.9 e 4.10 referentes aos rendimentos dos índices IBEX 35 e DAX 30, respetivamente. A Figura 4.8 apresenta uma decomposição dos rendimentos do índice PSI 20 para os primeiros níveis, tornando assim a informação da Figura 4.7 mais visível. O primeiro nível de detalhe,  $d_1$ , permite averiguar as flutuações nas frequências elevadas observando as diferenças em dias adjacentes. Existem rendimentos com flutuações rápidas entre as observações 1000 e 1200 e entre as observações 1200 e 1400 dizendo respeito aos períodos 2008 e 2010 referidos anteriormente. Relativamente a  $d_2$  e  $d_3$  observamos

flutuações essencialmente entre as observações 500 e 600 correspondentes a 2008. Os últimos níveis de detalhe,  $d_5$  e  $d_6$  não exibem grandes variações de zero, ou seja, os rendimentos associados ao PSI 20 exibem poucas oscilações de frequência baixa.

A maior volatilidade dos rendimentos associados aos índices DAX 30 e IBEX 35 é claramente confirmada nas flutuações de elevada frequência correspondentes a  $d_1$  e  $d_2$ . Repare-se que para os primeiros nível de detalhe há maiores flutuações no eixo vertical, ou seja, há maior ruído, do que o observado para os rendimentos associados ao índice PSI 20. De realçar ainda que, nos rendimentos associados aos índices DAX 30 e IBEX 35,  $d_2$  apresenta maiores oscilações do que  $d_1$ .

Todos os índices apresentam um aumento de volatilidade no ano 2008. Esta alteração brusca é detectada com melhor precisão nos primeiros níveis de detalhe,  $d_1$  e  $d_2$ , uma vez que são os que possuem melhor resolução. Como os rendimentos dos índices não possuem uma tendência óbvia, constituem antes uma trajetória bastante irregular, os coeficientes de aproximação não são grandes reveladores de informação.

# Capítulo 5

## Correlação

Uma análise cuidada da série dos rendimentos de um índice bolsista e da correlação existente entre os rendimentos de diversos índices, é de extrema importância ao nível das finanças tendo um impacto significativo na afetação de recursos e na gestão de risco. De facto, a abordagem com onduletas possui um carácter inovador neste tema, e de extrema relevância neste campo de estudo já que tem em conta que o mercado financeiro é constituído por investidores individuais e grandes instituições financeiras que atuam em conjunturas diferentes. Os investidores individuais fazem mudanças rápidas com pequeno impacto, já as grandes instituições financeiras reagem de forma mais lenta mas com grande impacto. Enquanto para os primeiros interessa a correlação existente em elevadas frequências, ou seja, as flutuações de curto-prazo, para os segundos a análise de baixas frequências é a mais relevante, ou seja, as flutuações de longo-prazo. A análise com onduletas permite estudar a força da correlação em diferentes frequências e como esta força tem evoluído ao longo do tempo. É possível identificar regiões no espaço tempo-frequência onde a correlação é maior e os benefícios de uma diversificação de carteira são menores em termos de gestão de risco. Se o nível de correlação entre índices varia ao longo da frequência, o risco para cada tipo de investidor também será diferente. Deste modo, os resultados obtidos com esta análise constituem informação relevante para a estratégia de investimento de diversos agentes económicos.

Os estimadores usando a transformada discreta de máxima sobreposição são considerados assintoticamente mais eficientes do que os estimadores calculados usando a transformada discreta com onduleta (Percival [19]). Por esta razão, a análise de correlação realizada é baseada na transformada discreta de máxima sobreposição.

### 5.1 Análise de correlação usando onduletas

Uma propriedade importante da transformada com onduletas é a sua capacidade de decompôr a variância de um processo estocástico.

A decomposição da variância da onduleta no espaço tempo-frequência permite captar melhor a informação de baixa frequência. O processo em estudo pode ser composto

por diversos processos simples que possuem diferentes horizontes temporais, como por exemplo, o facto referido anteriormente dos mercados financeiros onde os investidores individuais fazem mudanças rápidas de pequeno impacto e as grandes instituições financeiras reagem mais devagar mas induzem mudanças maiores. A interação destes processos, que reagem em escalas diferentes, leva a uma série complicada de observar. A variância da onduleta permite ter em conta os diferentes horizontes temporais revelando sub séries mais simples.

Os vetores dos coeficientes que resultam da decomposição do sinal com a transformada com onduletas estão associados a uma determinada escala, como já foi referido anteriormente em (3.12) (por exemplo, os coeficientes  $w_{j,t}$  referentes ao nível  $j$  estão associados com a escala  $\lambda_j = 2^{j-1}$ ).

Sendo  $x_t$  um processo estocástico (estacionário ou não estacionário), a variância da onduleta (dependente do tempo) define-se à custa da variância do coeficiente  $\omega_{j,k}$  de escala  $\lambda_j$ , através da seguinte fórmula

$$\sigma_{x,k}^2(\lambda_j) = \frac{1}{2\lambda_j} \text{Var}(\omega_{j,k})$$

A variância da onduleta decompõe a variância de  $x_t$ , escala a escala, através de

$$\sum_j \sigma_x^2(\lambda_j) = \text{Var}(x_t)$$

Consideremos  $N = 2^J, J \in \mathbb{N}$  e uma realização do processo estocástico  $x_t, x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ . Aplicando a transformada discreta com onduletas, de ordem  $J_P \leq J$ , de modo a obter um vetor de coeficientes  $w$ , com  $N$  componentes, podemos obter um estimador cêntrico para a variância da onduleta dado por

$$\hat{\sigma}_x^2(\lambda_j) = \frac{1}{2\lambda_j \hat{N}_j} \sum_{k=L'_j}^{\frac{N}{2^j}-1} w_{j,k}^2$$

em que  $L'_j = [(L-2)(1-2^{-j})]$  e  $\hat{N}_j = \frac{N}{2^j} - L'_j$ , sendo  $L$  a largura do filtro (ver Gençay, Selçuk e Whitcher [10]).

Considerando um valor arbitrário  $N$ , não necessariamente numa escala diádica, podemos aplicar a transformada discreta de máxima sobreposição, de ordem  $J_P < \log_2(N)$  obtendo um vector  $\tilde{w}$  com coeficientes de onduletas de tamanho  $(J_P + 1)N$ . Um estimador cêntrico da variância com onduleta, baseado na transformada discreta de máxima sobreposição é dado por

$$\tilde{\sigma}_x^2(\lambda_j) = \frac{1}{\tilde{N}_j} \sum_{k=L_j-1}^{N-1} \tilde{w}_{j,k}^2 \quad (5.1)$$

## 5.1. ANÁLISE DE CORRELAÇÃO USANDO ONDULETAS

em que  $L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$  é a largura do filtro onduleta de escala  $\lambda_j$  e  $\tilde{N}_j = N - L_j + 1$ .

Para analisar como estão relacionadas as séries financeiras pode-se usar a covariância e a correlação. Vamos agora considerar generalizações multivariadas da variância da onduleta. Para isso, vamos considerar a covariância com onduleta e a correlação com onduleta para comparar duas séries.

A covariância com onduleta é a covariância entre os coeficientes de onduleta, relativos à escala  $\lambda_j$ , de uma série temporal bivariada. Do mesmo modo, a correlação com onduleta é a correlação entre os coeficientes da onduleta da escala  $\lambda_j$  de uma série temporal bivariada.

Seja  $X_t = (x_{1,t}, x_{2,t})$  um processo estocástico bivariado e  $w_{j,k} = (w_{1,j,k}, w_{2,j,k})$  os coeficientes de onduleta, relativos à escala  $\lambda_j$  e calculados a partir de  $X_t$ . A covariância com onduleta relativa a  $(x_{1,t}, x_{2,t})$  para a escala  $\lambda_j$  é definida como

$$\gamma_X(\lambda_j) = \frac{1}{2\lambda_j} Cov(\omega_{1,j,k}, \omega_{2,j,k}).$$

Tal como para a variância da onduleta relativa a processos univariados, a covariância com onduleta decompõe a covariância entre dois processos estocásticos escala a escala.

$$\sum_j \gamma_X(\lambda_j) = Cov(x_{1,t}, x_{2,t}).$$

Um estimador cêntrico da covariância com onduleta, baseado na transformada discreta com onduletas de máxima sobreposição  $\tilde{w}_{j,l} = (\tilde{w}_{1,j,l}, \tilde{w}_{2,j,l})$ , é dado por

$$\tilde{\gamma}_X(\lambda_j) = \frac{1}{\tilde{N}_j} \sum_{l=L_j-1}^{N-1} \tilde{w}_{1,j,l} \tilde{w}_{2,j,l} \quad (5.2)$$

onde  $\tilde{N}_j = N - L_j + 1$ . Esta medida pode ser interpretada como a covariância entre os coeficientes da escala  $j$  das séries  $x_{1,t}$  e  $x_{2,t}$ . Em alguns casos pode ser útil normalizar a covariância com onduleta pela variância. Tal leva a outra medida estatística, baseada na covariância com onduleta, que é a correlação com onduleta, definida por

$$\rho_X(\lambda_j) = \frac{\gamma_X(\lambda_j)}{\sigma_1(\lambda_j)\sigma_2(\lambda_j)},$$

em que  $\sigma_1^2(\lambda_j)$  e  $\sigma_2^2(\lambda_j)$  são, respetivamente, as variâncias da onduleta para  $x_{1,t}$  e  $x_{2,t}$  associadas à escala  $\lambda_j$ .

Como a correlação com onduleta é calculada a partir da covariância com onduleta para  $X_t = (x_{1,t}, x_{2,t})$  e das variâncias da onduleta para  $x_{1,t}$  e  $x_{2,t}$ , um estimador cêntrico para a correlação com onduleta, baseado na decomposição da transformada discreta com

onduletas de máxima sobreposição é dado por

$$\tilde{\rho}_X(\lambda_j) = \frac{\tilde{\gamma}_X(\lambda_j)}{\tilde{\sigma}_1(\lambda_j)\tilde{\sigma}_2(\lambda_j)}$$

em que  $\tilde{\sigma}_1(\lambda_j)$  e  $\tilde{\sigma}_2(\lambda_j)$  são dados por (5.1) e  $\tilde{\gamma}_X(\lambda_j)$  é dado por (5.2).

Os intervalos de confiança para a correlação com onduleta podem ser dados por

$$\left[ \tanh \left( h(\tilde{\rho}_X(\lambda_j)) - \frac{\Phi^{-1}(1-p)}{\sqrt{N_j-3}} \right), \tanh \left( h(\tilde{\rho}_X(\lambda_j)) + \frac{\Phi^{-1}(1-p)}{\sqrt{N_j-3}} \right) \right]$$

fornecendo uma aproximação para o intervalo de confiança a  $100(1-2p)\%$ . A função  $h(\rho) = \tanh^{-1}(\rho) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+\rho}{1-\rho} \right)$  define a transformada-z de Fisher e  $N_j$  é o número de coeficientes de onduleta associados à escala  $j$ , usando a transformada discreta com onduletas.

## 5.2 Resultados empíricos

Tratando-se de informação diária, na análise de correlação o tratamento de dados exigiu que se tivesse em conta as diferenças entre os dias de funcionamento dos mercados financeiros, de modo a que todas as observações fossem referentes à mesma data para cada série. Apresenta-se de seguida uma análise de correlação entre os três índices em estudo utilizando a onduleta *symlet* de dimensão 8 pelas propriedades de simetria e suavidade que lhe estão associadas. Recorreu-se ao *software* R versão 3.0.2, package *Wavemulcor*.

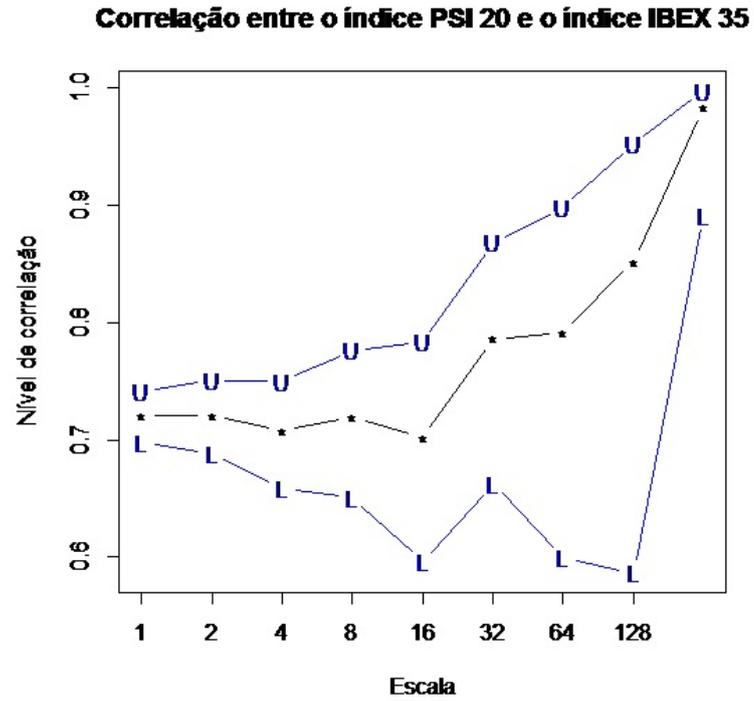


Figura 5.1: Análise de correlação entre os índices PSI 20 e IBEX 35

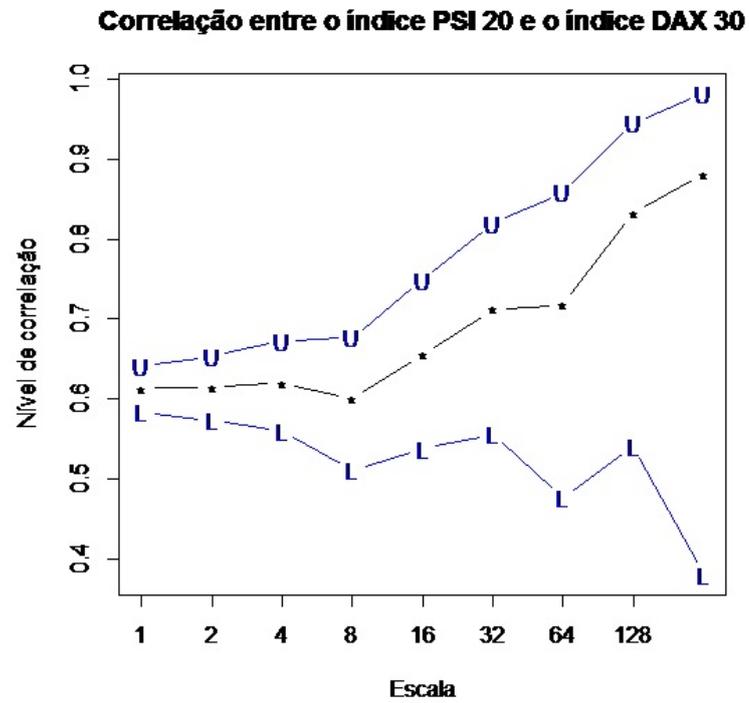


Figura 5.2: Análise de correlação entre os índices PSI 20 e DAX 30

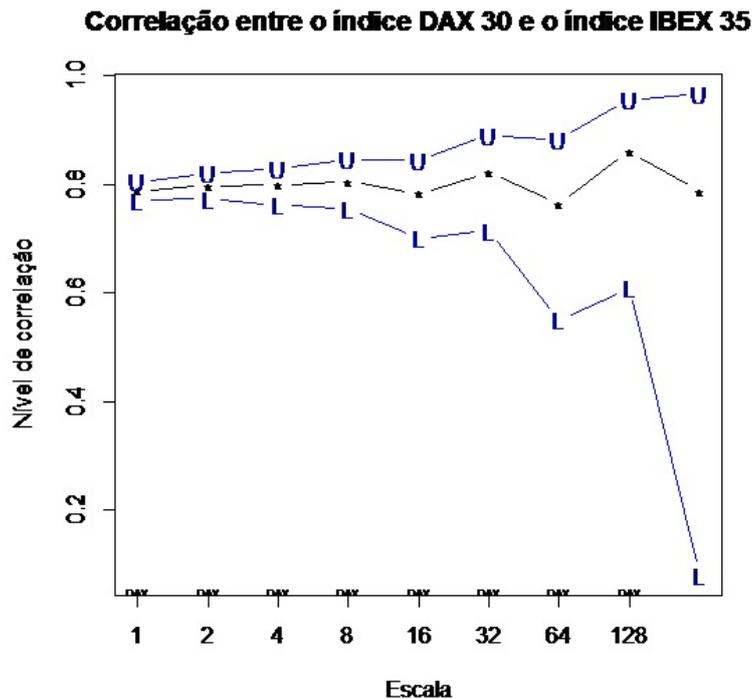


Figura 5.3: Análise de correlação entre os índices IBEX 35 e DAX 30

O eixo horizontal corresponde à escala. O eixo vertical indica o nível de correlação. Um valor em módulo baixo (alto) corresponde a uma relação fraca (forte).

Os três gráficos demonstram como os rendimentos dos três índices em estudo se encontram positivamente bem relacionados. Observa-se em todas as figuras níveis de correlação superiores a 0.5. Consideramos que se trata de um resultado natural por variadas razões, entre as quais, o facto destes três países pertencerem à União Europeia e, em particular, à Zona Euro.

Realizando uma análise comparativa dos três gráficos, observa-se, de uma forma geral, uma crescente correlação com a escala, ou seja, as diferenças entre observações adjacentes parecem possuir menor correlação. Só no caso da análise para a Espanha e Alemanha, representada na Figura 5.3, é que esta tendência não é tão óbvia. Aliás, o nível de correlação permanece quase constante para todas as escalas, havendo só dois picos nas escalas correspondentes a um mês e a meio ano.

De seguida apresenta-se uma tabela com os valores do coeficiente de correlação para cada par de índices calculado.

	PSI 20 - IBEX 35	PSI 20 - DAX 30	IBEX 35 - DAX 30
Dia	0.7202569	0.6132648	0.7882517
Semana	0.7072947	0.6195949	0.7979840
Mês	0.7019313	0.6560086	0.7826263
Ano	0.8520774	0.8327415	0.8610876

Tabela 5.1: Coeficiente de correlação nas diferentes escalas

Da Tabela 5.1 podemos aferir várias conclusões. Para uma escala reduzida, correspondentes a 1 a 2 dias, o maior nível de correlação verifica-se para os índices IBEX 35 e DAX 30, já o menor nível de correlação observa-se entre os índices PSI 20 e DAX 30. Uma justificação possível para este resultado consiste na composição de cada índice em análise. O índice DAX 30 e IBEX 35 possuem uma dimensão semelhante, o primeiro possui 30 empresas e o segundo 35, já o índice PSI 20 contém um número consideravelmente inferior de empresas na sua composição. Para escalas elevadas, referentes a 1 ano, a diferença no nível de correlação não é muito significativa, de qualquer forma, os índices DAX 30 e IBEX 35, continuam a possuir um nível de correlação ligeiramente superior relativamente aos outros pares de índices em análise.

### 5.3 Análise de coerência

Para além da correlação com onduletas, existe uma medida capaz de detetar a relação existente entre duas séries no espaço tempo-frequência, a **coerência** com onduletas. Enquanto a primeira utiliza a transformada discreta com onduletas, a segunda utiliza a transformada contínua com onduletas.

Consideremos uma onduleta  $\psi$  e a sua transformada de Fourier,  $\hat{\psi}$ , isto é,  $\hat{\psi}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)e^{-ivx}dx$ . Tal como na análise de Fourier, existe uma transformada com onduletas inversa definida por

$$u(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{s,\tau}(x) W_u(s, \tau) \frac{d\tau ds}{s^2} \quad (5.3)$$

que permite recuperar o sinal original  $u(x)$  a partir da sua transformada com onduletas contínua (as expressões  $C_\psi$ ,  $W_u(s, \tau)$  e  $\psi_{s,\tau}$  são dadas respetivamente por (3.3), (3.9) e (3.10)).

No domínio das onduletas podemos definir algumas quantidades, uma delas é o **espectro** com onduletas que é definido por  $|W_u(s, \tau)|^2$ . Trata-se de uma quantidade que mede a contribuição relativa, em cada momento e para cada escala, para a variância da série temporal. O espectro com onduletas pode ser integrado de modo a obter a variância

do sinal de acordo com

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_u(s, \tau)|^2 \frac{d\tau ds}{s^2}.$$

Podemos igualmente definir o **espectro cruzado** com onduletas. Dadas duas séries temporais  $a_t$  e  $b_t$ , designemos por  $W_a(s, \tau)$  e  $W_b(s, \tau)$  as suas transformadas contínuas com onduletas, o espectro cruzado com onduletas é dado por  $W_{ab}(s, \tau) = W_a(s, \tau)W_b(s, \tau)$ . A coerência pode ser definida por

$$R^2(s, \tau) = \frac{|S(s^{-1}W_{ab}(s, \tau))|^2}{S(s^{-1}|W_a(s, \tau)|^2) \cdot S(s^{-1}|W_b(s, \tau)|^2)},$$

em que  $s^{-1}$  é usado para normalização do resultado e o operador  $S$  está definido a seguir. De facto, dependendo da onduleta usada temos uma expressão diferente para este operador. Assim, no caso da onduleta de Morlet, este operador é considerado relativamente à escala e ao tempo, sendo definido como

$$S(W) = S_{escala}(S_{tempo}(W(s, \tau)))$$

onde  $S_{tempo}(W) = \left( W(s, \tau) \times c_1^{-\frac{x^2}{2s^2}} \right)$  e  $S_{escala}(W) = (W(s, \tau) \times c_2\pi(0.6s))_n$  em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de normalização e  $\pi$  é a função retangular (ver Torrence e Webster [28]).

O valor de  $R^2(\tau, s)$  varia entre zero e um, com um valor alto (baixo) a indicar forte (fraca) relação. A coerência pode ser vista como um coeficiente de correlação ao longo do tempo e nas diferentes frequências.

A abordagem numérica da análise de coerência foi realizada no software R (versão 3.0.2), recorrendo ao package *Biwavelet* e utilizando a onduleta de Morlet. Uma das vantagens desta onduleta é a sua natureza complexa o que permite variabilidade.

Os mapas de coerência constituem boas ferramentas descritivas para analisar a estrutura de correlação entre duas séries. Apresenta-se de seguida os resultados obtidos.

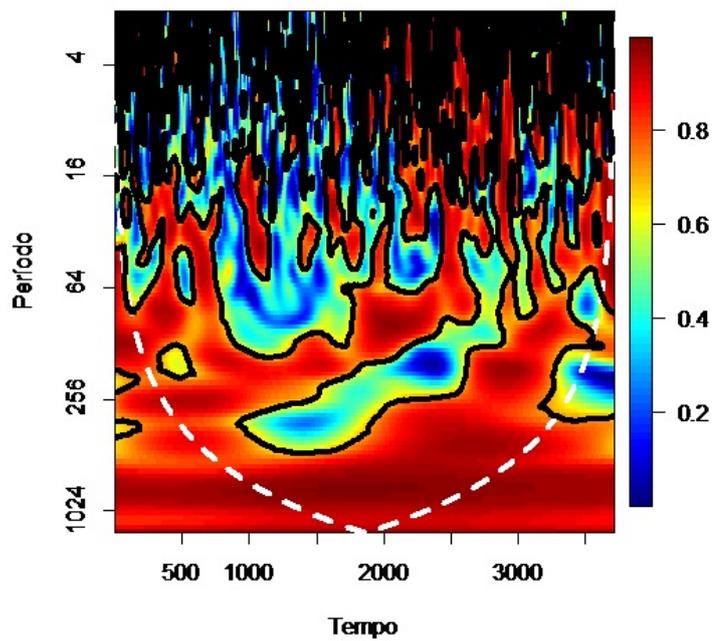


Figura 5.4: Coerência entre os índices PSI 20 e IBEX 35

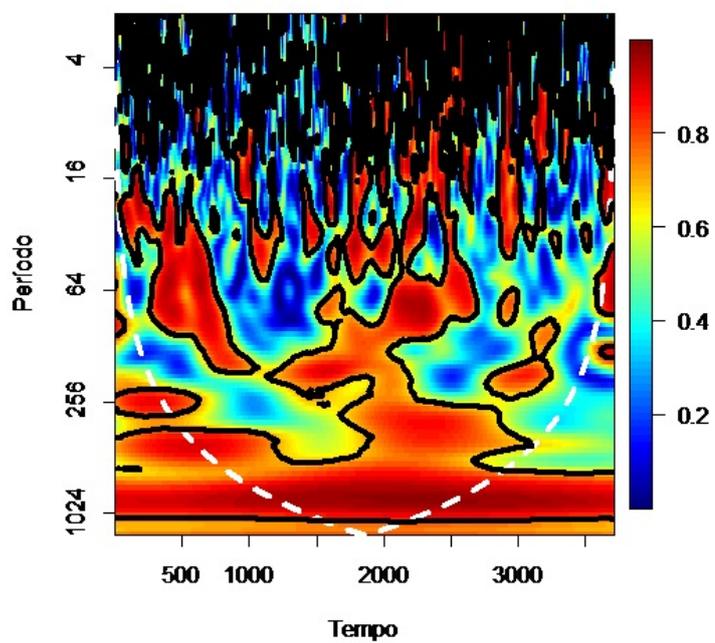


Figura 5.5: Coerência entre os índices PSI 20 e DAX 30

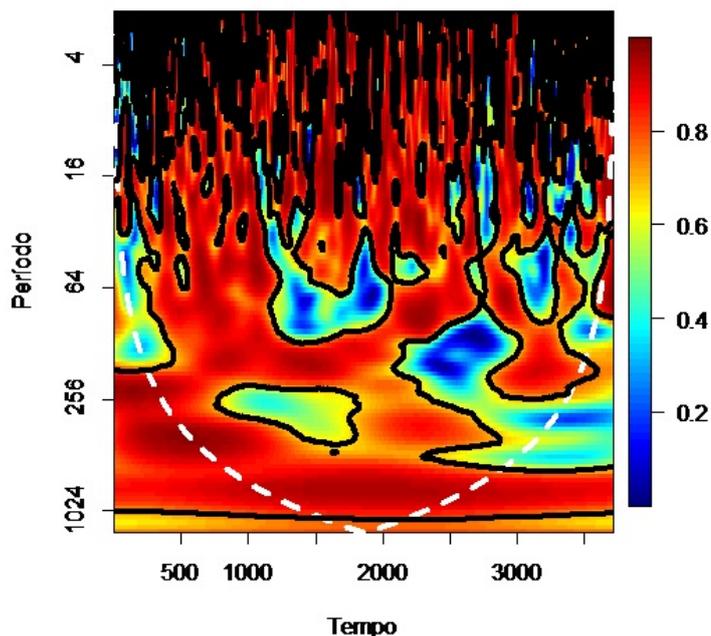


Figura 5.6: Coerência entre os índices IBEX 35 e DAX 30

O eixo horizontal diz respeito ao intervalo de tempo e o eixo vertical refere-se à frequência. A cor azul corresponde a um reduzido valor para a coerência, já a cor vermelha corresponde a um elevado valor para a coerência. Assim é possível identificar frequências e intervalos de tempo onde as duas séries se encontram relacionadas. Por exemplo, um tom vermelho no fundo (topo) do gráfico sugere comovimento forte em frequências baixas (altas) enquanto que um tom vermelho no lado esquerdo (direito) indicia forte comovimento no início (final) do período em análise.

Pela observação das Figuras 5.4, 5.5 e 5.6 pode-se concluir que existe uma tendência crescente de correlação com o período, ou seja, as relações são mais fortes e significativas nos movimentos de longo-prazo, flutuações com periodicidade de 1 a 3 anos. Comparando as relações entre os diferentes pares de índices considerados, conclui-se que os rendimentos dos índices DAX 30 e IBEX 35 se encontram mais relacionados, confirmando assim os resultados da análise de correlação realizada no ponto anterior.

Para analisar mais detalhadamente os efeitos da crise financeira de 2008 nos valores de correlação entre os rendimentos destes três índices bolsistas, realizou-se uma aproximação em cada um dos gráficos para períodos de 2 a 16 dias entre as observações 1500 e 2500 correspondentes ao período de 2006 a 2009. Os resultados são apresentados em Apêndice nas Figuras 4, 5 e 6. Nas Figuras 4 e 5, que apresentam, respetivamente, a

análise para os pares de países: Portugal e Espanha e Portugal e Alemanha, observa-se um tom próximo do vermelho no lado direito dos mapas, ou seja, verifica-se um aumento de correlação após a crise financeira mundial de 2008 (observação 2050). Esta forte correlação é reveladora do efeito de contágio deste fenómeno de instabilidade financeira (2008) vivido sobretudo nas economias mais desenvolvidas. Já a Figura 6 referente ao estudo da correlação entre Espanha e Alemanha, assiste-se a uma elevada correlação em toda a janela temporal e para qualquer período considerado.



# Capítulo 6

## Conclusões

Nesta dissertação realizou-se um estudo de três índices bolsistas baseado nas onduletas. Na decomposição de cada uma das séries utilizou-se três tipos de transformadas: a transformada discreta com onduleta, a transformada discreta com onduleta de máxima sobreposição e a transformada contínua com onduleta. Numa primeira análise estudou-se a decomposição de cada índice acionista num conjunto de coeficientes de detalhe e de aproximação. De seguida, realizou-se um estudo de correlação entre os três índices bolsistas em estudo. Numa análise inicial, baseada na transformada discreta de máxima sobreposição, comparou-se os valores do coeficiente de correlação para diferentes escalas para cada par de índices. Os elevados valores de correlação observados para qualquer escala considerada, justificam-se pela proximidade geográfica dos três países considerados para análise, bem como pelo facto de serem três países pertencentes à União Europeia. A análise de coerência complementou o ponto anterior permitindo analisar o coeficiente de correlação nas diferentes frequências e também ao longo do período considerado para análise. A crise de 2008 revelou uma crescente correlação particularmente entre os rendimentos dos índices PSI 20 e IBEX 35 e entre os rendimentos dos índices PSI 20 e DAX 30.

A análise com onduletas tem sido subvalorizada na área da Economia. Este trabalho alerta assim para a utilidade desta metodologia na análise de séries financeiras. É uma abordagem capaz detectar relações entre variáveis em diferentes frequências e como essa relação tem evoluído ao longo do tempo. Permite extrair informação relevante que com outra metodologia não seria possível. A sua flexibilidade bem como a sua capacidade de detalhar o que não está nítido numa observação inicial, demonstram o quão importante e promissora é esta abordagem. Explorou-se assim uma metodologia inovadora e que poderá vir a ter um papel relevante em muitos estudos económicos.



# Apêndice A

As figuras seguintes apresentam a evolução da cotação dos índices PSI 20, IBEX 35 e DAX 30, entre janeiro de 2000 e outubro de 2014.

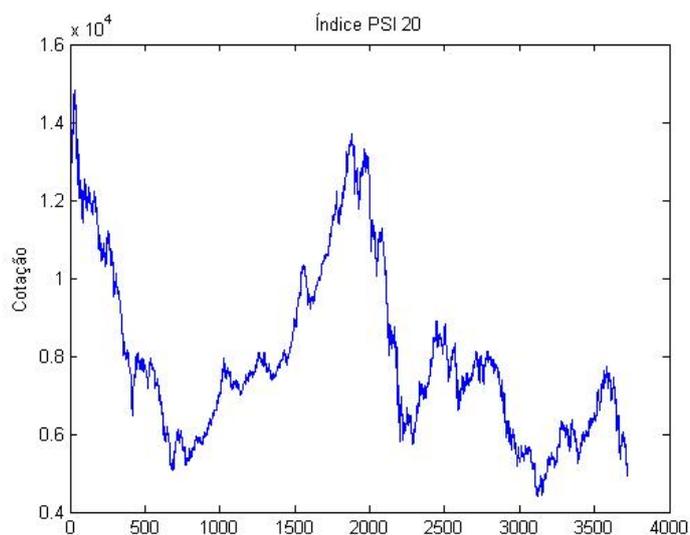


Figura 1: Trajetória do índice PSI 20

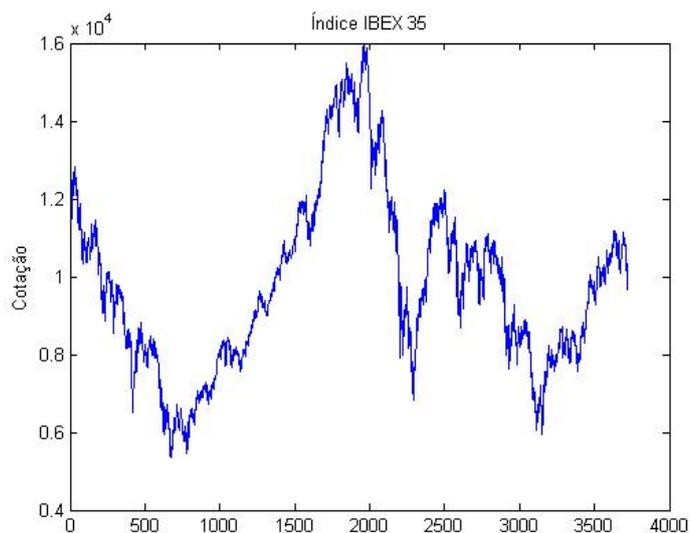


Figura 2: Trajetória do índice IBEX 35

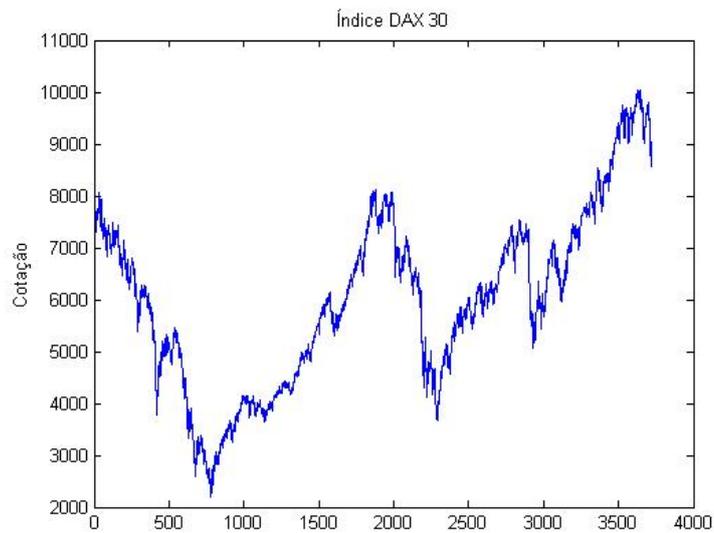


Figura 3: Trajetória do índice DAX 30

Apresenta-se, de seguida, as representações associadas a uma medida de coerência para cada par de índices, considerando um período de janeiro de 2006 a dezembro de 2009 para escalas de 2 a 16 dias.

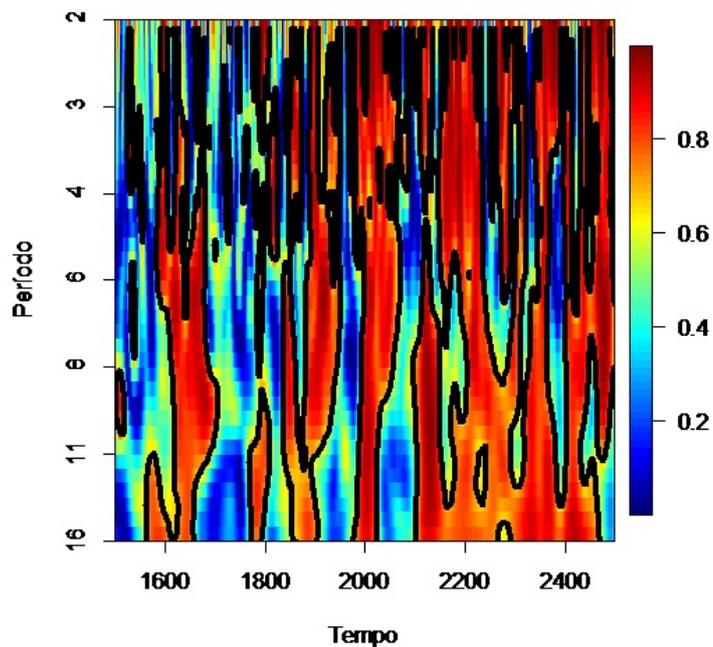


Figura 4: Aproximação da coerência entre os índices PSI 20 IBEX 35

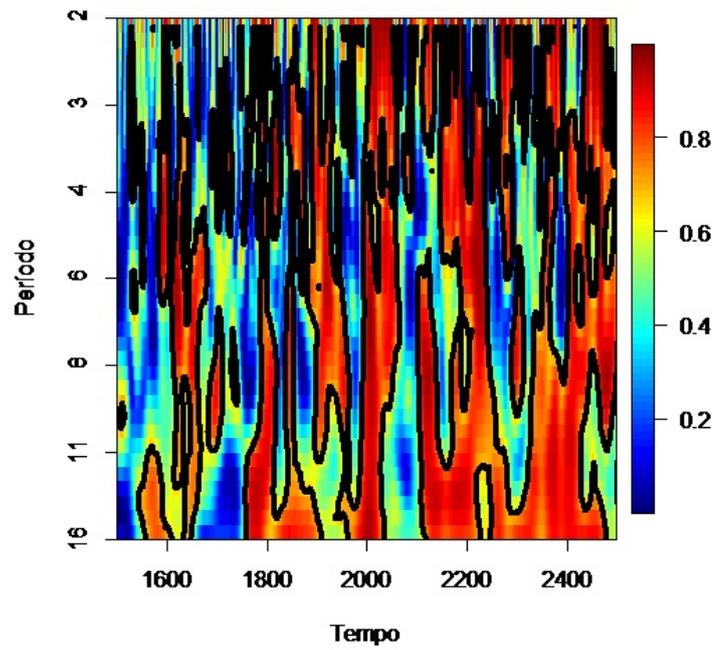


Figura 5: Aproximação da coerência entre os índices PSI 20 e DAX 30

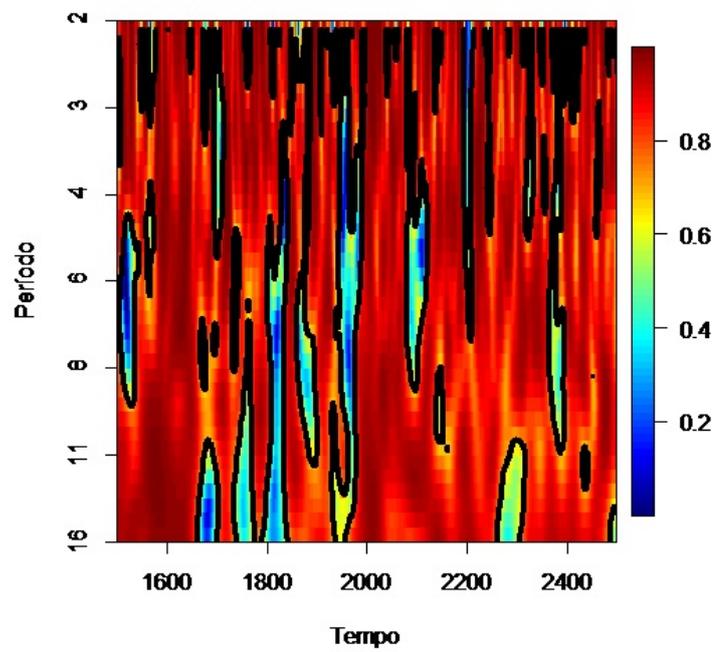


Figura 6: Aproximação da coerência entre os índices IBEX 35 e DAX 30



# Bibliografia

- [1] Aguiar-Conraria, L. e Soares, M. J., *The Continuous Wavelet Transform: moving beyond uni- and bivariate analysis*. Journal of Economic Surveys, 28:344-375, 2013.
- [2] Barunik, J. e Vacha, L., *Wavelet Analysis of Central European Stock Market Behaviour During the Crisis*. IES Working Paper 23/2009. IES FSV. Charles University.
- [3] Capobianco, E. *Wavelet Transforms for the statistical analysis of returns generating stochastic processes*. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 4:511-534, 2001.
- [4] Crowley, P. M., *An intuitive guide to wavelets for economists*. Research Papers, Bank of Finland, 1,2005.
- [5] Daubechies, I., *Orthonormal bases of compactly supported wavelets. II. Variations on a theme*. SIAM J. Math. Anal., 24:499-519, 1993.
- [6] Daubechies, I., *Ten lectures on wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.
- [7] Fernández-Macho, J., *Wavelet multiple correlation and cross-correlation: A multiscale analysis of euro zone stock markets*. phycica A 391:1097-1104, 2011.
- [8] Gabor, D., *Theory of Communication*. J. Inst. Elec. Eng. London, 93:429-457, 1946.
- [9] Gallegati, M., *Wavelet analysis os stock returns and aggregate economic activity*. Computational Statistics and Data Analysis, 52:3061-3074, 2008.
- [10] Gençay, R., Selçuk, S. e Whitcher, B., *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*. Academic Press, 2001.
- [11] Grossman, A. e Morlet, J., *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape*. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 15:723-736, 1984.

- [12] Haar, A., *Zur theorie der orthogonalen Funktionssysteme*. Mathematische Annalen, 69:331-71, 1910.
- [13] Jensen, A. e la Cour-Harbo, A., *Ripples in Mathematics: The Discrete Wavelet Transform*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
- [14] Kravets, T. e Sytienko, A., *Wavelet analysis of the crisis effects in stock index returns*. Ekonomika, 92:1258-1392, 2013.
- [15] Lee, H. S., *International transmission of stock market movements: a wavelet analysis*. Applied Economics Letters 11:197-201, 2004.
- [16] Mallat, S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*. 3rd edition, Academic Press, New York, 2008.
- [17] Mallat, S., *Multiresolution approximation and wavelet orthonormal basis of  $L^2(\mathbf{R})$* . Transactions of the American Mathematical Society, 315:69-87, 1989.
- [18] Meyer, Y., *Wavelets and operators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [19] Percival, D. B., *On Estimation of the Wavelet Variance*. Biometrika, 82:619-631, 1995.
- [20] Percival, D. B. e Walden, A. T., *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge University Press, 2000.
- [21] Ramsey, J. B., *The contribution of wavelets to the analysis of economic and financial data*. Volume Wavelets: the key to intermittent information, 221-236, OUP, 2000.
- [22] Ramsey, J. B., *Wavelets in Economics and Finance: Past and Future*. Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics 6:1558-3708, 2002.
- [23] Ranta, M., *Wavelet multiresolution analysis of financial time series*. Ph.D. thesis, University of Vaasa, Finland, Acta Wasaensia, 223, Statistics 5, 2010.
- [24] Rua, A., Nunes, L., *International Comovement of Stock Market returns: A Wavelet Analysis*. Journal of Empirical Finance, 16:632-639, 2009.
- [25] Stein, E. M. e Shakarchi, R., *Fourier Analysis: an Introduction*. Princeton University Press, 2003.

- [26] Tiwary, A. K., Dar, A. B., Bhanja, N. e Shah, A., *Stock Market Integration in Asian Countries: evidence from wavelet multiple correlation*. Journal of Economic Integration, 28:441-456, 2013.
- [27] Torrence, C. e Compo, G. P., *A Practical Guide to Wavelet Analysis*. Bulletin of the American Meteorological Society, 79:61-78, 1998.
- [28] Torrence, C. e Webster, P. J., *Interdecadal changes in the ENSO-monsoon system*. Bulletin of the American Meteorological Society, Journal of Climate, 12:2679-2690.
- [29] Vidakovic, B. e Mueller, P., *Wavelets for kids*. Institute of Statistics and Decision Sciences, Duke University Durham.
- [30] Vuorenmaa, T. A., *A wavelet analysis of scaling laws and long-memory in stock market volatility*. Bank of Finland Research Discussion Paper 27, 2006.
- [31] Walker, J. S., *Fourier Analysis*. Oxford University Press, 1988.